

З БІБЛІОТЕКИ
НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА

Імені

ШЕВЧЕНКА

У ЛЬВОВІ.

Ч.

1975

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00730962 (R)

З БІБЛІОТЕКИ
НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА

Ім'я

ШЕВЧЕНКА

У ЛЬВОВІ.

Ч.

1975

2003
2012

1975

ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСЬКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імені Шевченка.

Т. VII. — Випуск I.

ЧАСТЬ МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНА

ПІД РЕДАКЦІЄЮ

ІВАНА ВЕРХРАТСЬКОГО і ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦЬКОГО.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SECTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

B. VII. — Heft I.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHER THEIL

REDIGIRT VON

JOHANN VERCHRATSKYJ u. VLADIMIR LEVICKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1900.

Накладом Наукового Товариства імені Шевченка.

З друкарні Наукового Товариства імені Шевченка
під зарядом К. Беднарського.

и. 47373/7

ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

T. VII. — Випуск I.

ЧАСТЬ МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНА

ПІД РЕДАКЦІЄЮ

ІВАНА ВЕРХРАТСЬКОГО і ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦЬКОГО.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SECTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

B. VII. — Heft I.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHER THEIL

REDIGIRT VON

JOHANN VERCHRATSKYJ u. VLADIMIR LEVICKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1900.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка
під зарядом К. Беднарського.

2 б

ЛВВІВСЬКА БІБЛІОТЕКА
АН УРСР
№ И 47383

З М І С Т.

	Стор.
1. Володимир Левицкий: До теорії рядів степенних..	1—10
2. Софрон Матвіяс: Дещо про лучі Бекереля.....	1—8
3. Володимир Левицкий: Короткий начерк теорії функцій автоморфних	1—29
4. Стефан Рудницький: Про плями сонічні (Часть перша)	1—27
5. Бібліографія і хроніка математично-фізична	1—11

I N H A L T.

1. Vladimir Levickyj: Zur Theorie der Potenzreihen....	1—10
2. Sofron Matwijas: Über die Becquerel'schen Strahlen..	1—8
3. Vladimir Levickyj: Kurzer Abriss der Theorie der auto- morphen Functionen	1—29
4. Stefan Rudnickyj: Über die Sonnenflecke (Erster Theil)	1—27
5. Mathematisch-physikalische Bibliographie u. Chronik	1—11

З ТЕОРІЇ РЯДІВ СТЕПЕННИХ^{*)}

НАПИСАВ

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

В сій розвідці займаю ся такими рядами степенними, для яких цілий обвід засягу збіжності творить пантахію точок особливих (або є лїнією особливою замкненою). Квестія того рода рядів степенних є дуже трудна; яке таке сьвітло кидають на ню роботи Pringsheim'a, Fabry та Borel'a¹⁾; тож в нинішній розвідці я хочу лиш перевести доказ, що того рода ряди існують, а опісля подати пару уваг, яке можуть кинути деяке сьвітло на істоту таких функцій.

В тій цілі послугуюсь способом, що творить точку вихідну теорему Mittag-Leffler'a²⁾.

1. Най $f(x)$ буде аналітичною функцією, збіжною в колї $|x| = r$ і най єї точками особливими будуть місця a_s ($s = 1, 2, \dots, \infty$), де:

$$|a_s| = r, \quad a_s = re^{\varphi_s i} \quad (\varphi_s \text{ яке-небудь}).$$

В окруженю кожної точки a_s існує розвиненє:

$$f(x) = G_s \left(\frac{1}{x - a_s} \right) + \mathfrak{P}_s(x - a_s) \quad 1).$$

де G_s є функція ціла раціональна або переступна, т. є.:

^{*)} Розвідка ся буде поміщена в одним з дальших випусків журналу „Monatshefte für Mathematik u. Physik“ Wien.

¹⁾ Пор. пр. Borel: Leçons sur la théorie des fonctions; також Annales de l'Ecole normale t. 16. Ту можна також зачислити досліди Poincaré над функціями автоморфними, які існують лиш в колї головнім.

²⁾ Пор. пр. Biermann: Theorie der analytischen Functionen ст. 344 et sqts.

$$G_s \left(\frac{1}{x - a_s} \right) = \frac{c_{s1}}{x - a_s} + \frac{c_{s2}}{(x - a_s)^2} + \dots \begin{cases} \text{скінченна} \\ \text{або} \\ \text{in inf.} \end{cases}$$

$$= - \frac{c_{s1}}{a_s \left(1 - \frac{x}{a_s} \right)} + \frac{c_{s1}}{a_s^2 \left(1 - \frac{x}{a_s} \right)^2} - \dots = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{s\mu} \left(\frac{x}{a_s} \right)^{\mu},$$

де:

$$(-1)^{-\mu} A_{s\mu} = - \binom{-\mu-1}{0} \frac{c_{s1}}{a_s} - \binom{-\mu-1}{1} \frac{c_{s2}}{a_s^2} - \dots \quad 2).$$

Проте можна написати:

$$G_s \left(\frac{1}{x - a_s} \right) = \sum_0^{m_s} A_{s\mu} \left(\frac{x}{a_s} \right)^{\mu} + \sum_{m_s+1}^{\infty} A_{s\mu} \left(\frac{x}{a_s} \right)^{\mu} \quad 3).$$

де m_s в яке-небудь число, але скінчене, додатне і ціле.

Виводаймо тепер виражене слідує:

$$F_s(x) = \sum_{m_s+1}^{\infty} A_{s\mu} \left(\frac{x}{a_s} \right)^{\mu} \quad 4).$$

то його безглядна вартість (з углядненим $|a_s| = r$) є:

$$\left| F_s(x) \right| \leq \sum_{m_s+1}^{\infty} \left| A_{s\mu} \right| \left| \frac{x}{r} \right|^{\mu}.$$

Збудуймо тепер безконечну суму $\sum_{s=1}^{\infty} F_s(x)$, то:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left| F_s(x) \right| \leq \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m_s+1}^{\infty} \left| A_{s\mu} \right| \left| \frac{x}{r} \right|^{\mu} \quad 5).$$

Розслідім тепер сочинники $A_{s\mu}$, то на основі рівняння 2). можна написати:

$$\left| A_{s\mu} \right| \leq \sum_{v=1}^{\infty} \binom{-\mu-1}{v-1} \left| \frac{c_{sv}}{r^v} \right| \quad |a_s| = r.$$

Наколи ряд:

$$G_s \left(\frac{1}{x - a_s} \right) = \sum \frac{c_{sv}}{(x - a_s)^v}$$

яко ряд безусловно збіжний має для оточення точки a_s вартість:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{|c_{sv}|}{|x - a_s|^v} = g_s, \quad |x - a_s| = \zeta_s$$

то після звісного твердження Вейерштрасса¹⁾:

$$\frac{|c_{sv}|}{|x - a_s|^v} \leq g_s, \quad \text{або} \quad |c_{sv}| \leq g_s \zeta_s^v.$$

Наколи вставимо за $|c_{sv}|$ ту більшу вартість, дістанемо:

$$|A_{s\mu}| \leq g_s \sum_{v=1}^{\infty} \binom{\mu-1}{v-1} \left| \frac{\zeta_s}{r} \right|^v$$

або:

$$|A_{s\mu}| \leq g_s \frac{|\zeta_s|}{r} \frac{1}{\left(1 - \frac{|\zeta_s|}{r}\right)^{\mu+1}}.$$

Доберім ζ_s так, щоби:

$$\frac{|\zeta_s|}{r} < \beta < 1, \quad \text{то:}$$

$$|A_{s\mu}| < g_s \beta (1 - \beta)^{-\mu-1}$$

сума та є проте скінчена.

Возьмим тепер в засягу зб. $\left| \frac{x}{r} \right| = \varepsilon \leq 1$ суму:

$$\sum_{m_s+1}^{\infty} |A_{s\mu}| \left| \frac{x}{r} \right|^\mu, \quad \text{то та сума:}$$

$$\sum_{m_s+1}^{\infty} |A_{s\mu}| \left| \frac{x}{r} \right|^\mu = \left| \frac{x}{r} \right|^{m_s} \sum_{v=1}^{\infty} |A_{s\mu}| \left| \frac{x}{r} \right|^v$$

¹⁾ Biermann loc. cit. 142.

Але:

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{\infty} \left| A_{s\mu} \right| \left| \frac{x}{r} \right|^v &< \sum_{v=1}^{\infty} g_s \beta (1-\beta)^{-(m_s+v+1)} \left| \frac{x}{r} \right|^v = \\ &= \frac{g_s \beta}{(1-\beta)^{m_s+1}} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta)^v} \left| \frac{x}{r} \right|^v. \end{aligned}$$

А що:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(1-\beta)^v} \left| \frac{x}{r} \right|^v = \frac{\left| \frac{x}{r} \right|}{1-\beta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1-\beta} \left| \frac{x}{r} \right|} = \frac{\varepsilon}{1-\beta-\varepsilon},$$

то:

$$\begin{aligned} \left| F_s(x) \right| &\leq \sum_{m_s+1}^{\infty} \left| A_{s\mu} \right| \left| \frac{x}{r} \right|^\mu \leq \left| \frac{x}{r} \right|^{m_s} \frac{g_s \beta}{(1-\beta)^{m_s+1}} \cdot \frac{\varepsilon}{1-\beta-\varepsilon} = \\ &= \varepsilon^{m_s+1} \frac{\beta g_s}{(1-\beta)^{m_s+1} (1-\beta-\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Через вибір достаточного великого m_s можна зробити, що:

$$\left| F_s(x) \right| < \varepsilon_s \text{ (довільно мале)}$$

в засягу $\left| \frac{x}{r} \right| < 1.$

А що в тім засягу є і:

$$\left| F_{s+v}(x) \right| < \varepsilon_{s+v} \quad (s = 1, 2, 3, \dots)$$

то можна вибрати так велике v , щоби і $\sum_{s=1}^{\infty} F_s(x)$ була одностайно збіжна, т. є., щоби:

$$\sum \left| F_{s+v}(x) \right| < \delta \text{ (довільно мале).}$$

Тоді $\sum_{s=1}^{\infty} F_s(x)$ буде одностайно збіжна і дасться розвинути на ряд в оточенні кожної точки a_s . В такому засягу та сума якої сума безконечно багато рядів дасться упорядкувати після степенів аргументу ¹⁾, отже:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} |F_s(x)| &\leq \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m_s+1}^{\infty} |A_{s,m_s}| \left| \frac{x}{r} \right|^{\mu} = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ |A_{s,m_s+1}| \left| \frac{x}{r} \right|^{m_s+1} + \right. \\ &+ \left. |A_{s,m_s+2}| \left| \frac{x}{r} \right|^{m_s+2} + \dots \right\} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{x}{r}^{m_s+1} \left\{ |A_{s,m_s+1}| + |A_{s,m_s+2}| \left| \frac{x}{r} \right| + \dots \right\} = \\ &= \left| \frac{x}{r} \right|^{m_s+1} \left\{ |A_{1,m_s+1}| + |A_{1,m_s+2}| \left| \frac{x}{r} \right| + \dots + |A_{2,m_s+1}| + |A_{2,m_s+2}| \left| \frac{x}{r} \right| + \dots \right\} = \\ &= \left| \frac{x}{r} \right|^{m_s+1} \left[\sum_{t=1}^{\infty} |A_{t,m_s+1}| + \left| \frac{x}{r} \right| \sum_{t=1}^{\infty} |A_{t,m_s+2}| + \left| \frac{x}{r} \right|^2 \sum_{t=1}^{\infty} |A_{t,m_s+3}| + \dots \right]. \end{aligned}$$

Отже можна написати:

$$\sum_{s=1}^{\infty} |F_s(x)| \leq \left| \frac{x}{r} \right|^{m_s+1} \left[C_1 + C_2 \left| \frac{x}{r} \right| + C_3 \left| \frac{x}{r} \right|^2 + \dots \right] \quad 6).$$

де кожний сочинник:

$$C_n = \sum_t |A_{t,m_s+n}|$$

має скінчену і означену вартість ²⁾.

В засягу $|x| = r$ мусить бути:

$$f(x) - \sum_{s=1}^{\infty} F_s(x) = G(x),$$

де $G(x)$ є цілковита переступна функція; отже:

¹⁾ Пор. Biermann loc. cit. ст. 146.

²⁾ Пор. ibid. ст. 146.

$$f(x) = G(x) + \sum_{s=1}^{\infty} F_s(x) \quad 7).$$

Можна протевсегда збудувати аналітичну функцію, яка на цілім обводі засягу збіжності має самі точки особливі.

2. Що така функція має дійсно такі власности, можна легко доказати.

Так як:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s(x) = h \left(\frac{x}{r} \right)^{m_s+1} \left[C_1 + C_2 \frac{x}{r} + C_3 \frac{x^2}{r^2} + \dots \right],$$

де h є числом зложеним ($|h| \leq 1$), то:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} F_s(e^{\varphi i}) &= h (e^{\varphi i})^{m_s+1} \left[C_1 + C_2 e^{\varphi i} + C_3 e^{2\varphi i} + \dots \right] = \\ &= h (e^{\varphi i})^{m_s+1} \left[\sum_{v=0}^n C_{v+1} e^{v\varphi i} + R_n \right], \end{aligned}$$

де перша сума є скінчена, а решта почавши від дуже далекого n :

$$R_n e^{n\varphi i} (C_{n+1} + C_{n+2} e^{\varphi i} + C_{n+3} e^{2\varphi i} + \dots)_{n=\infty}$$

може прийняти яку-небудь вартість, бо $e^{n\varphi i} \Big\}_{n=\infty}$ приймає всяку яку-небудь вартість.

Що було до доказання. —

3. Погляньмо тепер, що діє ся в середині кола збіжності.

Возьмім $x = r'e^{\varphi i}$ де $r' < r$, то дістанемо:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s(r'e^{\varphi i}) = h (e^{\varphi i})^{m_s+1} \left[C_1 + C_2 \frac{r'}{r} e^{\varphi i} + \dots + C_n \left(\frac{r'}{r} \right)^{n-1} e^{(n-1)\varphi i} + \dots \right]$$

отже-ж решта є ту:

$$R_n = \left(\frac{r'}{r}\right)^{n-1} e^{(n-1)\varphi i} \left[C_n + C_{n+1} \frac{r'}{r} e^{\varphi i} + \dots \right]_{n=\infty}$$

Так як $\frac{r'}{r} < 1$, то: $\lim_{n=\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{n-1} = 0$, т. є. $R_n = 0$.

В середині кола збіжності є проте функція $f(x)$ скінчена і одновартостна.

Є тут однак виїмки. Для $n = \infty$ може $e^{(n-1)\varphi i}$ прийняти всяку можливу вартість; наколи ті вартості є скінчені, то решта $R_n = 0$; є однак і безконечно великі вартості того $e^{(n-1)\varphi i}$, отже в тім случаю має решта форму $0 \cdot \infty$, який то символ може мати якийсь значіне. Наколи він має вартість скінчену, то і ціла функція є на тім місці скінчена, але не все одновартостна. Наколи символ сей має вартість безконечно велику, то і функція на тім місці стаєсь безконечно великою.

Можемо проте сказати: Функція, яка має на обводі збіжності пантахію особливостей, може мати в середині кола збіжності ту і там порозкидані особливі місця, де тратить скінченість і одновартостність.

Які се є місця і як в окруженю тих місць представляє ся функція $f(x)$, сего не можу ближше розбирати, вказую лиш на можливість, що такі місця існують.

4. Возьмім тепер функцію $f(x)$ по за колом збіжності і розслідім там її поведене.

Виберім на площі чисельній яку-небудь точку

$$x = Re^{\varphi i},$$

де $R > r$, то тоді дістанемо:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s (Re^{\varphi i}) = h(e^{\varphi i})^{m_s+1} \left[C_1 + C_2 \frac{R}{r} e^{\varphi i} + \dots \right]$$

при чім решта:

$$R_n = \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} e^{(n-1)\varphi i} \left[C_n + C_n \frac{R}{r} e^{\varphi i} + \dots \right]_{n=\infty}$$

Так як $\left(\frac{R}{r}\right) > 1$, то $\lim_{n=\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} = \infty$, т. є. $R_n = \infty$;

поза колом збіжності функція $f(x)$ взагалі не існує (є безконечністю).

Але і ту є винятки. Для $n = \infty$ може $e^{(n-1)\varphi i}$ прийняти всяку можливу вартість; наколи ті вартості є скінчені або безконечно великі, то решта $R_n = \infty$; наколи однак якась з тих вартостей є 0, то решта дістане форму $\infty \cdot 0$. Наколи сей символ має вартість скінчену, то решта R_n , а проте і $f(x)$ є на тім місці скінчене.

Можна проте сказати, що функція $f(x)$ поза колом збіжності ніде не існує крім деяких ізольованих місць, де приймає вартість скінчену.

І ту не беру ся розсліджувати ближше тих місць, а вказую лиш на можливість їх істнованя.

5. Возьмім тепер ряд виділений mod. m^1) т. є.:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s(x, m) = h \left(\frac{x}{r}\right)^{ms+1} \left[C_1 + C_{m+1} \left(\frac{x}{r}\right)^m + C_{2m+1} \left(\frac{x}{r}\right)^{2m} + \dots \right],$$

то ту решта R_n має вид:

$$R_n = C_{nm+1} \left(\frac{x}{r}\right)^{nm} + C_{(n+1)m+1} \left(\frac{x}{r}\right)^{(n+1)m} + \dots$$

або:

$$R_n = \left(\frac{x}{r}\right)^{nm} \left[C_{nm+1} + C_{(n+1)m+1} \left(\frac{x}{r}\right)^m + \dots \right]_{n=\infty}$$

Для $x = re^{\varphi i}$ маємо:

¹⁾ Що до таких рядів пор. Puzyna: O wartościach funkcyj etc. (Roz. krak. Akad. mat. umiej. Wyd. T. 26); або: Ueber eine methodische Bildung der anal. Ausdrücke (Monatshefte für Math. u. Phys. Bd. V). Левицкий: Про симетричні вираження (Записки Наук. Тов. ім. Шевченка т. IV.).

$$R_n = e^{nm\varphi i} \left[C_{nm+1} + C_{(n+1)m+1} \left(e^{\varphi i} \right)^m + \dots \right]_{n=\infty},$$

а для $x = Re^{\varphi i}$, $R \leq r$ дістанемо:

$$R_n = \left(\frac{R}{r} \right)^{nm} e^{nm\varphi i} \left[C_{nm+1} + C_{(n+1)m+1} \left(\frac{R}{r} \right)^m e^{m\varphi i} + \dots \right]_{n=\infty},$$

а се значить, що і функція виділена mod. d. з функції $f(x)$ є такою функцією о характері функції $f(x)$.

Возьмім тепер загальніший случай, а іменно виділену функцію:

$$\sum F_s(x, m) = h \left(\frac{x}{r} \right)^{m_s+1} \left[C_1 + C_{m+1} \left(\frac{x}{r} \right)^m + C_{m_1+1} \left(\frac{x}{r} \right)^{m_1} + \dots + C_{m_2+1} \left(\frac{x}{r} \right)^{m_2} + \dots \right], \quad 8).$$

де:

$$m < m_1 < m_2 < m_3 < \dots$$

і де:

$$\begin{aligned} m &= m \\ m_1 &= m t_1 \\ m_2 &= m t_1 t_2 \\ m_3 &= m t_1 t_2 t_3 \\ &\dots \\ m_n &= m t_1 t_2 t_3 \dots t_n, \end{aligned}$$

де m_s і t_s є числа цілі і додатні; то решта того ряду має вид:

$$R_n = C_{m_n+1} \left(\frac{x}{r} \right)^{m_n} + C_{m_{n+1}+1} \left(\frac{x}{r} \right)^{m_{n+1}} + \dots$$

або:

$$R_n = \left(\frac{x}{r} \right)^{m_n} \left[C_{m_n+1} + C_{m_{n+1}+1} \left(\frac{x}{r} \right)^{(t_{n+1}-1)m_n} + \dots \right],$$

а та решта для $n=\infty$ і для $x = Re^{\varphi i}$, $(R \geq r)$ заховує ся як по-

передних случаях. Отже і така функція має вповні характер роз-
слідженої нами функції $f(x)$.

Очевидно то зістане і на случай, коли:

$$t_1 = t_2 = \dots m,$$

т. в. коли:

$$m_n = m^n.$$

Зауважити вкінці треба, що ряд 8). на случай $r=1$ був вже
предметом дослідів М. Lerch'a¹⁾.

Тернопіль, в червні 1900.

¹⁾ Acta matem. Т. 10.

Дещо про лучі Бекереля (Becquerel)

написав

СОФРОН МАТВІЯС.

Не довго по відкриттю лучів Рентгена (Röntgen) наука могла повеличатись новим здобутком. В році 1896 відкрив Бекерель, що уран і його сполучення висилають лучі для ока вправді неслідні, котрі однак ділають на плити фотографічні замкнені в чорнім непрозорим для світла папері рівно як світло, хочай значно слабше і розходять ся в лінії простій. З початку була гадка, що уран світить під впливом попередного, хочайби короткого виставлення його на лучі світла через якийсь час, зовсім так як тіла фосфоризуючі, хочай в тім случаю уран висилає лучі значно довше, бо навіть і цілі місяці. Для того з початку названо явище то надфосфоресценцією. Однак докладніші досліди виказали цілком рішучо, що лучі ті не повстають під впливом світла, бо уран і його сполучення висилають лучі і тоді, коли умістимо їх в цілковитій темноті навіть через кілька літ, а також не можна в жаден спосіб скріпити лучистости урану ані через сильне освітлене ані при помочи вниших внішних впливів. Не має ся тут проте до діла з фосфоресценцією, але з лучами нового рода, котрі в засаді різнять ся також цілковито і від лучів світла.

По тім відкриттю Бекереля мимоволі насувалось питане, чи крім урану є инші тіла, що мали би ту саму власність висилання лучів о тих самих свійствах. Розвязкою сего питання заняв ся між першими Др. Г. Шмідт, котрому удалось по численних пробах з ріжними елементами відкрити, що тор заховуєсь подібно як уран. В дослідах своїх над свійствами тих лучів спостеріг Шмідт, що

металї вглитують лучі тору, а иньші тіла, як папір, желатина, скло перепускають їх в тонких верстках. Бо коли покласти тор на фотографічній плиті, завиненій в чорний непрозорачний папір, то по однім або двох днях плита та цілковито счорніє, коли однак помістити якийсь метал під тором, то фігура его відібе ся цілковито. Лучі ті дальше роблять з воздуха, що є діелектриком, слабій провідник електричності, в наслідок чого розсівають ся набіи тіл на електризованих так додатно як від'ємно.

Силу лучів урану і тору або так званих лучів Бекереля можна розсліджувати в двоякий спосіб. Перша метода лежить в тім, що оціняєсь діланє фотографічне лучів на закриту плиту, однак метою сею не можна дійти до докладних результатів. Далеко докладнійшою є метода електрична, полягаюча на тім, що лучі ті переміняють воздух-діелектрик на добрий провідник, а вартість провідництва можна дуже докладно мірити.⁴

Приряд той, якого уживала Curie-Склодовска, складає ся з кондензатора о двох плитках А і В. (фіг. I). Тіло лучисте спорошковане розсипує ся на плитці В і творить з воздуха містячого між плитками добрий провідник. До міреня сего провідництва підносять ся плитку В до високого потенціялу, коли получимо єї з одним бігуном сильної батерії електричної, а другий бігун злучимо з землею. Другу плитку А за помочию дроту CD лучимо з землею. Творить ся проте різниця потенціалів межи плитками, а що воздух між плитками стає ся провідником, проте кружить ток електричний між плитками. Потенціал плитки А вказує електрометер Е з нею злучений. Если прорвемо в С połącєнє з землею, то плитка А отримує набій, котрий відхиляє електрометер. Скорість вихилу є пропорціональна до сили тока і може служити до єї зміреня. Ліпше є однак рівноважити набій плитки так, щоби електрометер зіставав на зеровій точці. Набої ті суть натурально дуже слабї і можна їх зрівноважити за помочию кварцу пезоелектричного Q, котрого одна окладка лучить ся з плиткою А, друга з землею. Ту бляшку кварцову обтяжає ся за помочию тягарку уміщеного на тарілці завиненій до берегу долішного кварцової бляшки. А уладжує ся то в той спосіб, що скількість електричності переходяча через кондензатор в кождій хвили рівнає ся скількості електричності, що достарчає кварц. Тим способом можна мірити безвзглядну вартість тої електричності, котра в протягу даного часу перепливає через кондензатор, або иньшими словами можна мірити силу тока. Чутість електрометру не має на помір жадного впливу.

Причина повставання того тока до нині не зовсім ясна. Англійський учений Rutheford толкує, що лучі переходячі через воздух межі плитками кондензатора, причиняють ся до розділу частин газових на додатні і від'ємні йони, котрі перебігають в поли електричній до плиток кондензатора і ту віддають їм свої набої. Наслідком тої гіпотези було б, що ток є тим сильніший, чим більше творять ся тих йонів, а тих знова може тим більше творитись, чим сильніші лучі висилають ті тіла, а також коли б була однакова сила висилання лучів, то сила тока залежить еще від різниці потенціалів між плитками кондензатора. Rutheford виказав відтак досвідом правдивість своєї гіпотези а залежність між провідництвом електричних: в наслідок ділання лучистих тіл а різницею потенціалів кондензатора представив графічно кривою лінією. Коли з початку збільшавсь різниця потенціалів, росте і відхилене електрометру але до певної границі. Дальше крива та нагло загинає ся і є дальше рівнобіжною до осі потенціалів. І так має бути. Бо если при якійсь різниці потенціалів межі плитками скорість частин газових стає ся так велика, що всі йони, що творять ся в одній секундї, в тім часї добігають до плиток кондензатора, то тоді натурально і ток мусить бути сталий, проте і електрометр не може дальше відхиляти ся. Тоді ток, котрого сила найбільша, є пропорційнальний до числа йонів, що творять ся в одиниці часу, а ті знова приймаємо яко міру сили лучистости тіл.

Поміри тим прирядом виказали, що загальний характер лучів тора є той сам що урану, а сила тока возбуждена лучами тора є явищем атомовим, яке є звязане з матерією і не може зчезнути з зміною їх стану фізичного а навіть хемічного. Всі сполуки, що мають за складник тора або уран, посідають тим самим власність висилання лучів Бекереля і то тим сильніших, чим більша їх скількість в якій сполуці. Після того не повинен жаден мінерал бути більше лучистий чим тор і уран. Однак досвід показав що иньшого, а то що урані чорний (пехбленда) є чотири рази чинніший ніж уран металічний. Для того то Марія і Петро Curie впали на гадку, що в пехбленді мусить бути матерія иньша, котра є більше лучиста ніж тор або уран і виказали навіть посредством звичайних метод хемії аналітичної, що в пехбленді суть матерії, котрих лучистість є 100.000 разів енергічніша ніж урана. Аналіза хемічна виказала, що в пехбленді суть три різні елементи, які дістали назву польон, рад і актин.

Польон є все разом з бізмутом і під взглядом аналітичним до него подібний. Рад є зближений до бару і є з ним в пехбленді, а

актин є найбільше зближений до тору. Треба однак знати, що повисших тіл в пехбленді надзвичайно мало. Щоби їх одержати в більшій кількості, треба переробити кілька тон випадків фабрикації урана з пехбленди. Ціла та праця є дуже довга, і при тім получена з великими коштами, бо з тисячій kg матеріалу добуває ся ледви кілька dg сух лучистих матерії.

Вправді жадного з тих тіл не одержано еще доси відосібного, проте тіла ті поки що трудно звати елементами. Мимо найбільших старань не знайдено доси хемічної реакції, щоби можна було відділити рад від бару, польон від бізмута. Однак наука знає еще иньші средства, котрими можна виказати, що нові елементи суть, а то аналіза спектральна і помір тягару атомового.

Demarçay виконав ряд помірів спектральних з новими тілами, а радше тими тілами, де они входять в їх склад. Фотографуючи дуговину (спектр) хльорку барового лучистого, спостеріг він нову дуговину характеристичну, яка ставала що раз виразнійша в міру, як росла лучистість. Дюговина раду містила в собі 15 добре схарактеризованих ліній не числячи слабших.

Подібні поміри роблені з польоном і актином не дали успішних результатів, чито тому, що метода спектральна не є так корисна або концентрация не вистарчаюча.

Означено також тягар атомовий бару лучистого і знайдено, що тягар збільшає ся з концентрацією. Послідні поміри дали число 146 яко тягар атомовий бару лучистого, підчас коли тягар атомовий звичайного бару виносить 138.

Однак тепер насунулось друге питанє, чи уран не посідає длятого власности висиланя лучів Бекереля, що може містити в собі одно з тих тіл. І справді найновіші праці виказали, що уран ніколи не є вільний від активу і що видобуваючи актив можна лучистість урана значно обнижити. А невідомо тільки, чи можна одержати уран зовсім нечинний.

Посліднім питанєм, котре лишалось до розвязаня, було то, чи між лучами катодальними і Рентгена з одної, а лучами Бекереля з другої сторони нема що спільного, а може навіть, чи ті послідні лучі не суть нічим иньшим як катодальними або иньшою відміною лучів Рентгена. Длятого зачато слїдити за свїйствами нових лучів і порівнувати їх з лучами катодальними і Рентгена.

Відкрито, що лучі нових тіл лучистих можуть переходити через ріжні тіла, але лучі не всіх тіл переходять в однаковій мірі.

Лучі польону мало проникають, бо в воздуху перебувають они ледви кількацентиметрову дорогу, а через тіла цїпкі пр. металі пе-

реходять лиш через дуже тонку верству. Рад має два роди лучів, одні дуже мало проникливі як польону, але другі суть дуже проникливі, бо в воздуху переходять на метр і більше, а плита оловяна навіть кілька см груба не в силі повздержати лучів другого рода. Актив заховуєсь в тім вигляді так як рад.

Ділане фотографічне раду і активу є дуже енергічне. Лиш польон одні не ділає з віддаленя а дуже слабо тоді, коли плита фотографічна є покрита чорним папером. Рад і актив ділають з значного віддаленя а навіть тоді, коли плита є покрита чорним папером.

Лучі тих тіл викликають флюоресценцію в тілах флюоризуючих а також причиняють ся до змін хемічних в тілах виставлених на їх ділане. Так пр. скло і порцеляна виставлені на діланя лучів раду, без взгляду на то чи з віддаленя чи безпосередно зіткнені, забарвляють ся на барву фіолетову, брунатну або сіру, залежно від складу скла або порцеляни.

Також послідні досьвіди виказали, що тіла ті слабо озонізують воздух. Рівно-ж если лучі раду падають на пару виходячу з кітла, то її скрапляють; в тім случаю йони, що повстають в воздуху в наслідок діланя тих лучів суть тими дрібними тільцями, що служать яко осередки до згущеня пари водної.

Дальше лучі ті улекшують повставане іскри електричної через те, що обнижають різницю потенціалів на двох провідниках, набитих нерівноіменною електричністю.

Також заходить зміна в силі лучистости тих тіл. І так лучистість сполук раду росте від хвилі, коли одержано ті сполуки в стані цїпким і доходить до певної граничної вартости, що буває 4 або 5 разів більше як первісна. Противно лучистість сполук польону зменьшає ся поволи але стало і не вертає вже ніколи до первісної початкової вартости.

Лучі раду і активу мають дальше то свійство, що побуджують другі тіла, на котрі падають, до висиланя лучів. Лучистість та так сказати-б, другорядна по усуненю раду і активу маліє а вкінці гасне цїлком.

Маючи на взгляді до тепер вичислені свійства лучів Бекереля можна їх так само добре заслїти до лучів Рентгена як і катодальних, котрих істоту нині толкує ся після W. Sutherland-a*) в спосіб дуже інтересний. То власне, що лучі катодальні не суть залежні

від рода газу, твердить Sutherland, каже прийняти, що лучі ті не повстали з йонів газу але з „електронів“, де під „електроном“ треба розуміти можливо найменшу скількість електричності, рід молекула електричного. Тих електронів є два роди, додатні і від'ємні; звичайно суть они сполучені в „neutron“, а тільки певні сили можуть его розділити. Всяке провідництво електричності є тільки вандрівкою електронів; для того мусить кождий провідник ділити „neutron“ на електрони, підчас коли непровідники сего не можуть. Порожня є ізоратором; аж електрична сила розділить неутрони, тоді стає ся она провідником в роді електроліта. Опісля від'ємні електрони враз з декотрими йонами газовими є відкидувані від катода і творять лучі катодальні. Ті суть проте найпростшою формою електричного току. А що електрони суть надзвичайно малі, бо Sutherland обчисляє їх на одну мільонову молекула матеріяльного, то можуть проникнути в простор межимолекулярний. Многі з тих електронів відклонюють молекули з простолнійної дороги, і ті творять по переході листка алюмініювого лучі Ленарда. А так само як молекули матеріяльні, мають після гадки Sutherland і електрони внутрішню будову. Если ударають на атоми тїл, то віддають они їм часть своєї енергії в виді тепла; друга часть енергії з'уживаєсь до внутрішніх заворушень кождого електрона, а ті внутрішні колибання творять в етері лучі Рентгена. Лучі X були би проте філями етеру і то в тїм самім відношеню менші як філі сьвітла, як електрони суть менші від молекулів матеріяльних. А що они просторонь межимолекулярну легко переходять, не можуть ся ані відбивати ані заломлювати. І иньші свійства лучів Рентгена і катодальних можна пояснити на підставі тої теорії.

Лучі Бекереля можна зачислити до лучів катодальних і Рентгена тому, бо так само лучі X як і катодальні ділають фотографічно, флюоризуючо, не підлягають правам відбитя, заломлення ані поляризації. За подібністю лучів X а Бекереля промовляє єще й то, що одні і другі не суть однородні. Різнородність лучів Рентгена є добре знана, що доказує хочби то, що в техніці відріжняє ся тверді і м'які рурки Crookes'a, що служать до витвореня лучів Рентгена. Лучі виходячі з рурок твердих мають велику спосібність проникання і задля тої причини дають на екрані не досить ясні образи пр. скелету, бо ту і кости суть для них прозорачні. Рівно-ж і дуже м'які суть невідповідні, бо знова вглитані мясними частями не відграничають ся остро на загальнім тлі. У лучів Бекереля відповідають твердим руркам лучі раду, а м'яким лучі польбону.

Однак між лучами Рентгена а Бекереля є і основна різниця, а то та, що лучі Рентгена не дізнають відхилення в полі магнетнім, підчас коли лучі Бекереля як і катодальні улягають діланю поля магнетного, бо так і повинно бути на підставі теорії Sutherlanda. Curie знайшов в своїх дуже численних дослідах, що рад має два роди лучів і то одні відхиляють ся, другі не відхиляють ся в полі магнетнім та підлягають тм самим правам, що і лучі катодальні. Різнородність та зовсім не псує аналогії. Знаною є річею, що в рурках Крукса (Crookes-a) лучі Рентгена творять ся всюди там, де лучі катодальні спотикають поверхність цїпкого тіла. З другої сторони досліди Sugnasa виказали, що коли лучі X напотикають поверхність сталу, поверхність та стає ся жерелом лучів, котрі після найновіших результатів Curie і Sugnasa принаймьєше в часті суть катодальними. Поверхність проте, коли єї спотикають лучі катодальні, видає лучі X і на відворот, так що в безпосереднім сусідстві сталої поверхності не можуть бути одні лучі без других.

Що до істоти лучів Бекереля ставлено також різнородні гіпотези.

Марія Склодовска-Curie подає в одній з своїх розправ гіпотезу, що взагалі просторонь проникають лучі, подібні до лучів X, а ті падаючи на якісь тіла о високім тягарі атомовім, як тор, уран і т. д. улягають поглищеню; відтак висилають ті тіла лучі другого-рядні, котре власне суть лучами Бекереля. Однак дослі Elster-a і Geitla дають результати суперечні повисшій гіпотезі.

Вкінці лишаєсь питанє що до жерела енергії тіл лучистих, котре доси поки що належить уважати за отверте. Відомо, що при висиланю тих лучів не заходить жадна в очі впадаючи зміна так в самих тілах лучистих як і в оточеню. Длятого Марія Curie була тої гадки, що ті лучі суть винятком від права термодинамічного Карнота. Однак поки що нема причини ані рації захитувати правом усталеним в науці і добачувати в тих явищах незгоди з другою засадою термодинаміки, після котрої систем о температурі незмінній не може достарчити енергії, если єї ні звідки не одержує, але радше треба припустити, що то освободжує ся енергія в наслідок змін хемічних, мимо що маса сама так мало тратить на тім, що треба би мільонів лїт, щоби можна ту страту змірити нашими прирядами. Бо і висилана ту скількість енергії є незначна в порівнаню з тими, які висилають дрібні навіть процеси хемічні.

Теория матеріялістична лучиста здає добре справу з тих явищ. Однак сли єї прийняти, мусить ся прийняти також, що матерія лучиста не є в звичайнім стані хемічним. Атом в тім случаю не

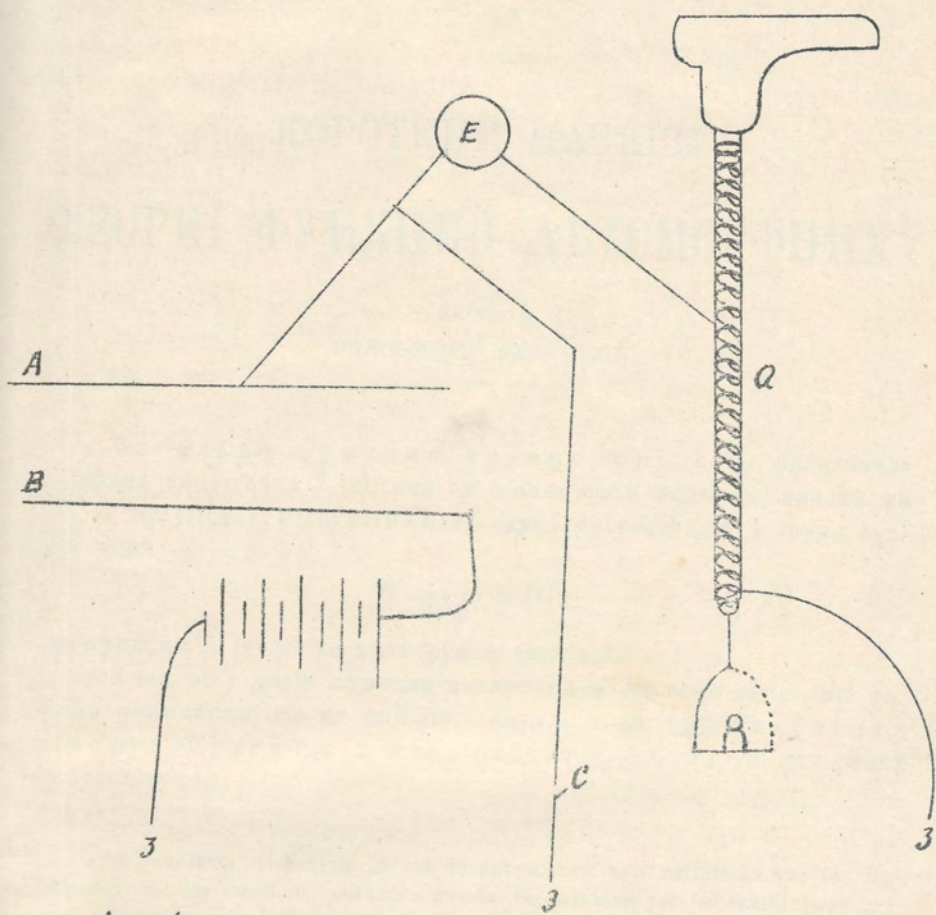
є неподільний, коли єго части суть вислані яко лучі. Матерія лучиста підлягає переміні хемічній і та то переміна є жерелом енергії лучистости, але не є то переміна хемічна звичайна, бо атом сам улягає змінї. Впрочім є ту ясним, що если лучистість є наслідком переміни матерії, то переміні підлягати мусить сам атом, наколи лучистість є явищем атомовим.

З короткого того зіставлення найновіших дослідів над лучами Бекереля, видно, що як справа доси стоїть, трудно рішити ся за одною або другою теорією тих нових лучів, бо аж дальше систематичне поглиблене власностей нових тих лучів буде становити справдішний крок в перед: тільки тоді дасть ся пізнати залежність лучів катодальних з одної а лучів Бекереля і Рентгена з другої сторони в правдивім сьвітлі, а тим самим рішить ся питанє що до їх істоти і походження.

Тернопіль в жовтні 1900.

Важніша література.

- M. Curie (Comptes rendus de l' Academie, Paris CXXIX, 714, 1899).
 Demarçay (C. R. CXXIX, 716, 1899).
 Becquerel (C. R. CXXIX, 996, 1205, 1899).
 M. Curie (C. R. CXXX, 73, 76, 1900).
 W. Sutherland (Phil. Mag. 47, 269, 1899).
-



φir 1.

КОРОТКИЙ НАЧЕРК ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ АВТОМОРФНИХ*)

НАПИСАВ
ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦЬКИЙ.

Загальна функція автоморфна є то однозначна функція аналітична $F(z)$, яка не змінює своєї вартості, наколи ми до її аргументу стосувати-мем якусь субституцію з групи субституцій:

$$G = (z, f_\alpha(z)),$$

де функція $f_\alpha(z)$ може мати різне значіння.

З тих всіх родів функцій автоморфних ми займемся лиш такими функціями, що не змінюють ся для т. зв. груп нетяглих або груп Фухса (як їх зове Poincaré), себ-то груп, утворених з субституцій:

*) Важніша література до сеї теорії містять ся в слідуючих творах: Poincaré: Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par les substitutions linéaires (Math. Annalen XIX); той-сам: Théorie des groupes fuchsien Acta matem. I. pag. 1. i pag. 193. i т. III. (Mémoire sur les groupes kleinéens). Rausenberger: Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen. Biermann: Theorie der analyt. Functionen ст. 409 et sqts.; той-сам: Zur Theorie der Fuchs'schen Functionen (Sitz. Berichte der k. Akad. der Wissensch. Bd. XCII, Abth. II). Picard: Traité d'Analyse т. I. ст. 435 et sqts. i т. II. ст. 268 et sqts. Klein-Fricke: Elliptische Modulfunctionen. Fricke u. Klein: Vorlesungen ü. Theorie der automorphen Functionen Bd. I, дальше різні розвідки Кляйна в Mathem. Annalen; Forsyth: Theory of Functions. Пор. також Левицький: Група модулова (Справозданє академічної гімназії у Львові 1895) і Wstęp do teoryi elipt. funkcij modułowych (Prace mat. fiz. XIII, Варшава).

$$S_n z = \left(z, \frac{\alpha_n z + \beta_n}{\gamma_n z + \delta_n} \right),$$

де сочинники є числа дійсні або зложені.

Очевидна є річ, що група G може бути утворена з ітерацій одної лише субституції $Sz = \left(z, \frac{az + b}{cz + d} \right)$, отже $G = (1, Sz, S^2z, S^3z, \dots)$ і тоді маємо функцію з одною субституцією основною, або група є утворена з двох субституцій перемінних основних:

$$Sz = \frac{az + b}{cz + d}, \quad Tz = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1},$$

отже
$$G = (S^\alpha T^\beta z, T^\alpha S^\beta z), \quad \alpha \geq \beta,$$

або таких основних субституцій може бути більше, а тоді функція називаєсь після Poincaré функцією Фухса.¹⁾

Заки приступимо до груп і функцій, які не змінюють ся при субституціях даної групи, перейдім по коротці важнійші свойства субституції Sz .

$$\text{Субституція } Sz = \left(z, \frac{az + b}{cz + d} \right),$$

де $z = x + iy$, а сочинники є числа дійсні або мнімі.

Так як свойства ті подав я в наведених мною розвідках, проте повторю їх тут лиш дуже коротко.

1. Наколи напишемо субституцію сю в виді:

$$t = \frac{az + b}{cz + d}, \quad 1)$$

отже рівнянем тим зв'яжемо площу (t) і (z), то те підставлене відтворює одну площу в другу і то так, що обі ті площі є до себе подібні в елементарних (безконечно малих) трикутниках, значить ся відтворене є частинкове [conform] (доказ пор. в другій мой розвідці). Є оно далі ізогональне, значить ся кут утворений між двома перетинаючими ся кривими на одній площі остає по відтворенню без зміни; є оно в кінці і колове, бо коло на одній площі переходить через сю субституцію на коло і на другій площі.

2. Наколи возьмем місто двох площей ту саму площу (z) і будем її перетворювати в ній самій, то кожда її точка перейде в иньшу, лиш т. зв. точки подвійні, визначені рівнянем:

¹⁾ Докладнішу дефініцію функцій Фухса і Кляйна опісля подамо.

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

спадуть на себе; в се точки:

$$\alpha, \beta, = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c} \quad 2)$$

Таких точок є дві; лиш на случай:

$$(a - d)^2 + 4bc = 0 \quad 3)$$

обі ті точки спадають на себе і маєм лиш одну точку подвійну.

При помочи тих точок подвійних можемо субституції нашій надати вид (пор. згадану мною роботу ¹⁾):

$$\frac{t - \alpha}{t - \beta} = K \frac{z - \alpha}{z - \beta}, \quad 4)$$

де K є т. зв. множителем субституції:

$$K = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}, \quad 5)$$

або:

$$\frac{t - \beta}{t - \alpha} = K' \frac{z - \beta}{z - \alpha},$$

де:

$$\left(\sqrt{K} + \sqrt{K'} \right)^2 = \frac{(a + d)^2}{ad - bc} \quad 6)$$

Наколи возьмем точки безконечно близькі точки α , т. є:

$$t = \alpha + \tau, \quad z = \alpha + \zeta,$$

то по розвиненню в формі 4) дістанемо:

$$\frac{|\tau|}{|\zeta|} = |K|, \quad 7)$$

в такім отже відношенню остають точки безконечно близькі до точки подвійної.

3. Наколи положимо:

$$Sz = t_1, \quad S^2 z = t_2, \quad \dots, \quad S^m z = t_m \quad 8)$$

то ітерація послїдна має значїне:

¹⁾ Пор. Lewicki: Wstępi do teoryi funkcij eliptycznych modułowych loc. cit.

$$\frac{t_m - \alpha}{t_m - \beta} = K^m \frac{z - \alpha}{z - \beta} \quad 8)$$

Відвортна субституція дасть нам:

$$\frac{z - \alpha}{z - \beta} = \frac{1}{K} \frac{t - \alpha}{t - \beta} \text{ і т. д.}$$

або коли напишемо t_{-1} місто z , а z місто t , то дістанемо:

$$\frac{t_{-m} - \alpha}{t_{-m} - \beta} = \frac{1}{K^m} \frac{z - \alpha}{z - \beta} \quad 9)$$

Наколи вернем до первісної точки, т. є.:

$t_m \equiv z$, $K^m = 1$, то субстисуція має період m , т. є.:

$$K = e^{\frac{2\pi i}{m}}$$

Наколи: $K=1$, $\alpha = \beta$, $(a-d)^2 + 4bc=0$, субст.: є параболічна.

„ $K>1$, $\alpha \geq \beta$, $(a-d)^2 + 4bc > 0$, „ є гіперболічна.

„ $K=e^{\sigma i}$, $|K|=1$, $(a-d)^2 + 4bc < 0$, „ є еліптична.

„ $K=re^{\sigma i}$, $r > 0$, субст.: є льоксодромічна.

Субституція еліптична, де:

$$\sigma = \frac{m}{n} 2\pi \left(\frac{m}{n} \text{ дроб істий} \right)$$

має період n , бо:

$$\frac{t_n - \alpha}{t_n - \beta} = \frac{z - \alpha}{z - \beta}, \quad t_n \equiv z,$$

наколиж $\frac{\sigma}{2\pi} = e$ (невиміриме), то:

$t_m \equiv z$ доперва для $m = \infty$ т. є. по довершенню безконечно многого числа ітерацій; субституція еліптична є тоді інфінітезімальною.

Субституція гіперболічна і льоксодромічна — як легко ся можна пересвідчити — не є ані періодичні, ані інфінітезімальні, а в субституції параболічній, якій можна дати вид:

$$\frac{1}{t - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + \frac{4c}{2(a+d)} \quad 10)$$

$$\varepsilon \quad t_m \equiv \alpha \Big|_{m=\infty} \quad \text{і} \quad t_{-m} \equiv \alpha \Big|_{m=\infty}$$

т. є.: точки ті зміряють до точки подвійної α .

4. Група, де не входять субституції еліптичні інфінітезімальні, є нетягла, т. є. наколи якусь точку $z = x + iy$ піддамо субституції групи, то ся точка перейде на иньшу, яка не лежить в окруженю даної точки. Точки, де група тратить нетяглість, є точками особливими групи.

Наколи сочинники a, b, c, d є дійсні, то група тратить нетяглість на цілій осі перворядній і вї безпосередно близькім окруженю (пор. мою роботу про групу модулову); всюди над осію xx є нетягла крім ту і там порозкиданих точок, які належать до субституцій еліптичних групи.

5. В субституції Sz можна все довести до того, щоби вї модуль

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1; \text{ бо наколи:}$$

$$ad - bc = \mu', \mu' \leq -1, \text{ то положім:}$$

$$\mu' = (\sqrt{\mu'})^2 = \mu^2; \text{ дістанем:}$$

$$\frac{a}{\mu} \frac{d}{\mu} - \frac{b}{\mu} \frac{c}{\mu} = 1 \text{ і ті вирази } \frac{a}{\mu}, \dots \text{ берем за сочинники.}$$

Наколи $\mu' = -1$, то берем:

$$bc - ad = +1, \text{ т. є. берем субституцію:}$$

$$t' = \frac{cz + d}{az + b}.$$

6. Щоби перевести геометрично відтворене точки z на точку t на тій самій площі, беремо:

$$\begin{aligned} z' = t - \frac{a}{c} &= \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} = \frac{bc - ad}{c^2 \left(z + \frac{c}{d}\right)} = - \frac{1}{c^2 \left(z + \frac{c}{d}\right)} = \\ &= - \frac{1}{c^2 \xi} = \frac{\mu^2}{\xi}, \quad \mu^2 = - \frac{1}{c^2}, \quad \mu = k^2 e^{2\gamma i} \end{aligned}$$

Точкою зеровою площі ξ є 0; наколи маємо дану точку $z(\xi)$, то дістанемо z' , наколи поведемо через 0 просту PP під кутом γ (фіг. I), а з 0 лучем k зачеркнемо коло; точку z відбиваємо в протистій PP яко точку z_1 а далі відвертаємо z_1 через коло (k) на

точку z' ; а то $t = z' + \frac{a}{c}$, то наколи на площі (ху) маємо точку $\frac{a}{c}$, то з z' провадимо відтинок $\neq \frac{a}{c}$ і дістанемо t . (Узасаднене сего способу конструкції гл. мою розвідку про групу модулову, де є подана конструкція для субституції $-\frac{1}{z}$.)

Маємо ту отже три рухи: відбите в простій PP , відвернене образу в колі і пересунене, Poincaré доказав однак, що ті три рухи заступити можна двома відверненнями в двох колах, але лиш для трох перших родів субституції (для льюксодромічної ні).

7. Напишім субституцію $t = \frac{az + b}{cz + d}$ в формі:

$$ctz + dt - az - b = 0$$

і возьмім чотири пари відповідних точок t і z , то дістанем:

$$ct_1 z_1 + dt_1 - az_1 - b = 0$$

$$ct_2 z_2 + dt_2 - az_2 - b = 0$$

$$ct_3 z_3 + dt_3 - az_3 - b = 0$$

$$ct_4 z_4 + dt_4 - az_4 - b = 0$$

а з відси через елімінацію сталих a b c d дістанем:

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_4} \cdot \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} \quad 11)$$

Виберім на площі z довільні точки $(\alpha \beta)$ і спряжені з ними $(\alpha' \beta')$, то на пл. t відповідять їм $(\gamma \delta)$ і спряжені $(\gamma' \delta')$. Наколи то вставимо в 11), дістанемо:

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'} \cdot \frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'} = \frac{\gamma - \gamma'}{\gamma - \delta'} \cdot \frac{\delta - \delta'}{\delta - \gamma'}$$

а Poincaré значить се:

$$(\alpha \beta) = (\gamma \delta) \quad 12)$$

Poincaré впроваджує ще одну реляцію. Наколи на пл. z возьмемо точки $(\alpha \beta)$ такі, що часть дійсна

$$\Re(\alpha) < \Re(\beta)$$

і наколи через ті точки і спряжені з ними поведемо коло (Fig. II), яке вісь xx перетинає в точках h і k , то Poincaré творить виражене:

$$\frac{\alpha - h}{\alpha - k} \cdot \frac{\beta - k}{\beta - h} = [\alpha \beta].$$

Наколи на колі возьмем еще точку γ , то дістанемо :

$$[\alpha \gamma] = \frac{\alpha - h}{\alpha - k} \cdot \frac{\gamma - k}{\gamma - h}$$

$$[\gamma \beta] = \frac{\gamma - h}{\gamma - k} \cdot \frac{\beta - k}{\beta - h},$$

а з відси :

$$[\alpha \gamma] [\gamma \beta] = [\alpha \beta] \quad (13)$$

При помочи тих реляцій найдемо :

$$(\alpha \beta) = \frac{4 [\alpha \beta]}{[1 + [\alpha \beta]]^2}, \quad (\gamma \delta) = \frac{4 [\gamma \delta]}{[1 + [\gamma \delta]]^2},$$

а що :

$$(\alpha \beta) = (\gamma \delta),$$

то дістанемо реляцію :

$$[\alpha \beta] = [\gamma \delta] \quad (14)$$

8. Наколи $\alpha \equiv z$, $\beta \equiv z + dz$ (отже α і β безконечно близькі), то тоді :

$$\begin{aligned} [z, z + dz] &= \frac{z - h}{z - k} \cdot \frac{z - k + dz}{z - h + dz} = \\ &= \left(1 + \frac{dz}{z - k}\right) \left(1 - \frac{dz}{z - h} + \dots\right) = 1 + dz \left[\frac{1}{z - k} - \frac{1}{z - h}\right]. \end{aligned}$$

Наколи $\sphericalangle ho\alpha = \sphericalangle hoz = \varphi$, то :

$$dz = \left| dz \right| e^{(\varphi - \frac{\pi}{2})i} = -i \left| dz \right| e^{\varphi i},$$

а що :

$$\frac{1}{z - k} - \frac{1}{z - h} = - \frac{h - k}{(z - h)(z - k)} = - \frac{2r}{(z - h)(z - k)},$$

то :

$$[z, z + dz] = 1 + \frac{|dz|}{y}$$

Poincaré називає інтеграл $\int_k \frac{|dz|}{y}$ браний по луку k якоїсь кривої, L тої кривої, а $\iint \frac{dx dy}{y^2}$, браний з огляду на часть площі, замкненої якимсь контуром, S того поля.

Наколи $z = x + iy$, $t = \xi + i\eta$, а луки k і k' кривих собі відповідають, то так як:

$$[z, z + dz] = [t, t + dt],$$

то також:

$$\int \frac{|dz|}{y} = \int \frac{|dt|}{\eta} \quad (15)$$

і:

$$\iint \frac{dx dy}{y^2} = \iint \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} \quad (16)$$

т. є: два відповідні луки відповідних кривих мають однаке L , а два відповідні поля однаке S .

Наколи:

$$t = \xi + \eta i = \frac{az + b}{cz + d},$$

$$z = x + iy$$

то часть другорядна рівнає ся части другорядній, отже:

$$\frac{\eta}{y} = \frac{1}{(cx + d)^2 + c^2 y^2}.$$

З другого боку:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{(cz + d)^2}, \text{ отже по виконанню:}$$

$$\left| \frac{dt}{dz} \right| = \frac{1}{\left[\sqrt{(cx + d)^2 + c^2 y^2} \right]^2} = \frac{1}{(cx + d)^2 + c^2 y^2},$$

отже:

$$\left| \frac{dt}{dz} \right| = \frac{\eta}{y}. \quad (17)$$

9. Наколи возьмем групу субституцій утворену з ітерацій та добутків одної або більше основних субституцій, і ті всі субституції

пристосуєм до всіх точок площі z , то покаже ся, що на площі (z) найде ся поле замкнене т. зв. фундаментальний (основний) район такий, що яка-небудь субституція примінена до якої-небудь точки его випrowadжує ту точку поза сей район; всі місця того району по приміненю одної субституції групи найдуть ся також в сї в иньшій рівнож замкненім районі; по приміненю другої субституції групи всі точки району основного найдуть ся знов в иньшій замкненім районі і т. д., ціла площа розпаде ся на ряд відповідаючих собі районів, так що основний район зовсім вистарчає до пізнання і схарактеризованя групи. — При таким поділі площі на райони бере ся тільки додатну півплощу (горішню), бо все, що ся діє під осню xx , поветає через відбите горішньої півплощи в осі xx .

Такий поділ для групи модулової о двох основних субституціях з дійсними та цілковитими сочинниками перевів я в розвідці про групу модулову¹⁾; подібний поділ можнаби перевести для групи з одною субституцією основною (площа розпаде ся тоді на 3 райони рівноважні). Поділ представить ся дуже гарно, наколи по довершеню поділу на площі xx відібемо его — як Кляйн робить — на площі $t = \frac{az + b}{cz + d}$; тоді пр. для групи модулової вісь xx перейде на коло, а в колі тим відтворять ся ціла півплоща.

По тих загальних увагах про райони основні перейдім до районів основних групи з кількома основними субституціями, с. в. групи Фухса і їх власностей.

Райони спеціальних груп Фухса.²⁾

Спеціальна група Фухса є утворена з кількох основних субституцій типу $\left(z, \frac{a_s z + b_s}{c_s z + d_s} \right)$, де a_s, b_s, c_s, d_s є числа дійсні які-небудь, такі що їх модуль $\left| \begin{matrix} a_s & b_s \\ c_s & d_s \end{matrix} \right| = 1$.

До такої групи мусить належати район фундаментальний (основний), т. є. такий якийсь район замкнений, що кожда его точка z за приміненем якої-небудь субституції сеї групи виходить поза сей район. Сей район, а проте і всі райони, які з него вийдуть через

¹⁾ Пор. Левицкий: группа модулова loc. cit.

²⁾ Ціла та теорія в нарисі містить ся у Poincaré: Théorie des groupes fuchsien (Acta mat. m. I.).

різні підставлення, будуть творити continuum; площа ціла (очевидно берем — як вище сказано — лиш додатну півплощу) розпадає ся на райони R_s ($s=0, 1, 2, \dots$) такі, що район R_s відповідає якійсь субституції $f_s(z) = \frac{a_s z + b_s}{c_s z + d_s}$, (a_s, b_s, c_s, d_s дійсні).

1. Приймім R_0 (Fig. III) за район основний, то всі лінії, які его замикають, такі, що до них прибуває иньший район R_s , називають ся боками (пр. $\lambda_p, \lambda_q, \dots$) і то першої категорії (рода, Poincaré), наколи они не є частинами осі xx , а другого рода (категорії), наколи они є частинами осі xx (пр. a б).

