~~1975~~

ЗБІРНИК

СЕКЦИЇ

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛЇКАРСКОЇ

НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА ІМЕНИ ШЕВЧЕНКА.

Т. II.

ПІД РЕДАКЦИЄЮ

Івана Верхратского і Володимира Левицкого.

У ЛЬВОВІ, 1897.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З друкарнї Наукового Товариства імени Шевченка
під зарядом К. Беднарского.

ЗБІРНИК
СЕКЦИЇ
МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛЇКАРСКОЇ
НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА ІМЕНИ ШЕВЧЕНКА.

Т. II.

ПІД РЕДАКЦИЄЮ

Івана Верхратского і Володимира Левицкого.

У ЛЬВОВІ, 1897.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З друкарнї Наукового Товариства імени Шевченка
під зарядом К. Беднарского.

3р.

т. 2 1897

ЗМІСТ.

INHALT.

Рівнане пятого степеня

написав

КЛИМ ГЛЇБОВИЦКИЙ.

ВСТУП.

Великі успіхи, якими повіньчались розслїди італїйских математиків середних віків, як **Ferro'a**, **Tartagli-и**, **Cardano'a**, **Ferrari'oго** і и. в квестиї розвязки рівнань третого і четвертого степеня, навели їх на гадку, щоби сеї методи ужити і до розвязки висших рівнань, а передовсїм до розвязки рівнань пятого степеня. Та минуло яких сто лїт, а справа не посунулась анї троха вперед. Правда, в роцї 1683. подав **Tschirnhaus** в розвідцї „Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data equatione" новий метод, який в спосіб незвичайно легкий веде до розвязки рівнаня другого та третого степеня, однак вже при рівнанях біквадратних жадає много роботи, а вже при рівнаню пятого степеня не дає ся пристосувати; тому-то Tschirnhaus не силував ся свого методу стосувати до сих рівнань, а лиш — як тодї було звичайом — індукцийно доказав правдивість свого твердженя. В XVIII. столїтю справа ся виринає на ново; підносять єї так знамениті мужі, як **Euler**, **Bézout**, **Lagrange**, **Vandermonde** та **Malfatti**, однак безуспішно. Закидувано твердженю Tschirnhaus'a лож, бо хоча резольвента 24. степеня, до якої провадив метод Tschirnhaus'a, дала ся заступити резольвентою 6. степеня, однак дальша редукция була вже неможлива, а проте ставалась неможлива розвязка рівнаня пятого степеня.

В виду того починає виринати гадка, що рівнанє пятого степеня альґебраїчно розвязати ся не дасть, а перший, що підніс сю гадку, був італїйский математик Ruffini. Однак його розвідка в сїй квестиї[1]) є так тяжка та скомплїкована, що тяжко сказати, чи ті конклюзиї є всї правдиві, чи нї. Квестию сю підняв на ново Abel, один з найбільших математиків усїх часів. Заложив він — що було одиноко рацийональне — що всї рівнаня пятого степеня можна альґебраїчно розвязати, і як раз се заложенє довело його до висліду, що рівнаня загальні, яких степень є висший як четвертий, не мають розвязки альґебраїчної. Однак доказ сей не видавав ся йому самому зовсїм простий, тому-то вже два роки пізнїйше 1826. р. подав[2]) він новий доказ, що є вже більше простий та ясний.

Та всеж таки довгий час єще тревала у деяких математиків віра, що рівнанє пятого степеня можна розвязати; навіть такий математик як Hamilton не хотїв признати доказу Abel'a. Та Abel'ови годї вже було доказ свій представити в виді зовсїм ясним та зрозумілим, бо вже в 27. роцї житя зійшов з того сьвіта; се зробили Wantzel та Kronecker.

Рівночасно з Abel'ом підняв квестию рівнаня пятого степеня 20. лїтний незвичайно остроумний Galois та доказав, що з поміж рівнань неприводних дадуть ся альґебраїчно лиш ті розвязати, що мають таке свойство, що всї коренї дадуть ся рационально представити через якінебудь два із тих коренів; загальні же рівнаня альґебраїчно розвязати ся не дадуть, як се слїдно при помочи теориї ґруп. Та наколи докази Abel'a не є прозорі, то тим менше можна се сказати про докази Galois'a, бо він найтруднїйші дослїди подавав в формі дуже короткій, а часто і без доказу; та не стало йому і часу на близші поясненя, бо помер єще скорше як Abel в 21. роцї житя.

Колиж отже доказано, що рівнаня загальні альґебраїчно розвязати ся не дадуть, лишала ся квестия, як — хоча і неальґебраїчно — розвязати рівнанє пятого степеня. Зробив се Hermite 1858. р., та зовсїм независимо від него Kronecker, при помочи функций елїптичних.

В нинїшнїй розвідцї подано всї ті розслїди та змаганя, та іменно в першій части поданий є доказ Abel'a та доказ Galois'a, в другій части є представлені дослїди Hermite'a.

---

[1]) Teoria generale delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto. Bologna 1799.

[2]) Crelle's Journal т. I. p. 66.

ЧАСТЬ ПЕРША.

Досліди Abel'a.[1]

1. Возьмім скінчене число яких-небудь величин:

$$x_1\ x_2 \cdots x_n,$$

і най p', p'', ---- будуть рациональними функциями тих величин, то:

$$p_1 = f(x_1\ x_2, \cdots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''}, \cdots),$$

f функция рациональна, а n', n'', ---- числа перві — то p_1 називати ся ме функциєю альґебраічною першого ряду,

$$p_2 = f(x_1\ x_2, \cdots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''}, \cdots \sqrt[n_1']{p_1'}, \sqrt[n_1'']{p_1''}, \cdots)$$

є функция альґебраічна другого ряду і т. д.

Загально функция альґебраічна μ-того ряду має вид:

$$v = f(r'\ r'' \cdots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''}, \cdots),$$

де p' p'', ---- є функциї ряду $(\mu-1)$, а r' r'', ---- є функциї ряду $(\mu-1)$, або і нисшого.

Очевидно, що нїяка з величин $\sqrt[n']{p'}$, $\sqrt[n'']{p''}$, ---- не дасть ся представити рационально через иньші того самого виду, як і через r', r'', ----, бо тодї число тих $\sqrt[n]{p}$ в функциї f зменшилоби ся о одиницю, і в сей спосіб через редукцию дійшлибисьмо до вираженя:

$$v = f(r', r'', \cdots),$$

що є ряду $(\mu-1)$, наколи v мало бути ряду μ.

Функция ряду μ дасть ся також написати:

$$v = f(r', r'', \cdots \sqrt[n]{p}),$$

де p є функция альґебраічна ряду $(\mu-1)$, а r', r'', ---- є функциями ряду μ, або і нисшого. А як кожда функция рациональна дає ся представити яко квот двох функций цїлковитих, то:

---

[1] Пор. Crelle's Journal loc. cit. т. I., Abel: Oeuvres complètes т. II. та Maser: Abhdlgn. ü. algebraische Auflösung der Glgn von Abel u. Galois.

$$v = \frac{t_0 + t_1 p^{\frac{1}{n}} + \cdots + t_m p^{\frac{m}{n}}}{v_0 + v_1 p^{\frac{1}{n}} + \cdots + v_{m'} p^{\frac{m'}{n}}} = \frac{T}{V},$$

де T і V є рациональні цїлї функциї. Помножім чисельник і знаменник через $V_1, V_2, \cdots V_{n-1}$, де ті V_s представляють $(n-1)$ вартостий функциї V, наколи в нїй за $p^{\frac{1}{n}}$ положимо $\alpha^s p^{\frac{1}{n}}$ $(s=1 \cdots n-1)$, де α є первісний корень рівнаня $\alpha^n - 1 = 0$, то дістанемо:

$$v = \frac{T V_1 V_2 \cdots V_{n-1}}{V V_1 V_2 \cdots V_{n-1}}.$$

Знаменник є цїлковита рациональна функция величин $r', r'' \cdots$ і p, а чисельник функция цїлковита величин $r', r'', \cdots p^{\frac{1}{n}}$, проте:

$$v = \bar{q}_0 + \bar{q}_1 p^{\frac{1}{n}} + \bar{q}_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + \bar{q}_r p^{\frac{r}{n}},$$

де $\bar{q}_0\ \bar{q}_1, \cdots \bar{q}_r$ є рациональні функциї величин $p, r', r'', \cdots$, що дасть ся єще через підставлене $\mu = an + \alpha$ (a і α числа цїлї) — чого не перепроваджуємо — привести до виду:

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \qquad 1)$$

де $p^{\frac{1}{n}}$ не дасть ся рационально представити через $p, q_0, q_2 \cdots q_{n-1}$.

2. Приймім, що виражене:

$$y = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \qquad 2)$$

сповняє рівнанє:

$$c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots + c_r y^r = 0, \qquad 3)$$

яке по вставленю y перейде на:

$$r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0, \qquad 4)$$

де r_s є рациональні функциї, утворені з $p, q_0, q_1, q_2, \cdots q_{n-1}$.

Рівнанє 4) сповняє ся однак лиш для

$$r_0 = r_1 = r_2 = \cdots = r_{n-1} = 0,$$

бо наколиби так не було, то положивши $p^{\frac{1}{n}} = z$ дістанемо рівнанє:

$$z^n - p = 0, \qquad 5)$$

яке з рівнанєм 4) має що найменше один корень спільний.

Наколи рівнаня 4) і 5) мають k коренів спільних, то можна утворити рівнанє степеня k, якого коренями є ті k коренїв, а якого сочинники є рационально утворені з p, q_0, q_1, $\cdots$ q_{n-1}; коли рівнанє се є:

$$s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \cdots + z^k = o, \qquad 6)$$

і оно є приводне, то наколи його розложимо на чинники неприводні, дістанемо один з них:

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots + z^\mu = o, \qquad 7)$$

де t_s є такі самі функциї, як s або r. Кромі сего бачимо, що $\mu \geqq 2$, бо інакше $p^{\frac{1}{n}} = z$ далоби ся рационально представити через p, q_0, q_1, $\cdots$ q_{n-1}, а се неможливо. Рівнанє 7) має μ коренїв спільних з 5), а що всї коренї рівнаня 5) мають вид:

$$p^{\frac{1}{n}},\ \alpha p^{\frac{1}{n}},\ \alpha^2 p^{\frac{1}{n}},\ \cdots\ \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} \qquad (\alpha^n + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha + 1 = 0),$$

то 7) мусить ся сповнити для вартости αz, або:

$$t_0 + t_1 z\alpha + t_2 z^2 \alpha^2 + \cdots + z^\mu \alpha^\mu = 0 \qquad 8)$$

а з відси:

$$t_0 (1 - \alpha^\mu) + t_1 (\alpha - \alpha^\mu) z + \cdots + t_{\mu-1} (\alpha^{\mu-1} - \alpha^\mu) z^{\mu-1} = 0. \qquad 9)$$

Се рівнанє має такий самий вид, як 7), а що 7) є неприводне, то 9) мусить бути ідентично зером, т. є.

$$t_0 (1 - \alpha^\mu) = 0;$$

$t_0 = o$, бо 7) є неприводне, отже мусїлоб $1 - \alpha^\mu = o$, а се неможливо, бо α є коренем первісним рівнаня $\alpha^n - 1 = 0$ ріжним від одиниці.

Мусить проте в рівнаню 4) бути:

$$r_0 = r_1 = r_2 = \cdots = r_{n-1} = o. \qquad 10)$$

3. На основі 10) сповняє ся рівнанє 4), наколи за $p^{\frac{1}{n}}$ будемо класти $\alpha^s p^{\frac{1}{n}}$ $(s = 0 \cdots n-1)$; дістанемо тодї ряд:

$$y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

$$y_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} \alpha^{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

……………………………………………………

а з відси:

$$q_0 = \frac{1}{n} (y_1 + y_2 + \cdots + y_n).$$

Наколи дальше помножимо y_2 через α^{n-1}, y_3 через α^{n-2}, ---- y_n через α, а опісля y_2 через α^{n-2}, y_3 через α^{n-3}, ---- дістанемо:

$$p^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(y_1 + \alpha^{n-1} y_2 + \cdots + \alpha y_n)$$

$$q_2 p^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}(y_1 + \alpha^{n-2} y_2 + \cdots + \alpha^2 y_n) \qquad 10')$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

а з відси буде можна кожду з величин $p^{\frac{1}{n}}$ q_0 q_2 ---- q_{n-1} виразити рационально через корені рівнаня 3).

Н. пр:

$$q_\mu p^{\frac{\mu}{n}} = \frac{1}{n}(y_1 + \alpha^{n-\mu} y_2 + \alpha^{n-2\mu} y_3 + \cdots + \alpha^{n-(n-1)\mu} y_n),$$

а з відси:

$$q_\mu = \frac{n^{\mu-1}(y_1 + \alpha^{-\mu} y_2 + \alpha^{-2\mu} y_3 + \cdots + \alpha^{-(n-1)\mu} y_n)}{(y_1 + \alpha^{n-1} y_2 + \alpha^{n-2} y_3 + \cdots + \alpha y_n)^\mu}.$$

Бачимо проте, що *наколи рівнане якесь дає ся альґебраічно розвязати, то на кождий корень рівнаня дістанемо вираженє таке, що кожда функция, яка входить в се вираженє, є рациональною функциєю коренів даного рівнаня* (I.)

4. Переходим тепер до другої части розслїдів Abel'a, себ-то до його розслїдів субституцийних.

Най v буде рациональна функция змінних независимих x_1 x_2 ---- x_n. Число всїх можливих пермутаций тих величин є μ. Наколи A_1 A_2 ---- A_μ є μ тих ріжних перемін, то всї можливі вартости функциї v представляє ряд:

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix},\ v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},\ \cdots\ v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_\mu \end{pmatrix}.$$

Може ся видарити, що функция v є менше чим μ — вартостева, т. є. що між повисшими підставленями є н. пр. m таких, що лишають вартість v без зміни, отже:

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \cdots = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix} \qquad 11)$$

Наколи ту возьмемо підставленє $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_{m+1} \end{pmatrix}$, дістанемо:

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_{m+1} \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_{m+2} \end{pmatrix} = \cdots = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_{2m} \end{pmatrix}.$$

Наколи підемо так дальше, доки не возьмемо всїх підставлень, дістанемо ρ ріжних рядів по m рівних вартостий, т. є число всїх вартостий функциї v є $\mu=\rho m$.

Звідси слїдує твердженє (II.):

Число вартостий, які функция n величин через всї пермутациї тих величин може дістати, є подїльником добутка n'.

5. Наколи підставленє $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}$ дає через інтерацию ряд вартостий:

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^0, v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^1, v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^2, \cdots v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{p-1}, v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^0,$$

а p є найбільше число перве менше від n, то наколи число тих ріжних вартостий v є менше як p, то тодї між тими p вартостями якесь:

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^r = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{r'}, \qquad \text{а з відси:}$$

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{r+p-r} = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{r'+p-r}$$

а як:
$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^p = v, \qquad \text{то:}$$

$$v = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^s, \qquad s=r'+p-r;$$

позаяк p є число перве, то дасть ся утворити рівність:

$$s\alpha - p\beta = 1,$$

$$v = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{p\beta+1}, \qquad \text{отже:}$$

$$v = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix},$$

т. є. вартість функциї v не зміняє ся через наворотне (recurrent) підставленє ряду p, а проте не змінить ся, наколи пристосуємо два такі підставленя ряду p_1 утворені з тих самих букв н. пр.:

$$\begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \cdots\cdots \xi\,\eta \\ \beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon \cdots\cdots \eta\,\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad \begin{pmatrix} \beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon \cdots\cdots \eta\,\alpha \\ \gamma\,\alpha\,\beta\,\delta \cdots\cdots \xi\,\eta \end{pmatrix}$$

Ті оба підставленя можна заступити через підставленє $\begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \\ \gamma\,\alpha\,\beta \end{pmatrix}$, а що підставленє з трох букв дасть ся представити через дві переставки (транспозициї), проте v не змінить ся, наколи до него пристосуємо паристе число переставок; а наколи так, то знова всї вартости v, як півстали через ужитє непаристого числа переставок, є між собою рівні. Позаяк далї кожде підставленє дає ся заступити через певне число переставок, проте v є що найбільше двовартостеве, а проте вид його, як усїх функций двовартостевих, є:

$$\varphi = S + S_1 \sqrt{\Delta^2},$$

де S і S_1 є функциї симетричні, а Δ є дискрімінантом величин $x_1\ x_2 \cdots x_n$:

$$\Delta = (x_1 - x_2)\ (x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)\ (x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n) \cdots (x_{n-1} - x_n).$$

Звідси слїдує:

Число ріжних вартостий, які функция n величин може принимати, не може бути менше, як найбільше число перве менше від n, так як в противнім разї зведе ся до 2, або до 1. (III.)

Не ма проте функциї 5 величин, яка би мала 3 або 4 вартости.

6. Пошукаймо тепер загального виду пятивартостевої функциї пятьох величин.

Найже v буде функция 5 величин x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, яка не зміняє вартости при переміні величин x_2, x_3, x_4, x_5. Яко функция симетрична тих величин дасть ся представити рационально через сочинники рівнаня:

$$(x - x_2)\ (x - x_3)\ (x - x_4)\ (x - x_5) = x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s,$$

але:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e,$$

з відси:

$$a = p + x_1,\quad b = q + px_1,\quad c = r + qx_1,\quad d = s + rx_1,\quad e = sz_1,$$

отже:

$$p = a - x_1$$
$$q = b - ax_1 + x_1{}^2$$
$$r = c - bx_1 + ax_1{}^2 - x_1{}^3$$
$$s = d - cx_1 + bx_1{}^2 - ax_1{}^3 + x_1{}^4;$$

функция v дає ся проте представити рационально через x_1, a, b, c, d, e:

$$v = \frac{t}{\varphi(x_1)},$$

де t і $\varphi(x_1)$ є рациональні функциї x_1; утворім:

$$v = \frac{t\varphi(x_2)\ \varphi(x_3)\ \varphi(x_4)\ \varphi(x_5)}{\varphi(x_1)\ \varphi(x_2)\ \varphi(x_3)\ \varphi(x_4)\ \varphi(x_5)} = \overline{r}_0 + \overline{r}_1 x_1 + \cdots + r_m x_1{}^m \qquad 12)$$

де $\bar{r}_0\ \bar{r}_1 \cdots \bar{r}_m$ є рациональні функциї з огляду на a, b, c, d, e, бо знаменник є симетрична функция величин $x_1\ x_2 \cdots x_5$, а тим самим цїлковита функция сочинників a, b, c, d, e, а чисельник яко цїлковита функция p, q, r, s є функция цїлковита величин x_1, a, b, c, d, e.

При помочи рівнаня:

$$x_1^5 = ax_1^4 - bx_1^3 + cx_1^2 - dx_1 + e \qquad 13)$$

можна привести v до виду:

$$v = r_0 + r_1x_1 + r_2x_1^2 + r_3x_1^3 + r_4x_1^4 \qquad 14)$$

бо наколи помножимо x_1^5 постепенно через x_1, x_1^2, $\cdots x_1^{m-5}$, дістанемо (m - 4) рівнань, з яких на x_1^5, x_1^6, $\cdots$ x_1^m дістанемо вираженя виду:

$$\alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 + \delta x_1^3 + \varepsilon x_1^4.$$

Сочинники $r_0\ r_1 \cdots$ в вираженю 14) є рациональні з огляду на a, b, c, d, e, а тим самим симетричні з огладу на $x_1\ x_2 \cdots x_5$. Само v є симетричне що до $x_2\ x_3\ x_4\ x_5$, а що яко функция пятьох величин не може мати трох або чотирох вартостий, і що далї не є двовартостева, тому v може бути лиш або пятивартостева або симетрична.

7. Приймім проте, що маємо якусь функцию v, що має пять вартостий: $v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5$, і возьмім функцию $x_1^m v$. Наколи в нїй поміняти між собою x_2, x_3, x_4, x_5 на всї способи, то ся функция мусить мати оден з видів:

$$x_1^m v_1,\quad x_1^m v_2,\quad x_1^m v_3,\quad x_1^m v_4,\quad x_1^m v_5.$$

Но ті 5 вартостий не можуть бути усї ріжні, бо тодї наколибисьмо переміняли постепенно x_1 з $x_1\ x_2\ x_5\ x_4\ x_5$, дісталибисьмо функцию 5 величин, що має 25 вартостий, а се неможливе на основі твердженя (I.).

Число вартостий, які може v приняти, коли в нїй поміняти x_2, x_3, x_4, x_5 на всї можливі способи, мусить бути:

$$\mu = 1, 2, 3, 4.$$

Для $\mu = 1$ є v симетричне що до x_2, x_3, x_4, x_5, має проте вид 14).

Для $\mu = 4$ є $v_1 + v_3 + v_3 + v_4$ функция виду 14), а з відси:

$$v_5 = \underbrace{(v_1+v_2+v_3+v_4+v_5)}_{\varphi \text{ симетр.}} - (v_1+v_2+v_3+v_4) \text{ має вид 14)}$$

Для $\mu = 2$ є:

$$v_1 + v_2 = r_0 + r_1x_1 + r_2x_1^2 + r_3x_1^3 + r_4x_1^4 = \varphi(x_1),$$

а коли поміняти x_1 з $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$, дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 &= \varphi(x_1) \\ v_2 + v_3 &= \varphi(x_2) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_{m-1} + v_m &= \varphi(x_{m-1}) \\ v_m + v_1 &= \varphi(x_m) \end{aligned}\right\} \quad m = 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Для $m = 5$ малибисьмо $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, а се неможливе, бо $\varphi(x_1)$ має мати пять вартостий:

Для $m = 3$ маємо:

$$v_1 + v_2 = \varphi(x_1),\quad v_2 + v_3 = \varphi(x_2),\quad v_3 + v_1 = \varphi(x_3),$$

а з відси:

$$2v_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \varphi(x_3).$$

Права сторона сього рівнаня має більше, чим 5 вартостий, проте $m = 3$ треба відкинути.

Для $m = 4$

$$v_1+v_2=\varphi(x_1),\quad v_2+v_3=\varphi(x_2),\quad v_3+v_4=\varphi(x_1),\quad v_4+v_1=\varphi(x_4),$$

а з відси:

$$2v_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \varphi(x_3) - \varphi(x_4);$$

се треба відкинути, бо права сторона має більше чим пять вартостий.

Для $m = 5$ маємо:

$$2v_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \varphi(x_3) - \varphi(x_4) + \varphi(x_5);$$

се є більше, чим пятивартостеве, проте $m = 5$ треба відкинути.

$\mu = 2$ треба проте відкинути.

Для $\mu = 3$ дістанемо $v_1+v_2+v_3$, а звідси і

$$v_4 + v_5 = (v_1+v_2+v_3+v_4+v_5) - (v_1+v_2+v_3),$$

а се є функция виду 14). Подібно як для $\mu = 2$ і ту показати можна, що $\mu = 3$ треба відкинути.

Звідси слїдує, що кожда функция пятивартостева пятьох величин має вид:

$$r_0 + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + r_4x^4 \qquad 15)$$

де $r_0\ r_1\ r_2\ r_3\ r_4$ є функциї симетричні, а x є одна з пятьох величин.

Наколи v є функция рациональна, що може принимати m ріжних вартостий $v_1\ v_2\ \cdots\ v_m$, то наколи утворимо добуток:

$$(v-v_1)\,(v-v_2)\,\cdots\,(v-v_m) = q_0 + q_1v + q_2v^2 + \cdots + q_m\,v^m = 0, \qquad 16)$$

то $q_0\ q_1\ \cdots\ q_m$ є симетричні функциї вартостий $v_1\ v_2\ v_m\ \cdots$.

Наколибисьмо приняли, що v є коренем рівнаня нисшого степеня, н. пр. рівнаня:

$$t_0 + t_1 v + t_2 v^2 + \cdots + v^{\mu} = o \qquad \mu < m \quad 17)$$

де t є симетричні функциї, то наколи v_1 є одна з вартостий, що сповняє рівнанє 17), то дістанемо:

$$v^{\mu} + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \cdots + t_0 = (v-v_1)^{P_1}.$$

Поміняймо елемента функциї між собою, то дістанемо:

$$v^{\mu} + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \cdots + t_0 = (v-v_2)^{P_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v^{\mu} + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \cdots + t_0 = (v-v_m)^{P_m}.$$

$(v-v_1)$, $(v-v_2)$, $\cdots$ $(v-v_m)$ є проте чинники рівнаня 17), або $m=\mu$; а з відси твердженє:

Наколи функция кількох величин має m ріжних вартостий, то можна найти рівнанє m-того степеня, що його сочинники є симетричними функциями, а коренями його є як раз ті вартости, но не найде ся рівнанє нисшого степеня, що моглоби мати за коренї одну або більше з тих вартостий (IV.).

8. Тепер можемо уже приступити до доказу, що *загальне рівнанє пятого степеня альґебраічно розвязати ся не дасть.*

Наколи загальне рівнанє пятого степеня:

$$x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = o$$

має мати розвязку альґебраічну, то в склад його кореня ввійдуть функциї виду $v = R^{\frac{1}{m}}$, де R є рациональна функция сочинників рівнаня, а *m* є число перве, так як кождий корень, що його виложник є числом зложеним, можна роздїлити на два або більше коренів, яких виложники є числами первими. v є на основі твердженя (I.) функция рациональна коренів. Маємо проте рівнанє:

$$v^m - R = o.$$

Степеня сього рівнаня знизити не можна, як се слїдує з попередних розслїдів, проте v має на основі твер IV. m ріжних вартостий. А так як се є функция пятьох величин $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$, то m мусить бути подїльником добутку 5!, а що m є число перве, то оно мусить бути рівне 1, 2, 3, 5; но ми знаємо, що не ма функциї 5 величин, якаби мала три ріжні вартости, дальше m не може бути 1, бо корень рівнаня не може бути рациональною функциєю сочинників (як було висше сказано), тому лишає ся $m = 5$, або $m = 2$.

Возьмім $m = 5$.

Загальний вид функциї пятивартостевої пятьох величин є:

$$\sqrt[5]{R} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 \qquad 18)$$

Наколи се мемо степенувати, а рівночасно представимо кожде x^m, де $m > 4$, в виді (на основі 18):

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$$

то дістанемо:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[5]{R} - r_0 = r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 \\ \sqrt[5]{R} - r_0' = r_1' x + r_2' x^2 + r_3' x^3 + r'_4 x^4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sqrt[5]{R} - r_0''' = r_1''' x + r_2''' x^2 + r_3''' x^3 + r_4''' x^4 \end{array}\right\}$$

а з відси:

$$x = s_0 + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}}$$

$$s_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} (x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5), \qquad \alpha^5 = 1.$$

Права сторона має 120 вартостий, наколи $s_1 R^{\frac{1}{5}}$ є коренем рівнаня пятого степеня:

$$z^5 - s_1{}^5 R = o;$$

треба проте відкинути $m = 5$ і лишає ся $m = 2$.

Кожда функция двовартостева має вид:

$$v = \alpha + \beta \sqrt{s^2},$$

де α і β є функциї симетричні, а $s = \Delta$ є діскрімінант величин $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$.

Але кореня не буде можна представити через таку функцию, так як він є пятивартостевий, проте мусить бути:

$$\sqrt[m]{\alpha + \beta \sqrt{s^2}} = v,$$

де $\alpha, \beta \neq o$, а v є рациональна функция коренів.

$$v_1 = \sqrt[m]{\alpha + \beta s}, \qquad v_2 = \sqrt[m]{\alpha - \beta s},$$

$$v_1 v_2 = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2},$$

де вираженє під коренем є функция симетрична. Наколи $\sqrt[m]{\alpha^2-\beta^2 s^2}$ не є симетричний, то на основі попередно сказаного $m = 2$, але тоді: $v = \sqrt[m]{\alpha+\beta\sqrt{s^2}}$ має чотири вартости, що не може бути, бо функция 5 величин не може бути 4-вартостева. Мусить проте бути $\gamma = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}$ функция симетрична, отже:

$$v_1 v_2 = \gamma, \quad \text{а з відси:}$$

$$v_1 + v_2 = \sqrt[m]{\alpha+\beta\sqrt{s^2}} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{\alpha+\beta\sqrt{s^2}}} = p$$

$$v_1 + v_2 = \sqrt[m]{R} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{R}} = p.$$

Найже $p_1, p_2, \cdots p_m$ є вартости, які дістанемо з p, наколи за $R^{\frac{1}{m}}$ положимо $R^{\frac{1}{m}}, \alpha R^{\frac{1}{m}}, \alpha^2 R^{\frac{1}{m}}, \cdots \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}$, $(\alpha = \sqrt[n]{1})$, то наколи утворимо рівнанє:

$(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p \quad p^m) = p^m - A_1 p^{m-1} + \cdots \pm A^m = o$,
то в сочинники $A_1, A_2, \cdots A_m$ увійдуть самі цілковиті степені R, бо в сочинниках при дробових степенях вийде яко чинник сума коренів одиниці, а та сума є зером. А коли так, то $A_1\ A_2 \cdots$ є симетричні функциї коренів $x_1\ x_2 \cdots x_5$, а так як функция 5 величин не може бути 3-, або 4-вартостева, а не є 2-вартостева, то не може мати виду $\alpha + \beta\sqrt{s^2}$ і не є симетрична, а може бути лиш 5-вартостева, т. є. має вид:

$$\sqrt[5]{R} + \frac{\gamma}{\sqrt[5]{R}} = r_0 + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + r_4x^4 = p,$$

а з відси:

$$x = s_0 + s_1p + s_2p^2 + s_3p^3 + s_4p^4$$

А що $$p = R^{\frac{1}{5}} + \frac{\gamma}{R} R^{\frac{4}{5}}, \quad \text{то дістанемо:}$$

$$x = t_0 + t_1R^{\frac{1}{5}} + t_2R^{\frac{2}{5}} + t_3R^{\frac{3}{5}} + t_4R^{\frac{4}{5}},$$

де $t_0, t_1, \cdots$ є рациональні функциї R і сочинників рівнаня.

Звідси:

$$t_1R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(x_1 + \alpha^4x_2 + \alpha^3x_3 + \alpha^2x_4 + \alpha x_5) = p',$$
$$t'^5R = p'^5 = u + u'\sqrt{s^2}$$
$$(p'^5 - u)^2 = u'^2s^2.$$

Як бачимо рівнанє се є 10. степеня що до p', сочинники є симетричні, отже p' малоби 120 вартостий, т. є. дісталибисьмо суперечність.

Функций, що входять в склад кореня, не можна представити проте рационально через корені тогож рівнаня, що все дасть ся зробити в рівнаню, яке має розвязанє альґебраічне; з відси отже слїдує, що рівнанє пятого степеня, а тим самим і висших степенів, з загальними сочинниками не мають розвязки альґебраічної.

В сей спосіб маємо переведений доказ Abela о рівнанях висших степенів.

Дослїди Galois.[1])

Galois перевів свої глубокі дослїди на основі ґрупи рівнаня. Ті його розслїди представимо ту в скороченю.

Возьмім рівнанє степеня n:

$$f(x, R', R'', \cdots) = x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + c^n = o \qquad 1)$$

та заложім, що сочинники c_1 c_2 $\cdots$ c_n належать до обсягу чисел рациональних $(R'\ R'', \cdots)$ та що $f(x)$ є неприводне.

Знаємо, що рівнанє дає ся розвязати альґебраічно тодї, коли сповняє ся тотожно, наколи за x вставити вираженє, утворене з елєментів обсягу рациональности, при помочи слїдуючих операций альґебраічних: додаваня, відниманя, множеня, діленя, цїлковитого степенованя і витяганя кореня з виложником, що є числом первим. Ряд дїлань потрібних до утвореня такого вираженя альґебраічного зводить ся до:

1°. утвореня функций рациональних з елєментів обсягу:

$$F_r\ (R'\ R''\ \cdots).$$

2°. витяганя кореня v_r, що його виложник є числом первим, з тої функциї, при чім закладаємо, що F_r не є точна степень ряду p_r ніякої функциї з нашого обсягу, бо тодї v_r само вже належалоби до того обсягу. Проте мусить бути:

$$v_r^{p_r} = F_r\ (R'\ R''\ \cdots).$$

---

[1]) Пор. Maser op. cit. Netto: Substitutionentheorie; Vogt: Leçons sur la résolution algébrique des équations.

3°. долученя v_r до обсягу рациональности та утвореня функциї рациональної $F_{r-1}(v_r\, R'\, R'' \text{----})$ і витягненя з неї кореня v_{r-1} о виложнику p_{r-1}; F_{r-1} не може бути точною степенею ряду p_{r-1} ніякої функциї з нового обсягу $(v,\, R'\, R'' \text{----})$, отже:

$$v_{r-1}^{p_{r-1}} = F_{r-1}(v_r\, R'\, R'' \text{----})$$

4°. долученя v_{r-1} до попередного обсягу рациональности, утвореня функциї $F_{r-2}(v_{r-1}\, v_r\, R'\, R'' \text{----})$, рациональної в новім обсягу, і т. д.

Можна проте представити утворенє функциї альґебраїчної, про яку бесїда, т. є. такої, що сповняє тотожно рівнанє 1), при помочи ряду рівнань:

$$\left.\begin{aligned} v_r^{p_r} &= F_r(R'\, R'' \text{----}) \\ v_{r-1}^{p_{r-1}} &= F_{r-1}(v_r\, R'\, R'' \text{----}) \\ v_{r-2}^{p_{r-2}} &= F_{r-2}(v_{r-1}\, v_r\, R'\, R'' \text{----}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_1^{p_1} &= F_1(v_2\, v_3 \text{----} v_r\, R'\, R'' \text{----}) \\ x_1 &= F_0(v_1\, v_2\, v_3 \text{----} v_r\, R'\, R'' \text{----}) \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

де F є функциї рациональні, а p числа беззглядно первi.[1]

Наколи G є ґрупа рівнаня 1) і має ряд зложеня:

$$G,\ G_1,\ G_2,\ \text{----}\ G_\mu,\ 1,$$

а $e_1\ e_2 \text{----} e_\mu\ e_{\mu+1}$ є відповідні чинники зложеня, то дане рівнанє дасть ся розвязати при помочи постепенного розвязаня рівнань степенів $e_1\ e_2 \text{----} e_{\mu+1}$; рівнаня ті мають се свойство, що кожде є неприводне в обсягу рациональности, розширенім через долученє до него коренів попередних рівнань і що в тім новім обсягу коренї виражають ся рационально через один із них; ґрупа рівнаня зводить ся через постепенне долучанє одного кореня кождого із тих рівнань на ґрупи:

$$G_1\ G_2\ \text{----}\ G_\mu,\ 1.$$ [2]

Як бачимо істнує повна анальоґія між тими рівнанями а рівнанями 2). Очевидна проте річ, що постепенне долучанє нерациональностий v зводить ґрупу рівнаня G на ряд ґруп $G, G_1, G_2, \text{----} G_\mu, 1$, які творять ряд зложеня ґрупи G; їх чинники зложеня є точно рівні степеням повисших біноміяльних рівнань. Ґрупа G мусить

---

[1] Пор. Netto loc. cit. ст. 236, Vogt: loc. cit. ст. 107.

[2] Netto ibid. ст. 274 і 275, Vogt ibid. ст. 191.

проте бути зложена і мати чинники зложена, що є числами первими, наколи рівнанє має ся дати розвязати альґебраічно.

Ся умова є необходима, але і достаточна. Бо приймім, що она ся сповнила, що проте чинники зложеня ґрупи рівнаня є числа первi. Приймім дальше, що ґрупу рівнаня G звелисьмо через долученє функциї рациональної коренїв, що є означені через одну або більше резольвент, на ґрупу G_h, яка належить до ряду зложеня. Наколи G_{h+1} є дальша ґрупа в ряді, а p_k є число перве, що означає відношенє ґруп G_h і G_{h+1}, то[1]) можна утворити функцию коренїв, яка ся відносить до ґрупи G_{h+1} і яка має для підставлень ґрупи G_h p_k вартостий коренїв рівнаня біноміяльного, що його сочинники належать до ґрупи G_h. Наколи долучимо одну з тих вартостий т. є. один корень рівнаня біноміяльного о виложнику p_k, то ґрупа зведе ся на ґрупу G_{h+1}. Наколи в сей спосіб будемо поступати почавши від G_1, то будемо могли утворити ряд рівнань біноміяльних, які ведуть постепенно до розвязаня рівнаня.

Можна проте сказати, що необходимою та достаточною умовою, щоби рівнанє мало розвязку альґебраічну, є, щоби чинники зложеня ґрупи рівнаня були числами первими.

Рівнаня загальні 3. та 4. степеня сповняють сю умову, так як ґрупа першого має чинники зложеня 2 і 3, ґрупа другого 2, 3, 2, 2. Ґрупа симетрична — а такою є ґрупа загального рівнаня[2]) — n елєментів на случай $n > 4$ має чинники зложеня 2 і $\frac{n!}{2}$, а що сей другий не є числом первим, проте:

Рівнанє загальне степеня $n > 4$ не має розвязки альґебраічної.

---

[1]) на основі твердженя: Наколи ґрупа G ряду r є ґрупою частною ґрупи G' ряду mr (m число безглядно перве), то істнують функциї, що ся відносять до ґрупи G, такі, що їх m вартостий для підставлень ґрупи G' є коренями рівнаня біноміяльного степеня m. (Vogt loc. cit. ст. 40).

[2]) Vogt loc. cit. ст. 79.

ЧАСТЬ ДРУГА.

Дослїди Hermite'а.

Розслїди Abel'а, Ruffini'ого та Galois'а показали, що годї на дорозї альґебраїчній шукати розвязки рівнаня пятого степеня; тому то Hermite[1]) почав шукати, чи би не дало ся представити коренів рівнаня пятого степеня при помочи якихсь функций, щоби відносили ся до нових помічних змінних. Тим помічним елементом показались як раз функциї елїптичні. Hermite розвязку свою пристосував до рівнаня пятого степеня в виді Bring-Jerrarda:

$$x^5 + x + b = 0,$$

бо до такого виду дає ся звести загальне рівнанє пятого степеня на основі трансформациї Tschirnhaus'а.

1. Заким приступимо до перетвореня загального рівнаня пятого степеня, мусимо ввести помічне твердженє. Функцию цїлковиту однородну другого степеня о n змінних можна все представити яко суму ν функций першого степеня, де $\nu \leq n$.[3])

Наколи функция v є цїлковита однородна другого степеня о n змінних $(x_1\, x_2 \cdots x_n)$ і має в собі квадрат одної з тих змінних н. пр. x_1^2, то можна єї представити в виді:

$$v = \alpha x_1^2 + 2Qx_1 + R,$$

де α є стала, ріжна від зера, Q функция першого, а R другого степеня що до $(n-1)$ змінних $(x_2 \cdots x_n)$.

Положім:

$$x_1 + \frac{Q}{\alpha} = X_1, \quad R - \frac{Q_1^2}{\alpha} = v_1, \quad \text{то:}$$

$$v = (X_1\sqrt{\alpha})^2 + v_1,$$

де V_1 є функция цїлковита однородна другого степеня $(n-1)$ арґументів.

Наколи v не має в собі квадратів, а лиш добутки, то:

$$v = \beta x_1 x_2 + Qx_1 + Rx_2 + S,$$

---

[1]) Comptes rendus том 46 рік 1858.

[2]) Пор. Weber: Lehrbuch der Algebra т. I. ст. 175; також Klein: Vorlesungen über das Ikosaëder ст. 143.

[3]) Пор. Zajączkowski: Zasady algebry wyższej ст. 101.

де значінє β, Q, R, S є очевидне.

$$v = \beta\left(x_1 + \frac{R}{\beta}\right)\left(x_2 + \frac{Q}{\beta}\right) + S - \frac{QR}{\beta},$$

а наколи: $X_1 = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 + \frac{Q+R}{\beta}\right),\ X_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 - x_2 - \frac{Q-R}{\beta}\right),$

$$v_2 = S - \frac{QR}{\beta},$$

то: $$v = (x_1 \sqrt{\beta}\,)^2 + (x_2 \sqrt{\beta}\,)^2 + v_2,$$

де v_2 є функция цілковита однородна другого степеня (n—2) змінних, а $x_1\ x_3$ є функциї степеня 1 о n змінних $(x_1\ x_2 \cdots x_n)$.

Наколи так дальше будемо поступати з $v_1\ v_2$, представимо вкінци v яко суму квадратів, яких число не може бути більше як n.

Твердженє е проте доказане.

2. Возьмім тепер рівнанє пятого степеня:

$$x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = o \qquad 1)$$

та ужиймо підставленя:

$$u = a_0 + a_1x + \cdots + a_4x^4 \qquad 2)$$

де $a_0\ a_1 \cdots$ є числа сталї на разї незвісні. Піднесім 2) до степенї 2, 3, 4, та обнижім рівночасно при помочи рівнаня 1) виложники змінної так, щоби нїде не були висші як 4; дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} u^2 &= b_0 + b_1x + \cdots + b_4x^4, \quad u^5 = e_0 + e_1x + \cdots + e_4x^4 \\ u^3 &= c_0 + c_1x + \cdots + c_4x^4 \\ u^4 &= d_0 + d_1x + \cdots + d_4x^4 \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

де $b_0\ b_1 \cdots c_0\ c_1 \cdots d_0\ d_1 \cdots e_0\ e_1 \cdots$ є функциї цілковиті однородні степеня 2, 3, 4 що до сталих $a_0\ a_1 \cdots a_4$.