Наколи возьмемо якусь точку z на боці λ_p , то она піддана субституції $f_p(z)$ перейде на ограничене району R_p , отже $f_p(z)$ належить до обводу району R_p . Наколи тепер точку z (на боці λ_p) зачислимо до району R_p і застосуємо до неї відворотну субституцію $[f_p(z)]^{-1} = f_{-p}(z)$, то дістанемо точку на боці λ_{-p} ; точка та буде належати і до R_0 і до району R_{-p} . Звідси слідує, що до боку λ_p першого рода найде ся все в районі R_0 другий відповідний бік λ_{-p} такий, що $f_p(\lambda_{-p}) = \lambda_p$, а $f_{-p}(\lambda_p) = \lambda_{-p}$.

Такі два боки λ_p і λ_{-p} є після Poincaré спряжені.

Наколи $R_p \equiv R_{-p}$, т. є. $f_p(z) = f_{-p}(z)$, або $[f_p(z)]^2 = z$, або $\lambda_p \equiv \lambda_{-p}$, то субституція $f_p(z)$ є еліптична о періоді 2, а точка z на боці λ_p через ту субституцію посує ся лиш по тім самим боці; з того слідує, що такий бік (позаяк субституція є еліптична) складає ся з двох боків, які творять лук кола розділений точкою подвійною α ; половина того боку з одної сторони точки α буде λ_p , половина з другої сторони точки α буде λ_{-p} ; такий бік є проте лиш мнимо поєдинчий, бо точка α на ним є вершком району R_0 . Район R_0 має проте паристе число спряжених боків першого рода.

Боки другого рода не є з собою спряжені; бік ab не може ніяким чином перейти в бік cd , бо колиб пр. точка z на ab відповідала точці z' на cd , тоби і їх безпосередні окруження δ і δ' відповідали собі (бо точки по над осію відповідають точкам по над осію), а се неможливо, бо в районі R_0 нема точок рівноважних.

Боки першого рода — а тих є число паристе $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{2n}$ — можна поділити на пари спряжені: λ_p і λ_{p+n} ($p = 1, 2, \dots n$); тоді:

$$f_{n+p}(\lambda_p) = \lambda_{n+p}, \quad f_p(\lambda_{n+p}) = \lambda_p.$$

Субституції f_p і f_{n+p} є проте відвортні. Вистане проте знати лиш половину субституцій, які район R_0 перетворюють в райони сусідні. Вистане знати:

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z) \quad (1)$$

то інші субституції є:

$$f_1^{-1}(z), f_2^{-1}(z), \dots, f_n^{-1}(z) \quad (2)$$

При помочи субституцій (1) можна район R_0 перемінити на який-небудь сусідний район.

Не тяжко доказати, що субституції ряду (1) є субституціями основними групи, а що група — як ми заклали — має скінчене число субституцій основних, проте n є числом скінченим, значить ся район має скінчене число боків I. рода.

В однім вершку сходять ся певне скінчене число районів; пр. в вершку S (Фіг. IV) сходять ся $R_0, R_1, R_2, \dots$; найже R_0 перейде через субституцію $f_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}(z)$ в R_1 , R_1 через $f_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}(z)$ в R_2 , — і т. д. в кінці вернемо до R_0 , отже:

$$f_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} f_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} f_{\alpha_3}^{\varepsilon_3} \dots f_{\alpha_\mu}^{\varepsilon_\mu}(z) = z \quad (18)$$

Подібні вираження дістанемо для кожного вершка в районі R_0 і дістанемо певну скількість реляцій між основними субституціями групи (т. зв. основні реляції групи) під заложенем, що з R_0 безпосередно переходить ся до R_1 , з R_1 до R_2 і т. д.

2. Наколи маємо район, якого боки є які-небудь лінії, то можна район сей замінити на район обмежений самими дугами коловими і то так, що боки другого рода остануть боками другого рода, а боки першого рода будуть дугами о середоточках на осі xx . Се легко зрозуміти, бо 1^о можна з одної сторони кавалок району відкинути, а з другого боку додати кавалок рівноважний, а 2^о через кінці одного боку можна завжди повести дугу кола о середотці на осі xx , а так само через кінці відповідного спряженого боку; через се повстануть між одним боком спряженим а дугою кола і між другим боком спряженим а другим дугою рівноважні поля, з яких одно можна відкинути; сим способом район дістане самі колові обмеження. В той сам спосіб можна район, якого боки ся перетинають самі, замінити на район о боках неперетинаючих ся.

Район так уформований є зложений з самих кіл нормальних, зве ся проте після Poincaré районом нормальним.

3. Возьмим тепер в так унормованім районі два боки спряжені $\lambda_p = AB$ і $\lambda_{-p} = CD$, то:

$$f_{-p}(\lambda_p) = \lambda_{-p}.$$

Точці z на боку λ_p відповідає на λ_{-p} точка t так, що:

$$t = f_{-p}(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \text{ дійсне})$$

або як в уст. 5 попереднього розділу:

$$z' = t - \frac{a}{c} = -\frac{1}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} = -k^2 \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.$$

Наколи напишемо:

$$z + \frac{d}{c} = r_z e^{\varphi_z i}, \quad z' = r_t e^{\varphi_t i},$$

то:

$$r_z e^{\varphi_z i} = -k^2 e^{-\varphi_t i}$$

а з відси — так як части другорядні мусять бути рівні — є:

$$\varphi_z = \pi - \varphi_t, \quad \pi = \varphi_t + \varphi_z.$$

З відси слідує, що наколи z порушає ся від A до B , то на відворот t порушає ся від D до C , отже два спряжені боки відповідають собі напрямками протинимй; вершкови A відповість вершок D , вершкови B відповість вершок C .

4. Перейдім тепер до угруповання вершків (очевидно будем узглядняти лиш райони нормальні).

Возьмим якийсь район R_0 (Фіг. V), то вершки, які розділяють два боки першого рода (пр. B, C, D) називаємо вершками першого рода; вершки на осн xx , де сходять ся два боки першого рода (пр. E) є вершками другого рода, а вершки, де сходять ся боки першого і другого рода (пр. F, G, H, A) є вершками третього рода.

Наколи ми вийдем від якогось вершка першого рода (пр. B) і зачнем іти по якімсь боці в якімсь напрямі, то по спряженім боці треба іти в напрямі протинім; відповідні вершки — як знаєм — відповідають собі в протинім порядку, тож переходячи так вершки першого рода вернем знов до початкового вершка. Ті вершки першого рода, які ми в тім окружаню району перейшли, утворють цикль першого рода, все замкнений.

Наколи вийдем від вершка другого рода (пр. Е), то всі відповідаючі собі вершки є або другого або третього рода. Наколи вершків третього рода не ма зовсім, то і ту цикль вершків — який буде зложений з самих вершків другого рода — т. є. цикль другого рода буде замкнений. Наколиж є вершки третього рода, то процес окружання району мусить десь задержати ся, бо боки другого рода собі не відповідають, до початкового вершка не вернемо і дістанемо отвертий цикль третього рода.

Наколи боків другого рода є 1, то боки ті мають 21 вершків, на цикль іде по два вершки, отже циклів третього рода є тільки, кілько район має боків другого рода.

5. Перейдім тепер до кутів району і то до кутів при вершках першого рода $\left(\text{бо кут при вершку другого рода є } O, \text{ при вершку третього рода } \frac{\pi}{2} \right)$.

Ту докажемо важне твердження, яке подав Poincaré, а іменно, що сума кутів циклю першого рода в районі основнім мусить рівнати ся 2π , поділеному через число ціле.

Наколи в районі R_0 (Фіг. VI) вершки першого рода є $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$, які творять цикль замкнений $(A_1, A_2, A_3, A_4 \dots A_1)$, то бокови λ_α , який виходить з A_1 відповідати-ме спряжений бік $\lambda_{-\alpha}$, що кінчить ся в a_2 , так що $f_\alpha(\lambda_{-\alpha}) = \lambda_\alpha$ ¹⁾; λ_α належить рівночасно до сусіднього району R_α (до котрого і A_1 належить). Наколи другий бік, що виходить з A_2 , є λ_τ , то він через субституцію f_α перейде на бік виходячий також з A_1 , а належачий до району R_α , так що $f_\alpha(R_0) = R_\alpha$, причім $\nleftrightarrow A_2$ відтворить ся в районі R_α при вершку A_1 , бо субституція є — як знаєм — ізогнальна.

Подібно через субституцію f_β перейде район R_0 на сусідній район R_β , а третій кут при третім вершку цикля A_3 відтворить ся при вершку A_1 і т. д., аж вкінці по довершенню ряду субституцій і по вихісноваю цілого циклю вернем назад до S_0 , так що $f_\alpha f_\beta f_\gamma \dots (R_0) = U(R_0) = R_0$.

Наколи перейшовши цілий цикль $(A_1, A_2, A_3 \dots A_1)$ не дістанем R_0 , але $U(R_0) = R_\mu$, де R_μ має вершок A_1 , то будем доконувати тільки оборотів, аж прийдем до R_0 , так що:

$$U^p(R_0) = R_0. \quad 19)$$

¹⁾ Кляйн доказав, що субституція заміняюча λ_α на $\lambda_{-\alpha}$ мусить бути все параболічна, а ніколи гіперболічна.

Очевидно, що тепер — так як ніякі два кути не накриваються — є:

$$(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) p = 2\pi,$$

отже:

$$\sum_{\nu=1}^n A_{\nu} = \frac{2\pi}{p} \quad (20)$$

і твердження Poincaré є доказане.

6. З реляції 19) виходить, що:

$$U^p = 1.$$

Є се реляція основна групи; таких реляцій є стільки, кілько циклів першого рода є в основнім районі.

Субституція U є еліптична о періоді p , отже група в оточенню вершків першого рода не тратить нетяглости.

Для циклю другого рода є очевидно:

$$\sum_{\nu=1}^n A_{\nu} = 0 \quad \text{або:}$$

$$\sum A_{\nu} = \frac{2\pi}{p} \Big|_{p=\infty},$$

с. з. що докола вершків другого рода маємо $pn = \infty$ районів, отже в оточенню вершків другого рода група тратить нетяглість.

Для циклю третього рода лиш кути скрайні є по $\frac{\pi}{2}$, кути середні (в вершках другого рода) є 0, отже для такого цикля

$$\sum A_{\nu} = \pi,$$

значить ся в кождім вершку є скінчене число районів, отже в оточенню вершків третього рода група задержує характер нетяглий.

7. Наколи зреасумуем усе, то дістанемо ось-що: •

Основний район спеціальної групи Фухса є обмежений луками кіл о середоточках на осі xx ; декотрі з тих боків можуть бути відтинками осі xx або відтинками до неї прямовісними. Боки першого рода виступають в числі паристім і є парами спряжені (λ_p і λ_{-p}),

так що $f_p(\lambda_{-p}) = \lambda_p$. Така субституція змінює R_0 на R_p , відділений від R_0 боком λ_p . Вершки ділять ся на циклі трох родів: в циклі першого рода сума кутів є $-\frac{2\pi}{p}$, в циклі другого рода 0, третього рода π . Райони одержані з R_0 не прикривають ані R_0 ані себе (навіть в частині), між ними нема перерви, а група, що належить до R_0 , є нетягла над осню xx , а лиш там, де R_0 має циклі другого рода, тратить на осн xx в вершках того циклі нетяглість. Субституції сеї групи не нарушають осн xx , тож коли R_0 має вершки на осн xx , то і другі райони мусять мати вершки на осн xx ; наколи R_0 не має вершків на осн xx , то і иньші райони не мають їх також.

Наколи будем мати якийсь район, котрого боки є луками кіл з середоточками на осн xx , а покаже ся, що хотяйби для одного циклі першого рода сума кутів була $\frac{2\pi}{p}$, але p не було би числом цілим, то до такого району група не належить.

Загальні групи Фухса.

Дотепер узглядняли ми групи утворені з субституцій основних: $S_\nu = \left(z, \frac{a_\nu z + b_\nu}{c_\nu z + d_\nu} \right)$, де $a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu$ були числа дійсні о модулі 1; (наколи числа ті були цілі, група була модулова). Були се спеціальні групи Фухса. — Наколи тепер введемо посвоячене площ 21) $t = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ є числа зложені і в повисшій групі вставимо субституцію 21) за z , то дістанемо загальну групу Фухса і площа z відтворить ся на площі t .

Наколи возьмем групу утворену з субституцій S_ν (ν і ту скінчене число), але що до сочинників $a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu$ не зробимо ніякого застереження (отже є се в загалі числа зложені) і до сеї групи застосуєм субституцію 21), то дістанем зовсім загальну групу, яку Poincaré зве групою Кляйна. Студія тих загальних груп є дуже трудна; перевів єї по частині Poincaré при помочи метод анальоґічних до метод геометрії неевклідової о трох розмірах¹⁾. В звязи з такими загальними групами стоїть поділ півпросторони на райони

¹⁾ Пор. Poincaré: Mémoire sur les groupes kleinéens (Acta matem. m. III).

о трох розмірах ¹⁾); но ми в се не входимо, а перейдем до загальних груп Фухса.

1. Очевидна є річ, що загальна група Фухса перетворює вісь xx на коло на площі t . Через добір $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ можна вісь xx замінити на коло о лучу 1, а о середоточці $t = 0$ так, щоби $t = 0$ відповідало якійсь точці над осію xx на площі z . Тоді райони $R_0, R_1, \dots$ пл. z перейдуть на райони $R_0', R_1', \dots$, що ся будуть містити в середині кола; коло се називає Фухс колом граничним, а Кляйя головним.

Група кола того не нарушує, лиш в єго середині переводить поділ на райони; поза колом дістанемо поділ, який повстане через відбите поділу внутрішнього в колі граничним.

Кожний район $R_0', R_1', \dots$ має боки колові, ортогональні до кола головного; і тут R_0' має боки першого і другого рода і вершки першого, другого і третього рода; так само є ту циклі трох родів.

Після сих циклів ділить Poincaré групи на 7 родин:

I.	родина:	R_0	має	лиш	циклі	Iого	рода.
II.	"	R_0	"	"	"	IIого	"
III.	"	R_0	"	"	"	IIIого	"
IV.	"	R_0	"	"	"	IIого і IIIого	"
V.	"	R_0	"	"	"	Iого і IIIого	"
VI.	"	R_0	"	"	"	Iого і IIого	"
VII.	"	R_0	"	"	"	всіх трох	родів.

Наколи в родині, де є циклі першого рода, є в всіх циклях $p = 1$, то родина є після Poincaré першого степеня, наколи хоч би одно $p > 1$, то родина є другого степеня.

Родини, де не ма циклів II рода, ніде не трять нетягlosti, противно родини, де такі циклі є, трять в деяких точках кола головного (зглядно осі xx) характер нетягlosti.

2. Возьмім тепер район R_0 з родини I, II або VI, то спряжений з ним район R_0' лежить під осію xx і не має з ним вспільного боку, — бо район R_0 не має боків другого роду — R_0 і R_0' не творять проте цілости.

R_0 має лиш $2n$ боків першого рода і q циклів замкнених (першого і другого рода). Наколи-мем уважати R_0 за поверхню

¹⁾ Пор. Picard: Traité d'Analyse I p. 451.

п'ястичну (Fig. VII), то можна її позгинати і постягати так, щоби боки спряжені відповідними точками впали на себе (то два боки утворять одну л'їню); дістанемо тоді поверхню, а на ній n л'їнь, які утворять одно пасмо розгалужене незамкнене; точки, де сходять ся кілька л'їнь, є вершками, а є їх тільки, що циклів. Л'їня АВ складаєсь з n гранок і q вершків, а що она є незамкнена, то поверхня, на яку перейшов район R_0 , є поверхнею з одним обмеженням (обмеженням), а її спійність (connexion) є:

$$N = 2p + 1^1),$$

де p (число ціле) є рядом (класом).

Зауважмо розширене твердження Euler'a:

$$S + W = K + 2 - 2p^2).$$

де S є число стін, K гранок, W вершків, то для R_0 $S = 1$, $K = n$ $W = q$, отже:

$$1 + q = n + 2 - 2p$$

$$p = \frac{n - q + 1}{2} \quad (22)$$

Така є класа родини I., II. і VI.

Для родини III., IV., V., VIII. район R_0 має боки другого рода, отже з районом спряженим R_0' творить одну цілість; Poincaré бере тому R_0 і R_0' за один район і обчисляє его класу (ряд), аналогічно як вище, з тою зміною, що ту л'їня АВ буде замкнена, отже $S = 2$, гранок K є $2n + m$ (n гранок з R_0 , n з R_0' , m боків другого рода), вершків W є ту $2q + m$ (q з R_0 , q з R_0' і m циклів третього рода); отже ту з твердження Euler'a вийде:

$$p = \frac{2n - 2q}{2} \quad (23)$$

і се є класа (ряд) родин III., IV., V., VII.

3. Наколи возьмем район з родини I., який цілий лежить над осію xx , то точки его при помочи субституцій групи можна приближати без кінця до осі xx , так що в родині I. райони дуже густо громадають ся над осію xx , але не на осі xx ; вісь xx є проте ціла л'їн'єю особливою тої родини. Те саме буде і для ро-

1) Пор. Appell et Goursat: Théorie des fonctions algébriques, стр. 229.

2) ibid. стр. 231.

дини II. і VI., які лиш вершками другого рода дотикають осі, бо довкола вершків другого рода громадить ся безконечне число районів, а в партіях вільних можна також безконечно приближати ся до осі xx .

В иньших родинях, де є боки другого рода, є на осі xx точки особливі, але ті є лиш ізольовані, бо на боках другого рода не має точок особливих.

Функції Фухса.

Є се функції автоморфні, що не змінюють ся, наколи до їх аргументу застосуєм субституції загальної групи Фухса. Аналогічно функції автоморфні з огляду на групу Кляйна будуть функціями Кляйна.

1. Возьмім коло головне о середоточці $z = 0$; в колі тім возьмім район R_0 і в ній точку z , то наколи довкола того z зачеркнемо коло k_0 (в районі R_0), то єму в відповіднім районі R_s відповість k_s довкола відповідної точки z_s .

$$\text{А що: } z_s = \frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}, \text{ де } \begin{vmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ \gamma_s & \delta_s \end{vmatrix} = 1,$$

$$\text{то: } \frac{dz_s}{dz} = \frac{1}{(\gamma_s z + \delta_s)^2}, \text{ а:}$$

$$\left| \frac{dz_s}{dz} \right| = \frac{1}{|\gamma_s z + \delta_s|^2} = \mu_s \quad (24)$$

де μ_s є лінійове збільшене елементарних лучків $|dz|$ і $|dz_s|$ через субституцію (z, z_s) . Квадрати тих елементів є елементами поверхні, начеркненої в z і z_s , отже μ_s^2 є збільшенем елементів поверхні в відповідних точках. Наколи отжеж возьмем:

$$\min \mu_s = m_s,$$

то поверхні колес:

$$\frac{k_s}{k_0} > m_s^2. \quad (25)$$

$$z_s = \frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s} = \infty \text{ для } z = -\frac{\delta_s}{\gamma_s}, \text{ отже субституція } \left(z = -\frac{\delta_s}{\gamma_s} \right) \text{ переносить точку в безконечність, а що } z_s = \infty \text{ ле-}$$

жить поза колом головним, а ніяка субституція групи не переносить точки поза коло головне, то точка $z = \infty$ і точка $z = -\frac{\delta_s}{\gamma_s} = P_s$ лежить поза колом головним; до кожної субсти-
 S_s належить така точка P_s .

2. Возьмім коло головне (K) і коло k_0 (Фіг. VIII) довкола точки z , а поза колом точку P_s , то тоді збільшене для точки z є:

$$\mu_s = \frac{1}{|\gamma_s|^2 \left| z + \frac{\delta_s}{\gamma_s} \right|^2} = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (z P_s)^2}$$

Для иньшої точки z' в колі k_0 є збільшене:

$$\mu_s' = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (z' P_s)^2},$$

а що лінія PP_s з усіх подібних ліній є найбільша, то:

$$m_s = \min \mu_s = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (PP_s)^2},$$

а

$$M_s = \max \mu_s = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (RP_s)^2},$$

отже:

$$\frac{M_s}{m_s} = \frac{(PP_s)^2}{(RP_s)^2} \quad (26)$$

Но понеже — як се очевидно —

$$\frac{PP_s}{RP_s} < \frac{GH}{JH} = \sqrt{c} \text{ (стала),}$$

то:

$$\frac{M_s}{m_s} \leq c, \quad M_s \leq m_s c,$$

$$\mu_s < M_s \leq cm_s,$$

а вставивши відповідні вартости дістанемо:

$$\frac{1}{|\gamma_s z + \delta_s|^2} \leq cm_s, \text{ або:}$$

$$\frac{1}{|\gamma_s z + \delta_s|^4} < c^2 \frac{k_s}{k_0},$$

а звідси:

$$\sum' \left| \gamma_s z + \delta_s \right|^{-4} < \frac{c^2}{k_0} \sum' k_s \quad (\gamma_s = 0 \text{ опускаєм}), \quad (27)$$

а що сума по правім боці дає поверхню майже цілого кола головного K , то сума по лівім боці, а тим більше сума $\sum' \left| \gamma_s z + \delta_s \right|^{-2m}$ ($m = 2, 3, 4, \dots$) є беззглядно збіжна.

Ціле те розумоване можна розширити і на случай $\gamma_s = 0$, т. є. для $P_s = \infty$ (якому в колі головнім відповідь $z = 0$), а тоді повна сума

$$\sum_s \left| \gamma_s z + \delta_s \right|^{-2m}$$

є беззглядно збіжна для всіх точок кола K .

По за колом сума та стаєсь рівна ∞ в точках P_s , а в інших точках $z \geq P_s$ сума та має значінє і є збіжна. Того доказувати не будем (се є майже очевидне, бо поодинокі вирази суми $\left| \gamma_s z + \delta_s \right|^{-2m}$ будуть для z по за колом k менші як для z в колі).

На обводі кола K сума та єсть збіжна для родин III., IV., V., VII. крім точок дійсно особливих, де стає ся розбіжна, бо в їх безконечно близькім оточеню находять ся точки P_s . Що так є, легко можна доказати.

Най ξ буде вершком з циклю другого рода (на обводі кола K), то там збігає ся безконечно много районів; район R_0 переходить на R_s — як знаєм — через субституцію параболічну (Кляйн) т. є.:

$$\frac{1}{t - \xi} = \frac{1}{z - \xi} + \alpha_\sigma \quad \sigma = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

Наколи субституцію ту будемо ітерувати, дістанемо з R_0 цілий ряд районів, які всі мають вершок ξ . Для $t = \infty$ є $z = P_s$, а тоді з 28) слідує:

$$z = P_s = \xi - \frac{1}{\alpha_\sigma}.$$

Наколи субституцію ітеруєм без кінця, то α_σ росте in inf., отже довкола ξ громадить ся безконечне число тих P_s . Q. e. d.

3. Poincaré узагальняє ¹⁾ сей ряд в сей спосіб, що бере довільну функцію раціональну $H(z)$ о місцях ∞ -них $a_1, a_2, \dots, a_p$.

¹⁾ Пор.: Math. Annalen, т. XIX.

Возьмим функцію $H\left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}\right)$, де $\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}$ є субституція групи, то місця ∞ -ні цієї функції є:

$$a_\mu = \frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s} \quad \mu = 1, 2, \dots, p.$$

Наколи

$$\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s} = f(z),$$

то навідворот:

$$z = \left[f_s(a_\mu) \right]^{-1} = f_{-s}(a_\mu).$$

f_{-s} є також субституція групи. Функція $H\left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}\right)$ — а є їх безконечне число — утворена з огляду на всі субституції групи має місця ∞ -ні $f_s(a_\mu)$.

Poincaré творить тепер функцію:

$$\Theta(z) = \sum_s H\left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}\right) (\gamma_s z + \delta_s)^{-2m} \quad (29)$$

яку називає функцією Θ — Фухса або Кляйна після того, чи група є групою Фухса чи Кляйна.

На всіх місцях z і їх оточеннях, таких що $z \geq a_\mu$, $z \geq f_s(a_\mu)$ і $z \leq P_s$ функція ся є збіжна беззглядно і одностайно, бо все можна зробити, щоби решта від далекого s почавши була менша як ϵ (довільно мале). Точки дійсно особливі групи (на обводі кола головного) є дійсно особливими точками функції $\Theta(z)$. — В деяких случаях можна точки a_μ і P_s так дібрати, щоби всі безконечности повідпадали, а тоді функція $\Theta(z)$ не має безконечностей місць ані в колі головнім ані по за ним.

Poincaré ділить функції Θ на родини після того, який район до них належить. Для функцій Θ родини I., II., VI. є обвід кола головного лінійю особливою — як каже Poincaré, для прочих родин знаходять ся на обводі кола головного лиш ізольовані місця особливі.

Возьмим функції Θ родини I., II., VI.; функцій тих по за коло перевести не можна, а що точці z по за колом відповідає точка $\frac{1}{z}$ в колі, то маєм властиво дві функції в колі K : $\Theta(z)_K$ і $\Theta\left(\frac{1}{z}\right)_K$.

Противно функції Θ прочих родин можна переводити по за коло, а функция $\Theta(z)_z$ дефініює одну функцию на площі z .

Наколи місце зерове функції находить ся в районі R_0 , то в R_0 не ма до него рівноважного місця зерового. Наколи місце зерове находить ся на боці першого рода, то рівноважне місце лежить також на боці першого рода; з таких двох місць зачисляем до району лиш одно. Так само, коли місцем зеровим є вершок першого рода, а в ним сходить ся g районів, а місце зерове є степеня n , то до одного района зачисляем місце зерове степеня $\frac{n}{g}$.

В загалі Poincaré приймає звичайно вершки першого рода за місця зерові, вершки другого рода за місця зерові першого степеня.

4. Возьмім функцию $\Theta(z)_K$ і належачий до неї район R_0 , який обводу кола головного дотикає лиш в декотрих точках. Повідти-наймо на хвилю вершки R_0 маленькими лучками і прийім після Poincaré, що по боках району не ма місць зерових, то тоді остануть лиш ті місця зерові для функції Θ , які лежать в самім районі. Тоді — як з теорії Cauchy звісно — є, наколи m_0 є скількість місць зерових, а m_∞ скількість місць безконечностних в контурі:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} dz = m_0 - m_\infty = E',$$

де за контур приймаєм R_0 з пообтинаними вершками. Наколиж в вершках району є ν місць зерових, то для функції $\Theta(z)_K$ вийде різниця місць зерових і безконечностних:

$$E = E' + \nu,$$

що по обчисленю інтеграла буде мало — після Poincaré — загальний вид:

$$E = m \left[n - 1 - \sum \frac{1}{p} \right] \quad (30)$$

де m є число, що характеризує функцию Θ (пор. 29), n скількість пар боків спряжених, p число, відносяче ся до поодиноких циклів (порівнай рівн. 20); сума відносить ся до всіх циклів.

Для функції $\Theta(z)_z$ (родн III., IV., V., VII.) за район треба брати — як знаєм — R_0 і спряжений з ним R_0' , то ту різниця:

$$E = 2m \left[n - 1 - \sum \frac{1}{p} \right] \quad (31)$$

5. Піддаймо функцію $\Theta(z)$ субституції групи:

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

то:

$$\frac{\alpha_s \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + \beta_s}{\gamma_s \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + \delta_s} = \frac{\alpha_\sigma z + \beta_\sigma}{\gamma_\sigma z + \delta_\sigma},$$

а тоді по підставленню в 29) випаде:

$$\Theta\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = (\gamma z + \delta)^{2m} \Theta(z) \quad (32)$$

значить ся функція Θ є лиш функцією псевдоавтоморфною.

Возьмім однак дві функції Θ_1 і Θ_2 , що належать до тої самої групи, то:

$$\Theta_1\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = (\gamma z + \delta)^{2m} \Theta_1(z)$$

$$\Theta_2\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = (\gamma z + \delta)^{2m} \Theta_2(z).$$

Іх квот:

$$\frac{\Theta_1\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)}{\Theta_2\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)} = \frac{\Theta_1(z)}{\Theta_2(z)} = F(z) \quad (33)$$

Та функція $F(z)$ є проте функцією автоморфною.

Очевидно що і функції автоморфні ділити ся будуть на родини, залежно від родини функцій Θ .

Наколи з тої самої групи возьмем функції

$$\Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_s \text{ з параметрами } m_1 m_2 \dots m_s$$

і функції $\bar{\Theta}_1 \bar{\Theta}_2 \dots \bar{\Theta}_s$ з параметрами $\bar{m}_1 \bar{m}_2 \dots \bar{m}_s$ і утворимо квот Іх добутків, то:

$$\frac{\Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_s}{\bar{\Theta}_1 \bar{\Theta}_2 \dots \bar{\Theta}_s} \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = (\gamma z + \delta)^{2\left(\sum_{v=1}^s m_v - \sum_{v=1}^s \bar{m}_v\right)} \frac{\Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_s}{\bar{\Theta}_1 \bar{\Theta}_2 \dots \bar{\Theta}_s}(z)$$

Наколи доберемо $\sum m_v = \sum \bar{m}_v$, то сей квот станесь за гальнійшою функцією автоморфною.

Місця зерові чисельника і безконечностні знаменника є місцями зеровими функції автоморфної, а місця безконечностні чисельника та зерові знаменника є її місцями безконечностними.

До функції Θ_ν належить E_ν , до $\bar{\Theta}_\nu$ $\bar{E}_\nu$,

$$\text{де:} \quad E_\nu = m_\nu \left[n - 1 - \sum \frac{1}{p} \right]$$

$$\bar{E}_\nu = \bar{m}_\nu \left[n - 1 - \sum \frac{1}{p} \right]$$

$$\text{В чисельнику:} \quad \sum E_\nu = M_0 - M_\infty \quad \}$$

$$\text{В знаменнику:} \quad \sum \bar{E}_\nu = \bar{M}_0 - \bar{M}_\infty \quad \}$$

де ті M мають значіння як повисше. Ріжниця:

$$\begin{aligned} \sum E_\nu - \sum \bar{E}_\nu &= (M_0 + \bar{M}_\infty) - (\bar{M}_0 + M_\infty) = \\ &= \text{сума місць зерових} - \text{сума місць безконечностних} = \\ &= \left(n - 1 - \sum \frac{1}{p} \right) \left[\sum m_\nu - \sum \bar{m}_\nu \right] = 0. \end{aligned}$$

Кожда функція має проте ту власність, що в районі R_0 сума місць зерових рівнає ся сумі місць безконечностних.

Кожда функція автоморфна приймає кождуюку-небудь вартість в районі R_0 тільки разів, кілька вартість 0 або ∞ .

Бо наколи $F(z)$ є функцією автоморфною, то і $f(z) = F(z) - C$ є такою функцією; $f(z)$ ставсь тільки разів безконечностію що $F(z)$, пр. n разів, то і зером став n разів, т. є. $F(z)$ приймає вартість C n разів.

6. Возьмім дві функції автоморфні, що належать до тої самої групи т. є. $F_1(z)$ і $F_2(z)$. Функція $F_1(z) = C$ на місцях $z_1 z_2 \dots z_m$ району R_0 ; на тих місцях приймає функція $F_2(z)$ вартості $C_1 C_2 \dots C_m$, різні між собою. Видко отже що до одної вартості функції $F_1(z)$ належить m вартостей функції $F_2(z)$, отже $F_2(z) = y$ є m -вартостнею функцією функції $F_1(z) = x$. Наколи сю залежність представимо рівнянем:

$$y^m + g_1(x) y^{m-1} + \dots + g_m(x) = 0.$$

то рівняння се буде алгебраїчне, а у буде алгебраїчною функцією х. Відворотно до одної вартости у належить п вартостей функції х, х є проте алгебраїчною функцією у.¹⁾

Між двома функціями автоморфними з тої самої групи заходить проте все неприводне рівняння алгебраїчне:

$$G \left(x^{(n)} y^{(m)} \right) = 0. \quad (35)$$

Так як всі вартости функцій х і у знаходять ся в районі R_0 , а функції ті є однозначними функціями кожної точки z , а район R_0 дасть ся — як знаєм — замінити на поверхню ряду p , то після теорії поверхний Riemann'a мусить бути рівняння 35) ряду p .

Наколи возьмем три функції автоморфні тої самої групи:

$$x = F_1(z), \quad y = F_2(z), \quad X = F_3(z),$$

то після попереднього будуть істнувати реляції:

$$G_1(Xx) = 0$$

$$G_2(Xy) = 0.$$

Рівняння ті яко неприводні не мають повтаряючих ся коренів X ; а коли так є, то сей корінь є раціональною функцією сочинників обох рівнянь, отже:

$$X = R(xy) \quad (36)$$

Кожда автоморфна функція є проте раціональною функцією яких-небудь двох функцій автоморфних з тої самої групи.

7. а. Возьмім тепер функцію явтоморфну:

$$F(t) = F \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right) = F(z),$$

то через різничкованє дістанемо ($\alpha\delta - \beta\gamma = 1$)

$$\frac{F'(t)}{(\gamma z + \delta)^2} = F'(z)$$

а з відси:

$$\left[F'(t) \right]^m = (\gamma z + \delta)^{2m} \left[F'(z) \right]^m,$$

¹⁾ Поп. Biemann: Zur Theorie der Fuchsschen Functionen (Sitz. Ber. der k. Akad. der Wiss. in Wien Bd. XCII, Abth. II).

а що:

$$\Theta(t) = (\gamma z + \delta)^{2m} \Theta(z),$$

то квот:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(t)}{[F'(t)]^m} &= \frac{\Theta(z)}{[F'(z)]^m} = \\ &= R(F(z), F_1(z)) \end{aligned}$$

(після 36), бо сей добуток є функцією автоморфною).

Отже функція псевдоавтоморфна виражає ся в сей спосіб через дві функції автоморфні, що:

$$\Theta(z) = [F'(z)]^m R(F, F_1) \quad 37)$$

б. Знаєм, що $G(F_1, F_2) = 0$.

Звідси через різничкування вийде:

$$\frac{\partial G}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial G}{\partial F_2} dF_2 = 0,$$

або:

$$\frac{dF_2}{dF_1} = - \frac{\frac{\partial G}{\partial F_1}}{\frac{\partial G}{\partial F_2}} = R_1(F_1, F_2),$$

де R_1 є функцією раціональною, отже між двома функціями автоморфними заходять звязь:

$$\frac{dF_2}{dF_1} = R_1(F_1, F_2) \quad 38)$$

в. Для функції автоморфної $F(z)$ маєм:

$$F'(t) = (\gamma z + \delta)^2 F'(z)$$

Наколи збудуємо вираженє:

$$\frac{F'''(t)}{F'(t)} - \frac{3}{2} \left(\frac{F''(t)}{F'(t)} \right)^2,$$

яке Cayley назвав шварццяном, а яке Кляйн значить: $[F(t)]_t$,

а Forsyth (Theory of Functions) через $\{F(t), t\}$ то дістанемо:

$$\frac{F'''(t)}{F'(t)} - \frac{3}{2} \left(\frac{F''(t)}{F'(t)} \right)^2 = (\gamma z + \delta)^4 \left[\frac{F'''(z)}{F'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{F''(z)}{F'(z)} \right)^2 \right],$$

а що:
$$\left[F'(t) \right]^2 = (\gamma z + \delta)^4 \left[F'(z) \right]^2,$$

то через поділене обох тих рівнянь дістанемо:

$$\frac{\left[F(t) \right]_t}{\left[F'(t) \right]^2} = \frac{\left[F(z) \right]_z}{\left[F'(z) \right]^2} \quad 39)$$

Шварцян функції автоморфної, поділений через квадрат похідної сеї функції, є функцією автоморфною.

А що між двома функціями артоморфними все заходить звязь алгебраїчна, тому кожда функція автоморфна сповняє рівнянє ріжничкове третього ряду:

$$G \left(F(z), \frac{\left[F(z) \right]_z}{\left[F'(z) \right]^2} \right) = 0. \quad 40)$$

8. Poincaré впроваджує далі¹⁾ так звані функції Z — Фухса. Називає він іменно n функцій:

$$Z_1(z), Z_2(z), \dots, Z_n(z)$$

тоді функціями Z Фухса, наколи сповняють реляцію:

$$Z_\lambda \left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s} \right) = A_{1\lambda}^{(s)} Z_1(z) + A_{2\lambda}^{(s)} Z_2(z) + \dots + A_{n\lambda}^{(s)} Z_n(z) \quad 41)$$

де визначник сталих рівнає ся 1, а дана субституція є взята з групи G Фухса. (Наколи група є групою Кляйна, то ті функції будуть функціями Z -Кляйна).

Група H субституцій лінійних:

$$y'_\lambda = A_{1\lambda}^{(s)} y_1 + A_{2\lambda}^{(s)} y_2 + \dots + A_{n\lambda}^{(s)} y_n$$

є очевидно ізоморфна до групи G Фухса.

¹⁾ Пор. Math. Annalen. т. XIX.

Возьмим тепер яке-небудь рівняне різнничкове лїнїове :

$$\frac{d^n v}{dx^n} + P_{n-2} \frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + P_{n-3} \frac{d^{n-3} v}{dx^{n-3}} + \dots + P_1 \frac{dv}{dx} + P_0 v = 0. \quad (42)$$

— де через відповідну трансформацію P_{n-1} ідентично стало ся 0 що всегда дасть ся зробити — і де сочинники P є функції раціональні двох аргументів x і y , звязаних рівнянем альгебраїчним :

$$G(xy) = 0,$$

і приймим, що $a_1, a_2, \dots, a_n$ є точками особливими рівняня $G(xy) = 0$, а безконечностними виражень P .

Наколи положим $x = F(z)$, де $F(z)$ є функцією Фухса, існуючою лиш в колї K — що як передше сказано можна зробити, — то тоді і y є такою самою функцією Фухса, а n інтегралами рівняня 42) є функції $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_n(z)$, які є однозначні і які існують лиш в колї K . Інтеграли ті — так як і $F(z)$ — можна розвинути на ряди збіжні після аргументу $(z - z_0)$, а їх сочинники способом зворотним (recurrent) обчислити. Інтеграли ті — як легко пізнати — є однак функціями Z -Фухса, маєм отже твердження :

Кожде рівняне різнничкове лїнїове з сочинниками альгебраїчними дасть ся з'інтегрувати через функції Z -Фухса (подекуди через функції автоморфні Фухса).

Результат сей очевидно не є одинокий. Ми могли місто x вставити безконечне число иньших функцій Фухса, а навіть функцій Кляйна і булибисьмо дістали на інтеграли рівняня 42) безконечне число системів функцій Z -Фухса або Z -Кляйна. Скількість інтегралів рівняня 42) за ужитєм нових змінних переступних ставєсь проте безконечно велика.

9. Постараймо ся тепер о представлене тих функцій Z , аналогічно як функції Фухса представили ми при помочи функцій Θ .

$$\text{Най} \quad a_{1\lambda}^{(s)}, a_{2\lambda}^{(s)}, \dots, a_{n\lambda}^{(s)}$$

будуть мінорами визначника, утвореного з величин $A^{(s)}$.

Приймим тепер, що обі групи G і H є дані і возьмим n функцій раціональних $H_1(z), H_2(z), \dots, H_n(z)$ — як в уступі 3. сего розділу. Збудуємо після Poincaré n рядів :

$$\Phi_\lambda(z) = \sum_s \sum_{t=1}^n a_{\lambda t}^{(s)} H_t \left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s} \right) (\gamma_s z + \delta_s)^{-2m} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n), \quad (34)$$

то ті ряди для достаточного великого m є збіжні і мають очевидне свойство :

$$\Phi_{\lambda} \left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s} \right) = \sum_{t=1}^n A_{t\lambda}^{(s)} \Phi_t(z) \left(\gamma_s z + \delta_s \right)^{2m} \quad 44)$$

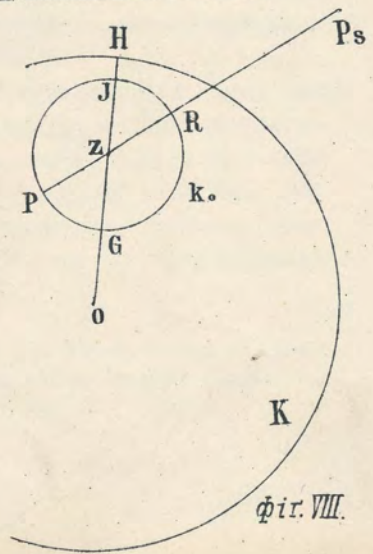
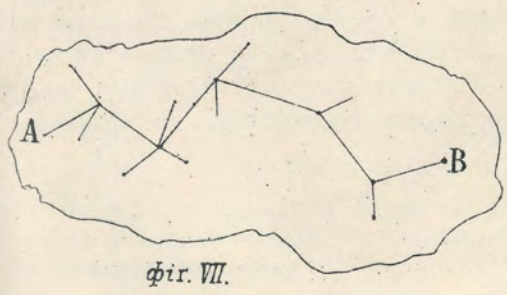
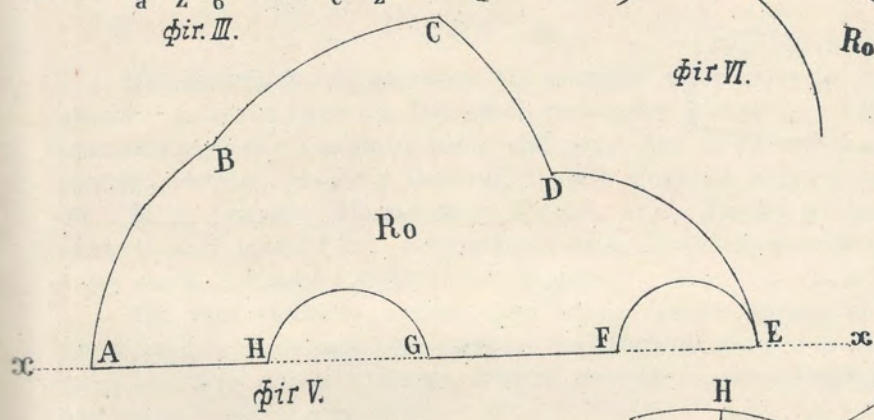
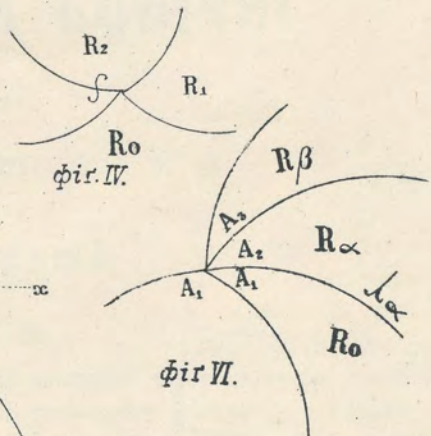
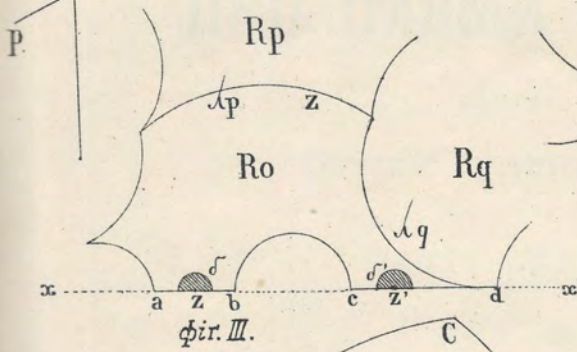
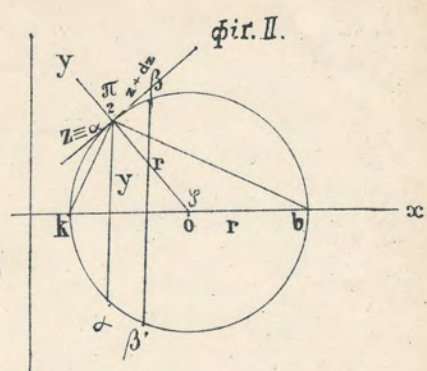
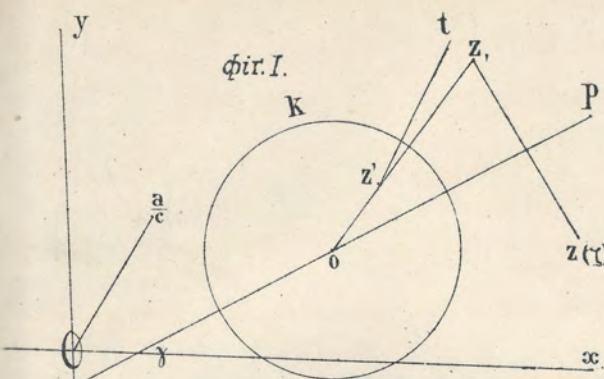
Наколи утворимо тепер n функцій: $\frac{\Phi_{\lambda}(z)}{\Theta(z)}$, де Θ є функцією Θ -Фухса, то ті функції будуть функціями Z -Фухса, так що :

$$Z_{\lambda}(z) = \frac{\Phi_{\lambda}(z)}{\Theta(z)} \quad 45)$$

Наколи возьмем який-небудь систем функцій Z , то можна доказати, що функції ті дадуться всегда виразити раціонально через певне число рядів аналогічних до $\Theta(z)$ і рядів форми 43).

На тім кінчимо короткий перегляд сеї інтересної теорії; очевидно сей начерк далекий є від точного та повного представлення теорії функцій явтоморфних, а має лиш на цілі зазізнати та впровадити читачів в самі есенціональні її моменти.

Тернопіль, в липню 1900.



ЛВІВСЬКА БІБЛІОТЕКА
АН УРСР
№ II

ПРО ПЛЯМИ СОНІЧНІ

написав

Стефан Рудницький*).

ЧАСТЬ ПЕРША.

ВСТУП.

Найраньше зі всіх небесних тіл звернуло сонце на себе увагу людей — світлом і теплом. Що дуже вже давно пізнано його велике значінє для життя, свідчить найлучше роля, яку має сонце в натуральних релігіях. Озиріє у Єгиптян, Ваал у Семитів, Мітра у Іранців і Індів, Геліос і Аполльон у Греків, Хорс Дажбог у Словян були богами сонця і його персоніфікаціями. Дотепер находим сю божу честь для сонця у первісних народів.

Що такі релігійні понятя суть певно більше оправдані чим многі инші, не можем сумніватись дивлячись на сю річ зі становища нинішньої науки. Сміло можем нині за старими Перуанами повторити, щосьмо діти сонця.

Не можем тут розводитись над загальним значінєм сонця для нашої планети, помістимо в кількох тільки словах те, що наука тисячами літ збирала: Сонце є матерію землі, пхнуло її в світлову просторонь, дало рух поступовий та оборотовий і від того часу силою гравітації водить її довкола себе, освітляє і ogrіває. Сонце є пражерелом всіх чотирох жерел енергії, що від часу повстаня

*) Почин до написаня сеї розвідки вийшов від Д-ра Антона Ремана, професора географії на львівськім університеті. За світлі ради і цінні вказівки складаю тут Ви. професору щирю подяку.

землі впливають на формування її поверхні. Гравітація викликає приплив і відплив моря, воздуха і маґми. Оборот землі викликає зміни в напрямі течій атмосфери і моря. Внутрішнє тепло землі є причиною вулканізма, землетрясень, дієлюкацій, підношень і опадання земської кори. Наконець четверте жерело енергії: самеж тепло, сьвітло і хемічне діланє сонця своїм впливом на мінерали, воду і воздух викликає найбільші наслідки. Під впливом сонця витворилось зі згаданих трох чинників житє рости́нне і звіринне на землі, а в неоргані́чнім сьвітї панують вічні переміни. З нерівного розкладу тепла повстають вітри і морські течі, безпосереднє діланє теплоти викликає вічний обіг води і переміни її видів. Всі ті прояви життя землі постійно змінюють її поверхню.

Сонце впливаючи на воду і воздух є посередною причиною дефляції, денудаци́ї і ерози́ї, котрі поруч вітрі́ня скал з теплоти соні́чної суть найважні́шими причинами морфологі́чних змін на поверхні́ земської кори.

Пригадали́сьмо велике значі́нє сонця для землі́ головнo з тої́ причини, щоби́ тим лекше́ доказати́ важні́сть того́ відді́лу астрофі́зики, що́ займає́сь особливо́ головним ті́лом нашої́ планетарної́ системи.

Наукові́ дослі́ди про сонце́ сягають́ глибоко́ в старинні́ ві́ки. Они́ взагалі́ дали́ початок астроно́мічній науці́, бо́ обсерва́ції сонця́ нерівно́ були́ лекші́ чим обсерва́ції якого́ небудь́ другого́ небесного́ ті́ла. Але́ згадані́ дослі́ди обмежува́лись на бі́гу сонця́. Є́гож фі́зичний устрій́ аж до найнові́йших часі́в позі́став родо́ви лю́дському́ глибо́кою тайно́ю. Се́ що́ ми́ тепер про́ будову́ соні́чної ку́лі зна́єм, може́м вважа́ти ли́шь вступо́м і підста́вою до́ дальших пра́ць в ті́м напрямі́ і муси́м призна́тись за́ Секкі́м, що́ в борбі́ з природо́ю о́ тайни́ соні́чного устро́ю не́ діста́лась ще́ побі́да в наші́ руки.

Хоть́ не похва́ляєм і́сторичного́ спосо́бу трактова́ня природо́писних тем, пода́мо на́ вступі́ і́сторію соні́чної фі́зики.

Кля́сична старинні́сть, хоть́ під певни́ми згля́дами поста́вила астроно́мію доси́ть висо́ко, майже́ жадних́ відомості́й про устрій́ сонця́ не́ мала. Бє́ли Анакса́горас́ тверди́в, що́ сонце́ є́ розпале́ною до́ бі́лості ку́лею, то́ се́ виходи́ло біль́ш з причин телеоло́гі́чних чим́ з переко́нания́ потвердже́ного́ дослі́дами. І́ в середних́ ві́ках не́ знали́ європе́йські́ наро́ди ні́чого́ про сонце́. Дивна́ се́ може́ рі́ч, але́ тепер́ вже́ на́ певно́ сконста́товано, що́ суча́сно иньші́ наро́ди в части́ на́віть е́гзотичні́ знали́, що́ на сонці́ появля́ють́ ся́ часто́ пля́ми. Ара́бські́ астроно́ми́ не́раз і́х помі́чали, але́ й они́ не́ понали́ на́ добру́ доро́гу — думали́, що́ се́ Мерку́р або́ Вє́нера, що́ переходя́ть власне́ перед

сонішним кружком. Натомість добре розуміли справу китайські учені. В енциклопедії Ма-Тван-Лін знаходимо численні згадки про плями на сонячній кружці в видах дактелів, сливок, качок, яєць і т. д. Ці згадки простіраються на літа 301—1205 нашої ери. (Williams Ma-Twan-Lin. *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* vol. V. XXIII. пор. також *Nature* V. XX.)

Також Перуанці замічали на поверхні сонця плями. Нууана-Сарас, Інка перуанський († 1525) сумнівався навіть о божестві сонця з тої причини, що має нечисте обличчя. (R. Wolf. *Geschichte der Astronomie* ст. 178. *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur* т. I. ст. 565, *Sirius*, *Zeitschrift für populäre Astronomie* р. I. ст. 98. Про старинну астрономію в загальні мож. багато знайти також в *Mädler Geschichte der Himmelskunde* т. I.)

Доперва в початках XVII віка, коли нововинайдені далековиди звернено на сонце, зараз завважали учені на його поверхні темні плями.

З поміж троєх астрономів, що боролись о первенство наукового відкриття сонячних плям, належить І. Фабриція після найновіших дослідів вважати властивим відкритем. (Berthold: *der Magister Johann Fabricius*. Leipzig. 1894.) пор. *Jahrbuch der Astronomie und Geophysik* hrg. v. H. Klein т. V. ст. 1. *Sirius* т. I. ст. 94. пор. також Newcomb. Engelmann. *Populäre Astronomie* II вид. ст. 285.) Він перший оголосив друком своє відкриття в 1611 р. і пізнав що плями знаходяться на самій поверхні сонця. Галілеї мав ще вчасніше чим Фабрицій помітити сонячні плями, але відомість про них подав дещо пізніше. Протягом довгого часу вважано також єзуїта Хр. Шейнера відкритем сонячних плям, головні мабуть тому, що він перший обсервував їх докладніше і описав обширніше. (Rosa Ursina sive Sol. ch. Bracciano 1630.)

В перших роках по відкриттю викликали сонячні плями, як звичайно наукова новинка велике і загальне зацікавлення. Началась зараз полеміка, чи се суть дійсні плями, чи тільки якісь нові інтрамеркуріальні планети. Але коли ся переконано, що се дійсні плями, цікавість уступила місця рівнодушності і ледви деякий любитель астрономії вважав плями сонячні гідними докладнішого розслідування.

Доперва при кінці XVIII. віка почали знов деякі учені займатись ними а то пр. Горребов і Вільсен (Wilson). На початок XIX. віка припадають епохальні досліді старшого Гершля. По них знов наступає деякий застій в обсервації сонця. Аж при кінці першої половини XIX. віка, коли Швабе в 1843 р. замітив періодич-

ність плями, коли в р. 1851 перший раз більшу увагу звернено на сонячні протуберанції, коли в 1852 р. Вольф, Сабін (Sabine) і Готе (Gautier) науково potwierдили попереджене Швабого, почалося будити між астрономами на ново зацікавлене для фізичного устрою сонця.

Великанські поступи оптики доставили астрономам досконалих телескопів, а потім спектроскопів, фотографічних апаратів і інших потрібних до розслідування знарядів. На початок другої половини XIX. віка й належить покласти родини сонячної фізики, інакше геліографії чи геліології.

Та нова наука знаходить ся дотепер ще в дитинячій віці. Хоть ціла плеяда великих учених безнастанно працює над її розвою, збирає обсерваційний матеріал і ставляє научні теорії, то дотеперішних вислідів не мож назвати великими. Однак величезні поступи фізики сонячної в останніх літах, досягнені іменно при помочи спектроскопа і фотографічної камери дають нам право робити собі на будучність великі надії. Кождий рік приносить множество нових відкриттів, дослідів, теорій, причинків і поправок до давніших понять.

Задачею нашої розвідки є: коротко зібрати досліди наукові над сонячними плямами. Займемось тою частию геліографії головню з тої причини, що плями сонячні є найбільш в очі впадаючою і найважнішою проявою внутрішньої діяльності сонця. Крім того суть сонячні плями найцікавішим а разом найменше пізнаним явищем на поверхні середоточного тіла нашої системи. Сонячні походні протуберанції, що далеко пізніше звернули на себе увагу астрономів, суть вже тепер достаточню вияснені, коли тимчасом плями сонячні якраз хіба по те приходять на стіл, щоб астронома повстидати.

Література про сонячні плями є величезна. На доказ вичислимо імена головніших учених, що про них писали. Зі старших авторів найважніші: Wilson, Herschel, Schwabe, Arago, Humboldt. З новіших: Wolf, Carrington, Warren de la Rue, Secchi, Faye, Spörer, Peters, Tacchini, Respighi, Zöllner, Vogel, Lohse, Lockyer, Huggins, Janssen, Young, Konkoly, Langley, Ricco і много інших.

Межи творами згаданих учених без сумніву *chef d'oeuvre* є книжка патра А. Secchi'ого п. т. *Le Soleil* видана в 1871 р. а переведена на німецьке і доповнена Schellen'ом. (*Die Sonne*. Braunschweig 1872.) Але сей твір, хоч в своїм часі знаменитий, є вже перестарілий з огляду на зміст і може лишень служити як підстава, на котрій треба будувати річ оперту на новіших дослідях.

Другий загальнішого змісту твір про сонце С. А. Young: *die Sonne*. Leipzig 1883. є більше популярний і вимагає при користуваню

ся ним певної дози критики. Крім того Young за мало узглядняє новіші досліди іменнож європейських учених та всетаки хронологічно остає о кільканацять літ поза наукою. Те, що від сього часу в обсягу геліографії зроблено, є порозкидане по астрономічних і загально-природописних публікаціях або, що гірше, виходило особними розвідками. Дятого не ціла література була мені доступна. Однак я старавсь тільки тоді відступати від користованя ся оригіналами, коли під рукою були достовірні витяги або змісти, поміщувані в чисто-наукових часописах чи в розвідках визначніших учених.

Для лекшої орієнтації і перегляду поділимо річ на сім розділів. Перший розділ буде займатись структурою поверхні сонця, другий структурою самих плям, в третім опишемо їх „житє“, в четвертім подамо результати дослідів над їх дуговиною (спектром) і теплотою. Пятій і шестий розділи обіймуть їх власний рух і періодичність, послідний же розділ подасть учені теорії про істоту сонічних плям.

Про будову сонічної поверхні.

Коли дивимось на сонце крізь лунету, оно представить ся нам яко правильний кружок храпавий на поверхні. В ріжних місцях того кружка видимо звичайно більші або меньші, звичайно круглаві, часто получені в групи темні плями. Не збуває сонічному кружкови також на місцях яснійших чим безпосередна їх околиця. Є се тз. сонічні походні. В разі цілковитого затьмня сонця моглибсьмо тоуж лунетою видіти ще два цікаві явища а то: протуберанції т. є. огневі язики, що вистрілюють в гору довкола края сонічного кружка і корону, що в виді сьвітлої авреолі окружає затемнене сонце і висилає далеко свої лучі.

[Само собою розуміє ся, що лунета, щоби була придатною до розсліджуваня сонця мусить бути осмотрена відповідним окуляром. В опис тих тз. геліоскопічних окулярів, як також і в опис самих лунет, що їх уживає ся при обсерваціях сонця, рівнож і в опис спектроскопів, полярископів, мікрометрів, фотометрів, фотогеліографів не можемо тū входити і відсилаєм необзнакомленого з ними читача до творів Secchi'oro і Young'a, іменнож до діла N. v. Konkoly: *Praktische Anleitung zur Ausstellung Astronomischer Beobachtungen mit besonderer Rücksicht auf Astrophysik*. Braunschweig 1883., котре дуже добре представляє стан інструментальної техніки в 80-их

роках. Про поступи від того часу мож поінформуватись в пізнійших річниках чатописий Carls Repertorium für Experimentalphysik i Zeitschrift für Instrumentenkunde].

Всі ті згадані явища лучать ся межи собою звязами тоїж самої сили, що звязи, котрі лучать різні фізпольогічні функції пр. тіла людского. Однак ми, маючи на оці тільки сонічні плями, не можем звертати рівної уваги на цілу решту споріднених явищ і будем мусіти займатись ними тільки принагідно, де завважимо близьку їх стичність з явищем плям.

Щобисьмо могли основно запізнатись з видом і істотою тих таємничих творів, мусим на перед розслідити терен, де они являють ся.

Поверхня сонця, або як часто, а не цілком науково говорять, фотосфера, представляєсь нам, як вже више згадано, хрпавою, навіть тоді, коли інструмент є малий а побільшене незначне. Наколи ужиєм більшого інструмента і побільшення, стане поверхня сонця ще більше хрпавою, неправильною ба навіть філястою. Secchi порівнує її з висохлим молоком, коли на него дивим ся крізь мікроскоп, Young з хрпавим рисунковим папером або з зсілим молоком. Коли наш інструмент є великий, а побільшене дуже сильне, то здаєсь нам, що ціла поверхня сонця складаєсь з незміримої скількості ясних зеренець, що розсіяні по дещо темнійшій тлі. Се явище звесь в астрофізиці ірануляцією поверхні сонця. (Por. Secchi Die Sonne ст. 50 сл. Young Die Sonne ст. 99 сл.)

Щоб ірануляцію обсервувати, треба не тільки доброго інструмента, але заразом чистого воздуха та вправного обсерватора. Коли крім тих вимогів узглядимо ще велику „делікатність“ самогож явища, перестанем ся дивувати тому, що ірануляція на різних учених ріжне зробила вражінє. Herschel порівнує зернята ірануляції з морщинами (wrinkles), Langley'єви видались они подібними до снігових платків, що їх розсіяно густо по сірім полотні. Nasmyth знов виніє зі своїх постережень сонця в р. 1861 вражінє, що частинки ірануляції є подібні до довгих і вузких вербових листків. На єго розповсюднених рисунках поверхня сонічного кружка представляєсь як сітка сплетена зі сьвітятих ниточок. Але сей погляд Nasmyth'a не удержавсь. Перший виступив против него Dawes і запоречив рішучо їх ієтнованя. Stone і Secchi також не потвердили досліду Nasmyth'a, бо мимо великої старанности в обсервації, ліпшими інструментами та (іменно у Secchi'єго) чистійшого воздуха не могли найти і сліду „вербових листків“. Huggins (On a cyclonic arrangement of Solar granules. Monthly Notices of Roy. Astr. Society

vol. XXVIII. ст. 101 сл.) і Secchi впровадили натомість порівняне з зернятами рижу. На рисунках Huggins'a та й інших учених дійсно можна сю подібність замітити.

При виємково прихильних обставинах удалось ще деяким ученим сконстатувати, що навіть самі зернятка грануляції складаються з певного числа ясних точок, котрі разом роблять вражінє цілості. Так одже маєм на поверхні сонця три формації: 1) темніші маси під сподом, 2) зерна грануляції, 3) світлі точки, що складаються на витворенє згаданих зерен. (S. Newcomb. Populäre Astronomie üb. v. Engelmann Leipzig II. вид. 1892 ст. 282).

Величина зернят грануляції є трудна до виміреня, головню задля їх дуже малого проміру. Secchi порівнює помір їх проміра з помірами мнимого проміра звізд сталих і находитє порівнуванем проміру зернят грануляції з грубостию ниточок мікрометра, що він виносить ледви $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ а дуже рідко $\frac{1}{2}$ секунди луку.

Розложенє зерен грануляції на темнім тлі є дуже ріжне і змінне, а іменно в сусідстві похідень і плям. В тих іменно околицях панує вічна рухливість та що хвиля лучають ся великі зміни. Безпосередна обсервація рухів фотосфери є при величезнім віддаленю сонця дуже трудна, але фотографія наглядно нам їх показує. Janssen умістив в Annuaire de Bureau des Longitudes за рік 1879 дві фотографії тої самої околиці сонця. Они були зняті в астрофізичній обсерваторії в Meudon 1878 р. 1. червня. В промежутку 50 минут наступили тут, як вже на перший погляд можє завважати, великі переміни. Зеренця ясні, що перед 50 минутами були зібрані в одній околиці, пересунулись протягом того незначного часу громадно в цілком иньшу околицю, лишаючи по собі темніше місце. І на відворот: місця перед тим темніші, появились громадою ясних точок. Взагалі полягає змінність грануляції на тім, що єї зернята збивають ся в громадки і скоро ся потім розходять.

Місцями укладають ся зерна фотосфери в той спосіб, що між ними творить ся менш або більш виразний, округлий і темний отвір. Такі отвори називаєм порами. Зерна грануляції приймають наоколо пори вид повздовжний і підлягають так виразним рухам, що їх не тільки при помочи фотографії але і уважною обсервациєю можє замітити.

Вияснити грануляцію сонячну перший силкувавсь W. Herschel. Дотична єго розвідка находить ся в Philosophical Transactions з р. 1802. Він твердить, що зернята грануляції суть стіжковими кінчиками фотосферних хмар. Темніше тло складаєсь — на думку

Herschel'a — з „планетарних“ хмар, а через них переглядає темне внутро сонця.

Перша часть тої теорії є правдива і приймають її дотепер майже всі учені. Дуже сильно промовляє за тою теорією вигляд хмар земскої атмосфери, коли на них дивитись будемо з високої гори. Однак друга часть теорії Herschel'a про планетарні хмари та земне внутро сонця упала разом з йогож теорією про сонячні плями.

Американський учений Langley, один з найвизначніших геліографів, дальше розвів те, що в гершлівській теорії було доброго. Фотосфера складаєсь на його думку з хмаристих стовпиків, що уложені прямовісно до поверхні сонця. Їх горішні кінці творять зернятка грануляції. Фільоване сонячної поверхні в наслідок місцевих заколотів є причиною вічних змін в положенню згаданих стовпиків, а нам здаєсь, що се зернята грануляції порушають ся, віддаляють і приближають ся. (The American Journal of Science т. XV. ст. 297 сл.)

Подібний є також погляд славного французького геліографа Janssen'a. (Comptes rendus de l'Academie des Sciences т. LXXXV. ст. 1249.) По його думці струї в атмосфері сонця поривають зі собою в гору части світлих хмар фотосфери. Ті частинки збивають ся в хмарки ільбулярного вида, що й представляють ся нам яко зернятка грануляції. Чим сильніші струї в сонячній атмосфері, тим виразніша грануляція. Темне тло об'яснює Janssen тим, що світло вищих верств фотосфери є менше ослаблене абсорпцією сонячної атмосфери чим світло низших верств.

Позірно відмінна є теорія Scheiner'a, хоч і она на тій самій підставі почиває. (Astronomische Nachrichten т. 137. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik Jg. VI. ст. 7 сл.) Scheiner признає також, що зерна грануляції суть частями світляної матерії сонця, що винесені в висші регіони. Але причини сего винесення шукає Scheiner не в дійснім піднесенню хмаринок фотосфери в гору, а в певнім роді ундуляційного руху частинок сонячної атмосфери. Славний фізик Helmholtz виказав (для земскої атмосфери), що коли дві верстви воздуха о ріжній температурі пересувають ся понад собою — тоді повстають воздушні филі. В вершках тих филь зменьшаєсь в наслідок їх висшого положення тиснене воздуха, наступає конденсація і творять ся хмарки. В долинах же филь, де тиснене буде сильніше, до конденсації не приходить. Наколи вітер віє постоаянно в ту саму сторону, повстануть при згаданих даних ряди білих хмаринок. Наколиж дві воздушні струї стрінуть ся віючи під

кутом, то хмарки скрестять ся і змішають приймаючи характеристичний вигляд означений в метеорології назвою *cirrus*.

Аналогічних відносин шукає Scheiner і в сонячній атмосфері. Ведений головню великою схожістю будови фотосфери і згаданих хмарок сей учений твердить, що ясні зерна фотосфери суть вершками филь сонячного воздуха, котрі поветали в наслідок інтерференції та скрещування ся ріжних фильєтих системів.

Тільки одна з новіших теорій супротивляєсь висше поданим науковим виясненням істоти грануляції. Поставив її в 1886 р. сербський учений Станович. (*Comptes rendus* т. СІІ. ст. 813 сл.) Він вважає ціле явище грануляції маюю оптичною. Она походить з неправильного заломаня лучів сьвітла в вічнорухливій газовій атмосфері сонця. Головно звернувся Станович проти результатів сонячної фотографії в тім напрямі. Але ся теория Становича не найшла нігде відгомону і признаня, бо не була поперта научними выводами. (Порівняй думку про ню Janssen'a в *Comptes Rendus* т. СІІ. ст. 857.)

Про будову сонячних плям.

Кожда нормально розвинена пляма складаєсь з двох частий. Уже на перший погляд можем у кождої такої плями замітити темніший осередок і яснішу пенумбру або притінок, що її концентрично окружає. В цілости представляєсь сонячна пляма звичайно яко лійковате, на дні темне заглиблене в ясній поверхні сонця. Є се головню тому, що пенумбра складаєсь звичайно з вузьких пасків сьвітляної матерії, що суть всі звернені концентрично до осередка плями. Те вражіне, що сонячна пляма є заглибленем, відносимо навіть тоді, коли паски притінка мають неправильний вид. Коли на пр. придивлятись мемо образowi сонячної плями, що нарисовував Langley, безпохибно віднесемо вражіне, що осередок плями є заглибленем, а над ним звисають пасочки пенумбри, закриваючи отвір — як корчі закривають вхід до печери. (Вислів Younga о. с. ст. 110. Рисунок Langley'a находить ся на вступі книжки Young'a, також в многих популярних астрономічних виданях пр. E. Weiss *Bilderatlas der Sternenwelt* і т. д.)

Той вигляд сонячних плям викликав у многих учених думку, що они суть дійсно лійковатими заглибленнями. Перший виступив з тою теорією A. Wilson, (*Observations on the solar spots. Philoso-*

phical Transactions. Vol. LXIV. (1774) ч. I. ст. 6-13. Пор. також Secchi о. с. ст. 67.) бо завважав зміну вида плям в міру як они змінювали місце в наслідок обороту сонця. Wilson постеріг іменно, що в міру, як пляма зближалась до краю сонічного кружка, пенумбра зі сторони, що блиска єго середини, почала ся щораз звужувати а в кінці цілком з тої сторони плями зникла. Підчас того по другій стороні плями, себто тій, що звернена до сонічного края, ширина пенумбри майже незмінилась і доперва тоді зменшилась і зникла, коли пляму щораз більше заслонювала кривина сонічної поверхні. Потім пляма цілковито зникла за краєм, а коли по 14 днах указалась знов, вже по другій стороні кружка, повторились згадані явища але в відворотнім порядку. Наперед видно було лиш ту часть притінка, що звернена була до края сонця, потім показавсь поступенно осередок, пізнійше і друга часть притінка. Она була з початку дуже вузька, потім щораз ширшала і аж в середині сонічного кружка прийняла симетричний вид.

Те спостереження Wilson'a є підставою теорії сонічних плям, що єї виставив W. Herschel. Понеже тая теорія більш чим пів століття неподільно панувала в науці, ніхто не перечив правди спостереження Wilson'a. Крім того нераз лучалось астрономам помічати, що коли яка велика пляма станула як раз на краю сонічного кружка, повстала в тім місці щербина; замітив се вже в 1719 р. Rost (Wolf. Handbuch der Astronomie т. II. ст. 406.) Помічали се часто також Herschel, Warren de la Rue, Secchi і Tacchini. (Велика пляма з р. 1865. VII. 30). Розумієся вибирали они плями значної величини. (Secchi о. с. ст. 72.) Lohse найшов підчас такого переходу плями через край дорогою фотографічною щербину велику на 2" луку.

Але не бракло також учених, що скептично задивлювались на сей тз. „феномен Wilson'a“. Ті сумніви принесла мож сказати зі собою теорія плям сонічних Kirchhoff'a. Її головний прихильник межи практичними геліографами Spörer виступив остро против Wilson'a і тих, що єго обсервації потвердили. (Monatsberichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften J. 1865. ст. 350 сл. 589 сл.) Після власних обсервацій доказує Spörer, що положене пенумбри зависить від відносин в околиці плями. Пенумбра від тоншої сторони є звичайно порозривана і змінює що хвиля свій вид. В околицях края сонічного була абсорпція звичайно так сильна, що Spörer майже ніколи не міг розрізнити осередка від притінка, хотай єго інструмент нерівно висше стояв чим інструмент Wilson'a. Противно, Spörer замітив, що на пр. у двох плям, що лежать близько

себе, притінки суть ширші по обох внішніх сторонах і заховують постійно свій симетричний вигляд. З тих причин думає Spörer, що плями сонічні не суть в дійсности заглубленнями, а лишь видають ся бути. В виду обсервації Lohse'ого заявляє Spörer, що і та щербина в краю сонічнім є позірна. Одиною причиною тої позірної щербини є те, що світло фотосфери в околицях плями є так сильно ослаблене в наслідок газів, котрі з неї добувають ся, що для ока а навіть для фотографічної камери видаєсь тая околиця зовсім темною. (Зри: *Comptes Rendus* т. CIX. ст. 363.) Не удалось однак Spörer'ови подати в сумнів явища, що вже тільки разів було обсервоване. В останніх часах піднявсь реабілітації Wilson'a італійський астроном Ricco на підставі одинадцятьлітніх обсервацій плям (р. 1880—1890 в Палермо, р. 1892 в Катанії). Число помічаних плям рахувалось на тисячі (17.456, з чого самостійних 3.224). З них вибрав Ricco тільки плями правильного округлого виду. Було їх всіх тільки 185. Межи тими плямами 131 т. є. величезна більшість поводитись так, як се завважав Wilson, 36 заховувалось зовсім індиферентно а тільки 18 прямо противно. Крім того находимо в обсерваціях Ricco многі случаи, коли пляма сонічна, переходячи через край сонічного кружка, творила в ній щербину. (*Rendiconti della reale Accademia dei Lincei* р. 1897 з. 6. ст. 202 сл.) Тим способом доказав Ricco, що „феномен Wilson'a“ є оправданий. Заки перестанем займатись сею справою, мусим еще згадати про оден цікавий дослід. Warren de la Rue вложив в стереоскоп дві фотографії сонця, що були взяті сучасно в двох місцях землі, віддалених від себе о 15 степенів дуку. Коли вже на кожній фотографії з оїбна плями подобали на заглублення, то вже в стереоскопі подібність кидалась в очи. (Secchi о. с. ст. 71 сл.)

До того, що сонічна пляма представляєсь як заглублене, починаєсь в дуже значній мірі також обставина, що околиця кожної майже плями є винесена понад нормальний уровень фотосфери в наслідок великого числа сонічних походень. (Що вражінє заглублення походить або бодай зміцнюєсь видом походень, що окружають пляму, завважав перший Howlett, *Monthly Notices of R. A. S.* v. 23. ст. 108.)

Походні сонічні представляють ся яко ясні плями, значно світліїші чим безпосередна їх околиця; видом неправильні. Young порівнує їх до купочок піни, що плавають по ріці понизше водопада. (о. с. ст. 106.) Що до істоти сонічних походень згоджують ся днесь всі учені на те, що они творять ся через піднесенє в гору значніїших частий фотосфери. (E. Liais в *Memoires de la société scientifique de Cherbourg* р. 1867. ст. 337. Hale в *Himmel und Erde*

т. VI. р. 1894 ст. 381. пор. Secchi о. с. ст. 104.) Найдокладніше зайнявся сею справою Zöllner. Він твердить, що походні суть части фотосфери винесені в гору воздушними струями. Они світають сильніше від свого окруження, бо мають 1) вищу температуру, 2) в наслідок значнішої грубости світляної верстви, 3) в наслідок зменшеної абсорпції. Вершки походень находять ся дуже високо понад уровнем фотосфери, над ними находить ся отже значно тонша верства атмосфери чим над їх окруженем. — абсорпция є отже дуже зменшена. (Zöllner über das Rotationsgesetz der Sonne und der grossen Planeten. Berichte der königlichen sächsischen Gesellschaft des Wissenschaften р. 1871. т. XXIII. ст. 89.)

Сонячні походні суть розсіпані звичайно по цілій поверхні сонця і не тримають ся певних стриф, як се роблять сонячні плями. Але все таки найбільше число походень збираєсь в околицях пятен. Найсильніше розвинені суть походні звичайно по лівій (берем річ геоцентрично) стороні плями. Завважали се вперве англійські астрономи з Kew: Warren de la Rue, Balfour Stewart і Benjamin Loewy. Перша серия дотичних обсерваций виказала, що з числа 185 обсервованих плям, мало 158 походні значніше розвинені по лівій стороні, 21 по обох сторонах однаково розвинені, а тільки 6 виказувало нагромаджене походень по правій стороні. (Comptes Rendus т. LX. ст. 140.) Друга серия обсерваций ще виразніше доказала, що спостережене згаданих астрономів було правдиве. На 584 плям, що мали походні по лівій стороні, припали тільки 45, що мали їх по правій. (Ibidem т. LX. ст. 470.)

Походні трудно замітити, сли они займають місце недалеко від центра сонячного кружка, бо тоді різниця абсорпції лучів висланих через походні і лучів висланих їх окруженем є за мала, щоб викликала значну різницю в ясности. Походні світають тут майже таксамо ясно як фотосфера, що їх окружає, суть отже ледви замітні. Коли натомість походня находить ся недалеко края сонячного кружка, різниця абсорпцій стає значно більшою а разом з нею різниця ясности походень і їх окруження. Тоді походні виступають дуже виразно і можем докладно замітити, що з вні кожда пляма є окружена вінцем походень. Від него виходять в різні сторони ясні розвітвленя, що сягають дуже далеко і займають просторонь 3—4 рази так велику як сама пляма. Все те суть утвори дуже змінні а їх вигляд є що пару мінут инакший. Загалом беручи образують походні наоколо заглиблення плями видатну набренілість. Іррадіация еще ту видатність збільшає, так що пляма разом з походнями, що

її оточують, робить ся подібна до місячного кратера. (Secchi о. с. ст. 103).

Будова походень є в подробицях така сама як будова оточичної фотосфери. Тільки що зерна грануляції стоять ту далеко густіше.

Колисьмо так вже розслідили безпосередню оточіцію плями, перейдїм до опису її самої.

Як се вже вище згадано, є осередок кожної плями в засаді оточений притінком або пенумброю. Назву свою одержала та часть плями від того, що є значно яснїша від самого осередка а дещо темнїша від самої фотосфери. Будова притінка є лише у плям цілком круглих т. є. досить рідко, правильна в виді перстень. Звичайно є пенумбра неоднотайно ві всіх місцях широка та дуже часто цундрава. Загальний вид дуже різнородний, найчастіше круглавий, рідше гранчастий. Дуже часто трапляють ся плями з загальним видом шестикутника. (Peters в *Astronomische Nachrichten* Nr. 1868. par. Sirius IV. ст. 44).

Що ся тичить подробиної структури, складає ся пенумбра також з зерен грануляції. Але они суть тут рідкі і мають наклін лучитись в ниточки, котрі суть у правильної плями звернені концентрично до осередка. (Janssen в *Comptes Rendus etc.* т. СІІ. ст. 80.) Дятого то ниточки притінка суть при її внїшній границі в більших відступах уложені, а при внутрішній згущують ся так, що наоколо темного осередка творить ся ясний перстень рівнобіжний до перстень походень, котрі як знаєм оточують притїнок у внї.

Лучаєсь часто, що ниточки притінка суть на тім кінци, де зближають ся до осередка плями, згубілі і мають вид булавочок або струй ляви. Те явище, що природно дуже помагає витворови євітляного перстень наоколо властивого осередка плями, було помічене в перве Dawes'ом. Secchi (о. с. ст. 84.) мірив грубість тих ниточок пенумбри і найшов її на грубішм кінци рівною $\frac{1}{4}$ — $\frac{2}{4}$ секунди луку т. є. майже 200—400 km. На тоншім кінци грубість доходить тільки до половини того: $\frac{1}{8}$ — $\frac{1}{4}$ секунди, 100—200 km. (Примічаєм, що на підставі новїйших дослїдів над паралексою сонця відповідає одній секундї луку на сонци довжина 720 km.) Грубість сих ниточок є на тоншім кінци нераз так мала, що тоді видим тільки грубіші кінці ниточок наоколо осередка. Від внїшнього краю складаєсь тоді пенумбра з темної, мрачної маси.

Ниточки пенумбри не все мають той сам концентричний напрям. Часто они приймають поодинокі або і громадно найбільш різнородні напрями. Часом цілі партії ниточок займають зглядом иньших партій таке положенє, що їх напрями творять кути прями.

(Secchi о. с. ст. 87.) Нераз певні партії притінка вигнуть ся спірально в ту саму сторону і пляма тоді представляєсь як вир на воді. Той спіральний напрям обнімає або цілу пляму або тільки поодинокі її часті. Нераз маєм в одній плямі кілька центрів обороту та що дивнійше напрям її є в різних центрах часто ріжний. (Young о. с. ст. 121, 171. Langley в *Comptes Rendus etc.* т. LXXIX. ст. 75. пор. також *Comptes Rendus* т. XCV. ст. 1310. Після обсервацій Carrington'a і Secchi'ого виносить число плям з спірально уложеною пенумброю $2 - 3\%$ всіх.)

Заким перейдемо до описаня дальших частий плями не можем позабути про цікаві явища грануляції на ниточках пенумбри. Зеренця суть ту так виразні, що ниточка пенумбри представляєсь часто якби нитка жемчугів. Нераз є ниточка в ріжні сторони розгалужена так, що тоді виглядає она на вітку опунції. (Secchi о. с. 79.)

Другою головною складовою частию сонічної плями є осередок або центр. (Secchi о. с. ст. 88, Young о. с. ст. 113 сл.) Через контраст з сьвітличим окруженем видаєсь нам осередок плями цілком чорний. Приглядаючись їм з близка крізь тз. поляризацийні геліоскопи (Є се окуляри осібної констукції, де не треба між око а сочку збираючу вставлявати зеленого скла, бо в наслідок кількократного відбитя від кількох рівнобіжних плоских зеркал сьвітло сонічне так ослаблюєсь, що людске око може єго вигідно знести.) постерегли деякі учені, що осередки плям мають барву темно-порфірову, багрову. Чи ся краска є дійсна, трудно сказати, бо она може походити з другорядної дуговини у предметовій сочки телескопа. Обсервовано іменно, що таку саму порфірову краску мав кружок планети Меркурия, коли переходила перед кружком сонічним в 1878. році. Konkoly замітив також, що деколи осередки плям суть закрашені на темнофіолетову барву. І она також сумнівна, бо може також походити з другорядної дуговини. (*Beobachtungen angestellt am astrophysikalischen Observatorium in O'Gyalla.* т. VI. ст. 129.)

Хотяй в наслідок контраста здають ся нам плями сонічні дуже темними, то однак беззглядна їх яєність є значно більша чим прим. планетних кружків, коли їх видим перед сонцем і взагалі досить значна. Galilei справедливо завважав, що одна пляма сонічна, еслиб сама сьвітила на небосклоні, видалаб сильнійше сьвітло чим всі иньші тіла небесні разом. Нові досліди фотометричні Langley'a виказали, що сьвітло плям є 500 разів сильнійше місячного. (Newcomb-Engelmann о. с. ст. 287.) Треба пригадати, що навіть дуже яєне сьвітло Drummond'a видаєсь темним, наколи єго держимо до сонічного сьвітла. (Schellen. *Die Spectralanalyse.* вид. III. том II. ст. 75.)

Осередок плями не є ві всіх своїх частях однаково темний. Dawes замітив у многих плям в їх осередках округлі, дуже темні плямки. Їх ясність стоїть до ясности самого осередка в таким відношеню, як ясність осередка до ясности притінка. В однім осередку мож найти нераз і кілька таких темних плямок. Они виглядають як отвори рур, що сягають ві внутро сонця і виглядають часто так, якби були спірально скручені. Названо їх центрами Dawes'a.

Крім тих темнійших місць находим частенько в осередках плям також місця, яснійші. Згадуючи про них не маєм на думці тих частин фотосфери, що при повставаню або зниканю плями єї осередок залягають, але говорим про иньші, цікаві явища. Виглядають они як мраки білявої або часто рожевої краски. Замітили їх в перве Herschel і Dawes, а Secchi таки й часто обсервував. Secchi ідентифікує їх з протуберанціями задля рожевої краски і великої змінности — думає отже, що се вибухи розпаленого ведня.

Займаюче явище внутр осередка сонїчної плями бачив Spörer 1884 р. VIII. 24. (Tageblatt der 57. Versammlung deutscher Naturforscher zu Magdeburg 1884. s. 145.) Він замітив в поранній годинї одно сильно сьвітяче місце на серединї центра значної плями. О першій годинї пополудни поверхня сьвітячого місця взагалї зменшилась, але зате з головної маси вибігли дві ясні ниточки, що направились до западного берега плями. Вже о третій годинї сї ниточки майже цілком зникли, а на слїдуючий день вже навіть і по самім головнім центрі ясного феномена не було слїду. Spörer думає, що розігріті маси сонїчного внутра, котрі находились під плямою, нагло піднеслись в гору та зараз потім опали. Подібні явища не так то дуже рідкі — видимо їх також на рисунках Secchi'ого (пр. о. с. ст. 77.).

Про повставанє та зниканє сонїчних плям.

Щоби пізнати істоту сонїчних плям, мусимо добре придивитись часови і способови їх повставаня і зниканя.

Щоби сонїчна пляма витворила ся і розвила, потреба дуже ріжного часу. Нераз і кілька днів уплине, заки пляма на стільки відокремить ся від свого окруженя, щоби єї виразно мож відрізнити. Часом же треба на се лишень кількох годин. Ніколи однак не лучить ся, щоби сонїчна пляма повсталала нагло в тім щоденнім значіню сего слова т. є. в кількох мінутах.

Так само способи повставання плям є дуже відмінні. Можна сміло сказати, що майже кожда пляма йнакше повстає. Пару століть обсервацій сонічної поверхні доставило в тім напрямі чималого числа подробиць. Про сам спосіб повставання сонічних плям можнаб много паперу записати. Ми мусимо ся тут обмежити лиш на кілька висказів, нарисовуючи ними типічний спосіб повставання плям.

Звичайно вже на кілька день перед повстанем плями можем на поверхні сонця замітити великий рух. Численні пори являють ся нагло і нагло зникають, ціла околиця звичайно покрита походнями. (Не можна однакож думати, що походні правильно завсїгди перед повстанем плями на єї місци ся являють. Думали се давнійші учені але недавно виказав Perry в *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* vol. LII. (1891) ст. 104. що так не є. Пор. також Secchi о. с. 58. Young о. с. 117.) Серед тих пор і походень можем завважати часом дуже інтересні явища. Се сіраві плями, що роблять вражінє як справдешні сонічні плями, але прикриті тонкою і ясною веретвою фотосфери. Першим, що звернув увагу на єї явища був Trouvelot, (*American Journal of Science*. 1876. Marth ст. 82 сл. Young о. с. 129. Пор. *Bulletin astronomique* т. II. р. 1885. ст. 263, 364. 413. *Sirius* т. XIX. ст. 51. сл.) він і назвав їх замраченими плямами. Trouvelot постеріг, що грануляція над тими замраченими плямами є рідша і слабша що до свїтла, але за те більше рухливим в иньших околицях фотосфери. В наслідок тої великої рухливости зеренець грануляції зміняєсь вигляд таких замрачених плям дуже часто, нераз в одній або двох мінутах і то до непізнання. Trouvelot думає, що згадані явища — се такі самі плями як звичайні, лиш сили, що їх витворили, є за слабї, щоби цілком продерти зверхну веретву фотосфери. Завважати однак належить, що ся думка не є надто оправдана, бо такі „замрачені“ плями можна подибати навіть в околицях сонічного бігуна, куди звичайні плями ніколи не трафляють ся.

Сам акт повставання плям є нам дотепер неясний і таємничий, позаяк ніхто єго виразно на власні очі не видїв. Підчас своїх 40-літних обсервацій був R. Wolf кілька разів в тім щасливім положеню, що міг видіти дещо похуже на нагле повставанє сонічних плям. Кілька разів в часї єго практики здавалось Wolfови, що на поверхні сонця щось якби нагло пукло і повсталала пляма сонічна. Але навіть сам Вольф не посьмїв з сих фактів робити якихнебудь заключень — тим меньше можем се ми робити. (Пор. *Wolf Handbuch der Astronomie* т. II. ст. 407. Було се в р. 1848.) Таксамо або

і ще менше маємо право вірити постереженню Brautner'a, хоч оно після його оповідання було дуже докладне. (Sirius XI. 1878. ст. 287) 1815 р. 26. вересня побачив він в одній околиці сонячного кружка щось в роді хмари. По трох чи чотирох минутах помітив Brautner серед сеї хмари сильне замішанє. Оно тревало може 50 секунд, а коли устало, виразно побачив Brautner велике число дрібних плямок, іменно в сусідстві краю хмари. Серед сих маленьких плям тревали дальше великі перевероти. Центри плямок то никли — заливала їх брунатна мрака — то знов показувались. В ківці рух устав, а місце згаданої хмари заняла група плям значного розміру.

Є се як видим обсервация дуже цікава, але годі її безоглядно признати правдивою з двох причин: 1) Обсерватор не був фаховим астрономом, лиш ділетантом, 2) Їго інструмент був так слабкий в порівнянню з інструментами нинішніх обсерваторий, що не можемо мати до него довіря, коли новітні астрономи нинішніми средствами не встигли потвердити за такий довгий час обсервації Brautner'a.

Взагалі треба завважати, що в місця яснім і чистім на сонячнім кружку ніколи відразу не повстає ізольована пляма, а завжди ціла група. Дуже лиш рідко лучаєсь, що витворить ся відразу одинока пляма. Такий случай бачив в 1877 р. в цвітні Janssen (Sirius X. 1877. ст. 157.) 14. того місяця була поверхня цілого сонячного кружка цілком чиста, ірануляция виступала дуже виразно. На другий день же явилась нагло група плям 2' проміру. Ту ненормальну прояву толкує Janssen тою обставиною, що тоді власне припадало періодичне minimum сонячних плям. Плямотворча сила була отже дуже слаба, натомість нахлін плям до зникання дуже сильний.

Звичайно витворюєсь наперед ціла група плям. Она зложена звичайно лише з самих осередків Притінок розвинений дуже слабо. Ті осередки є часто найбільші як звичайні пори. Число їх що хвиля ся збільшає, бо прибувають щораз нові і зачинаєсь творити коло них притінок зразу невиразний, неправильний, замазаний. Потім починає ся розвиток поодиноких центрів, они індивідуалізують ся і повстає група самостійних плям. Подамо кілька примірів.

1865 р. в липни 29. побачив Secchi на сонячній поверхні три невеличкі, темні пори, котрих в попереднім дни не було на тім місці. 30. липня показала ся на місці згаданих пор темна маса з чотирма осередками і дуже неправильним замазаним притінком. Притінок був в кількох місцях перерваний ясними огневими язиками. Межи згаданими чотирма центрами нагромадила ся світляна матерія. Она була в безперервнім руху, так що по кількох годи-

нах всі подробиці, які мож було добачити, цілковито ся зміняли. Тільки загальні черти полишилися незмінними. 31. липня згадана сьвітляна маса розтягнулась повздовжно, та поділила цілу пляму на дві вузькі а довгі частини. Вони продовжували ся так наглядно, що за добу їх довгість подвоювалась. Середуца маса змінялась потім поволеньки в невиразний обсіпаний ясними зернами притінок. Розвинулися поволі також центри і віддалились від себе. Але недовге було житє тій групі. 17. вересня полишилось по ній лише кілька пор і походень. (Secchi о. с. 60 сл.)

Подібні випадки зареєстрував Konkoly. 1873. 15. лютого показали ся при східнім краю сонічного кружка три пори. Слідуючого дня була вже на тім місці велика і досить добре виобразувана група з 9 осередками. Такий сам случай лучивсь межи 19. а 22. грудня 1873 р. (Konkoly. Beobachtungen angestellt am astrophysikalischen Observatorium in O'Gyalla. т. I. ст. 87.)

Від згаданих вище явищ не дуже ріжнить ся також явище обсервоване Spörer'ом в 1876 р. IX. 30. На дуже яснім полі витворили ся нагло в значній скількості невеличкі плями і окружили середну часть сего поля вінцем. В короткім часі зайшли в тій околиці великанські переміни, бо 2. жовтня згадану ясену середину занімала виобразована група плям, плями-ж що єї вінцем окружали, зникли. (Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam т. I. Beobachtungen der Sonne von G. Spörer ст. 71.)

Група сонічних плям або лишаєсь до кінця свого істнованя групою, або змінєє ся по певнім часі в одну більшу пляму. Звичайно творить ся правильна пляма з притінком в западній части групи (що при руху оборотовім сонця іде наперед). (Ibidem ст. 77.) Інші осередки групи в такім разі звичайно або никнуть цілком або лишають ся ще якийсь час яко пори. (Ibidem ст. 69.) Сей процес зникання поодиноких центрів в групі, причім витворює ся на їх місці одна пляма, відбуває ся нераз дуже скоро і напрасно. Konkoly бачив 1873 р. 9. червня у певної групи 9 осередків. До 13. червня всі вони уступили місця одній правильній плямі. (Beobachtungen angestellt am. Astr. Obs. in N'Gyalla I. ст. 83.)

Такі перевероти відбувають ся в дуже ріжний спосіб, однакож Peters, Schwabe і Spörer вписли в часі своїх довголітніх обсерваций дослідити певні правила розміщення, повстання і зникання плям в групах. Досліджено, що групи розширюють ся через повстанє нових плям майже завсїгди в напрямі східнім. Всі більші плями повстають майже завсїгди в западній части групи. Spörer помітив, що на 68 груп, які були обсервовані, заховувались 48 т. в. пода-

вляюча більшість в висше згаданий спосіб. (Publicationen des astr. Obs. zu Potsdam т. I. ст. 77.) Позісталі плями в групі уставляють ся тоді по вехідній стороні головної плями і то дуже часто в напрямі сонічних рівнобіжників. (Завважав се вже Schröter поp. Comptes Rendus etc. т. LXIV. ст. 375.) Наслідком того мають деякі більші плями по своїй вехідній стороні щось в роді хвоста. Сей „хвіст“ складаєсь з безчисленних малих плямок, що розсіяні по відповідно видовженім притінку. За таким хвостом тягнуть ся звичайно в радї поменьші плями групи. Се явище бачив кілька разів Secchi (о. с. ст. 85). Коли така група починає зникати, никнуть наперед звичайно западні плями, хибань що має витворитись в групі яка більша пляма. Тоді бо западні плями полишають ся і беруть визначну участь в витвореню великої плями. Характерне є також виступоване плям парами.

В часі істнованя всякої сонічної плями можем розрізнити три періоди: 1) період повстання — про него власне скінчилисьмо говорити, 2) період супокійного побуту, 3) період зникання.

Про період супокійного побуту, котрий випадає нам з порядку описати, не мож много сказати. Многі учені прямо заперечують, щоби він у всіх плям істнував, лиш деякі плями мають такий період. Що правда треває він у тих плям нераз дуже довго, бо кільканацять день і більше. Подибуєм сей період супокійного побуту звичайно лиш у плям, що мають вид округлий, а пенумбру дуже правильну.

Період зникання починає ся з тою хвилиною, коли сила, що витворила пляму, так ослабне, що вже не пляма на фотосферу, але фотосфера на пляму починає мати рішучий вплив. Повстають в плямі нові види і від того часу починають ся в нїдрі его такі самі перевороти як в періоді повстання, лишень в відворотнім напрямі.

Зникненє плями може послїдувати в двоякий спосіб: 1) коли огневі язики вдершись до середини, поділять пляму на кілька частий, 2) коли сьвітляна материя починає зі всіх боків поступати ідї середині плями і в кінци єї залле. Звичайно однак обі ті причини складають ся разом на погибель плями і суть зі собою в видній звязи. (Spörer Publicationen d. Astr. Obs. zu Potsdam т. I. ст 79 Tageblatt der 57. Versammlung deutscher Naturforscher in Magdeburg 1884. ст. 184.)

Secchi замітив, що коли сонічні плями дїйдуть до певної стадії свого розвою, починає окружаюча їх фотосфера посувати ся до

середини плями і висилає огневі язики т. з. мости, що ділять пляму на дві або більше частий.

Творенє таких мостів належить до найінтереснїйших явищ, які можем бачити на сонїчній поверхні. Peters пробуваючи в Неаполі в роках 1845 і 1846 звернув увагу на тую фазу сонїчних плям і описує її в такий спосіб: Коли наближаєсь період зникання плям, можна завважати серед притінка вузенькі струйки сьвітла, котрі щораз то зближують ся до осередка плями а вкінці втискають ся таки в его нїдро. Таких сьвітляних струй є звичайно кілька або й більше.

Коли дві такі струї їдучи з противних сторін зближують ся достаточнo до себе, витрискають нечаянно із кінців обох струй огневі язики. Зі скоростію блискавки они спотикають ся з собою, остають в злучї яквись час, але потім знов ся розділяють. Таке повтаряє ся кілька разів в протягу кількох хвилин. Вкінці огневі язики лучать ся постоаянно і творить ся міст. Описане явище є о стільки цїкавійше, що одного разу огневий кінчик струї наперед зіткнув ся з противлежним собі кінчиком а потім скрутив нагло в бік і зіткнув ся з другим. Всї ті рухи виглядають так, якби їх викликувала електрична сила і є надзвичайно скорі. Peters обчисляє їх скорість на 200.000 km. на секунду (minimum). (Proceedings of the American Association for the advancement of science т. IX. Відповідний уступ наведений в переводі з оригінала у Young'a о. с. ст. 118.)

За витворенєм моста не конче мусить зараз йти зникненє плями. Дуже часто наступає лишень т. н. сегментация — поділ плями на дві або кілька частий. Міст може іменно мати трояку натуру. Або се є розпалена струя фотосферних хмарин понад плямою, або се є струя розжарених газів в самім уровени плями, або вкінці поступуюча ерупция серед походень, що окружають пляму. Коли міст є первого або другого рода, тоді пляма звичайно зникає, колиж він належить до третьої категорії, тоді наступає сегментация. Міст проділює пляму на дві части, що мають зразу спільну пенумбру. Але вже в короткім часі обі ті части відділюють ся цїлком від себе, кожда з них вироблює собі осїбний притїнок і стає самостійною плямою. (Spörer. Tageblatt der 57. Versammlung deutscher Naturforscher zu Magdeburg 1884. ст. 145 сл. і в Publicationen des astr. Obs. zu Potsdam т. I ст. 78.)

Є се взагалі дуже трудна річ, побачивши на плямі міст осудити, чи она зникне, чи тільки ся поділить. Нераз лучить ся, що цїла пляма покрита мостами, а прецінь не зникає, лишень ся ді-

лить. Такий случай обсервував Secchi (о. с. ст. 64) 1865 р. 29. мая. Пляма, котру він обсервував, була досить правильна на вид, але мала в середині ясну масу. Від неї розходилося кілька мостів як сприхи при колесі. Були отже умови, що моглиб довести до цілковитого зникнення плями; тимчасом сталося інакше. Мости поволи позникали, середна маса також, потім начався в притінку оживлений рух і по кількох днях слідувала сегментація.

Звичайно однак можемо сподіватися, що пляма невдовзі щезне, коли замітимо, що численні мости її середину залягають. Вони стають іменно щораз виразніші, число їх збільшається, береги плями посуваються і до осередкови, аж в кінці світляна маса покриває її цілком.

При описі повстання і зникання плям виділи ми на кождім місці, що найвизначнішою може признакою сонячних плям є їх велика змінність. Найліпше пізнаємо її в той спосіб, що придивимось величині плям сонячних і її змінам.

Величина плям є так само різна, як і їх вишній вигляд. Бо не тільки ріжні плями сонячні мають ріжний розмір, але розміри тої самої плями в ріжних стадіях її розвитку заоднося змінняють. Найменші між сонячними плямами є пори, бо їх величина не доходить нерідко до одної секунди луку. Хочся величина здається нам дуже малою (позірний промір сонячного кружка виносить $32''$), бо секунда луку є для нашого зору майже невидима, то прецінь вона репрезентує на поверхні сонця середно 725 km . Плямка сонячна того проміру представляєся навіть крізь сильний телескоп яко дрібненька точка, а прецінь її поверхня виносить 412.388 km^2 т. є. майже $\frac{2}{3}$ поверхні Австро-Угорщини.

Але пори суть надзвичайно малі в порівнянню з нормальними плямами, котрих середна величина виносить що найменше кільканацять секунд в промірі. (Примічаєм, що наша земля, коли на її дивимося з поверхні сонця, виглядає як малий кружок $17.6''$ пересічного проміру). Деякіж плями доходять до великанських розмірів. Дуже інтересні дати подав в тім напрямі Schwabe, що мав в часі своїх довголітніх обсервацій велику нагоду видіти плями незвичайної величини. 1848 р. IX. 22. була на поверхні сонця пляма проміру $147''$ отже 9 рази більшою чим земський. Поверхня її плями була 18 разів більша від поверхні землі. 1842 р. VI. 30. бачив Швабе ще більшу пляму. Она мала $168''$ проміру. Найбільша ж з плям, які колинебудь бачено, явилася на сонячній поверхні $18^{\circ} 0'$. IX. 5. Она мала промір $302''$ т. є. 21.400 km . а поверхню $35.100.000.000 \text{ km}^2$. Ті розміри перевищують відповідні розміри

нашої земскої кулі 17 і 69 разів. (Обсервації Schwabe'ого помічені в *Astronomische Nachrichten* від р. 1843 починаючи. Про великі плями пор. *Himmel und Erde* т. IV. (189²) ст. 484. і т. VI. (1894) ст. 38.)

Ще більші розумієся розміри мають групи сонічних плям. Schwabe видів в червні 1845 р. групу 668" т. є. 468.000 km. проміру. Групи такої величини не належать впрочім до рідкостий. Знаєм прецінь про численні случаї в старинности, коли сонічні плями оглядано голим оком. (Wolf. *Handbuch der Astronomie* т. I. ст. 564 сл.) Правда що сонічна пляма потребує після Schwabe'ого мати лиш 50" проміру, щоби її було мож видіти голим оком (після Tissot'a навіть тільки 30"), але мусим признати, що иньша се річ видіти пляму, коли знаєм, що она є на поверхні сонця, а иньша, коли про се не знаєм. Мусїли отже згадані плями бути дуже значної величини, коли простодушні і неупереджені люди старинности могли їх добачити.

Тільки позитивного про величину плям. Їх змінність найлучше пізнаєм на змінах їх величини. Щоби довго не розводитись, возьмем собі клясичний примір та придивимось групі, що була послідною між згаданими. 1845 р. VI. 14. довжина її від сходу на захід виносила 668". По двох днях т. є. 16. червня она зменьшилась до 474" т. є. о 194" = 140.65⁰ km. На оден день випадає отже для сего руху дорога 70.325 km. Є се скорість, супроти котрої скорість найстрашнійшого оркану є марна. Ще більшу скорість руху можна було завважати у плями, що показалась в вересні 1850 р. 5. вересня її промір виносив 302" луку, коли попередного дня т. є. 4. вересня лиш 93". В однім дни розширилась отже пляма лінеарно о 209" т. є. о 151.525 km.

Під кінець уступу про повстання і заникання сонічних плям скажем кілька слів в справі їх тревалости. Про ню скажем хіба се, що як і иньші прикмети плям, так і она є дуже змінна. Взагалі завважано, що плями, котрі скоро повстали і розвинулись, також в короткім часі зникали. (Secchi о. с. 91. Young о. с. 114.) Лучало ся нераз, що плями вже в кількох днях по своїм повстаню зникали. Середна тревалість плями сонічної виносить 2—3 місяці, але трапляють ся плями, що далеко довше перебувають на поверхні сонця. В р. 1779. одна пляма через 6 місяців позіставала на сонічнім кружку. Schwabe обсервував в р. 1840 одну пляму протягом 6½ місяця, а в літах 1861/2 навіть через 18 місяців.

Належить однак замітити, що протягом сего часу плями звичайно і кілька разів навіть відновлюють ся. Частенько в хвилині,

коли пляма здає ся туй-туй счезне, родить ся в ній нова сила і пляма замість счезнути ще розширяє ся. Secchi обсервував 1866 р. кілька плям середно тревалих, котрі находились вже в стадії заникання, але потім знов „ожили“. Часто відроджене приходить за пізно, коли пляма вже зникне. Тоді повстає нова пляма в тій місци сонічної поверхні, деби находила ся давніша пляма, еслиб ще істнувала.

Досліди над теплотою і спектральним виглядом плям.

Досліди над зглядною теплотою сонічних плям не дуже далеко поступили, бо сконструоване відповідних знарядів натрапило на великі трудности. Перші учені, що заняли ся тою правою Henry і Alexander найшли з 12 помірив, що плями дають тільки 0·8 тої теплоти, що єї дає їх ясне окруженє. (Fritz. Die Sonne ст. 9.) Але ті поміри були тільки першою пробою.

S. P. Langley, славний геліолог, про котрого ми вже нераз згадували, перший винайшов докладні інструменти до таких помірив. При їх помочи одержав він в осени 1874 та на весну 1875 р. дуже важні результати. Протягом згаданого часу довершив Langley 36 помірив температури осередків плям а 32 поміри теплоти притінків. Поверхню плям потрібну до обчислення брав Langley з Researches of Solar Physics. (Є се розвідки Warren'a de la Rue, Balfour Stewart'a і Веніяміна Loewy'ого, астрономів обсерваторії в Kew. Они поміщені в річниках Philosophical Transactions.) Положивши проміньоване фотосфери рівним одиниці найшов Langley, що осередки плям дають в порівнанню з нею тільки $0\cdot54 \pm 0\cdot05$ сьвітла і тепла; притінки тільки $0\cdot80 \pm 0\cdot01$. (Sirius т. V. ст. 59—62.)

Хотай се може до нашої теми не дуже належить, подамо ще в коротких словах дальші виводи Langley'a, що тикають ся впливу плям на загальне проміньоване сонця і его зміни, котрі знов відбивають ся на огріваню за освітлюваню землі. Середний розмір сонічних плям є на підставі Kew'ских обсерваций слідуєчий: Підчас періодичного максимум займають осередки сонічних плям $0\cdot000376$ поверхні одної сонічної гемісфери, притінкиж $0\cdot001016$. Підчас мінімум ті числа виносять $0\cdot000021$, згладно $0\cdot000056$. Наколи помножимо ті вартости, що означають обсяг плям через вище подану, згладну їх теплоту, одержим числа, що виражають вплив плям на

загальне промінюване сонця. Ті числа будуть дуже скромні: для maximum 0.001016, для minimum 0.000055. Загальна отже зміна, яку можуть протягом свого періоду викликати сонячні плями в промінюваню сонця, не буде більша як різниця обох тих чисел т. є. 0.000961.

Щоби означити вплив сонячних плям на земську температуру, треба знати всі її позасонячні жерела. Понеже їх докладно не знаєм, старає ся Langley означити тільки границі, межі котрими лежить сей вплив сонячних плям. Він находить яко найбільше імовірну на се вартість 0.063 °C. (Sirius т. V. ст. 62.)

Langley робив свої досліді термоелектричним звеном. В новітших часах винайдено новий і докладнійший інструмент до того рода помірив тз. радіомікрометр Boys'a. Тим інструментом довершив в 1893 р. дуже важних помірив Wilson. Він мірив наперед зглядну теплоту осередка, потім теплоту точки в околиці плями, (причім вважав, щоби він був рівно як осередок віддалений від середини сонячного кружка) а вкінці теплоту самогож центра сонячного кружка.

Результати дослідів Wilson'a суть дещо відмінні від дослідів Langley'a. 1893 р. 7. серпня найшов пр. Wilson, що если промінюване осередка плями представим числом 1.31, то околиця плями дасть 4.49, а середина сонячного кружка 4.57. Відношенє промінювання осередка плями до промінювання околичних частий фотосфери буде отже виносити: 0.292 respective 0.287.

Є се однак лишень мінімальна вартість найдена Wilson'ом. Середна вартість з 20 обсерваций виносить 0.356 — є отже значне меньша від одержаної Langley'ом вартости 0.54. Wilson не скриває однак, що та різниця могла бути вчликана не тільки улпшенем інструменту, але також дійсною різницею промінювання плям в різних часах. *Proceedings of the Royal Society* 1894. LV. Nr. 333. ст. 246. *pop. Naturwissenschaftliche Rundschau* 1894. Nr. 14. і *Jahrbuch für Astronomie und Geophysik* V. Jhrg. ст. 5 сл.)

В найновітших часах кількох иньших визначних учених зайняло ся пильно сею справою, але їх досліді до тепер не оголошені. Проте згадаєм тут еще лиш про відкрите Савелїєва. Він найшов, що в тій самій мірі як росте число плям, росте також і температура околичної фотосфери. (*Comptes Rendus*. T. CXVIII. ст. 62.)

Спектроскопією плям не будемо ся обширно занимали, бо є се річ дуже спеціальна і так сильно з загальною спектроскопією сонця злучена, що мусїлибсьмо і ту послїдну обширно трактувати. Подамо тільки найважнїйші результати учених дослідів над тим пред-

метом. Huggins, Lockyer, Secchi і Young найбільше ся на тім поли заслужили. (Secchi о. с. 539 сл. Young о. с. 125 сл. Schellen. Die Spectralanalyse т. II. ст. 63 сл.)

Коли направимо щілину спектроскопа на якусь пляму сонічну, побачимо, що ясна стяжка дуговини буде в напрямі повздовжнім перервана темним поясом. Сей пояс — се дуговина осередка плями. Она є ширша або вузша після того, чи сам осередок ширший чи вузший. По обох сторонах сего пояса тягне ся дуговина притінка. Она є лишень троха темнійша від дуговини сонічної поверхні.

Дуговина осередка є на цілій своїй просторони в наслідок абсорпції сорозмірно дуже темна. Крім того можем завважати в ній ріжні зміни на фраунгоферівських лініях. В горішній (прифіолетній) часті дуговини межі лініями F а H є ті зміни дуже незначні. За те долішня часть дуговини виказує значні зміни.

В околиці плям а іменнож над походнями суть лінії водня за всеїди слабші, часто никнуть або підлягають відверненю — особливо лінія C. Навіть лінія F, що лежить як згадалисьмо на границі горішньої часті дуговини, підлягає часто тій судьбі. Нераз трапляє ся, завважав се Lockyer, що замість неї являє ся ясна лінія. (Schellen die Spektralanalyse т. II. ст. 65.) Все те походить з того, що в околицях плями звичайно повно є протуберанцій розпаленого водня, котрі компензують абсорпцію а нераз, коли суть дуже сильні, викликають навіть відвернене. В околицях сонічного края ясні лінії викликані протуберанціями зискують на силі і продовжують ся нераз в глуб темного пояса осередкової дуговини плям, іменнож великих.

Коли міст перериває пляму, або коли внутр єї находять ся яснійші місця, тоді лінія C дуже ся ослабляє, ба навіть зникає. Се все свідчить про присутність водня.

Взагалі дуговина осередка плям підлягає дуже сильним змінам. Они не дадуть ся витолкувати загальним догадом, що ті всі зміни походять з недостачи світла. Бо не тільки лінії нормальної сонічної дуговини в обсягу плями підлягають розширеню. Трапляє ся, що лінії в звичайній дуговині сильні суть в дуговині плями дуже тонкі і майже зникають, а відворотно деякі лінії, що ледви замітні в звичайній дуговині, суть в дуговині плям дуже виразні. Толкує ся се тим, що хмари розпалених металічних газів, находячі ся в єї внутрі, ділають на єї світло абсорпційно і то селективно. В сей спосіб та абсорпція, що вже існує, дуже ся зміцнює. Кілька металічних ліній підлягають в дуговині плями дуже сильному розширеню. Кілька ліній в зеленій часті дуговини, іменно лінії вапня, желіза,

тітану а особливож соду, розширюють ся 3—4 рази. Завважано, що діє ся се, коли пляма є округла і здаєсь глибока. Лнії соду заховають ся дещо відмінно від иньших, бо тратять точність границь і стають замазаними. Secchi припускає, що се вплив атмосферичних, земских відносин. (о. с. 545.)

З дальших власностей дуговини плям належить піднести, що абсорпційні лнії стають при обох кінцях щораз то тонші і заострені. Зглядна яєність дуговини плям є цілком відмінна від яєности дуговини самогож сонця. Кривина дуговини плям має цілком иньший перебіг, як кривина властивої сонічної дуговини. Та послідна має перебіг дуже правильний — поволи ся підносять і деєь від $\frac{2}{3}$ своєї довжини починаючи, досить нагло опадає. Кривинаж дуговини плям має дуже неправильний перебіг. Має она чотири горбки. Три перші поступенно підносять ся і вершками своїми сягають до кривини властивої дуговини сонця. Від вершка третого горбка спадає кривина дуговини плям дуже напрасно, підносить ся еще раз але вже слабо і потім опадає досить скоро, так що її зглядна довжина (мірена на оси X-iv) є о $\frac{1}{4}$ коротша як кривини головної дуговини.

Є в сонічній дуговині кілька лній, що і в дуговині плям позістають незмінні. Суть они тим інтересні, що суть розміщені по дуговині в майже рівних віддаленях. Інтересно, що ті самі лнії указують ся в дуговині червоних зізд. Можемо отже припустити, що єслиб такі абсорбуючі верстви як над осередком плями находились на цілій поверхні сонця, то оно булоб цілком червоне.

На увагу заслугоє також відкритє лнії водяної пари в дуговині плям Секкім. Заперечив єму що правда Angström, але Janssen рішив, що поки що ані оден ані другий учений не може мати претенсії до цілковитої певности. За Secchi'm є імовірність.

До дуже звичайних явищ в дуговині плям належить також відверненє двох лній соду т. є. D_1 і D_2 . Дуже виразне явище того рода обсервував Young 1870 р. 22. вересня. Лнії ті дуже виразні в дуговині фотосфери і притінка уступили в дуговині осередка місця яєним лніям.

Коли в самій плямі або в її околиці трафляють ся вибухи або иньші заколоти, видимо се зараз в дуговині плями. При тім деякі властиві дуговині плям лнії підлягають великим змінам — а иньші цілком ся не зміняють. З сего видим, що абсорбуючі гази займають ріжні положеня зі згляду на висоту. В наслідок того їх рухи не можуть на себе безпосередно впливати. (Young о. с. 128.)

Розуміє ся, що спектральний вигляд плям є дуже ріжний пі сля елементів, котрі переважають в газових хмарах, що суть при-

чиною абсорпції. Часто трапляють ся плями аномальні під тим зглядом пр. пляма обсервована в Greenwich 1877 р. в жовтні. (Schellen die Spectralanalyse т. II. ст. 69.)

Для нас цікаве, що плями інакше виглядають в спектроскопі підчас періодичного maximum а інакше підчас minimum. Perry і Cortie найшли, що скількість розширених металічних ліній єсть далеко більша в minimum як в maximum. Се відношене представляє ся для лінії желіза як 27 : 8. Підчас maximum лучає ся часто, що кілька ліній виказує значне розширене навіть в пенумбрі. (Monthly Notices of Royal Astronomical Society т. 49. 1899 ст. 410. пор. Jahrbuch für Astronomie und Geophysik. т. I. ст. 5.) Потвердилось єї відкриття дослідями слідуячого року. (Monthly Notices etc. т. LI. ст. 1890. ст. 76.)

Подібні явища як в дуговині поодинокі сонічної плями можем також обсервувати в дуговині цілих груп. (Monthly Notices etc. т. LII. 1892. ст. 424.)

Результати спектральних дослідів над сонічними плямами мають дуже велику вагу для пізнання їх істоти. Над тим предметом будем ся обширно застановляти в кінцевім уступі нашої розвідки. Тепер згадаєм лиш, що плями є районами поверхні сонця, де спеціяльно абсорпція виступає з великою силою.



Бібліографія і хроніка математично-фізична.

Ј. Puzyna. Teorya funkcyj analitycznych. (Lwów, Altenberg p. 1900. том II. ст. XVI+693). ¹⁾

Наколи перший том сего твору був дуже інтересний і змістом і способом представлення, то другий том робить ще приємнійше вражінє і є ще інтереснійший для тих, що розсліджують теорію функцій способом, вказаним через незабутний геній Вейерштрасса.

Том сей складає ся з вісьмох частий в 23 розділах.

Часть перша (про функції елементарні та функцію цілковиту переступну без місць зерових) займає ся функцією виложною, та функціями тригонометричними, які з неї виходять, далі її періодами, функціями раціонально утвореними $R(e^{cx})$ і їх теоремою додавання (се є вступ до теорії функцій еліптичних), далі похідними безконечно високого ряду; маємо ту дальше відвернення функцій виложної і тригонометричних, отже логаритм і луки, моногенічність логаритму, функцію виложну яко добуток та загальну форму функції одної та много змінних без місць зерових.

Часть друга займає ся функціями однозначними зі скінченим або безконечним числом місць особливих. Маємо ту зібрану цілу теорію Вейерштрасса таких функцій, теореми Mittag-Leffler'a, різні функції та вираження аналітичні. В части третій маємо проблем однозначного та многозначного відвернення рядів одної змінної, з чим ся лучить загальна теорія т. зв. образу альгебраїчного, теорія окружання всіляких точок особливих того образу, характер та дефініції функцій альгебраїчних. Розсліди геометричні про криві долучені та рід (дефект) кривих — уступ в великій мірі оригінальний — кінчать сю часть.

Часть четверта про функції раціональні $R(xy)$ місця (xy) образу альгебраїчного представляє нам незвичайно важний уступ

¹⁾ Пор. Збірник мат. природ. Т. IV. з. II.

з теорії Вейерштрасса, будучий вступом до теорії інтегралів Абелевих, тим важніший, що сеї теорії покійний німецький геометр ніде не публікував (була она лиш звісна з єго викладів). Тож за сю часть автору спеціальна належить ся подяка. Є ту ціла теорія функції $R(x, y)$, є ту схарактеризовані функції $H(x, y)$, $H'(x, y)$, $H(x, y, y')$, є подана метода твореня функції $R(x, y)$ при помочи функцій H , дефініція трох родів інтегралів Абелевих; в кінци подані способи обчислення роду ρ — деякі способи знов зовсім оригінальні автора — теорія кривих 0 роду, 1, 2 та кривих гіпереліптичних.

Часть пята подає деякі уступи з т. зв. „Analysis situs“ та теорію поверхний Riemanna. Ся часть творить перехід до части шестої, де методи Вейерштрасса чисто аналітичні повязав автор дуже уміло з теоріями більше геометричними Cauchy та Riemann'a. В сій части маємо теорію залишків (residua) Cauchy, значінє інтегралів по замкнених лініях, лівії перерви для функцій з одним та більше зложеними аргументами та епохальне твердження Cousin'a про функції однозначні много змінних. Далі маємо в тій части теорію інтегралів Абелевих та еліптичних, теорію їх періодів, теореми додаваня, функції E Вейерштрасса та представленє функції раціональної $R(x, y)$ добутком функцій E. З відверненя інтегралів еліптичних приходить автор до теорії функцій еліптичних Jacobi, які є ідентичні з функціями σ Вейерштрасса та функцією p . Ту рівнобіжність обох теорій, які виходять з иньшої точки, а остаточно сходять ся з собою в вислідах, представив автор дуже наглядно. Уступи з загальної теорії функцій еліптичних (розклад на елементи прості, представленє їх через квоти функцій σ і т. п.) кінчать сю інтересну часть.