Означім через $s_1\ s_2 \cdots s_5$ суми перших, других, ---- пятих степений коренїв рівнаня 1), а через $S_1\ S_2 \cdots S_5$ суми перших, ---- пятих степений коренїв рівнаня з арґументом u, то тодї рівнаня 2) і 3) дадуть:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= 5a_0 + a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + a_4s_4 \\ S_2 &= 5b_0 + b_1s_1 + b_2s_2 + b_3s_3 + b_4s_4 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_5 &= 5e_0 + e_1s_1 + e_2s_2 + e_3s_3 + e_4s_4 \end{aligned}\right\} \quad 3')$$

Возьмім походну рівнаня:

$$f(x) = x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx + e \equiv (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5),$$

то дістанемо:

$$5x^4 - 4ax^3 + 3bx^2 - 2cx + d = \frac{f(x)}{x-x_1} + \frac{(f)x}{x-x_2} + \cdots + \frac{f(x)}{x-x_5}. \quad 4)$$

Але:

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = x^4 + (x_1 - a)x^3 + (x_1{}^2 - ax_1 + b)x^2 + (x_1{}^3 - ax_1{}^2 + bx_1 - c)x + \\ + (x_1{}^4 - ax_1{}^3 + bx_1{}^2 - cx_1 + d)$$

……

$$\frac{f(x)}{x-x_5} = x^4 + (x_5 - a)x^3 + (x_5{}^2 - ax_5 + b)x^2 + (x_5{}^3 - ax_5{}^2 + bx_5 - c)x + \\ + (x_5{}^4 - ax_5{}^3 + bx_5{}^2 - cx_5 + d);$$

Наколи се вставимо в 4), дістанемо:

$$5x^4 - 4ax^3 + 3bx^2 - 2cx + d = 5x^4 - (s_1 + 5a)x^3 + (s_2 - as_1 + 5b)x^2 + \cdots \\ \cdots + (s_4 - as_3 + bs_2 - cs_1 + 5d),$$

а з відси:

$$\left.\begin{aligned} 4a &= s_1 + 5a \\ 3b &= s_2 - as_1 + 5b \\ 2c &= s_3 - as_2 + bs_1 - 5c \\ d &= s_4 - as_3 + bs_2 - cs_1 + 5d \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

З відси обчислимо $s_1\ s_2 \cdots$, дальше з 3') $S_1\ S_2 \cdots$, а тоді дістанемо на основі взорів анальоґічних до 5) сочинники рівнаня арґументу *u*.

Найже се нове рівнанє має вид:

$$u^5 + q_1u^4 + q_2u^3 + q_3u^2 + q_4u + q_5 = o. \quad 6)$$

Щоби усунути з того рівнаня u^4, u^3, u^2, треба визначити сталї a_0, $a_1 \cdots$ в рівнаню 2) так, щоби:

$$q_1 = o, \quad q_2 = o, \quad q_3 = o.$$

Перше з тих рівнань є першого степеня що до тих сталих, друге другого, а трете третого степеня.

В тій цїли виражім з рівнаня $q_1 = o$ сталу a_0 через $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$, і одержану вартість вставмо в рівнаня $q_2 = o$, $q_3 = o$. Ті два рівнаня перейдуть тоді на $q'_2 = o$ і $q'_0 = o$.

$q'_2 = o$ є тепер функция цїлковита однородна степеня другого що до a_1, a_2, a_3, a_4, можна єї проте після в горі поданого твердженя представити в виді:

$$f^2 + g^2 + h^2 + k^2 = o,$$

де f, g, h, k є функциї першого степеня.

То рівнанє сповнить ся, наколи положимо $f=gi$, $h=ki$. Виражім з тих двох послїдних рівнань, які є степеня 1, сталї a_1 і a_2 через a_3 і a_4 і вставмо ті вартости в $q'_3=o$, то дістанемо рівнанє $q_3''=o$, що є однороднє і третого степеня що до a_3 і a_4. Наколи одно з тих чисел возьму після вподоби, дістанемо друге через розвязанє рівнаня 3. степеня. А тодї рівнанє 1) перейде на:

$$u^5 + pu + q = o \qquad 7)$$

а наколи положу $u = \rho t$, $p = -\rho^4$, то:

$$t^5 - t - A = o. \qquad 7')$$

Се є форма Bring-Jerrard'a. — Наколи так, то приступимо тепер до розвязаня того рівнаня при помочи функций елїптичних.

3. Між модулами функций елїптичних k і k', де:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{k} &= 2\sqrt[9]{q}\prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}}\right)^2 = \prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1-p^{2m-1}}{1+p^{2m-1}}\right)^2, \\ \sqrt{k'} &= \prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}}\right)^2 = 2\sqrt[4]{p}\prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1+p^{2m}}{1+p^{2m-1}}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

і де:

$$q = e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi i} = e^{\varrho\pi i}, \quad p = e^{\frac{-\pi i}{\varrho}},$$

і де k відносить ся до періодів (ω, ω'), k' до періодів $\left(\frac{\omega}{n}, \omega\right)$, істнує звязь:[1])

$$\sqrt{k'} = \sqrt{k^n}\prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{cn^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{dn^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}.$$

Наколи означимо через ε одну з $(n+1)$ величин $\frac{2\omega}{n}$, $\frac{\omega'+16t\omega}{n}$ для $t = 0, 1, 2, \cdots \overline{n-1}$, то та звязь для модулїв буде:

$$\sqrt{k_\varepsilon} = \sqrt{k^n}\prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{cn^2(p\varepsilon)}{dn^2(p\varepsilon)}$$

Положім: $\sqrt{k} = u^2$, $\sqrt{k_\varepsilon} = v^2$, то $(n+1)$ вартостий v дістанемо з рівнаня:

$$v = u^n\prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{cn(p\varepsilon)}{dn(p\varepsilon)} \qquad 9)$$

---

[1] Пор. Briot-Bouquet: Théorie des fonctions elliptiques ст. 318, 542, 624.

а що:[1])

$$\mathrm{cn}(z) = \frac{\Theta(o)}{\Theta_2(o)}\,\frac{\Theta_2(z)}{\Theta(z)}, \qquad \mathrm{dn}(z) = \frac{\Theta(o)}{\Theta_3(o)}\,\frac{\Theta_3(z)}{\Theta(z)},$$

а:[2])

$$\frac{\Theta_3(o)}{\Theta_2(o)} = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

то дістанемо:

$$v = u^n \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{n}} \frac{\mathrm{cn}(p\varepsilon)}{\mathrm{dn}(p\varepsilon)} = u \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{n}} \frac{\Theta_2(p\varepsilon)}{\Theta_3(p\varepsilon)} =$$

$$= u \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(2 m p \varepsilon + m^2 \omega'\right)}}{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(2 m + 1\right) p \varepsilon + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 \omega'}} {}^{3)} \qquad 10)$$

а з відси:

$$\xi = \frac{v}{u^n} = \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathrm{cn}(p\varepsilon)}{\mathrm{dn}(p\varepsilon)}. \qquad 11)$$

Наколи в вираженю:[4])

$$\frac{\mathrm{cn}(nz)}{\mathrm{dn}(nz)} = \frac{\mathrm{cn}(z)\ \Pi\left[1 - \frac{\mathrm{dn}^2(o)}{\mathrm{cn}^2(o)}\ \mathrm{sn}^2(z)\right]}{\mathrm{dn}(z)\ \Pi\left[1 - k^2\ \frac{\mathrm{cn}^2(o)}{\mathrm{dn}^2(o)}\ \mathrm{sn}^2(z)\right]}$$

положимо: $\frac{\mathrm{cn}(nz)}{\mathrm{dn}(nz)} = 1$ дістанемо на $\frac{\mathrm{cn}(z)}{\mathrm{dn}(z)}$ функцию дробову рациональну що до k^2 і $\mathrm{sn}^2(z)$. А наколи положимо $z = p\varepsilon$ дістанемо ξ яко функцию симетричну $\frac{n-1}{2}$ величин:

$$\mathrm{sn}^2(\varepsilon),\ \mathrm{sn}^2(2\varepsilon),\ \cdots\ \mathrm{sn}^2\left(\frac{n-1}{2}\,\varepsilon\right) \qquad 12)$$

ті величини відтваряють ся в певнім порядку, наколи заступимо ε через $a\varepsilon$, де a є число перве менше від n, а наколи кожду з тих величин 12) виразити рационально через $\mathrm{sn}^2(\varepsilon)$ і k^2, то дістанемо ξ яко функцию рациональну що до $\mathrm{sn}^2(\varepsilon)$ і k^2:

$$\xi = F\left(\mathrm{sn}^2(\varepsilon),\ k^2\right).$$

---

[1]) Briot-Bouquet loc. cit. ст. 356.

[2]) ibidem ст. 319.

[3]) ibidem ст. 115.

[4]) ibidem ст. 519, 520.

Позаяк ξ є симетричне що до вартостий 12), а ті вартости відтваряють ся в певнім порядку, наколи за ε положу $a\varepsilon$, то:

$$F\left(\operatorname{sn}^2(a\varepsilon),\ k^2\right) = F\left(\operatorname{sn}^2(\varepsilon),\ k^2\right),$$

а наколи заступимо постепенно ε через ε, 2ε, ---- $\frac{n-1}{2}\varepsilon$, то дістанемо:

$$\xi = \frac{2}{n-1} \sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} F\left(\operatorname{sn}^2(p\varepsilon),\ k^2\right);$$

а як ε має $(n+1)$ ріжних вартостий, то і ξ буде мало $(n+1)$ вартостий ріжних, буде проте коренем рівнаня $(n+1)$ степеня що до ξ, а в сочинники того рівнаня увійде k^2. Наколи ξ заступити через $\frac{v}{u^n}$, дістанемо рівнане між u і v степеня $(n+1)$ що до v, а се рівнане назве ся **модуловим рівнанем**. — Наколи заступимо u через $ue^{\frac{2h\pi i}{8}}$, то вартости на ξ не змінять ся, отже v відтворює ся з чинником $e^{\frac{2h\pi n i}{8}}$.

З взорів 8) слїдно, що $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, а також $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ є однозначні функциї величини ρ, наколи s в вираженю:

$$\rho = r + si$$

є додатне і ріжне від зера; можна проте положити:

$$\sqrt[4]{k} = \varphi(\rho), \qquad \sqrt[4]{k'} = \psi(\rho),$$

де φ і ψ є функциї однозначні. Функциї ті мають слїдуючий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\psi\left(-\frac{1}{\rho}\right) &= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-e^{-\frac{2m-1}{\varrho}\pi i}}{1+e^{-\frac{2m-1}{\varrho}\pi i}} = \varphi(\rho) \\
\varphi\left(-\frac{1}{\rho}\right) &= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-e^{(2m-1)\varrho\pi i}}{1+e^{(2m-1)\varrho\pi i}} = \psi(\rho) \\
\psi(\rho+1) &= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-e^{(2m-1)(\varrho+1)\pi i}}{1+e^{(2m-1)(\varrho+1)\pi i}} = \\
&= \Pi\, \frac{1+e^{(2m+1)\varrho\pi i}}{1-e^{(2m-1)\varrho\pi i}} = \frac{1}{\psi(\rho)}
\end{aligned}\right\} \quad 13)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\psi\,(\rho+2) = \frac{1}{\psi(\rho+1)} = \psi(\rho)\\
&\varphi\,(\rho+1) = \sqrt{2}\; e^{\frac{\pi\rho i}{8}}\; e^{\frac{\pi i}{8}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1+e^{2m\pi\rho i}}{1-e^{(2m-1)\pi\rho i}} = e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)}\\
&\varphi\,(\rho+2) = e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\varphi(\rho+1)}{\psi(\rho+1)} = e^{\frac{2\pi i}{8}} \varphi(\rho)\\
&\varphi\,(\rho+2h) = e^{\frac{2h\pi i}{8}} \varphi(\rho)
\end{aligned}\right\}\quad 13)$$

4. З $(n+1)$ вартостий на v, які дістанемо з взору 9), най вартість V відносить ся до періодів $\left(\frac{\omega}{n}\ \omega'\right)$, а v_t до періодів $\left(\omega'\ \frac{\omega'+16t\omega}{n}\right)$.

Вартости ті виразять ся взорами:

$$V = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi(n\rho), \qquad v_t = \varphi\,\frac{\rho+16t}{n}. \qquad 14)$$

Покажемо, що так дійсно є.

Рівнанє 10) дає всї вартости v яко однозначні функциї арґументу ρ і наколи приймемо $\rho = si$, то на основі розвинень:[1]

$$\Theta_3(p\varepsilon) = \varphi(q) \prod_{m=1}^{\infty} \left[1 + q^{2m-1} \cos\frac{2\pi p\varepsilon}{\omega} + q^{2(2m-1)}\right]$$

$$\Theta_2(p\varepsilon) = 2\sqrt[4]{q}\;\varphi(q) \cos\frac{\pi p\varepsilon}{\omega} \prod_{m=1}^{\infty} \left[1 + q^{2m} \cos\frac{2\pi p\varepsilon}{\omega} + q^{4m}\right]$$

бачимо, що в обох виразенях маємо під знаком добутка величину додатну та дійсну, отже квот $\frac{\Theta_2}{\Theta_3}$ буде також дійсний, а знак його буде такий, який має $\cos\frac{\pi p\varepsilon}{\omega}$; а що до V належить $\varepsilon = \frac{2\omega}{n}$, то знак буде такий, як у $\cos\frac{2\pi p}{n}$, де $p = \left(1 \cdots \frac{n-1}{2}\right)$. Наколи $\frac{n-1}{2}$ є паристе і рівне $2n'$, то наколи n' перших чинників є додатні, а n' слїдуючих відʼємні, то V буде мало знак $(-1)^{n'}$; наколи

---

[1] ibidem ст. 315.

$\frac{n-1}{2}$ є непаристе, рівне $2n'-1$, то наколи $n'-1$ чинників є додатних, а n' від'ємних, то V має знак $(\ \ 1)^{n'}$; се значить, що V має все знак $(-\,1)^{\frac{n^2-1}{8}}$, а так як $\varphi(n\rho)$ є додатне і дійсне, то:

$$V = \sqrt{2}\, e^{n\pi\frac{\omega'}{\omega}i} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-e^{2mn\frac{\omega'}{\omega}\pi i}}{1+e^{2mn\frac{\omega'}{\omega}\pi i}} = (-\,1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi(n\rho);$$

отже перший з взорів 14) є правдивий.

Щоби дістати v_t, треба покласти: $\varepsilon = \frac{\omega'+16t\omega}{n}$, або: $\frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{\rho+16t}{n}$

$$v = u \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(2mp\varepsilon + m^2\omega'\right)}}{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(2m+1)p\varepsilon + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\omega'}};$$

а наколи положимо $\rho+16t=\rho'$, дістанемо на основі 13):

$$u = \varphi(\rho'-16t) = \varphi(\rho').$$

Оно є дійсно додатне для $\rho'=s'i$, а також і:

$$v'_t = \varphi(\rho') \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\pi\varrho' i\left[\frac{2m+1}{n}p + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\right]}}{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\pi\varrho' i\left[\frac{2mp}{n} + m^2\right]}}$$

буде дійсне і додатне для $\rho'=s'i$; так само $\varphi\left(\frac{\rho'}{n}\right)$, як і v_t буде дійсне та додатне:

$$v_t = \sqrt{2}\, e^{\frac{\omega'+16t\omega}{8n\omega}\pi i} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1+e^{2m\frac{\omega'+16t\omega}{n\omega}\pi i}}{1+e^{(2m-1)\frac{\omega'+16t\omega}{n\omega}\pi i}} = \varphi\left(\frac{\rho+16t}{n}\right);$$

отже і другий з взорів 14) є правдивий.

5. В склад v входить ω та ω', означені рівнанями:[1]

$$\omega = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2u^2)}}\,,\quad \omega' = 2i\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)\,(1-k^2u^2)}}$$

їх точки особливі є $u=o$ та $u=e^{\frac{2h\pi i}{8}}$.

Треба розслїдити проте, як ся поводить v в окруженю тих точок.

Возьмім точку $u=o$.

ω та ω' сповняють рівнанє:[2]

$$\omega\,\frac{d\omega'}{dk} - \omega'\,\frac{d\omega}{dk} = -\,\frac{2\pi i}{k'k^2}\,;$$

з відси:

$$\frac{d\rho}{dk} = -\,\frac{2\pi i}{\omega^2 k(1-k^2)}\,,$$

а так як:

$$\omega = \pi\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k^4 + \cdots\right)^{3)}$$

то:

$$\frac{d\rho}{dk} = \frac{2}{\pi i}\left(\frac{1}{k} + Ak + \frac{Bk^3}{2} + \cdots\right),$$ а з відси $(k^2=u^8)$:

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{\pi i}\left(8\log\frac{u}{u_0} + A(k^2-k^2_0) + \frac{B}{2}\,(k^4-k^4_0) + \cdots\right).$$

Наколи $u=u_0$ описує коло довкола точки зерової, то:

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{\pi i}\,8\,.\,2\pi i\log\frac{u_0 e}{u_0}\,,\qquad \text{або:}$$

$$\rho = \rho_0 + 16.$$

V остає проте і дальше однозначне і представляє ся яко ряд степенний арґументу u: $\left(\alpha = \frac{n^2-1}{8}\right)$.

$$V = (-\,1)^\alpha\,\varphi(n\rho) = (-\,1)^\alpha\sqrt{2}\;e^{\frac{n\rho\pi i}{8}}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1+e^{2mn\rho\pi i}}{1+e^{(2m-1)\,n\rho\pi i}} =$$

$$= (-\,1)^\alpha\sqrt{2}\;u^n\,\Pi \qquad 15)$$

---

[1] ibidem ст. 363, 364.

[2] ibidem ст. 450.

[3] Пор. н. пр. Schwarz: Formeln u. Lehrsätze z. Gebr. der ellipt. Funct. ст. 53.

а $v_t = \varphi\left(\frac{\rho + 16t}{n}\right)$ переходить на $\varphi\left(\frac{\rho_0 + 16(t+1)}{n}\right) = v_{t+1}$; проте *n* иньших вартостий v творить довкола точки зерового систем циклїчний $(v_0\ v_1 \cdots v_{n-1})$, а їх розвинене є:

$$v = \sqrt{2}\ e^{\frac{\pi\varrho i}{8n}}\ \Pi \frac{1 + e^{\frac{2m\varrho\pi i}{n}}}{1 + e^{\frac{(2m-1)\varrho\pi i}{n}}} = \sqrt{2}\ u^{\frac{1}{n}}\ \Pi. \qquad 16)$$

Возьмім другу точку особливу:

$$u = e^{2\pi i} = 1.$$

Функция елїптична, що ся відносить до модулу k′, має періоди:

$$\omega_1 = -\omega' i, \quad \omega_1{}' = \omega i, \quad \text{з відси} \quad \rho' = -\frac{1}{\rho}.$$

ρ' заховує ся так як ρ і має розвинене:

$$\frac{d\rho'}{dk'} = \frac{2}{\pi i}\left(\frac{1}{k'} + Ak' + \frac{B}{2}k'^3 + \cdots\right),$$

а з відси:

$$\rho' - \rho'_0 = \frac{1}{\pi i}\left[\log\left(\frac{k'}{k_0{}'}\right)^2 + A(k'^2 - k'^2_0) + \frac{B}{2}(k'^4 - k'^4_0) + \cdots\right].$$

Наколи змінна *u* зробить коло довкола точки $e^{2\pi i}$, очевидно в напрямі додатнім, та не обійме ніякої иньшої точки особливої, то $\left[\psi(\rho)\right]^8 = k'^2$ змінить арґумент о 2π, а:

$$\rho' - \rho'_0 = \frac{2\pi i}{\pi i}\log\frac{k'^2_0 e}{k'^2_0} = 2,$$

отжеж: $\rho' = \rho'_0 + 2$, а що $\rho_0 = -\frac{1}{\rho'_0}$, то:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - 2\rho_0}.$$

$v_0 = \varphi\left(\frac{\rho}{n}\right) = \psi\left(-\frac{n}{\rho}\right) = \psi(n\rho')$ дїйсне та додатне на відтінку $(0 \cdots 1)$ остає однозначне, наколи змінна зробить коло довкола точки 1 на основі взорів 14).

V перейде по однім обороті докола точки 1) перейде на $(-1)^\alpha \varphi\left(\frac{n\rho_0}{1 - 2\rho_0}\right)$, а по γ оборотах на $(-1)^\alpha \varphi\left(\frac{n\rho_0}{1 - 2\gamma\rho_0}\right)$, а так як $\varphi(\rho') = \pm\varphi(\rho)$, наколи зайде умова:[1]

---

[1] Пор. Briot-Bouquet loc. cit. ст. 629.

$$\left.\begin{array}{l} \rho' = \dfrac{8a'+(4b'+1)\rho}{(4a+1)+2b\rho} \quad \text{та:} \\ (4a+1)\,(4b'+1) - 16\,ba' = 1 \end{array}\right\} \quad 17)$$

то у нас буде:

$$\frac{\rho_0+16t}{n} = \frac{8a'(1-2\gamma\rho_0)+(4b'+1)n\rho_0}{(4a+1)\,(1-2\gamma\rho_0)+2bn\rho_0} = \frac{\left[8a'+(4b'+1)n-16a'\gamma\right]\rho_0}{4a+1+2\left[bn-(4a+1)\gamma\right]\rho_0}$$

при чім:

$$4(a+1)\;(4b'+1) - 16\,b\,a' = 1.$$

Щоби сповнити ті умови, положім:

$$bn - (4a+1)\,\gamma = o\,,$$

$$\frac{b}{4a+1} = \frac{\gamma}{n}.$$

Позаяк після умови *b* є перве зглядом $(4a+1)$, то $b = \pm\gamma$, $4a+1 = \pm n$, при чім беру або оба знаки горішні або долїшні; *n* є число перве і непаристе, може проте мати вид:

$$n = 4n' + 1, \qquad \text{або} \qquad n = 4n' - 1.$$

Наколи $n = 4n'+1$, то беру $n' = a$, $b = \gamma$ і дістану умову:

$$\rho_0 + 16t = 8a' + \left[(4b'+1)\,n - 16a'\gamma\right]\rho_0\,;$$

наколи положимо $a' = 2t$, дістанемо вартости на $(4b'+1)$ і на t з взору:

$$n(4b'+1) - 32\gamma t = 1 \qquad 18)$$

а так як між $\varphi\left(\dfrac{n\rho_0}{1-2\gamma\rho_0}\right)$ і $\varphi\left(\dfrac{\rho_0+16t}{n}\right)$ є звязь $(-1)^\alpha$, то V перейде на v_t. Взір 18) показує, яке t належить до певної вартости γ. Наколи $\gamma = (1, 2, \cdots n-1)$, то на t дістанемо тих самих $(n-1)$ вартостий в певнім порядку.

Дістанемо проте докола точки $u = e^{2\pi i} = 1$ систем коловий вартостий $(V, v_1, v_2, \cdots v_{n-1})$, а v_0 остає однозначне.

Возьмім дальше точку $u = e^{\frac{2\pi i}{8}}$.

Наколи арґумент u перейде осьму часть обводу, тодї:

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{\pi i}\,8\log\frac{u_0 e^{\frac{2\pi i}{8}}}{u_0}, \qquad \text{або:}$$

$$\rho = \rho_0 + 2,$$

отже V перейде на:

$$(-1)^{\alpha}\varphi(n\rho_0+2n)=e^{\frac{2n\pi i}{8}}V,$$

а v_t на:

$$\varphi\left(\frac{\rho_0+16t+2}{n}\right)=\varphi\left(\frac{\rho_0+16(t-\alpha)+2n}{n}\right)=e^{\frac{2n\pi i}{8}}V_{t-\alpha}.$$

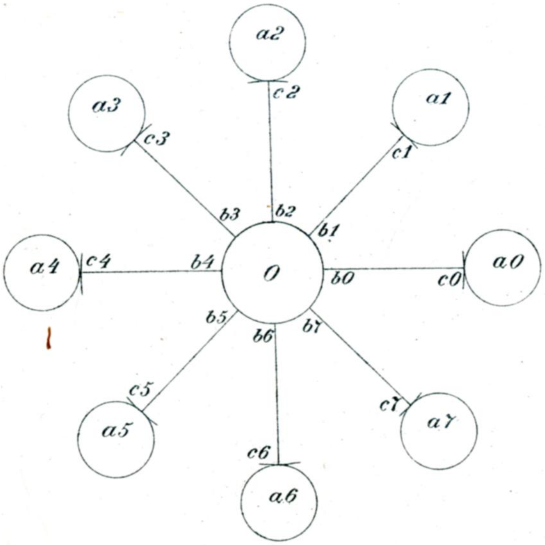
Наколи вийдемо з b_0 з вартостию v, то зачеркнувши осьму часть обводу в напрямі додатнім дістанемо в точцї b_1 вартість $e^{\frac{2n\pi i}{8}}V$, отже на лїнїї $b_1\,a_1$ V буде мало вартости такі, як в відповідних точках на оси xx, помножені через $e^{\frac{2n\pi i}{8}}$. Звідси наколи перейдемо b_1a_1 γ разів та дістанемо в точцї b_1 якесь v_{t_γ}, то наколи вернемо до b_0 (т. є. окружимо точку $e^{\frac{2n\pi i}{8}}$), дістанемо $v_{t\gamma+\alpha}$; наколи хочемо звідси дістати v, яке відповідає γ окруженям точки $e^{\frac{2n\pi i}{8}}$, треба найти індекс, який відносить ся до γ окружень точки 1 та додати до нього α.

Коли возьмемо загально точку $e^{\frac{2h\pi i}{8}}$, то будемо її окружали по луку $b_0\,b_1$ ---- $b_h=\frac{h}{8}$ части обвода, простій $b_h\,c_h$, колї, що є окруженєм тої точки, з поворотом по $c_h\,b_h$ і b_{h-1} ---- b_0 (гл. фіґ.).

Наколи арґумент зачеркне $\frac{h}{8}$ частий обводу, то ρ перейде на ρ_0+2h, а V на $e^{\frac{2hn\pi i}{8}}V$, а v_t на $e^{\frac{2nh\pi i}{8}}v_{t-h\alpha}$. Наколи вийдемо з точки b_0 з вартостию V, перейдемо γ разів $b_h\,a_h$, дістанемо в b_h $e^{\frac{2hn\pi i}{8}}v_{t\gamma}$, а коли повернемо до b_0, дістанемо $v_{t\gamma+\alpha h}$. Вистане проте найти індекс, що ся відносить до γ окружень точки $e^{2\pi i}$ і додати до нього $h\alpha$, а дістанемо індекс v, що ся відносить до γ окружень точки $e^{\frac{2h\pi i}{8}}$.

6. Функция елїптична о модулї відворотнім має періоди $\omega_1=\omega-\omega'$, $\omega_1'=\omega'$, а звідси звязь, яка є між ρ та ρ_1, представить ся:

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\rho}-1,\qquad u_1=\varphi(\rho_1)=\psi\left(-\frac{1}{\rho_1}\right)=\frac{1}{\psi\left(-\frac{1}{\rho}\right)}=\frac{1}{u}.$$



a2
c2
a3
c3
a1
c1
b3
b2
b1
a4
c4
b4
0
b0
c0
a0
b5
b6
b7
c5
c7
a5
a7
c6
a6

Наколи в рівнаню модуловім заступимо *u* через $\frac{1}{u}$, то корені нового рівняня (v) будуть відворотні до коренів рівняня першого в якимсь порядку.

Зауважім:

$$(v) = (-1)^\alpha \psi\left(-\frac{1}{n\rho_1}\right) = \frac{(-1)^\alpha}{\psi\left(-\frac{1}{n\rho_1} - 1\right)} = \frac{(-1)^\alpha}{\psi\left(-\frac{1+(n-1)\rho}{n\rho}\right.} =$$

$$= \frac{(-1)^\alpha}{\varphi\left(\frac{n\rho}{1+(n-1)\rho}\right)};$$

він буде відворотний до якогось кореня v_δ, наколи:

$$\frac{\rho + 16\delta}{n} = \frac{8a' + [(4b'+1)\, n + 8a'\,(n-1)]\,\rho}{(4a+1) + [2bn + (4a+1)\,(n-1)]\,\rho}$$

під умовою:

$$(4b'+1)\,(4a+1) - 16\,ba' = 1.$$

Положім: $2bn + (4a+1)\,(n-1) = o,$ або:

$$\frac{2b}{4a+1} = -\frac{n-1}{2n},$$ де $2b$ є перве до $(4a+1)$.

Наколи $n=4n'+1$, положу $a=n'$, $b=-2n'$, $a'=2\delta$, а тоді дістанемо b' і δ з умови:

$$16\,(n-1)\,\delta + n\,(4b'+1) = 1 \qquad \text{або:}$$

$$16\,\delta + 5\,b' = -1, \qquad \text{отже } \delta = 4, \qquad \text{або:}$$

$$(V) = \frac{1}{v_4}.$$

Возьмім иньше (v) н. пр. $(v_{t'})$, то:

$$(v_{t'}) = \psi\left(-\frac{n}{\rho_1+16\,t'}\right) = \frac{1}{\psi\left(-\frac{n}{\rho_1+16\,t'} - 1\right)} =$$

$$= \frac{1}{\psi\left(-\frac{n(1-\rho)}{\rho+16t'-16t'\rho} - 1\right)} = \frac{1}{\psi\left(-\frac{16t'+n-(16t'-1)\rho}{16t'-(16t'-1)\,\rho}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\psi\left(\frac{16t' \quad (16t'-1)\rho}{16t'+n-(16t'-1)\rho}\right)}.$$

Корень сей буде відворотний до v_t, наколи: 19)

$$\frac{\rho+16t}{n}=\frac{8(16t'+n)a'+16t'(4b'+1)-\left[(16t'-1)(4b'+1)+8(16t'+n-1)a\right]\rho}{(16t'+n)(4a+1)+32t'b-\left[(16t'+n-1)(4a+1)+2(16t'-1)b\right]\rho}$$

з умовою:

$$(16t'-1)(4b'+1)+8(16t'+n-1)a'=-1.$$

$$(16t'+n-1)(4a+1)+2b(16t'-1)=o.$$

$$\frac{4a+1}{2b}=-\frac{16t'-1}{16t'+n-1},$$ де $(4a+1)$ є перве до $2b$.

В рівнаню 19) знаменник правої сторони зведе ся до n, наколи положу $a=4t'$, $b=8t'+\frac{n-1}{2}$; тоді:

$$t=(16t'+n)\frac{a'}{2}+t'(4b'+1)=\frac{2a'+b'}{4};$$

a' має бути просте паристе, b' многократию 4; кладу тому:

$$a'=2a'', \qquad b'=4b'', \qquad \text{то:}$$

$$(16t'+n)a''+t'(16b''+1)=a''+b''$$

$$(16t'+n-1)a''+t(16t'-1)b''=-t' \qquad a''+b''=t$$

$$(16t'-1)t+na''=-t'.$$

Для $t'=o$ $-t=-5a''$; наколи $a''=1$, то $t=5$, або:

$$(v_0)=\frac{1}{v_0}.$$

Для $t'=2$ $31t+5a''=-2$; звідси $t=3$, а:

$$(v_2)=\frac{1}{v_3}.$$

Для $t'=3$ $47t+5a''=-3$; звідси $t=1$, а:

$$(v_3)=\frac{1}{v_1}.$$

Для $t'=4$ $63t+5a''=-4$, $t=2$, а:

$$(v_4)=\frac{1}{v_2}.$$

Остає (v_1), яке в тім случаю рівнає ся $\frac{1}{V}$.

Для $n=5$ дістанемо 5 вартостий на v, іменно:

$$V,\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4.$$

7. Утворім функцию півсиметричну $(v_\alpha v_\beta)$ двох з тих величин, дальше таку функцию двох других та двох послїдних з тих величин

та возьмім функцию симетричну U тих трох функций півсиметричних:

$$U = (V - v_0)(v_1 - v_4)(v_2 - v_3).$$

Докола особливої точки $u=o$ дістає та функия 5 вартостий:

$$U_0 = (V - v_0)(v_1 - v_4)(v_2 - v_3)$$
$$U_1 = (V - v_1)(v_2 - v_0)(v_3 - v_4)$$
$$U_2 = (V - v_2)(v_3 - v_1)(v_4 - v_0)$$
$$U_3 = (V - v_3)(v_4 - v_2)(v_0 - v_1)$$
$$U_4 = (V - v_4)(v_0 - v_3)(v_1 - v_2)$$

так як докола тої точки V' остає без зміни, а v_t переходить на v_{t+1} та маємо систем коловий $(v_0\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4)$.

Докола точки $u=e^{2\pi i}$ v_0 остає однозначне, а пять прочих величин творить систем коловий. Порядок індексів дістаєм з взору:

$$32\gamma t - n(4b'+1) = -1, \qquad \gamma = 1, 2, 3, 4.$$

Для $\gamma = 1$ $\quad 8t - 5b' = 1,\quad$ звідси: $t = 2$.

Для $\gamma = 2$ $\quad 16t - 5b' = 1,\quad$ звідси: $t = 1$.

Для $\gamma = 3$ $\quad 24t - 5b' = 1,\quad t = 4$.

Для $\gamma = 4$ $\quad 32t - 5b' = 1,\quad t = 3;$

дістанемо проте систем коловий (V, v_2, v_1, v_4, v_3), а вартости на U є:

$$(v_2 - v_0)(v_4 - v_3)(v_1 - V) = U_1$$
$$(v_1 - v_0)(v_3 - V)(v_4 - v_2) = U_3$$
$$(v_4 - v_0)(V - v_2)(v_3 - v_1) = U_2$$
$$(v_3 - v_0)(v_2 - v_1)(V - v_4) = U_4$$
$$(V - v_0)(v_1 - v_4)(v_2 - v_3) = U_0.$$

U принимає проте в окруженю точки особливої $u=e^{2\pi i}$ ті самі вартости, що докола точки зерової, а що вартости v докола всіх иньших точок особливих зводять ся до вартостий докола точки $u=o$ і $u=e^{2\pi i}$, тому U має лише 5 вартостий на цілій площи чисельній, отже сповняє рівнанє альґебраічне між *u* і U пятого степеня що до U.

8. Утворім се рівнанє, а вперед розслїдім його свойства.

v є скінчене для усіх скінчених вартостий u, звідси і U є для всіх скінчених вартостий *u* скінчене. Для $u=\infty$ має V таку саму вартість, як $\frac{1}{v}$ для $u = \frac{1}{\infty}$.

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{u^5} \Pi \frac{1+u^{16(m-1)}}{1+u^{16m}}$$

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{\sqrt{2}\, u^5} + \cdots, \quad V = \sqrt{2}\, u^5 + \cdots,$$

отже V є безконечностию 5. степеня, а 5 прочих v є безконечностиями степеня $\frac{1}{5}$. Звідси U_0 (наколи пропустимо висші степенї) є:

$$U_0 = \left(a_0 u^5 - a_1 u^{\frac{1}{5}}\right)\left(a_2 u^{\frac{1}{5}} - a_3 u^{\frac{1}{5}}\right)\left(a_4 u^{\frac{1}{5}} - a_5 u^{\frac{1}{5}}\right) =$$

$$= \left(b_0 u^{\frac{26}{5}} - b_1 u^{\frac{2}{5}}\right)\left(a_4 u^{\frac{1}{5}} - a_5 u^{\frac{1}{5}}\right) = c_0 u^{\frac{27}{5}} + c_1 u^{\frac{3}{5}} + \cdots,$$

U є проте безконечностию $\frac{27}{5}$ степеня Сума рядів від'ємних функциї U є 27.¹)

З того побачимо, якого степеня що до *u* є наше рівнанє. Найже рівнанє $f(zu)=o$ буде степеня m що до z_1 а степеня m' що до *u*. Сума рядів u — яке є функциєю z на цілїй площи чисельній — є зером, або сума рядів додатних рівнає ся сумі рядів від'ємних. Наколи в рівнаню місто *u* возьмемо u_0+u', де u_0 є стала якабудь, то так як сума рядів від'ємних є та сама для функций u і u', то і сума рядів додатних остане та сама, т. є. не зависить від сталої u_0. Можна проте u_0 так дібрати, що не буде ся відносило до нїякого системy (u z) або $\left(u \frac{1}{z}\right)$, який сповняє рівняня $f(zu) = o$ та $\frac{\partial f}{\partial u} = o$, і що для $u=u_0$ сочинник при $z^{m'}$ не стає ся зером. В кождій з точок корінних рівняня m'-того степеня $f(zu_0) = o$ ряд функциї u' що до z рівнає ся степеневи рівняня що до z (очевидно при рівняня незведенім). Звідси наше рівнанє буде степеня 27. що до u.

---

[1] Наколи возьму якусь функцию f(z) в точцї t на площи, то все істнує таке число ціле n, (додатне або від'ємне), що квот $\frac{f(z)}{(z-t)^n}$ не є в точцї t анї o анї ∞. То n називає ся **рядом** функциї (Lagnerre). Наколи f(z) не стає ся в точцї t анї o анї ∞, то ряд функциї є o, наколи стає ся o, ряд є додатний, наколи стає ся ∞, ряд є відємний.

Малисьмо $\xi = \frac{v}{u^5}$; положім тепер:

$$\Phi = \frac{U}{u'^5} = (\xi - \xi_0)\ (\xi_1 - \xi_4)\ (\xi_2 - \xi_3).$$

Сочинники рівнаня арґументу ξ були функциями цїлковитими що до k^2 або u^8, отже такі будуть і сочинники рівнаня Φ, а що Φ стає ся ∞ лише для $u = o$, то рівнанє буде мало вид:

$$u^{8\beta_0}\Phi^5 + \sum_{p=1}^{4} u^{8\beta_p}(a_p + b_p u^8 + c_p u^{16} + \cdots)\ \Phi^{5-p} + (a_5 + b_5 u^8 + c_5 u^{16} + \cdots) = o.$$

Наколи положимо $\Phi = \frac{U}{u'^5}$ та помножимо через u^3, дістанемо:

$$u^{8(\beta_0 - 9)}U^5 + \sum_{p=1}^{4} u^{8(\beta_p - 9) + 15p}(a_p + b_p u^8 + \cdots)U^{5-p} + u^3(a_5 + b_5 u^8 + \cdots) = o.$$

Для вартостий *u* дуже малих є всї вартости U дуже малї степеня $\frac{3}{5}$.

Сочинник при U^5 положім $= 1$, то $\beta_0 = 9$. Позаяк дальше сочинники є функциї цїлковиті що до u^8, проте $\beta_0\ \beta_1\ \beta_2 \cdots$ мусять бути додатні, а $8(\beta_p - 9) + 15\,p > 3$, або:

$$\beta_p \geqq 10 - 2\,p.$$

Рівнанє має бути дальше степеня 27. що до u, проте в виражених в скобках підемо до такої степені u^8, що повний степень сочинника не буде більший як 27. Наколи возьмемо $\beta_p = 10 - 2p$, дістанемо рівнанє:

$$20)\qquad U^5 + \sum_{p=1}^{4} u^{8-p}(a_p + b_p u^8 + c_p u^{16})\ U^{5-p} + u^3(a_5 + b_5 u^8 + c_5 u^{16} + d_5 u^{24}) = o.$$

Се буде рівнанє жадане, в якім треба єще визначити сочинники.

9. В тій цїли возьмім функцию:

$$(U) = \Big[(V) - (v_0)\Big]\ \Big[(v_1) - (v_4)\Big]\ \Big[(v_2) - (v_3)\Big],$$

де арґумент є $\frac{1}{u}$.

$$(U) = \frac{-1}{V\ v_0\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4}\ (V - v_2)\ (v_3 - v_1)\ (v_4 - v_0) = \frac{U}{u^6}$$

на основі 15) і 16); отже наше рівнанє не змінить ся, наколи в нїм положу $\frac{1}{u}$ за u, і $\frac{U}{u^6}$ за U; дістанемо тодї:

$$\frac{U^5}{u^{30}} + \sum_{p=1}^{4} u^{p-8}\ (a_p + b_p u^{-8} + c_p u^{-16})\ \frac{U^{5-p}}{u^{6(5-p)}} +$$
$$+ u^{-3}\ (a_5 + b_5 u^{-8} + c_5 u^{-16} + d_5 u^{-24}) = 0.$$

або:

$$U^5 + \sum_{p=1}^{4} (a_p + b_p u^{-8} + c_p u^{-16})\, U^{5-p} + u^3 (d_5 + c_5 u^{-8} + b_5 u^{-16} + a_5 u^{-24}) = 0. \qquad 21)$$

Наколи порівнаєм 20) і 21), дістанемо для $p=1$:

$u^{-1}(a_1 + b_1 u^{-8} + c_1 u^{-16}) = u^7 (a_1 + b_1 u^8 + c_1 u^{16})$; се не може бути, тому сочинник при U^4 є зером.