Часть сема подає теорію функцій гармонічних і їх застосованя. Є ту схарактеризований теорем Green'a, засада Dirichlet'a, теорія функцій гармонічних для обшарів замкнених (інтеграли Poisson'a), на поверхні Riemann'a, теорія відтвореня многокутників в півплощи, а врешті метода вирівняня (alternierend) Schwarz'a та застосованє функцій гармонічних до обчислення періодів інтегралів Абелевих, їх відверненя та ріжних відтворень. Як бачимо, ся часть книжки підходить вже більше до метод геометричних сучасної аналізи.

На ґрунті чисто-геометричним стоїть послідна частина сеї книжки про функції Schwarz'a та трикутника. Маємо ту теорію похідних Schwarz'a, рівнанє ріжничкове Gauss'a, та відтвореня геометричні при помочи функцій трикутника та многостінників правильних, які входять до теорій аналітично-геометричних Кляйна. Теорія групи модулової, незмінника $J(\tau)$ та поділ півплощи при помочи групи модулової — що вже належить до теорії функцій автоморфних — кінчить частину осьму, а разом і послідну сеї книжки.

Коли звернемо увагу на величезний матеріал, зібраний автором в сій книжці, на систематичний та сорозмірно легкий — о скільки се в загалі можливе — спосіб представлення, використанє всіх найважніших, найновіших здобутків сучасної аналізи математичної,

то можемо автору висказати щирю подяку в імені всіх, що займають ся і слідять розвій наук математичних.

Wiadomości matematyczne (видає Dickstein, Варшава). Том IV. 1900.

До тепер вийшло 4 зошити сего тому в двох випусках. Перший випуск містить в собі ось-ті праці: M. Feldblum: Конструкції геометричні. G. Loria: Уваги про сороадні бігунові. В. Левицкий: З теорії дробів тяглих. В. Danielewicz: В kwestії обчислення резерви премійної від обезпечень на житє. R. Merecki: Обсерватория астрономічна ім. А. Ендржейевича в Варшаві. Спростованє до артикулу M. Hubera: Про сумованє чисел варіацій. Перегляд літератури. Бібліографія. Хроніка etc.

Зошит IV. містить в собі: W. Gosiewski: З царини рахунку імовірности. M. Ernst: Обчисленє дороги метеора, обсервованого дня 6. червня 1899 р.

H. A. Lorentz. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und der Anfangsgründe der analyt. Geometrie (übersetzt von Dr. C. C. Schmidt) Leipzig 1900, Verl. Johann Ambrosius Barth; 10 M. — ст. VIII+476.

Є се німецький перевід з голєндєрекого першовзору (додано лиш в німецькім переводі уступ про функції тригонометричні); поміщено ту елементарний виклад в 14 розділах про рахунок ріжничковий зі вступом про геометрию аналітичну просторони, далі слїдує виклад про поєдинчі та многократні інтеграли та вступ до рівнань ріжничкових.

Ch. Sturm. Lehrbuch der Analysis (übersetzt von Dr. T. Gross). Berlin, Verl: Fischer; 2 томи (зі вступом про житє і діла Sturma).

Є се перевід знаменитого твору Sturm'a: „Cours d'Analyse. Перший том (36 лекцій) подає виклад рахунку ріжничкового з теорією maxім'їв та minім'їв, застосованє рахунку ріжничкового до геометрії (теория стичних, луків, еволюти, кривина, криві подвійно криві, криві поверхні, гелїсса, точки особливі кривих); від лекції 27. до 32. є загальні взори рахунку інтегрального (інтеграли раціональних функцій, інтеграли означені); лекція 33. до 36. подає геометричне застосованє рахунку інтегрального (отже квадратури, кубатури, многократні інтеграли).

Том II. подає в лекціях 37. до 58. докінченє рахунку інтегрального, отже ріжничкованє під знаком інтегральним, інтеграли Euler'a, далі теорию рівнань ріжничкових повних і часткових і їх геометричне застосованє та рахунок ріжниць; в лекціях 59. до 62. є поданий рахунок варіаційний. — В кінци подана збірка важнійших формул з цілої книжки.

Извѣстія физико-математическаго общества при императорскомъ казанскомъ университетѣ.

Вторая серія томъ IX. містить в собі: Випуск третій (Казань 1899): І. А. А. Марковъ: Отвѣтъ. Д. М. Синцовъ: Объ аналитическомъ параллелограммѣ Лагранжа-Ньютона. М. А. Грачевъ: О способѣ М. G. Bigourdan'a опредѣленія широты. П. Лѣтопись физ.-мат. Общества і научная хроника. — Приложенія: 1) Памяти Софуса Ли. (Ту поміщений через Синцова спис усіх праць Ли.). 2) А. Котельниковъ: Проективная теорія векторів (вступ).

Випуск четвертій (Казань 1900): І. Д. Селивановъ: Объ уравненіяхъ, имѣющихъ всѣ корни вещественными. П. Лѣтопись физ.-мат. Общества і научная хроника. — Приложение: Д. Синцовъ: *Bibliographia mathematica rossica* (1898). Объявленія.

Вторая серія томъ X. містить в собі: Випуск першій (Казань 1900): I. W. H. L. Janssen van Raay: *Opinions de quelques géomètres hollandais sur la théorie des parallèles et sur la géométrie non-euclidienne*. И. И. Аристовъ: Объ итерации функцій. P. S. Porretzky: *Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques*. П. Лѣтопись физ.-мат. Общества. М. Леви: О трудахъ Евгенія Бельтрами. Объявленія.

Записки императорскаго харьковскаго университета подають слѣдуючі статії:

Рік 1900 книга 2. Результаты наблюденій метеорологической станціи за 1899 г. В. Я. Данилевский: Изслѣдованія надъ фізіологическомъ дѣйствіемъ электричества на разстояніи (ст. 97 - 208).

Книга 3. Результаты наблюденій метеорол: за 1899 г. В. Я. Данилевский: як вище (ст. 209—280).

Университетскія извѣстія (Кієвъ) подають між иньшими:

№г. 3.: Наблюденія метеорологической обсерваторіи (юль-декабрь 1897). (ст. 1—44). Г. Сусловъ: Основы аналитической механики (ст. 145—176). Н. Бунге: Курсъ химической технологіи 1173—1210).

№г. 4. (апрѣль): Г. Сусловъ: Основы аналитической механики (177—240). Н. Бунге: Курсъ химической технологіи (1211—1242).

Физико-математическія науки въ ходѣ ихъ развитія (журналъ исторіи, философіи і бібліографіи физико-математическихъ наукъ) издаваемый В. В. Бобынинымъ. Том первый — №г. 1.

Основнія задачи теоріи дифференціальныхъ уравненій. А. П. Пшиборскаго. Єто габілітаційний виклад автора, в котрім подає розвій науки о функціяхъ, як також деякі теореми.

Баронъ Плана. Очеркъ его профессорской и учено-литературной дѣятельности; критика і бібліографія.

№. 2. Второй международный съѣздъ математиковъ в Парижѣ в 1900 году. Первый русскій математическій журналъ. Критика і бібліографія.

№. 3. Баронъ Плана. Очеркъ его профессорской и учено-литературной дѣятельности (окончаніе). Первый русскій математическій журналъ (продолженіе). Юбилей г. дра Морица Кантора. Критика і бібліографія.

№. 4. Второй международный съѣздъ математиковъ въ Парижѣ въ 1900 году. Матеріалы для Истории математической журналистики въ Россіи. Первый математическій журналъ научнаго характера. Критика і бібліографія.

Sbornik Jednoty Českých Matematiků v Praze. Číslo I. Projektivná geometrie základných útvarů prvního řádu. Napsal Eduard Weyr. v Praze 1898. ст. VIII+189.

Книжка ся складаєсь з 12 розділів. Містить она в собі виклад геометрії проєктивної або, як єї також називають, синтетичної, яку розвинули Staudt, Reye, Poncelet, Chasles, Steiner та пок. Омелян Weyr. З теорії жмутів простих та пунктів, з теорії ангармонічного поділу та інволюції, проєктивних та перспективних метів виведені є ту усі важнійші твердження нової геометрії. Теорія бігунових, теорія кривих другого степеня (взглядно другої класи), твердження Pascal'a, Brianchon'a, Desargues'a, теорія гіпербольоїди та гіперболічної парабольоїди та їх побудовне при помочи жмутів точок та простих, є ту представлена дуже наглядно та елегантно. А коли додамо до сего гарний вигляд зверхний та красні фігури, то можемо сказати, що книжка ся вповні відповідає ціли яко дуже добрий підручник до пізнання метод синтетичної геометрії.

Вийшли з друку:

Rudolf Mewes. Licht-, Elektrizitäts- und X-Strahlen (2 Aufl. Berlin, Fischers technologischer Verlag, M. 1'50).

Rudolf Mewes. Die elementare Physik des Äthers (Kraft und Masse). 2 Theile. (Berlin ibidem). M. 5.

A. Righi. Die Optik der elektrischen Schwingungen (übers. von B. Dessau). Leipzig M. 6.

W. Weiler. Wörterbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Leipzig. M. 12.

H. Burkhardt. Funktionentheoretische Vorlesungen. 2 Theil. (Elliptische Functionen), Leipzig, Veit u. Co. 10 M.

- L. Fuchs. Bemerkungen zur Theorie der associierten Differentialgleichungen. Berlin, Reimer.
- M. Hamburger. Über die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung. Berlin, Reimer.
- H. Dörrie. Das quadratische Reciprocitätsgesetz im quadratischen Zahlkörper mit der Klassenzahl 1. Göttingen. M. 240.
- F. Schilling. Über neue kinematische Modelle sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyclischen Kurven. Halle M. 120.
- Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Photographische Himmelskarte. Zone $+31^{\circ}$ bis $+40^{\circ}$ Deklination. 1. Bd. Leipzig Engelmann. M. 25.
- L. Boltzmann. Vorlesungen über Gastheorie. 2 Theil. Leipzig. J. A. Barth. M. 7.
- F. Richarz. Neuere Fortschritte auf dem Gebiet der Elektrizität. Leipzig. B. G. Teubner. M. 115.
- C. Schultz. Die Ursachen der Wettervorgänge. Wien. Hartleben. M. 2.

Виходить в зошитах Handwörterbuch der Astronomie. Breslau, Trewendt (зошит à M. 3'60; дотепер 20 зошитів).

В книгарні Gauthier-Villars (Paris, Quai des Grands-Augustins 55) вийшли послідніми часами слідуючі книжки:

- J. J. Thomson: Les décharges électriques dans le gaz (traduit par L. Barbillon), Paris 1900 5 fr.
- E. Rouché et Ch. de Comberousse: Traité de Géométrie (I. partie — Géométrie plane, II. partie — Géométrie dans l'espace), Paris 1900 17 "
- E. Spée: Région b-f du spectre solaire 40 "
- F. Tisserand: Traité de Mécanique céleste (4 volumes) Tome I. 1889, Tome II. 1891, Tome III. 1894, Tome IV. 1896 . 103 "
- P. Appell: Traité de mécanique rationnelle:
 Tome I. — Statique, dynamique du point, 1893 16 "
 Tome II. — Dynamique des systèmes, Mécanique analytique 1896 16 "
 Tome III. — Équilibre et mouvement des milieux continus 1900 15 "
- E. Gérard: Leçons sur l'électricité:
 Tome I. 1899 12 "
 Tome II. 1900 12 "

- E. Gérard : Traction électrique. 1900 3·50 fr.
- E. Rouché et L. Lévy : Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs :
Tome I. 1900 (VIII+557) 15.— "
Tome II. (sous presse)
- L. Lévy : Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques, 1898 7·50 "
- F. Michel : Recueil de problèmes de géométrie analytique. 1900 6.— "
- M. d'Ocagne : Traité de Nomographie; théorie des Abaques. 1899 (8^o, 480 pp.) 14.— "
- M. Servant : Essai sur les séries divergentes (4^o, 59 pp.)
- A. Witz : Thermodynamique, à l'usage des ingénieurs 2·50 "

- H. Fehr. Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la géométrie infinitésimale. (Paris. Carré et Naud). 1899, 8^o, 94 pp.
- H. Poincaré : Cinématique et mécanismes. (Paris. Carré et Naud) 1889, 8^o, 385 pp. 15 fr.
- A. Turpain : Recherches expérimentales sur les oscillations électriques. (Paris. Hermann). 6 fr.

Вийшли в друку:

- В. И. Курдюмовъ. Курсъ начертательной геометріи. Отд. I, II. Спб. 8^o 404 ст. Ц. 3 р. 50 к.
- П. П. Граве. О построении кривыхъ третьей степени. Казань. 8^o. 400 ст. Ц. 4 р.
- А. П. Котельниковъ. Проективная теория векторовъ. Казань. 8^o. ст. 112.
- В. Шиффъ. Сборникъ упражненій и задачъ по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ. Ч. I. Спб. 8^o ст. 326. Ц. 2 р.
- П. К. Соколовъ. Метода аритметики. Спб. 8^o IV+136. Ц. 60 к.
- В. Арбузовъ. Сборникъ аритм. задачъ для учениковъ средн. учебн. зав. Москва. 8^o ст. 85. Ц. 50 к.
- Г. Лоренцъ. Элементы высшей математики (перев. В. И. Шереметева). Т. I. Москва. 12^o ст. 747. Ц. 3 р.

(Записано в „Bibliographia mathematica rossica“ за рік 1898., видаваної казанським „Физико-математическим обществом“; сей випуск вийшов в р. 1899. під редакцією Д. Синдова).

- А. Ивановъ. Теорія прецесіи. Спб. 1899. 8° ст. 123.
- І. Косоноговъ. Атмосферное электричество и земной магнетизмъ. Кієвъ, 1899. 8°, 180 ст.+6 таблиць.
- О. Д. Хвольсонъ. Курсъ физики. Т. III. Ученіе о теплотѣ. Спб. 1899. 8°, 682 ст. Ц. 5 р.
- П. Л. Чебышевъ. Сочиненія, изданныя подъ ред. А. А. Маркова и Н. Я. Сони́на. Т. I. 8°, ст. 720. Спб. Ц. 7 р.
- Г. Шульгинъ. Мореходная астрономія. 8°, ст. 520+2 карты. Спб.
- Е. Пржевальскій. Аналитическая геометрія и собраніе задачъ изъ анал. геометріи. Изд. 4. 8°, ст. 340. Ц. 2 р.
- Н. И. Лобачевскій. Біографическій очеркъ. Спб. ст. 56. Ц. 15 к.
- С. Гуржеевъ. Прикладная механика. Изд. 3. Спб. 8°. X+446 ст.
- А. Л. Корольковъ. Лекціи по электротехникѣ. Спб. ст. 365. Ц. 2 р. 50 к.

Вийшов VIII. том, часть II. звісного журналу бібліографічного „Revue semestrielle des publications mathématiques“ (Amsterdam, Delsman en Nolthenius 1900).

23. серпня 1899 р. обходив знаний історик математики Д-р. Мориц Кантор, б. професор гейдельберского університета, 70. літню річницю своїх уродин. Їго прихильники відсвяткували се торжество виданем великого тома „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik“ яко додаток до журналу „Zeitschrift für Mathematik u. Physik“, видаваного під редакцією Кантора. В виданю сего тома взяли між иньшими участь: московский професор Бобинин, Дікштайн, Eneström, Curtze, Loria, F. Meyer, Rudio, Tannery, Wertheim і и. — Найбільша заслуга Кантора почиває в виданю (побіч мно- жества дрібнійших праць) величавої праці „Vorlesungen über Ge- schichte der Mathematik“, виданої в Липску фірмою В. G. Teubner; праця ся вийшла в трох томах та обнимає історію математики від найдавнійших часів до р. 1759.

В перших днях червня 1899 р. обходив 50-літний ювілей сла- вний математик і фізик англійский Жорж Стоке (Stokes) в Кембрідж (Cambridge).

Звізда першої величини α Aurigae (Capella), як ствердив W. Campbell в обсерваторії Lick і Newall в Cambridge (Англія) при

помочи обсервацій спектроскопійних, є звіздою подвійною. Як ствердили далі обсервації різних обсерваторій від цвітня до червня сего року, час обігу сего систему виносить $10\frac{1}{2}$ днів, отже $3\frac{1}{2}$ оборотів в протягу нашого року; є се обіг найскорший з обігів пізнаних до тепер зізд подвійних. Віддалене обох складових зізд є менше більше таке, як Землі і Сонця, а маса цілого систему майже сім разів більша як маса Сонця.

(Comptes Rendus de l'académie Paris 1900)

Дня 23. червня 1900. відкрив Borelly в обсерваторії в Марсєлї нову комету; комета та представляла ся яко зізда 6—7 величини, її ядро величини 9 5—10.

Основну розвідку про систем зізди Сїрюс на основі найновіших обсервацій Burnhama, Aitkena і Keelera в обсерваторії Lick'a подав Н. I. Zwiers в „Proceedings of the section of sciences“ амстердамської академії наук (том II. 1900 ст. 6—19).

Обсервуючи при помочи геліометра три планетоїди Вікторію, Іріс і Сафо на розі Доброї Надії, одержав Gill слїдуючі дати для параякси сонця:

Вікторія: $8\cdot8013'' \pm 0\cdot0061''$
 Іріс: $8\cdot7981'' \pm 0\cdot0114''$
 Сафо: $8\cdot8120'' \pm 0\cdot0091''$

отже пересїчно: $8\cdot8038'' \pm 0\cdot046''$. Яко послїдний вислїд приймає Gill: $8\cdot802'' \pm 0\cdot005$.

Абсолютна міра часу. Секунда, акої уживає ся до міреня одиниці часу, є $\frac{1}{86400}$ частию часу між одною а другою кульмінацією сонця; не є се отже абсолютна незмінна одиниця часу. Тому то G. Lippmann радить ужити гравітації до визначеня абсолютної одиниці часу. А іменно наколи за одиницю маси возьмем масу о обемі рівнім шестистінникови з гранкою = 1, а о густоті = 1 (густота води при 4° C), то одиницею часу буде час, якого та маса потребує, щоби тілу в віддаленю = 1 надати прискоренє рівне одиниці. Наколи за одиницю маси возьмем грам, за одиницю довгости центіметр, то після сказаного одиниця часу буде рівна

ся 3862 секунд або $1^h 4^m 22^s$. Така одиниця не залежить від вибраної одиниці довготи.

(Zeitschrift f. physik. u. chem. Unterricht 1900).

Berthelot аналізував вироби золоті, що походять з гробів староегипетських; з аналізу випало;

проби з часів VI. династії мають:

Au	92.3	92.2
Ag	3.2	3.9
материй органічних	4.5	3.9
Pb, Cu, Fe	ані сліду.	

проби з часів XII. династії мають:

Au	90.5
Ag	4.5
материй органічних	5.0

проби з часів перських мають золота 99.8.

Значить ся Єгиптяне експлуатували до виробів давнійше просте золото питоме, яке все має примішки срібла, а доперва в часах перських навчили ся відділяти золото від срібла.

(C. rendus 1900).

D. Berthelot означив на ново точку кипіння для цинку і кадму; з п'ятьох обсервацій випало для цинку 920° , для кадму (трох обсервацій) 778°C . Після нових обчислень німецького хемічного товариства тягар атомовий кадму є 112.4.

G. Hinrichs обчисляє (Comptes rendus de l'acad. Paris 1900) склад атмосфери до її границь; в тій цілі приймає він, що кожний складник воздуха творить для себе атмосферу незалежну від інших складників, а тоді на основі форми Ляпласа:

$$\log \frac{P}{p} = \frac{H}{K}$$

де p є тисненем для кожного газу, H висота в міряметрах, K (стала) $= \frac{1.8400}{D}$, (де D є густота газу) дістає слідуучий склад воздуха в напрямі прямовіснім:

Високість в 10^4 м	в % на 100				
	CO ₂	O	A (аргон)	N	H
0.	0.03	21.00	1.20	77.75	0.02
1.	0.02	18.43	0.75	80.74	0.06
2.	0.01	16.07	0.46	83.26	0.20
3.	0.00	13.90	0.28	85.18	0.64
4.	—	11.86	0.16	85.94	2.04
5.	—	9.83	0.12	83.94	6.11
6.	—	7.52	0.00	75.54	16.94
7.	—	4.7	—	56.20	39.1
8.	—	2.2	—	31.00	66.8
9.	—	0.7	—	12.9	86.4
10.	—	0.3	—	4.6	95.1

Зрб

ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСЬКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

Т. VII. — Випуск II.

ЧАСТЬ МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНА

ПІД РЕДАКЦІЄЮ

ІВАНА ВЕРХРАТСЬКОГО і Дра ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦЬКОГО.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SECTION

DER ŠEVCENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

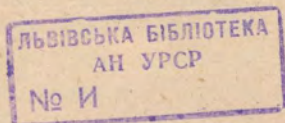
B. VII. — Heft II.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHER THEIL

REDIGIRT VON

JOHANN VERCHRATSKYJ u. Dr. VLADIMIR LEVYCKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1901.



Накладом Наукового Товариства імени Шевченка

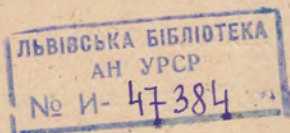
З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка
під зарядом К. Беднарського.

З М І С Т.

	Стор.
1. Володимир Левицький: Теорія перстень Сатурна..	1—46
2. Стефан Рудницький: Про плями сонячні (частина друга)	1—90
3. Федір Примак: Причинки до історії розвитку і інволюції залізни thymus у риби кісткоскелетних (Teleostei)	1—26
4. Володимир Левицький: Найновіші праці з теорії функцій аналітичних.....	1—12
5. Володимир Левицький: Додаток до теорії дробів тяглих і групи модулової (друга нота).....	1—8
6. Бібліографія та хроніка математично-фізична.....	1—41

I N H A L T.

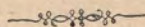
1. Vladimir Levyckyj: Theorie der Saturnringe.....	1—46
2. Stefan Rudnyckyj: Über die Sonnenflecke (zweiter Theil)	1—90
3. Theodor Prymak: Beiträge zur Geschichte der Entwicklung und Involution der Thymusdrüse bei den Knochenfischen.....	1—26
4. Vladimir Levyckyj: Die neuesten Aufsätze in der Theorie der analytischen Functionen.....	1—12
5. Vladimir Levyckyj: Beitrag zur Theorie der Kettenbrüche und der Modulgruppe (zweiter Aufsatz).....	1—8
6. Mathematisch-physikalische Bibliographie und Chronik	1—41



ТЕОРИЯ ПЕРСТЕНЯ САТУРНА.

НАПИСАВ

Володимир Левицкий.



1. Одною з найцікавійших прояв в нашій системі сонячній є безперечно планета Сатурн. Величезна ця планета, віддалена від сонця в перигеліум 1345 мільйонів, а в афеліум 1504 мільйонів кілометрів, є по Юпітері найбільшим тілом нашої системи; її промір рівниковий виносить 119.300, а промір, що лучить оба бігуни 106.000 кілометрів. Поверхня Сатурна є проте яких 80, а об'єм яких 730 разів більший, як відповідні елементи Землі. Її маса є 92 рази більша від маси Землі, за її густота є ледви $\frac{1}{8}$ -ою густоти земскої, або 0.7, наколи густоту води положимо = 1. Її обіг сидеричний докола сонця триває 29 літ 166 днів 23 годин 40 минут, її оборот докола осі триває лиш 10^h 29^m 17^s. — Докола неї кружить аж вісім місяців; з них найбільший Титан, відкритий ще в р. 1655 через Huyghens'a, найменший Гіперіон, відкритий доперва в р. 1848 через Bond'a і Lassell'a.

Но найважнішою та найбільше інтєресною прикметою Сатурна, якої ніяке друге зі знаних тіл небесних не має, є великий перстень, а зглядно систем перстенів, який уносить ся зовсім свобідно в площі рівниковій планети. Вже Galilei постеріг в р. 1612 через люнету, яку що йно винайдено, що Сатурн має вид еліптичний або овальний і думав, що ця планета складає ся з трох злучених з собою тіл¹⁾; два з них після її гадки були місяцями.

¹⁾ Пор. пр. Littrow: Wunder des Himmels, ст. 484.

Дальші обсервації Gassendi'ro, Hevelius'a та Gыита Riccioli'oro над тим цікавим видом Сатурна не принесли нічого нового, аж доперва в р. 1659 розпізнав Huyghens, що докола Сатурна знаходить ся зовсім свободний перстень овального виду. Пізнійше в р. 1675 постерпір Cassini, що сей перстень складає ся властиво з двох перстенів співосередних з Сатурном, відділених від себе темною просторонню; ту темну просторонь названо опісля ділом Cassini'ого. В середині XIX століття відкрито ще між ділом Cassini'ого а внішнім берегом перстения ще один діл, який названо ділом Encke, а в пізнійших часах бачили деякі астрономи, як Kater, Jakob, Bond, Struve і и. вузовькі, делікатні співосередні лінійки, так що видає ся, мовби перстень не був одноцільним, лиш системою більшого числа перстенів.

Крім того відкрив в р. 1850 Bond ще один, темний перстень між внутрішнім ясним перстеньом а планетою; сей темний перстень є о стільки цікавий, що після обсервацій Dawes'a і Lassell'a є він прозорачний, так що через него видко кулю Сатурна. О. Struve бачив в р. 1851 в тім темнім перстеню сліди ділу, який пізнійше зникнув, так що здає ся, мовби в перстеню Bond'a заходили ще якісь великі зміни. Сам Dawes приймав, що перстень Bond'a знаходить ся ще в стані плиннім. — В кінці треба примітити, що новіші обсерватори, як Schwabe, Harding, Herschel, South, Schiaparelli, Meyer і и. приймають, що ті перстені не лиш не є з Сатурном співосередні, але навіть самі з собою.

Розміри поодиноких перстенів є в приближеню ось такі¹⁾ (пор. фіг. I; на тій фігурі є лиш ясний перстень внішний і внутрішній та діл Cassini'ого ED):

AF внішний луч внішнього перстения	138.400 Km.
AE внутрішній луч внішнього перстения	121.900 „
AD внішний луч внутрішнього перстения	119.800 „
AC внутрішній луч внутрішн. перстения	89.800 „
AB луч рівниковий Сатурна	62.100 „
EF ширина внішнього перстения	16.600 „
CD ширина внутрішнього перстения	29.700 „
ED ширина ділу Cassini'ого	3.100 „
FC ширина обох ясних перстенів	46.000 „
CB ширина відступу між темним перстеньом а Сатурном	} 27.700 „
ширина темного перстения	
	13.000 „

¹⁾ Пор. Weinek u. Schweiger-Lerchenfeld: Atlas der Himmelskunde, cr. 194.

Після точних помірив ¹⁾, наколи назначимо луч Сатурна $AB = r$, дістанемо :

$$AF = 2.23 \text{ r}, \quad AC = 1.48 \text{ r}.$$

Грубість перстень є невелика, бо ледви 300 кілометрів, а маса єго ледви виносить $\frac{1}{118}$ маси Сатурна. — Цілий сей систем обертає ся докола Сатурна — як вказують обсервації деяких замітних точок перстень, роблені через Herschel'a, протягом $10\frac{2}{5}$ годин, отже около 0.44 дня земского. Після обсервацій Hall'a і Holden'a нахилень перстень до екліптики виносить 28° , а довгість вступаючого узла в екліптиці є тепер 167° .

Перстень з причини вище наведеного нахилень не все однако ся нам представляє ; в певних положеньх планети в єго дорозі переходить площа перстень через сонце і майже через землю ; вид еліптичний зникає, а перстень представляє ся лиш в найліпших телескопах яко дуже тонька лінія. В иньших положеньх видно раз північну, раз полудневу площу перстенів ; а єще дальше перстень вітворює ся для ока так широко, що покриває цілком відповідну бігунову околицю планети. Систем перстенів зникає для ока зовсім, наколи сонце находячи ся в площі перстень осьвічує лиш вузький єго берег, або наколи сонце осьвічує північну (полудневу) площу перстень, а наше око дивить ся на полудневу (північну) площу перстень.

Давнійші постереження Schröter'a, мовби перстень мав атмосферу та гори високі на 1.500 Km., показали ся невірними. А наколи додамо єще, що після дослідів Huggins'a дуговина перстень ані на волос не ріжнить ся від дуговини Сатурна, яка знова після астрофізичних обсервацій в Почдамі є така сама як дуговина сонця, то будемо мали в загальних начерках все, що нам дає безпосередна обсервація перстенів.

2. Остає тепер kwestія істоти перстенів. Поминаючи сучасну Huyghens'ови гіпотезу Roberval'a, що перстень повстав через пари, які з поверхні Сатурна виходять, гіпотезу Maupertuis, що перстень є останком хвоста якоїсь комети, далі гіпотезу, що се є атмосфера Сатурна, та иньші, які оснують ся на більше або меньше фантастичних здогадах, перейдем до вислідів чисто математичних, які принесли своїм творцям велику славу та подив наукового євіта. Ті виследи Laplace'a, Maxwell'a, Poincaré та Софії Ковалевскої буду старав ся представити в мойй монографії ; лучать ся они з собою в безпреривній звязи, так що одних без других годі трактувати.

¹⁾ Поп. F. Tisserand : Traité de mécanique céleste II. cr. 116.

Своею елеганцією, прозорим та ясним способом розслідування найтяжших проблемів механіки неба стали ті досліді вповні класичними; докинути до них по Poincaré'm ще щось нового майже неможливо, так що нині теорію перстенів Сатурна можемо уважати за викінчену. Тому то я прийняв ся дуже вдячного завдання получить ті докази в одну цілість, щоби дати читачам спроможність пізнати їх і подивляти ті глибокі методи, які дозволили без обсервацій вглянути і розслідувати природу одного з найтемніших феноменів всесенної.

З розслідувань тих виходить, що перстень будучий в руху оборотів не може остояти ся в рівновазі, если приймем, що він є ціпкий, пливний або газований, а до того однородний. В виду того ставсь дуже імовірна гіпотеза Maxwell'a, що перстень складає ся з самих дрібних сателітів (місяців), які кружать густою масою докола Сатурна так, що в нашій оці творить ся вражінє тяглости; Maxwell перевів доказ, що такий систем може находити ся в тревалій рівновазі. Новіші обсервації потверджують гіпотезу Maxwell'a.

Важніша література про рівновагу тіл оборотових загально, а перстєня Сатурна спеціяльно, є ось така:

Laplace. *Traité de mécanique céleste*. II. 155. et sqts. (виданє з р. 1799).

Matthiessen. *Über die Gleichgewichtsfiguren frei rotirender Flüssigkeiten*. Kiel 1857.

Matthiessen. *Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten, etc.* Kiel 1857.

Matthiessen. *Über Systeme kosmischer Ringe von gleicher Umlaufszeit als discontinuirliche Gleichgewichtsformen frei rotirenden Flüssigkeitsmasse*. Leipzig 1865.

Maxwell. *On the stability of the motion of Saturn's rings*. Cambridge 1859.

Thomson u. Tait. *Treatise on Natural Philosophy*; 2. виданє т. I. ч. II. ст. 332 et sqts.

Poincaré. *Bulletin Astronomique* t. II. i Sur l'équilibre d'une masse fluide etc. (*Acta mathematica* t. VII. 259 et sqts.).

S. Kowalewski. *Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnringe* (*Astronomische Nachrichten* Bd. CXI. 1885).

Riemann. *Über das Potential eines Ringes* (*Gesammelte Werke* 407).

Hirn. *Sur les conditions d'équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne*. 1872.

G. H. Darwin. On figures of equilibrium of rotating masses of fluid (Philosophical Transactions 1887).

Basset. On the steady motion of an annular mass of rotating liquid (American Journal of Mathematics t. XI. 1889).

Надто російська робота Лапунова про рівновагу еліпсоїди з р. 1884; зміст поданий через Radau в Bulletin astronomique; далі праці Radau і Callandreau в Bulletin astronomique том III, а врешті знаменитий підручник: F. Tisserand: Traité de mécanique céleste в чотирох томах, де теорія перстень Сатурна систематично представлена становить в великій мірі вихід нашої монографії раз через змодернізоване деяких давніших рахунків, а в друге через много оригінальних гадок і способів аналізу математичної.

По сих вступних увагах переходимо до властивої матерії нинішньої розвідки.

Теорія Ляпласа.¹⁾

1. Ляплас приймає, що перстень Сатурна є коловий та співосередний з самою планетою, що складає ся з плинних та однородних частних перстенів, та що відступ таких частних перстенів є достаточо великий, так що можна зовсім понехати взаїмне їх діланє на себе. Приймає він дальше, що кождий з тих частних перстенів повстав через оборот замкненої фігури пр. еліпси докола планети; рух сей є одностайний та відбуває ся докола осі прямоїсної до середного (рівникового) перекрою планети. Кожда точка поверхні такого частного перстенья находит ся під діланєм трох сил, а се: притягання Сатурна, притягання цілого перстенья та сили відосередної. Ляплас шукає условин рівноваги перстенья в виду таких трох сил та форми (виду) перстенів.

Най же буде перекроєм полуденниковим одного такого частного перстенья еліпса $AA'BB'$ (фіг. II.) о півосях a і b . Вісь $OX \parallel AA'$ най буде осью обороту сеї еліпси, а O середоточка Сатурна, де ціла єго маса M є сконцентрована. Відступ $OC = l$, а сорядні якоїсь точки P на поверхні перстенья є $OR = \xi$, $RN = \eta$, або коли положимо $CS = x$, $SP = y$, то:

$$\xi = x, \eta = l + y.$$

Наколи складові притягання Сатурна на точку P є X_1, Y_1 , складові притягання перстенья на точку P є X_2, Y_2 , а скорість кутова

¹⁾ Пор. Laplace: Traité de mécanique céleste II. ст. 155 et sqts; рік 1799.

ω (отже сила відосередна в віддаленю $= 1 \in \omega^2$, у Ляпласа g), то рівняне ріжничкове для рівноваги поверхні є ¹⁾:

$$(X_1 + X_2) d\xi + (Y_1 + Y_2 + \omega^2 \eta) d\eta = 0 \quad 1)$$

Коли абстрагуєм від сплюснення Сатурна, то:

$$X_1 d\xi + Y_1 d\eta = f dV,$$

де f є чинник атракції, а V потенціал притягання Сатурна, а що:

$$V = \frac{M}{r},$$

то:

$$X_1 d\xi + Y_1 d\eta = f M d\left(\frac{1}{r}\right);$$

а що далі:

$$r = OP = (1 + y)^2 + x^2,$$

то:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2y}{1} + \frac{x^2 + y^2}{1^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} - \frac{y}{1^2} + \frac{y^2}{1^3} - \frac{x^2}{21^3},$$

наколи пропустимо $\left(\frac{x}{1}\right)^3, \left(\frac{y}{1}\right)^3, \dots$ яко дуже малі вирази. Тоді:

$$X_1 d\xi + Y_1 d\eta = f M \left[\left(\frac{2y}{1^3} - \frac{1}{1^2}\right) dy - \frac{x dx}{1^3} \right] \quad 2)$$

Ляплас приймає, що віддалене l є дуже велике в порівнянню з a і b , а крім сего заступає притягання перстень на точку P притяганням безконечно довгого вальця о підставі еліптичній $AB A'B'$, стичного до перстень в точці B і B' , а о густоті ρ такий самий як перстень (пор. філ. II). Часті E і E' можуть заступити діляне частий F і F' перстень, а діляне дальших частий перстень і так маліє надзвичайно з віддаленем. Тоді складові X_2 і Y_2 діляна перстень можна заступити відповідними складовими діляна безконечного вальця, а що ті складові є ²⁾:

$$X_2 = -4 \pi f \rho x \frac{b}{a+b}, \quad Y_2 = -4 \pi f \rho y \frac{a}{a+b},$$

а далі:

$$dx = d\xi, \quad dy = d\eta, \quad \omega^2 \eta d\eta = \omega^2 (1+y) dy,$$

проте рівняне 1) перейде на:

$$\left(\frac{fM}{1^3} + 4\pi f \rho \frac{b}{a+b}\right) x dx + \left(\frac{fM}{1^2} - \omega^2 l\right) dy + \left(4\pi f \rho \frac{a}{a+b} - \frac{2fM}{1^3} - \omega^2\right) y dy = 0. \quad 3)$$

¹⁾ Пор. пр. Franke: *Mechanika teoretyczna*, стр. 516.

²⁾ Пор. Tisserand: *Traité de mécanique céleste* II, стр. 54; також Laplace loc. cit. II. 160.

Рівнянє перекрою перстєня є :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

або :

$$\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} = 0,$$

отже рівнянє 3) перейде на :

$$a^2 \left(\frac{M}{l^3} + 4\pi\rho \frac{b}{a+b} \right) = b^2 \left[\left(\frac{M}{l^3} - \frac{\omega^2}{f} \right) \frac{1}{y} + 4\pi\rho \frac{a}{a+b} - \frac{2M}{l^3} - \frac{\omega^2}{f} \right].$$

Рівнянє то сповняє ся для якогонебудь y , отже :

$$\omega^2 = \frac{fM}{l^3} \quad 4) ^1)$$

і :

$$a^2 \left(\frac{M}{l^3} + 4\pi\rho \frac{b}{a+b} \right) = b^2 \left(4\pi\rho \frac{a}{a+b} - \frac{3M}{l^3} \right)$$

або :

$$\frac{M}{4\pi\rho l^3} = \frac{\lambda (\lambda - 1)}{(\lambda + 1) (3\lambda^2 + 1)} = e \quad 5)$$

де за Ляплясом значимо $\frac{b}{a} = \lambda$. А що $e = \frac{M}{4\pi\rho l^3}$ є додатне, то мусить бути $\lambda > 1$, або $b > a$; перстєнь мусить бути проте конче сплещений.

$e = 0$ для $\lambda = 1, +\infty$; в границях $(1 \dots \infty)$ є всегда $e > 0$, отже бодай раз maximum; для maximum мусить бути :

$$\frac{de}{d\lambda} = \frac{-3\lambda^4 + 6\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda - 1}{(\lambda + 1)^2 (3\lambda^2 + 1)^2} = 0$$

або :

$$3\lambda^4 - 6\lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Рівнянє се має два корені додатні, оден меньший від 1, другий 2.594.....; можна взяти сей корінь більший, для якого перстєнь буде більше сплещений. Тоді $e = 0.0543026$.

Наколиб :

$$e = \frac{M}{4\pi\rho l^3} > 0.0543026,$$

тоби рівнянє 5) не мало ані одного корєня додатного; для :

$$e < 0.0543026 \quad 6)$$

¹⁾ Рівнянє 4) показує, що скорість кутова перстєня є рівна скорості сателїта, віддаленого від середоточки Сатурна о луч перстєня.

є два корені додатні. — Наколи луч Сатурна є R , густота середня Сатурна ρ_0 , отже его маса :

$$M = \frac{4}{3} R^3 \pi \rho_0,$$

то з нерівности 6) вийде :

$$\frac{\rho}{\rho_0} > 6 \cdot 14 \left(\frac{R}{l} \right)^3 \quad 7)$$

Тоді для внутрішньої границі перстенів отже для $l = 1 \cdot 48 R$ є $\frac{\rho}{\rho_0} > 1 \cdot 89$

а „ вишньої „ „ „ „ „ $l = 2 \cdot 23 R$ є $\frac{\rho}{\rho_0} > 0 \cdot 55$,

значить ся, щоби перстень плинний однородний находив ся в сталій рівновазі, мусить его густота при березі внутрішнім бути майже два рази так велика, а при березі вишнім майже через половину така, як густота Сатурна. — Густота перстеня є нам правда незвісна, но границі Ляпласа є абсолютно за великі, щоби перстень міг удержати ся в тім виді, в яким его розсліджує Ляплас.

До загальніших вислідів доходить Tisserand ¹⁾. Після теорема Poincaré ²⁾ рівновага течі в яким будь геометричним виді ставсь неможлива, наколи :

$$\omega^2 > 2\pi f \rho.$$

Отже наколи возьмем $\omega^2 < 2\pi f \rho$, то після рівняня 4) буде :

$$\rho > \frac{M}{2\pi l^3}, \quad \text{або :}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} > \frac{2}{3} \left(\frac{R}{l} \right)^3,$$

отже для границі внутрішньої $\frac{\rho}{\rho_0} > \frac{1}{4 \cdot 9}$, для границі вишньої $\frac{\rho}{\rho_0} > \frac{1}{16 \cdot 6}$;

як бачим перстень о густоті меншій не міг би ся удержати в ній-кім виді і розпав би ся з великою силою на части, з яких кожда обертала би ся сама для себе докола Сатурна.

2. Ляплас доказує далі ³⁾, що перстень однородний в тім виді, в яким він его приймає, находив би ся в рівновазі хиткій, яку найменший вплив може заколотити, а тоді перстень впав би на поверхню Сатурна. Его доказ є слідуєчий.

¹⁾ Pop. Tisserand loc. cit. II. 121.

²⁾ Bulletin astronomique II. 117.

³⁾ Laplace loc. cit. II. 164.

Приймім, що перстень є лнійною коловою о лучу r , котрої середотчка не сходить ся з середотчкою Сатурна, але через якийсь вплив внїшній зістала віддалена від середотчки Сатурна о відступ l . Вислїдна з притягання того кола через Сатурн мусить переходити через просту l , яка лучить обі середотчки.

Наколи луч r творить кут φ з продовженням лїнії l , то притяганє Сатурна на елемент $rd\varphi$ перстєня (рівнобіжне до l) буде:

$$-\frac{d}{dl} \int_0^{2\pi} \frac{M d\varphi}{\sqrt{r^2 + l^2 + 2rl\cos\varphi}} = F.$$

А що:

$$(r^2 + l^2 + 2rl\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l}{r} e^{i\varphi}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{l}{r} e^{-i\varphi}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

то наколи розвинемо:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{l}{r} e^{i\varphi}\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \alpha_1 \frac{l}{r} e^{i\varphi} + \alpha_2 \frac{l^2}{r^2} e^{2i\varphi} + \dots \\ \left(1 + \frac{l}{r} e^{-i\varphi}\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \alpha_1 \frac{l}{r} e^{-i\varphi} + \alpha_2 \frac{l^2}{r^2} e^{-2i\varphi} + \dots \end{aligned}$$

і ти чинники помножимо, дістанемо:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{r^2 + l^2 + 2rl\cos\varphi}} = \frac{2\pi}{r} \left(1 + \alpha_1^2 \frac{l^2}{r^2} + \alpha_2^2 \frac{l^4}{r^4} + \dots\right),$$

а з відси:

$$F = -\frac{4\pi Ml}{r^3} \left(\alpha_1^2 + 2\alpha_2 \frac{l^2}{r^2} + \dots\right)$$

Г остає від'ємне для якогонебудь l ; значить ся середотчка перстєня віддаляє ся від середотчки Сатурна і якийби був рух зглядний обох тих середотчок, крива, яку рух сей описує, є вигнута ку Сатурнови; середотчка перстєня мусить ся проте віддаляти що раз більше і більше від середотчки планети, аж его обвід зіткне ся з поверхню Сатурна.

А що перстень однородний в усіх своїх частях складає ся з безконечного числа таких колес, як се, що ми розслїджували, проте середотчка перстєня зіставалаби відпихана через середотчку Сатурна, наколиб лиш троха були від себе віддалені, і перстень скінчив би своє істнованє, бо спавби на поверхню Сатурна.

Звідси вносить Ляплас, що понеже тепер перстень є в рівновазі, то частні перстенї мусять мати вид неправильний, а також між ними мусять заходити взаїмні ділання, які ми в попередних розслїдах пропустили.

Теорія Maxwella.¹⁾

1. Maxwell займає ся квестиєю ціпкого перстенья однородного, симетричного з огляду на площу, що переходить через точку тяжести S Сатурна (фіг. III). Наколи С є середотчка тяжести перстенья, М маса Сатурна, М' маса перстенья, G середотчка тяжести Сатурна і перстенья разом, то S, C, G лежати мусять все в одній лінії простій. Наколи $SC = r$, то :

$$SG = \frac{M'}{M+M'} r, \quad CG = \frac{M}{M+M'} r.$$

Найже в перстеню буде лінія BCB' незмінна, SX сталий напрям, $\angle XSC = \vartheta$, $\angle DCS = \varphi$, $\angle XDC = \vartheta + \varphi$.

Maxwell обчисляє скількість енергії кінетичної 2T для перстенья і планети разом в руху згляднім докола точки G. Рух віднесемо до двох осей прямовісних GX і GY ($GX \parallel SX$).

Енергія складає ся з трох частий :

а) енергії маси М т. є.

$$M \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{M'r}{M+M'} \right)^2 + \left(\frac{M'r}{M+M'} \right)^2 \frac{d\vartheta^2}{dt^2} \right].$$

б) енергії маси М', що є сконцентрована в С, т. є.

$$M' \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{Mr}{M+M'} \right)^2 + \left(\frac{Mr}{M+M'} \right)^2 \frac{d\vartheta^2}{dt^2} \right].$$

в) енергії перстенья в руху згляднім докола середотчки тяжести С; рух сей є оборотовий докола осі прямовісної в точці С до площі рисунку. Енергія ся є :

$$M'k^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right)^2,$$

де $M'k^2$ є момент безвладности перстенья зглядом сеї осі. Ціла енергія є проте :

$$2T = \frac{MM'}{M+M'} \left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\vartheta^2}{dt^2} \right) + M'k^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

Наколи функція сил, що походить з ділання маси М, зібраної в S, на різні точки перстенья, і взаїмних притягань перстенья, є fMV, то — так як V залежне є лиш від r і φ , що визначають положенє точки S з огляду на перстень, а від ϑ не залежить — дістанемо :

$$\frac{MM'}{M+M'} \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{MM'}{M+M'} r \frac{d\vartheta^2}{dt^2} = fM \frac{\partial V}{\partial r}$$

¹⁾ Maxwell. On the stability of the motion of Saturn's rings. Cambridge 1859. Цілий сей уступ є представлений після Tisserand'a loc. cit. II, бо самого твору Maxwella годі дістати.

$$M'k^2 \frac{d^2(\vartheta + \varphi)}{dt^2} = fM \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{MM'}{M+M'} r^2 \frac{d\vartheta}{dt} + M'k^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right) \right] = 0.$$

або :

$$\left. \begin{aligned} M'k^2 \frac{d^2(\vartheta + \varphi)}{dt^2} &= fM \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ M' \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right) &= -f(M+M') \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ M' \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \right) &= f(M+M') \frac{\partial V}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

Наколи пропустимо взаїмне діланє перстєня на себе — бо оно від r і φ не залежить — то V є потенциялом перстєня в точці S .

Наколи приймєм, що середоточка Сатурна зглядом перстєня не змінє свого положєня, можемо наложити $r = r_0$ (const.), $\varphi = \varphi_0$ (const.) і відповідно $\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_0$. Тодї рівнянє 1) даєть:

$$M'k^2 \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = fM \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_0$$

$$M'r_0^2 \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -f(M+M') \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_0$$

$$-M'r_0 \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = f(M+M') \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_0$$

З відси слїдує:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega \text{ (const.)}, \quad \omega^2 = -f \frac{M+M'}{M'r_0} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_0 &= 0, \quad \vartheta = \omega t \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

Бачимо протє, що луч SC обертаєть ся одностайно докола точки S і потягавє з собою цїпкий перстєнь, так що єго кожда точка оставалаби стало віддалєна від S .

Очевидно, що такий рух в дійсности не істнує; для правди-вого руху, де виступають ріжні заколоти, треба покласти:

$$r = r_0 + r_1, \quad \vartheta = \omega t + \vartheta_1, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1,$$

де r_0 ω φ_0 характеризують яко сталї стан початковий, r_1 ϑ_1 φ_1 представляють невеликі зміни в пересунєнє так, що їх квадрати мож залишити; є они функциями змінної t , так що похідні $\frac{dr_1}{dt}$ $\frac{d\vartheta_1}{dt}$ $\frac{d\varphi_1}{dt}$

є дуже малі. Тодї рівнянє 2) дадуть:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = - \frac{\omega^2 M' r_0}{f (M+M')} + H r_1 + K \varphi_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = K r_1 + L \varphi_1,$$

де :

$$H = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_0, \quad K = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi} \right)_0, \quad L = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right)_0 \quad 3)$$

Рівняня 1) дадуть :

$$\left. \begin{aligned} M' \left(2\omega r_0 \frac{dr_1}{dt} + r_0^2 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} \right) + f (M + M') (K r_1 + L \varphi_1) &= 0. \\ M' \left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \omega^2 r_1 - 2\omega r_0 \frac{d\varphi_1}{dt} \right) + f (M + M') (H r_1 + K \varphi_1) &= 0. \\ M' k^2 \left(\frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} \right) - f M (K r_1 + L \varphi_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad 4)$$

Щоби ті рівняня з'інтегрувати, підставмо — як звичайно :

$$r_1 = A e^{\nu t}, \quad \varphi_1 = B e^{\nu t}, \quad \varphi_1 = C e^{\nu t}$$

(A, B, C, ν сталі); по підставленню дістанемо :

$$\left. \begin{aligned} A [2\omega r_0 \nu M' + f (M+M') K] + B r_0^2 \nu^2 M' + C f (M+M') L &= 0. \\ A [(\nu^2 - \omega^2) M' - f (M+M') H] - 2B \omega r_0 \nu M' - C f (M+M') K &= 0. \\ - A f M K + B k^2 \nu^2 M' + C (k^2 \nu^2 M' - f M N) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad 5)$$

Елімінуймо з відси A, B, C, то дістанемо рівняне 6) степеня форми :

$$\nu^2 (P \nu^4 + R \nu^2 + S) = 0 \quad 6)$$

де :

$$7) \left\{ \begin{aligned} P &= M'^2 k^2 r_0^2. \\ R &= 3M'^2 k^2 r_0^2 \omega^2 - f M' (M+M') H k^2 r_0^2 - f M' [(M+M') k^2 + M r_0^2] L \\ S &= M' [(M+M') k^2 - 3M r_0^2] f L \omega^2 + f^2 (M+M') [(M+M') k^2 + M r_0^2] (H L - K^2) \end{aligned} \right.$$

Понеже рівняне 6) має двократний корінь $\nu = 0$, проте треба взяти :

$$r_1 = A + A' t, \quad \varphi_1 = B + B' t, \quad \varphi_1 = C + C' t.$$

Наколи се вставимо в 4) і зрівнаєм до зера части сталі і сочинники при t , дістанемо :

$$A' = 0, \quad C' = 0, \quad C = - \frac{K}{L} A,$$

$$B' = \frac{A}{2\omega r_0} \left(f \frac{M+M'}{M'} \frac{K^2 - HL}{L} - \omega^2 \right),$$

а тоді:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= A, & \varphi_1 &= -\frac{K}{L} A, \\ \vartheta_1 &= B + \frac{A}{2\omega r_0} \left(\int \frac{M+M'}{M} \frac{K^2 - HL}{L} - \omega^2 \right) t \end{aligned} \right\} \quad 8)$$

о двох сталих A і B .

Дальші коронї рівняня 6) є $\nu_1, \nu_2 = -\nu_1, \nu_3, \nu_4 = -\nu_3$, і для них дістанемо на інтеграли рівнянь 4) вартости:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= A_1 e^{\nu_1 t} + A_2 e^{\nu_2 t} + A_3 e^{\nu_3 t} + A_4 e^{\nu_4 t} \\ \vartheta_1 &= \lambda_1 A_1 e^{\nu_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\nu_2 t} + \lambda_3 A_3 e^{\nu_3 t} + \lambda_4 A_4 e^{\nu_4 t} \\ \varphi_1 &= \mu_1 A_1 e^{\nu_1 t} + \mu_2 A_2 e^{\nu_2 t} + \mu_3 A_3 e^{\nu_3 t} + \mu_4 A_4 e^{\nu_4 t} \end{aligned} \right\} \quad 9)$$

де в чотири сталі довільні і де: $\lambda_s = \frac{B_s}{A_s}, \quad \mu_s = \frac{C_s}{A_s}.$

З получения рівнянь 8) і 9) дістанемо загальні інтеграли рівнянь 4) з 6 сталими. Сталі A і B представити буде можна через $r_0, \vartheta_0, \varphi_0$ і ω на основі рівнянь 8) та реляцій $r = r_0 + r_1, \vartheta = \omega t + \vartheta_1, \varphi = \varphi_0 + \varphi_1$. Інвші сталі найдем, наколи дамо на $r, \vartheta, \varphi, \frac{dr}{dt}, \frac{d\vartheta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}$ при $t=0$ певні вартости дуже малі; тоді дістанемо і на A_1, A_2, A_3, A_4 дуже малі вартости, наколи коренї ν_1 і ν_3 мають вид αi , отже коли $e^{\nu_1 t}, e^{\nu_2 t}, e^{\nu_3 t}, e^{\nu_4 t}$ перейдуть на $\sin \psi$ та $\cos \psi$. Наколиб однак коренї були дійсні, то ті функції виложні рослиб без кінця, а так само колиб они мали вид $a + bi$, то в r, ϑ, φ виступалиби чинники періодичні, яких сочинники зрасталиб без кінця. Щоб отже обі вартости ν^2 в рівняню $P\nu^4 + R\nu^4 + S=0$ були дійсні і від'ємні (отже ν_1 і ν_3 форми αi), мусить бути:

$$PR > 0, \quad PS > 0, \quad R^2 - 4PS > 0.$$

2. Приновримо ту теорію тепер до перстения колового різнородного о безконечно малих поперечних перероях.

Най (Фіг. IV) O буде середоточкою перстения, C середоточкою тяжести, $OC = h$, s луч перстения, ψ змінний кут, ρ густота перстения в точці N . Тоді після теорії Fourier'a:

$$\rho = \frac{M'}{2\pi s} \left(\alpha_0 + 2\alpha_1 \cos \psi + 2\beta_1 \sin \psi + \frac{2\alpha_2}{3} \cos 2\psi + \frac{2\beta_2}{3} \sin 2\psi + \dots \right) \quad 10)$$

α_i, β_i сталі.

Елемент маси в N є $\rho s d\psi$, отже: $\int_0^{2\pi} \rho s d\psi = M'$.

Після твердження о моментах з огляду на вісь OC і просту прямовісну до OC (в точці O) дістанемо:

$$\int_0^{2\pi} s^2 \rho \cos \psi d\psi = M'h, \quad \int_0^{2\pi} s^2 \rho \sin \psi d\psi = 0.$$

Наколи в тих трох інтегралах вставимо за ρ вартість 10) і з'інтегруємо, дістанемо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \frac{h}{s}$, $\beta_1 = 0$.

Щоби найти потенціал перетеня, зауважим, що момент безвладности перетеня з огляду на вісь прямовісну до єго площі в точці O є $M's^2$; момент з огляду на вісь, до тамтої рівнобіжну в точці C , є $M'k^2$, отже:

$$\begin{aligned} M's^2 &= M'k^2 + M'h^2, \\ \text{або:} \quad k^2 &= s^2 (1 - \alpha_1^2). \end{aligned}$$

Най $OS = r'$, $NS = \Delta$, $\sphericalangle BOS = \psi'$, тоді:
 $\Delta^2 = s^2 + r'^2 - 2sr' \cos (\psi' - \psi),$

а звідси — наколи пропустимо висші степені $\frac{r'}{s}$ — дістанемо:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{s} \left\{ 1 + \frac{r'}{s} \cos (\psi' - \psi) + \frac{r'^2}{4s^2} + \frac{3r'^2}{4s^2} \cos 2(\psi - \psi') \right\}.$$

В виду того потенціал перетеня в точці S , який є рівний:

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho s d\psi}{\Delta}$$

буде:

$$V = \frac{M'}{s} \left[1 + \alpha_1 \frac{r'}{s} \cos \psi' + \frac{r'^2}{4s^2} (1 + \alpha_2 \cos 2\psi' + \beta_2 \sin 2\psi') \right],$$

а що:

$$r' \cos \psi' = h - r \cos \varphi, \quad r' \sin \psi' = r \sin \varphi,$$

де: $\sphericalangle SCO = \varphi$, $SC = r$, то:

$$V = \frac{M'}{s} \left[1 + \alpha_1 \frac{h - r \cos \varphi}{s} + \frac{h^2 + r^2 - 2hr \cos \varphi}{4s^2} + \alpha_2 \frac{h^2 - 2hr \cos \varphi + r^2 \cos 2\varphi}{4s^2} + \beta_2 \frac{2hr \sin \varphi - r^2 \sin 2\varphi}{4s^2} \right] \quad 11).$$

Наколи приймем, що з самого початку середоточка перетеня є схожа з середоточкою Сатурна, тоді $\varphi_0 = 0$, $r_0 = h = \alpha_1 s$, $k^2 = s^2 (1 - \alpha_1^2)$; тоді з 11) випаде:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_0 &= - \frac{M' \alpha_1}{S^2}, & \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_0 &= 0. \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_0 &= H = \frac{M'}{2S^3} (1 + \alpha_2) \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi} \right)_0 &= K = - \frac{M'}{2S^3} \beta_2 r_0 = - \frac{M'}{2S^2} \alpha_1 \beta_2 \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right)_0 &= L = \frac{M'}{2S^3} r_0^2 \left(1 - \alpha_2 + \frac{2S}{r_0} \alpha_1 \right) = \frac{M'}{2S} \alpha_1^2 (3 - \alpha_2) \end{aligned} \right\} 12).$$

Після рівняня 2) є:

$$\omega^2 = f \frac{M+M'}{S^3},$$

тож коли ті всі вартости вставимо в 7), дістанемо:

$$\frac{P}{M'^2 S^4 \alpha_1^2} = 1 - \alpha_1^2$$

$$\frac{R}{M'^2 S^4 \alpha_1^2} = \omega^2 \left[1 - \alpha_1^2 - \frac{1}{2} \frac{M}{M+M'} \alpha_1^2 (3 - \alpha_2) \right].$$

$$\frac{S}{M'^2 S^4 \alpha_1^2} = \frac{\omega^4}{4} \left\{ (1 - \alpha_1^2) (9 - \alpha_2^2 - \beta_2^2) + \frac{M}{M+M'} \alpha_1^2 (-15 + 8\alpha_2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2) \right\}.$$

Наколи з огляду на се, що $\frac{M'}{M}$ є дуже мале, положимо $\frac{M}{M+M'} = 1$, дістанемо місто рівняня $P\gamma^4 + R\gamma^2 + S = 0$ рівнянє:

$$(1 - \alpha_1^2) \left(\frac{\gamma}{\omega} \right)^4 + \left(1 - \frac{5}{2} \alpha_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_1^3 \alpha_2 \right) \left(\frac{\gamma}{\omega} \right)^2 + \frac{1}{4} (9 - 24\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2 + 8\alpha_1^2 \alpha_2) = 0. \quad 13)$$

Наколи перстень є однородний, тоді густота є стала, отже $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0$; тоді $P = R = S = 0$, а рівняня 5) дадуть:

$$\gamma^2 = \omega^2 + f \frac{M+M'}{2S^3}$$

т. є. γ^2 булoб дійсне і додатне, а з того — як уже знаєм — виходить, що перстень ціпкий однородний не може бути тревалий.