Для $p=2$: $u^6 (a_2 + b_2 u^{-8} + c_2 u^{-16}) = u^6 (a_2 + b_2 u^8 + c_2 u^{16})$, т. є. $b_2 = c_2 = 0$.
Для $p=3$: $a_1 u^{13} + b_3 u^{15} + c_3 u^{-3} = a_3 u^5 + b_3 u^{13} + c_3 u^{21}$, т. є. $a_3 = b_3$, $c_3 = 0$.
Для $p=4$: $a_4 u^{20} + b_4 u^{12} + c_4 u^4 = a_1 u^4 + b_4 u^{15} + c_4 u^{20}$, т. є. $c_4 = a_4$;
а так само $d_5 = a_5 = c_5 = b_5$. Рівнанє перейде проте на:

$$U^5 + a_2 u^6 U^3 + a_3 u^5 (1 + u^8) U^2 + u^4 (a_4 + b_4 u^8 + a_4 u^{16}) U +$$
$$+ u^3 (a_5 + b_5 u^8 + b_5 u^{16} + a_5 u^{24}) = 0.$$

Для $u=1$, $v_0=1$, а пять иньших вартостий v дасть -1, а всї вартости U є рівні зеру, проте і сочинники при степенях U мусять бути зером для $u = 1$; т. є. $a_2 = o$, $a_3 = o$, $b_4 = -2a_4$, $b_5 = -a_5$, а рівнанє перейде на:

$$U^5 + a_4 u^4 (1 - u^8) U + a_5 u^3 (1 - u^8)^2 (1 + u^8) = 0.$$

Треба проте визначити єще тільки a_4 і a_5.

Вартости *u* дїйснїй додатнїй та дуже малїй відповідає $\varrho = si$, де s є додатне, дуже мале; звідси $e^{\varrho\pi i} = q$ є додатне, дїйсне та дуже мале:

$$u = \sqrt{2}\ q^{\frac{1}{8}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + q^{2m}}{1 + q^{2m-1}} = \sqrt{2}\ q^{\frac{1}{8}}\ (1 - q^{2m-1} + \cdots).$$

Для $m=1$ (наколи пропустимо дальші вирази) дістанемо:

$$u = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}}\ (1 - 9)$$

$$v_0 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{5\cdot 8}} \prod \left(\frac{1+q^{\frac{2m}{5}}}{1+q^{\frac{2m-1}{5}}} \right) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right)$$

$$v_1 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left(e^{\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{\pi i}{5}\,.\,18} \right);\quad e^{\frac{\pi i}{5}\,.\,18} = e^{\frac{\pi i}{5}\,.\,20}\, e^{-\frac{2\pi i}{5}}$$

$$v_1 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left(e^{\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{-\frac{2\pi i}{5}} \right);$$

так само дістанемо:

$$v_2 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left(e^{\frac{4\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{-\frac{4\pi i}{5}} \right).$$

$$v_3 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left(e^{-\frac{4\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{4\pi i}{5}} \right).$$

$$v_4 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left(e^{-\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{2\pi i}{5}} \right).$$

$$v_1 - v_4 = i\, 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{2\pi}{5}\, q^{\frac{1}{40}} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right).$$

$$v_2 - v_3 = i\, 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{4\pi}{5}\, q^{\frac{1}{40}} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right).$$

Звідси:

$$U_0 = 2^{\frac{3}{2}}\, 5^{\frac{1}{2}}\, q^{\frac{1}{40}} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right).$$

Підставмо се в рівнанє:

$$2^{\frac{15}{2}} 5^{\frac{5}{2}} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right) + a_4 \left(2^2 q^{\frac{1}{8}} (1-q^8)^2\, 2^{\frac{3}{2}} 5^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{40}} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right) \right) +$$

$$+ a_5 2^{\frac{3}{2}} (1-q^3)\, (1-u^8)^2\, (1+u^8) = o.$$

Вільний вираз:

$$2^{\frac{15}{2}} 5^{\frac{5}{2}} + a_5\, 2^{\frac{3}{2}} = o, \qquad a_5 = -\, 2^6\, 5^{\frac{5}{2}}.$$

Сочинник при $q^{\frac{1}{5}}$: $5\,.\,2^{\frac{15}{2}} 5^{\frac{5}{2}} + a_4\,.\,2^2\,.\,2^{\frac{3}{2}} 5^{\frac{1}{2}} = 0$, т. є. $a_4 = -\, 2^4\, 5^3$, а наше рівнанє буде:

$$U^5 - 2^4 5^3 u^4 (1-u^8)^2\, U - 2^6 5^{\frac{5}{2}} u^3 (1-u^8)^2 (1+u^8) = 0.$$

А се є форма Bring-Jerrard'a, треба лиш положити:

$$U = 2 \sqrt[4]{5^3}\, u \sqrt{1-8^8}\, t, \qquad \text{дістанемо:}$$

$$t^5 - t - \frac{2}{\sqrt[4]{5^3}} \frac{1+u^8}{u^2 \left(1-u^8\right)^{\frac{1}{2}}} = 0;$$

проте:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}} \; \frac{1+u^8}{u^2\left(1-u^8\right)^{\frac{1}{2}}} = A.$$

Положім:

$$\frac{\sqrt[4]{5^5}\;A}{2} = a,$$ то дістанемо:

$$1 + 2u^8 + u^{16} = a^2u^4 - a^2u^{15},$$ а що $u^4 = k$, то:

$$k^4 + a^2k^3 + 2k^2 - a^2k + 1 = 0.$$

Рівнанє се дає ся альґебраїчно розвязати; знаєм k, то можемо найти відповідну йому якусь вартість q з взору:

$$q = \frac{1}{16}\,k^2 + \frac{1}{32}\,k^4 + \frac{21}{1024}\,k^6 + \frac{31}{2048}\,k^8 + \cdots,$$

а звідси ϱ (бо $q = e^{\varrho\pi i}$). Наколи маємо ϱ, дістанемо 5 вартостий v, а дальше належачі до них 5 вартостий U; а наколи кожду з тих вартостий поділимо через $2\sqrt[4]{5^3}u\,\sqrt{1-u^8}$, дістанемо розвязку загального рівнаня пятого степеня.

Тернопіль в маю 1897. р.

Причинок до подїлу рівнань другого степеня

написав

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

Математика знає цїлу ґрупу інтересних квестий, які ведуть до зовсїм противних, подекуди і противорічних вислїдів, після того, з якої точки розбирати мем таку квестию. Тут зачислити треба много інтересних квестий з рахунку імовірности,¹) які ведуть до ріжних результатів, а се можна би витолкувати в той спосіб, що відповідно до точки виходу зміняють ся і самі заложеня.

Дальше треба зачислити тут розслїди, які відносять ся до безконечности; показують они, що не все одно, на якій дорозї переходимо з конечности до безконечности; що не все одно, чи ми уважати будемо ту безконечність за границю тої або иньшої фіґури плоскої.

Вже англїйский математик Cayley подав примір на се, що спосіб переходу з конечности до безконечности має вплив на вислїд.

Наколи іменно возьмемо інтеґрал:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2 + y^2)\, dxdy = \pi,$$

то інтеґрал сей є границею квадрату о середоточцї в початку системи сорядних; коли перетворимо сей інтеґрал на сорядні бігунові (полярні):

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \text{ якобіян } = r,$$

---

¹) Пор. Poincaré: Calcul des probabilités ст. 94 et sqts.

а через се станемо уважати безконечність яко границю кола, дістанемо на вартість інтеґралу:

$$I = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r \sin(r^2)\, dr d\varphi = \pi \Big/_{0}^{\infty} \cos(r^2),$$

отже результат зовсїм неозначений.

І нинїшна квестия, яку будемо розбирати, веде до ріжних вислїдів, наколи єї розбирати-мемо на дорозї чисто-ґеометричній; тому-то вкінци переводимо єще аналїзу на дорозї альґебраічній, а через се входимо подекуди і в царину чисел надскінчених (transfinit) G. Cantora.

---

1. Річ, що є предметом нинїшньої розвідки, розбирає слїдуюче питанє:

Винайти відношенє всїх рівнань 2. ст., які в границях (z_0 — z_1) незвісної мають 0, 1, 2 коренїв дїйсних, до числа всїх рівнань 2. ст.[1]

Маємо рівнанє 2-го степеня виду:

$$f(z) = z^2 - 2az + b = o \qquad (a, b \text{ дїйсні}).$$

Діскрімінант того рівнаня зведений до зера дає нам параболю

$$a^2 - b = o$$

в сорядних (a b) о вершку (o, o). Рівнанє $f(z) = o$ представляє при змінним параметрі z цїлу множінь (Mannigfaltigkeit) стичних, що їх обводня́ (Enveloppe) є пaраболя $a^2 - b = o$.

Возьмім дві вартости параметру z т. є. z_0 і z_1, то до них належати-муть стичні (фіґ. I.):

$$z_0{}^2 - 2az_0 + b = o.$$
$$z_1{}^2 - 2az_1 + b = o.$$

Они перетинають ся в точцї M $\left(a = \frac{z_0 + z_1}{2},\ b = z_0 z_1\right)$,

а кут, під яким перетинають ся, є:

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{2(z_1 \backsim z_0)}{1 + 4z_0 z_1},$$

де знак $\backsim$ показує, що величину меншу треба від більшої відняти.

---

[1] Гадку заняти ся тим питанєм подав менї Др. Жоравский, проф. унїверс. краківского.

Ті стичні стикають ся з параболею в точках:

$$A\,(a = z_0,\quad b = z_0{}^2), \qquad B\,(a = z_1,\quad b = z_1{}^2).$$

Площа розпала ся тепер на слїдуючі части:

I.) $(A+A')$ представляє таку множі́нь вартостий змінних a і b, що для них рівнанє $f(z)=o$ в границях $(z_0 \,\text{----}\, z_1)$ не має анї одного дїйсного кореня.

II.) $(C+C')$ представляє такі рівнаня, що в границях $(z_0 \,\text{----}\, z_1)$ мають один корень дїйсний.

III.) B характеризує рівнаня, що в границях $(z_0 \,\text{----}\, z_1)$ мають оба коренї дїйсні.

Так як площа (ab) представляє при зміняючих ся a і b цїлу безконечну множі́нь рівнань 2. ст., проте є річ очевидна, що згадані відношеня, що їх означимо через S_0, S_1, S_2, будуть:

$$S_0 = \frac{A + A'}{\text{Цїла пл.}}, \quad S_1 = \frac{C + C'}{\text{Цїла пл.}}, \quad S_2 = \frac{B}{\text{Цїла пл.}}.$$

Ті відношеня дадуть нам рівночасно імовірність, що в даних границях якесь рівнанє буде мати 0, 1, 2 дїйсних коренїв.

Вже з гори бачимо, що при скінчених z_0 і z_1 S_2 буде величина безконечно мала, бо B є дуже мала часть площі (ab):

$$B = \frac{1}{4}\, z_0 z_1 (z_0 + z_1) + \frac{1}{12}\, (z_1{}^3 + z_0{}^3),$$

як не тяжко обчислити.

Наші відношеня обчислимо наперед при скінчених A, A', C, C', а опісля розширимо їх до безконечности.

Переходити до безконечности можна в ріжний спосіб. Спосіб переходу, який ту відразу насуває ся, є перехід при помочи кола.

Наколи зачеркнемо сорозмірно великим лучем коло з точки M (фіґ. I.), так щоби в собі заключало обі точки стичности, дістанемо — як се очевидно — при скінчених A, A', C, C':

$$s_0 = \frac{2r^2\delta - B}{r^2\pi}, \quad s_1 = \frac{2r^2(\pi - \delta)}{r^2\pi}, \quad s_2 = \frac{B}{r^2\pi};$$

а коли возьмемо: $\lim r = \infty$,

отже так, що в порівнаню з r^2 B можна пропустити, дістанемо:

$$S_0 = \frac{\delta}{\pi}, \quad S_1 = \frac{\pi - \delta}{\pi}, \quad S_2 = o.$$

Відношеня ті при великім r не є від r залежні. Наколи проте r розширимо до безконечности, то дістанемо при узгляднено вартости δ відношеня:

$$S_0 = \frac{\operatorname{arc\,tg} \dfrac{2\,(z_1 \sim z_0)}{1 + 4\,z_0\,z_1}}{\pi}, \quad S_1 = \frac{\pi - \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2\,(z_1 \sim z_0)}{1 + 4\,z_0\,z_1}}{\pi}, \quad S_2 = o.$$

2. Иньший вислїд дістанемо, наколи перейдемо до безконечности при помочи простокутника.

Нарисуймо простокутник так великий, щоби заключав в собі точки A, B, M (фіґ. II.). Обчислїм тут части A′, A, C, C′ (при чім берім лиш беззглядні вартости сорядних).

Отже:

$$A = \frac{1}{2}\,(a + a')\,(b + z_0 z_1) - B.$$

Щоби обчислити A′, мусимо знати сорядні точок N і P; они випадуть з перетинаня лїнїї $z_0{}^2 - 2az_0 + b = o$ з лїнїєю $b = -b$, отже:

$$N \equiv \left(-\,b,\ a = \frac{z_0{}^2 - b}{2z_0}\right),\quad P \equiv \left(-\,b,\ a = \frac{z_1{}^2 - b}{2z_1}\right).$$

Проте:

$$\overline{NP} = \frac{z_1{}^2 - b}{2z_1} - \frac{z_0{}^2 - b}{2z_0} = \frac{(z_1 - z_0)\,(b + z_0 z_1)}{2z_0 z_1},$$

а часть A′:

$$A' = \frac{(b^2 - z_0 z_1)\,(z_1 - z_0)}{4z_0 z_1}.$$

Цїлий простокутник є:

$$2b(a + a'),$$

отже при скінчених A, A′, C, C′ наші відношеня є:

$$s_0 = \frac{\frac{1}{2}\,(a + a')\,(b + z_0 z_1) + \frac{1}{4z_0 z_1}\,(b^2 - z_0{}^2 z_1{}^2)\,(z_1 - z_0) - B}{2b\,(a + a')},$$

$$s_1 = \frac{2b(a + a') - \frac{1}{2}\,(a + a')\,(b + z_0 z_1) + \frac{1}{4z_0 z_1}\,(b^2 - z_0{}^2 z_1{}^2)\,(z_1 - z_0)}{2b\,(a + a')},$$

$$s_2 = \frac{B}{2b\,(a + a')}.$$

Перейдїм до безконечности:

$$\lim a = \lim a' = \lim b = \infty,$$

то дістанемо по переведеню відповідних скорочень:

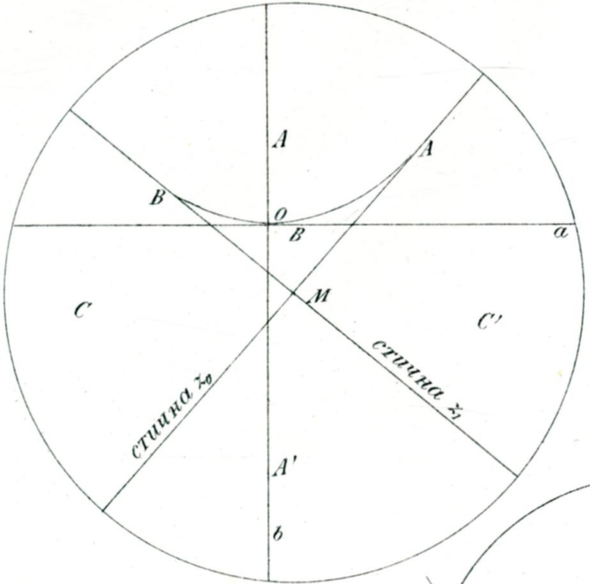
$$S_0 = \frac{z_1 + 4z_0 z_1 - z_0}{16 z_0 z_1},$$

$$S_1 = \frac{z_0 + 12 z_0 z_1 - z_1}{16 z_0 z_1},$$

$$S_2 = o.$$

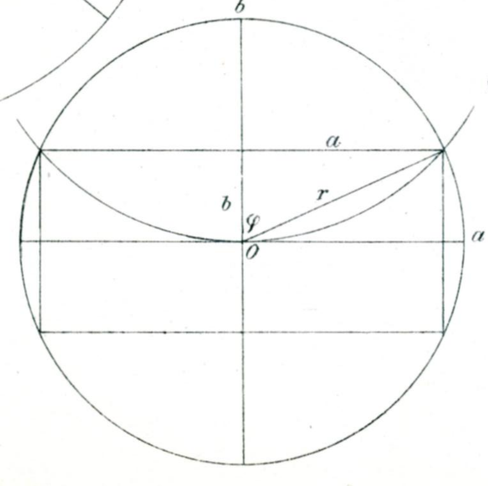
Маємо проте вислїд зовсїм иньший, як при переходї до безконечности при помочи кола.

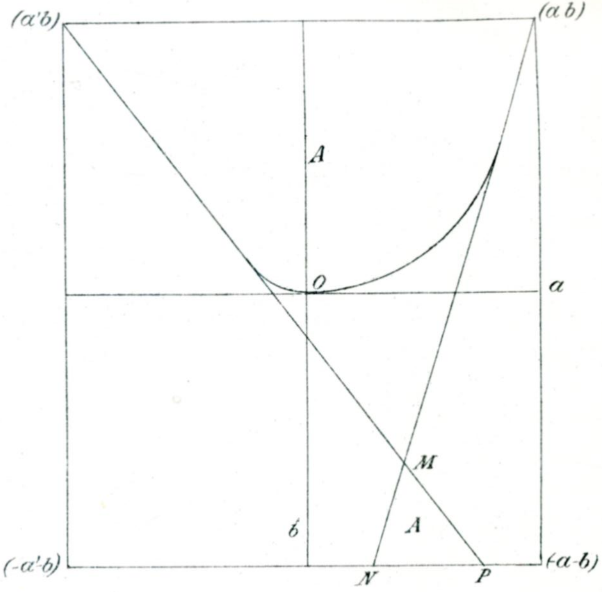
Котрий з тих вислїдів є імовірнїйший?



фiг I

фiг III





фiг II

Ми випроваджували наші відношеня для яких-небудь скінчених вартостий арґументу z. Мусять они проте остати і для $z_1 = z_0$. Для тих вартостий маємо, наколи возьмем коло:

$$S_0 = o, \quad S_1 = 1,$$

а наколи возьмемо простокутник:

$$S_0 = \frac{1}{4}, \quad S_1 = \frac{3}{4}.$$

В першім разї значить се, що в точцї $z_0 = z_1$ (яка лежить на параболї) не ма зовсім рівнань о коренях спряжених, а всї рівнаня мають один (отже і оба) корінь дїйсний; в другім случаю, що в сїй точцї є і такі і такі рівнаня, а се є неможливе, бо в границях (z_0 — z_0) є лиш рівнаня 2 ст., які власне мають корінь z_0, і то корінь дїйсний (бо z_0 є дїйсне). Перший вислїд є проте імовірнїйший, так як він каже, що імовірність, що рівнанє 2. ст. для дїйсної вартости z_0 має один корінь дїйсний, рівнає ся певности, а се є і без того очевидне.

3. Однак тих відношень не можна розширити для z_0 і z_1 безконечно великих, бо наколи $z_0 = z_1 = \infty$, то средоточка кола M посуне ся в безконечність; обі стичні станут асимптотами, а так як парабола має лиш одну асимптоту, цїлу в безконечности, то дістанемо місто двох стичних одну асимптоту в безконечности і наша основна фіґура не має значіня.

Наколи однак іде нам о відношенє всїх рівнань 2 степеня з 0, 2 коренями дїйсними до всїх рівнань (в границях $-\infty$ — $+\infty$), то возьмем за Кляйном (Klein) фіґуру III., де парабола відповідає рівнаням о 0 коренях, а проча часть площі рівнаням о двох дїйсних коренях.

Возьмім тут коло, яке опісля розширимо до безконечности.

Часть параболї, замкнена луком кола, має поле — як легко обчислити —:

$$\frac{1}{3} a^3 + (a^2 + a^4) \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a},$$

отже відношенє:

$$s_0 = \frac{\frac{1}{3} a^3 + (a^2 + a^4) \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a}}{(a^2 + a^4)\pi},$$

яке для $\lim a = \infty$ дає:

$$S_0 = o,$$

що є очевидно абсурдом.

Колиж до безконечности перейдем при помочи простокутника, дістанемо:

$$S_0 = \frac{\frac{4}{3}a^3}{4a^3} = \frac{1}{3},$$

а се відношенє не залежить від *a* і є сталою величиною.

Очевидно:

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

4. Зовсім инакше представляє ся річ з точки аналізи альґебраічної.

Маємо рівнанє:

$$x^2 - 2ax + b = o,$$

то:

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - b}.$$

Рівнаня мають розвязки дійсні для всїх від'ємних вартостий *b*, та для $a^2 > b$, наколи *b* є додатне, отже:

$$\left.\begin{array}{r} \text{корені дійсні} \\ \text{є для:} \end{array}\right\{ \begin{array}{l} b = (o \ldots - \infty) = (1) \\ b = (o \ldots a^2) = (2), \end{array}$$

$$\text{спряжені для:}\quad b = (a^2 \ldots + \infty) = (3).$$

Вартостий (1) є безконечно много, так само (2) і (3), но очевидно, що множінь (1) є:

$$(1) \equiv (2) + (3),$$

а позаяк:

$$(3) = (a^2 \ldots + \infty) = (a^2 \ldots 2a^2) + (2a^2 \ldots 3a^2) + \ldots \text{ in inf.}$$

а:

$$(2) = (o \ldots a^2) \backsim (a^2 \ldots 2a^2),$$

то (3) є безконечно рази більше, чим (2), отже:

$$(3) \equiv \infty\,(2),$$

а проте:

$$(1) \equiv (2) + \infty\,(2) = (\infty + 1)\,(2).$$

Бачимо проте, що рівнань з розвязкою дійсною є безконечне число, так само рівнань з розвязками спряженими, но наколи множінь рівнань з розвязками спряженими є першим числом надскінченим,[1]) то множінь рівнань з розвязками дійсними є другим числом надскінченим, проте є більше рівнань з розвазками дійсними.

Тернопіль 20. жовтня 1897. р.

◆

---

[1]) Пор. н. пр. Dickstein: Pojęcia i metody matematyki I. ст. 37.

Електро-маґнетна теория сьвітла і филї електричні

написав

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

(Посьвячую памяти мого бл. п. брата Маріяна).

ВСТУП.

В розвою теоретичної оптики відріжняємо три головні фази: теорию випливу (еманациї), теорию фильованя (ундуляциї) та теорию електромаґнетну. Дві перші повстали майже рівночасно, а сотворили їх два найбільші корифеї фізики XVII. віку, Newton і Huyghens. В критичний розбір обох тих теорий не будемо входити, так як наука про них давно вже висказала свою гадку; пригадуємо лише, що перша з них т. є. теория випливу, завдяки великому авторитетови женіяльного Newton’a серед сучасних, остоялась єще й в перших десятках нашого столїтя, а прихильниками єї були навіть так критичні уми, як Laplace та Poisson. Змаганя Eulera, щоби теориї фильованя виборoти побіду, прогомонїли без слїду і доперва глубокі розслїди Fresnel’a, Young’a, Foucault’a, F. Neumann’a та других рішили цїлу квестию в користь теориї ундуляциї. Теория ся розвинулась дуже успішно, а завдяки теоретичним роботам Hamilton’a над стіжковим заломанєм (конїчна рефракция), яке опісля дорогою досьвіду викрив Lloyd, набралась що раз більшої імовірности.

В теориї фильованя є однак деякі сумнїви, що їх досьвід чисто оптичного характеру не був в силї рішити. Такою сумнївною квестиєю була н. пр. квестия площі поляризациї. Як звісно Fresnel принимав, що площа дрогань є прямова (нормальна) до площі поляризациї а що через се густота етеру є змінна; противнож F. Neumann принимав, що обі ті площі є тотожні, що отже густота етеру є стала, а змінна є за те єго пруживість в ріжних напрямах. Обі ті гіпотези зовсїм добре вияснюють прояви, які виступають в середовищах однородних, проте квестия, чи гіпотеза Fresnel'а чи Neumann'а є імовірнійша, лишалась поки-що непорішена.

Та в половинї нашого столїтя настала зміна в толкованю проявів фізичних. Завдяки епоховим роботам R. Mayer'а та Joule'a видерла наука природї найважнїйший закон, точно висказаний Clausius'ом та Helmholtz'ом, закон, під який можна підтягнути усї прояви природи; є се засада захованя енерґії. Се епохальне відкритє мусїло навести на здогад, що всї роди енерґії, які доси відріжняла наука серед явищ природи, є остаточно формою одної і тої самої енерґії. За правдивостию того погляду промовляти почала ся обставина, що одну форму енерґії можна перетворити в другу; і дійсно побачено, що істнує звязь між працею механїчною а теплом. Звернено ся тепер до звязи між сьвітлом та електричностию, а сї змаганя видали вскорі великі овочі.

Гадка, що між проявами оптичної та електричної натури єствує звязь, проявлялась вже по части в умі Gauss'а, Weber'а, Riemann'а а головно L. Lorenz'а та Faraday'а, що викрив навіть скрученє площі поляризациї під впливом току. Однак першим, що потрафив вивести звязь поміж тими обома з виду ріжними ґрупами явищ, був James Clerk Maxwell (1865). Сей, ведений критичним та глубоким умом, дав при помочи математичної аналїзи засновок до нової будівлї, що її назвав електромаґнетною теориєю сьвітла. Права, що їх теоретично випровадив Maxwell, потвердили та стверджають дорогою досьвіду його численні наслїдники. Роботи ті дали доказ, що сьвітло є проявою електромаґнетною.

Чи через се стратила що теория фильованя? Зовсїм нї; наука дістала лиш один доказ більше, що енерґія є лиш одна, а проявляти ся може під ріжними а ріжними видами. Сама теория сьвітла віднесла лиш через се хосен, бо прояснилось у нїй много квестий сумнївних.

Теория Maxwella глядить причину явищ електричних та маґнетних в дроганях поперечних; правдивість сього погляду виказав дорогою досьвіду померший перед часом фізик з Bonn, Гейнріх Hertz, а його роботи над филями електричними творять, як каже V. Lang, епоху в сучаснїй фізицї.

Завданєм нашим буде подати вислїди електромаґнетної теориї сьвітла, а також показати шляхи, на які повела фізику згадана теория. Заким однак перейдемо до самої електромаґнетної теориї сьвітла, мусимо бодай коротко розібрати права піль маґнетних, так як на них основуєсь цїла теория Maxwell'а. Та хоча вислїди теориї піль маґнетних Maxwell'а згоджують ся вповнї з вислїдами, до яких дійшли Helmholtz, Weber, Neumann та Thomson, однак точка, з якої вийшов Maxwell, є зовсїм иньша, як у тамтих вчених. Тому-то в наших розслїдах будемо майже виключно узглядняти гіпотези та теориї Maxwell'а, так як ті до зрозуміня теориї сьвітла є необходимо потрібні.

ЧАСТЬ ПЕРША.

Теория піль маґнетних.

Значінє діелєктриків в теориї Maxwell'a.

1. В давнїйших теориях елєктричних мале лишень або і жадного не приписувано значіня ізоляторам, або як їх назвав Faraday, дїелєктрикам. Весь процес, що виступав в прояві елєктричнім, відбував ся в самім провіднику, а сам ізолятор поводив ся зовсїм пассивно. Явище індукциї приписувано просто дїланю на віддаль (actio in distans). Були правда уми, що нїяк не могли погодити ся з гадкою, що можливе є якесь дїланє на віддаль. Такими були Poisson та Mosotti, що бодай в части признали діелєктрикам значінє в проявах елєктричних.[1] Рівнож і Faraday відкидав „actio in distans“, а введене ним понятє піль маґнетних (зглядно елєктричних) та лїнїй сил, хоч не толкує істоти явищ елєктричних, то однак бодай кидає сьвітло на дїланя, які виступають в тих явищах. Доперва Maxwell виступив з поглядом, що не провідники, але як раз діелєктрики є місцем збірним для енерґії елєктричної, що проте їм треба приписати перворядне значінє; се твердженє було основою, на якій Maxwell опер свою теорию. Після Maxwella цїлий діелєктрик є наповнений материєю легкою, нетяжкою, що поводить ся так як сьвітляний етер; сю течь після Poincaré називати мем течию індукцийною (хоча Maxwell називає її просто елєктричностию). Наколи всї провідники, розміщені в діелєктрику однороднім, находять ся в станї нормальнім, то течь індукцийна находить ся в рівновазї нормальній; наколиж провідники будуть наелєктризовані, но з причини індукциї елєктростатичної маси елєктричні

---

[1] Глянь н. пр. Poincaré: Electricité et l'optique т. I. розд. II.

розміщені на них найдуть ся в рівновазї, то течь індукцийна перейде після Maxwell'а в стан, званий рівновагою напруги, або як говорять нїмецкі фізики, в стан поляризациї діелєктричної.

Наколи дробина течи індукцийної зістане вихилена з положеня нормальної рівноваги, то після Maxwell'а зайде ту т. зв. електричне пересунене. Складові того пересуненя f, g, h є після Maxwell'a:

$$1)\quad f = -\frac{K\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{4\pi},\quad g = -\frac{K\dfrac{\partial\psi}{\partial y}}{4\pi},\quad h = -\frac{K\dfrac{\partial\psi}{\partial z}}{4\pi},$$

де ψ є потенциял електричний в уважаній точцї (xyz) діелєктрика, а K є т. зв. сочинником діелєктричним (питома спроможність індукцийна (Vermögen).[1]) Рівнаня ті подає Maxwell a priori, правдивість їх показує деинде.

З рівнань 1) можна вивести просто величину складових сили, що дїлає на елємент dxdydz течи індукцийної, яка находить ся в станї поляризациї. Позаяк, як звісно, походні потенциялу дають величину повисших складових, то, коли ті складові є ξ, η, ζ:

$$2)\quad \xi = -\frac{4\pi}{K}f,\quad \eta = -\frac{4\pi}{K}g,\quad \zeta = -\frac{4\pi}{K}h,$$

з відки слїдує, що складові тої сили є пропорциональні до складових електричного пересуненя.

Позаяк зі зміною набою якогось провідника, що находить ся в діелєктрику, зміняє ся потенциял ψ, проте зміняють ся і складові f, g, h пересуненя; наколи проте електричність на провідниках находить ся в руху, то течь індукцийна не може оставати в супокою. Maxwell доказує,[2]) що електричність та течь індукцийна поводять

---

[1]) Так як в теориї електромаґн. сьвітла стала K має дуже велике значінє, тому подаємо точну єї дефініцию після Faraday'a: Стала K діелєктрика в огляду на воздух, уважаний за одиницю, є рівна відношеню (Verhältniss) поємности (Capacität) конденсатора, що має в собі сей діелєктрик, до поємности другого конденсатора, що має ту саму величину та той сам вид, а є наповнений воздухом. Пор. н. пр. Tumlirz: Elektromagnetische Theorie des Lichtes ст. 15.

[2]) Maxwell доходить іменно до рівнаня: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0$, яке є характеристичне після правил гідромеханїки для течий нестисних. Глянь н. пр. Thomson u. Tait: Theoretische Physik т. I. ч. I. ст. 141. 3 і ст. 256, 6.

ся як дві течі нестисні, т. є. що скількість течи індукцийної, яка в данім моменті вийшла через поверхню, є рівна скількости електричности, яка в тім самім часї там увійшла. Течь індукцийна визначуєсь проте великою пруживостию.

Обчислимо тепер енерґію потенцияльну, яку представляє систем провідників, набитих електричностию та розміщених в діелектрику. Виражене на ту енерґію можна одержати, або наколи зведемо енерґію на працю, яку виконують маси з причини взаїмного відпиханя та притяганя тих мас електричних, або просто з пруживости течи індукцийної, яку виведено зі стану нормальної рівноваги.

Елемент працї, що є виконана при пересуненю електричности в елементї просторони dxdydz, яке то пересунене має складові δx, δy, δz, є очевидно:

$$- \rho \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta z \right] dxdydz,$$

де ρ є густота електричности, а $\rho dxdydz$ маса елементу dxdydz. Цїлковита праця зі знаком противним рівнає ся очевидно зростови енерґії потенцияльної W; проте:

$$\delta W = \int\int\int \rho \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta z \right] dxdydz.$$

Звідси при помочи цїлого ряду перетворень, які основують ся на звіснім твердженю Gauss'a[1]):

$$\int\int F \cos (Y, N)\, dx\, dz = \int\int\int \frac{\partial F}{\partial y} dxdydz,$$

та розширенім твердженю Poisson'a:

$$\Sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = - 4\pi\rho,$$

дїйдемо до вираженя:

$$\delta W = \delta \int\int\int \frac{K}{8\pi} \Sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dxdydz,$$

отже:

$$W = \int\int\int \frac{K}{8\pi} \Sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dxdydz.\text{[2])} \qquad 3)$$

---

[1]) Пор. н. пр. Lang: Einleitung in die theoretische Physik ст. 163.

[2]) Пор. Maxwell: Lehrbuch der Electricität u. Magnetismus (перев. Weinstein) т. I. стор. 132.

Стала інтеґрованя є зером, бо енерґія потенцияльна для стану нормального є зером.

При помочи рівнань 1) можна послїдне вираженє представити в формі:

$$W = \int\int\int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2)\,dxdydz. \qquad 3')$$

2. Будова діелєктриків однородних мусїла навести Maxwell'а на здогад, що в загалї в укладї елєктричнім, який є зложений з провідників та діелєктриків, істнують виключно токи замкнені.

В звичайній теориї електричности відріжняємо іменно токи замкнені і отверті, які устають тодї, коли ріжниця потенциялів стане рівна силї елєктромоторичній жерела електричного (н. пр. коли бігуни елєменту елєктричного сполучимо з обома обкладками конденсатора або з двома ізольованими кондукторами); Maxwell противно принимає лиш токи замкнені. Бо возьмім т. зв. ток отвертий, який повстає тодї, коли бігуни елєменту ґальванічного получимо з двома ізольованими кондукторами. Кондуктор, що елєктризує ся додатно, мусить після теориї унітарної приняти більше течи елєктричної, як тодї, коли був в станї нормальнім, на другім кондукторі, що елєктризує ся від'ємно, мусить зменшити ся скількість плину елєктричного. Позаяк однак в теориї Maxwell'а елєктричність є течь нестисна, проте єї густота мусить остати стала; не може проте в одній точцї наступати згущенє, а в другій розрідзенє. Тому-то сей надмір електричности на однім кондукторі випихає з него часть течи індукцийної, яка виповняє усю просторонь; ся знова течь потручає дальші дробини течи індукцийної, що виповняє діелєктрик, а що та течь є нестисна, то на другий кондуктор мусить ввійти така сама скількість течи індукцийної, яка з першого уступила. З тої причини одержуєм ток замкнений через діелєктрик, а так як дробини течи індукцийної пересувають ся подовж лїній сил, як показують рівнаня 1), проте можна сказати, що токи отверті замикають ся в теориї Maxwell'а подовж лїній сил.

В теориї Maxwell'а істнують проте виключно токи замкнені.

3. Токи замкнені дїлить Maxwell на токи двох катеґорий: токи проводу та токи пересуненя. Токи проводу є то токи замкнені, що перебігають провідник (злучник), токи пересуненя повстають через пересуненє дробин течи індукцийної. Наколи маємо до дїла з т. зв. током отвертим звичайної теориї, то очевидно ток сей складає ся з току проводу та току пересуненя. Очевидна є також річ,

що в теориї Maxwell'а могуть істнувати також замкнені токи, які є виключно токами пересуненя; токи сї мають велике значінє в електромаґнетній теориї сьвітла.

Є річ природна, що в теориї Maxwell'а токи проводу мусять підчинятись законам, опертим на досьвідах, себ то законам Ohm'a,[1] Joule'a, Ampère'a та законам індукциї. Що до токів пересуненя, то

---

[1] З огляду на се, що законом Ohm'a прийдесь нам нераз в дальшім тягу покористуватись, подаємо той закон в виді троха иньшім, як ся звичайно подає. Наколи провідник є лінійний та однородний, а сила електромоторична є чинна лиш поміж його кіньцями, дальше наколи опір його є R, натуга току є i, ріжниця потенциялів є $\psi_1 - \psi_2$, то дістанемо звичайне вираженє на закон Ohm'a: $Ri = \psi_1 - \psi_2$.

Позаяк de facto і в самім провіднику в ріжних місцях виступає сила електромоторична (з причин термічних, хемічних etc.), тому наколи сума тих сил електромоторичних є ΣE, дістанемо закон Ohm'a:

$$Ri = \psi_1 - \psi_2 + \Sigma E.$$

Але опір $R = \frac{l}{Cdw}$, де l є довжина злучника, dw перекрій, а C т. з. сочинник проводу питомого; прото:

$$\frac{li}{Cdw} = \psi_1 - \psi_2 + \Sigma E.$$

Наколи возьмемо безконечно малий елемент злучника о довготі dx та назначимо ріжницю потенциялів на його кіньцях через $-d\psi$, а через Xdx зміну сили електромоторичної кожного иньшого происходженя в тім елементі, дістанемо:

(скіловість)

$$\frac{i}{Cdw} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + X; \quad \frac{i}{dw} = u$$ (скорість перепливу електричности), проте:

$$\frac{u}{C} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + X$$ і се є закон Ohm'a. Для провідників о трох розмірах є очевидно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u}{C} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} + X \\ \frac{v}{C} &= -\frac{\partial\psi}{\partial y} + Y \\ \frac{w}{C} &= -\frac{\partial\psi}{\partial z} + Z \end{aligned}\right\}$$ де u, v, w є складові скорости, а X, Y, Z складові сили електромоторичної довільного походженя в елементі об'єму dxdydz.

Очевидно, що:

$$u = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t},$$

де t є час.

Maxwell принимає, що і они підчиняють ся законови Amperè'a та законам індукциї, за те не мож однак відносити до них законів Joule'a і Ohm'a, вже із за того, що токи ті мусять при своїм повставаню поборювати опір, який є вислїдом пруживости течи індукцийної, а опір сей є очевидно иньший, чим опір провідника.

Істнують єще і дальші ріжниці між токами проводу а токами пересуненя. Після Maxwell'a має течь індукцийна, що виповняє діелєктрик, наклін порушати ся під впливом сил елєктричних, подібно як елєктричність, що виповняє провідник, так як обі ті течи яко нестисні взаїмно ся випихають. Рух дробин течи індукцийної устає дуже скоро з причини противдїлаючої сили пруживости, якою ся теч в високій мірі визначуєсь, а в другім разї рух не устає, бо — як Maxwell доказує — теч, що находить ся в внутрі проводячого середовища не має зовсїм сил пруживости. Звідси походить, що токи пересуненя могуть тревати лиш короткий час, якого треба, щоби рівновагу назад спровадити; токи проводу могуть тревати так довго, як довго з причини дїлань внішних істнує на обох кінцях провідника ріжниця потенциялів (сила елєктромоторична).

Для токів проводу істнують на основі розширеного закону Ohm'a рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= X - \frac{u}{C} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= Y - \frac{v}{C} \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} &= Z - \frac{w}{C} \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Для складових сил, які дїлають на елємент діелєктрика, малисьмо рівнаня 2); наколи крім сили елєктромоторичної о складових $\xi = \frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\eta = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\zeta = \frac{\partial\psi}{\partial z}$, яка дає ся звести до дїлань елєктростатичних, виступлять єще иньші сили елєктромоторичні, які дїлають індукцийно на діелєктрик, а які назвалисьмо ΣE о складових X, Y, Z, то рівнаня 2) приймуть тепер для токів пересуненя вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= X - \frac{4\pi}{K} f \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= Y - \frac{4\pi}{K} g \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} &= Z - \frac{4\pi}{K} h \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Бачимо проте, що токи пересуненя залежать від великости пересуненя (т. є. від f, g, h), а токи проводу від $u = \frac{\partial f}{\partial t}$ $v = \frac{\partial g}{\partial t}$, $w = \frac{\partial h}{\partial t}$ т. є. від скоростий пересуненя.

Токи проводу підлягають кромі сього єще звісному законови Kirchhoff'а, після якого в точцї, де сходить ся більше провідників (лїнійних або о трох вимірах) сума натуг всїх токів є зером. Виразом сього закона є рівнанє:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = o,^{1)}$$

бо натуги токів є пропорціональні до скоростий u, v, w.

Закон сей є доказом, що електричність є теч нестисна без огляду на се, чи ся находить в станї статичнім чи нї.

В сей отже спосіб навели ми коротко головні свойства діелектриків після теориї Maxwell'а. Тепер перейдемо до головних прав явищ маґнетних, електромаґнетних та електромаґнетної індукциї, або в загалї до прав піль маґнетичних, о скілько они остають в ґенетичній звязи з теориєю сьвітла.

Правила піль маґнетних (в тїснїйшім значіню).

1. Наколи натуга або степень намаґнесованя магнета є I, а єї складові в напрямах осий x y z є A, B, C $(I = (A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}})$, то величина потенциялу в якійсь точцї P поза маґнетом представляє ся взором:

$$\Omega = \int \frac{lA + mB + nC}{r} d\omega - \iiint \frac{\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}}{r} dxdydz \quad 1)$$

де l, m, n є напрямні cosinus'и кутів, що їх творить елємент поверхневий dω маґнета з вісьми x, y, z.[2]

---

[1] Рівнанє се можна легко вивести з 4). Наколи рівняня сї зріжничкуємо та додамо, то з огляду на се, що X, Y, Z, C є сталї, та з огляду на рівнанє Laplace'а:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = o$$

дістанемо се рівнанє Kirchhoff'а.