Наколи тепер приймем в рівняню 13) $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ ($\alpha_1 \geq 0$), дістанемо:

$$(1 - \alpha_1^2) \left(\frac{\gamma}{\omega} \right)^4 + \left(1 - \frac{5}{2} \alpha_1^2 \right) \left(\frac{\gamma}{\omega} \right)^2 + \frac{9}{4} - 6\alpha_1^2 = 0.$$

γ^2 мусить бути від'ємне, отже P, R, S мусять мати той сам знак; щоби се було, мусить: $\alpha_1^2 < 0.375$, або $\alpha_1^2 > 1$.

Щоби вартости на ν^2 були дійсні, мусить :

$$71 \alpha_1^4 - 112 \alpha_1^2 + 32 \leq 0$$

або :

$$0.37473 \leq \alpha_1^2 \leq 1.20273.$$

Щоби отже була рівновага, мусать бути α_1^2 замкнене або в границях 0.37473 і 0.375, або в границях 1 і 1.20273. Но се не-можливо, бо густота :

$$\rho = \frac{M'}{2\pi s} (1 + 2\alpha_1 \cos \psi)$$

має бути додатна для всяких ψ ; тимчасом для $\psi = \pi$ випаде $2\alpha_1 < 1$, $\alpha_1^2 \leq 0.25$, що ся з попереднім не годить.

Треба проте в рівнянню 13) взяти $\alpha_2 \geq 0$ і $\beta \leq 0$ і пересвідчити ся, чи можна визначити сталі $\alpha_1 \alpha_2 \beta_2$ так, щоби чотири корені ν мали вид bi, а ρ було для всяких ψ додатне. Того случаю не розслідив Maxwell, зробив се Radau¹⁾. Після его обчислень випадає на случай рівноваги :

$$1.317 \leq 2\alpha_1 \leq 1.397, \quad 0.32 \leq \frac{2}{3} \alpha_1 \leq 0.60, \quad \frac{2}{3} \sqrt{\beta_2^2} \leq 0.068, \\ 0.66 \leq \frac{h}{s} \leq 0.70.$$

Бачимо проте, що вартість безглядна сочинника β_2 в формулі на ρ має бути дуже мала, сочинника α_2 много більша. З відси слідує, що густота ρ в різних місцях перстения (для різних ψ) дізнавалаби наглядних змін, що є незгідне з обсервациєю.

Maxwell розсліджував далі перстень коловий однородний, обтяжений якоюсь масою в одній тояці; з его розслідів виходить, що щоби була рівновага, мусілаби та додаткова маса бути дуже значна; середоточка тяжести цілости булаби віддалена від соредоточки фігури в границях 0.8158s і 0.8279s. Но обсервация перстения не вказує такої неправильности, в виду чого гіпотезу цїпких перстенів треба відкинути.

3. Коляж в сей спосіб доказав Maxwell, що гіпотеза цїпкого перстения є неімовірна, то тепер бере під увагу перстені, що складає ся з великого числа дрібних сателітів $P_1, P_2, P_3, \dots$; наколи їх є много, то витворюють вражінє тяглого перстения.

¹⁾ Поп. Tisserand loc. cit. II. 131.

Наколи возьмем один з них пр. P_1 о масі m_1 то він остає під впливом Сатурна (маса M) і прочих сателітів $P_2, P_3, \dots$ (маси $m_2, m_3, \dots$). Наколи приймем, що рухи усіх сателітів відбуваються в одній площі (xy), а $x_1, y_1, R_1, x_2, y_2, R_2, \dots$ є сорадні та функції пертурбаційні поодиноких сателітів, та коли залишимо ділання сателітів на Сатурна, так як ті ділання взаємно ся зносять, дістанемо:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + fM \frac{x_1}{r_1^3} = \frac{\partial R_1}{\partial x_1}$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + fM \frac{y_1}{r_1^3} = \frac{\partial R_1}{\partial y_1}$$

$$R_1 = f \sum \frac{m_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}};$$

(сума відносить ся до всіх $P_2, P_3, \dots$)

або в сорадних бігунових ($x_\nu = r_\nu \cos \nu_\nu, y_\nu = r_\nu \sin \nu_\nu, \nu = 1, 2, 3, \dots$):

$$\left. \begin{aligned} r_1 \frac{dv_1^2}{dt^2} - \frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{fM}{r_1^3} &= - \frac{\partial R_1}{\partial r_1} \\ r_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + 2 \frac{dr_1}{dt} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{r_1} \frac{\partial R_1}{\partial v_1} \end{aligned} \right\} \quad 14)$$

$$R_1 = f \sum \frac{m_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\nu_2 - \nu_1)}}.$$

Приймім, що сателіти є з початку розміщені в вершках правильного многокутника вписаного в коло о лучу a , то наколи їх є p , а відповідний кут середоточний (що відповідає кожному з боків многокутника) є 2ϑ , то:

$$\vartheta = \frac{\pi}{p}.$$

Наколи пропустимо взаємні пертурбації сателітів, то они відбувають рух по колі з однакою швидкістю кутовою ω , а тоді для якогонебудь часу t є:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= a, & r_1 &= k + \omega t \\ r_2 &= a, & r_2 &= k + \omega t + 2\vartheta \\ r_3 &= a, & r_3 &= k + \omega t + 4\vartheta \\ \dots & & \dots & \end{aligned} \right\} \quad 15)$$

де k є сталий кут, який творить луч SP_1 в лучом рухомим.

Наколиж возьмем під увагу взаїмні ділання сателітів, дістанемо :

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= a (1 + \rho_1) & v_1 &= k + \omega t + \sigma_1 \\ r_2 &= a (1 + \rho_2) & v_2 &= k + \omega t + 2\vartheta + \sigma_2 & v_2 - v_1 &= 2\vartheta + \sigma_2 - \sigma_1 \\ r_3 &= a (1 + \rho_3) & v_3 &= k + \omega t + 4\vartheta + \sigma_3 & v_3 - v_1 &= 4\vartheta + \sigma_3 - \sigma_1 \end{aligned} \right\} \quad 16)$$

ρ_ν σ_ν є величини, зв'язані з масою m_ν ; величини ті остануть дуже малі, наколи рух відійде не много від стану означеного рівняннями 15). В виду того пропускаючи квадрати і добутки ρ_ν і σ_ν можемо розвинути ряди і дістанемо :

$$-\frac{\partial R_1}{\partial r_1} = f \sum m_2 \frac{r_1 - r_2 \cos(v_2 - v_1)}{[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1)]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial R_1}{\partial r_1} = f \sum m_2 \frac{r_2 \sin(v_2 - v_1)}{[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1)]^{\frac{3}{2}}}$$

Але :

$$r_1 - r_2 \cos(v_2 - v_1) = 2a \sin^2 \vartheta \left[1 + \frac{\rho_1 - \rho_2 \cos 2\vartheta}{2 \sin^2 \vartheta} - (\sigma_1 - \sigma_2) \cotg \vartheta \right]$$

$$r_2 \sin(v_2 - v_1) = 2a \sin \vartheta \cos \vartheta \left[1 + \rho_2 - (\sigma_1 - \sigma_2) \cotg \vartheta \right]$$

$$\left[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1) \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8a^3 \sin^3 \vartheta} \left[1 - \frac{3}{2}(\rho_1 + \rho_2) + \frac{3}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cotg \vartheta \right],$$

а дальше :

$$r_1 \frac{dv_1^2}{dt^2} - \frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{fM}{r_1^3} = a \left(\omega^2 + \omega^2 \rho_0 + 2\omega \frac{d\sigma_1}{dt} - \frac{d^2 \rho_1}{dt^2} - fM \frac{1 - 2\rho_1}{a^3} \right)$$

$$r_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + 2 \frac{dr_1}{dt} = a \left(\frac{d^2 \sigma_1}{dt^2} + 2\omega \frac{d\rho_1}{dt} \right)$$

В виду того рівняня 14) перейдуть на :

$$\omega^2 - \frac{fM}{a^3} + \left(\omega^2 + \frac{2fM}{a^3} \right) \rho_1 + 2\omega \frac{d\sigma_1}{dt} - \frac{d^2 \rho_1}{dt^2} = \frac{f}{4a^3} \sum \frac{m_2}{\sin \vartheta} \left(1 - \rho_1 - \sigma_2 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \cotg^2 \vartheta + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cotg \vartheta \right)$$

$$2\omega \frac{d\rho_1}{dt} + \frac{d^2 \rho_1}{dt^2} = \frac{f}{4a^3} \sum \frac{m_2 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \left[1 - \frac{3\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} (\tg \vartheta + 2 \cotg \vartheta) \right]$$

Maxwell приймає, що маси сателітів є рівні, отже :

$$m_1 = m_2 = m_3 = \dots = \mu M,$$

де M є маса Сатурна; отже без взаїмних ділання сателітів буде :

$$\omega^2 = \frac{fM}{a^3}, \text{ або } \frac{f m_2}{a^3} = \omega^2 \mu. \text{ Послїдні рівняня можна написати :}$$

$$17) \left\{ \begin{aligned} \omega^2 - \frac{fM}{a^3} + 3\omega^2 \varrho_1 + 2\omega \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{d^2 \varrho_1}{dt^2} &= \frac{1}{4} \omega^2 \mu \sum \left(1 - \varrho_1 - \varrho_2 + \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2} \cotg^2 \vartheta + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cotg \vartheta \right) \frac{1}{\sin \vartheta} \\ 2\omega \frac{d\varrho_1}{dt} + \frac{d^2 \sigma_1}{dt^2} &= \frac{1}{4} \omega^2 \mu \sum \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \left[1 - \frac{3\varrho_1 + \varrho_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} (\tg \vartheta + 2\cotg \vartheta) \right]. \end{aligned} \right.$$

В обох сумах, наколи переходимо від P_2 до $P_3, \dots$, му-
сить ϑ переходити на $2\vartheta, 3\vartheta, \dots$, отже перебігати вартости:

$$\frac{\pi}{p}, \frac{2\pi}{p}, \dots, (p-1) \frac{\pi}{p} \quad 18).$$

Треба тепер з'інтегрувати систем $2p$ рівнянь різнничкових лі-
нійових 2-ого ряду 17) зі сталими сочинниками; в тій цілі треба
покласти:

$$\varrho_v = H_v e^{Nt}$$

$$\sigma_v = K_v e^{Nt}$$

(H_v, K_v сталі).

Наколи се вставимо в рівняня, дістанемо наперед:

$$\omega^2 - \frac{fM}{a^3} = \frac{1}{4} \omega^2 \mu \sum \frac{1}{\sin \vartheta},$$

а далі дістанемо систем $2p$ рівнянь однородних, з яких вилінімо-
ємо H_v, K_v ; їх визначник зрівняний до зера дасть рівнянє на ви-
значенє N . Рівнянє се буде степеня $4p$; до кожного кореня нале-
жить одна розвязка з одною довільною сталою, а сума тих частних
розвязок буде загальним інтегралом в функції часу і $4p$ довільних
сталих. Щоби однак ϱ_v, σ_v позістали все малі, як з початку, мусять
всі корені рівняни на N мати вид $\pm ai$.

Щоби дістати умови, в яких се ся діє, уживає Maxwell сліду-
ючого способу. Кладе він яко частні розвязки:

$$\varrho_v = A \cos(nt + \alpha + 2v\gamma\vartheta), \quad \sigma_v = B \sin(nt + \alpha + 2v\gamma\vartheta) \quad v=1, 2, 3, \dots \quad 19)$$

де A, B, n, α є сталі, а γ число ціле додатне.

Або:

$$\varrho_1 = A \cos u, \quad \sigma_1 = B \sin u$$

$$\varrho_2 = A \cos u \cos 2\gamma\vartheta - A \sin u \sin 2\gamma\vartheta, \quad \sigma_2 = B \sin u \cos 2\gamma\vartheta + B \cos u \sin 2\gamma\vartheta,$$

$$\text{де } u = nt + \alpha + 2\gamma\vartheta.$$

В виду того рівняня 17) дадуть:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 - \frac{fM}{a^3} + [(3\omega^2 + n^2)A + 2\omega n B] \cos u &= \Theta \\ - (2\omega n A + n^2 B) \sin u &= \Phi \end{aligned} \right\} \quad 20)$$

де :

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{4} \omega^2 \mu \sum \frac{1}{\sin \vartheta} \left[1 - \cos u \left(2A \cos^2 \gamma \vartheta - A \sin^2 \gamma \vartheta \cot^2 \vartheta + \frac{1}{2} B \sin 2\gamma \vartheta \cot \vartheta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin u \left(A \sin 2\gamma \vartheta + \frac{1}{2} A \sin 2\gamma \vartheta \cot^2 \vartheta + B \sin^2 \gamma \vartheta \cot \vartheta \right) \right] \\ \Phi &= \frac{1}{4} \omega^2 \mu \sum \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \left\{ 1 + \sin u \left[\frac{1}{2} A \sin 2\gamma \vartheta + B (\operatorname{tg} \vartheta + 2 \cot \vartheta) \sin^2 \gamma \vartheta \right] - \right. \\ &\quad \left. - \cos u \left[\frac{3}{2} A + \frac{1}{2} A \cos 2\gamma \vartheta + \frac{1}{2} B (\operatorname{tg} \vartheta + 2 \cot \vartheta) \sin 2\gamma \vartheta \right] \right\} \end{aligned} \right\} 21).$$

В сумі перебігає ϑ вартости 18). Вартости 18) рівно віддалені від кінця сповняють ся до π , вираз середний сам є $\frac{\pi}{2}$. В виду того в 21) все ся знесе, крім виразу, де $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (бо інші вирази що два є рівні, але їх знаки є противні), так що :

$$\Theta = \omega^2 \mu \left[K + (A L_{\gamma} - B M_{\gamma}) \cos u \right]$$

$$\Phi = \omega^2 \mu (A M_{\gamma} + B N_{\gamma}) \sin u,$$

де :

$$L_{\gamma} = \sum_{\vartheta = \frac{\pi}{p}}^{(p-1) \frac{\pi}{p}} \left(\frac{\sin^2 \gamma \vartheta \cos \vartheta}{4 \sin^3 \vartheta} - \frac{\cos^2 \gamma \vartheta}{2 \sin \vartheta} \right)$$

$$M_{\gamma} = \sum \frac{\sin 2\gamma \vartheta \cos \vartheta}{8 \sin^2 \vartheta}$$

$$N_{\gamma} = \sum \left(\frac{\sin^2 \gamma \vartheta \cos^2 \vartheta}{2 \sin^3 \vartheta} + \frac{\sin^2 \gamma \vartheta}{4 \sin \vartheta} \right)$$

$$K = \sum \frac{1}{4 \sin \vartheta}$$

В виду того рівняня 20) дадуть :

$$\omega^2 - \frac{fM}{a^3} - \omega^2 \mu K + \left[(3\omega^2 + n - \omega^2 \mu L_{\gamma}) A + (2\omega n + \omega^2 \mu M_{\gamma}) B \right] \cos u = 0.$$

$$\left[(2\omega n + \omega^2 \mu M_{\gamma}) A + (n^2 + \omega^2 \mu N_{\gamma}) B \right] \sin u = 0.$$

То ся діє для всяких u , отже :

$$\omega^2 - \frac{fM}{a^3} - \omega^2 \mu K = 0, \quad 22)$$

$$\left. \begin{aligned} (3\omega^2 + n - \omega^2 \mu L_\gamma) A + (2\omega n + \omega^2 \mu M_\gamma) B &= 0. \\ (2\omega n + \omega^2 \mu M_\gamma) A + (n^2 + \omega^2 \mu N_\gamma) B &= 0. \end{aligned} \right\} 23).$$

Видко з того, що дійдемо до тих самих умовин, наколи приймем, що рівняня 19) сповняють рівняня ріжникові руху сателітів $P_2, P_3, \dots$

Через елімінацію A і B дістанемо з 23):

$$(n^2 + 3\omega^2 - \omega^2 \mu L_\gamma) (n^2 + \omega^2 \mu N_\gamma) - (2\omega n + \omega^2 \mu M_\gamma)^2 = 0. \quad 24)$$

Се є рівняне 4. степеня до визначеня n . Для кожного кореня остане стала A довільна, а $\frac{B}{A}$ обчислить ся на основі рівнянь 23). Наколи тому γ дамо цілий ряд вартостей цілих, дістанемо спрощеність одержаня загальних інтегралів.

Заложім, що скількість сателітів є париста: $p = 2q$. Чотири корені рівняня 24) є: $n_{\gamma 1} \ n_{\gamma 2} \ n_{\gamma 3} \ n_{\gamma 4}$; їм відповідає:

$$\begin{aligned} A_{\gamma 1} \ A_{\gamma 2} \ A_{\gamma 3} \ A_{\gamma 4} \\ B_{\gamma 1} \ B_{\gamma 2} \ B_{\gamma 3} \ B_{\gamma 4}. \end{aligned}$$

Най δ буде одно з чисел 1, 2, 3, 4, і най:

$$B_{\gamma \delta} = A_{\gamma \delta} \lambda_{\gamma \delta},$$

де після 23):

$$\lambda_{\gamma \delta} = - \frac{n_{\gamma \delta}^2 + 3\omega^2 - \omega^2 \mu L_\gamma}{2\omega n_{\gamma \delta} + \omega^2 \mu M_\gamma}.$$

Най ріжні вартости сталої α є $\alpha_{\gamma \delta}$; наколо положимо $\gamma = 1, 2, \dots, q$ і ввозьмем суму відповідних частных розвязок, дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} \rho_\gamma &= \sum_{\gamma=1}^q \sum_{\delta=1}^4 A_{\gamma \delta} \cos \left(n_{\gamma \delta} t + \alpha_{\gamma \delta} + \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{q} \right) \\ \sigma_\gamma &= \sum_{\gamma=1}^q \sum_{\delta=1}^4 \lambda_{\gamma \delta} A_{\gamma \delta} \sin \left(n_{\gamma \delta} t + \alpha_{\gamma \delta} + \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{q} \right) \end{aligned} \right\} 25).$$

Наколи будемо класти $\gamma = 1, 2, \dots, 2q$ дістанемо з огляду на рівняня попередні вираження на незвісні в функції t і $4p = 8q$ довільних сталих $A_{\gamma \delta}, \alpha_{\gamma \delta}$ і будуть се загальні інтеграли.

Походні рівнянь 25) дадуть:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho_v}{dt} &= \sum_{\gamma=1}^q \sum_{\delta=1}^4 n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \sin \left(n_{\gamma\delta} t + \alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma v \pi}{q} \right) \\ \frac{d\sigma_v}{dt} &= \sum_{\gamma=1}^q \sum_{\delta=1}^4 \lambda_{\gamma\delta} n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \cos \left(n_{\gamma\delta} t + \alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma v \pi}{q} \right) \end{aligned} \right\} 26).$$

Щоби рівняння 25) і 26) представляли інтеграли загальні рівнянь ріжничкових, треба визначити сталі довільні в сей спосіб, щоби положення і скорости початкові сателітів принимали якісь дані вартости. Пріймим проте яко дані вартости $8q$ малих величин ρ_v σ_v $\frac{d\rho_v}{dt}$ $\frac{d\sigma_v}{dt}$ для $t=0$ і при їх помочи обчислім сталі $A_{\gamma\delta}$ і $\alpha_{\gamma\delta}$. Рівняння 25) і 26) дадуть для $t=0$:

$$\left. \begin{aligned} \rho_v^0 &= \sum \sum A_{\gamma\delta} \cos \left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma v \pi}{q} \right) \\ \sigma_v^0 &= \sum \sum \lambda_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \sin \left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma v \pi}{q} \right) \\ - \left(\frac{d\rho_v}{dt} \right)_0 &= \sum \sum n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \sin \left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma v \pi}{q} \right) \\ \left(\frac{d\sigma_v}{dt} \right)_0 &= \sum \sum n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \cos \left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma v \pi}{q} \right) \end{aligned} \right\} 27).$$

($v=1, 2, \dots, 2q$)

Незвісних $A_{\gamma\delta} \cos \alpha_{\gamma\delta}$ і $A_{\gamma\delta} \sin \alpha_{\gamma\delta}$ в тільки, що рівнянь, можна отже незвісні обчислити.

4. Щоби перетень остояв ся в рівновазі, мусять ρ_v і σ_v , так як з початку, і далі остати дуже малими величинами; бо наколиб одна з величин σ_v почала ся збільшати, мусївби відповідний сателіт занадто приблизити ся до другого сусідного і насталаби колізія. З того слїдує, що чотири корені $n_{\gamma\delta}$ рівняня 24) мусять бути дійснї, що γ мусить містити ся між 0 а q . Наколиб так не було, то в інтегралах виступалиби чинники виложні, якиби стреміли до усякої границі.

Наколи число усіх сателітів є скінчене, можемо прийняти масу кожного з них, отже і масу цілого перстенья, достаточнo малу, щоби усі корені остали дійснї. Величини L_γ M_γ N_γ можуть бути достаточнo великі з причини малих знаменників $\sin \vartheta$, $\sin^2 \vartheta$, $\sin^3 \vartheta$, мимо того однак остають скінчені і означені. Отже для $n=0$ лїва сторона в рівняню 24) зведе ся до

$$\mu \omega^4 [3N_\gamma - \mu (M_\gamma^2 + L_\gamma N_\gamma)].$$

отже при достаточному малім μ буде се величина додатна.

З другої сторони рівняне 24) має форму:

$$n^2 (n^2 - \omega^2) + A\mu + B\mu^2;$$

виражене се позистає відємне, наколи при достаточному малім μ є $0 < n^2 < \omega^2$. Наколи отже в лівій стороні рівняня 24) будем класи за μ вартости:

$$-\infty, \quad -\frac{\omega}{\sqrt{2}}, \quad 0, \quad +\frac{\omega}{\sqrt{2}}, \quad +\infty,$$

то та сторона прийме знаки:

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad +,$$

маємо отже чотири зміни знаків, отже при малім μ для всіх вартостей γ всі чотири корені є дійсні.

З відеи слідує, що перстень зложений з рівних селітів може все остояти ся в рівновазі, наколи его маса є достаточна мала в порівнянню з масою Сатурна.

Розходить ся тепер о се, як мале мусить бути μ , щоби рівновага ся остояла.

Понеже γ може бути якенєбудь, возьмім:

$$\gamma = \frac{p}{2} = q.$$

Як знаєм:

$$\vartheta = \frac{h\pi}{p} = \frac{h\pi}{2q} \quad (h=0, 1, 2, \dots, 2q-1); \quad 2\gamma\vartheta = h\pi, \quad \text{отже} \quad \sin 2\gamma\vartheta = 0$$

або $M_\gamma = 0$; $\sin^2 \gamma\vartheta$ і $\cos^2 \gamma\vartheta$ приймають вартости 1, 0, 1,; 0, 1, 0,

Наколи возьмем q непаристе, дістанемо:

$$L_q = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 \frac{\pi}{2q}}{\sin^3 \frac{\pi}{2q}} + \frac{\cos^2 \frac{3\pi}{2q}}{\sin^3 \frac{3\pi}{2q}} + \dots + \frac{\cos^2 \frac{q-2}{2q} \pi}{\sin^3 \frac{q-2}{2q} \pi} \right) - \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2q}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{2q}} + \dots + \frac{1}{\sin \frac{q-1}{2q} \pi} \right)$$

$$N_q = \left(\frac{\cos^2 \frac{\pi}{2q}}{\sin^3 \frac{\pi}{2q}} + \frac{\cos^2 \frac{3\pi}{2q}}{\sin^3 \frac{3\pi}{2q}} + \dots + \frac{\cos^2 \frac{q-2}{2q} \pi}{\sin^3 \frac{q-2}{2q} \pi} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2q}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{2q}} + \dots + \frac{1}{\sin \frac{q-1}{2q} \pi} \right)$$

А що для $0 < x < \frac{\pi}{2}$ є:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6} x + \frac{7}{360} x^3 + \frac{31}{15120} x^5 + \dots$$

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{40} x + \frac{163}{15120} x^3 + \dots$$

то для достаточного великого q дістанемо:

$$\begin{aligned} L_q = & 4 \left(\frac{q}{\pi} \right)^3 \left\{ 1 + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{(q-1)^3} - \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{q} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{q-2} \right) - \frac{1}{640} \left(\frac{\pi}{q} \right)^4 (1+3+\dots+(q-2)) + \right. \\ & + \frac{163}{967680} \left(\frac{\pi}{q} \right)^6 [1+3^3+\dots+(q-2)^3] \left. \right\} - \frac{q}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{2}{q-1} \right) - \frac{1}{6} \frac{\pi}{q} \left(1 + 2 + \dots + \frac{q-1}{2} \right) - \\ & - \frac{7}{360} \left(\frac{\pi}{q} \right)^3 (1+2^3+\dots+(\frac{q-1}{2})^3) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_q - 2L_q = & \frac{q}{\pi} \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{q} \right) + 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{2}{q-1} \right) \right] + \frac{\pi}{q} \left[\frac{1}{24} (1+3+\dots+q) + \frac{1}{3} \left(1 + 2 + \dots + \frac{q-1}{2} \right) \right] + \\ & + \left(\frac{\pi}{q} \right)^3 \left\{ \frac{7}{5760} (1+3^3+\dots+q^3) + \frac{7}{180} \left(1 + 2^3 + \dots + \left(\frac{q-1}{2} \right)^3 \right) \right\} + \dots \end{aligned}$$

а що:

$$1 + 3 + \dots + (q-2) = \frac{(q-1)^2}{4}, \quad 1^3 + 3^3 + \dots + (q-2)^3 = \frac{(q-1)^4 - 2(q-1)^2}{8},$$

то:

$$L_q = \left(\frac{2q}{\pi} \right)^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \dots \right) + \frac{W_1}{q^2} + \frac{W_2}{q^3} + \dots \right]$$

$$N_q - 2L_q = \left(\frac{2q}{\pi} \right)^3 \frac{V_1}{q^2} + \frac{V_2}{q^3} + \dots;$$

отже в приближеню:

$$L_q = 0.525 \left(\frac{2q}{\pi} \right)^3, \quad N_q - 2L_q = 0.0000 \left(\frac{2q}{\pi} \right)^3. \quad (28)$$

Наколи тепер після 28) в рівняне 24) за L_q M_q N_q вставимо L_q , 0 , $2L_q$, дістанемо:

$$\left(\frac{n}{\omega} \right)^4 - (1 - \mu L_q) \left(\frac{n}{\omega} \right)^2 + 2\mu L_q (3 - \mu L_q) = 0. \quad (29)$$

Щоби оба корені були дійсні, мусить бути:

$$1 - \mu L_q > 0 \quad (30)$$

і

$$1 - 26 \mu L_q + 9 \mu^2 L_q^2 > 0.$$

З відси :

$$(\mu L_q - 2.8499) (\mu L_q - 0.0390) > 0$$

або після 30)

$$\mu L_q < 0.039, \quad \mu < \frac{0.039}{0.525} \left(\frac{\pi}{2q} \right)^3.$$

Наколи відношене маси перстения а масою Сатурна є m , то :

$$m = 2\mu q = \mu p,$$

отже :

$$m < \frac{2.30}{p^2}.$$

Наколиби отже було лиш 100 сателітів, маса всіх їх — щоби рівновага перстения могла бути тревала — мусілаби бути меньша як $\frac{1}{4000}$ -а часть маси Сатурна.

Но ми брали лиш $\gamma = q$; отже даймо тому γ вартости (1, 2, ..., $q - 1$). L_γ , M_γ , N_γ мають вартости досить великі з причини малих знаменників $\sin^3\vartheta$, $\sin^2\vartheta$, $\sin\vartheta$; вартости ті зменьшать ся, наколи p є велике; тоді для першої вартости на ϑ ($\vartheta = \frac{\pi}{p}$) в приближеню за $\sin^3\vartheta$, $\sin^2\vartheta$, $\sin\vartheta$ можна покласти: $\left(\frac{\pi}{p}\right)^3$, $\left(\frac{\pi}{p}\right)^2$, $\frac{\pi}{p}$, а тоді :

$$N_\gamma = 2L_\gamma \left(1 + \frac{S_1}{p^2}\right), \quad M_\gamma = L_\gamma \frac{S_2}{p},$$

а рівнане 24) перейде на 29) (лиш за L_q прийде L_γ). Щоби чотири корені були і ту дійсні, треба і ту покласти :

$$\mu L_\gamma < 0.039. \quad 31)$$

А що після першого значіня на L_γ буде для всяких γ :

$$L_\gamma < \frac{1}{4} \sum \frac{\cos^2\vartheta}{\sin^3\vartheta},$$

а тим більше :

$$L_\gamma < \frac{1}{2} \left(\frac{p}{\pi} \right)^3 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \right) = 0.0194p^3,$$

отже після 31):

$$\mu 0.0194p^3 < 0.039,$$

або :

$$\mu < \frac{2}{p^3}.$$

Нерівність 31) сповняє ся проте все. Можемо проте сказати, що накопи:

$$m < \frac{2}{p^2},$$

де p є число сателітів, а m відношенє між масою цілого перстєня а масою Сатурна, то рівновага перстєня остоїть ся.

5. Наколиби сателіти мали маси ріжні, то і тоді дійшли-бисьмо до рівнань ріжничкових лінійових зі сталими сочинниками; очевидно що рахунки будуть більше скомпліковані. Однак видко, що і ту при малих масах сателітів дійдем до анальоїчного розділу сил, як в першім случаю, отже загальна конклюдия остане; зміни, які би ту виступали в положеню перстєня, будуть відбувати ся в дуже тісних границях.

Махвелл бере дальше случай, що перстєнь складає ся з кусників метеоричних і доходить до заключєня, що єго густота мусілаби бути меньша або рівна $\frac{1}{300}$ густоти Сатурна. Середна густота перстєня рівналаби ся в приближеню двократній густоті воздуха під сталим тисненєм, но очевидно густота в поодиноких місцях перстєня моглаби бути більша.

Махвелл доказує далі, що перстєнь плинний тяглий не мігби ся остояти, але мусіьби розділити ся на множество малих сателітів. Можна проте привнати, що перстєнь складає ся з окремих частий, які можуть бути сталі або плинні, але від себе не залежать (деякі сателіти є плинні, а деякі сталі). Стверджує се обсервация, бо через внутрішній берег перстєня можна обсервувати берег Сатурна, що булоб неможливе, накопиб лучі Сатурна переходили через тяглий перстєнь, бо тоді підлягалиби рефракцій.

Розсліди Ковалевскої.¹⁾

1. Ковалевска приймає подібно як Ляплєс, що перстєнь є однородний, утворений з плинної матерії; повстав він через оборот кривої плоскої симетричної зглядом оси ОУ (Фіг. II.), та немного ріжної від еліпси.

¹⁾ Pop. Zusätze und Bemerkungen zur Laplace'schen Untersuchung ü. d. Gestalt der Saturnringe (Astronom. Nachrichten Bd. CXI. 1885 cr. 37 et sqts.)

Щоби якась точка перстения могла остоятись в рівновазі, треба, щоби для неї заходило рівняне таке, як в теорії Ляпласа

$$V + V_1 + \frac{1}{2} \omega^2 \rho_1^2 = C \quad 1)$$

де V і V_1 є потенціями перстения і Сатурна, ω шкороістю оборотовою, ρ_1 віддалене від осі оборотової, а C є стала.

Наколи маса Сатурна є сконцентрована в точці тяжести, то:

$$V_1 = \frac{M}{\sqrt{\rho_1^2 + z_1^2}}$$

де z_1 є віддалене уважаної точки перстения від площі рівникової, а ρ_1 віддалене її від осі оборотової.

В обчисленю потеціалу V відступає Ковалевска від способу Ляпласа; після неї спосіб Ляпласа, що ділане перстения заступає діланем безконечно довгого вальця, не є вповні оправданий, бо годі з гори знати, чи блуд, який при тім підставленю виступає, є дійсно такої величини, як думає Ляплас. Також і се заложене Ляпласа, що вісь велика перстения (розміри) є в порівнаню з перекроєм еліпси дуже велика, не є також доконче оправдане.

З тої причини приймає Ковалевска, що рівняне згаданої кривої, мало-що ріжної від еліпси, в укладі ортогональним сорядних, де вісь OZ є осію обороту, є:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - a \cos t$$

$$z = a (\beta \sin t + \beta_1 \sin 2t + \beta_2 \sin 3t + \dots) \quad 2)$$

де t є дійсна величина змінна в границях $(0 \dots 2\pi)$, а $a \beta \beta_1 \dots$ є сталі.

Приймаючи розміри кривої дуже невеликі, можем вважати а за малий дроб; а наколи крива мало ріжнитися має від еліпси, мусять $\beta_1 \beta_2 \dots$ не лиш бути дуже малі, а також і сума

$$|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| + \dots$$

мусить бути дуже мала в порівнаню з β .

Наколи тепер приймем, що ds є безконечно малий елемент поверхні перстения, P один пункт того елементу, P_1 означений пункт поверхні, для якого шукаєм потенціалу V , а θ є кут, який творить внішна нормальна в точці P з простою PP_1 , то після Gauss'a дістанемо на потенціал:

$$V = - \frac{1}{2} \iint \cos \Theta d\sigma. \quad 3)$$

Наколи сорийдні для $P \in (x \ y \ z)$, для $P_1 (x_1 \ y_1 \ z_1)$, відступ $PP_1 = r$, достави напрямні згаданої нормальної $\xi \ \eta \ \zeta$, то як звісно:

$$\cos \Theta = \frac{x_1 - x}{r} \xi + \frac{y_1 - y}{r} \eta + \frac{z_1 - z}{r} \zeta \quad 4).$$

Наколи положимо :

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{x^2 + y^2} \cos \psi, & y &= \sqrt{x^2 + y^2} \sin \psi, \\ \varphi(t) &= \beta \sin t + \beta_1 \sin 2t + \dots \\ A &= 4(1 - a \cos t)(1 - a \cos t_1) \\ B &= a^2 [(\cos t - \cos t_1)^2 + (\varphi(t) - \varphi(t_1))^2] \\ C &= 2a^2 (1 - a \cos t) [(\cos t - \cos t_1) \varphi'(t) + \sin t (\varphi(t) - \varphi(t_1))] \end{aligned} \right\} \quad 5)$$

дістанемо на потенціал :

$$V = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} \frac{C - Aa\varphi'(t) \sin^{\frac{1}{2}}(\psi - \psi_1)}{\sqrt{B + A \sin^2 \frac{1}{2}(\psi - \psi_1)}} d\psi,$$

або, наколи положимо :

$$\frac{1}{2} (\psi - \psi_1) = \vartheta,$$

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{C - Aa\varphi'(t) \sin \vartheta}{\sqrt{B + A \sin^2 \vartheta}} d\vartheta \quad 6)$$

дістанемо :

$$V = \int_0^{2\pi} W dt \quad 7).$$

Наколи положимо :

$$\sqrt{A \sin^2 \vartheta + B} = \sqrt{B} \cdot s, \quad k^2 = \frac{B}{A + B} \quad 8)$$

дістанемо :

$$W = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{C + B\varphi'(t) - B\varphi'(t)s^2}{\sqrt{A+B} \cdot \sqrt{s^2-1} \sqrt{1-k^2s^2}} ds, \quad 9)$$

де k^2 є дуже мала величина.

Є се інтеграл еліптичний, тому-то Ковалевська уживає ту формулу Weierstrass'a :¹⁾

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-1} \sqrt{1-k^2\xi^2}} = \frac{1}{2} K \log \frac{16}{k^2} - K_1$$

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2 \xi d\xi}{\sqrt{\xi^2-1} \sqrt{1-k^2\xi^2}} = \frac{1}{2} I \log \frac{16}{k^2} - I_1$$

де :

$$\left\{ \begin{aligned} K &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \dots \\ K_1 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \frac{7}{2.3} \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \dots \\ I &= \frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \dots \\ I_1 &= -1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{13}{12} \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \dots \end{aligned} \right.$$

В виду того дістанемо :

$$W = W_1 \log \frac{16}{k^2} + W_2,$$

де :

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{C + aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}} K - \frac{1}{2} \frac{aB\varphi'(t)}{2\sqrt{A+A}} I$$

$$W_2 = - \frac{C + aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}} K_1 + \frac{aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}} I_1$$

Величини W_1 і W_2 можна розвинути після $\cos$ і $\sin$ величин t і t_1 в ряди, причім сочинники будуть рядами степенними вели-

¹⁾ Поп. Weierstrass: Theorie der Abelschen Functionen, Crelle's Journal т. 52. ст. 75 et sqts.

чин а β_1 , ———, а що а в дуже мале, то ті ради будуть сильно збіжні.

Інтеграл $\int_0^{2\pi} W_2 dt$ дає ся впрост обчислити в сей спосіб, що вираз ряду на W_2 , незалежний від t , помножимо через 2π .

Труднійша є справа з інтегралом $\int_0^{2\pi} W_1 \log \frac{16}{k^2} dt$.

Позаяк в 5) величина B стає ся зером лиш тоді, коли $\cos t = \cos t_1$ або $\varphi(t) = \varphi(t_1)$, що з огляду на нашу криву може лиш тоді бути, коли $t = t_1 + 2m\pi$, де m є число ціле, то з сего слідує, що B є подільне через $1 - \cos(t - t_1)$, отже можем написати:

$$B = a^2 [1 - \cos(t - t_1)] B_1,$$

де B_1 дасть ся розвинути після $\cos$ і $\sin$ величин t і t_1 .

Наколи заложимо, що $\beta_1 \Rightarrow \beta_2 = \dots = 0$, то в виду сего B_1 зводить ся на

$$\frac{1}{2} (1 + \beta^2) - \frac{1}{2} (1 - \beta^2) \cos(t + t_1),$$

з чого слідує, що для достаточного малих $\beta_1 \beta_2 \dots B_1$ не зникає для дійсних вартостей t і t_1 .

Наколи тепер положимо:

$$B_1 = \left[\frac{1}{2} (1 + \beta^2) - \frac{1}{2} (1 - \beta^2) \cos(t + t_1) \right] (1 + B_2),$$

то:

$$\log B = 2 \log a + \log [1 - \cos(t - t_1)] + \log \left[\frac{1}{2} (1 + \beta^2) - \frac{1}{2} (1 - \beta^2) \cos(t + t_1) \right] + \log (1 + B_2).$$

В виду того складає ся $W_1 \log \frac{16}{k^2}$ з слідуючих п'ятих частий:

$$\begin{aligned} & W_1 \log 16 (A + B) \\ & - 2 W_1 \log a \\ & - W_1 \log \left[\frac{1}{2} (1 + \beta^2) - \frac{1}{2} (1 - \beta^2) \cos(t + t_1) \right] \\ & - W_1 \log [1 - \cos(t - t_1)] \\ & - W_1 \log (1 + B_2) \end{aligned}$$

Три перші часті можна подібно як W_2 розвинути в ряди і впрост з'інтегрувати. Четверта часть дає ся розвинути на ряд лиш для вартостий $t - t_1$, що лежать між 0 а 2π , но після теорії Fourier'a

$$\text{і ту дістанемо вартість інтеграла} \quad - \int_0^{2\pi} W_1 \log [1 - \cos (t - t_1)] dt,$$

наколи вираз від t незалежний через 2π .

$$\text{Щоби обчислити інтеграл} \quad \int_0^{2\pi} W_1 \log (1 + B_2) dt, \quad \text{треба напе-}$$

ред $\log (1 + B_2)$ розвинути в ряд після степенний B_2 ; ряд сей із за дуже малх вартостий $\beta_1, \beta_2, \dots$ буде сильно збіжний; можна отже буде перевести інтегруванє.

Сим способом дістанем на V зовсім означений і сильно збіжний ряд форми:

$$V_0 + V_1 \cos t_1 + V_2 \cos 2 t_1 + \dots$$

Сочинники того ряду є з огляду на $a, \log a, \log (1 + \beta), \beta_1, \beta_2, \dots$ цілковити функціями (о безконечно много членах); їх сочинники є вимірими дробовими функціями β ; $\log a$ виступає лиш яко добуток в купі з якоюсь степеною a .

2. Перейдім тепер до потенціалу V_1 :

$$V_1 = \frac{M}{\sqrt{\rho_1^2 + z_1^2}} = \frac{M}{\sqrt{(1 - a \cos t_1)^2 + a^2 \varphi^2(t_1)}}$$

Вираженє се можна також розвинути на збіжний ряд:

$$m_0 + m_1 \cos t_1 + m_2 \cos 2 t_1 + \dots,$$

де $m_0, m_1, \dots$ є цілими функціями а $\beta, \beta_1, \dots$

В кінці:

$$\rho_1^2 = (1 - a \cos t_1)^2 = \frac{1}{2} a^2 - 2 a \cos t_1 + \frac{1}{2} a^2 \cos 2 t_1.$$

Наколи перстень має удержувати ся в рівновазі, треба величини $\omega, C, \beta, \beta_1, \beta_2, \dots$ так визначити, щоби -

$$\left\{ \begin{array}{l} V_0 + m_0 + \frac{1}{2} \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2} a^2 \right) + C = 0 \\ V_1 + m_1 - \omega^2 a = 0 \\ V_2 + m_2 + \frac{1}{4} \omega^2 a^2 = 0 \end{array} \right\} \quad 10).$$

а:

$$V_{s+2} + m_{s+2} = 0 \quad (s \text{ додатне}) \quad 11).$$

Величин $\beta, \beta_1, \beta_2, \dots$ є безконечно много і в кожде рівнянє входить їх безконечно много, отже неможливо їх визначити. Можнаби однак порадити собі в сей спосіб, що возьмем:

$$\varphi(t) = \beta^{(\mu)} \sin t + \beta_1^{(\mu)} \sin 2t + \dots + \beta_\mu^{(\mu)} \sin (\mu + 1)t,$$

обчислимо сочинники V_λ, m_λ і визначимо: $\omega^{(\mu)}, C^{(\mu)}, \beta^{(\mu)}, \beta_1^{(\mu)}, \dots, \beta_\mu^{(\mu)}$ так, щоби $(\mu + 3)$ початкових рівнянь 10) і 11) сповнило ся. Наколиби далі дало ся доказати, що ті величини для $\mu = \infty$ зближають ся до означених скінчених границь так, що сума беззглядних вартостей граничних виражень на $\beta_1, \beta_2, \dots$ булаб меньша як β , то можнаби з сего заключати, що рівняня 10) і 11) сповнять ся, наколи за величини $\omega^{(\mu)}, C^{(\mu)}, \beta^{(\mu)}, \dots$ вставимо граничні вартости $\omega, C, \beta, \dots$.

Се є однак лиш в теорії можливе. Щоби згадані величини з відповідним приближенем обчислити, поступимо в слідуєчий спосіб. Положим:

$$\varphi = \beta \sin t + \beta_1 \sin 2t + \dots + \beta_\mu \sin (\mu + 1)t$$

і приймім на разі, що $|\beta_1| + |\beta_2| + \dots + |\beta_\mu|$ є величиною того самого ряду, що α , та пропустім в розвиненях на V_λ і m_λ всі величини ряду вишого як $(\mu + 2)$, причім $\alpha^m \log \alpha$ буде величиною ряду вишого як $(m - 1)$. Тоді з $(\mu + 3)$ початкових рівнянь 10) і 11) вийде, що $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu$ є малими величинами 1-ого, 2-ого, $\dots$ μ -ого ряду; можна отже покласти:

$$\beta_1 = \alpha \gamma_1$$

$$\beta_2 = \alpha^2 \gamma_2$$

$$\beta_\mu = \alpha^\mu \gamma_\mu$$

Тоді з даних рівнянь випадуть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\mu$ яко однозначні скінчені числа, а далі при так визначених величинах $\beta_1, \dots, \beta_\mu$ ліві сторони оставших ся рівнянь 10) і 11) будуть величинами ряду вишого як $(\mu + 2)$.

3. З усього того виходить, що можна визначити в сей спосіб перекрій перстєня, щоби вираженє:

$$V + V_1 + \frac{1}{2} \omega^2 \rho^2,$$

яке для поверхні перстень має мати сталу вартість, ріжнито ся від сталої лиш о величину ряду вишого як $(\mu + 2)$. А що $(\mu + 2)$ можна првняти так велике, як хочемо, то можем заключати, що дійсно існує такий вид перекрою перстень, для якого повисше виражене на цілій поверхні перстень є стале.

Ковалевска переводить далі обчислене для $\mu = 1$, щоби визначити вид перекрою перстень з точністю третого ряду. Пропускаючи в висше наведених вираженнях вирази ряду вишого як четвертий дістає она :

$$V = \pi a^2 (v_0 + v_1 \cos t_1 + v_2 \cos 2t_1 + v_3 \cos 3t_1),$$

де :

$$v_0 = \beta \left(\log \frac{256}{a^2(1+\beta)^2} - 2 \right)$$

$$v_1 = a\beta \left(\frac{-11 + 9\beta - \beta^2 + 3\beta^3}{4(1+\beta)} + \log \frac{256}{a^2(1+\beta)^2} \right)$$

$$v_2 = -\beta \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

$$v_3 = -a\beta \frac{(1-\beta)(1+3\beta)}{6(1+\beta)^2} + \alpha\gamma \frac{-2 + 6\beta + 6\beta^2 + 6\beta^3}{3(1+\beta)^3}.$$

Далі є :

$$\frac{M}{V \rho_1^2 + z_1^2} = m_0 + m_1 \cos t_1 + m_2 \cos 2t_1 + m_3 \cos 3t_1,$$

$$m_0 = M$$

$$m_1 = aM \left[1 + a^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8} \beta^2 - \frac{1}{2} \beta\gamma \right) \right]$$

$$m_2 = a^2 M \frac{2 + \beta^2}{4}$$

$$m_3 = a^3 M \left[\frac{1}{8} (2 + 3\beta^2) + \frac{1}{2} \beta\gamma \right]$$

а в решті :

$$\frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2} a^2 \right) - \omega^2 a \cos t_1 + \frac{1}{4} \omega^2 a^2 \cos 2t_1$$

Друге, третє і четверте з рівнень 10), які в нашім случаю є :

$$\pi a^2 v_1 + m_1 - a \omega^2 = 0.$$

$$\pi a^2 v_2 + m_2 + \frac{1}{4} a^2 \omega^2 = 0.$$

$$\pi a^2 v_3 + m_3 = 0.$$

мають тепер вартість:

$$\pi a^2 \beta \left(\frac{-11+9\beta-\beta^2+3\beta^3}{4(1+\beta)} + \log \frac{256}{a^2(1+\beta)^2} \right) + a^2 M \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8} \beta^2 \right) + \left(2\pi \frac{1+\beta-\beta^2}{(1+\beta)^2} - \frac{1}{2} M \beta \right) a^2 \gamma + M - \omega^2 = 0.$$

$$M(2+\beta^2) - 4\beta \frac{1-\beta}{1+\beta} \pi + \omega^2 = 0. \quad (12)$$

$$M \frac{2+3\beta^2}{8} - \pi \frac{\beta(1-\beta)(1+3\beta)}{6(1+\beta)^2} + \left(\frac{1}{2} M \beta + \frac{-2+6\beta+6\beta^2+6\beta^3}{3(1+\beta)^3} \right) \gamma = 0.$$

З послідного з тих рівнянь виходить:

$$\gamma = \frac{1}{4} \frac{3M(2+3\beta^2)(1+\beta)^2 - 4\pi\beta(1-\beta)(1+3\beta)}{4 - 12\beta - 12\beta^2 - 12\beta^3 - 3M\beta(1+\beta)^3} (1+\beta) \quad (13)$$

а з першого:

$$\omega^2 = M + a^2 N \quad (14)$$

де:

$$N = \pi \beta \left(\frac{-11+9\beta-\beta^2+3\beta^3}{4(1+\beta)} + \log \frac{256}{a^2(1+\beta)^2} \right) + M \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8} \beta^2 \right) + \left(2\pi \frac{1+\beta-\beta^2}{(1+\beta)^2} - \frac{1}{2} M \beta \right) \gamma.$$

Друге з рівнянь 12) провадить до рівняня:

$$M(3+\beta^2) - \frac{4\beta(1-\beta)}{1+\beta} \pi + a^2 N = 0 \quad (15)$$

де за γ , яке входить в N , треба вставити вартість 13). Рівняне 15) служити-ме до обчислення β .

Наколи в рівняню 15) пропустимо вираз при a^2 , дістанемо:

$$M(3+\beta^2) - \frac{4\beta(1-\beta)}{1+\beta} \pi = 0.$$

Як легко постеречи, є се то само рівняне, що в теорії Ляпляса (рівняне 5). Мусимо ту заложити, що β є додатне і не більше як 1.

Далі як в теорії Ляпляса треба положити, що $\frac{M}{4\pi} < 0.0543$; при тім заложеню рівняне має два додатні корені. Наколи оден з них є β_0 , то з рівняня 15) випаде з точністю до четвертого ряду:

$$\beta = \beta_0 - \frac{a^2 N_0}{2M\beta_0 - 3 + \frac{8}{(1+\beta_0)^2}},$$

де $N_0 = N \}$ для β_0 .

Ся вартість вставлена в 13) дозволяє обчислити з таким самим приближенем і γ , а так само випаде і:

$$\omega^2 = M + a^2 N_0.$$

В кінці завважати треба, що тепер є:

$$\varphi(t) = \beta \sin t + a\gamma \sin 2t;$$

$$\varphi(t) < \beta \sin t, \quad \text{наколи } 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi(t) > \beta \sin t, \quad \text{наколи } \frac{\pi}{2} < t < \pi.$$

Для меншого кореня β з буде менше, отже перекрій полуденниковий буде мав сильнішу кривину в точці найближше положеній до середоточки цілого систему (fig. V. 6), для більшого кореня β буде противно (fig. V. a).

Досліди Poincaré над рівновагою перстень з маси плинної одно-
родної, якого частини притягають ся після закона Ньютона, та
який відбуває рух оборотовий.¹⁾

1. Приймім, що ОХ є осню обороту (fig. II.), С середотчка тяжести полуденникового перекрою АВА'В', СО = l. Най r = CM і $\angle \varphi = \gamma \text{СМ}$ будуть сорадними бігуновими точки М. Згадана крива, симетрична до осн ОУ, має після Poincaré²⁾ рівнанє:

$$r = a(1 + \beta_1 \cos \varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \dots) \quad 1).$$

Poincaré приймає загальне рівнанє рівноваги:

$$\delta U = 0,$$

де U є функція сил; в положеню, яке би відповідало рівновазі тревалій, мусить бути U maximum. Наколи dm і dm' є якісь два елементи перстень віддалені від себе о Δ , то:

$$U = f \int \frac{dm dm'}{\Delta} + \frac{1}{2} \omega^2 \int y^2 dm,$$

де інтеграл відносить ся до всіх точок мас, що обертає ся зі скоростью ω .

Найже:

$$\int \frac{dm dm'}{\Delta} = \frac{1}{2} \iint \frac{dm dm'}{\Delta} = W, \quad \int y^2 dm = I, \quad 2)$$

¹⁾ Поп. Poincaré: Bulletin astronomique т. II. стр. 109. і 405. і Acta mathematica т. VII. 259 et sqts.

²⁾ Acta math. VII. стр. 284 sqts.

то :

$$U = fW + \frac{1}{2} \omega^2 I. \quad 3).$$

W є енергія потенціальна перстень, I єго момент безвладности з огляду на вісь обороту; W і I відносять ся до цілої маси перстень. Наколи ті елементи dm , що лежать між поверхнею рівноваги а поверхнею здсформованою безконечно близькою, назначимо через $d\mu$, а через V_μ і y_μ назначимо відповідні вартости потенціалу та віддаленя у (точки на поверхні рівноваги), дістанемо :

$$\delta W = \int V_\mu d\mu, \quad \delta I = \int y_\mu^2 d\mu, \quad \int d\mu = 0,$$

отже :

$$\delta U = \int \left(fV_\mu + \frac{1}{2} \omega^2 y_\mu^2 \right) d\mu = 0,$$

бо виражене в скобках є стале для цілої поверхні рівноваги.

Наколи маса перстень є M , а густота ρ , то знане маси M дозволить нам утворити якусь реляцію між a , l , β_1 β_2 , -----, а се, що початок C лучів провідних є zarazом середоточною тяжести, дасть нам реляцію для β , і будемо могли визначити β_1 яко функцію величин (β_2 β_3 , -----). Независимими параметрами будуть тоді a β_2 β_3 ----- . Коли приймем, щосьмо найшли виражене на U яко функцію тих параметрів, то з рівняня $\delta U = 0$ випаде :

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta_3} = 0, \quad \text{-----} \quad 4)$$

і всі елементи фігури будуть визначені.

Виразжене W дасть ся легко обчислити ня сій основі, що перстень є оборотовий.

Наколи dS і dS' є елементами поверхні перекрою $ABA'B'$, у та y' їх відступами від осі OX , $h = x - x'$, то оба ті елементи утворють через оборот довкола осі OX два перстені колові, яких енергія потенціальна є dW ; наколи полуденники двох елементів dm і dm' тих елементарних перстенів твоять з площею XOY кути ψ і ψ' , а відступ тих елементів є Δ , то :

$$W = \int dW, \quad dW = \iint \frac{dm dm'}{\Delta},$$

а що :

$$dm = \rho dS y d\psi, \quad dm' = \rho dS' y' d\psi',$$

$$\Delta^2 = y^2 + y'^2 - 2yy' \cos(\psi' - \psi) + h^2,$$

то :

$$dW = \rho^2 yy' dS dS' \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{y^2 + y'^2 - 2yy' \cos(\psi' - \psi) + h^2}}.$$

Най: $\psi' - \psi = \psi''$, то узгледяючи, що ψ остає сталим при інтегруванні зглядом ψ' , дістанемо :

$$dW = 4\pi \rho^2 yy' dS dS' \int_0^{2\pi} \frac{d\psi''}{\sqrt{y^2 + y'^2 - 2yy' \cos \psi'' + h^2}},$$

або :

$$dW = 8\pi \rho^2 yy' dS dS' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(y + y')^2 + h^2 - 4yy' \sin^2 \vartheta}},$$

де $\psi'' = \pi - 2\vartheta$. Є се інтеграл еліптичний першого рода, а його модулі є :

$$\left. \begin{aligned} k^2 &= \frac{4yy'}{(y + y')^2 + h^2} \\ k'^2 &= \frac{(y - y')^2 + h^2}{(y + y')^2 + h^2} = \frac{\delta^2}{(y + y')^2 + h^2}; \end{aligned} \right\} 5)$$

отже :

$$dW = 8\pi \rho^2 \frac{yy'}{\sqrt{(y + y')^2 + h^2}} dS dS' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} \left. \right\}$$

де δ є відступом елементів dS і dS' .

Poincaré приймає, що розміри даної кривої є дуже малі в порівнянню з l ; тоді $\frac{y}{l} - 1$, $\frac{y'}{l} - 1$, $\frac{h}{l}$ є величини першого ряду, а k'^2 другого ряду.

Наколи положимо $y = l + y_1$, $y' = l + y_1'$, де y_1 і y_1' є сорядні елементів dS і dS' з огляду на вісь Cx_1 , рівнобіжну до OX , тоді $h^2 = (x - x')^2$ і дістанемо розвинення після $\frac{x}{l}$, $\frac{x'}{l}$, $\frac{y_1}{l}$, $\frac{y_1'}{l}$:

$$k' = \frac{\delta}{2l} \left[1 + \frac{y_1 + y_1'}{l} + \frac{(y_1 + y_1')^2 + (x - x')^2}{4l^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\delta}{2l} \left[1 - \frac{y_1 + y_1'}{2l} + \frac{(y_1 + y_1')^2}{4l^2} - \frac{(x - x')^2}{8l^2} + \dots \right],$$

а що інтеграл (аналогічно як в теорії Ковалевскої):

$$\int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta}} = \left(1 + \frac{\delta^2}{16l^2} + \dots\right) \log \frac{8l}{\delta} + \frac{y_1 + y_1'}{2l^2} - \frac{(y_1 + y_1')^2}{8l^2} + \frac{(x - x')^2}{8l^2} - \frac{\delta^2}{16l^2} + \dots$$

$$\frac{yy'}{\sqrt{(y+y')^2 + h^2}} = \frac{(1+y_1)(1+y_1')}{\sqrt{(2l+y_1+y_1')^2 + (x-x')^2}} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{y_1 + y_1'}{2l} - \frac{(y_1 - y_1')^2}{4l^2} - \frac{(x - x')^2}{8l^2} + \dots \right],$$

то дістанемо:

$$dW = 4\pi\rho^2 l \left[1 + \frac{y_1 + y_1'}{2l} - 3 \frac{(y_1 - y_1')^2}{16l^2} - \frac{(x - x')^2}{16l^2} + \dots \right] \log \frac{8l}{\delta} dS dS' +$$

$$+ 4\pi\rho^2 l \left[\frac{y_1 + y_1'}{2l} + \frac{(y_1 - y_1')^2}{16l^2} + \frac{y_1 y_1'}{2l^2} + \frac{(x - x')^2}{16l^2} + \dots \right] dS dS'.$$

Най:

$$W_1 = 4\pi\rho^2 l \iint \log \frac{8l}{\delta} dS dS' \quad 7)$$

а:

$$W_2 = 4\pi\rho^2 l \iint \left[\frac{y_1 + y_1'}{2l} - 3 \frac{(y_1 - y_1')^2}{16l^2} - \frac{(x - x')^2}{16l^2} + \dots \right] \log \frac{8l}{\delta} dS dS' +$$

$$+ 4\pi\rho^2 l \iint \left[\frac{y_1 + y_1'}{2l} + \frac{(y_1 - y_1')^2}{16l^2} + \frac{y_1 y_1'}{2l^2} + \frac{(x - x')^2}{16l^2} + \dots \right] dS dS', \quad \left. \vphantom{\iint} \right\} 8)$$

то тоді:

$$W = W_1 + W_2 \quad 9).$$

З вище наведених формул видно, що кват $\frac{W_2}{W_1}$ є величиною малою ряду $\frac{a}{l}$.

2. Щоби винайти W_1 , підем способом Callandreau¹⁾.

Най-же:

$$f(\varphi) = 1 + \beta_1 \cos \varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \dots \quad 10)$$

і возьмім криві:

$$r_1 = u f(\varphi), \quad r_1 = (u + du) f(\varphi)$$

$$r_1' = u' f(\varphi'), \quad r_1' = (u' + du') f(\varphi'),$$

де u і u' є два параметри змінні в границях $(0 \dots a)$, $u' < u$.

Криві ті є гомотетичні зглядом кривої полуденникової (Fig. VI).

¹⁾ Пор. Bulletin astronomique т. III, ст. 252, також Tisserand loc. cit. II.

Най елементом dS буде часть між кривими u , $u + du$, та лучами провідними, яким відповідають кути φ і $\varphi + d\varphi$; так само dS' . Дістанемо:

$$dS = u f^2(\varphi) du d\varphi, \quad dS' = u' f^2(\varphi') du' d\varphi'$$

$$\delta^2 = u^2 f^2(\varphi) + u'^2 f^2(\varphi') - 2u u' f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi').$$

Для даної вартості u будемо інтегрувати зглядом u' від 0 до u , а для φ' від 0 до 2π так, щоби елемент dS' обнимав всі положення в середині кривої u ; далі u має ся зміняти від 0 до a , а φ від 0 до 2π . Тоді можна буде написати:

$$\frac{W_1}{4\pi\varphi^2 l} = \int_0^a u du \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log \frac{8l}{\sqrt{u^2 f^2(\varphi) + u'^2 f^2(\varphi') - 2u u' f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi')}} d\varphi d\varphi'.$$

u в інтегруванні зглядом u' стало, можна проте покласти:

$$u' = ux, \quad du' = u dx,$$

а тоді:

$$\frac{W_1}{4\pi\varphi^2 l} = \int_0^a u^3 \log \frac{8l}{u} du \int_0^1 x dx \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') d\varphi d\varphi' +$$

$$11) + \int_0^a u^3 du \int_0^1 x dx \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log \frac{1}{\sqrt{f^2(\varphi) + x^2 f^2(\varphi') - 2x f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi')}} d\varphi d\varphi'.$$

Можна безпосередно інтегрувати зглядом u ; тоді:

$$\int u^3 \log \frac{8l}{u} du = \frac{1}{4} u^4 \log \frac{8l}{u} + \frac{1}{16} u^4 + \text{Const.}$$

$$\int_0^a \log \frac{8l}{u} du = \frac{1}{4} a^4 \left(\log \frac{8l}{a} + \frac{1}{4} \right);$$

дальше в:

$$\int_0^{2\pi} f^2(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} (1 + \beta_1 \cos \varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \dots)^2 d\varphi = 2\pi (1 + c_0),$$

де:

$$c_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$$

та де пропущено добутки третього степеня величин β_n .

Тепер дістанемо:

$$W_1 = \pi^3 \varphi^2 a^4 l (1 + c_0)^2 \left(\frac{1}{2} + 2 \log \frac{8l}{a} \right) + \pi \varphi^2 a^4 l \int_0^1 x dx, \quad 12)$$

де:

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log \frac{1}{\sqrt{f^2(\varphi) + x^2 f^2(\varphi') - 2x f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi')}} d\varphi d\varphi'.$$

Щоби обчислити J , положім:

$$f^2(\varphi) + f^2(\varphi') x^2 - 2x f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi') = [1 + x^2 - 2x \cos(\varphi - \varphi')] (1 + H),$$

де:

$$H = \frac{f^2(\varphi) - 1 + x^2 [f^2(\varphi') - 1] - 2x [f(\varphi) f(\varphi') - 1] \cos(\varphi - \varphi')}{1 + x^2 - 2x \cos(\varphi - \varphi')} \quad (13)$$

Тепер дістанемо:

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 - 2x \cos(\varphi - \varphi')}} d\varphi d\varphi' -$$

$$(14) \quad - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log(1 + H) d\varphi d\varphi'.$$

Розвиваючи на ряд дістанемо:

$$\log \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 - 2x \cos(\varphi - \varphi')}} = \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n} \cos n(\varphi - \varphi').$$

Найже:

$$\sum_1^{\infty} \beta_n \cos n\varphi = \zeta, \quad \sum_1^{\infty} \beta_{n'} \cos n'\varphi' = \zeta',$$

то:

$$f(\varphi) = 1 + \zeta, \quad f(\varphi') = 1 + \zeta'.$$

Перший інтеграл форми 14) прийме вид:

$$\sum \frac{x^n}{n} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + 2\zeta + 2\zeta' + \zeta^2 + \zeta'^2 + 4\zeta\zeta' + \dots) \cos n(\varphi - \varphi') d\varphi d\varphi'.$$

Щоби сей вислід був ріжний від зера, треба виражене в скобках звести до $4\zeta\zeta'$, або до $4\sum \beta_n^2 \cos n\varphi \cos n\varphi' = 2\sum \beta_n^2 \cos n(\varphi - \varphi')$; інтеграл прибере тоді вартість $4\pi^2 \sum \frac{x^n}{n} \beta_n^2$.

Форма 13) дасть по виконанню:

$$H = \zeta + \zeta' + \zeta\zeta' + (\zeta - \zeta') \frac{1 + \zeta - (1 + \zeta') x^2}{1 + x^2 - 2x \cos \vartheta} \quad (15).$$

А що се виражене є з огляду на β першого ряду, проте можна взяти:

$$\log(1+H) = H - \frac{H^2}{2},$$

а тоді:

$$J = 4\pi^2 \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n} \beta_n^2 + \frac{1}{4} J_1 \quad (16)$$

де:

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (H^2 - 2H)(1+\zeta^2)(1+\zeta'^2) d\varphi d\varphi'.$$

Наколи вставимо вартість за H , дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} J_1 = & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (-2\zeta - 2\zeta' - 3\zeta^2 - 3\zeta'^2 - 8\zeta\zeta') d\varphi d\varphi' + \\ & + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta' - \zeta + \zeta'^2 - 2\zeta^2 + \zeta\zeta' + (\zeta - \zeta' - 2\zeta'^2 + \zeta\zeta') x^2}{1 + x^2 - 2x \cos \vartheta} d\varphi d\varphi' + \\ & + (1 - x^2)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta^2 + \zeta'^2 - 2\zeta\zeta'}{(1 + x^2 - 2x \cos \vartheta)^2} d\varphi d\varphi' \end{aligned} \right\} (17).$$

Положім:

$$18) \left\{ \begin{aligned} \zeta^2 &= c_0 + \sum_1^{\infty} c_n \cos n\varphi, \quad \zeta'^2 = c_0 + \sum_1^{\infty} c_{n'} \cos n'\varphi', \quad c_0 = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \beta_n^2 \\ \frac{1}{1 + x^2 - 2x \cos \vartheta} &= A_0 + \sum_1^{\infty} A_{n''} \cos n''\vartheta \\ \frac{1}{(1 + x^2 - 2x \cos \vartheta)^2} &= B_0 + \sum_1^{\infty} B_{n''} \cos n''\vartheta \end{aligned} \right.$$

то дістанем:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta d\varphi d\varphi' = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta' d\varphi d\varphi' = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta^2 d\varphi d\varphi' = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta'^2 d\varphi d\varphi' = 4\pi^2 c_0.$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta\zeta' d\varphi d\varphi' = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x \cos \vartheta} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta' d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x \cos \vartheta} = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta^2 d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x \cos \vartheta} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta'^2 d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x \cos \vartheta} = 4\pi^2 c_0 A_0.$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta^2 d\varphi d\varphi'}{(1+x^2-2x \cos \vartheta)^2} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta'^2 d\varphi d\varphi'}{(1+x^2-2x \cos \vartheta)^2} = 4\pi^2 c_0 B_0.$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta \zeta' d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x \cos \vartheta} = \pi^2 \sum_1^{\infty} A_n \beta_n^2,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta \zeta' d\varphi d\varphi'}{(1+x^2-2x \cos \vartheta)^2} = \pi^2 \sum_1^{\infty} B_n \beta_n^2.$$

В виду того рівняне 17) дасть:

$$J_1 = 8\pi^2 c_0 [-3 - A_0(1+x^2) + B_0(1-x^2)] + 2\pi^2 \sum_1^{\infty} [A_n(1+x^2) - B_n(1-x^2)] \beta_n^2. \quad 19)$$

Наколи зріжничкуєм другий з взорів 18) і помножимо через x , дістанемо:

$$x \frac{dA_0}{dx} + \sum_1^{\infty} x \frac{dA_n}{dx} \cos n\vartheta = -A_0 - \sum_1^{\infty} A_n \cos n\vartheta + (1+x^2) (B_0 + \sum_1^{\infty} B_n \cos n\vartheta);$$

з відси слідує, що:

$$(1-x^2) B_0 = A_0 + x \frac{dA_0}{dx}$$

$$(1-x^2) B_n = A_n + x \frac{dA_n}{dx}.$$

В виду того:

$$J_1 = 8\pi^2 c_0 [-3 - 2A_0 x^2 + x(1-x^2) \frac{dA_0}{dx}] + 2\pi^2 \sum_1^{\infty} [2A_n x^2 - x(1-x^2) \frac{dA_n}{dx}] \beta_n^2.$$

А що:

$$A_0 = \frac{1}{1-x^2}, \quad A_n = \frac{2x^n}{1-x^2},$$

то:

$$J_1 = -24\pi^2 c_0 - 4\pi^2 \sum_1^{\infty} nx^n \beta_n^2.$$

Остаточно дістанемо після 16):

$$J = -6\pi c_0 + \pi^2 \sum_1^{\infty} \left(\frac{4}{n} - n \right) x^n \beta_n^2;$$

з відси:

$$\int_0^1 J x dx = -3\pi^2 c_0 - \pi^2 \sum_1^{\infty} \frac{n-2}{n} \beta_n^2.$$

Наколи вставимо се в 12), дістанемо:

$$\frac{W_1}{\pi^3 \rho^2 a^4 l} = (1 + c_0)^2 \left(\frac{1}{2} + 2 \log \frac{8l}{a} \right) + \sum_1^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{5}{2} \right) \beta_n^2 \quad 20).$$

Положимо:

$$a^2(1 + c_0) = a_0^2 \quad 21)$$

то:

$$2 \log \frac{8l}{a} = 2 \log \frac{8l}{a_0} + \log(1 + c_0) = 2 \log \frac{8l}{a_0} + c_0,$$

а рівнянє 20) даєть:

$$W_1 = \pi^3 \rho^2 a_0^4 l \left[\frac{1}{2} + 2 \log \frac{8l}{a_0} + 2 \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \beta_n^2 \right] \quad 22)$$

3. Наколи у в прямовісна поведена з елементу dm до оси обороту, тоді:

$$dm = \rho y d\psi dS,$$

а інтеграл:

$$I = \int y^2 dm = 2\pi \rho \int y^3 dS,$$

а що:

$$y = l + y_1,$$

то:

$$I = 2\pi \rho \left(l^3 \int dS + 3l^2 \int y_1 dS + 3l \int y_1^2 dS + \int y_1^3 dS \right) \quad 23).$$

Точка C в середоточною тяжести, отже:

$$\int y_1 dS = 0,$$

а що:

$$dS = a(1 + \zeta)^2 du d\varphi,$$

то :

$$\int dS = \int_0^a u du \int_0^{2\pi} (1 + \zeta)^2 d\varphi = \pi a^2 (1 + c_0) = \pi a_0^2 \quad (24).$$

Отже πa_0^2 в полем полуденникового перекрою.

Дальше маєм :

$$\begin{aligned} \int y_1^2 dS &= \int_0^a u^3 du \int_0^{2\pi} (1 + \zeta)^4 \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + 4\zeta + \dots) \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \pi a_0^4 + \frac{1}{2} a^4 \int_0^{2\pi} \zeta \cos 2\varphi d\varphi \text{ (наколи добутки } \frac{a^2}{l^2} \text{ пропустимо)} = \\ &= \frac{1}{4} \pi a^4 + \frac{1}{2} \pi a^4 \beta_2 = \frac{1}{4} \pi a_0^4 + \frac{1}{2} \pi a_0^4 \beta_2 \dots \dots \dots \quad (25). \end{aligned}$$

З виражень 23), 24) і 25) виїде з відповідним приближенням :

$$I = 2\pi^2 \rho a_0^2 l \left(l^2 + \frac{3}{4} a_0^2 + \frac{3}{2} a_0^2 \beta_2 \right) \quad (26).$$

В виду взорів 3), 22) і 26) дістанемо тепер на функцію сил :

$$U = \pi^3 l^2 \rho^2 a_0^4 \left[\frac{1}{2} + 2 \log \frac{8l}{a_0} + 2 \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \beta_n^2 \right] + \pi \omega^2 \rho l a_0^2 \left(l^2 + \frac{3}{4} a_0^2 + \frac{3}{2} a_0^2 \beta_2 \right)$$

Маса перстень є :

$$M = 2\pi^2 a_0^2 l \rho,$$

отже :

$$a_0 l = \frac{M}{2\pi^2 \rho} \quad (27)$$

а :

$$\frac{U}{\pi l \rho} = M a_0^2 \left[\frac{1}{4} + \log \frac{8l}{a_0} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \beta_n^2 \right] + M \frac{\omega^2}{2\pi l \rho} \left(l^2 + \frac{3}{4} a_0^2 + \frac{3}{2} a_0^2 \beta_2 \right) \quad (28).$$

U є проте функцією змінних незалежних $a_0 \beta_2 \beta_3, \dots$; β_1 не входить ту, бо для $n = 1$ є $\left(\frac{1}{n} - 1 \right) = 0$. — Щоби U було maximum або minimum, мусить бути :

$$\frac{dU}{da_0} = 0, \quad \frac{dU}{d\beta_2} = 0, \quad \frac{dU}{d\beta_n} = 0 \quad n > 2 \quad (29).$$

З $\frac{dU}{d\beta_n} = 0$ вийде $\beta_3 = \beta_4 = \dots = 0$, а з $\frac{dU}{d\beta_2} = 0$ дістанемо:

$$\beta_2 = \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{\pi f \rho} \quad (31).$$

З $\frac{dU}{da_0} = 0$ випаде:

$$\frac{\partial U}{\partial a_0} + \frac{\partial U}{\partial l} \frac{dl}{da_0} = 0$$

або після 27):

$$\frac{\partial U}{\partial a_0} - \frac{2l}{a_0} \frac{\partial U}{\partial l} = 0 \quad (32).$$

З рівняня 28) випаде:

$$\frac{1}{\pi f \rho M} \frac{\partial U}{\partial l} = \frac{a_0^2}{1} + \frac{\omega^2 l}{\pi f \rho}$$

$$\frac{1}{\pi f \rho M} \frac{\partial U}{\partial a_0} = a_0 \left(\frac{1}{2} + 2 \log \frac{8l}{a_0} - \beta_2^2 \right) - a_0 + \frac{\omega^2 a_0}{\pi f \rho} \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} \beta_2 \right).$$

В виду сего рівняня 32) перейде (з пропущенням ω^4) на:

$$-\frac{5}{2} + 2 \log \frac{8l}{a_0} - \frac{2\omega^2 l^2}{\pi f \rho a_0^2} + \frac{3\omega^2}{4\pi f \rho} = 0$$

або:

$$\frac{\omega^2}{\pi f \rho} = \left(\frac{a_0}{1} \right)^2 \left(\log \frac{8l}{a_0} - \frac{5}{4} \right) \quad (33).$$

При помочи сего рівняня можна ся пересвідчити, що U випаде максимум, значить ся рівновага буде тревала. Но тямити треба, що ми прийняли перстень оборотовий і не сплющений; тревалість розслідили ми проте лиш для таких змін, які фігури оборотової не змінюють; найменша зміна мусілаб рівновагу знищити.

4. Poincaré подає далі ось-які висліди¹⁾ своїх теоретичних розслідів. Еліпсоїди не є виключно фігурами рівноваги, які приймає теч остаюча в повисшій руху оборотовім. Істнує противно безко-нечно много ріжних фігур рівноваги, а всі они є симетричні з огляду на площу прямовісну до осі ротації. Всі ті фігури мають певну скількість площий симетрії (що найменше одну), які переходять

¹⁾ Поп. Acta math. VII. et. 378 sqts.

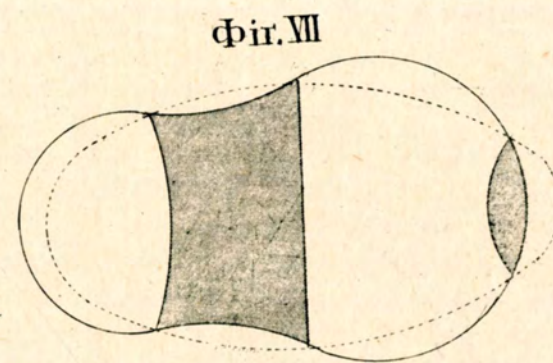
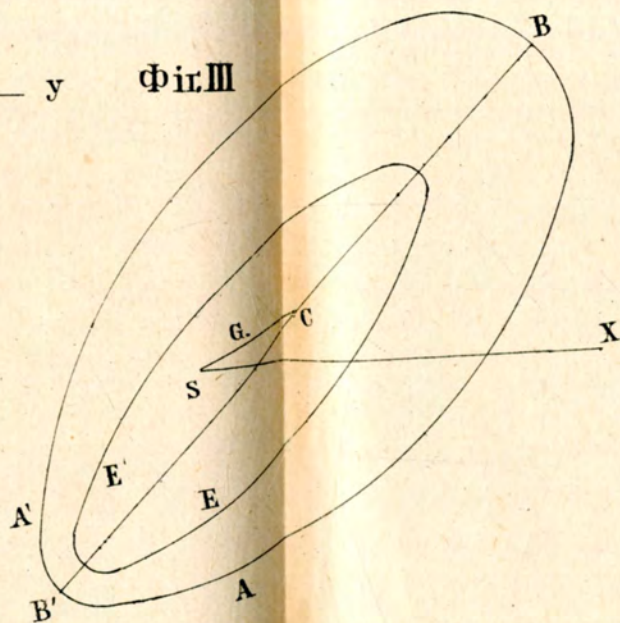
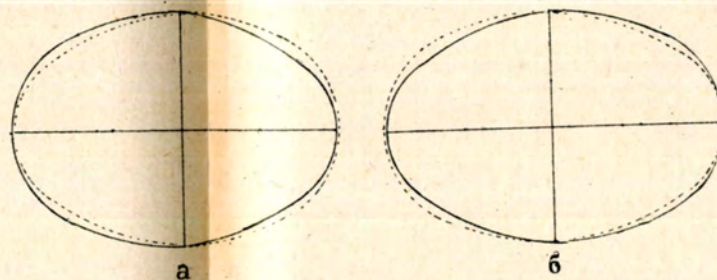
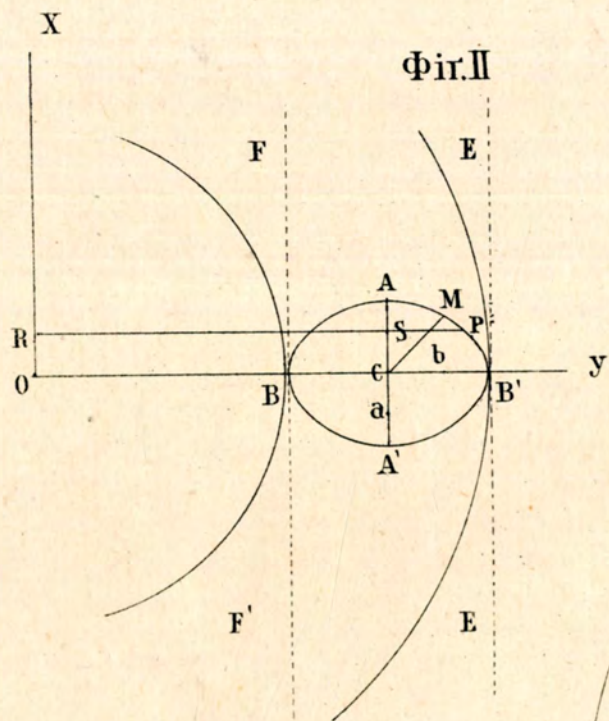
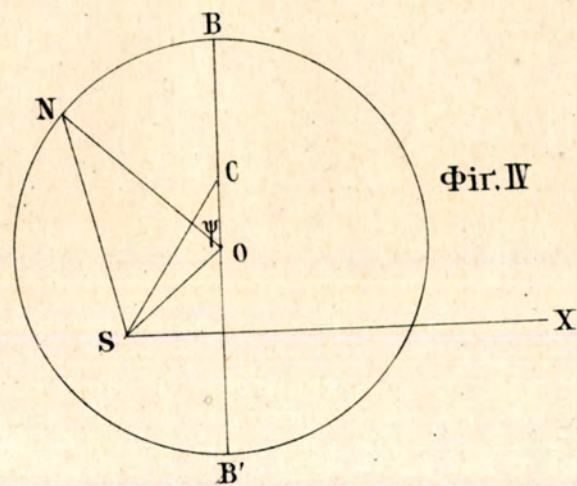
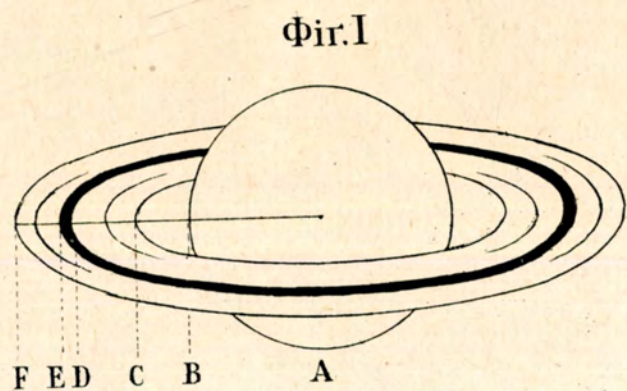
через вісь, а між ними є кілька площий обороту (революцій). Но між усіма тими фігурами є лиш одна фігура тревала; має она дві площі симетрії. Мет (проекцію) сеї поверхні на одну з площий симетрії і мет еліпсоїди, з якої поверхня ся повстала, представляє фіг. VII. Еліпсоїда назначена точками, контури мету згаданої поверхні і перекрою обох представляє лінія тягла. Тінь представляє ту часть поверхні, яку видно на поперек еліпсоїди.

Еліпсоїди оборотові є тревалі, наколи їх сплющенє є меньше, як сплющенє еліпсоїди Ясоби, а еліпсоїди Ясоби є тревалі тоді, наколи є мало видовжені; в тім случаю рівновага остає, хотя би теч була клейка.

Подумаймо тепер масу плинну однородну, що відбуває рух оборотовий і помалу стягає ся, но не тратить однородности. Наколи маса та остигає дуже помалу, а терте в внутрі єї є досить велике, тоді рух оборотовий остає в усіх частях маси. В сих умовах теч стремить до прийнятя сталої фігури рівноваги, а момент гону (mv) остає const.

З початку, коли густота є невелика, маса приймає вид еліпсоїди оборотової, що не много ріжнить ся від кулі. Наслідком руху оборотового наступає сплющенє, а коли оно дійде до $\frac{2}{3}$, еліпсоїда оборотова стаєсь еліпсоїдою Ясоби. Через дальше остиганє маса переставє бути еліпсоїдальною, стаєсь асиметричною зглядом площі уз і приймає вид представлений на фіг. VII. Еліпсоїда здаєсь легко вгнута в середній своїй части, но більше близько одного з вершків осн більшої; найбільша часть матерії стремить знову до того, щоби прийняти вид кулі, а мала часть відлучає ся при однім з вершків осн більшої від еліпсоїди, мовби хотіла відірвати ся від маси головної. Наколи маса стигне еще далі і далі, то імовірно маса стаєсь щораз більше і більше вгнута в середині, звужає ся і розпадає ся на два тіла.

Тернопіль в січню 1901.



ПРО ПЛЯМИ СОНІЧНІ

Написав

Стефан Рудницький.

ЧАСТЬ ДРУГА.

Про дійсний рух сонічних плям.

Як кожде ниніше тіло небесне мають плями сонічні два роди руху; рух позірний і рух дійсний. Рух позірний відбувають они разом з цілою сонічною кулею коло її осі, рух дійсний відбувають они сами для себе на сонічній поверхні. Назва „позірний“ не конче є ту оправдана, бо беручи річ безглядно рух, що названий нами позірний, є дійсним. В наслідок ротації сонця плями змінюють прецінь своє положенє для земского обсерватора. Уживаєм назви сеї лиш для відріжнення того руху від руху дійсного. Вчинити се можем тим певнійше, що сей рух є дійсно в части позірний, бо підчас обсервації его наша земля змінє своє положенє.

Позірний рух плям сонічних представляє ся так. Плями являють ся на східнім краю сонічного кружка і посувають ся по рівнобіжнику сонічним від сходу на захід. По 14 днях від часу, як ся показали, зникають плями поза західним краєм сонічного кружка, щоби по такім самім часі знов ся показати, наколи розуміє ся за сей час не зникли. Сли відразу дві або більше плям укаже ся на сонічнім кружку, дороги їх є звичайно рівнобіжні; те послужило в XVII. віці доказом, що плями находять ся на самій поверхні сонця а не поза нею. Розсліджуючи точнійше позірний рух плям, вже рано помічено, що він не є рівномірний. На середині кружка він є скорший, у края вільнійший. Витолкованє легке. Бо позірно відбувають плями свій рух по площі, в дійстности по кулистій поверхні.

Криві лівії, що їх описують плями в позірнім руху, мають дуже ріжний вид. Вісь сонця є нахилена о $7^{\circ} 15'$ до площі екліптики (після Carringtona для епохи 1850). В наслідок ріжного поло-

ження землі зглядом сонця в різних порах року змінюють свій вид лінії позірного руху плям. Коли сонце знаходить ся в котрій небудь абсиді, тоді дороги позірні плям є простими лініями нахиленими до екліптики. Діє ся се 4. червня і 6. грудня, коли довжина сонця в екліптиці виносить $74^{\circ}30'$ і $254^{\circ}30'$. Від червня починають ся ті прості лінії викривлювати і змінюють ся в видовжені еліпси, неповні, звернені внутрішньою стороною до півночі. Найбільше виразні суть ті еліпси в вересні, потім кривина їх меншає, щоб 6. грудня зрівнати ся з зером. Від того часу дороги плям сонячних знов починають ся викривляти, але в сторону прямо противну, вони є тепер звернені до полудневого бігуна. Максимум кривини припадає на марець, мінімум же знов на 4. червня.¹⁾

Той позірний рух плям є важним явищем, бо послужив до означення часу обороту сонця, що є елементом важним для дослідів метеорологічних, а головно для магнетних. Коли іменно запам'ятаєм собі час, в яким пляма знаходить ся в данім місці сонячного кружка, а також час, в яким пляма відбувши цілий позірний рух знов в тім самім місці стане, найдем з їх різниці час обороту сонця.

Є се розуміє ся час синодичний а не сидеричний. Бож через тих двадцять кілька днів, що сей час становлять, наша земля змінила своє положенє. Вже Scheiner, означуючи по раз перший час ротації сонця в початках XVII. віка звернув на се увагу. Для часу синодичного обороту сонця одержав він $27\frac{1}{2}$ дня. Зазначім собі тую вартість через τ . Маючи крім того дане $T = 365\frac{1}{4}$ днів найдемо час сидеричного обороту в той спосіб:

$$\tau \cdot \frac{1}{t} = 1 + \tau \cdot \frac{1}{T}$$

$$\tau T - \tau t - Tt = 0 \quad \text{з того}$$

$$t(T + \tau) = T\tau$$

$$t = \frac{T\tau}{T + \tau} = \frac{365\frac{1}{4} \cdot 27\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4} + 27\frac{1}{2}} = 25\frac{1}{2} \text{ дня}$$

В той спосіб означив Scheiner сидеричний час ротації на $25\frac{1}{2}$ дня. Є се природно тільки приближена вартість. Від XVII. в. аж до наших часів кільканацять разів означувано час ротації сонця і одержувано иньші вартости, що дають ся сучасно озна-

¹⁾ Seech о. с. ст. 21. сл.

чити. Методи, що були притім уживані не є так прості як метода Scheinera, але займатися ними не будемо, подамо тільки висліди.¹⁾

Обсерватор	Час ротації сид.	Нахилене оси	Довжина Ω	Епоха
Scheiner	25·33 ⁰	7°30'	69—70 ⁰	1634
Cassini	25·58 ⁰	7°30'	70°10'	1678
Lalande	25·42 ⁰	7°20'	78°	1776
Delambre	25·01 ⁰	7°19'	80°17'	1775
Böhm	25·52 ⁰	6°57'	76°47'	1833
Bianchi	25·35 ⁰	—	—	1839
Langier	25·34 ⁰	7°9'	75°8'	1840
Petersen	—	6°51'	73°29'	1841
Kysäus	25·09 ⁰	6°38'	76°38'	1841
Carrington	25·38 ⁰	7°15'	73°40'	1850
Wolf	25·182 ⁰	7°51'	80°33·3'	1854
Spörer	25·234 ⁰	6°57'	74°36'	1866

Видимо отже, що результати дослідів над ротацією сонця є межи собою дуже різні, іменно, коли порівнюємо різниці, які тут заходять між поодинокими обсерваторами, з різницями, які є можливі при інших обсерваціях астрономічних. Там вони обертаються що найбільше в секундах або їх частинах. Тут вони є великі а походить се в часті з занадто малого числа обсервацій а іменно в давніших часах, коли звичайно лише трох обсервацій вживано, щоби обрахувати час ротації і інші елементи.

В головній же мірі походять ті різниці з чого іншого. Іменно плями сонячні не остають стало на однім місці сонячної поверхні, але переносять ся щораз в інші місця, бо відбувають крім позір-ного руху ще рух дійсний або властивий.

Учені дуже пізно звернули увагу на дійсний рух плям, голов-но тому, що раз їх відкривши дуже ся мало ними займали. Перший Olbers припускав існування такого руху. Він виразив своє

¹⁾ Поп. Wolf. Handbuch der Astronomie etc. т. II. ст. 422 сл. Secchi о. с. ст. 126.

припущене в листі до Zach'a з р. 1798. II. 4.¹⁾ Але понеже учені французські задивляли ся з великим скептицизмом на обсервації сонічних плям в загалі, то доперва в другій чверти XIX віка найшли ся люди, що заняли ся сею справою. Були се: Böhm, Langier і Peters. Böhm обсервуючи сонічні плями в 1833 році, постеріг з немалим зачудуванєм, що з його обсервації виходить иньший час ротації для околиць під рівником, а иньший для иньших геліографічних ширин. Подаємо ту коротку табельку його обсервацій. Она

ч. ширини	ч. ротації
8°	25.09 д.
24°	25.68 д.
21°	26.16 д.
26°	26.99 д.
31—33°	27.08 д.

доказує, що Böhm був на добрій дорозі, але не умів осудити важности свого відкриття та й не впорядкував належито своїх обсервацій.²⁾ Langier також завважав, що майже кожда пляма сонічна дає иньший час ротації сонця, але не оголосив друком розвідки, що був єї заповів в Comptes Rendus том XL. ст. 140. Потім

занимав ся рухом плям також Peters, але свої досліди робив він в часі дуже недогіднім, бо в літах 1845/6.³⁾ Так отже дійсне відкритє властивого руху сонічних плям приписати належить англійському ученому Carrington-ови. Відмінно від давнійших учених постановив він обсервувати плями систематично через довший час. Ёго витривалість вже по кількох літах була нагороджена дуже важними результатами.⁴⁾ Ёго обсервації зміряли до того, щоби визначити позицію кождої обсервованої плями. Найшовши єї, обраховував позиції для будучих епох. В тих самих епохах обсервував потім пляму і з ріжниць межі обрахованими а обсервованими позиціями обчисляв емпіричні поправки і старав ся викрити якусь правильність. Протягом півосьма року доконав Carrington 5000 обсервацій на 954 різних групах плям. Виследи їх дадуть ся зібрати в кілька тез.

¹⁾ Geographische Ephemeriden. I. Wolf Handbuch etc. II. 428.

²⁾ Böhm. Beobachtungen von Sonnenflecken und Bestimmung der Rotations-elemente der Sonne. Denkschriften der k. k. Akademie der Wissenschaften 7. V. ст. 150. сл. Comptes Cendes т. LX. ст. 319. сл.

³⁾ Contributions to the Atmospherology of the Sun. Proceedings of American Assoc. of Science p. 1855.

⁴⁾ Observations of the spots on the Sun from November 9, 1853 to March 24, 1861 made at Redhill by R. C. Carrington. London 1863. Мені недоступне. Пор. Comptes Rendus tome LX. p. 141 сл. Secchi о. с. 128 сл. Young о. с. 130 сл. Wolf Handbuch т. II. ст. 427 сл.

Передовсім сконстатував Carrington, що плями дуже рідко переходять в висші ширини геліографічні як 30° на північ і на полудне від сонячного рівника. Рідко також можна їх подібати між рівником а 10° північної або полудневої геліографічної ширини.

Місцеве maximum плям не має однак сталого положення і пересуває ся в різні околиці пояса $\pm 10^\circ$ до $\pm 30^\circ$. Середно можна его шукати при $\pm 17^\circ$ гел. ширини. В обсягу тх поясів, що були названі Scheiner'ом *viae regiae*, є також походні яснійші, численнійші і виразнійші, чим на иньших місцях сонячної поверхні. Взагалі число плям на різних півкулях сонячних вирівнує ся підчас довгих періодів, спеціяльно же майже завжди є нерівне.

Друге право Carrington'a відносить ся вже прямо до дійсного руху плям і звучить: для різних геліографічних ширин час ротації є різний. Значить се, що різні часті поверхні сонячної кулі відбувають свій оборот в різних часах. Слідє з того, що плями відбувають певний дійсний рух на поверхні сонця. Carrington найшов ту, що чисельні вартости для часу ротації суть тим більші, чим дальше є пляма від рівника, котру обсервуєм в цілі означеня часу ротації. Під рівником є отже ротація найскорша і виносить майже рівно 25 днів. Вже під 20° ширини час ротації є о 18 годня довший, в ширині 30° виносить він вже 26.5 дня, а під 45° навіть 27.5 дня. Carrington впорядкував свої обсервації зі згляду на змінну скорість обороту і на їх підставі уложив емпіричну формулу.

$$\xi = 865' - 165 \sin^{7/4} \lambda,$$

де ξ означає денний лук ротації, а λ геліографічну ширину. Примінивши ту формулу можем в більшости случаїв представити кожду обсервацию сонячної плями.

Відкритя Carrington'a представить нам найлучше уложена ним самим табеля.¹⁾ В першій єї колюмні находим середну геліографічну ширину обсервованих плям, в другій середний денний рух власний плями в довжині. Если той рух є більший як $14^\circ 11'$, то перед числом стоїть знак + еслиж менший, знак —. (Carrington приймає за середний час ротації сонця число 25.380 дня.) Трета колюмна обіймає числа, що означають власний рух плям в ширині. Коли перед ними є знак +, значить се, що пляма посуває ся в на-

¹⁾ Observations of the spots on the sun p. 222.

прямі до бігуна, колиж знак —, то пляма посуває ся ідь рівни-
ковн. Четверта вкінци колюмна дає число обсервації¹⁾).

Ширина геліогра- фічна північна	Рух денний в		Число обсерво- ваних плям	Ширина геліогра- фічна полуднева	Рух денний в		Число обсерво- ваних плям
	довжині	ширині			довжині	ширині	
+ 50 ⁰	— 64'	+ 11'	1	—	—	—	—
—	—	—	—	— 45 ⁰	— 92'	— 8'	2
37 ⁰	— 66'	— 17'	2	—	—	—	—
—	—	—	—	36 ⁰	— 50'	+ 6'	2
34 ⁰	— 43'	+ 4'	12	34 ⁰	— 44'	— 1'	15
33 ⁰	— 33'	+ 7'	4	33 ⁰	— 36'	— 10'	2
32 ⁰	— 30'	— 2'	2	32 ⁰	— 52'	— 5'	2
31 ⁰	— 21'	+ 5'	15	—	—	—	—
30 ⁰	— 20'	— 1'	12	30 ⁰	— 33'	+ 4'	12
29 ⁰	— 36'	+ 6'	5	29 ⁰	— 34'	+ 1'	35
28 ⁰	— 28'	+ 8'	25	28 ⁰	— 35'	+ 1'	18
27 ⁰	— 27'	+ 2'	12	27 ⁰	— 40'	+ 0'	10
26 ⁰	— 21'	— 1'	43	26 ⁰	— 27'	+ 0'	17
25 ⁰	— 12'	+ 3'	4	25 ⁰	— 20'	+ 3'	27
24 ⁰	— 16'	+ 2'	23	24 ⁰	— 23'	+ 4'	14
23 ⁰	— 19'	+ 1'	34	23 ⁰	— 17'	+ 3'	7
22 ⁰	— 12'	— 1'	33	22 ⁰	— 14'	— 0'	72
21 ⁰	— 14'	+ 0'	34	21 ⁰	— 18'	+ 5'	27
20 ⁰	— 9'	+ 1'	31	20 ⁰	— 12'	+ 2'	38
19 ⁰	— 11'	— 0'	47	19 ⁰	— 13'	+ 1'	18
18 ⁰	— 6'	— 1'	6	18 ⁰	— 6'	— 0'	45
17 ⁰	— 9'	— 1'	15	17 ⁰	— 10'	+ 1'	32
16 ⁰	— 5'	+ 2'	17	16 ⁰	— 6'	+ 0'	9
15 ⁰	— 0'	+ 2'	41	15 ⁰	— 10'	— 0'	27
14 ⁰	— 4'	— 1'	30	14 ⁰	— 4'	— 1'	28
13 ⁰	— 2'	— 2'	24	13 ⁰	+ 1'	0'	2
12 ⁰	+ 16'	— 4'	18	12 ⁰	+ 1'	— 0'	97
11 ⁰	+ 5'	— 0'	38	11 ⁰	+ 6'	— 1'	18
10 ⁰	+ 2'	— 1'	22	10 ⁰	+ 3'	+ 1'	22
9 ⁰	+ 8'	— 8'	13	9 ⁰	+ 12'	+ 1'	43
8 ⁰	+ 10'	— 0'	71	8 ⁰	+ 6'	+ 3'	38
7 ⁰	+ 8'	— 1'	53	7 ⁰	+ 21'	+ 0'	16
6 ⁰	+ 11'	— 2'	19	6 ⁰	—	—	—
5 ⁰	+ 31'	— 10'	5	5 ⁰	+ 24'	— 12'	— 1

^{*)} Та табеля уміщена також у Secchio-ro o. c. ст. 132 і у Zöllnera: Über das Rotationsgesetz der Sonne und der grossen Planeten. Sitzungsberichte der königl. Sächs. Ges. d. Wissenschaften, p. 1871 ст. 64.

Ширина геліогра- фічна північна	Рух денний в		Число обсерво- ваних плям	Ширина геліогра- фічна полуднева	Рух денний в		Число обсерво- ваних плям
	довжині	ширині			довжині	ширині	
4 ⁰	+ 15'	+ 2'	6	4 ⁰	+ 18'	4'	3
3 ⁰	+ 38'	— 2'	2	3 ⁰	+ 0'	1'	11
2 ⁰	—	—	—	2 ⁰	+ 17'	+ 9'	2
1 ⁰	—	—	—	1 ⁰	+ 4'	0'	2
0 ⁰	—	—	—	0 ⁰	+ 10'	— 6'	1

З тої головної табелі легко вивести таблицю оборотових кутів для різних рівнобіжників сонячних підчас двайцять чотирох годин середного часу.

Ширина	Денний кут обороту	Число обсервованих плям	Денний рух в ширині
+ 50 ⁰	787'	1	+ 11
+ 45 ⁰	—	—	—
+ 40 ⁰	—	—	—
+ 35 ⁰	806'	18	—
+ 30 ⁰	824'	59	+ 3·5'
+ 25 ⁰	831'	116	+ 2·8'
+ 20 ⁰	840'	151	+ 1·0'
+ 15 ⁰	851'	127	+ 0·2'
+ 10 ⁰	859'	142	— 1·0'
+ 5 ⁰	863'	85	— 2·4'
+ 0 ⁰	867'	5	+ 3·3'
— 5 ⁰	865'	31	— 1·6'
— 10 ⁰	856'	218	+ 1·0'
— 15 ⁰	845'	98	— 0·4'
— 20 ⁰	839'	200	+ 0·8'
— 25 ⁰	827'	75	+ 3·0'
— 30 ⁰	814'	67	+ 1·2'
— 35 ⁰	805'	19	— 5·3'
— 40 ⁰	—	—	—
— 45 ⁰	759'	2	8'
— 50 ⁰	—	—	—

З тої табелі виходить безпосередно, що рухи плям в довжині є зависимі від того, як они віддалені від рівника. Плями, що

находять ся в висших ширинах, мають денний кут ротації значно менший чим плями, що лежать близько рівника. Для того перші дають більші вартости на оборот сонця чим послідні.

Трете право Carringtona відносить ся до властивого руху плям в ширині. Під тим взглядом не дали ся виставити так прості правила як для руху в довжині. Але Carrington і ту найшов правильність головню на підставі послідної колумни своєї меншої табелі. Іменно: 1) плями, що лежать поза 20° північної або полудневої геліографічної ширини, відбувають власний рух в ширині в напрямі до бігунів. Дорога, котру відбувають они під впливом сего руху, не перевишає межі $20^{\circ} - 40^{\circ}$ гел. ширини пересічно $2'$ денно. 2) Межі рівнобійниками 10° а 20° є рух в ширині дуже малий, знак в загалі —, рух звернений в напрямі до рівника, вносить пересічно на день $1'$. 3) В стресі підрівниковій межі $+ 10^{\circ}$ а $- 10^{\circ}$ гел. ширини трудно є сконстатувати рух в ширині, бо знаки $+$ і $-$ часто ся змінюють, а середні вартости є дуже малі. Завважати треба також, що поза 35° ширини також трудно сконстатувати істнованє і напрям власного руху плям, бо в такім віддаленю від рівника они майже ніколи ся не являють.¹⁾

Вкінці ще пару слів про елементи ротації сонця, тоді на ново Carrington ом означені. Поступав він ту в слідуючий спосіб. Означував ріжниці руху власного в ширині у плям межі 8° а 18° ширини по обох сторонах рівника. Потім зіставлявав парами зі собою завжди одну північну, а одну полудневу пляму. З утворених в той спосіб груп виражував середні вартости для всіх елементів ротації.

$$\text{Довжиня } \Omega = 73^{\circ}57'$$

$$\text{Нахиленє} = 7^{\circ}15'$$

$$\text{Денний кут обороту} = 14^{\circ}18'$$

$$\text{Час обороту (середно)} 25.38 \text{ дня}$$

Обсервації Carringtona є важні не стілько для заключень, котрі він з них поробив. Ще може важнійші они з тої причини, що показав иньшим дорогу, котрою належить поступити, щоби розслідити проблем власного руху сонічних плям. А вже найбільше заслужив ся він для науки тим, що его обсервації стали предметом теоретичних студій дуже многих учених.

¹⁾ Peters видів в р. 1846. VI. в Неаполи пляму під $+ 50^{\circ}$ ширини, Langier видів одну аж під 40° , Lahire мав видіти одну аж під 70° . Тій послідній обсервації ніхто однак вже не вірить Secchi о. с. ст. 128.

До астрономів практичних, що займалися сонячними плямами, належить зачислити наперед Peters'a, котрий захоплений приміром Carrington'a впорядкував свої обсервації з 1845/6 року та найшов на їх підставі формулу:

$$\xi = 8.582 + 5.798 \cos d. ^1)$$

Другим був Густав Spörer, один з найбільших геліологів. Від р. 1862 розпочав він на власну руку і власними навіть знаряддями обсервації сонячних плям, потім покликаний до астрофізичної обсерваторії в Почдамі вів їх далі аж до найновіших часів. (1893 р.) Обсервації його порозкидані по дуже многих публікаціях і особних розвідках. Обширні ті розсліди зберем ту коротенько.²⁾

Передовім належить ся Spörer'ови заслуга, що цілком напевно доказав, що появляне ся плям поза 40° гел. ширини належить до дуже рідких случаїв, коли протягом 30 літ Spörer чогось подібного не завважав. Найбільші ним замічені ширини плям є:

— 38.8° р. 1872. II. 6; + 39.7° р. 1872. V. 7.

— 39.9° р. 1872. VII. 31.

Отже навіть до 40° гел. ширини не дійшла жадна зі згаданих плям, котрі власне в тім році появили ся в незвичайно високих ширинах³⁾ Свої погляди на ротацію сонця і дійсний рух плям змінював Spörer кілька разів, що є певним доказом, що його досліди були поважні та основні і не привязували ся до апріорних тез. Вже в 1861. році, т. є. ще заки Carrington оголосив друком свої обсервації, найшов Spörer, що плями в околицях рівника скорше ся порушують чим плями, що знаходять ся в певнім від него віддаленю.⁴⁾ Час ротації означував зі звичайного рівняня

$$L + (t + T). \xi = 1,$$

¹⁾ Proceeding of the American Association of Science t. IX. Astronomical Notices of Ann Arbor observatory. March 1862.

²⁾ Beobachtung von Sonnenflecken und daraus abgeleitete Elemente der Rotation der Sonne. Gymn. Progr. Anclam 1862. Die Stürme auf der Sonne. Anclam 1862. Скорочене w Poggendorfs Annalen т. 117. ст. 509—525, т. 128. ст. 269—291; Monatsberichte der Berliner Ak. I. Jahrg. 1865 ст. 337—351 і 589 сл. Beobachtungen der Sonnenflecken zu Anclam. Publ. der astr. Ges. B. XIII. Resultate aus den Sonnenbeobachtungen. Tageblatt der 54. Vers. deutsch. Naturf. und Ärzte Salzburg 1881. Publicationen des astrophysicalischen Observatoriums zu Potsdam I, II, III, IV. i gqts.

³⁾ Publicationen des astrophys. Observatoriums zu Potsdam т. I, ст. 15, 22, 32.

⁴⁾ Astronomische Nachrichten 1861. VI. 13.

де L і T суть числа сталі на означене часу і довжини геліографічної обсервованої плями, ξ т. є ротаційний кут означає ся з рівнянь виведених з обсервацій, наколи можливі блуди висліміновано методом найменших квадратів. За t можна підставити яку небудь вартість, щоби найти l , середню вартість зі всіх довжин. З того рівняня обраховує я геліографічні довжини і означає ся опісля різниці межі ними а довжинами обсерваційними. Spörer зазначає ті різниці загально $\Delta\xi$. Таку різницю належить після обставин додати або відіймити від одержаного ротаційного кута ξ . Поділившиж 360° так справленим кутом ротаційним $\frac{360}{\xi \pm \Delta\xi}$ одержимо час ротації.

Spörer обрахував тим способом з численних груп сонічних плям, що були в різних ширинах обсервовані, різні часи ротації і уставив се в табелі.*)

Час обсервації	Число періодів	Геліографічна ширина	Денний кут обороту ξ	Впливає з того час обороту сонця = T
1861. VI. 15 — VII. 19.	2. ₁₁	+ 25°	13·783°	26·120 д.
1862. I. 16. — II. 19.	2. ₈	+ 21°	13·877°	25·943 д.
1862. III. 9. — V. 8.	3. ₂₁	+ 15°	14·081°	25·566 д.
1862 VIII. 20. — IX. 26.	2. ₁₁	+ 14·7°	14·077°	25·574 д.
1861. III. 24. — VII. 18.	5. ₂₈	+ 14·3°	14·022°	25·674 д.
1862. IV. 2. — V. 6.	2. ₁₆	+ 13·2°	14·108°	25·517 д.
1861. IX. 27. — X. 29.	2. ₁₂	+ 12·5°	14·295°	25·184 д.
1860. XII. 3. — I. 2.	2. ₇	+ 8·3°	14·284°	25·204 д.
1860. XII. 3. — I. 4.	2. ₈	+ 6·2°	14·275°	25·220 д.
1862. IX. 19. — 25.	1. ₅	+ 5·0°	14·329°	25·150 д.
1861. VIII. 2. — 10.	1. ₇	+ 1·3°	14·669°	25·541 д.
1861. V. 4. — VI. 2.	2. ₇	— 4·3°	14·333°	25·118 д.
1862. V. 30. VII. 3.	2. ₁₀	— 6·0°	14·335°	25·113 д.
1862. III. 18. — VI. 12.	4. ₂₁	— 9·0°	14·215°	25·325 д.
1861. VII. 29. — X. 25.	4. ₂₀	— 12·7°	14·100°	25·532 д.
1861. VI. 26. — VII. 26.	2. ₆	— 13·9°	14·274°	25·220 д.
1861. VII. 2. — VI. 9.	1. ₈	— 30·4°	13·732°	26·216 д.

*) Poggendorfs Annalen der Physik und Chemie p. 1862. т. 117 ст. 510 дд. 516.

Оголошене друком обсервацій Carrington'a мало великий вплив на праці Spörer'a. Передовсім подобала ся йому у Carrington'a ме-

φ	ε	T
0°	14.346°	25.09 д.
5°	14.324°	25.13 д.
10°	14.258°	25.25 д.
15°	14.148°	25.44 д.
20°	13.996°	25.72 д.
25°	13.803°	26.08 д.
30°	13.569°	26.53 д.
35°	13.297°	27.07 д.
40°	12.989°	27.72 д.

тода обсервації і їх обрахования. За приміром Carrington'a і Peters'a тепер представив і Spörer свої обсервації емпіричною формулою

$$\xi = 14.8726^{\circ} - 0.217^{\circ} \sqrt{b},$$

де b є шириною геліографічною.¹⁾ Та формула відноситься однаковж лиш до обсервацій з літ 1861—1864. Коли Spörer втягнув в рахунок також дальші обсервації до р. 1858, показала ся потреба нової формули

$$\xi = 1011' - 203' \sin (41.13' + \varphi).$$

Від тепер укладав Spörer що раз то нові формули в міру того, як прибувала слілкність материялу. Відносини на сонци змінюють ся періодично, треба було отже для представлення нових обсервацій укласти нові формули. Для плям з літ 1861—1871 уложив Spörer дві головні формули.

$$\xi = 8.529^{\circ} \cos \varphi \quad ^2) \text{ і}$$

$$\xi = 12.7257^{\circ} + 1.6475^{\circ} \cos 2\varphi. \quad ^3)$$

А коли і ті формули не ві всіх случаях показали ся добрими, вибрав Spörer певне число плям, котрі відбули кілька ротаційних періодів. Обрахувавши їх обсервації, утворив ще 4 формули. Найліпшою показала ся однак пята з ряду формула.

$$\xi = 8.548^{\circ} + 5.798^{\circ} \cos \varphi.$$

При її помочи дали ся всі обсервації точно представити. В літах 1872 і 1873 різниці межі обрахованими а обсервованими позиціями плям були майже ніякі і виступали виключно у плям, що лежали в західній частині груп. З часом різниці ся збільшили, але maximum дійшло in plus до 1° , in minus лиш до $\frac{1}{3}^{\circ}$.⁴⁾ Пересічний ротаційний кут для цілої сонічної кулі виноситься після сєї формули 14.2665°

¹⁾ Monatsberichte der königl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin 1865 стр. 338.

²⁾ Publ. der astr. Gesellschaft. т. XIII. стр. 151.

³⁾ Publ. des astroph. Observatoriums zu Potsdam т. I. стр. 81.

⁴⁾ Tagblatt der 54. Versammlung deut. Naturf. und Ärzte Salzbg. Beil s. 43

денно, отже час ротації 25·234 дня. (Довжина $\Omega = 74^{\circ}37'$, нахилене $= 6^{\circ}57'$.) Згадаєм також про висліді обсервацій Spörer'a, о скільки они відносять ся до змін в геліографічній ширині.¹⁾ Він найшов, що: 1) в підрівникових полосах аж до $\pm 10^{\circ}$ ширини плями зближають ся ідь рівнику. 5) Межи 10° а 15° находим слабу течію в напрямі бігунів. 3) Поза 15° течія та стає сильнішою. 4) Число, що виражає процент днів, в котрих переважає напрям у плямі ідь бігунови, росте правильно з шириною і доходить поза 25° до 30% .

Крім тих двох великих обсерваторів Carrington'a і Spörer'a, що свої досліди майже тільки дійсному рухови плям посв'ячали, займав ся явищами руху у плям принагідно також Secchi.

Як се вже загальний напрям его дослідів вказує звернув він найголовнішу увагу на відносини локальні. Подамо ту кілька его заміток.²⁾ 1) В часі коли пляма ділить ся на дві або більші частини, видимо тоді завсїгди мовби скок в перед, дійсний рух стає ся дуже скорий і напрасний. 2) Також великі і тревалі плями підлягають таким наглим скокам. Як вже висше було сказано, сила плямо - творча у таких плям проявляє ся кілька разів з ряду; за кождим таким „відмолодненем“ робить пляма скок наперед. Те цікаве явище обсервував Secchi іменно на кількох плямах на весну і в літі 1870. 3) Округлі, правильні плями є загалом тревальші і одностайніші, як ті, котрих вид є неправильний. Рух правильних плям є правильний. 1) Малі плями т. з. пори відбувають дуже неправильні рухи; так само великі плями в періоді повстання і заникання. 5) Сли коло плями вже існуючої витворить ся пляма, хотяйби цілком незалежно від неї, то перша пляма дізнає неначе переїскоди в руху і він стає ся неправильним. 6) Великі плями коли раз зникнувши знов ся появлять, показують ся завсїгди в місци, що є віддалене від місця, де зникнули, о таку просторонь, якої вимагає право ротації сонця. Та просторонь є нераз дуже значна. Secchi згадує одну пляму, що зникнувши виринула на поверхню сонічної кулі, відбувши дорогу під нею на просторони 30° геліографічної довжини. — До тих заміток можемо на підставі обсервацій Secchi'ого³⁾ додати ще одно: 7) В обсягу одної і тої самої групи ріжні плями відбувають в ріжнім напрямі і ріжною скоростію рухи.

¹⁾ Поп. таблицю в Publ. des astr. Obs. zu Potsdam т. IV. ст. 416—418.

²⁾ Secchi o. s. ст. 140.

³⁾ o. s. ст. 142—146.

Обсервації Carrington'a і Spörer'a не тільки самі собою мають велике значіння для сонячної фізики, але як згадалися також для того, що они стали ся підкладом до теоретичних дослідів Faye'a і Zöllner'a. Faye вже від хвилі публікації обсервацій Carrington'a займав ся справою сонячних плям дуже усердно і почавши від 1865 р. помістив в *Comptes rendus* парискої академії много розвідок під загальним титулом: *Sur la constitution physique du soleil*, де представляв Академії свої власні погляди і обговорював чужі. По довшім розслідуванню обсервацій Carrington'a замітив Faye, що належить зі зглядів теоретичних змодифікувати формулу ротації Carringtona. Коли она звучить $\xi = 865' - 165' \sin \frac{1}{4} \lambda$, то Faye надав їй вид:

$$\xi = 862' - 186' \sin^2 \lambda.$$

В тім виді представляє формула Faye'a обсервації Carrington'a ліпше ніж власна його формула.¹⁾ Формулу тую змінив однак Faye пізніше на слїдуючу:

$$\omega = 857.6' - 157.3' \sin^2 \lambda^2)$$

Другою річю в англійських обсерваціях, на яку звернув увагу Faye, була певна постійна неправильність і ріжниця зглядом обсервацій Spörer'a. Faye замітив іменно, що подані Carrington'ом чисельні вартости ріжняться ся постійно від таких у Spörer'a о 0.16 дня, або 3.84 годин *in minus*. Понеже ріжниця була занадто великою, щоби її можна присудити обсерваційним блудам, думає Faye, що дійсний рух плям зависить від епохи; інакший був в літах 1856/7, коли обсервував Carrington, а иньший в 1862—5, коли обсервував Spörer.³⁾ Додаєм від себе, що новіші досліди Spörer'a цілковито оправдали се припущенє.⁴⁾

Не так легко було Faye'ому витолкувати другу постійну неправильність в дійснім руху плям. Полягає она от на тім: Луки заточені плямою в одним дни суть при східнім краю завсїгди більші, при західнім менші, чим бути повинні. В міру як пляма і край сонячного кружка зближають ся, росте та маліє та неправильність. Завважав її вже Carrington і обяснював її рефракцією сьвітла в сонячній атмосфері.⁵⁾

Нехай внутрішнє коло нашої фігури означає в меті сонячну кулю, а ви́нше горішню границю сонячної атмосфери. Земля най

¹⁾ *Comptes rendus* т. IX. ст. 147.

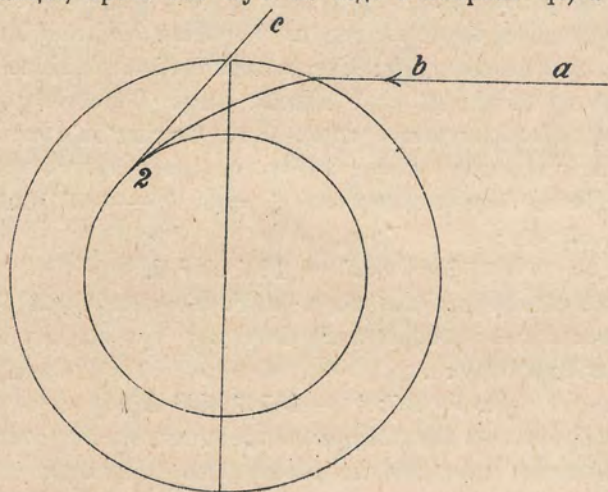
²⁾ Newcomb Engelmann о. с. ст. 310.

³⁾ *Comptes rendus* т. LX. 815. сл. LXI. 398 сл.

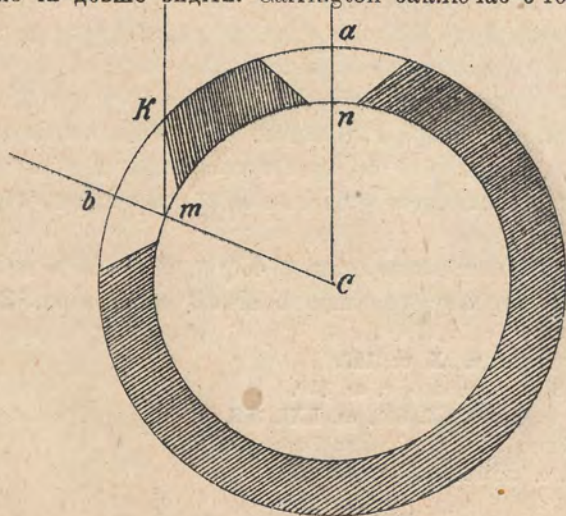
⁴⁾ *Publicationen des astr. Obs. zu Postdam* т. IV.

⁵⁾ Secchi о. с. ст. 161 сл.

буде в такім положенню, щоби обсерватор, находячий ся на ній дивив ся на сонце в напрямі ab . Колиб на сонці не було атмосфери, то луч виходячий від точки q ішовби в напрямі c . Але понеже сонічну кулю окружає атмосфера і лучі сьвітла мусять в ній улягати рефракції, проте сей луч не піде в напрямі qc , а заточивши



лїнію криву, піде лїнією b а до ока обсерватора земского. Без рефракції обсерватор сеї точки не міг би видіти. В наслідок сеї рефракції ми видимо кожду точку сонічної поверхні еще, заки она мине дійсний край сонічного кружка т. є коло, що відділює видиму для нас сонічну півкулю від невидимої. Отже при східнім краю сонця постережемо плями скорше чим повиннисьмо, при західнім же будемо їх довше видіти. Carrington заключає з того: Обставину,



що сонячні плями у східного края за вчасно ся показують, а у західного за пізно никнуть, належить приписати рефракції в сонячній атмосфері. котра ділає подібно як в земській.