[2] Гл. н. пр. Poincaré loc. cit., також Maxwell loc. cit. т. II, ст. 13.

2. Складові сили маґнетної, яка дїлає на одиничний додатний бігун маґнетний, що лежить поза маґнетом, є очевидно походними потенцияну зі знаком від'ємним, тому то складові ті є:

$$\alpha = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}. \qquad 2)$$

3. Щоби винайти величину сили, що дїлає на одиничний бігун маґнетний, який находить ся в внутрі маґнета, мусимо зробити в маґнетї малу заглубину і там вложити пробний маґнет. Тодї маґнет роздїлить ся на дві части, одну часть внішну зглядом бігуна P, до якої відносять ся рівнаня (2), та часть, в якій містить ся бігун P (Фіґ. I.); дїланє вислїдне сеї части на бігун P най буде R. Через се однак зміняє ся дїланє маґнета, а зміна та залежить від форми заглубини. Щоби отже обчислити силу в якійсь точцї заглубини, треба знати єї вид.

Maxwell бере один лиш случай,[1]) що заглубина має вид валця; на случай коли довгість валця в порівнаню з грубостию тогож є дуже велика, дістанемо $R=o$, на случай що довгість валця є в порівнаню з грубостию тогож дуже мала, дістанемо після Maxwell'а:[2])

$$R = 4\pi I.$$

I має складові A, B, C, R буде мало проте складові $4\pi A$, $4\pi B$, $4\pi C$, отже в тім случаю цїлковите дїланє маси маґнетної на одиничний бігун маґнетний, що ся находить в внутрі маґнета, має складові:

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{\partial \Omega}{\partial x} + 4\pi A = \alpha + 4\pi A \\ b &= --\frac{\partial \Omega}{\partial y} + 4\pi B = \beta + 4\pi B \\ c &= -\frac{\partial \Omega}{\partial z} + 4\pi C = \gamma + 4\pi C \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Складові a, b, c, називає Maxwell сладовими маґнетної індукциї в внутрі маґнета.

4. Між індукциєю маґнетною а силою маґнетною істнує проте ріжниця; се вже слїдно й з того, що так як α, β, γ, є походними потенцияну, то:

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = -d\Omega \text{ (цїлковита ріжничка)};$$

---

[1]) Maxwell loc. cit. II. ст. 28.

[2]) Maxwell loc. cit. II. ст. 29.

а тим часом для складових маґнетної індукциї ся звязь не істнує зовсїм.[1])

Декотрі тїла, як пр. желїзо, коли найдуть ся в поли маґнетнім, дістають свойства маґнетні з причини індукциї маґнетної: після Poisson'а складові маґнетизму, індукованого в якійсь точцї такого тїла, є пропорциональні до складових сили маґнетної в тій точцї, отже складові ті є:

$$A = k\alpha, \quad B = k\beta, \quad C = k\gamma,$$

де k є натуга бігуна маґнетного, який творить довкола себе згадане поле маґнетне. Після сказаного складові індукциї в указаній точцї будуть:

$$\begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi A = (1 + 4\pi k)\,\alpha \\ b &= \beta + 4\pi B = (1 + 4\pi k)\,\beta \\ c &= \gamma + 4\pi C = (1 + 4\pi k)\,\gamma, \end{aligned}$$

де — як се з елементарного курсу про маґнетизм звісно — $4\pi k$ представляє скількість лїній сили маґнетної, що виходять з бігуна маґнетного о натузї k.[2])

Наколи положимо $\mu = 1 + 4\pi k$, дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} a &= \mu\alpha \\ b &= \mu\beta \\ c &= \mu\gamma \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

μ називає Maxwell маґнетною спроможностию індукцийною.[3])

Так як стала діелєктрична K була характеристична для діелєктриків, так μ характеризує тїла, що ся находять в поли маґнетнім. Для тїл парамаґнетних є $\mu > 1$, для порожнї $\mu = 1$, для тїл діямаґнетних є $\mu < 1$.

В повисше наведених розслїдах принимали ми, що маємо до дїла з маґнетами сталими, у яких є сила відпорна $= \infty$, та з маґнетами індукованими, у яких та сила є $=$ o; в дійсности (коли

---

[1]) Для складових індукциї маґнетної істнує звязь:

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = o.$$

Гл. н. пр. Poincaré ut supra.

[2]) Neumann називає k сочинником намаґнесованя через індукцию.

[3]) μ називають також сочинником прониканя (Permeabilitätsconstante).

н. пр. взяти сталь) сила та не може бути анї 0, анї ∞. Дальше k і μ також не є сталї, но в загалї:

$$k = \varphi(I) = \varphi\left[(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}\right];$$

а μ є стале лиш для слабих сил, а для сильних меншає після помірок Ewing'a.

Правила піль елєктромаґнетних.

1. Перейдем тепер до прав піль елєктромаґнетних.

Після дослїдів Faraday'a та Colladon'a сила, з якою дїлає ток на бігун маґнетний (чи то природний чи індукований) є прямо пропорциональна до натуги току т. є. скількости елєктричности, що в одиницї часу перепливає через перекрій злучника.

Коли потенциял провідника, через який переходить ток, назначимо через Ω, то складові сили, яка дїлає на одиничний бігун маґнетний, находячий ся в поли елєктричнім, є:

$$\alpha = -\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial\Omega}{\partial z}. \qquad 1)$$

В теориї елєктромаґнетизму найбільше значінє мають т. зв. токи колові; як звісно поводять ся они зовсїм так само, як маґнет о розмірах рівних поверхнї, замкненої током коловим, а о дуже малій грубости, т. є. так як т. зв. бляшка маґнетна. Потенциял бляшки маґнетної є $\Omega=\Phi\varphi$,[1]) де Φ є сила бляшки (добуток з степеня намаґнесованя бляшки та грубости), а φ є кут, під яким з уважаної точки видно бляшку; добуток Ω треба брати додатно або відʼємно після того, чи уважана поверхня бляшки є додатна, чи відʼємна. З причини сеї рівноважности току колового та бляшки є елєктромаґнетний потенциял току колового:

$$\Omega = \varphi i, \qquad 2)$$

де i є натуга току, мірена в таких одиницях, що чинник пропорциональности є 1; ту одиницю називаємо елєктромаґнетною одиницею натуги. Знак φi залежить від напряму току; додатна сторона току колового є та, яка находить ся по лївій руцї пливака, що пливе в тоцї та споглядає в внутр тока колового.

---

[1]) Гл. Poincaré loc. cit. т. I.

2. Так як:

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = d\Omega,$$

де в α, β, γ знак уже узглядненний, проте зміна потенциялу тока при переході з одної точки до другої по довільній дорозі буде:

$$\int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz),$$

де інтеґрал відносить ся до цілої відбутої дороги. На основі рівнаня 2) та зміна буде:

$$\int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = \pm\ 4\pi i.$$[1]

Інтеґрал відносить ся до дороги, яку відбуде бігун під впливом току.

Наколи маємо до діла з кількома токами, то праця електромаґнетна є тоді:

$$\int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = 4\pi \Sigma \pm i. \qquad 3)$$

Наколи складові скорости електричности є u, v, w, перекрій злучника є $d\omega$, напрямні consinus'и пряму до того елементу є l, m, n, то дістанемо на скількість електричности, що перепливає через поверхню S:

$$\Sigma i = \Sigma\,(lu+mv+nw)d\omega = \int_S (lu+mv+nw)d\omega.$$

Наколи порівнаємо се рівнанє з рівнанєм 3), дістанемо:

$$\int_C (\alpha dx+\beta dy+\gamma dz) = 4\pi \int_S (lu+mv+nw)d\omega,$$

де перший інтеґрал відносить ся до кривиці, по якій порушає ся бігун, другий до поверхні, через яку ток переходить.

Перший інтеґрал перетворює Maxwell в інтеґрал поверхневий — в що блисше годі тут входити — так що в кінци дістанемо:

$$\int_S \left[l\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) + m\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + n\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right] d\omega =$$

$$4\pi \int_S (lu+mv+nw)d\omega;$$

---

[1] Гл. Maxwell loc. cit. II. 344. Сей інтеґрал — як з теориї потенциялу слідно — дає міру роботи, яку зроблять сили електромаґнетні при пересуненю бігуна одиничного.

оба інтеґрали є ідентичні, тому:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) \\ v &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) \\ w &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Рівнаня ті дають нам звязь межи скоростями ($u\ v\ w$) елєктричности а складовими ($\alpha\ \beta\ \gamma$) сили елєктромаґнетної. Відносять ся они так до токів проводу, як і до токів пересуненя, так як ті послїдні підлягають також законови Ampère'a.

Права явищ елєктродинамічних.

1. Подібно як ток коловий і маґнет заховують ся два токи колові; права дїланя двох токів колових на себе є загально звісні.— Наколи маємо систем токів сталих, що дїлають на рухомий ток коловий о натузї *i*, то елєктродинамічний потенциял того току буде:

$$T = i \int (\alpha l + \beta m + \gamma n) d\omega,^{1}) \qquad 1)$$

де інтеґрал відносить ся до цїлої поверхні, яка є замкнена током коловим; $\alpha, \beta, \gamma, l, m, n$ мають анальоґічне значінє як в попереднім уступі. Наколи T представимо в виді анальоґічнім як рівнанє 3) попереднього уступу, то дістанемо в загалї:

$$T = i \int (F dx + G dy + H dz),$$

де F, G, H не є поки що блисше означені; а наколи сей інтеґрал замінимо на поверхневий, дістанемо в кінци (як попередно):

$$T = i \int \left[l\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) + m\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) + n\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) \right] d\omega.$$

Наколи се порівнаємо з 1) дістанемо на складові α, β, γ сили, з якою дїлає систем сталих токів на одиницю тока:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \\ \beta &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \\ \gamma &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

---

[1] Гл. Poincaré loc. cit. т. I.

Maxwell називає величини F, G, H складовими електромаґнетного момента або складовими потенциялу векторового після теориї кватерніонів і векторів, яких уживає в своїх розслїдах.

Наколи ріжничкувати мем рівнаня 2) що до x, y, z і додамо ті рівнаня дістанемо:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0.$$

Анальоґічне рівнанє істнує для складових a, b, c індукциї маґнетної (ut supra), але не істнує для складових сили маґнетної.

Наколи проте хочемо рівнаня 2) віднести до явищ маґнетних, то треба в них місто складових сили ввести складові індукциї маґнетної і дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \\ b &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \\ c &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

2. Обчислїм складові F, G, H момента електромаґнетного. Очевидна є річ, що рівнаня 2) до визначеня F, G, H не вистануть, бо найзагальнїйшим розвязанєм тих рівнань є функциї $F + \frac{\partial\chi}{\partial x}$, $G + \frac{\partial\chi}{\partial y}$, $H + \frac{\partial\chi}{\partial z}$, де χ є яканебудь функция змінних x, y, z. Тому то Maxwell бере еще додаткову умову:

$$I = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \equiv 0. \qquad 4)$$

та на основі рівнань 4) попередного уступу доходить до рівнаня:

$$4\pi u = \frac{\partial I}{\partial x} - \Delta F, \qquad \text{де:}$$

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2},$$

а що: $\frac{\partial I}{\partial x} = 0$, то:

$$\Delta F + 4\pi u = 0.$$

Є се рівнанє такого типу, як рівнанє Poisson'а, тому-то його найзагальнійший інтеґрал буде функция, що має вид потенциялу; отже:

$$F = \int\int\int \frac{u}{r}\, dxdydz,$$

де *u* є складова скорости тока в напрямі оси x в точції тяжести елєменту dxdydz, а r є відступ тогож елєменту від уважаної точки (xyz) просторони.

Анальоґічно:

$$G = \int\int\int \frac{v}{r}\, dxdydz, \qquad H = \int\int\int \frac{w}{r}\, dxdydz.$$

Як легко ся пересьвідчити, інтеґрали ті сповняють рівняня 2) та 3); інтеґрованє відносить ся до всїх елєментів просторони.

Наколи маємо до дїла з середовищем маґнетним, в якім ток дізнає пересуненя, то рівняня 3) сповнять ся, як легко мож побачити, для слїдуючих вартостий на F, G, H:

$$\left.\begin{aligned} F &= \mu \int\int\int \frac{u}{r}\, dxdydz \\ G &= \mu \int\int\int \frac{v}{r}\, dxdydz \\ H &= \mu \int\int\int \frac{w}{r}\, dxdydz \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

де μ має значінє вже згадане.

3. Подамо єще вираженє на величину електродинамічних потенциялів. На електродинамічний потенциял малисьмо слїдуюче вираженє:

$$T = i \int (Fdx + Gdy + Hdz).$$

Вираженє се перетворює Maxwell в спосіб, якого тут не подаємо блисше, на вираженє:

$$T = \int\int\int (Fu + Gv + Hw) dxdydz.$$

Перейдім до вираженя на т. зв. самопотенциял тока. Можемо собі уявити, що ток коловий складаєсь з безконечного множества токів колових о безконечно малих перекроях. Кождий з тих токів має електродинамічний потенциял з огляду на иньші елєментарні токи; сума тих елєментарних потенциялів творить т. зв. самопотенциял тока. — Наколи возьмемо два елєменти тока колового dxdydz і dx'dy'dz' о скоростях (uvw) і (u'v'w'), то як Maxwell доказує, самопотенциял тока буде:

$$T = \frac{1}{2} \int \int \int (Fu + Gv + Hw)\, dxdydz.$$

Наколи возьмемо рівнане 4) попередного, а 2) і 3) теперішного уступу, дійдемо в кінци до слїдуючих виражень на самопотенциял:

a) наколи систем токів находить ся в середовищи немаґнетнім, то самопотенциял є:

$$T = \frac{1}{8\pi} \mu \int \int \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, dxdydz. \qquad 6)$$

b) наколи же систем токів находить ся в середовищи маґнетнім, то самопотенциял є:

$$T = \frac{1}{8\pi} \int \int \int (\alpha a + \beta b + \gamma c)\, dxdydz. \qquad 7)$$

Наколи возьмемо два токи колові лїнійні (отжеж не о трох вимірах) о натугах i_1 і i_2, то електродинамічний потенциял того системи токів буде[1]) лїнійна однородна функция другого ряду величин i_1 і i_2, отже після Maxwell'a має вид:

$$T = \frac{1}{2} (Li_1{}^2 + 2Mi_1 i_2 + Ni_2{}^2), \, ^2)$$

де L, M, N залежні є від виду та взаімного положеня обох токів.

Можна доказати, що L є самопотенциялом першого тока на случай, що другого нема, N самопотенциялом другого тока, коли першого нема, а M потенциялом одного тока на другий.

4. Всї ті взори вивели ми в заложеню, що натуга тока є стала. Однак при руху токів колових, або токів колових та маґнетів, виступають еще додаткові токи, що їх відкрив Faraday, а які називаємо токами індукованими; токи ті повстають хвилево в провідниках, а їх натуга додає ся до натуг поодиноких токів. Повставанє тих токів відносимо до електромоторичних сил індукциї.

З дослїдів над індукциєю виходить, що коли натуги i_1 і i_2 двох нерухомих токів колових C_1 і C_2 збільшать ся в елементї часу dt о величини di_1 і di_2, то сила електромоторична індукциї, що повстане в C_1, має вартість:

$$A \frac{di}{dt_1} + B \frac{di_2}{dt},$$

---

[1]) Maxwell loc. cit. II. 271 і 274.

[2]) Гл. н. пр. Lang: Einleitung in die theoretische Physik ст. 422.

а сила електромоторична індукциї, що повстала в C_2, має вартість:

$$B \frac{di_1}{dt} + C \frac{di_2}{dt}.$$

Звичайна теория електричности, що єї розвинули Helmholtz та Thomson, обчисляє сочинники A, B, C на основі засади захованя енерґії[1]) та доходить до звязи:

$$A = -L, \quad B = -M, \quad C = -N,$$

де L, M, N мають значінє, як в горі.

Maxwell же виводить права індукциї просто з рівнань Lagrange'а, так що сї рівнаня відносить до руху дробин нетяжкої течи індукцийної. В тій цїли ставить Maxwell дві гіпотези:

a) Сорядні дробин неважкої течи залежать від сорядних материяльних дробин тїла, які беруть участь в проявах електричних, а разом від сорядних гіпотетичної течи, яка зве ся електричностию; но права сеї зависимости не знаємо.

b) Електродинамічний потенциял систему токів представляє разом енерґію кінетичну течи індукцийної.

На сих гіпотезах доходить Maxwell при помочи рівнань Lagrange'а з одної сторони до взорів Helmholtz'а, а з другої до слїдуючих вислїдів.

5. Праця сил електродинамічних, яка є потрібна до пересуненя тока колового рухомого рівнає ся змінї функциї:

$$\tfrac{1}{2}\,(Li_1{}^2 + 2Mi_1 i_2 + Ni_2{}^2)$$

т. є. змінї потенциялу електродинамічного T (рівнанє 1), або рівнає ся:

$$i_1 \delta \int (la + mb + nc)\, dw,$$

де a, b, c, l, m, n мають значінє, ut supra. — Наколи $Xdxdydz$, $Ydxdydz$, $Zdxdydz$ є складові сили електродинамічної, що дїлає на елємент $dxdydz$, а походить з дїланя тока C_1 на ток C_2, а елємент тока C_2 пересунув ся під впливом тої сили о $\delta x, \delta y, \delta z$, то елєментарна праця, яка зістала виконана при тім пересуненю, виносить:

$$(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dxdydz.$$

Цїла проте праця сил електродинамічних, що дїлають на C_2, через яку ток коловий пересуне ся або змінить вид, буде:

$$\int\int\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dxdydz.$$

---

[1]) Гл. н. пр. Poincaré loc. cit. том I.

Наколи порівнаємо се вираженє з попереднім вираженєм на працю, дійдемо по перетворенях до загальних рівнань на складові сили елєктродинамічної:[1])

$$\left.\begin{aligned} X &= cv - bw \\ Y &= aw - cu \\ Z &= bu - av \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

Рівнаня 8) остають і тоді, коли маємо якунебудь скількість токів; але тоді величини a, b, c є складовими вислідної індукциї маґнетної всїх токів.

6. На основі взорів Helmholtz'а, що сила елєктромоторична індукциї, яка вивязуєсь в току C_1 при дїланю на ток коловий C_2, є:

$$E = -\frac{d}{dt}(Li_1 + Mi_2),$$

наколи означимо складові тої елєктромоторичної сили індукциї через P, Q, R, дійдемо при помочи перетворень до взорів:[2])

$$\left.\begin{aligned} P &= c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ Q &= a\frac{dz}{dt} - c\frac{dx}{dt} - \frac{dG}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ R &= b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad 9)$$

де ψ є яканебудь однородна функция арґументів xyz.

Рівнаня 9) остають також і для якогонебудь числа токів.

Що до сеї функциї ψ, котра може бути яканебудь, то Maxwell принимає, що функция та представляє елєктростатичний потенциял, який походить від якихсь мас, що істнують в поли. — Таке заложенє все можна зробити. Бо величини F, G, H визначили ми лиш під тою умовою, що они сповняють рівнанє ріжничкове:

$$I = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = o.$$

Наколи однак сю умову відкинемо, то після того, що ми в горі сказали, дістанемо на F, G, H слїдуючі загальні вираженя:

$$F = \iiint \frac{u}{r}\,dxdydz + \frac{\partial\chi}{\partial x}$$

$$G = \iiint \frac{v}{r}\,dxdydz + \frac{\partial\chi}{\partial y}$$

$$H = \iiint \frac{w}{r}\,dxdydz + \frac{\partial\chi}{\partial z}$$

де χ є якабудь функция сорядних.

---

[1]) Maxwell loc. cit. II. 297.

[2]) Пор. н. пр. Poincaré loc. cit. т. I.; також Lang loc. cit. ст. 462.

Найзагальнїйші проте рівняня на вираженє складових P, Q, R будуть:

$$\left.\begin{array}{l} P = c\dfrac{dy}{dt} - b\dfrac{dz}{dt} - \iiint \dfrac{du}{dt}\dfrac{1}{r}dxdydz - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\chi}{\partial x} - \dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\[2ex] Q = a\dfrac{dz}{dt} - c\dfrac{dx}{dt} - \iiint \dfrac{dv}{dt}\dfrac{1}{r}dxdydz - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\chi}{\partial y} - \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\[2ex] R = b\dfrac{dx}{dt} - a\dfrac{dy}{dt} - \iiint \dfrac{dw}{dt}\dfrac{1}{r}dxdydz - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\chi}{\partial z} - \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{array}\right\} 10)$$

Всегда можна проте через відповідний вибір сеї функциї χ зробити се, що функция ψ, яка входить в ті рівняня, отже і b рівняня 9) представляє електростатичний потенциял.

Зреасумуймо єще раз всї висліди, якісьмо розібрали в усїх попередних роздїлах.

Загальні рівняня поля маґнетного.

1. Рівняня поля маґнетного.

Дісталисьмо рівняня:

$$\left.\begin{array}{l} a = \mu\alpha \\ b = \mu\beta \\ c = \mu\gamma \end{array}\right\} \quad I)$$

де α, β, γ є складові сили маґнетної в точцї середовища маґнетного, a, b, c є складові маґнетної індукциї в тій точцї.

Наколи u, v, w є складові скорости електричности, то:

$$\left.\begin{array}{l} 4\pi u = \dfrac{\partial\gamma}{\partial y} - \dfrac{\partial\beta}{\partial z} \\[2ex] 4\pi v = \dfrac{\partial\alpha}{\partial z} - \dfrac{\partial\gamma}{\partial x} \\[2ex] 4\pi w = \dfrac{\partial\beta}{\partial x} - \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} \end{array}\right\} \quad II)$$

Дальше мали ми для складових маґнетного момента рівняня:

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial z} \\[2ex] b = \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial x} \\[2ex] c = \dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{array}\right\} \quad III)$$

та:

$$\left.\begin{aligned} F &= \mu \int\!\!\int\!\!\int \frac{u}{r}\, dxdydz + \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ G &= \mu \int\!\!\int\!\!\int \frac{v}{r}\, dxdydz + \frac{\partial \chi}{\partial y} \\ H &= \mu \int\!\!\int\!\!\int \frac{w}{r}\, dxdydz + \frac{\partial \chi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{IV)}$$

Складові сили електромоторичної, що походить від електромаґнетної індукциї та мас електричних, що ся находять в стані статичнім, були:

$$\left.\begin{aligned} P &= c\,\frac{dy}{dt} - b\,\frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ Q &= a\,\frac{dz}{dt} - c\,\frac{dx}{dt} - \frac{dG}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ R &= b\,\frac{dx}{dt} - a\,\frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{V)}$$

2. Рівнаня токів проводу.

В рівнанях II) є u, v, w складові скорости електричности без огляду на рід руху: провід або пересунене. Наколи йде о токи проводу, то складові (u, v, w) мусять кромі сего сповняти рівнане Ohm'а т. є.

$$\frac{u}{C} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} + X \qquad \text{і т. д.,}$$

де C є електрична спроможність проводу середовища, а X складова всїх сил електромоторичних на одиницю довготи. — Наколи приймем, що ті електромоторичні сили є тілько силами індукциї, що їх викликала зміна натуги або пересунене токів, або маґнетних і електричних мас, то права сторона того рівнаня рівнає ся P.

Складові скорости електричности в тоцї проводу є проте:

$$\left.\begin{aligned} u &= CP \\ v &= CQ \\ w &= CR \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{VI)}$$

3. Рівнаня токів пересуненя.

Токи сї — як знаємо — не підчиняють ся праву Ohm'а, за те підчиняють ся законам електродинамічним та електромаґнетним Ampère'а сповняють проте рівнаня III). Однак кромі тих рівнань істнують для токів пересуненя єще три рівнаня характеристичні.

Величина складової елєктричного пересуненя є після наших попередних розслїдів:

$$f = -\frac{K}{4\pi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - X\right),$$

де X має то само значінє, що при токах проводу. Наколи отже приймем, що сили електромоторичні походять виключно з ріжниції електростатичного потенциялу, як також з індукциї маґнетів та токів, які находять ся в поли, то:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} - X = -P,$$

а тодї:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{K}{4\pi} P, \\ g &= \frac{K}{4\pi} Q, \\ h &= \frac{K}{4\pi} R \end{aligned}\right\} \quad \text{VII)}$$

А так як походні f, g, h зглядом часу є складові скорости, проте через зріжничкованє послїдних рівнань зглядом часу дістанемо на складові скорости електричного пересуненя рівняня:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{K}{4\pi} \frac{dP}{dt} \\ v &= \frac{K}{4\pi} \frac{dQ}{dt} \\ w &= \frac{K}{4\pi} \frac{dR}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \text{VIII)}$$

4. Рівняня для токів в середовищи лиш в части дієлєктричнім.

Рівняня VI) відносять ся до середовищ, що добре проводять, н. пр. металї, рівняня VIII) до повних ізоляторів. — Наколи тїла не є вповні ізольовані, то Maxwell[1]) принимає для них рівняня:

$$\left.\begin{aligned} u &= CP + \frac{K}{4\pi} \frac{dP}{dt} \\ v &= CQ + \frac{K}{4\pi} \frac{dQ}{dt} \\ w &= CR + \frac{K}{4\pi} \frac{dR}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \text{IX)}$$

---

[1]) Maxwell loc. cit. II. ст. 306.

після яких u, v, w складають ся з суми складових току проводу і пересуненя.

Но ся гіпотеза Maxwell'а представляє на погляд Poincaré'ого[1]) деякі слабі сторони. Так як середовище має свойства посередні між провідниками а ізоляторами, то на погляд Poincaré'ого сила електромоторична, що викликує ток, мусить побороти опір двоякого рода, один анальоґічний до опору металїв ($-\frac{1}{C}$, бо C є спроможність проводу), другий опір ізоляторів. Звідси мусїлоб слїдувати, що як раз против рівнань Maxwell'а натуга тока,[1]) а звідси і величини u, v, w повинні були менші, як в провіднику або в повнім ізоляторі. Тому-то більше рациональною є гіпотеза, що єї поставив Potier. Принимає він, що сила електромоторична в якійсь точцї згаданого середовища рівнає ся сумі тої сили, що єї викликує ток проводу, і тої, що єї викликує пересуненє. Після Potier'а дістанемо проте на вираженє складових сили електромоторичної в півізоляторах рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{u}{C} + \frac{4\pi}{K} f, \\ Q &= \frac{v}{C} + \frac{4\pi}{K} g, \\ R &= \frac{w}{C} - \frac{4\pi}{K} h, \end{aligned}\right\} \quad X)$$

Рівнаня IX) та X) зводять ся до рівнань токів провода, наколи K = o, зглядно K = ∞. Провідник має проте після Maxwell'а спроможність індукцийну зеро, після Potier'а безконечно велику.

В сей спосіб подав я коротко закони явищ електричних та маґнетних, так як они слїдують з заложеня Maxwell'а, і то подав я такі лишень права, які будуть необходимо потрібні, щоб зрозуміти маґнетну теорию сьвітла. — Права ті можна в головній мірі найти в звичайних теориях явищ електричних. І инакше не може бути, бо в виводі прав якихсь явищ що найбільше відмінна може бути метода, но нїяк вислїди, наколи ті права мають згоджуватись з дїйсностию.

---

[1]) Poincaré loc. cit. том I.

ЧАСТЬ ДРУГА.

Елєктромаґнетна теория сьвітла.

Найважнїйшим вислїдом теориї Maxwell'а є згода, яка заходить поміж свойствами сьвітляного етеру, що після теориї фильованя переносить сьвітло, а свойствами течи індукцийної, що після Maxwell'а є причиною дїлань елєктромаґнетних. Згода та, що єї потвердив досьвід та теория, промавляє за правдивостию того погляду, що істнує лиш одна течь, яка переносить енерґію. Так як етер і течь Maxwell'а мають ті самі свойства, проте сьвітло дає ся уважати за явище елєктромаґнетне, а рух дрогаючий етеру, що викликує в наших очах враженє сьвітла, мусить мати причину в наворотних (періодичних) дуже скорих заколотах поля маґнетного; або — наколи скажемо коротко — в дроганях елєктромаґнетних. Наколи так є, то можна на основі загальних рівнань того поля вивести поясненє явищ сьвітла. Сей спосіб поясненя називаєсь елєктромаґнетна теория сьвітла; є річ очевидна, що та теория мусить вести до звязи між сталими оптичними та елєктричними. Звязь ту, як також права сеї зависимости двох ріжних на погляд частий фізики (оптики та елєктричности) представимо тепер. А именно займем ся вперед правами елєктромаґнетної теориї сьвітла для діелєктриків безподобних (isotrop), дальше для півізоляторів, діелєктриків статьних (anisotrop) а вкінци для добрих провідників.

Рівнаня для дроган маґнетних в діелєктриках безподобних.[1]

До таких тїл безподобних (isotrop) належать всї тїла прозорі (наколи не берем під увагу елєктролїтичних розчинів). Такими тїлами займем ся тепер.

---

[1] Тїло безподобне є таке, що в усїх напрямах має ті самі свойства фізичні; є они звичайні некристалні, отже безподобні; противно тїла статьні, яких свойства є ріжні в усїх напрямах; є они майже все кристальні; звідси і їх назва.

1. Наколи приймем, що материяльні дробини середовища, яке проводить маґнетні забуреня, є в супокою, або що їх скорости $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ є зером, то загальні рівнаня V. перейдуть на:

$$\left.\begin{aligned} P &= -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ Q &= -\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ R &= -\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

Електростатичний потенциял ψ походить від мас електричних, які не зміняють анї своєї вартости анї положеня, тому так ψ, як і його походні не залежать від часу, а проте:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Так як маґнетні заколоти відбувають ся в діелектрику, то складові скорости u, v, w електричности є злучені зі складовими сили електромоторичної рівнанями VIII. Наколи вставимо 1) в VIII., дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u &= -K\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \\ 4\pi v &= -K\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \\ 4\pi w &= -K\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Наколи дальше злучимо з собою рівнаня I. і III., дістанемо вираженє на $\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma$, а наколи возьмемо походні тих виражень що до x, y, z (μ constant) і підставимо одержані вартости в II., дістанемо:

$$4\pi\mu u = \frac{\partial I}{\partial x} - \Delta F,$$

$$4\pi\mu v = \frac{\partial I}{\partial y} - \Delta G,$$

$$4\pi\mu w = \frac{\partial I}{\partial z} - \Delta H,$$

причім:
$$I = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z},$$

а Δ представляє символ Lagrange'а для других походних.

Наколи з тих рівнань виелїмінуємо u, v, w при помочи рівнань 2), то дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} K\mu \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \Delta F - \frac{\partial I}{\partial x} \\ K\mu \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} &= \Delta G - \frac{\partial I}{\partial y} \\ K\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= \Delta H - \frac{\partial I}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

В тій формі є ті рівнаня подібні до рівнань руху дробин в середовищи пруживім,[1]) отже і до рівнань руху етеру; маємо ту проте перший доказ на згоду електромаґнетних заколотів з дроганями етеру.

2. Филї плоскі. Приймім, що явища електромаґнетні, які виступають в дїелєктрику, залежать виключно від часу і від сорядної z уважаної точки. В тім случаю усї точки цїлої площі рівнобіжної до пл. (xy) найдуть ся в однім і тім самім часї в тій самій фазї, а затім маґнетні заколоти (дро́ганя) творять филї плоскі. Тодї складові електромаґнетного момента не залежать від x і y, т. є. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y} = o$; тодї з рівнаня I=o, випаде також $\frac{\partial H}{\partial z} = o$, а рівнаня 3) зведуть ся на рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} K\mu \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \\ K\mu \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \\ K\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= o \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Наколи з'інтеґруємо сей систем рівнань, дістанемо:

$$F = F_1\left(z - \frac{1}{\sqrt{K\mu}}\,t\right) + F_2\left(z + \frac{1}{\sqrt{K\mu}}\,t\right)$$
$$G = F_3\left(z - \frac{1}{\sqrt{K\mu}}\,t\right) + F_4\left(z + \frac{1}{\sqrt{K\mu}}\,t\right)$$
$$H = B_1(z) + B_2(z)t,$$

---

[1]) Гл. н. пр. Thomson u. Tait: Theoret. Physik том I. 2. ст. 222; також Lang loc. cit. ст. 92.

де $F_1, F_2, F_3, F_4, B_1, B_2$ є якінебудь функциї. Наколи так є,[1]) то H або зовсім від часу не залежить, або зміняє ся пропорционально з часом, не має проте ніякого впливу на поступ филь, бо ми беремо лишень наворотні заколоти (дрóганя).

Рівнаня III.) дадуть тоді для филь плоских:

$$a = -\frac{\partial G}{\partial z}, \quad b = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad c = o,$$

а се є доказом, що напрям індукциї маґнетної припадає на верхню филї. То саме відносить ся і до скорости електричности, бо тоді $w=o$ (рівнаня 2), і до сили електромоторичної, бо тоді $R=o$.

Можна проте як в теориї фильованя (при дрóганях етеру) сказати, що електромаґнетні дрóганя є поперечні.

Приймім, що[2]) $G=o$, тоді і $v=o$, т. є. електричність має напрям рівнобіжний до оси x; но тоді складова індукциї маґнетної $a=o$, остає лиш складова b о напрямі рівнобіжнім до оси y; площа дрогань електричних є тоді прямa до площи індукциї маґнетної. Така филя вповні відповідає лучеви сьвітла, що є споляризований простолїнїйно. Но покищо не рішаєм, котра з площий відповідає площи поляризациї.

Наколи возьмемо $F=o$, то дійдем в сей спосіб до филї, що єї напрям скорости електричности (тока) є рівнобіжний до оси y.

Загальний случай, де і $F \gtrless o$ і $G \lessgtr o$, можемо уважати за зложений із згаданих двох случаїв, або можемо всегда филю плоску розложити на два до себе прямові дрóганя споляризовані, як се ся дїє і в звичайній теориї ундуляцийній.

Наколи н. пр. положимо:

$$F = C\sin\left(z - \frac{1}{\sqrt{K\mu}}\, t\right), \quad G=o,$$

де C є стала, то повисші відношеня можна представити ґрафічно в слїдуючий спосіб.[3]) В фіґ. II. представляють сорядні вартости індукциї маґнетної і сили електромоторичної в якійсь означеній хвилї, фіґ. III. представляє вартости для скорости електричности і індукциї маґнетної (сінусоіда і косінусоіда).

---

[1]) Maxwell loc. cit. II. ст. 546.

[2]) Пор. н. пр. Tumlirz loc. cit. ст. 74.

[3]) Tumlirz loc. cit. ст. 75.

3. Скорість поступу филї плоскої поперечної. Наколи положимо $V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}$, то рівнаня 4) перейдуть на:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}$$

Як звісно, такі рівнаня представляють в звичайній теориї пруживости складові пересуненя дробини в середовищи пруживім на случай, коли рух відбуває ся поперечними филями плоскими, причім V є скоростию. Можем проте і ту сказати, що електромаґнетні дрґаня поступають в діелєктрику зі скоростию:

$$V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}.$$

4. Величина тої скорости в порожнї. Позаяк маґнетна спроможність індукцийна в системі одиниць електромаґнетних для порожнї є 1, проте скорість поступу филь плоских в порожнї виносить $\frac{1}{\sqrt{K}}$, де K треба мірити в системі одиниць електромаґнетних.

Ми обчислимо ту величину способом, що його подав Poincaré (loc. cit. том I.).

Як звісно складова електричного пересуненя в напрямі оси xx є:

$$f = -\frac{K}{4\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

K не має в укладї електростатичним нїякого виміру, тому вимір пересуненя буде рівний квотови вимірів потенцияду та довгости, або скількости електричности та квадрату довгости. Звідси слїдує, що при переходї з системи електростатичної одиниць до системи електромаґнетної — так як одиниця довготи остає в обох системах та сама — числа, що мірять пересунене в обох укладах, стоять до себе в тім відношеню, що числа, які виражають ту саму скількість електричности. Наколи отже означимо через V' відношенє одиниці електростатичної скількости електричности до електромаґнетної одиниці скількости електричности, то вимір:

$$\Big[\, f \,\Big]_{em} = \frac{1}{V'} \Big[\, f \,\Big]_{es},$$

де клямри зі значками значать вимір в відповідній системі.

З другої однак сторони, як з елєментарного курсу про елєктричність звісно, одиниці сили елєктромоторичної в обох укладах мають ся до себе відворотно, як виміри скількости елєктричности. Сила елєктромоторична є $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, проте:

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{em} = V' \left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{es},$$

де скобки зі значками мають значінє, як в горі.

Звідси слїдує, що квот:

$$\left[\frac{f}{\frac{\partial\psi}{\partial x}}\right]_{em} = \frac{1}{V'^2} \left[\frac{f}{\frac{\partial\psi}{\partial x}}\right]_{es} \text{, а що:}$$

$$\left[\frac{f}{\frac{\partial\psi}{\partial x}}\right] = \left[K\right], \text{ бо } \left[4\pi\right] = o,$$

то:

$$\left[K\right]_{em} = \frac{1}{V'^2} \left[K\right]_{es}.$$

Позаяк для порожнї в системі елєктростатичній $K=1$, то:

$$K = \frac{1}{V'^2} \text{ в системі елєктромаґнетній.}$$

Проте на скорість поступу дрогань (заколотів) елєктромаґнетних в порожнї дістаєм:

$$V' = \frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{V^2}}} = V.$$

А що сьвітло є після теориї Maxwell'a лиш заколотом елєктромаґнетної природи, проте скорість розходженя ся сьвітла мусить бути нумерично рівна відношеню елєктростатичної одиниці скількости елєктричности до елєктромаґнетної одиниці скількости елєктричности.

Погляньмо, о скілько досьвід стверджає сей результат маґнетної теориї сьвітла.

Скорість сьвітла мірили Fizeau, Bradley, Foucault, а в нових часах Cornu. Вислїди їх помірів є ось-які:[1])

---

[1]) Tumlirz loc. cit. ст. 65.

Fizeau	$3{\cdot}14.10^{10}\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
Поміри астрономічні Bradley'a та других	$3{\cdot}08.10^{10}\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
Foucault	$2{\cdot}9836.10^{10}\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
Cornu	$3{\cdot}004.10^{10}\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ 1)

Відношенє одиниць електричних зовсїм независимо від попередних помірів означали Weber, Maxwell, Thomson, а в новійших часах Klemenčic, Himstedt і E. B. Rosa. Ось вислїди їх помірів:

Weber	$3{\cdot}1074.10^{10}$ 2)
Maxwell	$2{\cdot}88{\cdot}10^{10}$ 3)
Thomson	$2{\cdot}82.10^{10}$ 2)
E. B. Rosa	$3{\cdot}0140.10^{10}$ 1)

Найновійші вислїди, які дістав Rosa, згоджують ся майже зовсїм з помірами Cornu. Ріжницї, які в загалї заходять між числами, треба віднести до того, що анї одна, анї друга величина не є поки-що точно означена; в кождім однак разї обі ті величини є величинами того самого ряду. — Доказав се в кінци Hertz, що викликав в воздусї филї електромаґнетні о скорости до $3.20.10^{10}\frac{\text{cm}}{\text{sec.}}$

5. Звязь між сочинником заломаня діелектрика а сталою діелектричною. Возьмім тепер під увагу якийсь діелектрик, то скорість поступу дрогань електромаґнетних є в нїм:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{K\mu}},$$ де K є стала діелектрична.

Для тїл прозорих μ дуже мало ріжнить ся від 1, проте скорість v_1 в системі електромаґнетній для даного діелектрика є після сказаного:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{K}{V^2}}} = \frac{V}{\sqrt{K}},$$ де V має значінє подане в горі.

Скорість для порожнї в системі електромаґнетній є V, тому то:

$$\frac{V}{V_1} = \sqrt{K}.$$

---

1) Poincaré loc. cit. том I.

2) Tumlirz loc. cit. ст. 65.

3) Maxwell loc. cit. II. ст. 543.

Но теория фильованя каже, що відношенє скоростий $\frac{V}{V_1}$ є безглядним сочинником заломаня (n) уважаного середовища, тому:

$$n = \sqrt{K}, \qquad K = n^2.$$

Електромаґнетна теория сьвітла жадає проте, щоби безглядний сочинник заломаня рівнав ся кореневи квадратовому сталої діелектричної.

При тім робить однак Maxwell слїдуючу примітку.[1] Як звісно, сочинник заломаня зміняє ся з довжиною филї; послїдне рівнанє може проте сповнити ся лиш тодї, коли K і n відносить ся до явищ того самого навороту (періоду). Тому-то мусимо вибирати такий сочинник заломаня, який відповідає филям о дуже довгім навороті, бо лиш ті можна порівнувати з сорозмірно довго треваючими явищами, яких уживаємо до визначеня сталої діелектричної.

Погляньмо тепер, о скілько досьвід годить ся з теоретичним вислїдом Maxwell'а.

В часї, як Maxwell виступив зі своєю теориєю, була звісна лиш стала діелектрична для парафіни; обчислили єї Gibson і Barclay.[2] Виносить она 1·975, отже $\sqrt{K} = 1{\cdot}405$; а сочинник заломаня для парафіни (для филь о дуже довгім навороті) є після помірів Gladstone'а 1·422; вислїд відповідав проте в приближеню праву Maxwell'а.

Пізнїйше зроблено цїлий ряд помірів сталої діелектричної для ріжних тїл, іменно для тїл сталих крім Gibson'а та Barclay'а обчисляли сталу K Boltzmann, Wüllner, Gordon та Hopkinson, для течий Силов та Hopkinson, для ґазів Boltzmann, Ayrton та Perry. Дуже прецізно ведені помірки Boltzmann'а[3] (1874—1875) показалу велику згоду між $\sqrt{K}$ та n для ґазів. Ось дати, які одержав Boltzmann:

	$\sqrt{K}$	n
воздух:	1·000295	1·000294
CO_2 :	1·000473	1·000449
H_2 :	1·000132	1·000138
CO:	1·000345	1·000340
CH_4 :	1·000472	1·000443

---

[1] Maxwell loc. cit. II. 544.

[2] Maxwell loc. cit. II. 544.

[3] Гл. н. пр. Tumlirz loc. cit. ст. 67 et sqts.

Також для много течий дати для $\sqrt{K}$ і n досить добре ся згоджують, як доказали поміри Силова та Hopkinson'а.

Много однак тїл сталих та течий (передовсїм вода та олїй рицїновий) не хотїли підчинитись тому законови. Но нові дуже основні розслїди Ayrton'а, Rubens'а, Cohn'а, Heerwagen'а та иньших доказали, що і ті тїла дають ся підтягнути під закон Maxwell'а.

Ось головнїйші дати,[1]) що відносять ся до декотрих тїл сталих та течий:

Діелєктрик	Поміри робили		K	n	n^2
Скло	Winkelmann		6·5–7·4		
	Elsas		6·4—7·5		
	Lecher		6·5—7·31		
	Doule		6·88—7·76		
	Arons i Rubens			2·33—2·49	5·42—6·20
Парафіна	Winkelmann		2·2		
	Doule		2·31		
	Arons i Rubens	стала	1·96	1·43	2·05
		твердіюча	2·04	1·47	2·16
		плинна	2·07	1·48	2·19
Нафта	Winkelmann		2·1		
	Lecher		2·42		
	Arons i Rubens		2·07	1·4	1·96
	Waitz			1·3—1·45	1·69—2·10
Ксильоль	Arons i Rubens		2·34	1·5	2·25
Олива	Arons i Rubens		3·06	1·77	3·13
Олїй рицїновий	Arons i Rubens		4·66	2·05	4·20
Алькоголь	Ellinger			4·9	24·01
	Doule		24·29		
Вода	Cohn		73·5	8·57	73·44
	Cohn i Arons		76	8·72	76·03
	Heerwagen		79·56		

---

[1]) Порів. Petryk: Krytyczny przegląd prac dokonanych nad falami elektrycznymi, Kosmos XX. рік 1895.

Не вільно нам нинї уже перецїнювати значіня права Maxwell'a, но на основі досьвідів мусимо приняти, що наколи $\sqrt{K}$ не рівнає ся точно сочинникови заломаня, то творить бодай його найважнїйшу часть складову.[1])

6. **Напрям електричного пересуненя в середовищи безподобнім (діелектрику).** Возьмім плоску филю електромаґнетну, рівнобіжну до пл. xy, та виберім на напрям момента електромаґнетного лїнію рівнобіжну до оси x. Тодї G=H=o. Вираженє на F залежить лиш від природи заколоту; можемо проте функциї F_1 і F_2 в наших інтеґралах так вибрати, що:

$$F = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - Vt).$$

На основі рівнань III. дістанемо тодї для складових індукциї маґнетної:

$$a = o, \qquad c = o,$$

$$b = - A \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z - Vt).$$

Маґнетна індукция має проте напрям оси Y, отже є прямова до напряму електромаґнетного момента. То само відносить ся до сили маґнетної, бо єї складові ріжнять ся — як знаєм — від складових індукциї лиш чинником μ.

Наколи знаємо складові індукциї, то можемо на основі рівнань II. обчислити складові скорости пересуненя; найдемо дуже легко:

$$4\pi u = \frac{A}{\mu} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} (z - Vt)$$

$$4\pi v = o, \qquad 4\pi w = o.$$

Бачимо проте, що скорість пересуненя, так як і момент електромаґнетний, має напрям рівнобіжний до оси x. Очевидно відносить ся се і до напряму самого пересуненя, а після рівнань VII. і до напряму сили електромоторичної, що викликує то пересуненє. Проте в кождій точцї филї плоскої електричне пересуненє, сила електромоторична і момент електромаґнетний мають той сам напрям; сила електромаґнетна і індукция мають напрям до згаданого напряму прямовий; все однак лежить в площі филї.

---

[1]) Maxwell loc. cit. II. 544.

В звичайній теориї фильованя енерґія кінетична, як се є очевидне, має вартість:

$$\frac{1}{2}\int\int\int \rho \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2 \right] dxdydz,$$

де ρ є густота етеру, а $\xi\ \eta\ \zeta$ сорядні дробини етеру — отже походні дають скорість. Після Maxwell'а енерґія кінетична рівнає ся елєктродинамічному потенциялови системy токів, що находять ся в середовищи; наколи приймемо, що се середовище є маґнетне, то на основі рівн. 7) (права явищ елєктродинамічних) дістанемо на ту енерґію:

$$\frac{1}{8\pi}\int\int\int (\alpha a + \beta b + \gamma c)\ dxdydz,$$

або коли виразимо складові індукциї через складові сили елєктромаґнетної:

$$\frac{1}{8\pi}\ \mu \int\int\int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\ dxdydz.$$

Щоби істнувала згода між теориями фильованя та Maxwell'а, мусимо приняти, що в обох теориях вираженя на енерґію є тотожні; мусимо проте покласти:

$$\rho = \frac{\mu}{4\pi},\ \frac{\partial\xi}{\partial t} = \alpha,\ \frac{\partial\eta}{\partial t} = \beta,\ \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \gamma,$$

отже складові індукциї мають той сам напрям, що дрóгане частинки етеру.

7. Відбите і заломане дрогань елєктромаґнетних на границї двох безподобних дієлєктриків.[1] Щоби показати згоду елєктромаґнетної теориї сьвітла з теориєю фильованя, займем ся основно поведенєм дрогань елєктричних на границї двох середовищ.

Филя плоска (фіґ. IV.) на границї двох середовищ розділяє ся на дві филї, відбиту та заломану. Поверхня, яка розділяє оба середовища, най буде пл. ух, а прям впаданя вісь х. Приймем до того, що площа впаданя спадає з площою ху.

Наколи скорість поступу дрогань в першім середовищи є V, в другім V', кут впаданя α, відбитя α', заломаня α'', сталї дієлє-

---

[1] Пор. Tumlirz loc. cit. ст. 87.

ктричні в обох середовищах K і K′ (очевидно $V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}$, $V' = \frac{1}{\sqrt{K'\mu}}$), то, як Tumlirz доказує:[1])

$$\alpha' = \pi - \alpha, \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha''} = \frac{V}{V'}. \qquad 1)$$

Треба ту відріжнити два случаї:

1) Електричні дрогання відбувають ся прямово до площи падання, отже рівнобіжно до оси z.

2) Електричні дрогання відбувають ся в площі падання, отже прямово до оси z.

Назначім наші функциї для филї впадаючої, відбитої та заломаної:

$$\begin{array}{ccc|ccc} u & v & w & F & G & H \\ u' & v' & w' & F' & G' & H' \\ u'' & v'' & w'' & F'' & G'' & H''. \end{array}$$

Приймім кромі сього, що фаза всїх трох филь на площі розділяючій є та сама.

I. случай. Найже филя впадаюча буде означена рівнанями:

$$\left.\begin{array}{l} F = o, \quad G = o, \\ H = \Phi\left(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{V} - t\right) \end{array}\right\} \qquad 2)$$

Приймім дальше, що так в филї відбитій, як і в заломаній дрогання є рівнобіжні до оси z; тодї:

$$u' = v' = u'' = v'' = o,$$

а проте і: $F' = G' = F'' = G'' = o,$

а H′ і H″ най мають вид:

$$\left.\begin{array}{l} H' = a\Phi\left(\frac{-x\cos\alpha + y\sin\alpha}{V} - t\right) \\ H'' = a'\Phi\left(\frac{x\cos\alpha'' + y\sin\alpha''}{V} - t\right) \end{array}\right\} \qquad 3)$$

де a і a′ є сочинники покищо не визначені близше.

Φ є функция яка-небудь (як се знаєм з попередних розслїдів), а арґументи тої функциї в рівнанях 2) і 3) є лиш перетворенєм арґументу (z—Vt) давнїйших наших рівнань.

---

[1]) Tumlirz loc. cit. ст. 60 і 88.

Наколи в якійсь точцї площи розділяючої поведемо прям і по обох сторонах тої площи оберемо дві безконечно близькі точки, то так, як H і єї походні є функция тягла, бо H має — як знаєм — вповні свойства потенциялу, отже при переходї з одної точки до сусїдної безконечно мало ся змінить, тому:

$$\left.\begin{aligned} H + H' &= H'' \\ \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H'}{\partial x} &= \frac{\partial H''}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H'}{\partial y} &= \frac{\partial H''}{\partial y} \end{aligned}\right\} \text{в точцї } x = o.$$

Наколи вставимо ту вартости 1), 2), 3), то дістанемо по переведеню операций:

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{\sin(\alpha - \alpha'')}{\sin(\alpha + \alpha'')} \\ a' &= \frac{2\cos\alpha \sin\alpha''}{\sin(\alpha + \alpha'')} \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

II. случай. Найже филя впадаюча буде означена рівнанями:

$$\left.\begin{aligned} F &= \sin\alpha\, \Phi\left(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{V} - t\right) \\ G &= -\cos\alpha\, \Phi\left(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{V} - t\right) \\ H &= o \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Приймім, що так для филї відбитої, як і заломаної, дрґаня елєктричні відбувають ся в площі впаданя; тодї дістанемо:

$$w' = w'' = o, \qquad H' = H'' = o.$$

Функциї F', G', F'', G'', мають вид:

$$\left.\begin{aligned} F' &= a\sin\alpha\, \Phi\left(\frac{-x\cos\alpha + y\sin\alpha}{V} - t\right) \\ G' &= a\cos\alpha\, \Phi\left(\frac{-x\cos\alpha + y\sin\alpha}{V} - t\right) \\ F'' &= a'\sin\alpha''\, \Phi\left(\frac{x\cos\alpha'' + y\sin\alpha''}{V'} - t\right) \\ G'' &= -a'\cos\alpha''\, \Phi\left(\frac{x\cos\alpha'' + y\sin\alpha''}{V'} - t\right) \end{aligned}\right\} \quad 5')$$

При переході через площу розділяючу зміняють ся функциї F, G та їх походні способом тяглим. Дістанемо проте рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} F + F' &= F'' \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial x} &= \frac{\partial F''}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F'}{\partial y} &= \frac{\partial F''}{\partial y} \\ G + G' &= G'' \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G'}{\partial x} &= \frac{\partial G''}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G'}{\partial y} &= \frac{\partial G''}{\partial y} \end{aligned}\right\} \text{в точці } x = o.$$

Коли ту вставимо рівнаня 5) і 5'), дістанемо по переведеню відповідних перетворень слїдуючі звязи:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \alpha'')}{\operatorname{tg}(\alpha + \alpha'')} \\ a' &= \frac{2 \sin\alpha'' \cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha'')\cos(\alpha-\alpha'')} \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

III. Пошукаймо тепер відношеня натуг луча впадаючого, відбитого та заломаного. В тій цїли подумаймо собі построєний в напрямі фил̈ї впадаючої валець (фиґ. V) о перекрою ω і зауважім в нїм рух між двома прямовими площами A і B. В площі розділяючій дїлить ся сей рух на відбитий та заломаний, з яких перший переходить в валець о перекрою ω між площами A' і B', другий в валець о перекрою ω' між площами A'' і B''. Найжеж t представляє час, в якім відбуває ся рух між площами A і B, t' час, в якім відбуває ся рух між площами A' і B', A'' і B''. Очевидно, що:

$$\frac{\omega}{\cos\alpha} = \frac{\omega'}{\cos\alpha''};$$

найже $AB = A'B' = \Lambda$, то:

$$A''B'' = \Lambda \frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha}.$$

Енерґія кінетична руху впадаючого дїлить ся на енерґію кінетичну руху відбитого та заломаного. Так перша, як і друга, складаєсь з енерґії електростатичної та електродинамічної. Електростатична є зером, наколи приймем потенциял всюди рівний зеру; остає тільки енерґія електродинамічна. Дістанемо проте:

$$\int\int\int (Fu+Gv+Hw)dxdydz = \int\int\int (F'u'+G'v'+H'w')dx'dy'dz' +$$

$$+\int\int\int (F''u''+G''v''+H''w'')dx''dy''dz'',$$

де інтеґрали відносять ся до просторони поміж A і B, A' і B', A'' і B''.

Приймім, що дрóганя є лїнійно споляризовані та що cosinus'и напрямні дрогань впадаючих, відбитих та заломаних є:

$$\lambda,\ \mu,\ \nu$$
$$\lambda',\ \mu',\ \nu'$$
$$\lambda'',\ \mu'',\ \nu'',$$

та возьмім для функций F, G, H вид:

$$F = \lambda\Phi\left(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{V} - t\right),\quad G = \mu\Phi\left(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{V} - t\right),$$

$$F' = b\lambda'\Phi\left(\frac{-x'\cos\alpha + y'\sin\alpha}{V} - t'\right),\quad G' = b\mu'\Phi\left(\frac{-x'\cos\alpha + y'\sin\alpha}{V} - t'\right),$$

$$F'' = b'\lambda''\Phi\left(\frac{x''\cos\alpha'' + y''\sin\alpha''}{V'} - t'\right),\quad G'' = b'\mu''\Phi\left(\frac{x''\cos\alpha'' + y''\sin\alpha''}{V'} - t'\right),$$

$$H = \nu\Phi\left(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{V} - t\right),\quad H' = b\nu'\Phi\left(\frac{-x'\cos\alpha + y'\sin\alpha}{V} - t'\right),$$

$$H'' = b'\nu''\Phi\left(\frac{x''\cos\alpha'' + y''\sin\alpha''}{V'} - t'\right),$$

де b і b' є сталі; в обох попередних случаях дають они a і a'.

Дістанемо тепер на енерґію кінетичну по перетворенях вираженє:[1])

$$\frac{1}{V^2}\iiint \Phi\left(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{V} - t\right)\Phi''\left(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{V} - t\right)dxdydz =$$

$$= \frac{b}{V^2}\iiint\Phi\left(\frac{-x'\cos\alpha + y'\sin\alpha}{V} - t'\right)\Phi''\left(\frac{-x'\cos\alpha + y'\sin\alpha}{V} - t'\right)dx'dy'dz' +$$

$$+ \frac{b'^2}{V'^2}\iiint\Phi\left(\frac{x''\cos\alpha'' + y''\sin\alpha''}{V'} - t'\right)\Phi''\left(\frac{x''\cos\alpha'' + y''\sin\alpha''}{V'} - t'\right)dx''dy''dz''.$$

Рух, що ся находить в часї t в точцї C(xy), дійде в часї t' до C'(x'y') та C''(x''y'').

---

[1]) Пор. Tumlirz loc. cit. ст. 39 і 95.

Положім $DC = E$, $D'C' = E'$, $D''C'' = E''$, $DO = \Delta$, $OD' = \Delta'$, $OD'' = \Delta''$.

Тодї:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = -\Delta + E.$$

$$-x' \cos\alpha + y' \sin\alpha = \Delta' + E'.$$

$$x'' \cos\alpha'' + y'' \sin\alpha'' = \Delta'' + E''.$$

$$t' = t + \frac{\Delta + \Delta'}{V} = t + \frac{\Delta}{V} + \frac{\Delta''}{V''}.$$

Заступім елементи $dxdydz$, $dx'dy'dz'$, $dx''dy''dz''$ через ωdE, $\omega dE'$, $\omega' dE''$, то дістанемо слїдуюче виражене для енерґії:

$$\int_0^{\Lambda'} \Phi\left(\frac{E-\Delta}{V} - t\right) \Phi''\left(\frac{E-\Delta}{V} - t\right) dE =$$

$$= b^2 \int_0^{\Lambda} \Phi\left(\frac{E'-\Delta}{V} - t\right) \Phi''\left(\frac{E'-\Delta}{V} - t\right) dE' +$$

$$+ b'^2 \frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha} \frac{V^2}{V'^2} \int_0^{\Lambda \frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha}} \Phi\left(\frac{E''}{V'} - \frac{\Delta}{V} - t\right) \Phi''\left(\frac{E''}{V'} - \frac{\Delta}{V} - t\right) dE''.$$

Положім:

$$\frac{E''}{V'} = \frac{y}{V}, \quad \text{то:} \quad dE'' = \frac{V'}{V} dy,$$

а тодї горішна границя і в третім є також Λ. Дістанемо проте виражене:

$$\int_0^{\Lambda} \Phi\left(\frac{E-\Delta}{V} - t\right) \Phi''\left(\frac{E-\Delta}{V} - t\right) dE =$$

$$= b^2 \int_0^{\Lambda} \Phi\left(\frac{E'-\Delta}{V} - t\right) \Phi''\left(\frac{E'-\Delta}{V} - t\right) dE' +$$

$$+ b'^2 \frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha} \frac{V}{V'} \int_0^{\Lambda} \Phi\left(\frac{y-\Delta}{V} - t\right) \Phi''\left(\frac{y-\Delta}{V} - t\right) dy.$$

Всї три інтеґрали мають ту саму вартість, дістанемо проте на основі рівнаня 1):

$$1 = b^2 + b'^2 \frac{\cos\alpha'' \sin\alpha}{\cos\alpha \sin\alpha''}. \qquad 7)$$

А затім натуги руху филястого впадаючого, відбитого та заломаного мають ся так, як:

$$1 : b^2 : b'^2 \frac{\cos\alpha'' \sin\alpha}{\cos\alpha \sin\alpha''}.$$

Принорові́м сей вислїд до наших двох головних случаїв, то на случай, що дрóганя відбувають ся прямовісно до площи впаданя, дістанемо на відношенє натуг:

$$1 : \frac{\sin^2(\alpha-\alpha'')}{\sin^2(\alpha+\alpha'')} : \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha''}{\sin^2(\alpha+\alpha'')}, \qquad 8)$$

а на случай, що дрóганя відбувають ся в площі впаданя, дістанемо:

$$1 : \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha-\alpha'')}{\operatorname{tg}^2(\alpha+\alpha'')} : \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha''}{\sin^2(\alpha+\alpha'')\cos^2(\alpha-\alpha'')}. \qquad 9)$$

Рівнаня 4) 6) 8) 9) є зовсім ідентичні з тими, що їх в теориї фильованя[1]) подав Fresnel під заложенєм, що площа дроганЬ є прямова до площи поляризациї.

Очевидно, що і дальші заключеня, що їх на основі тих рівнань вивів Fresnel, остають і тут, отже права повного відбитя, величина кута поляризациї (закон Brewster'a) etc. В се вже не входимо подрібно. — Зазначимо лиш, що наколи площа дрóганя з площою впаданя творить кут ріжний від зера і від $\frac{\pi}{2}$ (т. є. коли не на жадного з розбираних случаїв), то кожде дрóганє можна розложити на два: одно рівнобіжне до площі впаданя, друге до неї прямове; а такі два дроганя підчиняють ся законам, щосьми їх вже вивели.

8. **Енерґія проміниста.** В теориї фильованя енерґія середовища, через яке переходить сьвітло, складає ся з енерґії потенцияльної та кінетичної; перша походить з деформациї середовища, яке уважаєм за пруживе, друга з руху дрогаючого. Цїла енерґія елєменту об'єму остає стала, бо енерґія потенцияльна збільшаєсь о стілько, о скілько зменшаєсь кінетична, і на відворіть.

В маґнетній теориї сьвітла принимаємо також, що енерґія середовища є в части потенцияльна, в части кінетична. Енерґія потенцияльна, що походить з явищ елєктростатичних, є — як знаєм:

$$W = \iiint \frac{2\pi}{K} (f^2+g^2+h^2)dxdydz,$$

---

[1]) Гл. н. пр. Lang loc. cit. (Optik), Wüllner: Lehrbuch der Experimentalphysik том II. 456 et sqts.

а енерґія кінетична, що є електродинамічним потенциялом систему токів, який находить ся в середовищи, є:

$$T = \frac{1}{8\pi} \int\int\int (\alpha a + \beta b + \gamma c) dxdydz.$$

Обчислїм обі ті величини для филї плоскої, рівнобіжної до пл. XY, що єї момент електромаґнетний має напрям рівнобіжний до оси x. Тодї, як знаєм:

$$G = H = 0, \quad Q = R = 0, \quad g = h = 0, \quad \alpha = \beta = 0, \quad a = c = 0,$$

а вираженя на енерґії є:

$$W = \int\int\int \frac{2\pi}{K} f^2 dxdydz$$

$$T = \int\int\int \frac{1}{8\pi\mu} b^2 dxdydz.$$

З рівнань VII. і III. слїдує, що:

$$f = \frac{K}{4\pi} P = - \frac{K}{4\pi} \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$b = \frac{\partial F}{\partial z},$$

отже:

$$dW = \frac{K}{8\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 dxdydz, \qquad dT = \frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 dxdydz.$$

Но F сповняє рівнанє ріжничкове:

$$K\mu \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$

що його інтеґралом є:

$$F = f(z - Vt), \quad V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}};$$

проте маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - Vf'(z - Vt), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f'(z - Vt),$$

отже:

$$K \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2,$$

т. є. W=T; вартости обох енерґій є проте рівні; наколи одна з них росте, то і друга росте о ту саму скількість, і противно. Се заключенє *не годить ся* з заключенями звичайної теориї сьвітла.

Внутрішна енерґія середовища є проте в половині елєктростатична, в половині елєктрокінетична. — Найжеж беззглядна вартість кождої з тих половин буде p; з причини істнованя енерґії елєктростатичної, а кромі сього понеже з сили елєктромоторичної істнує лиш складова в напрямі x, то — як Maxwell доказує[1]) — істнує рівнобіжно до оси x тяг о величині p і прямово до него в напрямі оси y і z тиск[2]) о величині p. Однак з причини істнованя енерґії елєктрокінетичної, а відтак задля того, що з індукциї маґнетної остала лиш складова в напрямі оси y, істнує в напрямі оси y тяг о величині p, а прямово до него в напрямі оси x і z тиск також о величині p. Цілий проте ефект діланя елєктростатичного та елєктрокінетичного в діелєктрику є тиском о величині 2p в напрямі поступу филї т. є. в напрямі оси z (так як тиск і тяг в напрямі оси y і x зносить ся). А що ціла скількість енерґії, віднесена до одиниці об'єму, виносить також 2p, проте:

В середовищи, в якім поступає филя, істнує в напрямі поступу руху тиск, який в уважанім місцї є чисельно рівний цїлковитій енерґії, яка є віднесена до одиниці об'єму.

Maxwell обчислив[3]) величину тиску, якого дізнає поверхня осьвітленя від сонця. Наколи приймем, що видатність сьвітла, яке випромінює сильний луч сонця, на метер квадратовий, виносить:

$$124{\cdot}1.9{\cdot}81.10^{5}\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{sec}},$$

то енерґія, яка містить ся в однім метрі кубічнім, є менше більше:

$41{\cdot}36.9{\cdot}81.10^{-3}\,\mathrm{erg}$; середний тиск на метер квадратовий є проте $0{\cdot}004136.9{\cdot}81\ \mathrm{g}$.

Тиск сей дїлає лиш на поверхню осьвітлену, Maxwell надїє ся проте, що дуже тонька бляшка металїчна, наколи єї завісимо в порожнї, порушить ся під впливом міцно зібраних лучів сьвітляних.

---

[1]) Maxwell loc. cit. I. ст. 156 et sqts.

[2]) Істнованє тягу та тиску легко можна витолкувати в слїдуючий спосіб. Показали ми, що для филї плоскої сила електромоторична має той сам напрям, що момент електромаґнетний; проте лінії сили електромоторичної біжуть рівнобіжно до оси xx, тому елємент, що стоїть прямовісно до оси xx, дізнає нормального тягу. До повисшого напряму є прямовісним напрям сили маґнетної, отже лінії сили маґнетної стоять прямовісно до лінїй сили електромоторичної, а проте рівнобіжно до уважаного елєменту, що з тої причини дізнавати ме нормального тиску.

[3]) Maxwell loc. cit. II. ст. 548.

Позаяк половина сього тиску є рівна електростатичній, зглядно електродинамічній енерґії, проте можемо легко найти вартість сили електромоторичної, віднесеної до одиниці довгости, та сили електродинамічної сонця. Maxwell обчислив, що сила електромоторична. виносить до 600 вольтів, а сила електромаґнетна до 0·193 одиниць (em), отже троха більше, як $\frac{1}{10}$ складової поземої маґнетизму земского в Анґлії.

Maxwell подав дуже цїкаве поясненє того тиску.[1]) Так як електродинамічну енерґію $\int\int\int \frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{8\pi}$ dxdydz можна уважати за кінетичну, то можна приняти, що середовище, в якім відбувають ся явища електродинамічні, складаєсь з дробин, що відбувають рухи оборотові (вирові). Наколи $\alpha'\beta'\gamma'$ є складові оборотової скорости дробини, яку уважаємо за свобідну, то енерґія кінетична, яка збудилась через оборот, є пропорциональна до $\frac{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}{2}$. Можемо проте виражене на енерґію електродинамічну з'ідентифікувати з вираженєм на енерґію середовища, що ся находить в вирі, наколи приймем, що складові обороту є пропорциональні до складових сили електромаґнетної. Напрям тої сили сходить ся з осию обороту дробини.

Наколи приймем, що дробина має вид кулї, то через оборот дробина старає ся сплощити на бігунах, а видовжитись на рівнику. На кождий елємент прямовий до оси обороту дїлає сила з напрямом до середини дробини; на кождий елємент на рівнику рівнобіжний до оси дїлає сила тягу на вні. Позаяк вісь обороту має той сам напрям, що сила маґнетна, проте на елємент прямовісний до тої сили дїлає тяг, на елємент рівнобіжний тиск.

Поступ дрогань маґнетних в діелєктриках статьних
(anisotrop).

1. Діелєктрики такі проводять дрóганя електромаґнетні в кождім напрямі в иньший спосіб, мусимо проте приняти, що в кождім напрямі стала діелєктрична має иньшу вартість; назвім ті вартости в трох до себе прямовісних напрямах K, K', K'', то складові електричного пересуненя є ту:

---

[1]) Гл. пр. Poincaré loc. cit. том I.

$$f = -\frac{K}{4\pi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - X\right)$$

$$g = -\frac{K'}{4\pi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - Y\right)$$

$$h = -\frac{K''}{4\pi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} - Z\right)$$

ψ є елєктростатичний потенциял, X, Y, Z складові елєктромоторичної сили, що походить з якої-небудь причини. Приймім, що та сила елєктромоторична походить з індукциї, що єї викликали токи і маґнети поля, то рівнаня наші будуть:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{K}{4\pi}\, P \\ g &= \frac{K'}{4\pi}\, Q \\ h &= \frac{K''}{4\pi}\, R \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

А анальоґічні рівнаня до рівнань 3) попередного уступу є:[1]

$$\left.\begin{aligned} K\mu\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \Delta F - \frac{\partial I}{\partial x} \\ K'\mu\,\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} &= \Delta G - \frac{\partial I}{\partial y} \\ K''\mu\,\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= \Delta H - \frac{\partial I}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

а наколи розвинемо Δ, $\frac{\partial I}{\partial x}$, ...,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial x} &= K\mu\,\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= K'\mu\,\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial H^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} &= K''\mu\,\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

при чім:

$$I = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

---

[1] Властиво треба би писати μ μ_1 μ_2, но для середовища прозорого є μ у всіх напрямах майже однаке.

Приймім, що заколоти електричні поступають яко филя плоска, що єї рівнанє є:

$$lx + my + nz - Vt = d,$$

де l, m, n є cosinus'и напрямні пряму тої филї, V скорість поступу, а d відступ площі филї від початку системи сорядних в часї $t=o$.[1]

Так як послїдне рівнанє представляє зависимість між x, y, z, t, проте мож уважати функциї F, G, H яко функциї самого d; отже:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial d}\,\frac{dd}{dx} = l\,\frac{\partial F}{\partial d} = lF'$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = lF'' \qquad \text{і т. д.}$$

Наколи се вставимо в рівнаня 2) дістанемо:[2]

$$\left.\begin{aligned}
&\left(m^2 + n^2 - \frac{V^2}{a^2}\right) F'' - lmG'' - nlH'' = o.\\
&- lmF'' + \left(n^2 + l^2 - \frac{V^2}{b^2}\right) G'' - nmH'' = o.\\
&- nlF'' - mnG'' + \left(l^2 + m^2 - \frac{V^2}{c^2}\right) H'' = o.
\end{aligned}\right\} \quad 3)$$

де для скороченя:

$$K\mu = \frac{1}{a^2}, \quad K'\mu = \frac{1}{b^2}, \quad K''\mu = \frac{1}{c^2}.$$

Рівнаня сї є співчасні що до F'', G'', H'', проте їх визначник мусить бути зером, т. є.:

$$\begin{vmatrix}
m^2 + n^2 - \frac{V^2}{a^2} & - lm & - nl \\
- lm & n^2 + l^2 - \frac{V^2}{b^2} & - mn \\
- nl & - mn & l^2 + m^2 - \frac{V^2}{c^2}
\end{vmatrix} = o,$$

а звідси випаде рівнанє:

$$\frac{l^2}{V^2 - a^2} + \frac{m^2}{V^2 - b^2} + \frac{n^2}{V^2 - c^2} = o. \qquad 4)$$

---

[1] Пор. Tumlirz loc. cit. ст. 76.
[2] Пор. Maxwell loc. cit. II. ст. 550.

Таке саме рівнанє дістаєм в теориї Fresnel'а для скорости поступу двох филь плоских (при подвійнім заломаню),[1] що походять від одної і тої самої филї впадаючої.

Филя елєктромаґнетна підлягає проте в діелєктрику статьнім подвійному заломаню.

Наколи порівнати се рівнанє з анальоґічним рівнанєм в теориї фильованя, побачимо, що скорости поступу филь в напрямах трох осий сорядних в середовищах статьних мають ся до себе відворотно як коренї квадратові з спроможностий індукцийних К К' К'' в напрямах тих осий (μ приймаємо за одиницю), або — що є то само — що ті коренї квадратові є пропорциональні до сочинників заломаня в напрямі трох осий пруживости середовища.

Звязь ту справджено для кількох тїл статьних, як пр. сїрки кристалїчної найшов Boltzmann[2]) слїдуючі спроможности індукцийні в напрямі трох осий пруживости:

$$4{\cdot}773, \quad 3{\cdot}970, \quad 3{\cdot}811;$$

коренї квадратові тих чисел є:

$$2{\cdot}184, \quad 1{\cdot}99, \quad 1{\cdot}95.$$

Числа ті є зближені дуже до сочинників заломаня в тих трох напрямах, які є:

$$2{\cdot}143, \quad 1{\cdot}96, \quad 1{\cdot}99.$$

В блисший розбір рівнаня Fresnel'а та Maxwell'а не будемо входили, так як се належить вже до звичайної теориї фильованя; а нам йде лиш о се, щоби справдити згоду обох теорий, зглядно вивести нові права.

2. Анальоґічно, як в уступі попереднім, дістанемо ту рівнаня:

$$4\pi\mu u = - F''(m^2 + n^2) + G''lm + H''ln$$
$$4\pi\mu v = F''ml - G''(n^2 + l^2) + H''mn$$
$$4\pi\mu w = F''nm + G''nl - H''(l^2 + m^2),$$

або на основі рівнань 3):

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\mu u &= - \frac{V^2}{a^2} F'' \\ 4\pi\mu v &= - \frac{V^2}{b^2} G'' \\ 4\pi\mu w &= - \frac{V^2}{c^2} H'' \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

---

[1]) Гл. пр. Lang loc. cit. die Optik.

[2]) Пор. Poincaré loc. cit. том I.

Назначім вислїдну скорість елєктричного дро́ганя через i о cosinus'ах напрямних λ, μ, ν, то:

$$u = \lambda i, \quad v = \mu i, \quad w = \nu i, \quad \text{отже:}$$

$$\lambda : \mu : \nu = \frac{F''}{a^2} : \frac{G''}{b^2} : \frac{H''}{c^2}, \qquad 5')$$

а наколи помножимо 5) постепенно через l, m, n та додамо, дістанемо:

$$4\pi\mu i\,(l\lambda + m\mu + n\nu) = -\,V^2\left(\frac{F''l}{a^2} + \frac{G''m}{b^2} + \frac{H''n}{c^2}\right);$$

а наколи рівнаня 2) помножимо постепенно через l, m, n і додамо, дістанемо:

$$\frac{F''l}{a^2} + \frac{G''m}{b^2} + \frac{H''n}{c^2} \qquad 6)$$

отже:

$$l\lambda + m\mu + n\nu = o \qquad 7)$$

т. є. що дроганя елєктричні відбувають ся в площі филї.

З рівнань 5'), 6), 7) слїдує звязь:[1])

$$\frac{l}{\lambda}\left(b^2 - c^2\right) + \frac{m}{\mu}\left(c^2 - a^2\right) + \frac{n}{\nu}\left(a^2 - b^2\right) = o. \qquad 8)$$

Рівнаня 4), що його досьвідами ствердив Boltzmann, 7) та 8) дістав Fresnel.

Очевидна є річ, що дальші заключеня теориї фильованя о напрямі филї та єї виді оставати мусять без зміни.

Поступ дрогань елєктромаґнетних в середовищи півдіелєктричнім. Абсорбованє дрогань.

В природї виступають найчастїйше тїла посередні, що не є анї повними діелєктриками, анї повними провідниками. Такими тїлами займем ся тепер та виведемо для них права поступу дрогань сьвітляних, або — що є то само — права поступу плоских филь елєктромаґнетних, які при дуже скорих дро́ганях викликують враженє сьвітла.

---

[1]) Гл. Maxwell loc. cit. II. 522.

Для таких тїл можемо вибрати або рівнаня Maxwell'a IX.) або Potier'a X.) — Приймім, що площа филї є рівнобіжна до пл. XY, а напрям елєктромаґнетного момента є рівнобіжний до оси xx, то тодї G=H=o, а рівнаня 1) (з першого уступу другої части) зведуть ся до рівнаня:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

а звідси, наколи при інтеґрованю пропустимо сталу, так як та для заколотів наворотних мусить бути зером, дістанемо:

$$P = - \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Наколи се вставимо в перше з рівнань IX.), т. є. в рівнанє:

$$u = CP + \frac{K}{4\pi} \frac{\partial P}{\partial t},$$

дістанемо:

$$u = - C \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{K}{4\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \qquad 1)$$

Но рівнаня I.), II.), III.) дадуть:

$$4\pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \left[- \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right],$$

а так як з причини вибору сорядних F не залежить від y, то:

$$4\pi u = - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

Наколи з того рівнаня та з 1) виелімінуємо u, то дістанемо:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \mu K \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 4\pi\mu C \frac{\partial F}{\partial t}. \qquad 2)$$

Як показує теория рівнань ріжничкових, інтеґралом того рівнаня є наворотна функция часу t виду:

$$F = e^{i(nt-mz)}, \quad i = \sqrt{-1},$$

де m і n — як се очевидно[1]) — є получені рівнанєм:

$$m^2 = \mu K n^2 - 4\pi\mu C n i.$$

Так як n має вартість $\frac{2\pi}{T}$, де T є наворотом функциї, то та вартість мусить бути дїйсна, проте m^2, отже і m, мусить бути величиною зложеною:

$$m = p - qi.$$

---

[1]) Вистане вставити в 2) за F вартість.

Наколи се вставимо в рівнане на m^2 та зрівнаємо части перворядні і другорядні, дістанемо рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} q^2 - p^2 &= \mu K n^2. \\ 2pq &= 4\pi\mu C n. \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Функция наворотна, що сповняє рівнане 2), дає ся тодї написати в видї:

$$F = e^{-pz}\ e^{i(nt-qz)};$$

но:

$$e^{i(nt-qz)} = \cos(nt-qz) + i\sin(nt-qz).$$

Дїйсна часть функциї, яка є для нас важна з огляду на досьвід, є тепер:

$$F_1 = e^{-pz}\cos(nt-qz).$$

Наколи не узглядними змін, які походять від $\cos(nt-qz)$, то послїдне вираженє показує, що вартість електромаґнетного момента зміняє ся так як e^{-pz}. — Рівнанє:

$$2pq = 4\pi\mu C n$$

показує, що p і q мають той сам знак; наколи проте филя плоска поступає в напрямі додатного z, то p і q є додатні і e^{-pz} меншає з зрастаючим z. Вартість електромаґнетного момента меншає проте в міру, як филя вникає глубше в відповідне середовище.

Таке саме відношенє істнує поміж електричним пересуненєм а силою електромаґнетною; величини ті є іменно звязані з вартостями електромаґнетного момента системом рівнань ріжничкових першого ряду, які проте мусять в собі заключати e^{-pz}. p називає ся сочинником абсорбциї. Наколи проте дроганя маґнетні відбувають ся так скоро, що могуть викликати явище сьвітла, то натуга сьвітла, пропорциональна до квадрату з середної скорости дробини етеру, мусить меншати в спосіб e^{-2pz}.

На случай, що середовище має дуже малу спроможність індукцийну K, а μ майже рівне 1, перейдуть рівнаня 3) на:

$$q^2 - p^2 = o, \quad \text{або} \quad p = q;$$
$$2p^2 = 4\pi C u;$$

p є проте майже пропорциональне до кореня квадратового з спроможности проводу C. Звідси слїдує, що натуга сьвітла, яке переходить через таке тїло, є тим менше, чим менше C; або тїло є тим менше прозоре, чим лїпше проводить електричність.

В дійсности є много виїмків від того права. В загалї однак тїла ціпкі прозорі є добрими діелєктриками, а провідники є майже зовсїм непрозорі. — Кромі сього, як Curie постеріг,[1]) табеля тих тїл, впорядкована після зрастаючої спроможности проводу, є майже тотожна з табелькою, впорядкованою після меншаючої діатерманзиї.

Подаєм ту табельку Curie:

Елєкт. провід зраст.	Діатерм. менш.
Сїрка	Сіль кухонна
Сіль кухонна	Сірка
Флюорит	Флюорит
Спат ісляндский	Спат ісляндский
Кварц	Кварц
Барит	Скло
Алун	Барит
Скло	Турмалїн
Турмалїн	Алун

Від загального закона Maxwell'а відступають елєктролїти, що є добрими провідниками, а однак є в загалї прозорі. Maxwell толкує се в той спосіб, що спроможність проводу у елєктролітів є иньшого рода, чим у металїв. У металїв є дробини матерiї в супокою, а лиш елєктричність відбуває рух; у елєктролїтів противно порушають ся йони від одної елєктроди до другої, отже перехід елєктричности відбуває ся через йони, що несуть з собою елєктричність. — Кромі сего подає Maxwell[2]) єще друге поясненє. Енерґія абсорбована при переходї филї мусить ся конче віднайти під иньшим видом. У металїв перетворюєсь она в тепло, у елєктролітів служить до розділеня йонів. Однак напрям руху йонів залежить від руху елєктричного (тока); отже ефект, викликаний через перехід певної скількости елєктричности в однім напрямі, зносить ся через перехід рівної скількости елєктричности в противнім напрямі; через се токи перемінні, що по собі наступають, та що походять від заколотів, які викликують сьвітло, не могуть викликати нїякого розкладу елєктролїтів. Енерґія не зістає проте зовсїм з'абсорбована, а натуга сьвітла мусить при виходї з елєктроліта бути майже рівна натузї сьвітла, що впадає до елєктролїта.

---

[1]) Гл. Poincaré loc. cit. т. I.

[2]) Гл. Maxwell loc. cit. II. 553.

Дро́ганя електромаґнетні в добрих провідниках.

1. Добрі провідники характеризують ся після Maxwell'а тим, що їх спроможність індукцийна K в порівнаню до спроможности проводу C є дуже мала; з рівнань Potier'а слїдує противно, що для провідників $K = \infty$.

Приймім гіпотезу Maxwell'а, то тодї — як легко ся переконати[1]) — дістанемо з рівнань V.) та VI.) рівнаня ось такі:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\mu C\frac{\partial F}{\partial t} + \Delta F &= o. \\ 4\pi\mu C\frac{\partial G}{\partial t} + \Delta G &= o. \\ 4\pi\mu C\frac{\partial H}{\partial t} + \Delta H &= o. \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Кожде з тих рівнань має зовсїм такий сам вид, як рівнаня, що їх подав Fourier для прав поступу тепла в добрих провідниках.[2])

Наколи отже возьмем під увагу перше з тих рівнань, то складова F електромаґнетного момента зміняти ся буде з положенєм та часом так само, як зміняє ся температура тїла цїпкого, однородного, наколи умови граничні в обох случаях подамо ті самі та наколи величина $4\pi\mu C$ буде чисельно рівна відворотности термічній спроможности проводу материї.[3]) — З тої причини можна всї проблєми, що їх розслїдив Fourier, перенести на случай поступу дро́гань електромаґнетних в провідниках; однак треба тямити, що наколи F, G, H є величини напрямні (вектори після теориї кватернионів), температура є скаляром (отже від напряму не зависить).