Гає найшов, що той спосіб толкованя є недостаточний. Він приписує тую неправильність т. з. паралаксі глубини.¹⁾ Коли обсерватор дивить ся на осередок плями с, що знаходить ся припустім в лійковім заглубленю, то відносить положенє єго до точки а, де єго луч видження протинає поверхню т. зв. фотосфери. Коли пляма знаходить ся в середині сонячного кружка, то луч видження проходить через спільний центр осередка і пенумбри. Колиж пляма знаходить ся недалеко края сонячного кружка, тоді обсерватор не буде видів осередка плями (m) в рівнім віддаленю від обох берегів плями, але в безпосередній близькості, ба часом навіть в одній лінії з точкою k, що знаходить ся на краю заглублення плями. В наслідок того здає ся нам, що пляма о кусник bk, є близша осередкови сонячного кружка, чим в дійстности. В наслідок того здає ся нам, що плями вчаснійше показують ся на східнім краю кружка, а пізнійше никнуть на західнім. Той вплив паралаксі глубини на наші обсервації руху плям означає Гає на підставі формули

$$\epsilon = (B + p) \tan g \varphi,$$

де ϵ означає сочинник рефракції, p глубину, φ геліоцентричне віддаленє плями від осередка сонячного кружка. Відворотно можна на підставі тої формули означити глубину сонячних плям.

Гає означав ϵ з разу на 0.005—0.009 д. сонячного луча т. є. 900—1600 миль.²⁾ Але вартости одержані тим способом не причинили ся до потвердження тої теорії, бо були за великі, щоби згодити ся з обсерваціями, а іменно з давнійшими. Для того Гає втягнув в рахунок нові, дуже докладні обсервації Secchi'ого з року 1866.³⁾ і зредукував глубину плям на 0.36 до 0.57 земского луча. В виду тої зміни найшла його теорія більше признання.

З між многих иньших обсервацій і гіпотез Гає'ого звернем, увагу ще на одну річ. Гає припускає, що плями не мають правильного руху в ширині, але підлягають лишень маятниковим осциляціям. Їх період є ріжний в довжині, під 14° геліографічної ширини виносить 150—160 днів. Понеже сучасно підлягають осциляціям в довжині, то сід впливом тих двох сил зачеркують плями своїм дійсним рухом сінусоїдальні криві загального виду еліпси, котрої

¹⁾ Sur l'inégalité du mouvement apparent des taches solaires, causée par leur profondeur. Comptes rendus т. LXI. 1082 сл.

²⁾ І. с. 1089.

³⁾ О. с. ст. 164.

велика вісь є рівнобіжна з сонічним полуденником. Однак те твердження Faye'ого, хотяй свого часу було в науковім сьвіті дуже популярне, не удержало ся довго, іменно в виду новіших дослідів Spörera.

Другим теоретиком, що займав ся дійсним рухом плям, був Zöllner.¹⁾ Ішов він дорогою чисто теоретичною, виходячи з założеня, що сонце є тілом огнисто плинним, а плями жужлями, що витворили ся наслідком льокального остудження. Розелідуючи теоретично оборот ціпкої кулі, окруженої плинною верствою, дійшов Zöllner вкінци до формули:

$$\xi = \frac{A - B \sin \varphi^2)}{\cos \varphi}$$

за φ означає геліографічну ширину, а A і B сочинники, котрі належить означити з обсервацій. Zöllner сам не обсервував, але з'ужиткував обсерваційний материял Carrington'a і Spörer'a, узглядняючи також теоретичні досліди Faye'ого. З обсервацій на обох сонічних півкулях випровадив. Zöllner методом найменших квадратів вартости на $A = 863.4$ і $B = 619.5$.³⁾ Формула прибрала отже вид:

$$\xi = \frac{863.4 - 619.5 \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Правдивість сеї формули випробував Zöllner на обсерваціях Carrington'a, Faye'ого і Spörera, узглядняючи формули двох перших учених. Беручи в рахунок всі обсервації знайшов Zöllner, що коли можливі блуди при ужитю формули Carrington'a представимо числом 1118, а Faye'a числом 1448, то при ужитю формул его їх число спаде до 806. Колиж не узгляднемо плям занадто близьких та занадто віддалених від рівника, то відносини блудів будуть такі: $C : F : Z = 132 : 192 : 149$. То значить що коли блуди, слідуєчі з формули Carrington'a, означимо числом 132, то з формули Faye'ого буде 192, а Zöllner'a 149. Се говоримо про загальну формулу Zöllner'a. На тих самих засадах випровадив він однак ще окремі вартости на A і B для кожної сонічної півкулі, заключаючи зі змінности знак ib на табелі Carrington'a, що право ротації є однакове для обох півкуль. Обрахував отже окремо для півкулі північної вартости: $A = 863.8$, $B = 613.2$, для полудневої, $A = 861.8$, $B = 620.5$ і дійсно одержав дуже добрі висліди. Колиж

¹⁾ Über das Rotationsgesetz der Sonne und der grossen Planeten. Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Bd. XXIII. 1871. ст. 49—113 де глянть математичні виводи.

²⁾ І. с. ст. 61.

³⁾ І. с. ст. 69.

приймав А спільне для обох півкуль $= 863.8$, а В $= 613.2$ для півкулі північної і 631.1 для полудневої, то висліди перейшли всі очікування.¹⁾ Коли нпр. обчислене обсервацій Spörer'a его власною формулою дало можливість блуду $= 130.1$, то обчислене їх мето-дою Zöllner'a дало тільки 92.4 .²⁾ Коли-ж усеуємо плями занадто зближені або віддалені від рівника, то сума квадратів з блудів ви-несе при формулі Spörer'a 85.2 , а при змодифікованій формулі Zöllner'a 44.8 . Его формула представляє отже обсервації без сум-ніву найліпше. Але многі учені зі згляду на заложене Zöllner'a, що поверхня сонця є в стані плиннім, не хотіли прийняти його вислідів без значних застережень.

Додамо, що також славний французский астроном Tisserand уложив емпіричну формулу в цілі представлення своїх дволітних обсервацій (1874—5). Ї она дуже подібна до формули Faye-ого:

$$\xi = 857.6' - 157.3' \sin^2 \lambda.$$

Але жадна зі згаданих формул не показала ся безвзглядно доброю. Добре представляла она рух тільки тих плям, котрих обсервації до її уложенья послужили, а не надавала ся в більшій або меншій мірі до представлення руху дійсного плям в иньших часах. Дотепер не удалось отже навіть поверховно розслідити дійсного руху плям. Звідси найближша консеквенция: час і спосіб ротації сонця не суть нам докладно знані і для того то висліди поодиноких учених так дуже межі собою ся різнять. Дуже бистроумно ви-разив ся о сій справі Secchi⁴⁾: Ми находимось при означуваню ро-тації сонця в тім самім положеню, що астроном селеніт, котрий хотів би означити час ротації землі, не маючи иньшої точки опертя, як лише хмари нашої атмосфери. Щоби з їх обсервації дійти до своїх цілий, мусів би він вперед пізнати як найдокладнійше земську метеорологію. Так само мусимо ми пізнати метеорологію сонічну, але понеже її ще дуже мало знаємо, отже нинішні наукові висліди в тім напрямі належить уважати доперва за перші кроки.

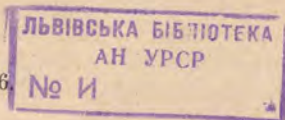
Наше теперішнє знанє про явища руху на сонічній поверхні ділить їх на три класи: 1) загальний рух сонічних плям в наслідок ротації, котра має в різних ширинах ріжну скорість; 2) позірні рухи в наслідок паралакса глибоини, а може і рефракції в сонічній атмосфері; 3) неправильні рухи, що стоять в стислій звязи з самим

¹⁾ Пор. табелі I. с. ст. 72.

²⁾ I. с. ст. 74.

³⁾ Comptes rendus т. LXXXII. ст. 766.

⁴⁾ О. с. 166 ст.



процесом повставання плям. Про ті послідні рухи додамо ту кілька слів. Цікаве є у плям стремління до того, щоби впорядкуватись вздовж рівнобіжників, при чім пляма, що іде передом, є найліпше розвинена і ограничена, а иньші поступаючі за нею творять як би хвіст. Дальше дуже цікавою проявою є взаїмне покриване ся плям. Обсервував его Raschig в Дрезні 1813 р., Hallaschka 1819 р., Edmund Weiss 1864. II. 12, Haag 1869. IV. 21, Birmingham в Millbrook 1869. V. 6 і 7.¹⁾ На увагу заслугує також оборотовий рух, який нераз помічано у плям. Dawes в 1852 р. I. 17 і 23 виразно видів, як одна пляма обернула ся на місці коло свого центра, не змінивши впрочім зверхного виду. Konkoly обсервував се явище досить часто. І так 1872. VI. 7—10. величезна пляма обернула ся від полудня до сходу о 90° .²⁾ В р. 1875. IV. 27. оден з осередків великої подвійної плями обернув ся о 100° ідь сходови.³⁾ Того-ж самого року VI. 22, сконстатував знов Konkoly оборот одної плями о 90° ,⁴⁾ а 1879. VII. 12—15. обернула ся пляма від півночи на схід о 30° , а на другий день ще о 10° .⁵⁾ Такі явища помічав також Flammarion в році 1894. 3. серпня с. р. цілий притінок великої плями, що числяла 25 центрів обернув ся *sinistrorsum* о 20° , а разом з нею всі центра. Визначний ротаційний рух мали іменно два осередки. Північний з них обернув ся з дня VIII. 2. на VIII. 3. о 32° , в днях VIII. 3—4. о 20° , в VIII. 4—5. о 22° т. є. 77° в трох днях. Полудневий осередок обернув ся в VIII. 2—3. о 50° , в VIII. 3—4. о 30° , в VIII. 4—5. о 60° , в VIII. 5—6 о 12° отже о 152° в 4 днях. Иньша пляма з VII. 20—22. обернула ся в двох днях о 34° ; всі ті рухи ішли від лівої до правої.⁶⁾

На тім кінчить ся розділ, що займає ся дійсним рухом плям. Можна би ту ще много подати подробиць іменно-ж з дослідів Wilsing'a і Белопольского. Але представленє дослідів сих двох учених належить радше до уступу про теорії сонічних плям. Там его помістимо, а тепер додамо дещо про означенє часу ротації сонця иньшими дорогами, не вже через обсервацію плям. Обсервовано отже наперед походні і з них означено час ротації сонця. Wilsing найшов його рівням 25-23 днів.⁷⁾ Дійшов він при тім до дуже цікавого ви-

¹⁾ Sirius II. 9. і XVI. 165.

²⁾ Beobachtungen angestellt am astrophys. Ob. in O Gyalla т. I. ст. 88.

³⁾ Ibidem т. I. ст. 104.

⁴⁾ Ibidem т. I. ст. 106.

⁵⁾ Ibidem т. II. ст. 37.

⁶⁾ Comptes rendus т. CXIX. ст. 532.

⁷⁾ Astronomische Nachrichten N. 2852 і Ableitung der Rotationsbewegung der Sonne aus Positionsbestimmungen von Fackeln. Publicationen des astr. Obs. zu Potsdam т. IV. часть 2.

слід, бо спостеріг, що кутові скорости походень не є зависимі від геліографічної ширини, як се дів ся у плям. § одержане з обсервації походень є після Wilsing'a рівне під кожною геліографічною шириною і виносить $14 \cdot 270^0$. З того видно, що верства сонячної атмосфери, в котрій находять ся походні, не підлягає тим скомплікованим рухам, що верства, в котрій находять ся плями. Ї се вислід тим дивніший, що найновіша метода означувати ротацію сонця, цілком від попередних метод ріжна, дала результати цілком аналогічні результатам Carrington'a і Spörer'a. То метода спектроскопна, що полягає на обсервованю спектроскопом обох країв сонячного кружка і примінюваню права Doppler'a. Запропонував її перший раз Zöllner, а уживав Vogel.¹⁾ Але доперва Н. Crew перевів сею методою дві довші серії обсервацій і найшов з другої серії для денного руху кутового формулу

$$\vartheta = 802' (1 - 0.00206. \chi^0),$$

де χ є геліоцентрична ширина в степенях. Під рівником найшов Crew час ротації = $26 \cdot 23$ днів. Полишаючи дальші висліди Crew'a на боці,²⁾ звернемо увагу на се, що взагалі спектроскопні обсервації potwierдили висліди обсервацій плям. Говоримо „взагалі“, бо перша серія обсервацій Crew'a вказувала б скорше на припізнене оборотового руху під рівником. Далеко виразніша та згідність, коли розсмотримо докладніші та цінніші обсервації N. C. Dunér'a.³⁾ Зі спостережень в різних геліографічних ширинах дійшов Dunér до переконання, що закони Carrington'a відносять ся не тільки до руху сонячних плям, але і до ротації цілої поверхні сонця. Коли точка в околицях сонячного рівника відбуває оборот в $25 \cdot 46$ днях, то під 45^0 час обороту винесе вже $30 \cdot 03$ днів, а під 75^0 аж $38 \cdot 84$ днів. Але мимо довгих дослідів не повело ся Dunér'ови вивести теоретичної формули для обороту з спектроскопних дослідів, так само як не повело ся її вивести з обсервацій плям.

Заклученя, що мож зробити з тих результатів, а навіть вже і по часті зроблено, полишаємо до теорій сонячних плям і скажемо тільки, що так великі різниці між поодинокими ученими в означеню часу ротації сонця викликали деякий скептицизм. Виразив его С. А. Schultz-Steinheil, критикуючи іменню Crew'a і Dunér'a. Різниці в вислідах приписує він злому означеню і та Ω

¹⁾ Wolf. Handbuch etc. т. II. ст. 430.

²⁾ American Journal of Science. 1889 т. 38. ст. 204, *pop. Jahrbuch der Astronomie* т. I. ст. 3.

³⁾ Nova Acta Regiae Soc. Upsaliensis 3. *pop. Vierteljahrsschrift der astr. Ges.* т. 27. ст. 36 sqts., також *Jahrbuch der Astronomie* т. III. ст. 1 дд.

(нахилена сонічної осі до екліптики і довжини вступного узла.) Його виводи, що зміряють до вияснення, в який спосіб можуть такі ріжницї походити з тих фалшивих заложень, не є однак дуже переконуючі.¹⁾

Вкінці ще дещо про означенє часу ротації сонця з телюричних явищ. Виходячи зі звязи явищ на сонці і явищ земского магнетизму та з двадцять-кількадньового періоду в них, означив Hornstein час ротації сонця на 26·83 взглядно 24·55 днів, Broun на 24·16, Litznar на 24·29, Bigelow на 24·86. Зі змін температури означили час ротації за захоотою і взором Nervander'a (27·26 днів): Buys-Ballot на 25·682, Fritz на 25·74, Hornstein на 25·14, Broun на 24·13, Van der Stock на 24·10, Bezold (з бурий) на 24·12 день. Але ті означеня, іменно-ж зі змін метеорологічних є дуже непевні і мусять бути уживані *cum grano salis*.²⁾

Про періодичність сонічних плям.

Одною з найізнїйше пізнаних властивостей сонічних плям є їх періодичність. Нею заиматись будемо в тім уступі.

Перші обсерватори сонічних плям в XVII. віці займали ся, як висше сказано, лиш так довго ними, аж поки не рішив ся спір, чи они находять ся на самій поверхні сонця, чи в тілах кружачими докола него. Если потім займали ся обсервациями плям які люде, то були се ділетанти, без фахового образования. Для того трудно їм було дійти в сій мірі до якихсь результатів.³⁾ Першим, що впав на гадку, що сонічні плями можуть бути періодичним явищем, був Християн Норгебоу. Обсервував він плями від 1738 до 1775 р. та спостеріг, що в певних часах більше плям являло ся на сонічнім кружку, а в иньших часах меньше.⁴⁾ Але понеже не впорядкував методично своїх обсерваций після певних правил, тож і не міг вказати періодичности плям. Він слушно подає за причину того обставину, що дотепер астрономи за мало ся тою справою займали. Зіставив отже всі свої обсервациї і замітки в рукописи, а тимчасом учені іменно французські (Cassini, Lemonnier і иньші) сьміло висказували думку, „que les taches ne suivent pas aucune loi dans leurs apparitions.“ Але мимо того малого занятя сонічними плямами знане

¹⁾ Astronomische Nachrichten N. 3543 (т. 148. ст. 225).

²⁾ Pop. Jahrbuch der Astronomie etc. т. I. ст. 3.

³⁾ Виясненє тих обсерваторів Wolf в своїй Sonnenfleckenlitteratur, поміщаній в Vierteljahrsschrift der natur. Ges. in Zürich.

⁴⁾ Wolf, Handbuch der Astronomie т. II. ст. 407.

було вже пр. при початку XIX. століття, що они раз в більшій, другий раз в меншій кількості ся являють. William Herschel лучив змінність цін збіжа зі змінністю числа сонічних плям. Але о часі, в котрім наступують ті періодичні зміни, ніхто не мав докладного понятя аж до кінця першої половини XIX. віка.

Відкритє періодичности сонічних плям належить признати Генрикови Schwabe'ому. І він не був астрономом з фаху, лиш з замилованя (був антикарем в Dessau). Заохочений Harding'ом, відкритеlem плянетоїди Юоні, взяв ся Schwabe в 1826 році до правильних обсерваций поверхні сонця, сподіючись що найбільше відкрити інтрамеркурияльну планету. Але як сам пише, трафило ся ему те що Саулови, що вийшов шукати коров свого батька, а найшов корону. (I may compare myself to Saul, who went out to seek his fathers asses, and found a kingdom.¹⁾ По 17 літах щоденних обсерваций, що полягали тільки на зазначеню плям в окрузі нарисованого на папері кола проміру 6—7 сантиметрів, дійшов Schwabe до дуже важних вислідів. Доказав він, що виступуванє плям на поверхні сонця не є неправильне, але привязанє до періоду менше більше десятилітнього.²⁾ Табеля низше уміщеня представляє нам головні результати дослідів Швабого. В першій рубриці виражений рік, в другій число днів обсервациї, в третій число плям або цілих груп видних тоді, а в четвертій число днів, в котрих на сонічнім кружку не було видно жадної плями.

1826	285	118	25	1832	264	84	49	1838	203	282	0
1827	298	161	2	1833	257	33	139	1839	205	162	0
1828	290	225	0	1834	275	52	120	1840	263	152	3
1829	261	199	0	1835	239	173	18	1841	283	102	15
1830	214	190	1	1836	190	272	0	1842	306	68	64
1831	251	149	0	1837	170	327	0	1843	309	34	147

Видимо з тої табелї вже на перший погляд, що maxima числа плям припадали на роки 1828 і 1837, а minima на роки 1833 і 1843.

Однакож не найшов Schwabe признаня у сучасних учених. На мнине відкрите задивлювано ся дуже скептично, головно під впливом могутчої ще тоді французкої астрономії XVIII. віка і пануючої теорії сонічних плям Herschel'a, котра вже по своїй природі не надто сприяла періодичности плям. А однак найшло ся кількох учених,

¹⁾ Monthly Notices of R. A. S. т. XVII. p. 1889 ст. 123.

²⁾ Astronomische Nachrichten 1844. Nr. 495.

що не відкинули а limine припущення Schwabe'ого, але занялись блисшим єго розслїдженєм. Між ними був Рудольф Wolf, директор астрономічної обсерваторії спершу в Берні, а опісля в Цюріху.¹⁾

Відкритє Швабого заняло єго від разу дуже. Розпочав отже зараз в році 1847 з одної сторони власну серію обсервацій сонічних плям, з другої сторони стигав всі давнійші обсервації, які лиш міг дістати, щоби на довгих серіях випробувати правди гіпотези Швабого. Та острожність в оцінюваню веслїдів роботи Швабого оплатила ся Вольфови. Заставляючи ся іменно над ними, відкрив він сучасно, але незалежно від Sabine'a і Gautier'a, згідність в рядах Schwabe'ого і Lamont'a, які представляють періодичні зміни в нахилєню магнетної голки. Ходило єму тоді наперед о докладнійше означенє довжини періоду сонічних плям, бо обсервації Швабого були занадто короткі і неточні, щоби можна було з них одержати докладні результати. Вольф скомбінував отже ряд Швабого з давнійшими обсерваціями Scheiner'a, Hevel'a, Rost'a, Zucconi'ого, Fritsch'a і Stark'a та означив на їх підставі, з можливим блудом 1 року, кілька епох, в котрих число плям дійшло до maximum або minimum. В своїй тогдасній розвідці *Neue Untersuchungen über die Periode der Sonnenflecken und ihre Bedeutung* (Bernar Mittheilungen 1852) потрапив Вольф означити слїдуючі maxima і minima:

1) Maxima: 1626·0 (Scheiner), 1717·5 (Rost), 1816·3 (Stark, Bode), 1829·5 (Stark, Schwabe), 1837·5 $\pm$ 0·5 (Schwabe), 1848·6 $\pm$ 0·5 (Schwabe).

2) Minima: 1645·0 (Hevel), 1755·5 $\pm$ 0·5 (Zucconi), 1810·5 (Bode, Fritsch), 1823 2 $\pm$ 0·5 (Stark, Biela), 1833·6 $\pm$ 0·5 (Schwabe), 1844·0 $\pm$ 0·5 (Schwabe).

Понеже ріжницї між чотирьма послїдними епохами, що самі йшли одним тягом, вносили:

13·2, 8·0, 11·1 пересічно отже 10·77 років,

12·7, 10·4, 10·4 " " 11·17 років,

то на середню довжину періоду випало 10·97 т. є. майже 11 лїт. Щоби дійти до тим певнійших результатів, взяв Вольф під увагу також давнійші епохи. Порівнявши їх з новійшими, уложив Вольф слїдуючу порівняну табельку:

¹⁾ Праці Вольфа над тим предметом поміщені є в *Berner Mittheilungen* 1850—1856 і в *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich* 1856—1893. Перегляд їх оголосив A. Wolfer п. т. *Compte rendu des travaux de M. le prof. R. Wolf de Zurich dans la domaine de la physique solaire* (Archives de Geneve 1891); те саме по німєцки *Wolfs Untersuchungen auf dem Gebiete der Sonnenphysik. Meteorologische Zeitschrift* 1892. т. IX. ст. 201—219. Сам Wolf оролошував до р. 1892 короткі справозданя зі своїх праць в *Comptes rendus* і в *Astronomische Nachrichten*.

$$1848\cdot6 - 1626\cdot0 = 222\cdot6 = 19.11\cdot72 = 20.11\cdot13 = 21.10\cdot60 \text{ лїт.}$$

$$1848\cdot6 - 1717\cdot5 = 131\cdot1 = 11.11\cdot92 = 12.10\cdot93 = 13.10\cdot08 \text{ „}$$

$$1837\cdot5 - 1626\cdot0 = 211\cdot5 = 18.11\cdot75 = 19.11\cdot13 = 20.10\cdot57 \text{ „}$$

Та дивна згідність в передпоследній колумні навела Вольфа на здогад, що час тревання періоду сонічних плям дуже є зближений до 11 лїт. Через порівнювання, котрих взорець подалисьмо та узвгляднене всяких можливих блудів дійшов Вольф, що середна довжина періоду сонічних плям виносить $11\cdot111 \pm 0\cdot038$ с. є. $11\frac{1}{9} = 100 : 9$ і вже був в спроможности заповісти нове maximum на рік 1855.

На підставі розвідки з 1852 р. належить Вольфа вважати властивим відкритеlem періодичности сонічних плям. Швабе спостеріг єї без сумніву перший, але уміло обробив се відкрите та навів доказів на його дійсність доперва Вольф. Над Sabine'ом і Gautier'ом, що цілком независимо від Вольфа, а може навіть дещо вчасніше звернули увагу на періодичність, має він ту перевагу, що брав річ виключно з астрономічної точки погляду. Sabine і Gautier доперва зі згідности періоду плям Швабного з періодами магнетизма земского Lamont'a вивели періодичність самих плям.

Але подібно як відкрите Швабного, так і доказ Вольфа не відразу стрінув ся з прихильним прийнятем в ученім сьвіті. Тих кілька епох не могло дати докладних результатів. В виду того почав Вольф з невтомною робучостию збирати старі обсервації зі всіх сторін Європи. Вичислимо ту лиш найважнійші: Harriot'a 1611—1613, Kirch'a і єго рідні 1700—1748, Plantade'a 1705—1726, Rost'a 1718—1720, Hagen'a 1739—1751, Staudach'a 1749—1799, Horrebow'a 1738 (1767)—1776, Mallet'a 1773—1786, Bode'oro 1774—1821, Heinrich'a 1781—1818, Flaugergues'a 1788—1830, Tevel'a 1813—1836, Pastorff'a 1819—1833, Adams'a 1819—1823, Arago'a 1822—1830.¹⁾

Щоби в тім незміренім лябірінті чисел завести порядок і уможливити користанє з него, впровадив Вольф тз. числа зглядні (Relativzahlen) чинности сонця. Та чинність після думки Вольфа є прямо пропорціональна числу груп плям g а дальше також числу поодиноких сонічних плям f . Зв'язь тих двох чисел дасть нам образ чинности сонця в певнім протягу часу. Але число груп і число плям не є рівноважними чинниками. Далеко лекше є витворенє нової плями в існуючій вже групі, як повстанє нової групи. Значінє чинника g в формулі мусить отже бути значно більше, як значінє f .

¹⁾ І много иньших, вичислених в 600 числах Sonnenfleckenlitteratur. Пор Geschichte der Astronomie ст. 651. Handbuch т. II. ст. 410 дд.

Вольф прийняв довільно, що відношенє $g : f$ є як $1 : 10$. Є се відношенє дуже вигідне, бо зараз одержуємо формулу легку до обрахования:

$$r = 10g + f.$$

Є се міра чинности сонця в якімсь часї, коли видних груп було g , а плям f . За одиницю часу прийняв Вольф 1 день, противно як Швабе, що обраховував число плям і груп після місяців і літ. Середна з чисел зглядних всіх днів в місяця дає число зглядне місячне, середна з місячних зглядних чисел — річне зглядне число. Формула подана є так проста, що иньші учені не думали, щоби зглядні числа могли бути беззглядно докладним висловом діяльности сонця. Secchi закидував їм недокладність по причинї, що не мають згляду на поверхню плям; а она прецінь мусить мати велике значінє до пізнання сонїчної діяльности.¹⁾ Закид сей є однак несправедливий. Wolf доказав іменно з рівнобіжних римских і мадритских обсерваций, що дістанемо майже цілком ті самі результати, ели місто числа плям f введемо чинник f_1 , що означає їх поверхню.²⁾ Wolf є навіть думки, що число плям є важнійшим чинником при обчислюваню, чим їх поверхня, бо найбільшу розтяглість мають групи плям тоді, коли є вже в стані супокою. Найбільше нових плям в групах творить ся в бурнім періодї повставаня, коли сила плямотворча є найбільша. Крім того за ужитєм числа плям, а не їх поверхні промавляє ся обставина, що давнійші обсервациї обмежались виключно на численє груп і плям, бо означуванє їх поверхні начало ся доперва в найновїйших часах. Для одноцїльности прийняв отже Вольф число плям місто їх поверхні за міродайний чинник.

Формула Вольфа в єї найпростїйшїм видї може бути ужита до редукциї обсерваций лише одного обсерватора. Коли хочемо зредувати обсервациї кількох ріжних осіб, мусимо ввести в первісну формулу т. з. особистий сочинник k . Так змодифікована формула виглядати ме:

$$r = k (10g + f).$$

Той сочинник зависить не тільки від личности обсерватора, але і від єго знарядя. Вольф прийняв для себе і для свого інструмента (далевид Fraunhofer'a з предметовою сочкою проміру 3 цалї,

¹⁾ Secchi o. c. ст. 172.

²⁾ Astron. Mittheilungen Nr. 49 і 62 в Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich том XXIV. ст. 4, том XXIX. ст. 122 дд.

з огнисковою 4 стопи, побільшене 64 разів,) $k = 1$.¹⁾ Для інших сучасних обсерваторій означив Вольф k через порівнянє їх обсервацій зі своїми. Для давніших обсерваторій діставав він k , порівнюючи щораз то давніші обсервації від своїх власних почавши. Удалось се ему однак лиш для обсервацій від 1748 року. При помочи того сочинника уложив Вольф в р. 1877 неоцінену табелю зглядних чисел виведених з обсервації т. з. beobachtete Relativzahlen.

1749	80·9	1779	125·9	1809	2·5	1839	85·8
1750	83·4	1780	84·8	1810	0·0	1840	63·2
1751	47·7	1781	68·1	1811	1·4	1841	36·8
1752	47·8	1782	38·5	1812	5·5	1842	24·2
1753	30·7	1783	22·8	1813	12·8	1843	10·7
1754	12·2	1784	10·2	1814	14·4	1844	15·0
1755	9·6	1785	24·1	1815	35·4	1845	40·1
1756	10·2	1786	82·9	1816	46·4	1846	61·5
1757	32·4	1787	132·0	1817	41·5	1847	98·4
1758	47·6	1788	130·9	1818	30·0	1848	124·3
1759	54·0	1789	118·1	1819	24·2	1849	95·9
1760	62·9	1790	89·9	1820	15·0	1850	66·5
1761	85·8	1791	66·6	1821	6·1	1851	64·5
1762	61·1	1792	60·0	1822	4·0	1852	54·2
1763	45·1	1793	46·9	1823	1·8	1853	39·0
1764	36·3	1794	41·0	1824	8·0	1854	20·6
1765	20·9	1795	21·3	1825	15·6	1855	6·7
1766	11·4	1796	16·0	1826	36·0	1856	4·3
1767	37·8	1797	6·4	1827	49·4	1857	22·8
1768	69·8	1798	4·1	1828	62·5	1858	54·8
1769	106·1	1799	6·8	1829	67·3	1859	93·8
1770	100·8	1800	15·3	1830	70·7	1860	95·7
1771	81·6	1801	34·0	1831	47·8	1861	77·2
1772	66·5	1802	55·0	1822	27·5	1862	59·1
1773	34·8	1803	71·2	1833	8·5	1863	44·0
1774	30·6	1804	73·1	1834	13·2	1864	46·9
1775	7·0	1805	47·6	1835	56·9	1865	30·5
1776	19·8	1806	28·9	1836	121·8	1866	16·3
1777	92·5	1807	9·4	1837	138·2	1867	7·3
1778	154·4	1808	7·7	1838	103·1	1868	37·3

¹⁾ Новіші досліді Вольфа доказали, що навіть для того самого обсерватора і інструмента сочинник k змінє ся в часі. Ті зміни стоять в відворотнім відношенню до самих зглядних чисел. Попр. Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich т. XXV. (1880) Mitth. 50 ст. 46 дд. і XXX (1885) Mitth. 65. ст. 230—242.

1869	73·9	1877	12·3	1885	52·2	1893	84·9
1870	139·1	1878	3·4	1886	25·4	1894	78·0
1871	111·2	1879	6·0	1887	13·1	1895	64·0
1872	101·7	1880	32·3	1888	6·8	1896	41·8
1873	66·3	1881	54·3	1889	6·3	1897	26·2
1874	44·6	1882	59·6	1890	6·8	1898	26·7
1875	17·1	1883	63·7	1891	35·6	1899	
1876	11·3	1884	63·5	1892	73·8	1900	

Обнимає она зглядні числа кожного місяця в році а крім того середнє річне число зглядне. Не будемо єї подавали в цілости, бо є дуже довга і широка та крім того легко доступна.¹⁾ Містимо тільки єї витяг, що дає яке таке понятє о періодичности сонічних плям. Для науки має та табеля велике значіне, бо доперва по єї уложеню мож було докладно розсліджувати звязь ріжних періодичних явищ з періодичностию сонічних плям. Вольф провадив свої обсервації і обчислюване зглядних чисел аж до смерті (1893 р.). Пізнійші, з літ по році 1877 зглядні числа уміщав він в своїх дотичних Mittheilungen, крім того в Astronomische Nachrichten, Meteorologische Zeitschrift і Comptes rendus. По єго смерті вів єю працю дальше єго асистент і наслідник Wolfer.

Вольф не вдоволив ся однак тою табелею зглядних чисел, котру з таким накладом часу і праці уложив. Обсервовані числа зглядні виказують дуже часто великі колибання в наслідок блудів в обсервації, атмосферних земских відноєнн і т. д. Ті колибання сильно затемнюють перебіг періоду. До збільшеня амплітуди тих колибань причиняє ся найбільше оборот сонця а в звязи з ним нерівне геліографічне розміщенє плям і короткі звідси слідуючі кільканацятьденні періоди. Дятого постановив Вольф числа зглядні, виведені з обсервації, вирівнати. Вирівнанє представляє ся в слідуючий спосіб. Хотячи приміром обчислити зглядне число для місяця марта 1850 р., лучить Вольф обсервовані зглядні числа місяців від марта 1850 до лютого 1851 включно і бере з них середну арифметичну m_1 . Потім бере таку саму середну арифметичну з місячних зглядних чисел від цьвітня 1850 до марта 1851 = m_2 . Середна арифметична з m_1 і m_2 дає жаданє число зглядне обчисленє для місяця марта 1850 р. Так обчислив Вольф цілу нову табелю тз.

¹⁾ Находить ся в Mitth. Nr. 42. p. 1877. Meteorologische Zeitschrift т. IX. 1892 ст. 205 дд. Jahrbuch der Astronomie т. III. 1892. ст. 14 дд.

чисел зглядних обчислених. Доперва та табеля, що стояла Вольфови чверть сотні літ тяжкої праці, уможливила а бодай дуже облегчила студії над пробігом періоду сонічних плям так середного, як і дійсного. Поглянувши на ту табелю (поміщена низше) далеко виразнійше бачимо періодичність плям, як се було можливе з табелі обсервованих чисел зглядних.¹⁾

1749	80·9	1784	10·2	1819	24·2	1854	20·6
1750	83·4	1785	24·1	1820	15·0	1855	6·7
1751	47·7	1786	82·9	1821	6·1	1856	4·3
1752	47·8	1787	132·0	1822	4·0	1857	22·8
1753	30·7	1788	130·9	1823	1·8	1858	54·8
1754	12·2	1789	118·1	1824	8·6	1859	93·8
1755	9·6	1790	89·9	1825	15·6	1860	95·7
1756	10·2	1791	66·6	1826	35·0	1861	77·2
1757	32·4	1792	60·0	1827	49·4	1862	59·1
1758	47·6	1793	46·9	1828	62·5	1863	44·0
1759	54·0	1794	41·0	1829	67·3	1864	46·9
1760	62·9	1795	21·3	1830	70·7	1865	30·5
1761	85·8	1796	16·0	1831	47·8	1866	16·3
1762	61·1	1797	6·4	1832	27·5	1867	7·3
1763	45·1	1798	4·1	1833	8·5	1868	37·3
1764	36·3	1799	6·8	1834	13·2	1869	73·9
1765	20·9	1800	15·3	1835	56·9	1870	139·1
1766	11·4	1801	34·0	1836	121·8	1871	111·2
1767	37·8	1802	55·0	1837	138·2	1872	101·7
1768	69·8	1803	71·2	1838	103·1	1873	66·3
1769	106·1	1804	73·1	1839	85·8	1874	44·6
1770	100·8	1805	47·6	1840	63·2	1875	17·2
1771	81·6	1806	28·9	1841	36·8	1876	11·3
1772	66·5	1807	9·4	1842	24·2	1877	12·3
1773	34·8	1808	7·7	1843	10·7	1878	3·4
1774	30·6	1809	2·5	1844	15·0	1879	6·0
1775	7·0	1810	0·0	1845	40·1	1880	32·3
1776	19·8	1811	1·4	1846	61·5	1881	54·2
1777	92·5	1812	5·5	1847	98·4	1882	59·6
1778	154·4	1813	12·8	1848	124·3	1883	63·7
1779	125·9	1814	14·4	1849	95·9	1884	63·4
1780	84·8	1815	35·4	1850	66·5	1885	52·2
1781	68·1	1816	46·4	1851	64·5	1886	25·4
1782	38·5	1817	41·5	1852	54·2	1887	12·6
1783	22·8	1818	30·0	1853	39·0	1888	7·0

¹⁾ Та табеля уміщена в Mitth. Nr. 42 (1877) Vierteljahresschrift der naturf. Gesellschaft in Zürich 1877. і в Вольфа Handbuch der Astronomie т. I, ст. 675 дд.

На підставі табелі обсервованих зглядних чисел означив Вольф передовсім всі махіма та мініма від найдавніших до найновіших часів. Подані они в понизшій табельці.

Minimum	Maximum	Minimum	Maximum
1610·8	1615·5	1745·0	1750·3
8·2	10·5	10·2	11·2
1619·0	1626·0	1755·2	1761·5
15·0	13·5	11·3	8·2
1634·0	1639·0	1766·5	1769·7
11·0	9·5	9·0	8·7
1645·0	1649·0	1775·5	1778·4
10·0	11·0	9·2	9·7
1655·0	1660·0	1784·7	1788·1
11·0	15·0	13·6	16·1
1666·0	1675·0	1798·3	1804·2
13·5	10·0	12·3	12·2
1679·5	1685·0	1810·6	1816·4
10·0	8·0	12·7	13·5
1689·5	1693·0	1823·3	1829·9
9·4	12·5	10·6	7·3
1698·9	1705·5	1833·9	1837·2
13·1	12·7	9·6	10·9
1712·0	1718·2	1843·5	1848·1
11·5	9·3	12·5	12·0
1723·5	1727·5	1856·0	1860·1
10·5	11·2	11·2	10·5
1734·0	1738·7	1867·2	1870·6
11·0	11·6	11·7	13·3
		1878·9	1883·9
		10·7	
		1889·6	
11·20 ± 2·11 ± 0·63	11·20 ± 2·06 ± 0·03	11·16 ± 1·54 ± 0·47	10·94 ± 2·52 ± 0·76

Епохи махім'ів і мінім'ів суть ту поділені на дві групи після своєї певности. Перша група обнимає епохи аж до 1749 р. Непевність доходить ту до 1 року. В другій групі, що обнимає новіші часи, непевність є значно менша і виносить пересічно лиш кілька місяців. Перша і третя рубрика обнимає мініма з промежутками, друга і четверта махіма також з промежутками. Під кожною рубрикою є на її підставі обрахована середня довжина періоду.

З поданих власне чисел можемо означити наперед середню довжину періоду, взявши середню вартість зі всіх різниць

$$p = \frac{\sum D}{n} \quad ^1)$$

або поділивши різниці межі що двома остаточними епохами через число періодів, приміром:

$$p = \frac{(m_n - m_1) + (M_n - M_1)}{n},$$

де m означає minimum, M maximum, а n число періодів пр.:

$$p = \frac{(1878.9 - 1610.8) + (1883.9 - 1615.5)}{48}.$$

В той спосіб одержав Вольф на довжину періоду число 11.18 за середнім ваганем $= \pm 1.98$ а середною непевністю ± 0.28 року. Ті вартості різняться як видно дуже лиш мало від одержаних Вольфом вже в 1852 році вартостей (11.111 ± 2.03 і ± 0.307). Числа, що знаходять ся коло цифри, що виражає довжину періоду, означають два блуди можливі при її означеню. Зовуть ся они, як вже згадано, середнім колибаням (mittlere Schwankung) і середною непевністю (mittlere Unsicherheit). Середнє колибанє повстає в слідуєчий спосіб. Таблиця епох показує нам іменно, що довжина різних періодів є дуже різна і колибає ся межі 8 а 16 літами. Ї вона отже видимо змінна, а число 1.98, що є обраховане з колибаня поодиноких періодів після звісної форми з теорії найменших квадратів:

$$S = \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n - 1}}$$

дає середню вартість для того середного колибаня. Друге додане число означає тз. середню непевність (mittlere Unsicherheit). Походить она звідси, що обсервації сонічних плям, хотяй вже більше як півтретя столітя тривають, не є ще достаточо довгі, щоби довжина періоду могла бути пізнана з більшою точністю як днесь т. є. на 4 місяці. Середню непевність обчисляємо після формули:

¹⁾ Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich т. XXVI. 1881. Mitth. Nr. 52. ст. 60.

$$\sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n(n-1)}}.$$

Подані повисше вартости є то тз. епохи обсервовані. Бачили ми, що різниці в часі між поодинокими такими епохами є дуже великі; щоби отже дістати постійні точки для дальших теоретичних дослідів, обчислив Вольф т. з. середні епохи. Спосіб рахунку покажесь найліпше на примірі. Хотячи одержати пр. середне minimum, що припадало десь около половини XVIII. віка, додає Вольф до першого взагалї знаного minimum, що припадає на рік 1610·8, 12 нормальних періодів і нотує одержану суму (= 1745·0). Потім до другого знаного minimum 1619·0 додає 11 нормальних періодів, до третього знов десять і т. д. З одержаних тим способом епох бере середню вартість. Потім беручи XXIV-у з ряду епоху (1878·9), віднімає від неї 12 нормальних періодів, від XXIII-ої 11, від XXII-ої 10 і т. д. періодів. З одержаних епох знов бере другу головну середню вартість. Середня вартість зі згаданих двох головних середних дає нам жадану епоху.

Є ще иньший спосіб обрахования довжини періоду і середних епох¹⁾ а то при помочи формул:

$$E_m = T_0 + x + nP \quad i$$

$$E_M = T_0 + y + nP,$$

де T_0 означає якунебудь епоху, від котрої виходимо, $T_0 + x$ представляє нормальну епоху minimum, $T + y$ нормальну епоху maximum, n рядове число періоду. Коли такі услівні рівняня уложимо для кожного maximum і minimum, то одержимо при помочи методи найменших квадратів дуже приближені вартости для x , y і P .

Табеля обсервованих і обрахованих епох.

Обсерв. Minimum	Обсерв. Maximum	Обрах. Minimum	Обрах. Maximum	Δ
1610·8		1610·0		+ 0·8
	1615·0		1615·1	+ 0·4
1619·0		1621·2		— 2·2
	1626·0		1626·3	— 0·3
1634·0		1632·4		+ 1·6
	1639·5		1637·5	+ 2·0

¹⁾ Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich т. XXVI. Mitth. 52. ст. 60. Pop. Astronomische Nachrichten Nr. 2325.

Обсерв. Minimum	Обсерв. Maximum	Обрах. Minimum	Обрах. Maximum	Δ
1645·0		1643·6		+ 1·4
	1649·0		1648·6	+ 0·4
1655·0		1654·8		+ 0·2
	1660·0		1659·8	+ 0·2
1666·0		1665·9		+ 0·1
	1675·0		1671·0	+ 4·0
1679·5		1677·1		+ 2·4
	1685·0		1682·2	+ 3·2
1689·5		1688·3		+ 1·2
	1693·0		1693·4	— 0·4
1698·9		1699·5		— 0·6
	1705·5		1704·5	+ 1·0
1712·0		1710·7		+ 1·3
	1718·2		1715·7	+ 2·5
1723·5		1721·8		+ 1·7
	1727·5		1726·9	+ 0·6
1734·0		1733·0		+ 1·0
	1738·7		1736·1	+ 0·6
1745·0		1744·2		+ 0·8
	1750·3		1749·3	+ 1·0
1755·2		1755·4		— 0·2
	1761·5		1760·4	+ 1·1
1766·5		1766·6		— 0·1
	1769·7		1771·6	— 1·9
1775·5		1777·7		— 2·2
	1778·4		1782·8	— 4·4
1784·7		1788·9		— 4·2
	1788·1		1794·0	— 5·9
1798·3		1800·1		— 1·8
	1804·2		1805·2	— 1·0
1810·6		1811·3		— 0·7
	1816·4		1816·3	+ 0·1
1823·3		1822·5		+ 0·8
	1829·9		1827·5	+ 2·4
1833·9		1833·6		+ 0·3
	1837·2		1838·7	— 1·5
1843·5		1844·8		— 1·5
	1848·1		1849·9	— 1·8
1856·0		1856·0		+ 0·0
	1860·1		1861·1	— 1·0
1867·2		1867·2		+ 0·0
	1870·6		1872·2	— 1·6
1878·9		1878·4		+ 0·5
	1883·9		1883·4	+ 0·5

Та метода є по тій причині добра, що означуємо від разу x , y і P . Для того уживав єї Вольф до обчислення зглядних чисел. Додати треба, що уложив він особні формули для обчислення старших і новіших епох, формулу загальну і формулу до обчислення нормальних епох.¹⁾

- 1) Для епох старших: Maximum обчислюють ся після формули
 $p = 1761.968 + 11.235. n$; для minimum
 $p = 1756.437 + 11.235. n$
- 2) для епох новіших:
 Maximum: $p = 1758.362 + 11.313. n$
 Minimum: $p = 1753.912 + 11.313. n$
- 3) загальна формула:
 Maximum: $p = 1760.265 + 11.082. n$
 Minimum: $p = 1755.278 + 11.082. n$
- 4) для епох нормальних:
 Maximum: $p = 1760.342 + 11.132. n$
 Minimum: $p = 1755.364 + 11.132. n$

Переходимо тепер до послідного уступу дослідів Вольфа, котрий стосується т. з. дійсного пробігу змін в відповідній кількості сонячних плям. Щоби улекшити пізнання дальших властивостей періода плям, можемо ужити графічного способу. Коли іменно числа зглядні представимо на осі рядних, а час на осі відтятих, дістанемо криві, що виражають пробіг періоду сонячних плям. Ті криві можуть бути двоякі після того, чи уживаємо до їх сконструювання обсервованих чи обрахованих зглядних чисел. Ані одна ані друга крива не має правильного виду, бо між поодинокими maxima'ми і minima'ми заходять в натузі (інтензивности) великі різниці, як се відразу можемо видіти з табелі зглядних чисел. Різниці будуть менші, наколи возьмемо криву з середних вартостей. Та неправильність має свою причину раз в коротких періодичних колибанях внутр обсягу одного періода, а дальше в великих періодах, що обнимають по кілька або більше $11\frac{1}{9}$ -літних періодів. Дрібні зубці в кривій походять з короткого періодичного колибаня в числі сонячних плям. Виносить оно дещо більше як $7\frac{1}{2}$ місяця і було через Вольфа сконстатоване цілком певно, мимо великої трудности, що ішла з неточности обсервацийного матеріалу, з впливів геліографічного розміщення плям і з обороту сонця, який витворює кільканащитидневні позірні періоди. Так само певно доказав Вольф, що короткі періодичні вагання

¹⁾ L. c. ст. 62.

мають більші амплітуди підчас maximum, як підчас minimum. Коли споглянемо на криву, завважимо ту властивість зараз. Зубці підчас maximum розходять ся, а підчас minimum зближають ся до себе.¹⁾

Ріжниця поодиноких періодів з огляду на довжину і висоту филь є дуже значна і видна раз з самого числа зглядного поодиноких maximum'ів і minimum'ів, а потім з ріжниці треваня поодиноких періодів. Роздивившись в табелі яких небудь зглядних чисел, побачимо, що дійсна довжина періоду вагає ся межі 8 а 16 літами. Вольф старав ся різними способами дослідити, чи нема в тій мірі якої правильности, але міг лиш то сконстатувати, що в певних часах панують короткі періоди по 8, 9, 10, 11 літ, а в иньших довгі: від 12—16 літ. Та ріжниця виступає виразно також тоді, коли вмісто промежуктів часу возьмемо самі епохи т. є. maxima і minima. В рубриці Δ послідної табелі Вольфа можемо постеречи деяку систематичність. Вольф займав ся тою справою дуже довго. З початку здавало ся єму, що більша діяльність сонця є звязана з короткими періодами та відворотно. Наслідком сеї думки було тверджене, що діяльність сонця внутр періоду є величиною сталою. Пізнійші досліди не потвердили сеї думки, противно виказали, що сума місячних зглядних чисел межі двома по собі слідуючими мініма'ми є в різних періодах дуже ріжна.

Що до більших періодів, то істноване їх припускав Вольф вже в 1861 році.²⁾ Вказує на них і то дуже виразно та обставина, що горбки і долинки періодичної кривої не лежать в одній горизонтальній лінії. Але мимо дослідів кілька разів в тім напрямі піднятих, не дійшов Вольф до певних результатів. Він думав з початку, що довжина того великого періоду виносить $55\frac{1}{2}$ та 160 літ.³⁾ Але змінив своє переконане в р. 1889 при розсліджуванню дуже давних як знаємо китайських обсерваций. Они нотують дуже численні плями в літах 371 і 1371 по Христі. Тих 1000 літ, що лежать межі ними, дадуть ся поділити або на 12 періодів по $85\frac{1}{3}$ літ, або 15 по $66\frac{2}{3}$ літ, або на 90 по $11\frac{1}{3}$, або на 100 по 10, або врешті на 120 по $8\frac{1}{3}$ літ. ($1000 = 12.83\frac{1}{3} = 15.66\frac{2}{3} = 90.11\frac{1}{9} = 100.10 = 120.8\frac{1}{3}$). Були отже до вибору дві дати $83\frac{1}{3}$ і $66\frac{2}{3}$ літ. За першою цифрою промавляє ще та обставина, що в 1871 р. т. є. 500 ($= 6.83\frac{1}{3}$) літ по 1371 році, припало дуже сильне maximum

¹⁾ Криві Вольфа є дуже розповсюджені пр. і у Secchi'oro ст. 177. Young ст. 144. Пор. Wolf, Handbuch т. II, ст. 412.

²⁾ Astr. Mitth. Nr. 12. Vierteljahresschrift der nat. Ges. in Zürich 1861. Bd. VI.

³⁾ Astr. Mitth. Nr. 19 і 20. Comptes rendus т. LXII, ст. 913.

а так само в році 1788 т. є. на 83 літ перед 1871 роком. Але пізнійше показало ся, що таку саму претензію до докладности мають і періоди по 100 і 170 літ. Іменно послідна величина має дуже много даних за собою, але Вольф не міг ще доказати істнованя так довгого періоду, бо від року 1750, відколи зачинає ся неперівний ряд обсервацій, не уплинуло ще 170 літ. Треба отже сконстатоване того періоду полишити будучности.

Спосіб повстаня таких довготрєвалих періодичних колибань толкує Вольф сходом кількох коротких, другорядних періодів, котрі наслідком нерівної довгости від часу до часу сходять ся, і як би через інтерференцію викликають підвисшене филі.¹⁾ На ту гадку навели Вольфа рахунки, що їх був підирийняв, щоби на ново означити докладну довжину 11-літнього періода. Полягали они на тім: Кожде вирівнане (обраховане) зглядне число місячне з літ 1751—1870 (т. є. 1440 цифр) представив Вольф яко ряду. Описля поділив ті рядні на групи з рівним числом складників і брав арифметичну середну наперед зі всіх перших, потім зі всіх других і т. д. цифр в кожній групі. В наслідок того ті рядні вирівнувались лиш в тім случаю, коли одна така група припадала на maximum або minimum якого періоду більшого від 11 літ, а тоді виходила на верх періодичність функції. Коли іменно обчислимо $\sqrt{\frac{\sum m^2}{n}}$ т. є. другий корінь з арифметичної середної квадратів середних вартостей, то та величина, тз. середна екскурсія приймає від часу до часу найбільшу вартість, сли існує або довший, або коротший від нормального період, а беремо на увагу групи з числом членів щораз то ріжним. Вольф поділив тих 1440 зглядних чисел на групи по 96, 98, 100, 102 і т. д. аж до 150 чисел та шукав періодів. Обчисливши висше згадану середну екскурсію, одержав він тз. місячні ріжницеві ряди (monatliche Differenzreihen). З них взявши середну обрахував такі самі річні ряди.²⁾ З уміщеної там (ст. 197) табелі подамо ту витяг, доповнивши єї в зад після пізнійших дослїдів Вольфа.³⁾

¹⁾ Поп. Astr. Mitth. Nr. 57. Vierteljahresschrift d. nat. Ges. in Zürich 1882. Bd. 27. ст. 189 дд.

²⁾ Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich 1882. Bd. 27. ст. 190—194.

³⁾ Поп. Mitth. 60. Vierteljahresschrift der nat. Ges. in Zürich. Bd. 30, 1885. ст. 323 дд.

8 ^a 0 ^m	± 7.9	9 ^a 2 ^m	± 7.9	10 ^a 4 ^m	± 10.0	11 ^a 6 ^m	± 17.4
2	10.2	4	6.3	6	5.6	8	16.6
4	12.2	6	9.2	8	7.1	10	14.7
6	11.0	8	13.3	10	11.7	12 ^a 0	12.6
8	9.1	10	15.9	11 ^a 0 ^m	15.0	2	10.5
10	8.1	10 ^a 0 ^m	16.4	2	17.6	4	9.0
9 ^a 0 ^m	8.3	2	14.4	4	18.2	6	7.4

Видимо, що вартости максимальні припадають на $8\frac{1}{3}$, 10 і $11\frac{1}{3}$ літ, що вказувало б на істнуванє трох підрядних періодів. З них оден довжиною дуже мало ся ріжнить від властивого, головного періода $11\frac{1}{3}$ літ, иньші два виказують вже значнійші ріжницї.

Ті досліди Вольфа, які ми власне зібрали, не відразу приєднали собі признанє у учених. Деякі астрономи, іменню по першім виступі Вольфа, вважали його теорему мріями без вартости, иньші закидували єму недокладність та своєвільність. Найбільшим противником єго був Lamont, що виходив з періодів магнетної деклінації, означених ним на 10.43 літ. Він хотів ту довгість приписати регресивно також періодови сонїчних плям.¹⁾ Але пізнійші праці Вольфа та досліди иньших учених виказали без сумніву істнуванє 11-літнього періода. Carrington, заслужений дослідник дійсного руху сонїчних плям, ставув відразу по стороні Вольфа і сконструував криву цілком подібну до кривої начертаної Вольфом. Він то як знаємо постеріг, що наколи зближає ся minimum, ширина геліографічна плям маліє, а по minimum являють ся они знов і то нагло, в значній ширинї, котра поводи ся зменьшає. Обясняє се найліпше долучена табелька Carrington'a.

Ротації сонця	Північні плями					Полудневі плями				
	0°—10°	11°—20°	21°—30°	31°—40°	Середня ширина	0°—10°	11°—20°	21°—30°	31°—40°	Середня ширина
1854 { 1—6	19	16	0	0	10.5°	16	8	0	0	8.7°
7—13	14	15	0	0	10.7°	17	6	0	0	8.5°
1855 { 14—20	16	4	0	0	8.4°	13	5	0	0	7.8°
21—27	11	1	0	0	6.5°	7	4	0	0	9.2°
1856 { 28—34	10	5	0	0	8.7°	2	1	2	1	20.3°
35—40	1	0	0	3	25.5°	1	0	16	4	26.4°
1857 { 41—47	4	0	14	2	21.0°	0	0	29	11	28.4°
48—53	8	13	47	5	22.0°	0	26	40	2	22.0°
1858 { 54—60	5	47	34	5	20.3°	2	60	67	9	21.7°

¹⁾ Пор. полеміку в Poggendorfs Annalen p. 1862.

Carrington виказуючи вплив періодичности на дійсний рух плям, дуже ся прислужив Вольфови, бо через те відкритє дуже ся збільшила імовірність вислідів Вольфа. Вольф звернув отже пильну увагу на праці Carringtona і переконав ся о справедливости єго теорії, коли в той сам спосіб впорядкував обсервації Böhm'a. Одержав для літ 1833, 1834, 1835 і 1836 середні ширини 9.9° , 25.0° , 22.6° , 16.7° і переконав ся, що в часі minimum 1833/4 панували ті самі відносини, що в р. 1855/6. Ще цікавше те, що навіть обсервації з попередного віку (XVIII) згоджувались з правом Carrington'a. До того відкриття дійшов Вольф посередно з порівнюваня часів обороту 20 ріжних означувань. Час обороту сонця на їх основі виносить 25.342 ± 0.243 днів. Колиж Вольф на підставі своєї таблиці епох обчислив середню вартість для часу обороту сонця з обсервованих плям 1) по minimum, 2) в часі maximum, 3) перед слідуєчим minimum, то одержані вартости виносили:

$$\text{ad 1} \quad - \quad T = 25.599 \pm 0.068$$

$$\text{ad 2} \quad - \quad T = 25.302 \pm 0.051$$

$$\text{ad 3} \quad - \quad T = 25.107 \pm 0.068$$

і потвердили цілковито теорію Carringtona, доказуючи разом, що теорія Carringtona є правдива і що періодичність сонічних плям іде за законами, що їх відкрив Вольф.

Праці Вольфа заохотили також астрономів з Kew: Warrena de la Rue, Balfour Stewart'a і Венямина Loewy'ого до розслідування періодичности. Робили они се фотографічною дорогою при помочи фотогеліографа. De la Rue узгляднив також обсервації Schwab'ого і Carrington'a а обчисливши для них редукційні сочинники, уложив табелі для літ 1826—1870. Вислїди єго оголошені єуть в *Researches on Solar Physics* (*Philosophical Transactions* літ 1865—1870).¹⁾ Warren de la Rue думав, що спосіб редукції обсервацій, якого вживав Вольф, занадто малу дає запоруку точности. Длятого взяв він за міродайний елемент поверхню плям. З доступних єму обсервацій обчислив отже величину поверхні, покритої плямами, в міліонових частях видимої півкулі сонічної. Щоби вислімінувати можливі похибки, обчисляв він осібно поверхню осередків, пенумбр і цілих плям, узгляднюючи завсїгди перспективну — отже позірну зміну поверхні плям.

¹⁾ Подана понизше табеля находить ся в річниках 1869 ст. 1. і 1870 ст. 111. Secchi о. с. 172 сл.

Рік	Число днів обсервації	Число днів без плям	Число плям в Кев	Число плям в Рамі	Поверхня плям	Рік	Число днів обсервації	Число днів без плям	Число плям в Кев	Число плям в Рамі	Поверхня плям
1826	277	22	118	—	—	1849	285	0	238	—	755
1827	273	2	161	—	—	1850	308	2	186	—	583
1828	282	0	225	—	—	1851	308	0	141	—	658
1829	244	0	199	—	—	1852	337	2	125	—	522
1830	217	1	190	—	—	1853	299	4	91	—	350
1831	239	3	149	—	—	1854	334	65	67	—	198
1832	270	49	84	—	196	1855	313	146	38	—	82
1833	267	139	33	—	73	1856	321	193	34	—	40
1834	273	120	51	—	142	1857	324	52	98	—	227
1835	244	18	173	—	837	1858	335	0	202	—	763
1836	200	0	272	—	1407	1859	343	0	205	257	1390
1837	168	0	333	—	1236	1860	332	0	211	251	1343
1838	202	0	282	—	876	1861	322	0	204	251	1310
1839	205	0	162	—	817	1862	317	3	160	168	1165
1840	263	3	152	—	575	1863	330	2	124	165	749
1841	283	15	102	—	340	1864	325	3	130	97	815
1842	307	64	68	—	209	1865	307	26	93	86	542
1843	312	149	34	—	108	1866	349	76	45	81	199
1844	321	111	52	—	197	1867	312	195	25	32	188
1845	322	29	114	—	396	1868	301	12	101	92	449
1846	314	1	157	—	599	1869	179	0	—	198	—
1847	276	0	257	—	1127	1870	147	0	—	305	—
1848	278	0	330	—	1112						

З поданої табелі можемо вивести слідуєчі заключеня: 1) Довжина періоду колибає ся межі 10 а 12 літами, обнимаючи середно 11 літ і якийсь дроб. Для об'ясненя подамо ту ще епохи обчислені Warren'ом de la Rue і порівнаємо їх з епохами обчисленими Вольфом.¹⁾

Minima Warren'a de la Rue	Minima Wolf'a	Maxima Warren'a de la Rue	Maxima Wolf'a
1833.XI.28 = 1833·91	1833·9	1836.XII.21 = 1836·97	1837·2
1843.IX.21 = 1843·72	1843·5	1847.XI.14 = 1847·87	1848·1
1856.IV.21 = 1856·30	1856·0	1859.IX.7 = 1859·67	1860·1
1867.II.14 = 1867·12	1867·2		

¹⁾ Researches on Solar Physics Nr. 28. (Phil. Transactions p. 1870 ст. 115 дд.)