Maxwell бере під увагу лиш один случай,[4]) а іменно, наколи дро́ганє електромаґнетне відбувати ся ме в середовищи о безконечно

---

[1]) P зведе ся до: $P = -\frac{\partial F}{\partial t}$, бо в середині провідника $\psi = Const.$, а індукция маґнетна рівнає ся зеру; так само I (Maxwell II. 554) є лиш лїнійна функция часу t, отже $\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial I}{\partial z} = o.$

[2]) Глянь пр. Lang loc. cit. ст. 920 рівнанє 73.

[3]) Термічна спроможність проводу є то скількість одиниць об'ємних материї, яка (скількість) зістане огріта о 1^0C через тепло, що переходить через одиничну кістку материї, якої дві противлежачі стїнки мають ріжницю температури 1^0C, а прочі стїнки тепла не перепускають.

[4]) Maxwell loc. cit. II. ст. 555.

малих розмірах, при чім на початку часу стан даного середовища є точно опредїлений.

Повний інтеґрал наших рівнань ріжничкових є тодї після Fourier'а:

$$v = \iiint \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{2^3 \sqrt{\ } K^3\pi^3 t^3} \,.\, e^{-\frac{(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 + (\gamma-z)^2}{4Kt}} f(\alpha, \beta, \gamma)$$

де v є одна з трох величин F, G, H; K є у Fourier'а спроможність проводу, отже у нас $K = \frac{1}{4\pi\mu C}$; $f(\alpha\beta\gamma)$ є у Fourier'а функция, що дає на місці $(\alpha\beta\gamma)$ величину температури, у нас вартість одної із величин F, G, H на місці $(\alpha\beta\gamma)$ середовища.

2. Возьмім тепер случай, що ток перепливає через лїнїйний злучник, який є окружений середовищем о невеликій спроможности проводу. — Як знаєм ток, що пливе через провідник, викликує довкола себе в середовищи ток індукований. Ток індукований має напрям противний, як ток індукуючий. Натуга такого тока індукованого малїє з причини опору середовища а вкінци зовсїм гине. Однак заким згине сей ток індукований в близькости провідника, викликує він в безпосереднім своїм окруженю також ток індукований (другорядний), що рівнож з часом гине, викликуючи в дальших частях середовища токи індуковані. Так отже індукция розширяє ся через цїле середовище, засяг тока індукованого розширяє ся щораз більше, а його натуга щораз більше малїє.

Наколи мем ток головний удержувати стало на тім самім потенциялї, то токи індуковані, що він їх викличе, розходять ся через середовище і десь в ним гинуть. По за ними остає середовище в станї попередної (нормальної) рівноваги. Для того стану рівноваги маємо, як легко зрозуміти:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = o,$$

отже на основі рівнань 1):

$$\Delta F = \Delta G = \Delta H = o. \qquad 2)$$

Рівнаня ті відносять ся до всїх точок середовища; а для точок току головного маємо (після рівнань першого уступу другої части):

$$\left.\begin{aligned} \Delta F &= -\ 4\pi\mu u \\ \Delta G &= -\ 4\pi\mu v \\ \Delta H &= -\ 4\pi\mu w \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Рівнаня 2) і 3) разом показують, що наколи ток о сталїй натузї пливе від довшого часу в провіднику, то в середовищи, що окружає сей провідник, нема нїяких дрогань (заколотів); ток істнує лиш в провіднику, отже діланя електромаґнетні в цїлїм середовищи треба віднести виключно до тока, що пливе через провідник. — Скорість, з якою наступає сей стан кінцевий, є при тім всїм так велика, що єї при ужитю наших дотеперішних средств не можем виміряти.

Так отже перейшли ми коротко основні закони та заключеня електромаґнетної теориї сьвітла. Як ми уже нераз зазначили, та схожість свойств, яку показують дроганя етеру з одної, а ті заколоти електромаґнетні поперечні, що виступають в діелектрику, через який сьвітло переходить, з другої сторони, була так велика, що сейчас насунула ся гадка, чи ті дроґаня (заколоти) поперечні не дадуть ся відкрити досьвідом. В тій квестиї рішучий крок зробив фізик нїмецкий Гейнріх Hertz, а за ним пішли другі, так що нинї маємо теорию, що опирає ся на досьвідах, т. є. теорию филь електричних. Тими то филями електричними займем ся тепер.

◆

ЧАСТЬ ТРЕТА.

Филї електричні.

Розслїди Hertz'а.

В р. 1879 оголосила академия наук у Берлинї конкурс на роботу експериментальну, якаби виказала дорогою досьвіду звязь між силами електродинамічними а поляризациєю діелєктричною діелєктриків. Тою темою заняв ся молодий фізик нїмецкий Гейнріх Hertz, однак — як сам каже[1]) — перші його проби були безуспішні, так що доперва в р. 1886 повело ся йому викрити филястий характер поступу филь електричних.

Правда, вже скорше W. Bezold в р. 1870 в своїй роботї про виладованя електричні[2]) послугуєсь такими понятями, як филя електрична, інтерференция, відбиванє филь etc., но ся робота не збудила більшого інтересу і для Hertz'а була вповні незвісна, так що йому треба признати право, що перший відкрив досьвідом филї електричні.

Займем ся тепер згаданими досьвідами Hertz'а.

1. В досьвідах своїх уживав Hertz слїдуючого знаряду (фіґ. VI.). Цївка індукцийна Ruhmkorff'а довготи 52 cm., о перекрою 20 cm., або т. зв. перворядний провідник (вібратор, ексцитатор) був получений дротами dd', а звідси кулями bb' і дротами ll' з двома кулями цинковими SS' або плитами квадратовими мосяжними довгими 40 cm., що їх відданенє було 1 m.

Приймім вперед, що ми відлучили обі кулї від цївки та набили до ріжних потенциялів; наколи та ріжниця потенциялів вистане,

---

[1]) Hertz: Uiber die Ausbreitung der elektrischen Kraft ст. 2.

[2]) ibidem ст. 59.

щоби викликати искру між b і b', то між S і S' слїдують виладованя, які мають характер дрóгаючий, наколи істнує нерівність:

$$R^2 < \frac{4L}{C},$$ [1]

де R представляє опір, C поємність, L величину самоіндукциї (самопотенцияла). Прилад Hertz'а сповняв ту нерівність, проте слїдував в нім ряд осциляций (дрóгань), отже і коротко тревалих заколотів електричних о навороті $2\pi\sqrt{LC}$ (після взору Thomson'а). L і C є в одиницях (em) дуже малї, тож і наворот осциляций є дуже короткий; треба проте S і S' раз у раз набивати; функцию ту сповняє цївка P, яки достатчає токів перемінних о навороті 10^{-5} sec. (після Bernstein'а та Mouton'а) так, що ексцитатор Hertz'а набивав ся до 10^5 разів на секунду.

Наколи умістити коло ексцитатора другий (другорядний) провідник т. є. майже замкнене коло злучникове з перервою, що має ледви частинку $^{m}/_{m}$, тодї в місцї перерви бачимо в хвилї дїланя ексцитатора гру искорок, що зміняє ся після виду та розміру злучника R. Для кождого (н. пр. колового) виду R істнує якийсь розмір, що для нього искра показує maximum ясности та довгости. Є тут анальоґія з проявами в акустицї, де ресонатор воздушний тодї лиш починає дрогати під впливом тону о означенім навороті, наколи його промір має відповідну величину. Тому-то другорядний провідник назвав Hertz ресонатором; є він дострoєний до ексцитатора, наколи що до величини та виду є такий, що має maximum искор.

2. Так як ексцитатор є симетричний що до простої, яка лучить середоточки обох куль, то мусять виступати однакові явища в усїх площах, що через ту вісь переходять. Но площа прямова, поведена через середину ексцитатора, є площою симетриї того знаряда; площа та перетинає позем в лїниї, що єї Hertz називає лїнїєю головною; є она також осию симетриї, вистане проте розслїдити му чвертку площі, що лежить між осию ексцитатора а лїнїєю головною.

З ряду досьвідів вивів Hertz[2]) слїдуючі заключеня:

I. Наколи площа ресонатора є **прямовісна**, а знаряд обертаємо докола його середоточки так, що промір, який переходить через

---

[1]) Доказ гл. Poincaré loc. cit. том II. ст. 124.

[2]) Hertz loc. cit. ст. 39—54, 87—101. Пор. також Poincaré loc. cit. том II.

перерву, (т. зв. вісь симетриї ресонатора) описує новий лук коловий, то тодї искри зміняють довготу; в обох положенях, при яких вісь симетриї має напрям прямовісний, показують искри maximum довготи; противно зовсїм гинуть, наколи та вісь лежить поземо; в положенях посередних довгота искор є тим більша, чим більше вісь симетриї наближаєсь до пряму.

II. Довгота искор в часї їх maximum залежить для одного і того самого положеня середоточки ресонатора від азімута площі ресонатора. Се мож доказати в сей спосіб, що обертаємо ресонатор довкола його оси симетриї, яка стоїть прямовісно; в часї цїлого обороту виступають два maxim'a і два minim'a искор. Азімути для maxim'ів (minim'ів) є віддалені о π^0; ріжниця азімуту для maximum і minimum є $\frac{\pi}{2}$.

III. В якім положеню ресонатора (фіґ. VII.) мають виладованя maxim'a та minim'a, залежить се від положеня середоточки ресонатора з огляду на ексцитатор. Назначім через α кут між осию SS' ексцитатора а простою OC, що лучить середоточку тої простої з середоточкою ресонатора, а через β кут наклоненя площі ресонатора та простої OC в хвилї minimum, то коли $\alpha = \left(o \cdots \frac{\pi}{2}\right)$, то $\beta = \left(\frac{\pi}{2} \cdots \pi\right)$, наколи віддаленє OC виносить троха менше як 3 m. При дальших віддаленях є положеня ресонатора в хвилях minimum до себе майже рівнобіжні та прямовісні до SS'. В кождім віддаленю minim'a є зером, наколи середоточка ресонатора найде ся на лїнїї головній Oy, а його площа спаде з тою головною лїнією.

IV. Наколи площа ресонатора є **позема**, то довгість искор зависить також від положеня оси симетриї. — В віддаленю до 3 m. від ексцитатора маємо цїлий ряд точок, що творять неначе замкнений пояс, в якім не ма анї maximum анї minimum без огляду на се, яке положенє займе площа ресонатора та його вісь симетриї.

Ті вислїди показують наглядно на дрогаючий характер заколотів електричних, які виступають в обох провідниках. Заколоти ті поступають через воздух та інтерферують між собою; заколоти ті назвемо проте дроганями електричними.

3. На перебіг явища має вплив істнованє провідників в окруженю ексцитатора; сей вплив приписати треба дїланю, яке викликують на ресонатор токи індуковані, що їх викликав ексцитатор в тих провідниках. Но після теориї Maxwell'a і токи пересуненя,

що повстають в діелектрику, так як токи проводу, мусять викликати дїланє індукцийне. Дїйсно доказав сього Hertz[1]) в сей спосіб, що побіч екцитатора поміщував ріжні діелектрики, як папір, асфальт, нафту, смолу, дерево, сїрку, парафіну etc.; maxim'a та minim'a искор виступали в кождім случаю в иньшім положеню ресонатора, що можна було виключно приписати дїланю діелектриків, отже істнованю токів пересуненя.

4. Поступ филь в дротах металевих. Hertz доказав в дальших своїх досьвідах,[2]) що скорість поступу дро́гань електричних в дротах металевих є скінчена. До того уживав екцитатора з плитами прямовісними (фіґ. VIII.); за тими плитами поміщав плиту P о таких самих розмірах та получив єї злучниками m і n з дротом ізольованим, 12 m. довгим, поміщеним в прямовісній площи симетриї, 40 cm. понад осию AA'. Ресонатор R був так поміщений, що його середоточка находила ся на лїнії головній, а його перерва в горі; його прямовісна площа переходила через дріт. Наколи дрота не було, то — як з попередних дослїдів Hertz'a слїдує — не мігби екцитатор в тій позициї збудити искор в ресонаторі. Искри однак виступають, що може походити лиш виключно з дїланя дрота. Наколи будемо ресонатор пересувати в тій самій площи від вільного кінця дрота до екцитатора, то побачимо, що искри не повстають на кінци дрота і на всїх місцях віддалених о многократи 2·8 m від кінця; точки сї назвав Hertz узлами. В иньших місцях повстають искри, осягають в деяких точках maximum, а меншають, коли ся наближаєм до узлїв. — Наколи дрот перетнемо в точцї, де є узол, то явище зовсїм ся не змінить; повстануть узли і maxima в обох кусниках дрота в тих самих місцях, що і передше. Дріт представляє проте анальоґію до струни; но та анальоґія стане ся дїйсна, наколи приймем, що скорість поступу дрогань електричних в дроті є скінчена. Узли повстають через інтерференцию филь, які поступають через дріт, та филь відбитих від кінця дрота. Скорість поступу филь найдемо, наколи звісний нам буде наворот дро́гань. Hertz приймає сей час яко рівний $1{\cdot}4.10^{-8}$ sec. (після взору Thomson'a, який ми вже раз подали), а що пів довготи филї є 2·8 m, проте скорість поступу филь електричних в дроті булаби circa 200000 Km. Однак Poincaré звернув увагу[3]) на похибку в обчисленю

---

[1]) Hertz loc. cit. ст. 111.

[2]) ibidem ст. 115 et sqts.

[3]) Poincaré: Contribution à la theorie des expériences de Hertz. Comptes rendus 111 ст. 322 рік 1891.

Hertz'a та доказав, що вислїд Hertz'a є за малий в відношеню $1 : \sqrt{2}$, а через се правдива скорість поступу дрогань елєктричних в провідниках простолїнїйних випаде 288000 Km, отже є величиною того самого ряда, що скорість сьвітла. Скорість та не залежить анї від перекрою дрота анї від материялу.

5. Скорість поступу в воздусї. Дальше розслїдив Hertz явища, що виступають в безконечно довгім дроті (при чім відпадає відбиванє ся филь); досьвід сей зреалїзував Hertz в сей спосіб, що дріт, уживаний в попередних досьвідах, продовжив о 60 m та закопав по за салею досьвідів в землю.

Наколи помістимо ресонатор в площи поземій, яка переходить через дріт, так що перерва найде ся в горі, а середоточка ресонатора лежить на головній лїнїї знаряду, тодї на ресонатор дїлає виключно дріт. Наколи в тій позициї обернемо ресонатор о 90° довкола його прямовісної оси, то дїланє дрота устає, бо ресонатор є прямовий до дрота; в тім положеню лиш ексцитатор викликує искри. Дїланє дрота і ексцитатора на середоточку ресонатора мусить бути проте однаке, наколи искри в тих двох до себе прямовісних положенях мають одиноку довготу. Сю умову легко дістанемо, наколи плиту P присунимо або віддалимо від плити A. — Для посередних положень ресонатора дають оба дїланя дїланє вислїдне і довгота искор мусить бути для певного положеня maximum, для иньшого minimum. — Наколи ресонатор пересуваємо вздовж дрота, то бачимо, що maxim'a зміняють свою величину та не відповідають одному і тому самому кутови між прямом площі ресонатора а лїнїєю головною. При деяких частиях дрота виступають maxim'a, наколи прям має напрям до A'. Однакові maxim'a виступають для точок, віддалених від себе о 7·5 m. Явище показує ту саму натугу що 7·5 m, но при ріжних положенях пряму зглядом головної оси. Яка тому причина?

Як звісно в дроті половина довгости филї є 2·8 m; отже дві точки дроту віддалені о 2·8 m, показують противне дїланє. Наколиб скорість поступу дїлань ексцитатора була безконечно велика, то тодї зміна напряму пряму в положенях maxim'ів залежалаб виключно від дрота і ся зміна мусїлаб виступати що 2·8 m. То само мусїлоб заходити, наколиби скорість поступу в воздусї була та сама, що в дроті. Досьвід дає однак иньші вислїди; мусимо проте приняти, що скорість поступу в воздусї є скінчена і ріжна від скорости в металях. Дослїджені явища мусимо приписати інтерференциї филь, що переходять через воздух, та филь, що переходять через дріт.

Звідси найдем скорість поступу дрогань електричних в воздусї, треба лиш узглядннти, що інтерференциї стало зміняють знак, наколи один з рухів випередив другий о пів довготи филї. Наколи λ є половиною филї в воздусї, λ' половиною филї в дроті, а d найдена довгість, то:

$$n\lambda = (n+1)\lambda' = d.$$

$\lambda' = 2{\cdot}8$ m, $d = 7{\cdot}5$ m, проте $\lambda = 4{\cdot}5$ m; а наколи приймем той сам наворот дроганя, що попередно, дістанемо на скорість поступу дрогань електричних в воздусї 320000 km, отже величину того самого ряду, що скорість сьвітла.

6. **Відбиванє филь.** В дальших своїх досьвідах відбивав Hertz филї та силував їх до інтерференциї з филями поступними. До того уживав він бляхи з цинку о великих розмірах, що єї помістив в означенім віддаленю, та злучав з землею. Ексцитатор був від тої бляхи (зеркала) віддалений о 13 m. Наколи середоточку ресонатора помістимо на прямі зеркала, який переходить через ексцитатор, т. є. на т. зв. **прямі впаданя**, а площу ресонатора помістимо прямово до того пряму, то тодї бачимо, що в безпосереднім окруженю зеркала не виступають зовсїм искри або лиш дуже слабі без огляду на напрям оси симетриї, так само в віддаленю 4·1 m і 8·5 m; є то проте узли.

Наколи пересуваємо ресонатор від зеркала рівнобіжно до первісного положеня, так що його середоточка лежить на прямі впаданя, побачимо слабі искорки, які що раз більше зростають та стають в віддаленю 1·72 m maximum; дальше меншають, гинуть при 4·10 m, знов зрастають і мають maximum при 6·30 m; однакові прояви виступають проте що 4·5 m. — Так само виступають maxima що 4·5 m, наколи ресонатор помістимо в площи прямовіснїй, що переходить через прям впаданя і уставимо вісь симетриї рівнобіжно до пряму впаданя, а опісля пересуваємо ресонатор рівнобіжно до первісного положеня почавши від зеркала. Звідси слїдує, що довжінь филь в воздусї виносить 4·50 m, отже в воздусї рівнає ся скорости сьвітла.

7. **Лучі електричної сили.** Так як заколоти електричні мають характер филястий, проте мож говорити о **лучах сили електричної**, так як говоримо о лучах сьвітла. Hertz доказав, що лучі ті підлягають тим самим законам відбиваня та заломаня, що лучі сьвітла, а через се дав один доказ більше на правдивість електромаґнетної теориї сьвітла. Доказав він се в слїдуючий спосіб.

Кулї SS′ екситатора умістив він на лїнії огнищевій зеркала параболїчного зробленого з бляхи цинкової о висоті 2 m, а о промірі 1·2 m. Ресонаторови дав вид простокутника (фіґ. IX.) та помістив його так, що оба дроти прямовісні ресонатора стали в площи огнищевій другого зеркала параболїчного о таких самих розмірах, як перше зеркало, а оба дроти поземі ресонатора переходили через зеркало так, що перерва (мікрометер) для искор була за зеркалом. Таким знарядом доказав Hertz простолїнїйний поступ, поляризацию, відбиванє та заломанє дрогань електричних.

а) Простолїнїйний поступ дрогань. Лучі, які виходять з екситатора, відбиті від зеркала розходять ся простолїнїйно. Доказали сього численні досьвіди; і так искри ресонатора меншали, наколи площа симетриї зеркала, що до него належало, не спадала з площою симетриї першого зеркала; коли обі площі впали на себе, отже коли оба зеркала були рівнобіжні, а між ними помістив Hertz плиту металеву (цинкову) високу на 2 m, а широку на 1 m, то искри гинули; так само гинули, коли між зеркалом став чоловік; а противно не гинули, коли між зеркалами вставив Hertz ізолятор (н. пр. дошку).

б) Поляризация. З причини виду екситатора відбувають ся дрогання лучів електричних в площи, що заключає в собі сей луч. Луч такий має такі свойства, як луч сьвітла лїнїйно споляризований.

Наколи друге зеркало обернемо довкола оси поземої, то искри слабнуть і гинуть, наколи площі симетриї є до себе прямові (зовсїм так, як се дїєсь у лучів сьвітляних лїнїйно споляризованих).

Наколи між обома зеркалами, що є уставлені рівнобіжно, вставимо рамку з дерева, на якій є порозпинані рівнобіжні металеві дротики, то наколи ті дротики стоять прямово до лїнїй огнищевих, то искри не меншають; противно гинуть, наколи дротики стоять до тих лїнїй рівнобіжно. Є ту анальоґія до плитки з турмалїну, яка є вирізана рівнобіжно до оси оптичної.

в) Відбиванє дрогань. Hertz поставив оба зеркала так, що їх площі симетриї перетинали ся в віддаленю 3 m; на лїнії перетинаня помістив він плоске зеркало з цинку, що його площа стояла прямово до двосїчної кута, який замикали обі площі симетриї. Тодї виступали в ресонаторі искри (кут впаданя був проте рівний кутови відбитя), котрі гинули, наколи Hertz обернув зеркало плоске о 15° довкола оси прямовісної.

г) Заломанє. Щоби вкрити заломанє лучів сили електричної, уживав Hertz призмату асфальтового о висоті 1·5 m, а о куті ломлячім 30°; призмат стояв в віддаленю 2·6 m від ексцитатора. Тодї давав ресонатор найбільші искри, коли його площа симетриї творила з площею симетриї ексцитатора кут 22°. Що переношенє дрóгань (луча) відбувало ся виключно через призмат, доказав Hertz в сей спосіб, що искри гинули, наколи перед або за призматом уставив на дорозі луча кусень бляхи металевої, від якої — як знаєм — луч ся відбиває.

Теория Poyting'a і Heaviside'a.

Сї досьвіди Hertz'a відкрили та доказали филястий характер дрогань електричних, отже виказали анальоґію між явищами електричними та оптичними. Но Hertz пішов єще дальше в своїх розслїдах, бо доказав правдивість теориї Poynting'a та Heaviside'a, яка відносить ся до поступу енерґії електричної, коли дрóганя є дуже скорі.

1. Представимо тепер теорию тих двох учених англїйских, а дальше представимо дослїди Hertz'a, які доказують, що та теория є правдива. Poynting і O. Heaviside поставили свою теорию в роках 1884 і 1892, а основали єї на рівнанях Maxwell'a.[1] І так Poynting поставив слїдуюче твердженє:[2]

В поли електромаґнетичнім порушає ся енерґія в якійсь точцї просторони прямово до поверхнї, яка заключає в собі лїнії сили маґнетичної та електричної, що переходять через ту точку; безглядна вартість енерґії, яка переходить через одиницю тої поверхнї в однїй секундї, є $\frac{1}{4\pi}$-ою добутка з натуг обох сил (електричної та маґнетичної) та sinus'у кута замкненого через обі ті сили.

Твердженє се докажемо тепер та виведемо з нього заключеня.

Як знаєм, цїла енерґія поля є:

$$T + W = \int\int\int \left(\frac{\mu}{8\pi} \Sigma\alpha^2 + \frac{2\pi}{K} \Sigma f^2 \right) dxdydz,$$

а так як:

$$f = \frac{K}{4\pi} P, \qquad \text{то:}$$

---

[1] Гл. Poincaré loc. cit. II. 207 et sqts.

[2] Пор. Föppl: Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Electricität ст. 301.

$$T + W = \frac{1}{8\pi} \int\int\int (\mu \Sigma \alpha^2 + K \Sigma P^2)\, dxdydz,$$

де перший вираз представляє величину енерґії елєктромаґнетної, другий енерґію елєктростатичну.

Наколи в скількости або розміщеню енерґії настане зміна, то величина сеї зміни в одиниці часу буде:

$$\frac{d(T+W)}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int\int\int \left(\mu \Sigma \alpha \frac{d\alpha}{dt} + K \Sigma P \frac{dP}{dt}\right) dxdydz. \qquad 1)$$

Но з рівнань IX. слїдує, що:

$$\frac{K}{4\pi} \frac{dP}{dt} = u - CP = u - p, \qquad p = CP,$$

а дальше:

$$P = c \frac{dy}{dt} - b \frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = cy' - bz' + P',$$

отже другий вираз правої сторони в 1) буде:

$$\frac{K}{4\pi} \iiint \Sigma P \frac{dP}{dt}\, dxdydz = \iiint \Big[\Sigma(cy' - bz')u + \Sigma P'u - \Sigma Pp \Big] dxdydz.$$

Наколи узглядним рівнаня II., дістанемо по перерібках:

$$\frac{K}{4\pi} \iiint \Sigma P \frac{dP}{dt}\, dxdydz + \iiint \Sigma Xx' dxdydz + \iiint \Sigma Ppdxdydz =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iiint \Sigma \left(R' \frac{\partial \beta}{\partial x} - Q' \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) dxdydz.$$

А звідси, наколи введемо інтеґрал поверхневий, де прям елємента поверхнї $d\omega$ має напрямні cosinus'u l, m, n, дістанемо по перетвореннях рівнанє 1) в видї:

$$\frac{K}{4\pi} \iiint \Sigma P \frac{dP}{dt}\, dxdydz + \frac{\mu}{4\pi} \iiint \Sigma \alpha \frac{da}{dt}\, dxdydz + \iiint Xx' dxdydz +$$

$$+ \iiint \Sigma Ppdxdydz = \frac{1}{4\pi} \int \Sigma l (R'\beta - Q'\gamma)\, d\omega. \qquad 2)$$

В тім рівнаню представляє:

1. вираз по лївій стороні зріст енерґії елєктростатичної на секунду
2. „ „ „ „ „ „ елєктромаґнетної „ „
3. „ „ „ „ роботу сил електродинамічних „ „
(т. є. енерґію тока, перетворену в рух).
4. „ „ „ „ зріст тепла Joule'a,1) енерґії хемічної etc.

---

1) бо після права Joule'a скількість тепла, яка повстає в часї dt в провіднику є $\frac{1}{C}\, dt \iiint \Sigma u^2 dxdydz$, а $p = CP$, $u = CP$ (для провідників); глянь рівнаня VI. Пор. Poincaré loc. cit. том I.

Цїла лїва сторона представляє проте цїлий зріст енерґії на секунду в внутрі замкненої поверхнї. Енерґія та переходить через поверхню, а при тім кождий елємент поверхнї доставляє зросту енерґії, вираженого через праву сторону рівнаня 2). Ту праву сторону перетворимо.

Найже вислїдна з P', Q', R' буде E', а вислїдна з α, β, γ буде H, а дальше най напрями вислїдних E' і H творять кут ϑ, то положенє площі, яка заключає в собі E' і H, є представлене — як се є очевидне — через рівнанє:

$$L = \frac{R'\beta - Q'\gamma}{E'H \sin \vartheta},$$

де L, M, N є cosinus'и напрямні пряму тої площі. Тепер права сторона рівнаня 2) перейде на:

$$\frac{1}{4\pi} \int E'H \sin \vartheta (Ll + Mm + Nn)\, d\omega.$$

Сей зріст є maximum, коли:

$$Ll + Mm + Nn = 1,$$

т. є. енерґія пливе прямовісно до площі $(E'H)$ і має для елєменту $d\omega$ вартість $E'H \sin \vartheta$, згідно з теориєю Poynting'a.

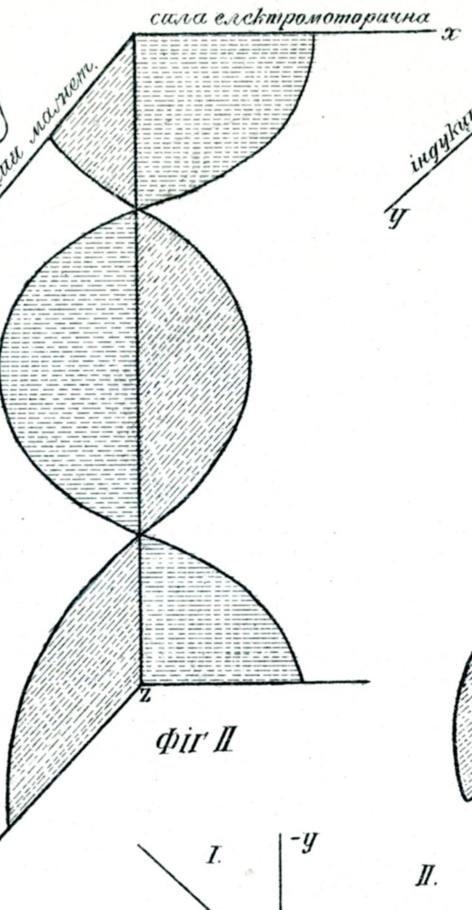
Всюди проте, де рівночасно виступають сили маґнетні та елєктромоторичні, пливе енерґія по кривцях, які походять з перетинаня ся елєктромаґнетних та елєктромоторичних поверхний позему.

Після теориї Poynting'а переносять проте енерґію не провідники, но противно діелєктрики. Енерґія входить в усїх случаях з внї через поверхню до провідників і то менше або більше глубоко після того, чи маємо до дїла з токами сталими, чи з токами, що скорше або помалїйше ся зміняють, та там перетворює ся в тепло. При дуже скорих токах перемінних (дроганя Hertz'а) енерґія остає зовсїм на верхнї, а в серединї провідників є повний супокій.

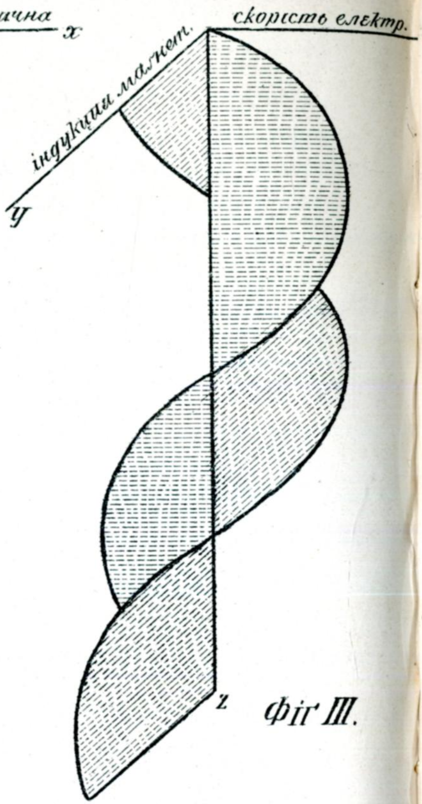
2. Що теория Poynting'а є вповні правдива, доказав рішучо Hertz в слїдуючий спосіб.

В комбінациї знарядів, що їх уживав до міреня скорости поступу филь елєктричних в дротах, зробив Hertz в довгім провіднім дротї перерву, що давала искру на 6 mm. Перерву ту ослонив клїтинкою в виді валця (фіґ. X.), яка була зложена з двох плит металевих, получених 24 тонькими дротиками, що були натягнені рівнобіжно до головного дрота так, щоби можна бачити ту перерву;

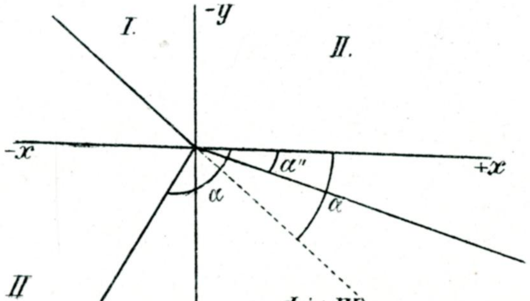
Фіґ I.



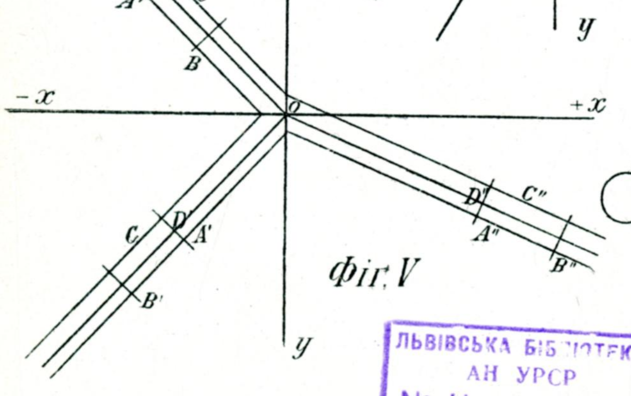
Фіґ II.



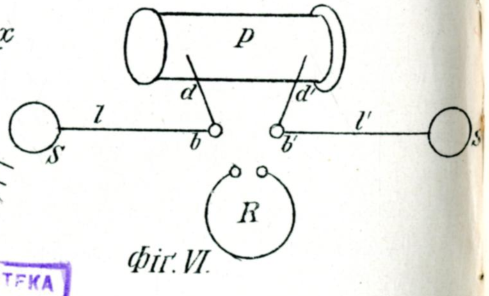
Фіґ III.



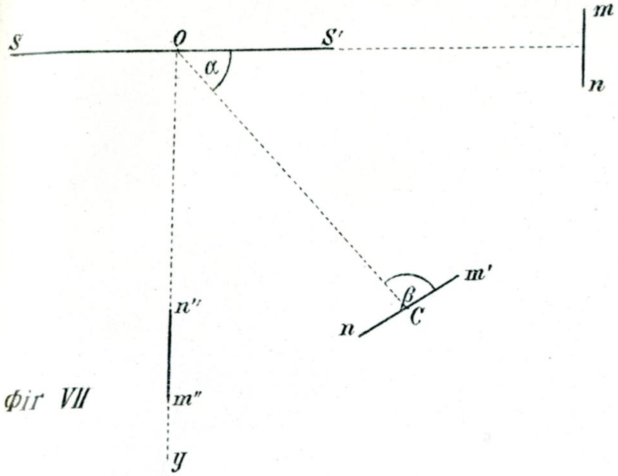
Фіґ IV



Фіґ. V

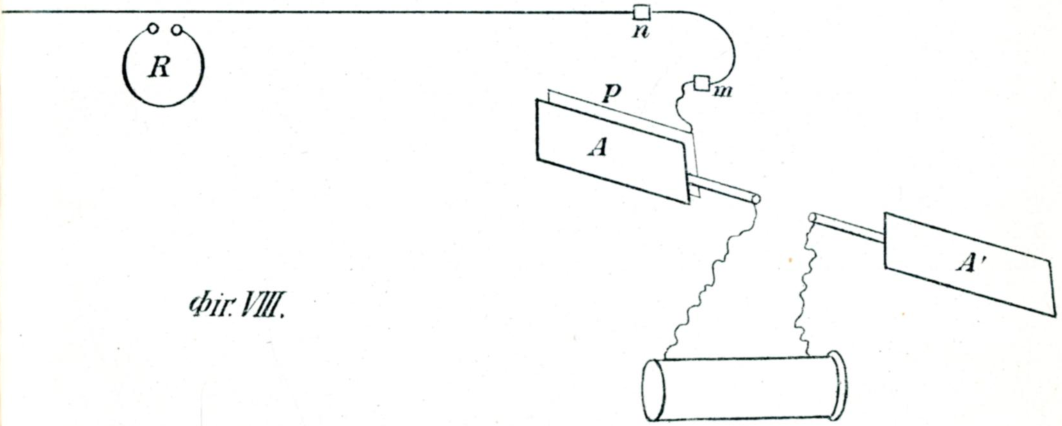


Фіґ. VI.



Фіґ VII

Фіґ. IX.



Фіґ. VIII.

Фіґ. X.

тодї искри зовсїм не виступали, хоча опір клїтки був більший, чим опір провідного дрота. Наколи місто 24 дротів було їх всього 8, искри мали довгість 0·1 mm, наколи був лиш один дротик, довгість искор була 3 mm.

Щоби розслїдити, яку грубість має мати дрот натягнений на клїтинцї, щоби енерґія елєктрична не могла увійти до єї середини, ізольовав Hertz плитку сеї клїтинки, відвернену від ексцитатора в сей спосіб, що вирізав в тій плиточцї округлий отвір (так що плитка не дотикала дрота); в сей отвір заложив рурку скляну, довгу так на 1·5 m, так що головний дріт провідний ішов через ту рурку. Та скляна рурка була осмотрена в покривку металеву о ріжній грубости; покрива та лучила ся одним кінцем з плиткою клїтинки, другим кінцем з провідним дротом. Тодї в перерві дрота не виступали искри. Наколи однак зірвано контакт між сею металевою покривою а провідним дротом, тодї виступали искри на доказ, що енерґія елєктрична через отвертий тепер конець рурки скляної входила до єї середини. Доперва як грубість покриви металевої була менша чим 0·01 mm, виступали искри в перерві, хоча був контакт між покривою металевою а провідним дротом. Проте при дуже скорих дроґанях вже в глубинї 0·01 mm під верхнею в провіднім дроті не ма зовсїм руху.

Короткий перегляд розслїдів над филями елєктричними.

1. Появленє робіт Hertz'a, що так рішучо виказали характер дроґаючий заколотів елєктричних, а тим самим ствердили правдивість теориї Maxwell'a, викликали серед ученого сьвіта велике заінтересованє. Нїчо отже дивного, що много фізиків кинуло ся до розслїдженя явищ, відкритих Hertz'ом, а хоча ті розслїди мали з початку майже виключно характер якостний, то однак в засадї доказали они правдивість поглядів Hertz'a. Перші розслїди мали цїль ствердити досліди Hertz'a, засада їх була проте така, як в роботах Hertz'a, а ріжнили ся они лиш деякими модифікациями самої методи. Очевидно, що ті роботи не лиш потвердили погляди Hertz'a, но відкрили єще много інтересних фактів.

Не наша є річ представляти подрібно всї ті роботи, ми подамо лиш характеристику деяких головнїйших.

Важні є в першій мірі роботи Wiedemann'a та Ebert'a, а пізнїйше Hallwachs'a, що займають ся впливом сьвітла на елєктричні виладованя. З розслїдів їх слїдує, що тїла електризовані від'ємно тратять під впливом сьвітла свій набій скорше, як серед звичайних умов, а кромі сього роботи ті доказали, що через осьвітлене на плитах металевих можна викликати набій додатний. Є се неначе „pendant“ до електромаґнетної теориї сьвітла: електричне пересунене викликує сьвітло, сьвітло викликує дроѓаня електричні.

Як сказано, перші автори модифікували лиш досьвіди Hertz'a. І так Dragoumis заступив ресонатор рурками Geissler'a, Bartoniek лямпкою жаровою з переломаним дротиком, Ritter удом жаби і т. п. Ту згадати треба Lodge'a, що збирав филї електричні при помочи сочки зі смоли земної. Всї ті роботи потвердили лиш погляд, що заколоти електричні є поперечні та дрогаючі.

2. Многократний відзвук. Дуже важною була робота Sarasin'a i de la Rive'a, що появилась в р. 1890 в Archive de Genève.[1]) При розслїдах інтерференциї филь електричних постерегли они, що довгість филї залежить від розмірів ресонатора, а не залежить майже зовсїм від екситатора. Явище то назвали они многократним відзвуком та старали ся пояснити його ось як: Екситатор не викликує анї одного дроѓаня о точно означенім навороті, анї означеного ряду ріжних гармонїйних тонів горішних; його спектр — як би можна сказати — не складавби ся анї з одної одинокої лїнії (як пр. спектр соду), анї з цїлого ряду віддїльних лїній, лиш бувби се тягкий снопок з неясними берегами. Ресонатор з усїх тих дроѓань, які висилає екситатор, скріпляв би лиш ті, які згоджують ся з його наворотом, отже розміри ресонатора впливалиби в сей спосіб на довжінь филї.

Сей спосіб толкованя відкинули Hertz та Poincaré, що подає иньше пояснене; спосіб толкованя того женіяльного математика подамо ось тепер.

При дроѓаню, що його висилає екситатор, треба після Poincaré відріжнити дві річи: наворот та льоґаритмічний декремент. Poincaré принимає, що сей декремент є більший для екситатора, чим для ресонатора. Натуга дроѓань, що виходять з екситатора, буде проте меншати скорше, так що дроѓаня ті будуть короткотревалї та мало спосібні до інтерференциї. Тимчасом з дроѓанями ресонатора справа є иньша; іменно в ресонаторі будить екситатор дроѓаня, наколи їх навороти є мало ріжні. Ресонатор починає дроѓати тодї, як

---

[1]) Гл. Poincaré loc. cit. II. 201 et sqts.

ексцитатор буде уже в супокою, але він буде дрóгати з своїм власним наворотом і як раз достеречи можем ті дрóганя, бо они є довшетревалі, отже спосібні до інтерференциї.

Се толкованє поясняє єще Poincaré слїдуючими розслїдами аналїтичними.

Дрóганє, яке слабне в якийнебудь спосіб, можна всегда представити рівнанєм ріжничковим другого ряду:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\alpha \frac{dy}{dt} + \beta y = o,$$

де y є змінна відповідно вибрана, t час, α, β сталї.

Загальним інтеґралом того рівнаня є функция:

$$y = e^{-\alpha t}(A\cos mt + B\sin mt),$$

де: $m = \sqrt{\beta - \alpha^2}$; m є проте наворотом, α декрементом. Наколи α можна опустити (приймем, що се вільно зробити для ресонатора), то тодї:

$$\alpha = o, \quad \beta = m^2, \qquad \text{а тодї:}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + m^2y = o \qquad 1)$$

звідси інтеґрал:

$$y = C\cos mt + D\sin mt.$$

Наколи тепер на дрóганя ресонатора впливати муть дрóганя, що виходять з ексцитатора, для якого декремент та наворот залежать від якихсь двох чисел a і n, то тодї — як приймає Poincaré:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + m^2y = Ae^{-at}\cos nt + Be^{-at}\sin nt;$$

через інтеґрованє дістанемо:

$$y = A_1e^{-at}\cos nt + B_1e^{-at}\sin nt + C\cos mt + D\sin mt \qquad 2)$$

де сочинники A_1 і B_1 сповняють рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} A_1(m^2 + a^2 - n^2) - 2anB_1 &= A \\ B_1(m^2 + a^2 - n^2) + 2anA_1 &= B \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Приймім, що на початку часу $y\Big\}_{t=o} = \frac{dy}{dt}\Big\}_{t=o} = o$, то тодї з 2)

$$A_1 + C = o;$$

а наколи зріжничкуємо 2) дістанемо під умовою $y\Big\}_{t=o} = \frac{dy}{dt}\Big\}_{t=o} = o$:

$$-aA_1 + B_1n + Dm = o,$$

По довшім часї гинуть усї вирази, що мають e^{-at}, остає:

$$y = C\cos mt + D\sin mt;$$

розмах (амплїтуда) дро́гань буде пропорциональний до $\sqrt{C^2 + D^2}$, отже після 1) буде залежати просто від ресонатора, як се і досьвід показує. Наколи a є дуже мале, а m мало ріжнить ся від n, то послїдне вираженє мало буде ся ріжнити від:

$$\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{(m^2 + a^2 - n^2)^2 + 4a^2n^2}} \text{ (на основі 3).}$$

Наколи розмах дро́ганя, яке походить від ексцитатора (т. є. $\sqrt{A^2 + B^2}$) є сталий, то розмах вислїдного дроганя є відворотно пропорцияльний до $\sqrt{(m^2 + a^2 - n^2)^2 + 4a^2n^2}$. Наколи m є змінне, то корінь є minimum, отже розмах вислїдного дро́ганя maximum, для $m^2 = n^2 - a^2$. То minimum кореня (отже maximum розмаху) відповідає гармонїйному ресонаторови. Наколи $a = o$, то minimum кореня є o, отже розмах $= \infty$, т. є. гармонїйний ресонатор має тодї — як каже Hertz — тисячі рази сильнїйші дро́ганя, як всї прочі ресонатори.

Таке толкованє многократного відзвука подає Poincaré, однак він не каже, мовби се поясненє було вже вповнї правдиве, так як квестия та мусить покищо оставати єще отверта. – На се поясненє Poincaré годить ся вповнї і Hertz.

3. Коли стверджено якостно характер дрогаючий заколотів електричних, висунулась гадка глядїти метод до помірів на скількість (Quantität) дро́гань в провіднику другоряднім. Очевидно, що того рода поміри є дуже тяжкі, так як дро́ганя електричні є за слабі, щоби в перебігу через дроти могли викликати дїланя, якіби можна мірити. В опис ріжних метод не будемо ту входили, нагадаємо лиш імена Rubens'а і Ritter'а, що до помі́рів уживали больометру,[1] дальше Wiedemann'а, Ebert'а, Colson'а, що уживали телефону, а вкінци Klemenčica, що уживав термоелєменту з Pt і Ni, та Bjerknes'а, що при помірах уживав електрометру квадрантового.

Поміри, які виказують основні закони Maxwell'а, що ся відносять до скорости сьвітла та електричности, як і звязь між сталою діелектричною та сочинником заломаня, подали ми уже передше. Тут лише скажемо, що новійші розслїди виказали згідність скоростий филь сьвітляних та електричних, і се не лиш для филь поступаючих в діелектриках, но і для филь поступаючих в провідниках.[2]

---

[1] Гл. Poincaré loc. cit. том II.

[2] Отже де в чім відмінно від вислїдів Hertz'а.

Поміри роблено при помочи комбінациї дротів, що єї впровадив Lecher, а з помірів тих слїдує, що скорість поступу филь елєктричних в провідниках містить ся в границях між $2{\cdot}97.10^{10}\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$ (Blondlot) та $3{\cdot}009.10^{10}\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$ (Pellat), що се є проте величини того самого ряду, що скорість сьвітла. Та дивна на перший погляд обставина, що скорість поступу не залежить від природи провідника, а є схожа зі скоростию сьвітла і скоростию филь елєктричних в воздусї, стаєсь від разу ясна, наколи приймем теорию Poynting'a, що єї потвердив досьвідами Hertz, а опісля Waitz, що енерґія елєктрична усїх дрогань розходить ся не в дроті, но по дроті, отже через дієлєктрик.

Очевидна є річ, що сей короткий нарис не представляє навіть в приближеню всїх робіт, які послїднями часами появились в сїй квестиї. Роботи ті множать ся раз у раз і цїлий ряд учених звернув ся на нове поле дослїдів, яке показали досьвіди Hertz'a. Між ними визначуєсь норвежский фізик Bjerknes, що його роботи над уставанєм та абсорбциєю дрогань елєктричних та многократним відзвуком є клясичні, дальше Klemenčič, Wiedemann, Ebert, Birkenland і и., а теоретично розвинули нову теорию Cohn, Lodge, Poincaré, а послїднями часами Heaviside, що за приміром Maxwell'a впровадив до теориї филь елєктричних теорию кватерніонів.1)

Годї нам нинї говорити вже про значінє тих усїх робіт та змагань, годї нам предсказати мету, до якої дійдемо в дальшім розвою тих всїляких метод та теорий, но се можемо сказати, що Maxwell своєю епохальною теориєю елєктричности та сьвітла, а Hertz епохальними досьвідами показали фізикам нові царини розслїдів, царини, що нам — як сього мож надїятись — відкриють много інтересних, незвісних покищо проявів природи та кинуть нове сьвітло на явища, які вже нинї є розслїджені, а може й відкриють бодай в части їх причини.

Тернопіль в маю 1897. р.

* * *

---

1) Пор. Föppl: loc. cit.

Додатки до термінольоґії елєктричної та оптичної.

Азимут Azimuth — ампер Ampère — безподобний isotrop[1]) — бігун одиничний Einheitspol — бляшка маґнетна magnetische Schale — больометер Bolometer — виладованє, Entladung — відбитє Reflexion — відзвук Resonanz — вісь оптична optische Axe — вольт Volt — діелєктрик, ізолятор Dielectricum, Isolator — діамаґнетний diamagnetisch — достроїти stimmen — елєктричність Elektricität — елєктрода Elektrode — елєктроліїт Elektrolyt — елєктролїза Elektrolyse — елєктромаґнетизм Elektromagnetismus — елєктрометер Elektrometer — елєктрометер беззглядний absolutes Etektrometer — елєктрометер квадрантовий Quadrantenelektrometer — елєктрична спроможність проводу elektrische Leitungsfähigkeit — елємент (звено) ґальванічний galvanisches Element — заглубина Vertiefung — заколот Störung — заломанє, переломанє Brechung — заломанє подвійне Doppelbrechung — заломанє стіжкове konische Refraction — йон Ion — індукция Induction — індукция елєктростатична elektrostatiche Induction (Influenz) — інтерференция Interferenz — конденсатор Condensator — кульомб Coulomb — кут від-

---

[1]) *Примітка.* В „Материялах до фіз. термін.“ Записки тов. Шевч. том XI. є подані хибні терміни на слово „isotrop“ та „anisotrop“. На се звернув я вже увагу в нинїшній роботі, а тепер звертаю увагу єще другий раз; оба ті терміни треба справити так, як тут подано.

битя Reflexionswinkel — кут впаданя Einfallswinkel — кут ломлячий (в призматі) Brechungswinkel — кут поляризациї Polarisationswinkel — лїнія сил Kraftlinie — луч сьвітла Lichtstrahl — луч відбитий reflectirter Strahl — луч впадаючий einfallender Strahl — луч заломаний gebrochener Strahl — луч споляризований polarisirter Strahl — луч звичайний ordentlicher Strahl — луч надзвичайний ausserordentlicher Strahl — лямпка жарова Glühlichtlampe — маґнет Magnet — маґнетизм Magnetismus — маґнетний magnetisch — маґнетна спроможність індукцийна (сочинник прониканя) magnetisches Inductionsvermögen (Permeabilitätsconstante) — момент елєктромаґнетний elektromagnetisches Moment — набій, наряд Ladung — нáворот Periode — наворотний periodisch — натуга Intensität — непрозорий undurchsichtig — нестисний imcompressibil — одиниця елєктростатична (елєктромаґнетна) elektrostatische (elektromagnetische) Einheit — ом Ohm — опір Wiederstand — оптика Optik — парамаґнетний paramagnetisch — пересуненє елєктричне — elektrische Verschiebung — площа впаданя Einfallsebene — площа огнищева Brennebene — площа розділяюча Grenzebene — поємність Capacität — поле елєктричне (маґнетне) elektrisches (magnetisches) Feld — поляризация Polarisation — порожня Leere — поступ Fortschreiten — потенциял Potential — провід Leitung — провідник, злучник (кондуктор) Leiter — прозорий durchsichtig — призма Prisma — прониканє Permeabilität — прям впаданя Einfallsloth — ресонатор Resonator — ріжниця потенциялів Potentialdifferenz — розчин Lösung — самопотенциял Selbstpotential — сила маґнетна (елєктродинамічна) magnetische (elektrodynamische) Kraft — скрученє площі поляризациї Drehung der Polarisationsebene — сніпóк лучів Strahlenbündel — сочинник заломаня (беззглядний) Brechungsexponent (absoluter) — сочка Linse — спектр Spectrum — спроможність питома діелєктрика (стала діелєктрична) specifisches Vermögen des Dielectricums (Dielectricitätsconstante) — статьний anisotrop — степень намаґнесованя Magnetisirungsintensität (M. stärke) — теория випливу Emanationstheorie — теория фильованя Undulationstheorie — термічна спроможність проводу termisches Leitungsvermögen — термоелємент Thermoelement — течь індукцийна Inductionsfluidum — ток Strom — ток замкнений geschlossener Strom — ток індукований (індукцийний) inducirter Strom — ток коловий Kreisstrom — ток отвертий ungeschlossener Strom — ток пересуненя Verschiebungsstrom — ток перемінний Wechselstrom — ток проводу Leitungsstrom — тон го-

рішний Obertrom — **угинанє сьвітла** Beugung des Liehtes — **узол** Knoten — **фарад** Farad — **филя впадаюча** einfallende Welle — **филя електрична** elektrische Welle — **филя сьвітляна (сьвітильна)** Lichtwelle — **цївка** Spule — **ясність** Helligkeit — **якостний** qualitativ.

Бактериольоґічні вислїдки посмертні а дияґноза клїнічна недуг інфекцийних.

(Тимчасове донесене).

Заслуги бактериольоґів взагалї а специяльно в медицинї — безперечно не аби-які. Они своїми просто ґеніяльними слїдженями відкрили і унаочнили нам цїлий незнаний перед тим чудесний, новий сьвіт животин, нове царство дрібоньких творів природи, що займають все і всюди ся находять. Тайну їх житя, розродженя і прочих функций фізиольоґічних старають ся учені бактериольоґи не від нинї видерти природї. Призирають ся їх формі, величинї, рухам під мікроскопом, культурі мікроорґанїзмів на ріжнородних підложах (сировать крови, аґар, булїон, желятина, картофлї і т. д.), дають в приближеню образ, як скоро і в якій скількости розвивають ся они, а цїлий арсенал найрозмаїтших фарб підпомагає слїдителїв там, де иньшими методами або не можливо, або не так точно виказати мож присутність бактерий (прутень туберкулїчний Коха, ґонококи Найсера). Розслїдам бактериольоґічним завдячуємо в значній мірі обʼяснене процесів ферментацийних, гнитя і всякого розкладу тїл орґанїчних. Бактериольоґия научила нас винайти навіть між мікробами-галапасами твори пожиточні, ба нераз конечні до житя висших створів — чоловіка передовсїм — а фізиольоґія тїла людского від бактериольоґів переняла іпотезу: що тепер уважаєсь майже вже за аксіом — бактериї беруть визначну коли не перемагаючу участь в травленю побраного корму і присвоєню єго через орґанїзм людский. Мало того, на науцї бактериольоґії почивають головні засади новійшої іґієни, а доказана невидержимість мікробів на висшу теплоту або зимно, брак або надмір кисня і сьвітла, їх слаба відпорність на діланє квасів, алькалій і всякого рода жручих сполук хемічних — поклала тверді підвалини під нову зовсїм науку дезінфекциї, антисептики, асептики, що таку вагу мають в нинїшній хирурґії, положнярстві. Дальше подали бактериольоґи правила профиляктики на підставі пороблених досвідчень, відки і якими дорогами дістають ся заразні хоробові до орґанїзму людского.

Они вконець підняли за сьмілу задачу, довести, що причиною таки всїх недуг є не що иньше, як бактериї найрозличнїйші. Годї не признати їм навіть успіху в тім напрямі. При теперішних улїпшених способах слїдженя, оден учений поперед другого стараєсь викрити і сьвіту показати того виновника хороби. Єсли ще в якій хоробі не найшли бактериольоґи доси одвітного заразня, то єго ся там догадують і надїють ся з часом при ще точнїйшім улучшеню теперішних метод, взглядно через винайденє нових — викрити властивого споводника хороби і заздалегідь диктують від себе передовсїм інтернїстам поділ недуг після етиольоґії на основі бактериольоґічній. Не дасть ся заперечити, що велику поміч і підпору при розпізнаню многих недуг мають клїнїцисти в дослїдах бактериольоґічних. Нераз прим. довго не мож на певне розпізнати туберкульози легких, фізикальні обяви невиразні лишають лїкаря в сумнїві; винайденє прутнїв (бацилїв) Коха справу від разу рішає. А що єсть певнїйшим доказом закаженя зимохою, як присутність амеб в тїльцях сьвіжої крови під дрібновидом? Всї ті однак розслїди бактериольоґічні вимагають великого заходу працї, вправи, терпеливости, а при конечности многих приладів і відчинників хемічних, якими упосажуєсь ляборaторию хемічно-бактериольоґічну, майже не можливі до переведеня кождому поодинокому, практичному лїкареви. Тай мимо того всего не все удають ся они, як прим. в тифі кишковім за житя хорого. В тій недузї заатаковані суть межи иньшими орґани витворюючі кров, селезінка, железа, сама кров хоробово змішана а мимо того майже нїколи не удало ся викрити прутня Еберта в крови за житя недужого.

Рівнож велике значінє приписують бактериольоґи розслїдам бактериольоґічним посмертним. Виплодують з якогось то орґану мертвого тїла чоловічого (з кишок, селезінки, печінки і т. д.) певні мікроби, хотьби прим. тифові, ропні, bacterium colli чи які другі от і мають готову дияґнозу недуги, на яку відносний чоловік помер. Тут і попадають бактериольоґи часто в конфлїкт з клїнїцистами що до властивого розпізнаня і осудженя хороби. Після них не може орґанїзм людский занемочи без удїлу бактерий. Нїчим для них клїнїчний пробіг недуги, ріжні важні і дрібнійші обяви, що таку вартість мають для клїнїциста, без значіня для них стан сил відносної одиниці і услове, серед яких хорий проживав — они stricte відділюють хоробу взглядно мікробів-споводників єї від орґанїзму недужого, для них міродайною єсть присутність заразнїв, після котрих недугу іменують. Що за житя недужого не все приходять до таких самих результатів, приписують в головній мірі недостаточним поки що способам слїдженя. Дальше свої твердженя скріпляють єще тим, що вприсненєм годівлї викритих при автопсиї заразнїв, викликують занедужанє або бодай відповідну реакцию на експериментальних зьвірятах.

Тай не тільки в дияґнозї хороб зуміли придбати собі бактериольоґи таку важну участь; они взялись і за друге дїло, не менше важний дїл медицини, т. є. терапію. Початок добрий зробив Пастер, а тепер попри сьвітлї результати єго методи лїчної, хиба не мож замовчати про успіхи терапиї антітоксиною Берінґа-Ру-а, щоб о иньших пробах в тім напрямі не згадувати. Тож нема чому дивуватись, що бактериольоґи піднеслись до такого значіня на полї наук природи, що заволодїли медициною, патольоґією експериментальною і з гордостю певноти заповідають, що до них належить в будучности розвязанє многих ще проблємів науки лїкарско-природописної. Тепер вже годї не то лїкареви обходитись без науки бактериольоґії, не слїдити дальшого єї розвою і не користуватись єї винаходками, відкритями — нинї вже стало модою, може навіть потребою, кождому чоловікови з інтелїґенциї, бодай дещо знати про ті невидимі а часто так страшні бактериї, і дбати про заведенє обовязкової науки іґієни в школах публичних. Насупроти наведених тверджень бактериольоґів в деяких случаях досьвідченя випадають инакше. І так, коли бактериольоґи удержують, що ропіня викликати могуть лише специяльні бактериї іменно сукровичники (цїплинок, streptococcus і грестинок, staphylococcus), доведено (Grawitz, Kreibom i Rosenbach, Christmas, Steinhaus, Kaufmann, Roger i Bonnet), що може оно повстати і без удїлу тих мікробів, чисто впливами лише хемічними. Годї рівнож вдоволитись, чому повстає досить часто у людей запаленє ропне колїна, ліктя по ударі механїчнім, мимо того, що нема найменшої ранки поверхної — таким обясненєм: В тїлї людскім, особливо в проводі кормовім проживає множество розличних мікробів. Як лише найдесь в орґанїзмі якесь місце менше опірне, не зовсїм здорове (locus minoris resistentiae), зараз мандрують туди бактериї з лїмфою чи кровю і осїдають там. Через удар отже взглядно ушкодженє механїчне має повстати locus minoris resistentiae, а се вже дає добру нагоду розвиватись мікроорґанїзмам. Дальше переконали ся патольоґи, що запаленє легких спроваджують не лише специфічні пневмококи Fränkla, Weichselbauma, Friedländera, але і иньші бактериї могуть викликати такі самі зміни патольоґічні в ткани легких. Отже після таких досьвідчень не оправдувалоби ся твердженє бактериольоґів, що кожда хороба орґанїзму людского має свого окремого, специфічного заразня. Дальше ще більше захитує тоє їх правило виказувана часто присутність мікроорґанізмів ропних на мікдаликах недужих на гарицю (scarlatina), дифтерию, що прецїнь мають свої окремі бацилї. В острім ревматизмі суставнім (дна) нераз приходить до ропіня, а прецїнь цїлий пробіг сеї недуги такий характеристичний, такий відмінний від pyaemi-ї чи sepsis, що хиба мусить бути якийсь иньший галапас мікроб, сповідник ревматизму а не strepto- і staphylococcus. Хоч суть знов патольоґи, що за причину ревматизму уважають коки ропні, лише змодифіковані, менше розвинені, не маючі такої сили жизненної (viruleur) коли знов у дифтериї, гарицї, тифі кишковім (де приходить нераз до зропіня желез зачеревних, або ропного запаленя уха) видять мішану інфекцию лише, чим покривають твердженє бактериольоґів.

Цїлком відмінної є гадки Міллєр а за ним Хвостек. Іменно з натиском висказує Міллєр свій погляд, що тоті самі бактериї могуть викликати ріжні зміни патольоґічні, ріжні хороби залежно від рода орґанїзму зьвіриного, дальше від различних тканей того самого зьвіряти. Приписують отже тканям орґанїзму даного зьвіряти сей головний „специфічний“ вплив на повстанє недуги. В доказ того наводить Хвостек примір, де бактериї ропні спроваджують ропне запаленє шпіку кістного — osteomyelitis — а тоті самі мікроорґанїзми перенесені на окістницю, витворюють лише запаленє окістницї сироватне (periostitis serosa). В той сам спосіб толкують процеси ропні в пробігу тифу черевного, рожі, чим сильно оспорюють правдивість твердженя о специфічнім діланю бактерий. Деякі інтерністи (Тельґ) ідуть ще дальше і не вагають ся висказати, що тоті самі бактериї через ріжні впливи орґанізму зьвіриного, взглядно людского, підлягають ріжним перемінам і викликати могуть справи патольоґічні, що виступають під образом различних недуг. Ба — суть навіть учені (Бухнер), що прямо заперечують участи бактерий, прим. в ферментациї, приписуючи їх чисто процесам хемічним, тай відмовляють (Тельґ) мікроорґанїзмам

---

1) Chvostek Wiener klinische Wochenschrift Nr 49, 1896.

виключне викликанє якоїсь хороби уважаючи їх присутність в орґанїзмі лише за річ побічну, припадкову, а за властиву правдоподібну причину недуги уважають ушкодженє, некрозу певного числа клїтин в тканях орґанїзму наслїдком якихсь незнаних процесів хемічних, забурень в правильній перемінї материї, цїлковито без участи мікробів.

Hueppe[1]) бачить рішучо причину повставаня недуг в самих тканях і соках орґанїзму зьвіриного без участи бактерий під впливом ріжних шкідливих моментів. Се вже давнїйше експериментами старавсь довести Rossbach,[2]) що за вприсненєм папайотини зьвіряти знаходив в єго крови мікроорґанїзми. Wyssokowitsch[3]) виказав, що вприсненєм ферментів під скіру, або в жилу так ослабляє відпорність орґанїзму на бактериї, що они місто вигинути і не бути шкідливими — як то є звичайно — розмножались що раз численнїйше. Gottstein[4]) убивав морскі свинки (морщаки) курячою холєрою, коли їм рівночасно вприснув отруї в маленьких дозах, не дуже шкідливих, коли вприсненє самої культури холєри курячої в нїчім зьвіряткам не зашкодило. Загально знане також досьвідченє з карміном, котрого вприсненє кріликови спровадило у него туберкульозу. Взагалї всяке занедужанє, слабшу відпорність на інфекцию орґанїзму зьвіриного, взглядно людского спроваджує гірший стан відживленя, голод, утрата крови, утрата води, надмірна праця, зимно.

Пастер а опісля Ваґнер потрафили кури заразити карбункулом лише простим остуджуванєм. До тих самих результатів дійшов Савченко, Лїпарі. В найновійшім часї займав ся тим питанєм Lade[5]) і вповнї потверджує погляди наведених авторів, кажучи, що охолодженє орґанїзму чи то тревале чи хвилеве прискорює і улекшує інфекцию.

Вконець і впливи психічні не без значіня на стан відпорности тїла чоловіка. Кілько то разів особи по стратї дорогих членів родини попадають з жалю і смутку в тиф кишковий, запаленє мозку. Так само страх і гризота бувають нераз причиною тяжкої інфекцийної хороби (холєра).

---

[1]) Hueppe: Naturwissenschaftliche Einführung in die Bacteriologie. Wiesbaden 1896.

[2]) Rossbach: Centrallblatt für die Medicin. Wissenschaft. 1882.

[3]) Wyssohowitsch: Deutsche medicinische Wochenschrift. 1890, Nr. 24.

[4]) Gottstein: Deutsche medicinische Wochenschrift. 1890, Nr. 24.

[5]) Lode: Archiv für Hygiene. 1897.

В послїдних місяцях захитана досить сильно етиольоґія тифу черевного досьвідченями Val de Gras'a, що найшов прутнї Еберта-Ґафкого в левкемії — дальше Remlinger і Schneider,[1]) подибали тоті самі бацилї тифові в febris intermittens, gastroenteritis, а що найважнїйше, пили воду занечищену мікробами тифу і не заразили ся. Супроти тих фактів ставлять приклонники бактериольоґії іпотезу, що не всї люде мають диспозицию улячи інвазиї заразнїв і занедужати серед відповідних об'явів властивих якомусь родови мікробів. Взагалї справа тота цїла дуже тепер неясна, погляди ріжних учених pro і contra такі ріжнородні і противорічні а мимо того, що число досвідчень в обох напрямах чим раз то більше, що раз то новими доказами, годї осудити на разї, який буде конець тої борби межи бактериольоґією а хемією.

Згадано вже було, що бактериольоґи на підставі вислїдків посмертних, виводять етиольоґію даної хороби. Противлять ся тому клїнїцисти; так межи иньшими каже Ляйбе[2]): „Знайдене мікробів на мерцї залежить від процесу розкладового самого трупа, правдоподібним видаєсь, що мікроорґанїзми, котрі подибуємо на многих частях тїла людского за житя, по смерти чоловіка без упину роспросторонюють ся по цїлім орґанїзмі. Тому відповідні вислїдки на мощах мають лише малу вартість, хотьби виконати їх скоро після смерти, значить перед виступленем гнитя і при захованю всїх мір осторожности“.

Розенбах[3]) думає, що великої ваги до посмертних розслїдів крови не мож привязувати.

Beck[4]) знаходив в трупах мікроорґанїзми в ріжнім часї по смерти а походжене їх відносить до кишок.

Baumgarten[5]) з нагоди правильного знаходженя грестинків (staphylococcus) в ямах ропних по смерти каже, що з великою резервою належить приняти твердженє, будьто би образ розросту круплинок (коків) по смерти відповідав дїйстному станови за житя. Те саме удержує він і о прутнях тифових.

Рівнож і Trombetta[6]) не дуже радять довіряти вислїдкам бактериольоґічним по смерти, а то з причини, що під впливом бакте-

---

[1]) Annal de l'Instit. Pasteur N. 1. 1897.

[2]) Leube: Zeitschrift für klinisch. Medicin III. pag. 233.

[3]) Rosenbach: Mikroorganismen bei Wundinfectionem після Chvostek'a.

[4]) Beck: Arbeiten aus dem patalogisch-anatomischen Institut. Tübingen 1891, після Chvostek'a.

[5]) Baumgarten: Lehrbuch der Mykologie. Braunschweig 1890, після Chvostek'a.

[6]) Trombetta: Centralblatt für Bacteriologie, 1891, II. pag. 664.

рий гнильних, виступають зміни в мертвім орґанїзмі і в наслїдок того мож викрити в крови і ріжних частях тїла мікроорґанїзми, що з властивою хоробою не мають жадної звязи. Він стараєсь тому означити час і границю, коли починаєсь процес гнитя, взглядно, як довго вільна кров і иньші орґани від бактерий гнильних. Після него, зависить сесе від теплоти і величини зьвірятн. При звичайній теплотї комнатній виступає гните у миши по 19 годинах, у кріликів в 16 годин. Чим висша (до певної міри) теплота і чим більше зьвіря, тим скорше виступає процес гнитя. Впрочім залежить се також від стану проводу кормового. Кров звичайно довше опираєсь гнитю.

Переважна часть авторів нїмецких (Rindfleisch, Zahn, Meissner, Hauser і др.) за правило почитує, що в здоровім орґанїзмі чоловічім жадних патоґенічних мікробів за житя нема. Єслиж отже найдуть ся они по смерти в тканях орґанїзму, головно в крови, то заключують з сего, що були они вже там за житя, значить, що орґанїзм був хорий, а на потверджене того приводять досьвідченя, будьто цїлї, здорові стїни судин кровоносних, навіть кишок, не пропускають бактерий. Що найбільше скількість їх може по смерти збільшитись, але льокалїзация остає тота сама, або иньшими словами, мікроби держать ся лише хорих орґанів тїла і нїкуди відси не розходять ся.

У відповідь тому навести годить ся численні розвідки других авторів, котрим за житя хорих не удавалось, або лише дуже рідко викрити певні заразнї, а по смерти тих мали результати позитивні. Petruszky[1]) на 14 случаїв туберкульози легких найшов по смерти хорих в крови 8 разів цїплинки (streptococci), а за житя в иньших знов 8 случаях сухот легких бачив лише оден раз. Frosch[2]) на 14 випадків дифтериї найшов при автопсиї прутнї Лєфлєра 10 разів, а за житя анї разу. Так само Смирнов[3]) і много иньших. Отже слїдителї сесї висказують гадку, що годї собі витолкувати присутність бактерий в орґанїзмі по смерти самим лише розмноженєм їх, мусять тут в гру входити і иньші причини, передовсїм припускають, що з хорих орґанів тїла post mortem роспросторонюють ся заразнї ріжними дорогами по орґанїзмі. Більшої ще стїйности набирають їх погляди розвідами над bacterium colli. Галапас (парасит) сей викритий Escherich-ом[4])

---

[1]) Petruschky: Deutsche medicinische Wochenschrift, 1893, Nr. 14.

[2]) Frosch: Zeitschrift für Hygiene XIII. після Chvostek'a.

[3]) Smirnow: Diss. Petersburg 1889. Ref. Baumgartens Jahresb. 1889, після Chvostek'a.

[4]) Escherich: Fortschr. des Medicin 1885, Nr. 16 і 17.

(1855) в кишках новородка, подибуєсь стало в кишцї грубій чоловіка як здорового так і в недузї. Єму взагалї приписували з початку дуже малу pathogenitas; доперва Laruelle[1] (1889) бачив в двох случаях peritonitis perforativa bacterium colli в exudat-ї. Єму також удалось вщіпленєм культури сего галапаса викликати на зьвірятах peritonitis. Дальші розслїди патольоґів виказали, що мікроб сей може стати причиною острого запаленя кишок, ропнїв в печінцї, а навіть послїдними часами підозрівають єго о викликанє тифу кишкового, а бодай о значну співучасть при тій недузї. При здоровім станї проводу кормового має бути цїлковито не шкідливий, а набирає сили хоробothворчої доперва серед якихсь ушкоджень стїн кишок.

Отже сей то мікроорґанїзм знаходять патольоґи дуже часто в коротцї по смерти в многих орґанах, як в печінцї, селезінцї, почках, в случаях де не було і гадки о жаднїй інфекциї, тим самим о евентуальнїй присутности їх вже за житя хорих серед тих орґанів. За условє переходу bacterium colli через стїну кишок подають Marfan,[2] Nanu,[3] Marot,[4] Lesage,[5] стан хоробовий проводу кормового прим. сильні розвільненя, ulcera в наслїдок дисентериї. Boenecken[6] удержує, що до переходу мікроорґанїзмів не потреба навіть таких великих змін патольоґічних в структурі стїн кишок, вистарчить сильнїйша іперемія (hypaeremia, перекровленє), застій жильний, а Levin i Posner[7] знаходили bacterium colli на очеревнїй по осторожнім перевязаню кишки відходової, в наслїдок чого кажуть, що і стїни цїлковито здорового проводу кормового пропускають мікроорґанїзми. Тото само твердять о стїнах судин кровопроводних Pernice-Scagliosi,[8] Biedl-Kraus,[9] а передовсїм Chvostek,[10] що по вприсненю культури галапасів (паразитів) до доріг кровоносних вже в 16 годин знаходив їх в течи суставів.

Взагалї випадалоби з тих досвідчень, що мікроорґанїзми подибувані по смерти в розличних тканях тїла, в крови — виходять

---

[1] Laruelle: Cf. Baumgarten's Bakt. Jahresbericht 1889.

[2] Marfan: Rev. mens. des metod. de l'enfance, 1892, після Chvostek'a.

[3] Nann: " " " " " " " " "

[4] Marot: Arch. de méd experim. 1895, Nr. 7 pag. 25 " "

[5] Lesage i Macaique " " 1892, pag. 350 " "

[6] Boenecken: Virchows Archiv. Nr. 120 pag. 7.

[7] Levin i Posner: Berliner klinische Wochenschrift 1894 Nr. 32.

[8] Pernice Scagliosi: Deutsche medicinische Wochensch. 1892.

[9] Biedl. Kraus: Centralblatt für innere Med. 1896, Nr. 29

[10] Chvostek: Wiener klinische Wochenschrift 1896 Nr. 49.

головно з проводу кормового, правдоподібно також з міхурця жовчного. Розходилоб ся тепер ще о рішенє питаня, коли іменно мікроби ткани ті займають, коли опускають своє звичайне місце пробуваня. Після авторів нїмецких не буває сесе навіть по смерти, бож они удержують, що бактериї ті по части були вже в тих тканях за житя, а по смерти лише їх скількість збільшилась. Інакше твердять француські автори, они розслїдами своїми силують ся доказати, що мікроби дістають ся до сусїдних орґанів і до крови ще за житя, в аґонії. В тім напрямі працювали Wurtz і Hermann, Lesage і Mecaique, Lion, Marfaud, Letienne, Gilbert і довели, що прим. bacterium colli найти мож зараз по смерти в селезени, печінцї, почках і міхурцї жовчнім, куди дісталось оно з проводу кормового. Malvor викривав вже в кілька годин після смерти бактериї в селезени і печінцї мертвих тїл. Приняти таке, що бактериї дістались туди доперва по смерти, можна би що найвисше для присутности на очеревній, печінцї, але цїлковито оправдати не дасть ся, що так само і в тім самім часї дістануть ся до сележінки, до осердя (pericardium) і т. д.

Більше ще переконуючими суть розслїди Bouchard'а,¹) котрий заморожував крілики і вже підчас аґонії находив мікроорґанїзми в їх крови. Так само випали досьвідченя Wurtz'а, що по замороженю кріликів так однако, що серце зьвірят ще било, сподибував на чотири случаї оден раз мікроорґанїзми; у морских свинок на 14 проб вісїм разів, а на 15 случаях у мишей дванайцять разів. Він находив попри иньші мікроби проводу кормового bacterium colli, proteus vulgaris і streptococc-і в крови серця. Такіж самі результати одержав він, коли душив зьвірята. Коли убивав зьвірята голодом — проби випадали єму уємно. Він заключає, що зимно уможливляє і прискорює вандрівку бактерий проводу кормового до очеревної і судин кровопроводних в послїдних хвилях житя і бачить причину того з'явища в конґестийних змінах стін кишок, без удїлу тяжких ушкоджень, ульцераций і т. д.

Charrin³) потверджує перехід мікробів з кишок до печінки, почок, крови, підчас коли він певні, означені бактериї впроваджує до проводу кормового і відтак тоті самі при розслїдах виказати може. Дезінфекция проводу кормового спиняє вихід мікроорґанїзмів, а при вилученю кишки грубої одержував результати уємні.

---

¹) і ²) Bouchard і Wurtz цитовані у Chvostek'а.

³) Charrin цитовані з Chvostek'а

Wurtz[1]) затроював зьвірята аршенїком, що сам через себе єсть тїлом убиваючим бактериї — і викривав мікрооріанїзм вже в передсмертю в exudat-ї очеревної, в крови в осердю (pericardium) і на олегочній (pleura). Після него, чим довше тревало конанє, тим обильнїйше було число бактерий. При тім виносила температура тїла зьвірят лише 33°, 34°. При температурі ще 35° мав результати лихі. Beco[2]) уживав до затроюваня зьвірят аршенїку, кантеридини і tartarus stibiatus і мав такі самі наслїдки. Констатує тілько, що коли задавав зьвірятам великі данки отруї, так що зьвірята сейчас гинули, не находив бактерий навіть в 24 годин, ба і по 9 днях зовсїм, і каже, що коли мікроби не дістануть ся ще за житя зьвіряти в аґонії до дороги кровної, то по єго смерти або цїлковито вже бактериї не дістають ся або дуже поволи і в малій скількости.

На велику скалю перевів свої досвідченя Chvostek[3]) з кріликами, білими мишами. Поперед уживав він методи заморожуваня головно з тої причини, що зьвіря довго конає а по друге, що представляє найменше можливости ушкодженя слизниці кишок. Він саджав зьвірята до відповідних судин скляних і морозив їх при температурі 10—12 C. Коли запримітив аґонїю зьвіряти, отвирав сейчас зьвіря і брав кров з серця, коли ще оно товкло ся, серед всїх можливих осторожностей і щепив нею рурки з аґаром. Рівночасно убивав він зьвірятка того самого рода через прорванє стрижа продовженого (medulla oblongata) і з них нащіплював кров в той самий спосіб на аґарі, а кромі того для контролї брав рурки з чистим лише аґаром і всї три роди рурок вставляв тепер до термостату. Проби єго випали так: на 13 заморожених кріликів найшов бактериї чотири рази. В крови зьвірят ужитих для контролї не найшов мікробів анї разу. Культури єго на аґарі представлялись переважно яко круплинки (cocci) всякого рода (staphylococcus albus et aureus, bacterium colli). Відтак до дальших розвідок брав білі миши. Кормив їх перед тим молоком а відтак уживав нараз до досьвідчаня по троє зьвіряток. Одно з них убивав через знищенє стрижа продовженого (medulla oblongata), другі двоє заморожував на смерть. Відтак брав з них кров з серця, з воротницї (vena portae) і нащіплював на відповіднім підложу. З одної миши замореної брав кров в часї аґонії, а другу полишав по смерти в комнатній теплотї через кілька-кілька-

---

[1]) Wurtz цитовані є Chvostek'a.

[2]) Beco Anual. de l'Institut Paster 1895 Nr. 3.

[3]) Chvostek: Wiener klinische Wochenschrift 1897 Nr. 3.

найцять годин, щоби переконатись, чи дїйстно дістають ся мікроорґанїзми до тканей тїла зьвіриного по єго смерти. Ужив до того взагалї 150 мишей. Він найшов у мишей морожених, і зараз в аґонії секціонованих на 50 случаїв 22 разів бактериї, у зьвірят заморожених а отворених доперва по кількох годинах найшов на таке саме число лише 8 разів а у зьвірят убиваних іно для контролї подибав мікроби всего 3 рази. У Хвостка кольонії бактерий видні були вже по 24 годинах, рідше виступали они на вид по 48—60 годинах. Після него великий вплив на результати досвідчень має спосіб живленя зьвірят. Зьвірята кормлені молоком надавали ся найлїпше до тих розслїдів, коли лихе їх віджувлюванє прим. сухим хлїбом давало менший процент результатів добрих. На 14 случаїв зьвірят голоджених а відтак убитих через замороженє, найшов лише оден раз бактериї. Замітити при тім належить, замороженє у мишей тревало около 40 мінут.

Кромі того ужив ще Хвостек до своїх дальших досьвідчень 31 мишей убитих через удушенє. Всї проби ті виконав серед аґонії зьвірят при бючім ще серци. Бактериї найшов у 6 мишей. При тім підносить сам автор, що результат мав тим певнїйший, чим довше зьвіря конало.

На підставі тих дослїдів доходить Хвостек згідно з француськими ученими до переконаня, що, на перекір загально узнаним дотеперішним поглядам бактериольоґів і патольоґів, мікроорґанїзми могуть дістатись серед певних обставин з проводу кормового головно до обігу крови і до тканей ріжних орґанів тїла зьвіриного, що отже вислїдки посмертні не відповідають патольоґічній льокалїзациї бактерий за житя, котрих будьто лише на числї прибуває.

Варто тепер застановитись над питанєм, в який спосіб впливає зимно, удушенє, голод і т. д. на вихід мікробів в ткани орґанїзму зьвіриного. Зимно, як відомо, спроваджує зміни в судинах кровоносних, отже єсть причиною забурень в круженю. І Wurtz виходячи з того заложеня каже, що зимно спроваджує іперемію в кишках, котра улекшує переступ мікроорґанїзмів через стїни кишок до сусїдних тканей і до обігу крови. Відтак розвіди Uschinsk-ого виказали, що під впливом сильного зимна виступають зміни в істольоґічній будові тканей, що потягає за собою ослабленє, коли не цїлковите знесенє функций фізиольоґічних відповідних тканей. В кождім разї жизненність клїтин даної ткани значно терпить, тратить на силї, а тим самим не мають вже анї клїтини самі, анї ї́х соки, анї відтак кров тої могучости опиратись дїланю бактерий. І Хвостек є гадки, що інвазию мікроорґанїзмів до тканей тїла споводовують два моменти, іменно перше: в наслїдок зимна виступає анемія верхнї тїла, а іперемія орґанів внутрішних, межи ними і кишок, а друге: через зимно тратять ткани орґанїзму силу відпорну супроти мікробів.

Дальше стараєсь автор сей вияснити, чому скорше, частїйше знаходив бактериї в крови при секциї зьвірят зараз безпосередно по смерти їх, нїж у зьвірят розбираних доперва в кілька годин. Толкує то так: мікроорґанїзми вже в аґонії, значить перед смертю, входять до обіґу крови, до серця. Тож кров взята з серця — ще серед того як оно ся товче — буде мати більше бактерий і скорше культура удасть ся, як кров з серця, що вже давно застигло. Бо в першім случаю круженє крови ще в части удержане, отже з новою филею крови настигають вже сьвіжі маси бактерий, коли кров в серци в спочинку безупинно дїлає на ті самі мікроби своєю ще лишившою ся силою антибактериольоґічною і убиває їх, а нові вже дальші ряди мікроорґанїзмів не прибувають. Противне відношенє заходить в иньших тканях орґанїзму пр. на очеревнїй, в печінцї, в міхурцї жовчнім. А то знов тому, що відпорність клїтин і їх соків в наслїдок шкідливих впливів (зимна) слабне в аґонії ще більше, а в якийсь час по смерти устає, отже бактериї без опору жадного переходять до них і щораз більше розмножують ся.

Щоби ще більше упевнитись що до осудженя вартости вислїдків бактериольоґічних посмертних, виконав Хвостек ще 28 досвідчень на мишах, котрі убивав через мороженє і знищенє стрижа продовженого (medulla oblongata), так само, як в попередних пробах і лишав їх по смерти через 12 годин в температурі компатній. А було се лїтом. У мишей заморожених найшов лише в 8 случаях бактериї, а у звіряток убиваних прорванєм medulla oblongata мав в 14 припадках позитивні результати.

Відмінний сей від попередних вислїдок своїх досьвідчень не об'яснює після него погляд Trombett-и, що гнитє не рівночасно виступає ві всїх орґанах тїла, а радше за правдоподібне уважає, що зимно, котре ушкоджує орґанїзм зьвіриний, спиняє також розвиток тояжків (бактерий). До того причиняє ся в части сесе, чи кишки порожні чи наповнені екскрементами, що приспішують гнитє. В наслїдок зимна при мороженю віддають зьвірята много калу і мочі, — чого нема у зьвірят убиваних прорванєм стрижа продовженого (medulla oblongata), — а що в послїднім случаю через скорше виступаючу гнилизну улекшує розмноженє розроднїв мікробових.

Рівночасно з пробами крови виконані проби на очеревній дали Хвостекови майже однакові результати. Лише у зьвірят убиваних через знищенє стрижа продовженого (medulla oblongata) досьвідченя зроблені зараз post mortem, а в 12 годин пізнїйше, ріжнять ся процентово 18%—70·4%. Дальше за інвазією мікробів за житя зьвіряти до ріжних тканей промовляють розвіди Ribbert-а і Bizzozer-а,2) що находили в фолїкулах нормальної стїни кишок у кріликів мікрооргаґнїзми і то лише в верствах кишки поверховних. В глубших верствах стїни знаходив Ribbert образ, що після него сьвідчив о смерти многих бактерий, котрі улягли тут дїланю антибактеріольоґічному тканей зьвіряти. За правдоподібне почитуєсь також, що мікроби ресорбовані бувають підчас травленя корму через стїни кишок разом з соками кормовими.

Що до того, як і куди дістають ся бактериї з проводу кормового, то перемагає між ученими гадка, що дїєсь сесе на підставі правил фізикальних осмози і трансфузиї і в сей спосіб займають они найблизші сусїдні тенеса, а в дальші части орґанїзму заносить їх лїмфа і кров.

Результати всїх тих ріжнородних а так численних розслїдів виконаних через визначних учених в сьвітї лїкарскім мож меншебільше в коротцї так представити:

1. На перекір дотеперішним загально узнаним правилам головно школи нїмецкої — можлива єсть інвазия бактерий до тканей орґанїзму зьвіриного вже за житя іменно в аґонії.

2. Посмертні вислїдки бактериольоґічні не відповідають лише льокалїзациї мікробів за житя зьвіряти, анї мнимому їх тілько розмноженю.

3. Інвазию мікроорґанїзмів в аґонії уможливляє і прискорює зимно, отруї і иньші шкідливі впливи на орґанїзм зьвіриний.

4. Бактериї переходять навіть через здорові і неушкоджені стїни проводу кормового і судин кровопроводних.

5. Головним місцем пробуваня і виходу мікробів єсть провід кормовий.

6. Зменшена відпорність тканей орґанїзму зьвіриного підпомагає і улекшує вихід мікроорґанїзмів.

---

1) Ribbert: Deutsche medicinische Wochenschrift 1885, pag. 197.

2) Bizzozero: Centralblatt für med. Wissenschaften 1885 pag. 801.

7. На підставі вислїдків бактериольоґічних посмертних не все мож заключати дияґнозу клїнїчну недужого.

8. На відворот культури бактерий по смерти могуть тілько потвердити поставлену дияґнозу клїнїчну у хорого за житя.

Результати з моїх власних досвідчень в тім напрямі подам в своїм часї.

У Відни 6. IV. 1897. р.

Др Осип Дакура.

Заклад лїчебний для сухотників в Аллянд.

Хиба нема чому довго розводитись і доказувати, яку вагу має для недужого добре, належите відживлюванє і сьвіжий воздух. Чинники тоті оба становлять бодай чи не важнїйшу часть теперішної, рациональної терапії і кождий лїкар практичний по при лїки аптичні, цїлковито слушно поручає дбати головно про сили хорого і старатись для него о чистий, добрий воздух. Річ на сповид така проста, природна, лїк такий таний (?), а однак як тяжко перевести се в практицї, про се може мати належите виображенє лише той, хто знає житє наших бідних людей по містах, місточках, не вагаюсь сказати і по селах. Потреба таних, здорових мешкань для люду робучого, для бідного населеня, стає з дня на день щораз більше пекучою головно зі взглядів іґієнічних і нинї вже за взорами великих фабричних міст анґлїйских, американьских, по части нїмецких починають і у нас на разї по більших містах роздумувати над рішенєм сего вельми важного питаня. Як доси воно є, то тяжко і чудуватись сумним відносинам що до стану здоровля тих найнизших верств нужденної суспільности людскої, сїй великій смертельности у них, коли зважить ся, серед яких то обставин нуждарі сесї вік свій коротають. В недостатку найперших і найважнїйших потреб житя вже від самого уродженя, серед журб, клопотів вічних і терпінь моральних, заселяють они сутерени і піддашя по містах, а курні, холодні хати без помосту по селах — гуртом в купі мале з великим, без ріжницї пола, одна родина з другою або і більше разом, оттак, щоби було всїх кілька-кільканайцять люда, та щоби місця стало на кухню, балїю, колиску, машину „панни швабки“, якийсь варстат шевский або кравецкий, а дуже частенько найде приміщене курка або яке иньше пожиточне сотворіне. Не дай Боже тепер немочи в такій хатї! Деж тут може бути бесїда о потрібнім для хорого супокою, вигоді і доглядї належитім. Як тут ізолювати недужого від здорових, та відки взяти для него сьвіжого, чистого воздуха?! До шпиталю всїх хорих не приймуть, раз тому, що за мале число шпиталїв, щоби всїх помістити, а по друге є певне число недуг, що вимагають постояного леженя в ліжку і заживаня ріжних лїків медициньских, а радше зміни способу житя, місця пробуваня на якийсь час, доброго відживлюваня, свободи ума і богато-богато сонця, тепла воздуха. Межи ті недуги в першій лїнії належать скрофули у дїтей і туберкули особливо в самих початках. Лїкарі висилають таких хорих в околицї зі шпильковими лїсами, в гірскі сторони на жентицю, до місць купельних, над море, в теплїйші сторони о лагіднім клїматї; кажуть шукати веселого товариства і не жалувати собі нїчого, але все те вимагає великих видатків, так лїчитись могуть лише люде заможні, що з бідаками зробити? Краківский шпиталь дитячий св. Людвика висилає рік річно партиями по кількадесять дїтей шкрофулїчних на кілька тижней до Рабки чи Риманова і успіхи того лїченя суть часто дуже вдоволяючі; але про якийсь сталий лїчебний заклад для хорих на груди не було доси чути не то в Галичинї, але і в цїлїй Австро-Угорщинї і то не тілько для убогих, але навіть для людей богатих, щоби готові були оплачуватись.

Заклади такі суть що іно в Анґлії, має їх кілька публичних Німеччина іменно Рупертсгайн (Rupertshain) в Тавнусї заходами Детвайлєра, дальше в Альбертсберґ в Саксонії і Андреасберґ в Гарци будуть імовірно сего року віддані на ужиток публичний. Кромі того є кілька приватних закладів для недужих на груди як пр. Вольфа в Райбольдсґрін, Вайкера в Ґерберсдорф, Ляндендорфа в Ст. Андреасберґ, дальше берлїньскі заклади в Малькові і Бляккенфельд, дальше заклад червоного хреста в лїсистій околицї при Ґрабовзе біля Ораніенбурґа.[1]) Кромі того проектованих є ще богато иньших закладів, котрі з часом війдуть в житє.

Росия має до тепер всего оден рядовий заклад в Галіля в Фінляндиї. Найвисше під тим взглядом стоїть Швайцария, де майже кождий кантон будує для себе такий заклад. Базилєя має їх два. З посеред них визначують ся особливо два знаменитим добором місця, будовою і урядженем після найновійших приписів і требуваний

---

[1]) Dr. Alexander Ritter v. Weismayr: Wiener klinische Wochenschrift, 1897, Nr. 2.

ґіґенїчних і терапії взагалї і суть упосажені всякими вигодами для терплячих, недужих. Оден з них є в Гайлїґеншвендї коло Тунерза в кантонї берненьскім, а другий має Базилея в місцевости Давос-Дорф. Перший з них має на разї 120 хорих другий приняти може до 80 недужих. Всїх місць для хорих по викінченю всїх закладів Швайцариї буде тисяч кілька сот, число поважне, однак після обчисленя Ляйдена, котрий каже, що на 1000 мешканцїв повинно бути бодай 1 ліжко для туберкулїчних — навіть на Швайцарию за мале (2,909.000). Вконець здобула ся і Австрия низша на оден такий заклад в Аллянд, підчас коли гадка ще перед лїтами побудувати подібну санаторию в Угорщинї по нинї не осущилась.

В цїли доконаня сего філянтропійного дїла завязало ся у Віднї свого часу товариство з людей переважно найвисших верств інтелїґенциї, аристократиї і плютократиї. Першим протектором сего товариства був бл. п. архикнязь Кароль Людвик. Тепер числить оно 941 членів звичайних а 101 членів основателїв. Протекторат обняв Єго Величество цїсар Франц Йосиф I а заступником своїм іменував архикнязя Оттона. Головою союза є тепер ґр. Юрий Штокав. Товариство поставило собі за задачу не іно вибудуванє і удержанє одного закладу в Аллянд, але заєдно старатись збирати що раз то більше грошей і будувати такі заклади в як найбільшім числї. Збиранєм складок грошевих займаєсь головно окремий дамский комітет під протекторатом архикнягинї Мариї Йосифи. Послїднї загальні збори товариства відбули ся дня 28. марта сего року і зі справозданя скарбника Ернеста Перайфера довідуємо ся, що розпоряджає оно тепер маєтком 539.641 зр. 41 кр. Заразом учули зібрані члени і гостї тоту радісну вість, що вже сего року під осїнь Аллянд принимати буде в свої мури перших недужих. Директором управителем цїлого закладу лїчебного іменовано Дра Олександра Вайсмайр клїнїчного асистента проф. Шретера.

Товариство згадане, котрого душею є проф. Шретер, містопредсїдатель союза, мало з початку до побореня великі трудности, раз з причини браку потрібного капіталу, а відтак годї було де набути потрібного в відповідній скількости ґрунту. З часом поволи найшли ся і гроші головно в дорозї складок публичних, датків ріжних високопоставлених осіб (при чім гідно уваги жертволюбивість шляхти німецкої, і так: баронова Райнельт офірувала на сю цїль 5000 зр., Ад. Бідерман 1000 зр., Оґ. Кубіньскі 1000 зр. і цїлий ряд імен більше або менше знаних родин шляхоцких фіґурує зі значними сумами), концертів, фестинів, представлень аматорских і т. д. Як се дїє ся звичайно, ходило вже лише о се, де би вишукати відповідне місце під заклад лічебний, де би хорі пробували через цілий рік, а відтак також оречи після якого взору має ся єго ставити. Шретер знав з особистих подорожей подібні заклади в Анґлії, иньші члени виділу товариства їздили до Німеччини до Ґерберсдорф, Фалькенштайн, Штернберґ, щоби придивитись будові і урядженям тамошних закладів. Др. Вайсмайр відбув прогульку наукову в тій цїли до швайцарских санаторій.

Рівночасно допитувано за ґрунтом під шпиталь. Звернено ся поперед до державних дібр, монастирских посілостей, ріжних товариств наукових, до ґеоґрафічного інститута, закладу метеорольоґічного — на дармо, не було відповідного куспя землї. Відтак навязано зносини з товариством туристів, розличними властителями дібр, аґентіями купна і продажи, відбувано мандрівки по цілій Австриї низшій аж до границї стирийскої, але нїгде якось не удалось нїчого властивого найти. На добавку всего стрічено всюди неохоту і страх людей перед таким закладом. Жадна майже оселя не хотїла згодитись на сусїдство шпиталя сухотників В конець по великих трудах і пересправах найшли члени сего добродійного товариства спорий кусень землї біля Аллянд, але і тут ледви по великих вговорюванях і представленях згодилась людність сеї місцевости на виставленє закладу для недужих на груди.

Аллянд лежить у підніжа північного Альп в околиці горбоватій всего 16 кільометрів від міста Баден. З Баден веде до Аллянд дорога долиною Швехату. З Медлїнґом получена ся місцевість битим гостинцем що веде через Бріль, а від Рекавінкель, стациї западної желїзницї віденьскої, віддалений Аллянд всего 26 кільометрів. Впрочім удержує ся проєкт получити Баден з західною желїзницею через Аллянд, в такім случаю було би безпосередне полученє желїзницею сего закладу з Віднем. До того желїзниця полуднева обіцяла товариству всякі знижки і полекші в перевезеню як недужих, так і всяких тягарів. Иньший знов добродій подарив товариству відповідно уряджений віз до перевезеня недужих.

Заклад властивий побудовано 2 кільометри від Аллянд в малій місцевости Ґройсбах. Місце сесе представляєсь невеличкою кітлиною, що отверта на полуднє, а від півночи, заходу і всходу окружають єї невисокі горбки. Від північного всходу замикають єї горби звані Гехерберґе високі 680 м. Ґрунт цїлий, що належить до закладу обіймає 150 морґів по части залїсений, в части представляєсь яко орна ріля, сїножати. Через згадані горби заслонена ся кітлина на вітри північні, а навіть має сесе вплив і на цїлу температуру. Мірено іменно теплоту в Аллянд зимою і порівнувано з теплотою

Відня і Ґріс коло Баден в полудневім Тиролю і показалось, що в Аллянд майже так само тепло як в Ґріс, а без порівнаня лагіднїйший там клїмат нїж у Віднї.

Нема в поближю жадних більших фабрик, нема отже диму, не заносить углем камінним, воздух чистий, здоровий. Нема і пороху, бо гостинець мало уживаний, та й лежить оподалїк від закладу, а до того посїдає тая цїла посїлїсть таку скількість власної води, що не лише заосмотритись може обильно цїлий заклад, господарство, але і вистарчить на точне, кількаразове на день скроплене доріг і доріжок. З разу був клопіт власне з водою. Всї більші жерела витрискують по північній сторонї хребта Гехерберґу і спливають в північнім напрямі, мала лише скількість і то дрібнїйших жерел зрошує полудневі стоки горбів і кітлину, так що справдї заходила обава, що бракне води для закладу. Зараджено сему в сей спосіб, що по одержаню даром від барона Шель-Вітінґгофа північних жерел, заложено великий резервоар і водопроводи — рури подарив бл. п. архикнязь Альбрехт — коштом зверх 17.000 зр., так що цїлий заклад з господарством заосмотрено знаменитою жерельною водою.

До удержаня чистого воздуха причиняють ся дальше роскинені по горбках невеличкі лїси шпилькові мішані з иньшою деревиною. Кромі того належить до закладу хороший сад і великий огород яринний, що разом з луками і полями становить красну посїлїсть, котра сама собою богато причинить ся до удержаня санаторії.

Що до будинків закладу самого, то кромі хорошої вілї, призначеної на мешкане для лїкаря управителя, канцелярию закладову і аптику, дальше кількох будинків господарских, сам заклад лїчебний ще не вповнї готов. Принято систем будованя павильоновий — бо сей показав ся найпрактичнїйший — і рішено побудувати то менші то більші домики так на 20—25 лїжок в ріжних місцях сеї посїлости в міру, як буде прибувати засобів грошевих. Головний будинок закладовий має обіймати просторонь, деб ся містило 300 хорих. Виставлений є на три поверхи і має становити осередок, докола котрого поґрупують ся пізнїйше приставлені домики. Сего року буде мож умістити около 108 хорих. Цїлий будинок звернений фронтом на полудне обіймає в самій серединї величезну салю 11 метрів широку, 8·70 м. глубоку, де хорі мають пробувати за дня серед непогоди. Дальше ідуть комнати до спаня подїлені передїлами, так що в кождім передїлї містить ся 8 лїжок. Кромі того дві сепаратки по 2 ліжка, так що на кождім поверсї містить ся всего 36 ліжок, а в цілїм домку 108 ліжок. Цїлковито ізольованих комнат для поодиноких осіб нема, бо знана річ з досьвідченя по клініках, де хорі замкнені осібно в „лїпших сепаратках“ нудять ся звичайно, не могуть вилежати і просять, щоби їх умістити на салї загальній разом з другими хорими.

Заклад сей не буде місцем притулку для немочних старців, хорих і здоровіючих, не буде також шпиталем для поміщеня тяжко хорих, а буде лише закладом доглядання домашного, закладом лїченя недужих. Тому будуть лише принимати до закладу таких хорих, у котрих можливе буде або вилїченє, або бодай значна поправа цїлого стану здоровля. Отже передовсїм знайдуть поміщенє люде з початками туберкулїв, котрих недуга через плеканє належите або дасть ся застановити, або бодай дасть ся піднести їх стан сил, їх загальне відживленє і скріпленє орґанїзму. З сеї то причини поки що не буде в тім закладї цїлковито комнат хорих. Недужі за дня будуть пробувати в згаданій великій сали, або в хороших отвертих галях уміщених по обох сторонах комнат спальних на кождім поверсї, або в великій сали на долинї, що представляти буде рід огорода зимовото (оранжериї). Розуміє ся, що найбільше звертати увагу будуть на се, щоби хорі як найбільше пробували на отвертім воздусї, уживали богато руху, а навіть будуть призначували їм на взір швайцарских закладів якесь занятє, якусь роботу фізичну, оттак для приятности хорого, після єго змоги, щоби виробляти поволи єго сили, гартувати єго легкі, та приспішувати в єго орґанїзмі переміну материї, заострювати апетит до їди, будити охоту до житя. Зараз по принятю недужого має взяти він купіль для очищеня. Комната тая купельна — уміщена від сторони північної будинку — буде служити до ріжних процедур ідротерапевтичних. До щоденного ужитку призначено покоїки купельні біля спальнї. При брамі буде окрема саля, де хорі мають здіймати чоботи чи черевики, а убирати рід пантофлїв, щоби комнат мешкальних не занечищати і порохів не робити.

На долинї в партері знаходить ся велика комната де будуть робити ся всякі інґаляциї (взїваня), а на двох поверхах по однім мешканю для лїкарів-секундарів. При сали хорих має свою комнатку послугачка для недужих. Спосіб огріваня цїлого будинку центральний, осьвітленє електричне, телефон в місцї.

Кухня побудована окремо припирає до будинку. Кромі мешкань для всякої служби, має велику салю їдальну, де нараз може обідати 100 недужих. Віддаленє кухнї від санаториї а не поміщанє єї в сутеренах, як то дуже часто по шпиталях буває, має тую добру сторону, що не буде заносити так до саль хорих димом, спалениною з кухнї а в додатку через споживанє страв в салях, де недужі лежать, набирає цїлий воздух того властивого, шпитального, неприємного запаху, перед чим прецїнь хорих на груди стеречи належить. Подальше від головного будинку, а не далеко дороги буде поміщена пральня, саля секцийна а над нею відповідні ляборатории для лїкарів.

Хорих відповідних буде ся принимати у Відни за порозуміне́м з більшими шпиталями на разї зі шпиталем загальним при Альзерштрасе і зі шпиталем на Віденю. Пацієнти мають наперед відбути трехтижневу пробу, і коли окажесь в їх здоровлю якась поправа, то лишать ся дальше на цїлї три місяцї, а єсли нї, то вислані будуть знов до відповідного шпиталю, або випущені домів.

Сей час пробуваня хорого в закладї ужиє ся на приноровленє всяких можливих способів лїченя, найновійших метод і заходів лїкарских, щоби лише хоробу усунути, єї перемочи як також єї студиєвати. Будуть виконані на недужих всякі проби, примінювані по иньших заграничних закладах, як примірoм: чи вплине на стан здоровля хорого, полишенє єго на вільнім воздусї навіть серед зимна 15—20° хотьби і до ночи, праця, спацери. В тій цїли суть в Аллянд пороблені числені доріжки і стежки, по цїлїй посїлости, а всї сходять ся в самім закладї, дальше для охочих до роботи будуть до вибору хідники до чищеня, сад, огород, поле, на годину, дві або довше, скілько котрий схоче і зможе.

Догляд лїкарский сповняти буде на разї оден лїкар-управитель і двох секундарів. Они будуть мали за задачу не то занятись лїченєм властивим, але також подавати недужим докладні указки що до веденя способу житя, їди, занятя, видавати їм відповідні розпоряди, а відтак наглядати і допильнувати їх виконаня.

Особливша увага звернена буде на приучуванє хорих до чистоти, особливо, як обходитись мають з плювиною. Заведені будуть фляшочки до плютя Детвайлєра. Тоту фляшочку має хорий з собою носити замість хустки до носа, до неї плювати і щільно затикати. Лише в спальни будуть сплювачки шкляні. Анї на підлогу, анї до хусток плюти не буде вільно.

Заклад сей буде дальше місцем науки, студий над туберкульозою. Будуть відповідно уряджені ляборатории істольоґічні, бактериольоґічні, хемічні на услуги лїкарів, що схотять працювати для науки.

За дозорницї хорих ужиті будуть сестри милосердні, котрі знов мати будуть своє мешканє окремо.

Вигляди сего закладу суть як найліпші, всюди стрічає ся він у публики з великою симпатиєю, а як потрібний він, сьвідчать о тім вже цїлї стоси листів писаних вже від довшого часу через ріжних пацієнтів до проф. Шретера[1]) з запитанєм, коли заклад отворить ся і з прошенєм о принятє до него. Розвиватись має він куди, місця досить, коли іно добросердні люде більше гроша зложать. Він має станути дальше взором, для санаторий в иньших краях Австро-Угорщини, щоби як найбільше людей могло з сего користати, своєї недуги позбутись, або полекші дізнати, щоби ті заклади стали дїйстно добром, спасенєм бідного люду, так як голосить напись на санаториї в Аллянд: „Armen Kranken zum Heile“.

---

[1]) Prof. Schrötter: Wiener klinische Wochenschrift, 1896, Nr. 3.

Др Осип Дакура.

◆

VII. Інтернаціональний ґеольоґічний з'їзд у Петербурзї.

У серпнї 1897 р. відбув ся в Петербурзї VII. інтернаціональний конґрес; 17/29 серпня в салях нового зоольоґічного музея академії наук відкрито конґрес. Послї сего члени конґреса обзирали ґеольоґічну виставу, уряжену віце-головою проф. Іностранцевим, що містила у собі ріжні карти, фотоґрафії, роди скал і т. и. Особливу увагу звернула на себе Японія, котра представила прегарними штуфами свої мінерали, а теж карти, що сьвідчать про енерґічне вивчення сеї сторони, ще до недавних часів terra incognita. Теж добре представлена ґеольоґія Фінляндиї і Скандинавії, тут звертали на себе увагу штучні мінерали, здобуті гельсінфорським проф. Шультеном. Нїмецькі фабриканти виставили ріжні інструменти ґеольоґічні.

На другий день був зроблений спробунок улаштувати стратіґрафічну номенклятуру і клясифікацию, але після деяких дебатів виявилось, що питаня се тепер не має змоги бути розвязаним, але хоч для усієї землї клясифікация не була встановлена, проте така клясифікация повинна бути заснована на історичних і палеонтольоґічних ознаках, а для утвореня принципів такої клясифікациї постановлено улаштовать особливу комісию.

З рефератів вкажемо на реферат Менє про свої досьвіди, аби з'ясувати деякі ороґрафічні питаня. Він з початку намалював історию розвою ороґрафії верхнї земної і далї показав власні апарати. Вони складають ся з товстого кавчука, що єго натягнено на сферичну фіґуру, кавчук помазано товстим шаром ґіпсу; коли кавчук скорочуєть ся, то ґіпс зморщуєть ся і на сферичній верхнї утворюють ся штучні гори, які роблять ся усе вищі, чим далї од полюсів (бігунів). Далї Санко виступив з рефератом про орографію землї. Згожуючись з іпотезою про огнево-рідку магматичну первітню натуру землї, треба визнати при охоложеню зменшеня обсяга. Найхолоднїйша частина верхнї землї, не може слїдувати за скороченням решти обсяга землї, і мусить утворити складки. Вивченя остатнїх показує, що з архейскої ери, обсяг землї дуже зменшив ся. Скороченя землї утворило первітні континенти, які суть тільки скелетами сучасних. Сусїдні міста дали початок океанїчним ямам. Массіви сї утворились в два періоди: каледоньский, що відповідає переважно архейскій ері; сї утвореня дужче зруйновані слїдуючим другорядними процесами, і герциньский, більш захований, его відкладеня періферично прилягають до відкладень каледоньского періода. Первітними массівами після термінольоґії референта будуть: массіви африканьский, арабский, мадаґаскарский, індийский, каледоньский, сибірский, австралїйский, антарктичний, бразильский, гвіанский, північно-американьско-гренляндский.

Скороченя обсягу землї буде істнувати, поки земля цїлком не охолоне, даючи початок сучасним орогенїчним зонам, напр.: альпейскі, апенїнскі, океанїчні. Далї був демонстрований глобус, який мусїв іллюстровати ідеї референта.

Реферат Прінца стосував ся до орогенеза. Він звернув увагу на те, що фіґури контінентів умовляють ся пересїченням двох систем майже перпендикулярних лїнїй і почав говорити про свої досьвіди над ріжними плястичними матеріями, які він разом скручував і здушував. Наслїдком сего були фіґури, зовсїм схожі з фіґурами контінентів. Форель говорив про періодичні варіяциї ледняків; запрошуючи членів конґреса реґіструвати усї переміни в становищі ледняків усего сьвіта. Тодї можливо буде визнати, чи залежать сї переміни од астрономічних причин, коли переміна в становищі одної півкулї землї буде відповідати перемінї у другій півкулї, колиж такої відповідности нема, значить переміни залежать од причин атмосферичних. Рід говорив про напрямок течиї ледняків і про похождення деяких морен. При вивченю руху ледняків звертали увагу тільки на горізонтальну складаючу руху, референт звернув увагу теж і на вертікальну, сеж робив і Аґассіц, але він не зробив справедливих конклюзій, бо, милячись, думає, що поверховий шар леду рушає швидче нїж нижній. Вивченя лїнїй течиї з'ясовує похождення деяких морен і ясно вказує, що фронт ледняка має невстійну рівновагу, що з'ясовує деякі неретельности постережені в перемінї довжини ледняка.

В засїданю 20. серпня було покладено обрати спеціяльну комисію до вивченя принципів хронольоґічної клясифікациї осадових утворень. Було обрано місцем VIII. інтернаціонального конґреса р. 1890 Париж; теж було розглядано питанє про заведеня нових стратіґрафічних термінів і запроваження інтернаціональної номенклятури. Далї проф. Вальтер виклав принципи клясифікациї скаловин Мёнє ресумував свої досвіди, що дозволили єму виявити в загальних рисах мінеральоґічну натуру а теж структуру грунтовного рода плятини з Нижнего Тагіля на Уралї. Усї мінерали породи можна дістати при нагріваню до червоного кольору відповідної пари в фарфоровій дудочцї. Реакція в даному випадку мабуть подобна до тої, яка маєть ся при утвореню метеорітів і утворюєть ся мабуть тепер в фотосфері сонця. Виводи сеї роботи дозваляють порівняти об'єкти ґеольоґічного вивченя з об'єктами астрофізичними. Тілло говорив про видатну барометричну депресію в середній Азиї, винайдену братами Грум-Гржімайло, потім Півцовим, Обручовим, Роборовским, Козловим. На стациї в Люкшунї середне річне давленє барометра $766._5$, а maximum $796._6$. Референт каже, що для цїлковитого вивченя сего з'явища потрібна ґеометрична нївелїровка починаючи з Семіпалатиньска. Другий реферат стосував ся до маґнетної аномалїї, дуже інтензивно виявленої в центральній Росиї. Лебедінцев говорив про наслїдки експедициї в Карабугазску затоку Каспійского моря. Перш думали, що дно затоки вкрито сїллю, а тепер виявилось, що ґіпсом разом з иньшими сульфатами. З'ясовуєть ся се тим, що відносини сульфатів до хлорідів в водї Каспійского моря $2._5 : 1._0$, а в океанї 11 : 1. Відкритя сульфатів опріч практичного значіня має значне теоретичне, як одинокий приклад сучасного відкладаня ґіпсу. Ердман ресумував свою працю про істнованє азота в первітних горних породах (скаловинах). Відкритє азота і гелія в скандинавских породах примусило референта дослїдити спектроскопно ряд горних пород. Азот тут істнує в хемічній сполуцї і єго можна перевести в аміяк (амоняк). Азот тут не має орґанічного походженя. 22. серпня Андрусов говорив про потребу мати особливого корабля, що на єго удержанє постачалиб кошти усї европейскі уряди; метою такого удержаня має бути дослїдженя відкладень моря, ознаємитись з якими як і з сучасною дїяльностю моря при сучасних обставинах дослїду дуже трудно. Колиж буде такий інтернаціональний корабель, ґеольоґи легко можуть ознаємитись з морем що до сїєї справи. Форель прочитав відчит інтернаціональної леднякової комісиї. Нікітин про інтернаціональну бібліоґрафічну комісию. Мурлов представив перші випуски ґеольоґічної бібліоґрафії. Марфері представив французский переклад розправи Зюса „Обличчя землї“. Маковский зробив відчит про істноване людини разом з великими ділювіяльними ссавцями (mammalia пр. носорогач, мамонт) на підставі матеріялів зібраних в льоссі (в суглинку) Брюна (Моравія). Зелей говорив про викопуваних рептілій Пермскої і Володарскої ґуберній. Вони стоять близько до знайдених в Африцї, Індиї, Шотляндиї, Сполучених державах. Відкритя Амалїцкого в Вологодскій губ. рептілій разом з ростинами (glossopteris) і пявушниками (раковинами) має особливу вагу, бо вказує на великий розвиток озер в Пермску епоху. Рептілиї сї відносять ся до Anomodontia, близьких до Labyrinthodonta (Перевойникозубі) і Monotremata (Стекуни). Далї була розмова про петроґрафічну номенклятуру і систематику і нарештї було поставлено скласти розвязаня сього питаня на комісию обрану в Цюриху. Засїданя 23. серпня було присвячене стратіґрафічним і палеонтольоґічним працям. Фрех говорив про контінентні моря палеозойскої ери і демонстрував карти. Стефанеску говорив про dinotherium gigantissimum Steph., знайденого в Румниї. Майор Еймор казав про історию середземного моря, починаючи з найдавнїйших часів.

◆

З’їзд британської асоцияциї наук.

Британські натуралїсти і лїкарі складають з себе свою наукову асоцияцию і вона сего року зробила свій з’їзд в серпнї од 5/17—12/24 дати в містї Торонто (Канада). Головою товариства обрано Джона Сванса, специялїста по вивченю доісторичної археольоґії. Більшість анґлійских вчених виїхала з Лїверпуля на одному пароходї; на єму увесь час функціонувала антропометрична лябораторея, а позаду єго тяглась увесь час сїтка, що ловила усяких маленьких тварей, що пливають на верхнї океана.

Усїх членїв з’їзда було 1.362. В засїданню 5/17 серпня виявило ся, що британський уряд, відповідно бажанню асоцияциї, визначив комісию для утворення проєкта заснування національної фізичної лябораториї, а уряд британського музея визначив потребу заснування при музеї етнольоґічного бюра для британської імпериї. Грошеві справи ассоціяциї добрі, вона визначила багато стипендій за ріжні дослїди: напр. 100 фунт. за вивчення перемін звязаних з дїяльностию клїтин нервних; 125 ф. за антропольоґічні і натурально історичні дослїди коло Торресової протоки, 75 ф. за вивчення біольоґії озера Онтаріо, 50 ф. метеорольоґічні обсерваториї в Монреалї і т. и. 7/19 серпня празникове зібрання Торонтського унїверситета, в якому був піднесений почесний дипльом льорду Кельвіну, льорду Лїстеру, серу Дж. Свансу і ин. В вечері проф. Роберт Остен зробив доклад про металї Канади з ріжними цїкавими досьвідами. 8/20 Форбе прочитав популярну лекцию для ремесників: „Британська Нова Ґвінея, сторона і народ“, а 10/22 проф. Мїльн про вульканн.

З’їзд був сполучений з ріжними гулянками, обідами і т. и.

Містом будучого з’їзда визначено Брістоль.

Вступна промова сера Джона Сванса була присьвячена новим здобуткам палеонтольоґії і доісторичної археольоґії. Референт думає, що містом з'явлення першої людини було на тропічному півдні, де знайдено найбільш близьку до людини форму (Pithecanthropos erectus) і де: в Індиї, на Евфраті, в Сомалї, в Египтї стрітили камінні орудя палеолїтичної епохи, дуже схожі з найденими в Західній Европі. Ся найдавнїйша палеолїтична епоха повинна була тягти ся безлїч часу, за який людина розселилась на далеку просторінь, пристосувалась до помірного і навіть холодного клїмата ледникового періода в Західній Европї і значно перемінила ся, що до свого фізичного типа і перших стадій культури. Палеолїтичний період змінив ся на неолїтичний, але досї ще нема досить доказів, що ся переміна стала ся помалу через культурний розвій тих самих мешканців. Певнїйше, що ся нова культура занесена новими народами з півдня, де напр. в Египтї було знайдено слїд сеї епохи в період за 3500—4000 років до нашої ери. Далї референт вказав на вагу вивчення доісторичної культури і антропольоґічного вивчення рас і настоював на заснованню етнолоґічного бюра в Великобританії на взірець такого же закладу в Сполучених Державах. Форсайт говорив про потребу заснованя національної фізичної лябораториї і ваги теоретичних праць. Рамзай присьвятив свою промову ще „незнайденому ґазу“, який повинен зайняти місце між арґоном і гелієм. Атомна вага сего елємента на 16 одиниць вища гелія і на 20 нижча арґона теж 20, густота рівна половинї атомної ваги і він, як арґон і гелій повинен бути індіферентним (неімавим) що до сполучення з другими елємєнтами. Рамзай зробив довгу серію досьвідів з діффузією гелія (нї гелій, нї арґон не можливо злучити з иньшими елємєнтами, то діффузія є єдиним засобом ізолювати новий ґаз), але референт знайшов поки що тільки примішаний арґон, хоч не стратив надії одрізнити новий ґаз, коли тільки знайде матерію де єго буде чимало. Даусон говорив про найдавнїйші гарні породи Північної Америки. Проф. Мейяль говорив про потребу вивчення живих тварей при їх натуральних условинах життя, вказавши на Дарвіна, багато користних ідей якого виникло од дослїження живої натури, од подорожей і т. и. Особливе значіння має у сему вигляді заснованя біольоґічних станцій. Зоольоґія в сучасній формі не тільки знаємить нас з розличностию форм тварей, а і взагалї дослїджує багато найважнїйших біольоґічних питань. Вона значно розширює краєвид фізіолоґа, даючи більш широкий і ясний погляд на варіації і стадії розвою ріжних орґанів і їх функциї. Вивчення тварей показує, що єсть форми, крови ток яких міняєть ся у різні періоди життя або в визначені моменти, єсть твари з очами ззаду, з очами на раковинї, на ногах, в серединї мозка, єсть багато очей без кристалика і у видї простих пігментних плям; що орґан чуття — ухо може розвивати ся на ногах, хвостї або глибоко в серединї тїла і не має навіть дірки, щоби провести хитаня звука. Єсть твари з двома хвостами, з двома тулубами, що зрослись; деякі несуть 2 або 3 роди яєць, несуть яйця, які дають початок 2 зародкам і навіть 8. У деяких творів самцї живуть, як галапаси (паразити) на самках і навіть в горлї самім міняють свою форму до 18 раз. Самцї деяких тварей уявляють з себе тільки мішки з сперматозоїдами (заплїнками), а самки других форм тільки мішки яєць. Усі такі факти значно міняють наші погляди про ролю орґанів і відносини між собою мужеских і женьских осібняків. Референт особливо спинив ся на з'явищи перемежного розпложеня, коли снастне розпложенє дає місце пупкованню в звязку з приміненнєм до околишнього сьвіту і натуральним вибором. Дїкон в секциї механїки говорив про здобутки в сфері будованя кораблїв. Турнер в секциї антропольоґії говорив про деякі особистості будови людского тїла. Референт спинив ся особливо на ріжницї в будові хребта спинного, ніг і рук, черепа, мозку людини, рівняючи до висших тварей. Характерна для людини форма хребта спинного, схожа на римське *S* стрічаєть ся в більш або меньш розвиненому становищі і у антропоморфних малп; з другого бока і у людей суть переходні форми хребта. В секциї фізиольоґічній говорив Фостер, який вказав на поспіх фізиольоґії за 10—13 років; на поспіх фізиольоґічної хемії, на поспіх в вивченю нижчих форм житя і фізиольоґічних функций клїтини, на полїпшення метода дослїдженя укладу нервного (метод. Гольджі).

Осафат Петрик.

(Некрольоґ).

І знов зменшилось число труженників на полї наук математично-фізичних; і знов громада наша стратила чоловіка, що міг стануги окрасою науки та заняти колись непослїдне місце між невеликою у нас єще горсткою людий, що старають ся посунути вперед науки математично-природописні, які є так важним нинї чинником культурним...

Осафат Петрик уродив ся в Криницї в р. 1867. Син бідного селянина-Лемка перебивавсь від дитинячого віку о власних силах через сьвіт. А кілько стоїть та борба з судьбою, кілько она вимагає накладу сили та волї, знають добре ті, що з судьбою боротись мусїли та мусять так, як він. Та мимо сього він все виходив з сеї борби з побідою; один з перших учеників ґімназиї в Новім Санчи зложив іспит зрілости з відзначенєм та перенїс ся на унїверзитет у Львові, де вкоротцї став одним з найлїпших учеників професора Пузини. Ум тверезий, критичний, знав він, що ми лиш наукою зможем дійти до тої уровени, на якій стоять другі народи Европи. Тож з правдивим пожертвованєм віддавав ся науцї через увесь час своїх студиїв, а в головній мірі посьвячував цїлий свій час улюбленій своїй науцї, фізицї. Вже яко студент дав ся пізнати ширшим кругам, коли на з'їздї математиків у Львові в р. 1894 виступив з роботою про филї електричні, яка удостоїлась признаня ученого тої міри, як варшавский математик Дікштайн. Роботу ту оголосив він пізнїйше друком під заголовком: „Krytyczny przegląd prac dokonanych dotychczas nad falami elektrycznemi. Kosmos, том XX". (Пор. також Записки тов. Шевченка том IX).

По укінченю унїверзитета обняв місце заступника учителя в ґімназиї Франц-Йосифа у Львові, а опісля в Перемишлї та Станислазові. В рік по укінченю студиїв зложив іспит на учителя математики та фізики з поступом знаменитим (1894 р.). В Станиславові належав до діяльнійших членів громади рускої, став секретарем филиї Просьвіти, та попри тяжку роботу в ґімназиї і в громадї не залишав працї фахової. Доказом сего його популярні статті в Зорі р. 1896. про відкритє Рентґена; в своїй статтї вказав він на заслуги професора Пулюя, славнозвісного нашого ученого. Іменований в р. 1896 дійсним учителем математики та фізики в рускій ґімназиї в Коломиї охотно приняв ся сього нового труду; а труд се був тим більший, що перший професор нової нашої ґімназиї мусїв занятись утворенєм музея фізикального, якого доселї і не було. Щиро взяв ся за ту роботу, переписував ся в тій справі навіть з зарядом музею фізикального на унїверзитетї у Львові; та судьба не дозволила йому довести сего діла до кінця. Набавившись на вправах військових яко лейтнант артилєриї тяжкої недуги мусїв вже в груднї 1896. р. виїхати до Мерану, а опісля до рідного села — Криницї, де й помер на чахотку 19. н. ст. падолиста 1897.

З ним пішов у могилу чоловік талановитий, щирий, сердечний товариш, великий приклонник нашого народа, один з найліпших синів України-Руси. Чоловік тихий, не рвав ся нїколи вперед, але і по задї не оставав; а хоч не много здїлав, бо коротке було єго житє, однак те, що здїлав, не вмре, не поляже!

В. Левицкий.

Справ похибок печатних.

	місто:	має бути:
В 5. статті, стор. 2., стр. 8. з долу	незвичайного малого самчика	незвичайно малого самчика
„ 6. „ „ 12., „ 12. „	При опаді матерниці	при обниженю матерниці (descensus uteri).

АДРЕСА ТОВАРИСТВА:

Львів, улиця Академічна ч. 8.

ADRESSE:

Šewčenko-Gesellschaft der Wissenschaften, Lemberg, Akademiestrasse 8.

Цїна 3 корони.

ЗБІРН
МАТЕМ.-ПР
ЛКАРСКО
СЕКЦИІ

II