Довжину періода обчисляв de la Rue з проміжок обрахованих епох. Проміжка між першам а другим minimum виносила 9·81, між другим а третим 12·58, між третим а четвертим 10·82 літ. Середна вартість буде отже 11·07.

2) З більшої і меншої табельки бачимо zarazom, що maximum не лежить рівно в середині між двома сусідніми minimaми, але зближаєсь своїм положенем дуже до попереджаючого его minimum, так, що крива, представляюча період, скорше ся підносить до гори як опадає. Середно виносить проміжка між minimum а maximum 3·51 літ, між maximum а слідуючим minimum аж 7·54 літ.

3) Видно сліди, що існує друге другорядне maximum, що припадає пару літ по головнім.

4) Поверхня плям підлягає майже тому самому закону, що їх скількість.

5) Плями навіть підчас maximum закривають лиш дуже малу часть сонічної поверхні. Она не доходить навіть до $\frac{1}{500}$ видимої півкулі.¹⁾

Справа періодичности сонічних плям занимала також Spörer'a²⁾ а іменно в пізнійших часах його дослідів. За приміром Вольфа взяв ся він до опрацьовання обсервацій почавши з 1750 року. До опрацьовання давнійших обсервацій від 1750 — 1853 ужив він чисел зглядних Вольфа, а для літ 1854 — 1878 обсервацій Carrington'a і своїх. Але мимо того, що уживав в другій части роботи матеріалу цілком инакше впорядкованого, згідність з вислідами Вольфа була велика. Признає се сам Spörer, хотяй не вірив в докладність і вагу давнійших обсервацій.³⁾ Найліпше показує се табеля уміщена Spörer'ом в его розвідці. Перша її рубрика обнимає епохи після обчислень Вольфа, друга і третя ті самі епохи, означені Spörer'ом на два способи: з кривих і на підставі осібної формули, означеної Spörer'ом числом 28. Взагалі думає Spörer, що при обраховуваню періода сонічних плям належить для ріжних епох послуговуватись ріжними формулами.⁴⁾

¹⁾ Для об'ясненя своїх обсервацій і їх вислідів начертав також Warren de la Rue криву і опрацьовав її дуже докладно. Її находимо і у Secchi'ого о. с. ст. 179.

²⁾ Astronomische Nachrichten p. 1880 Bd. 98. Nr. 2337 ст. 97 дд.

³⁾ Pop. Vierteljahresschrift d. naturf. Ges. in Zürich т. XXVI. Mitth. Nr. 52. ст. 61 сл.

⁴⁾ Astronomische Nachrichten Bd. 98. 1880. Nr. 2335, ст. 103.

Епохи Вольфа		Епохи Spörer'a з обчислення кривих		Епохи Spörer'a середні	
Minimum	Maximum	Minimum	Maximum	Minimum	Maximum
1755·2	1761·5	1755·5	1761·0	1753·7	1758·5
1766·5	1769·7	1760·1	1770·1	1765·1	1769·9
1775·5	1778·4	1775·5	1778·7	1776·4	1781·2
1784·7	1788·1	1784·2	1788·6	1787·7	1792·5
1798·3	1804·2	1798·5	1804·0	1799·1	1803·8
1810·6	1816·4	1810·8	1817·3	1810·4	1815·2
1823·3	1829·9	1822·6	1829·9	1821·7	1826·5
1833·9	1837·2	1833·7	1837·1	1833·6	1837·8
1843·5	1848·1	1843·6	1848·6	1844·4	1849·1
1856·0	1860·1	1856·0	1860·4	1855·7	1860·5
1867·2	1870·6	1867·2	1870·8	1867·0	1871·8
1878·9		1878·9		1878·4	

В зв'язи з тими дослідями, а іменно Вольфа, є одна дуже цікава проба (бо інакше сего годі назвати) Fritz'a, щоби означити maxima періодів сонячних плям, котрі припали перед 1610 роком, т. є. перед властивим відкриттям сонячних плям для науки. Fritz опер ся на рівнобіжності одинацятьлітнього періода сонячних плям і полярної зорі, та скомбінувавши записаві по літописях обсервації полярної зорі з записками про незвичайні притемнення сонця, а навіть про дійсно обсервовані (Китайцями або Арабами) сонячні плями, потрапив в приближенню означити много давніх maxим'ів. Найбільше послужили єму записки згаданої китайської енциклопедії Ma-Twan-Lin, що сягають часів ще передхристових. Отсе виказ тих давнійших maxим'ів після Fritz'a:¹⁾

— 44, + 24, 188, 302, 321, 344, 354, 360, 372, 388, 397, 501, 535, 578, 626, 797, 807, 829, 839, 865, 874, 974, 1078, 1089, 1096, 1104, 1112, 1120, 1130, 1137, 1145, 1160, 1185, 1193, 1202, 1238, 1276, 1370, 1511, 1526, 1529, 1547, 1589, 1596, 1608.

Ріжницї між тими епохами дають середно дещо більше чим 11 літ, згоджують ся отже цілком з періодом прийнятим через Вольфа. Завважати однак належить, що часові притемнення сонячного світла, котрі брав Fritz за maxima сонячних плям, могли мати свою причину в иньших явищах природи пр. довготривалій „сухий“ мразі, вулканічних димах і попеллах високо занесених воздушними

¹⁾ Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich 1881 Bd. XXIV. ст. 259 дд.

струями, а може і хмарам метеоритів, що перелітали між землею а сонцем.¹⁾ Liais постеріг пр. в Бразилії 1860. IV. 11. так велике притемнене сонячного світла, що планета Венера, що тоді стояла дуже близько сонця, була видна в білий день.²⁾ В серпні 1883 року підчас вибуху вулкана Krakatau треба було на кораблях, що плили сундайским морем, в само полудне світити лампи. Сучасно в Батавії панувала 40-дневна темнота.

Для доповнення належить з між розвідок, що відносять ся до періодичности сонячних плям, згадати ще про розвідки Korteweg'a і Remeis'a.

Korteweg³⁾ виступає против думки Вольфа, що існують два періоди малі, котрі через інтерференцію викликають вагання в довжині і напрузі великого періода. Поділивши місячні зглядні числа на три секції, з котрих одна обнимає час від 1751 до 1791, друга від 1792 до 1732, третя від 1833 до 1873, обчисляє Korteweg середне вагання для пробних періодів, що обнимають 9 до $12\frac{1}{2}$ року, і конструує на підставі тих обчислень т. з. комбінаційну криву. Обчисленнями і дорогою графічною представляє далше Korteweg, що різні середні колибання дають правильну криву з одним тільки максимум, котре припадає що $11\frac{1}{4}$ року. Десятилітний період Вольфа є отже цілком фікційний. Деякі неправильности, що існують в пробігу періода, належить приписати неправильному діланю сонця.

Remeis⁴⁾ на підставі обсервацій Tacchini'ого звернув знов увагу на кільканацятиденні періоди в діяльності сонця. Подамо ту тільки epoch maxim'ів і minim'ів.

Minima	Ріжниця в часі	Maxima	Ріжниця в часі
1879. XII. 28.	13 день	1880. I. 10.	14 день
1880. I. 24.	14 „	1880. II. 7.	11 „
1880. II. 18.	19 „	1880. III. 9.	14 „
1880. III. 23.			

Істнованє так коротких періодів підлягає однак великим сумнівам. Та періодичність є лиш мнима, викликає її оборот сонця.

¹⁾ Secchi o. c. ст. 181.

²⁾ Comptes rendus t. 60. ст. 649 і 857 дд.

³⁾ Über die von Prof. Wolf vermuthete Doppelperiode der Sonnenfleckenhäufigkeit. Sitzungsberichte der kas. Akad. der Wissenschaften in Wien. Math. nat. Classe Bd. LXXXVIII. II. Abth. ст. 1004—1017.

⁴⁾ Sirius т. XIII. 1880. ст. 210.

На тім кінчимо розсмотрюване періодичности сонічних плям і мусимо ствердити, що праці Вольфа в тім предметі мусять бути узнані епохальними. Різні критики, що метались на них зі всіх сторін, не зможуть зменшити їх значія. Spöger уживав иньших метод, а одержав результати, котрі різнять ся від результатів Вольфа так незначно, що ті ріжницї містять ся в обсязі середного вагання, яке Вольф подає для кожної своєї дати. Досліди Warren'a de la Rue також згоджують ся в головних чертах з результатами Вольфа. А хотия в деяких точках значно ся різнять від себе, то по нашій думці Вольфови а не Warren'ови de la Rue належить признати слушність. Самі Kew'ські астрономи мусять признати, що взявши в рахунок поверхню груп і плям одержимо майже такий сам результат, якбиємо взяли їх число. Крім того завважати належить, що Warren de la Rue обчисляє довжину періода з дуже коротких обсерваций та ще до того в так первісний спосіб, як се робив Вольф ще в 1852 р. Що дотичить Korteweg'a, то він цілком не порозумів Вольфа і хоче констатувати чи відкривати істноване періода другорядного при помочи чисел зглядних виведених з рахунку, а не з обсерваций. Нема що отже дивувати ся, що досмотрив ся лише одинокого періода. На такім самім, тільки далеко грубшій непорозуміню Вольфа полягають закиди Duponchel'a, про котрі пізнійше поговоримо.¹⁾

З періодичностию сонічних плям получені є різні дуже цікаві явища на сонці. Передовсім завважали Rosa і Secchi, що промір сонця підлягає періодичним ваганням. Secchi вже в 1873 році мав те пересвідчене, що промір сонця є змінний, іменно найбільший в часі minimum сонічних плям. Право поставлене Ros'ою звучить: Наколи число плям і протуберанций є менше, сонце має більший промір.²⁾ Над сею цікавою справою розвела ся оживлена дискусія, в котрій взяли участь Respighi, Wagner, Auwers, Remeis та много иньших. Auwers доказав, що материял використаний Secchi'm не є достаточний, а Remeis виступив так переконуючо против Ros'а, що справа здавалась убитою.³⁾ Підніє єї на ново Вольф на підставі обсерваций проміру сонця Maskelyne'a (1765—1800) і Hilfiker'a

¹⁾ Comptes rendus tome XLIII. ст. 827 дд.

²⁾ Розвідки Ros'а: Sulle variazioni del diametro solare. Memorie rei spettroscopisti italiani. Anno 1872. Studi intorno ai diametri solari. Roma 1874.

³⁾ Пор. Sirius т. XII. 1879.

(1862—1883).¹⁾ Він підійє, що найдені в них періодичні різниці не можуть походити виключно з обсервацийних та личних хиб. Дійсно: криві, що виражають зміну сонячного проміру, мають подібний пробіг, як криві, що виражають періодичність сонячних плям. Auwers, що за приміром Вольфа зайняв ся знова сею справою, мусів признати, що пр. обсервації Maskelyne'a з лїт 1783—1790, коли було дуже много плям на поверхні сонця, вказують зменшене сонячного проміру, а знов з лїт 1791—1810, коли було плям дуже мало, виразно є видне збільшене сего проміру. Але zarazом доказав Auwers, що дослїди иньших учених, що обсервували в новїйших часах і нерівно лучшими інструментами (іменно Wagner) не potwierджують вислїдів Maskelyne'a і Hilfiker'a. 120-лїтний ряд різних обсерваций передискутований дуже пильно Auwers'ом не вказав найменшої змінності проміру сонця. Дослїди Сикори в послїдних лїтах XIX віка²⁾ вказали тільки деяке винесене льокальне поверхні сонця в близькості плям.

Другим сонячним явищем, що ся дуже тривко лучить з періодичністю плям, є нерівність в їх виступуваню на різних півкулях сонячної кулі. Вже Швабе замїтив підчас maxім'їв 1828 і 1848 року, що плями виступали майже виключно на одній з сонячних півкуль. Що більше замїтив Швабе, що місце найсильнішого розвитку плям здає ся обходити сонце довкола і то в напрямі цілком противнім до его обороту. В р. 1858 сконстатував він цілком певно, що півкуля полуднева через довший час була далеко богатша в плями як північна. По Швабе'ви звернув Carl увагу на те, що в лїтах 1859—1863 повстало і зникло далеко більше плям на півкулї сонця від нас відверненій, як на зверненій до нас. Крім того мож було дуже виразно помітити у плям змаганє, щоби щораз виключнїйше витворюватись на одній з півкуль. Вже з дослїдів Carl'a можна заключити, що ся проява стоїть в звязи з періодичністю сонячних плям; іменно, коли число плям дійде до свого minimum, тоді на зверненій до нас півкулї сонця слїдує також minimum. Рівночасні і дещо пізнїйші обсервації Spörer'a доказали, що minima лїт 1856 і 1867 і maxima 1860 і 1875 виступили скорше на полудневій як на північній півкулї, а De la Rue, Stewart і Loewy скон-

¹⁾ Pop. Mitth. Nr. 39 і 61. Vierteljahresschrift d. nat. Ges. in Zürich рік 1873 і 1884.

²⁾ Bulletin astronomique 1899 ст. 455.

статували також в тім часі кілька випадків, котрі вказують на змагане у плям виступати в певнім періоді на противних кінцях того самого проміру сонця.

Такими самими дослідями займався також Weber, та ствердивши у плям змагане, щоби виступувати на поодиноких півкулях, звернув на те явище увагу Вольфа. Вольф вичислив стан плям осібно для обох півкуль в літах 1869—1881. Уложена ним таблиця¹⁾ вказала на те, що число плям від р. 1869 прибувало на полудневій півкулі скорше, як на північній. Потім північна півкуля дігнала в тім згляді полудневу. Коло половини 1871 р. зачало загальне число плям опадати, але скорше на північній, як на полудневій півкулі. Вкінці однак знов полуднева півкуля перегнала північну. Сума середних зглядних чисел для обох півкуль не є дуже різна одна від другої і виносить для північної півкулі 557.9, для полудневої 559.0. Епохи періода т. є. maximum і minimum приходили на полудневій півкулі о три або чотири місяці вчасніше, чим на північній. Можна се сказати іменно про maximum року 1870 і minimum року 1878. Обсервації показали ся занадто короткими, щоби мож було відкрити більшу правильність.

Тим самим предметом займався також Tacchini.²⁾ Доказав він іменно цілковито, що 1) плями часто виступають виключно на одній з півкуль сонця і то протягом довшого часу (пр. через три перші місяці 1880 року), 2) деякі околиці сонячної поверхні спеціально сприяють розвитку плям. В році 1880 плями звичайно показували ся в двох точках одного полуденника: під $+22^{\circ}$ і -20° географічної ширини.

На закінчене розділу скажемо дещо про причини періодичности сонячних плям. Під тим зглядом можемо всіх астрономів поділити на дві групи. Одні приписують періодичність сонячних плям періодичному діланю внутрішніх сил сонця, другі виїшним причинам. Про погляди першої групи говорити будемо в слїдуючїм розділі, що займатися буде природою сонячних плям і ріжними теоріями, які ріжні учені про ню виставили. Бож в такім разі внутрішні причини періодичности сонячних плям будуть залежали від загального погляду кожного з тих учених на загальний устрій сонячної кулі

¹⁾ Mitth. 55. Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich. Bd. 26, 1881. стр. 354 і 355.

²⁾ Atti della reale Accademia dei Lincei 1881. Aprile S. 2. vol. 5. стр. 157, 200. Sirius XIII. 1880 стр. 210.

а спеціально на істоту сонячних плям. О причинах виїшних можемо вже ту говорити.

Зараз по відкриттю періодичности сонячних плям, попали учені на думку, що причиною періодичности в планет Юпітер, котрий як знаємо окружає сонце в 11 літах 314·834 днях. Вольф в початках своїх дослідів був приклонником сеї гіпотези,¹⁾ а і в новіших часах не бракувало приклонників того способу толковання періодичности плям пр. Faye, Sonrel²⁾ і Duponchel. Сей послідний в своїй розвідці: *Les taches solaires réglés par l'excentricité des mouvements planetaires* Paris 1882,³⁾ на підставі цілком хибно понятих вислідів Вольфа приходить до переконання, що межі maxima'ми 1619 а 1856·2 року пройшло не 21 але 20 періодів, отже довжина періоду вино-11·85 літ т. є. майже цілком тільки само, що сидеричний рік Юпітера. Єго отже вважає Duponchel справником періодичности сонячних плям. Абстрагуючи вже від сеї фатальної похибки, що всі виводи Duponchel'a робить неправдивими,⁴⁾ толковане періоду сонячних плям ексцентричностю, отже раз сильнійшим, другий раз слабшим притяганєм Юпітера, не веде до ніякого позитивного результата. Правда, що крива періоду сонячних плям згоджуєсь в деяких місцях цілком добре з кривою, що виражає змінне віддаленє Юпітера від сонця, але в иньших знов місцях мають ті криві цілком відмінний і собі взаїмно противний пробіг. Пр. при початку XIX столітя був Юпітер найблисший до сонця підчас minimum сонячних плям, а в році 1870 підчас maximum.

Хотяй як бачимо не повело ся вияснити періодичности плям ексцентричностю орбіти Юпітера, то однак аж до найновіших часів не переставали учені мішати планети до періодичности сонячних плям. Впроваджено однак вже і иньші планети в рахунок. Chacornas, толкуючи поветаванє плям відпливом сьвітляної маси сонця, твердить, що найбільше їх витворюєть ся під лучистим впливом Венери, Землі і Юпітера з деяким співуділом Сатурна і Меркура. Спеціально розвойови плям сприяє той час, коли стоять в квадратурі з одної сторони Земля і Сатурн, з другої Меркур, Венера і Юпітер.⁵⁾ Також Вольф видячи, що згідність періода плям з часом обігу Юпітера не дасть ся удержати, пробував взяти в рахунок чо-

¹⁾ Mitth. Nr. 8. Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich 1859.

²⁾ Comptes rendus tome 65 ст. 227 + 69 ст. 263.

³⁾ Comptes rendus т. 93. ст. 827 дд.

⁴⁾ Пор. рецензию Вольфа Mitth. 56. Vierteljahresschrift etc. т. 27. ст. 64 дд.

⁵⁾ Comptes rendus tome 64 ст. 1196.

тири планети: Венеру, Землю, Юпітера і Сатурна.¹⁾ Уложив він вже в 1859 році формулу для кривої плям, в котрій приходили 4 періодичні члени, за котрі підставляв елементи чотирох згаданих планет. В кривій, що виражає зміну числа плям в часі і є виведена з обсервованих чисел зглядних, знаходять ся іменно кілька другорядних максимумів і мінімумів, котрі можна ввести в зв'язь з обігом Венери і Землі. Вольф припускає отже, що Юпітер викликає загальний вид кривої плям, Сатурн — зміни в довжині і висоті її горбків і долин, а Земля і Венера зубці в тій кривій. Також астрономами з Kew, не могучи протягом довшого часу виробити собі ясного погляду на істоту плям, припускали, що існує зв'язь між їх періодичністю і рухами планет. De la Rue і Stewart вивели зі своїх обсервацій ряд чисел, з котрих ся показує, що плями все тоді ся в більшім числі показують, коли з трох планет: Юпітера, Венери і Меркура дві стоять в одній лінії. Застановлювали ся они над чотирма можливими случаями: 1) коли спільно діляють Меркур і Венера, 2) Юпітер і Венера, 3) Юпітер і Меркур, 4) коли ся зближає або віддаляє сам Меркур. В двох останніх случаях вплив є малий, а найбільший є в другім, коли Юпітер і Венера разом діляють. Плями мають після Kew'ських обсервацій змаганє, щоби повставати напротив планети Венери. Віддаляючись від неї в наслідок ротації сонця, ростуть і досягають свою найбільшу величину, коли найдуть ся по прямо від Венери відверненій стороні сонячної кулі.²⁾ З інших, дуже численних дослідів подамо на кінець тільки висліді Fritz'a, Kirkwood'a, Sellmeier'a, Loomis'a і Harrison'a.

Fritz звернув увагу на синодичні обіги планет, підчас коли дотепер зважано лишень на сидеричні. Найбільший вплив приписав він планеті Меркурови. Sellmeier противно узнав вплив Меркура мінімальним, зазначаючи рівночасно, що Венера, Земля і Юпітер пересічно що 10.07 літ находять ся для обсерватора уміщеного в середоточчі сонця, в полученю. Вплив тих планет викликає періодичність сонячних плям в періоді 77-54 літ. Підчас того періода міняють ся але неправильно періоди по 10-38 і 12 літ довгі. Kirkwood на стільки є оригінальний, що вийшов від многократно обсервованого факту, що оден полуденник на поверхні сонця особливо сприяє витвореню плям. Причин сего факту шукає Kirkwood в гіпотезі, що згаданий полуденник є приступнійший діланю планет як

¹⁾ Handbuch der Astronomie т. II. ст. 414.

²⁾ Comptes rendus т. 67-ст. 191. Secchi о. с. ст. 182. Young о. с. ст. 147.

иньші полуденники. Заложивши час обороту сего полуденника 24·826 днів, спрвадив Kirkwood середній час треваня періода ($11\frac{1}{9}$ року) до впливів Меркура, а ріжні його ваганя і неправильности до пертурбацій через планети взагалі, а Венеру і Землю спеціяльно. Loomis приписує кон'юнкціям і опозиціям Юпітера і Сатурна найбільше значінє для періодичности сонічних плям. Він є приклонником 10-літнього періода, виходячи від вагань земского магнетизму, а обставина, що кожних 9·93 літ припадає по черзі кон'юнкція і опозиція обох тих планет, здавала ся виразно вказувати на вплив тих планет. Але ближе розелідженє річи виказало, що підчас таких констеляцій трафляли ся часом maxima, часом знов minima сонічних плям. Згадаємо ту ще о однім цікавім постереженю С. Harrisona.¹⁾ Постеріг він, що коли в формулі:

$$P = \Sigma \frac{pm}{d^2} : \Sigma \frac{m}{d^3}$$

підставимо за p , m , d , час обігу, масу і середнє віддаленє вісьмох головних планет, одержимо для P (довжина періода) 11·29 літ — величина, що майже цілком згоджуєсь з середною довжиною періода плям сонічних Вольфа. Ріжниця лежить в обсягу середної непевности.²⁾

Тепер не числять ся вже учені з впливом планет на сонічні плями і шукають виясненя періодичности в змінній чинности сонця. Трудно собі іменно представити, в який спосіб можуть планети сорозмірно малі і так дуже від сонця віддалені, мати на него так сильний вплив. Тяжко припустити, що сила тяжесті ту ділає, бо пр. сила з якою притягає Венера поверхню сонічну, є 750 разів меньша, як діланє сонця на поверхню землі. Сила притягання Юпітера і Меркура є вже 1000 разів меньша. Сонце само викликає на поверхні землі в околицях рівника приплив около 30 см. високий. Юпітер викликає би на поверхні сонця, наколи би там була вода, приплив 0·3 mm., Венера приплив 0·4 mm. Хотяй бисьмо навіть прийняли, що материя поверхні сонця є безмірно лекша від води, то прецінь трудно витолкувати впливами планет так великі заколоти, якими є плями. Зрештою само виступуванє плям досить нечаянне, подібне часом до експльозий і кождоразові в них зміни не дадуть ся погодити з рівномірним впливом планет.

¹⁾ Wolf. Handbuch der Astronomie т. II ст. 414. Philosophical Magazine 1889.

²⁾ Розуміє ся, що також Фальб є приклонником впливу планет на сонічні плями вже зі згляду на свою теорію. Поп. Sirius IV. 1871. et. 48.

Пробувано вияснити періодичність сонічних плям ще в оден спосіб. Оден учений американський В. Рейсе правдиво по американськи поставив теорію, що плями то діри в фотосфері, викликані падаючими на сонце метеоритами. Вистарчить отже припустити, що ті метеорити оточують сонце довгим перстеном, котрий має в однім місці значне згрубіне. Що 11·1 літ приходить оно в околицю сонця, множество метеоритів спадає тоді на него і маємо максимум сонічних плям.¹⁾ Та теорія не має однак наукових підстав. Супротивляють ся їй тривалість плям і геліографічне їх розміщенє. Бєли би тая теорія була правдива, найбільше плям було б під бігунами сонця, де сила відосередна є найменша. Тимчасом, як знаємо, плями находять ся головнє межі 10° а 35° гел. ширини.²⁾

Про теорії сонічних плям.

Пояснити істоту сонічних плям пробувало дуже много учених і неучених людей. Те велике число ріжних поглядів легко витолкувати, бо сонічні плями є дуже цікавим, можна навіть сказати таємничим явищем природи. Могло б ся видавати, що те велике число ріжних теорій прецінь причинило ся до якогось поступу в пізнаню натури сонічних плям. Але на жаль так не є. Нинішня астрономія стоїть перед сонічними плямами як перед загадкою так само майже темною як в початках XVII віка. Поступ понять астрономії є на тім поли нескінчено менший чим на иньших, хоч не бракувало проб посунути єї вперед. Причиною сего є занадто далеке запусканє ся в теорію і неуміле а повне претензії і занадто аподиктичне пояснюванє річи у многих учених. Щоби пізнати явище сонічних плям основно, треба довго самому обсервувати сонічні плями і то найлучшими средствами, якими орудує теперішня наука. Лише теорії, що опирають ся на обсерваціях, можуть мати вартість. Теорії опірті на анальоґіях і чисто теоретичних виводах, не можуть вдоволити обсерваторів. Такі теорії переносять результати дослідів роблених по лабораторіях на мікроскопічну міру в безконечні простори сонічної кулі. Що вислід сих проб не вдоволяє, легко зрозуміти. Коли ще до того нераз цілком непокликані люди мішались до сонічних плям, не дивно, що у фахових астрономів всі нові те-

¹⁾ Young o. c. ст. 148.

²⁾ Запримітити належить, що властивим вітцем сєї гіпотези є John Herschel.

орії сонічних плям не роблять вражіня. Цілий сей предмет на довгі літа здискредитований в їх очах. Найбільше характерною обставиною в тім напрямі є те, що великі обсерватори сонічних плям, як Carrington, Spörer, Wolf не ставили ніколи своїх власних теорій, хиба лиш принагідно кинули пару слів, що признавали тій або тамтій теорії більшу імовірність. Навіть Secchi, хоч поставив сам кілька теорій, не держав їх ся так завзято як теоретики.

Погляди на істоту сонічних плям представимо в порядку хронологічним, щоби ліпше пізнати літературну полеміку в тім напрямі. Відступимо від сего порядку хиба для яснійшого угруповання річи. Більшість теорій, котрі оглянемо, має вже лише історичну вартість.

Зараз по відкриттю сонічних плям в 1610 р. зачали тодішні учені спорити ся над їх істотою. Одні зі зглядів філософічних та догматичних заперечували, щоби сонце, око сьвіта і взорець чистоти, могло мати на собі чорні плями. В виду сконстатованого факту говорили они, що явище плям викликають малі тіла небесні, що окружують сонце в невеликім віддаленю від него. Так думав протягом довшого часу також Scheiner, перший науковий дослідник поверхні сонця. Він розповсюднив сю думку між своїми учениками.¹⁾ Tardé і Malapert надали навіть мнимим новим планетам назви. Першай назвав їх *Sidera Borbonica*, другай *Sidera Austriaca*. Але і сам Scheiner перехилив ся невдовзі до противної думки, що іменню плями сонічні находять ся на поверхні сонця, а не поза нею. Від початку приклонниками сего твердження були: Galilei, Kepler, Fabricius — відкритець плям і Marius. Galilei, а з ним Kepler, вважали плями чимсь подібним до наших хмар. Kepler вносив вже навіть, що плями є незалежні від сонічної кулі, але мусять ся уносити над її поверхнею. Заключав се він з неправильности руху плям. Видимо отже, що початки теорії хмар лежать ще в початках XVII віка. Так само давних часів сягає теорія жужлів. Представителем її був в тих часах Marius. Їго теорія дасть ся звести в кілька слів: Плями сонічні се жужлі, що виділюють ся з палачого ся сонця, котре їх потім викидає в простори всесьвіта, щоби пізнійше яснійше сьвітло як сьвічка, коли обітнемо її спалену часть іготики. Через певний час був і Scheiner пересьвідчений, що плями мають сталий стан зціпнення.

¹⁾ Wolf. Handbuch der Astronomie т. I. ст. 567 дд.

Від тепер ніколи не бракло учених, котрі би не признавали плям жужлями. Пр. Aversa і Lahire вважали плями непрозорними місцями плинної поверхні сонця — отже жужелицями. Але пануючою теорією стала невдовзі иньша. Scheiner під кінець своїх дослідів дійшов до переконання, що плями не є хмарами. Внішній їх вигляд вказував на що иньшого, іменно, що се є заглиблення в світляній матерії поверхні сонця. Ті заглиблення відслонюють долішню темну верству і через те витворюють явище плями. Тепер по перший раз виробило ся понятє фотосфери яко обволоки, що зложена з ясних хмар покриває зі всіх сторін кулю сонічну, що сама для себе є цілком темна.¹⁾ Певну модифікацію тої теорії подав в другій половині XVII віка Домінік Cassini. Він думав, що фотосфера підлягає припливови і відпливови та після того відкриває або закриває поодинокі гори, що находять ся на сонці.²⁾ Та модифікація найшла многих приклонників, іменно межи французькими ученими пр. De la Hire і Lalande, що вважав осередки плям верхами сонічних гір а пенумбри їх склонами, котрі ми видимо крізь тонку верству фотосфери та до того на пів-прозрачну. Понеже иньші держались гадки, що плями є заглиблення, проте почалась довша полеміка між приклонниками пропастиї і гір. Она тревала довший час, але вкінці стали переважати приклонники пропастиї, іменно в другій половині XVIII віка. Rost вже в першій половині сего віка виставив теорію, що дими виходячі зі сонічних вулканів продирають фотосферу і отвираючи нам вид на темний осередок сонця є причиною плям. Він також звернув увагу на се, що плями наближаючи ся до сонічного края викликають в нїм заглиблене.³⁾

Остаточне обаленє теорії гір належить приписати Wilson'ови, котрий, як се висше подалисьмо, відкрив,⁴⁾ що осередки сонічних плям стають зглядом своїх притінків ексцентричними, наколи плями наближать ся до края сонічного кружка. Те явище не згоджує ся з припущенєм, що плями, се гори, і тільки тоді дасть ся витолкувати, коли приймемо, що они є заглибленнями. Те саме відкрите зробив в 1771 р. независимо від Wilson'a Schülen, а Bode витягнув навіть з тих обсерваций відповідні заклоченя. Осередок плями є після Bod'ого куснем сонічної поверхні. В міру того, чи сей ку-

1) Wolf. Handbuch der Astronomie т. I. ст. 568. т. II. ст. 406.

2) Wolf. Geschichte der Astronomie ст. 650.

3) Wolf. Handbuch der Astronomie т. II. ст. 406.

4) Observations on the solarspots Philosophical Transactions т. 64. 1774. ст. 1 дд.

сень є скалистий, пісковатий або покритий водою, осередок плями є темніший або яснійший. Притінок витворюють темні хмари, що лежать між властивою поверхнею сонця а внїшню сьвітляною обволокою або фотосферою.

На тих дуже незначних підставах повстала перша наукова теорія сонїчних плям, поставлена William'ом Herschel'ом в початках XIX столїтя.¹⁾ Не була се теорія без упереджень. Herschel з релїійно-фїлософїчних принципів думав, що сонце є придатне до замешканя і в дїйсности замешкане як і наша земля. Щоби се було можливе, мусїв Herschel припускати, що осередок сонця є зимним, отже темним тілом. Усе сьвітло і тепло, яке сонце видїляє, походить після теорїї Herschel'a лише від тз. фотосфери т. є. внїшньої верстви сонїчної амосфери. Фотосфера має натуру наших земських хмар, але є розпалена до білости. Щоби однак таке горяче сусїдство не зашкодило мешканцям сонця, приймає Herschel, що безпосередно під фотосферою находить ся верства темних хмар, котра цілковито віддїляє фотосферу від сонїчного нїдра.

Роздивімось тепер, яким способом толкує Herschel на підставі своєї теорїї явища на сонці.

Передовсїм грануляція походить звідси, що долїшня темна верства хмар проглядає через фотосферу в многих місцях і справляє, що поверхня сонця виглядає рапаво. Походні — се поодинокі хмарки фотосфери, унесені прямовими струями воздуха в гору. Плями толкує Herschel в той спосіб: Коли обі верстви хмар т. є. темна і ясна в наслідок хотьби димів, що уносять ся з сонїчних вулканів, або в наслідок иньших подібних причин прорвуть ся, тоді через повсталий отвір бачить земський обсерватор кусник темної поверхні, властивого сонїчного нїдра. Сей видимий кусень сонїчного нїдра творить осередок плями. Притінок же творить верства темних хмар, що роздерта укладає ся концентрично коло осередка. Цїла отже пляма представляє ся яко лїйковате заглиблене, що своїм дном опирає ся о темне внутро сонїчної кулі.

Хотая своєвільність теорїї Herschel'a відразу кидала ся в очі, то все таки она удержала ся дуже довго і числила до своїх прихильників учених сеї міри, що Humboldt²⁾ або Arago. Найважнїшою причиною того довгого удержання ся теорїї Herschel'a була об-

¹⁾ Observations tending to investigate the Nature of the Sun Philosophical Transactions 1801. ст. 265 дд.

²⁾ Kosmos вид. Stuttgart 1880 т. III. ст. 341.

ставина, що ніхто нової теорії протягом кількадесяти літ не виставив — для того, що не було жадних нових даних.

Теорія Herschel'a є в історії сонячної фізики дуже важним явищем, бо замикає перший період існування цієї галузі астрономії. Перший цей період був дуже довгий — майже двіста літ уплинуло від відкриття сонячних плям до поставлення теорії Herschel'a — а можемо його назвати дитинячим віком сонячної фізики.

Про істоту плям маємо в тім часі лише голі гіпотези, а по двіста літах теорію прямо чудерначку і незгідну зі здоровим розсудком. Довгий час її пановання найлучше свідчить про те, що сонячна фізика находилась тоді ще в пеленках. Але за загальним поступом астрономії в першій половині XIX. віка мусів піти поступ і на тім поли. З початку зазначився він хіба тим, що щораз більше обсерваторів звертало свої інструменти на сонячний круг. І зачали поволи родитись сумніви. Найбільше впадала в очи неімовірність, щоби внаву сонця могло лишити ся темне і зимне в сусідстві розпаленої фотосфери. John Herschel старав ся що правда через довгий час боронити теорії свого батька. Приписував він іменню тій темній верстві хмар особливу властивість: цілковитої рефлексії світла, якої ще у жадного тіла на світлі не сконстатовано. Крім того хотів він ввести теорію свого батька знов в моду, опираючись на припущенню Mayer'a, котре так виразив Leverrier: „que le soleil dejeuner et dîner des astéroïdes.“ Такі річі були тоді дуже популярні, Herschel хвапив ся отже того і приписував творення ся дір в сонці паданню на него метеоритів. Потім попав на здогад, що ті отвори походять від воздушних труб на сонці, але всі проби ратувати гіпотезу батька не придались до нічого. Найгіршіше оруже давала їй противникам в руки теорія Kant'a і Laplace'a, що була тоді вже загально прийнята. А власне теорія Herschel'a прямо їй ся супротивляла. Не бракувало їй що правда аж до найновіших часів прихильників, але мусіла перебути великі модифікації, так що лишилось з неї хіба те, що плями є заглубленя в фотосфері. Остаточний удар завдала гершлівській гіпотезі спектральна аналіза. Відкриття Kirchhoffa і Bunsena, вияснюючи природу темних ліній Фраунгофера в сонячній дуговині, пхнуло сонячну фізику на цілком нові дороги. Майже всі добуток, що добуто в останніх часах на тім поли, маємо завдячити спектральній аналізі.

Першим, що на підставі спектральних дослідів поставив нову теорію сонця був оден з відкривателів спектральної аналізи, G. Kirchhoff.¹⁾

¹⁾ Untersuchungen über das Sonnenspektrum und die Spektren der chemischen Elemente. Physikalische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften in

Щоби в'яснити істнуванє лній фраунгоферівських в сонячній дуговині, твердить Kirchhoff, що сонце складає ся з ядра сталого або плинного, розжареного до найбільшої степені. Само для себе те ядро безпосередно обсервоване дало би дуговину тяглу. Але окружуюча єго атмосфера значно холоднійша, хотяй також розпалена, повна різних газів. Та атмосфера абсорбує деякі лучі ядрової дуговини і викликає в сей спосіб явище лній Fraunhofer'a.¹⁾

В дальших уступах своєї праці критикує Kirchhoff теорію Wilson'a і Herschel'a. Він думає, що та теорія мусіла би навіть тоді упасти, наколиб жадної новійшої і ліпшої не виставлено. Супротивляє ся она іменню всяким правилам фізики. Удержанє ядра в стані темнім і зимнім є в сусідстві так горячої фотосфери не можливе. Через провід розігрілаб ся наперед атмосфера а опісля і само ядро. Доставив на се практичного доказу Draper, теоретично розслідує ще попередно сам Kirchhoff. В виду того конечно є нова теорія сонячних плям і єї виставляє автор. Она подібна до здогадів Galilei'ого та Кеплера, але ріжнить ся від них о стілько, що здогад від науково виробленої теорії.²⁾

Kirchhoff виходить з того заложеня, що в атмосфері сонця відбувають ся подібні явища як в атмосфері земській. Льокальні обниження температури поводують на сонци так само як і на землі творєнє ся хмар. Сонячні хмари розуміє ся є цілком відмінної натури як земські. Ті повстають з пари водної, тамті з пар металічних в незмірно високій температурі. Наколи в атмосфері сонця повстане така хмара, то в лежачих над нею частях атмосфери послідує відповідно значне остудженє. Хмара перегороджує їх іменню від жерела тепла, се є сонячного осередка. Викликанє нею остудженє буде тим значнійше, чим она буде густійша і більша. Найсильнійше буде остудженє безпосередно понад хмарию і в ту сторону то є в гору она буде ся розширяти. Температура єї поволи опаде до тої степені, що она стане непрозорою і утворить тим способом осередок сонячної плями. В деякім віддаленю понад сею долішною хмарию витворить ся друга в місци, де стрінуть ся атмосферичні течії, що прямують до вирівнянє температури. Витворить ся ту знижка теплоти і гази зближившись в тім місци до конденсаційного пункту витворять ту другу хмару, значне рідшу від долішної, бо в висших

Berlin, 1861 ст. 63—95 і 1862 ст. 227—240. Пор. оцінки Faye'a в Comptes rendus т. LXIII. ст. 980 дд.

¹⁾ 1. с. ст. 83.

²⁾ 1. с. ст. 86.

регіонах атмосфери загальна її густота є менша. (Такі дві хмари, що лежать, над собою, можемо часто обсервувати і в земській атмосфері.) Долішня хмара дає початок осередкови плями, горішня, укладаючи ся концентрично до першої, творить притінок. Також иньші явища, котрі бачимо на плямах, вияснює Kirchhoff на підставі своєї гіпотези, а іменно проміннясте уложене притінка і розміщене плям в двох стрехах по обох сторонах рівника. Льокальне остуджене в сонічній атмосфері, що є репрезентоване плямою, викликає в безпосереднім сусідстві хмари атмосферну течію в діл та заразом рівнобіжну її виїшну течію в гору. Понад самою хмарою переходять ті течії взаїмно в себе. В наслідок того повстають ту горизонтальні течії, що прямують з великою скоростію від середини на зверх. Длятого то притінок виглядає промінясто. Материя хмари разом зі згаданими течіями стремить до віддаленя ся від середини та громадить ся при берегах хмари. Длятого ту пенумбра є темнійша. Великаньска сила тих заколотів вияснює після Kirchhoff'a велику змінність плям цілковито.¹⁾ Що до розміщення плям, є оно впливом нерівної теплоти ріжних околиць сонічної кулі. В наслідок високої температури на сонічнім рівнику повстає ту горяча течія і іде до бігунів, звідки знов приходить зглядно зимна течія до рівника. В місци, де ся ті дві атмосферні течії сходять, то є межі 10^0 а 35^0 геліографічної ширини, повстають найчастійше плями. Вкінци займає ся ще Kirchhoff' відносинами походень до плям. По его думці є се вибухи, а повстають в наслідок реакції температури в околицях плям. Стоять они з ними в тривкій звязи, бо ті вибухи себто похідні викликають стиканє ся верств ріжної температури, а через те творенє ся плям. З другої сторони плями здержуючи проміньованє тих околиць сонічної поверхні, що їх закривають, підносять їх температуру і стають ся причиною нових вибухів.

Теория Kirchhoff'a сама для себе не многих зискала собі приклонників. Перехилив ся на її сторону в перших літах своєї наукової праці Spörer і застосував її до виясненя дійсного руху плям. Сли пляма відбувала дійсний рух до заходу, приписував се Spörer істнованю східного вітру (Oststurm), що уносить з собою хмару себто пляму. Сли пляма відбувала рух ідє сходови, припускав Spörer вплив вітру западного (Weststurm). Рухи плям в ширині приписував Spörer також вітрам з відповідним напрямом.²⁾ Але має теория Kirchhoff'a иньше велике значінє. Она перша ввела в науку

¹⁾ І. с. 89.

²⁾ Пор. Comptes rendus т. 63. ст. 977.

властиве загальне поняття про будову сонця, оперте на аналізі спектральній, котрої здобутки мусіли від тепер узглядняти всі учені, если хотіли виставляти нову теорію сонячних плям. Причиною малого розповсюдження теорії Kirchhoff'a була обставина, що она не толкувала, длячого плями представляють ся непередженому навіть обсерваторови яко заглубленя. Приклонники сеї теорії старали ся що правда доказати, що той виїшний вигляд плям є оптичною ма-ною. Spörer так виражавсь аж до недавнього часу. Але те нікого не переконало так, що около 1865 р. знов ся збільшило значіне теорії Wilson'a і Herschel'a, підпертої в Англії Herschel'ом молодшим а у Франції головнo Chacornac'ом, славним зі своїх щасливих „польовань на планети“.

John Herschel тепер по раз перший сформулував свою нову теорію, котра опирає ся на слідуючих основах. Атмосфера сонця в наслідок ротації підлягає сплюсненню в околицях бігунів, підчас коли в околицях рівника повстає набренілість. Через промінюване обнижає ся температура сонячної поверхні при бігунах, а при рівнику зглядно підвищає ся, бо ту згрубіла верства атмосфери перешкаджає сильнішому промінюванню. В наслідок тої різниці в сонячній температурі, що є цілком аналогічна до таких же різниць в земській атмосфері, повстають і на сонці пассати і дві полоси бур, котрі викликають повставане отворів в фотосфері — отже плям. Повстають там іменнo цикльони в наслідок зіткнення течії ідучої від рівника, з течією, що іде від бігуна.¹⁾

Chacornac держав ся ще чистішої теорії Herschel'a. Вважав він плями сонячні наслідком вулканічних вибухів на сонці і шукав в їх розміщенню аналогії до вулканічних пасем Buch'a.²⁾ Опирав ся він на схожости сонячних плям а вулканічних кратерів.³⁾

В тім часі (около 1865 р.) виступили однак на тім поли два учені, котрих погляд був протягом довшого часу в тих справах рішачючий. Були се: французский астроном Faye та італійський патер Secchi. Поставили они рівночасно і від себе незалежно в літах 1864 і 1866 майже цілком ідентичні теорії.⁴⁾ Ось їх зміст.

Сонце є величезна куля зложена з розпалених газів. Виїшна єї обволока, що повстала в наслідок остудження, відгриває меньше

¹⁾ *Pop. Comptes rendus* т. LX. ст. 94 Young о. с. ст. 166 дд.

²⁾ *Comptes rendus* том LX. ст. 62.

³⁾ *Ibidem* tome LXII ст. 1095.

⁴⁾ А не в 1868 як думає Young о. с. 167. Secchi оголосив свою теорію по раз перший в *Bolletino meteorologico* Novembre 1865. Faye в *Comptes rendus* т. LX. (1865).

більше таку роль як в штучних світлах ті частинки сталих тіл, що жарять ся в полум'ї пр. світляного газу і дають много сильнїйше світло, як би дав сам газ. Мимо того отже, що є холоднїйша, світить фотосфера далеко сильнїйше, чим внутро сонця. В сончній атмосфері панують вічні течії в гору і в діл по лїніях прямовісних. Они викликають нитковату структуру у фотосфері і грануляцію. Де течії в гору будуть інтензивнїйші, матерія фотосфери ділить ся і творить отвір. Через сей отвір дивимо ся на масу газову сончного внутра, котра має слабу спосібність світчення в порівнаню з фотосферою, що є наповнена жаріючими частинками металів. Той отвір, крізь котрий видобувають ся на зверх розпалені гази, представляє ся нам яко сончна пляма.

Гає толкує на підставі своєї теорії також дійсний рух плям. Плями є іменно, як згадано, впливом течій, що ідуть з середини сонця прямовісно в гору. У свого жерела мають отже ті течії далеко меньшу лїнійну скорість оборотову, чим частинки сончної поверхні під тою самою геліографічною шириною. Прибуваючи з тою меньшою скорістю на поверхню сонця мусять плями в загалі викликати припізнене ротації.¹⁾

Тая теорія була так проста, що Young виражає свій жаль, що показала ся неправдивою. Звалили єї іменно англійські астрономи на підставі власне дальшого розвитку спектральної аналізи. De la Rue, Stewart і Loewy а іменно N. Lockyer звернули увагу на обставину, що в разі правдивости гіпотези Гає'ого і Secchi'ого дуговина осередка плями мусїлаб ся складати з кількох ясних лїній. Тим часом, як се і сам Secchi мав невдовзі спосібність бачити, дуговина плям є абсорпційна.²⁾ Астрономи англійські, особливож Lockyer, відкрили при помочи спектроскопа, що понад плямами лїнії водня підпадають пересуненню і вносили звідси на істноване там зступних течій „down rush“. Те робило їх приклонниками теорії Kirchhoff'a з тою модифікацією, що причиною витвореня ся хмари вважали они сю зимну течію down rush, що мала викликати льокальне остужене отже і льокальне придушене світла. Першій теорії Гає'а закинули єще й те, що він вважає внутро сонця горячїйшим від фотосфери, а рівночасно темнїйшим. Тимчасом будучи горячїйшим мусїло би се внутро бути прозачне, отже пропускати світляні лучі части фотосфери, що лежить на против.

¹⁾ Comptes rendus tome 60. ст 143, 146, 470.

²⁾ Sirius т. III. ст. 83.

Ті заміти англійських астрономів дали знов теорії Kirchhoff'a на певний час перевагу, іменно коли Spörer подав до неї знов певну модифікацію. Після него є плями наслідком сонячних вибухів, котрі бачимо яко протуберації. Ті вибухи водня підносять частини фотосфери в гору. Понад ними повстають темні хмари з продуктів вибуху, котрі збирають ся в один комплекс під впливом течій атмосфери, що прямують з сусідніх зимніших місць в горячішу околицю вибухів. Ціла та хмара западає ся в глибину і виїсна єї часть своїм промінчастим уложенем вказує істноване і напрям згаданих збіжних течій.

Але у Франції теорія Kirchhoff'a не була популярна і коли упали перші теорії Faye'ого і Secchi'ого, повстало через певний час велике замішане понять в тім напрямі. Sonrel¹⁾ пропагував погляди Warren'a de la Rue і товаришів, твердячи, що плями повстають під впливом течій зступних в сонячній атмосфері, а їх рух походить з того, що атмосферні вири уносять їх в різних напрямках. Vicaire²⁾ ще в 1872 р. пропонував вернути до гіпотези Wilson'a і Herschel'a з тою тільки зміною, що сонячне ядро належить вважати огнисто-плинним або сталим, але розпаленим. Оно будучи далеко темнійше від фотосфери витворює осередок плями. Дійсний рух плям є імовірно наслідком течій на плинній поверхні сонця. Навіть Janssen, дуже визначний дослідник в області сонячної фізики, говорячи про устрій сонця цілком не розбирав kwestії сонячних плям, згадуючи лиш се, що они здають ся бути заглубленнями чи отворами в зверхній околиці сонця.³⁾ В тім часі зискала прихильників навіть та дуже первісна теорія, що сонце палить ся, а продукти спалення в роді углїв або попелу витворюють плями.⁴⁾

Значний пролом зробило в тім замішаню велике діло Secchi'ого під титулом *Le soleil*, котре мимо що вийшло підчас німецько-францускої війни, відразу звернуло на себе увагу учених. Її перша книжка, що обняла цілість нашого знання про сонце, причинила ся она отже не мало до впорядковання понять і облегчила наукову дискусію. Дотепер треба було матеріяли до неї збирати з різних розвідок, часописів і самостійних творів. Для нас важний є твір Secchi'ого ще з тої причини, що находимо в нїм другу з ряду те-

¹⁾ Comptes rendus tome 69. ст. 527 дд.

²⁾ Comptes rendus tome 75 ст. 528.

³⁾ Comptes rendus tome 68 ст. 312 дд.

⁴⁾ Pop. Reis. Die Sonne. Mainz 1869.

орію того ученого. Она розпочинає ряд теорій сонічних плям, котрі повстали при початку осьмого десятиліття XIX. століття.¹⁾

Фотосфера складає ся після теорії Secchi'ого зі скондензованих газів, котрі цілком подібно зберігають ся в розпаленій сонічній атмосфері, як хмари зложені з пари водяної в земській атмосфері. Їх вишній вигляд є цілком однаковий, так само спосіб повставання і т. д. На тій підставі вияснює Secchi наперед ту великаньську змінність плям. Не треба в цілі вияснення єї приймати, що цілі плями з так великою швидкістю відбувають свої зміни і рухи. Вистарчить прийняти тільки локальну різницю в температурі, котра викликає в данім місці конденсацію газів, а поза ній дозволяє їм вернути до первісного стану. Аналогічне явище становлять ті хмари, що мимо сильного вітру здають ся постійно перебувати коло гірських вершків. В тім случаю воздух насичений водяною парою перебуває регіон низької температури — замінює ся отже в обсягу сего регіона в хмару, щоби поза ній знов прийняти давній стан сціпнення. Так само зберігають ся сонічні плями і творенє ся їх полягає на тій самій основі. В дальшій тягуні своїх розслідів застановлює ся Secchi над різними можливими теоріями сонічних плям. Плями можуть бути або 1) жужлі, що плавають по плинній поверхні сонця, або 2) маси диму чи хмари, що в певній висоті уносять ся понад фотосферою, або 3) є се остуджені маси газів, тяжші від свого оточення, котрі з тої причини западають ся до певної глибини в огнисту масу фотосфери. Четверта евентуальність булаб: плями є місця, де в наслідок дуже високої температури газів, що добувають ся туди з сонічного внутра, маси фотосфери переходять в стан газовий. Темнота тих місць походить звідси, що з одної сторони нема ту світлячої фотосферної маси, а з другої сторони, понеже знаходять ся ту слабосвітлячі гази, що абсорбують майже все світло, що іде з внутра сонця.

Перша евентуальність є неможлива. Супротивляє ся їй велика змінність величини і виду плям — незгідна зі сталим станом сціпнення, дальше рухливість протічка, що була б неможлива, наколиб фотосфера була плинна. Другу евентуальність зробив підставою своєї теорії Kirchhoff. Secchi закидає єму, що не толкує заглиблень, які становлять найвиднійшу ціху плями. Інші закиди Secchi'ого²⁾

¹⁾ Результати дослідів Secchi'ого і єго теорія знаходять ся на ст. 107 дд. і 552 дд. німецького видання.

²⁾ о. с. ст. 112.

полягають на недокладнім зрозумінню теорії Kirchhoff'a. Оставала би отже до вибору третя і четверта евентуальність. Secchi вибрав зразу четверту, бо здалося йому неімовірним, щоби плями будучи центрами льокального остудження могли ся так довго удержати мимо сусідних, так горячих вибухів. Друга теорія Secchi'ого звучить отже: Плями є місця горячіші чим околиці, що їх отружають. Горячо, що там панує, улєтучує ясні хмари фотосфєри цілковито, так що они стають прозрочні, а абсорбуючи сьвітляні промінї, що їдуть з внотра сонця, справляють, що пляма здає ся темною. При-тінок повєтає в наслідок течий в оточичній атмосфері сонця, котрі концентрично прямують до місця горячішого, провадячи з собою пірвані хмари фотосфєри. Звідси пенумбра має промінясту будову. Принєсєний материял змінє ся в наслідок горяча в газ так довго, доки того горяча стане. Потім заливає холодайша фотосфєра зі всїх сторін пляму.

Тїй другій своїй теорії, що була тільки модифікацією першої, вірив Secchi так сильно, що перечєне єї правдивости клєв рівним перечєню очевидним обсервациям і всїм фізикальним анальоїям. Але не припускав Secchi, хоч і як був досьвідчений, як капризною наукою є сонїчна фізика. По пару лїтах висказав він іменно цілком противну, з ряду третю теорію. Але понєже на змїну поглядів Secchi'ого не мали мали вплив теорії, що повєтали в тїй кільк-лїтній промежутці часу, то мусимо найперше їх представити. Є се теорії: Zöllner'a, Faye'a (друга) і Reye'a. Хронологічним ладом начнемо від теорії Zöllner'a.

Теорія єго належить до жужлевих, котрих праотцем є Симєон Marius, сучасний Galilei'ому і Scheiner'ови. В новїйших часах найшла та теорія приклонника в Gautier'i, що то відкрив звязь періода сонїчних плям з земским магнетизмом. Виравив він єї кілька разів, але без блишого наукого вясненєя.¹⁾ Науково опрацював теорію жужлеву Фридрих Zöllner і вчинив се так основно, що єго теорія сонїчних плям є зі всїх, які коли небудь були виставлені, найстаранїйше викінчена і опрацьована.²⁾ Всї свої виводи опирає Zöllner

¹⁾ Gautier. De la constitution du Soleil. Archives de Genève т. XVIII. 209. XIX. 265. XXIV. 21.

²⁾ Теорія Zöllner'a представлена на підставі єго розвідок в Vierteljahresschrift der astronomischen Gesellschaft т. IV. ст. 172 дд., Über die Periodicität und heliographische Verbreitung der Sonnenflecken. (Berichte über die Verhandlungen der königlichen sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig. Math. phys. Classe т. XXII. 1870 ст. 338—350.) Über die Temperatur und physische Beschaffenheit der

на припущенню, що сонце є розпаленою кулею але не газовою, а огнисто-плинною. Температура сонця виносить після його дослідів середно тільки 27700°C (Границі: 29.500°C і 26.000°C), щоби дійсно промавляло за станом плинним сонячного гльоба. Навіть у внутрі, де температура після Zöllner'a має виносити 68.400°C , не можуть існувати гази задля великого тиснення. Понад тим розпаленим морем знаходить ся розпалена газова атмосфера, в котрій плавають розпалені металічні хмари, що творять фотосферу. Значіне сеї атмосфери для льокальної температури на сонячній поверхні є під певним зглядом таке саме, як значіне атмосфери земскої для земскої температури. Де атмосфера сонця є випадково чиста і вільна від хмар, там зараз слідує сильнійше чим деінде промінюванє. За сильнійшим промінюванєм іде льокальне остудженє, а в наслідок него повстають на плинній поверхні сонця жужлеві острови, що ся нам представляють яко сонячні плями. Втворене ся жужлів є не тільки наслідком, але і причиною остуджуваня ся околиці. Понад жужлевым островом повстають в сонячній атмосфері забурєня, що переходять часом в нагальні бурі, котрі викликають понад плямою нові конденсації, хмарної вже натури. Они представляють ся нашим очам яко притінки.¹⁾

Повставши в сей спосіб, існує пляма так довго, доки удержить ся се льокальне остудженє а враз з ним жужлевий остров. Поволи однак зачинає льокальне остудженє уступати, головно в наслідок того, що жужлевий остров, що творить пляму, перешкаджає промінюваню верств, що під нею лежать і викликає в них великий зріст теплоти. Те підвишенє температури безпосередно під жужлевым островом вакликає его розтопленє; потім знов слідує рівновага в температурі околиці зайнятої недавно сонячною плямою.

То є головний ескіз теорії Zöllner'a, котра, як вже на перший погляд бачимо, має много точок схожих з теорією Kirchhoff'a. Але не висказав єї Zöllner так побіжно. Підприняв він глибокі математичні дослїди над стиканєм ся тіл цїпких і плинних взагалі і на тій підставі додав много доповнєнь до своєї теорії.

Що до виїшного вигляду і природи плям виступає Zöllner проти підставовому твердженю Kirchhoff'a, що плями є хмарами. Виходячи з дослідів самогож Kirchhoff'a доказує іменно Zöllner,

Sonne. I (Ibidem ст. 103—123), II (Ibidem т. XXV (1773) ст. 158—194), Über den Aggregatzustand der Sonnenflecken (Ibidem т. XXV. 1873. ст. 505—527). Пор. також die Natur der Sonnenflecken Gaea т. IX. ст. 650—662.

¹⁾ Über Periodicität etc. I. c. ст. 339.

1) що ті хмари не моглиб бути видимі, 2) що они не моглиб так довго остояти ся над поверхнею сонця при своїй нвешій температурі, а великій змінности і рухливости.¹⁾ За найліпший доказ против хмаристої природи плям вважає Zöllner брак на сонци поясів хмар, які бачимо пр. на Юпітері.²⁾ Для вясненія темної краски і довготривалости плям конечно є на думку Zöllner'a прийняти, що осередки плям мають сталвий стан сціпненія. Загальний вид плям вважає також Zöllner лійковатим, вясняючи тим способом явище обсервоване Wilson'ом. Думає він іменно, що в наслідок обниження температури понад осередком плями і в наслідок воздушної течії з гори на діл, котра ся з тої причини витворює, хмари пенумбри похиляють ся з виї до осередка і витворюють над ним лійковатий отвір. В наслідок того виїшний край притїнка лежить в ровени сьвітячої верстви хмар (фотосфери), сам же осередок значно нисше.

Дійсний рух плям толкує Zöllner також на підставі своєї теорії, а навіть уважає єго одною з головніших підпор єї правдивости. З табелі геліографічних ширин, уставленої Carrington'ом, видить Zöllner, що ротаційні кути двох точок на поверхні сонця, котрих геліографічна ширина ріжнить ся о 1° , виказують ріжницю 1.6° . В наслідок того мусїла би пляма 1° проміру, наколиб складала ся з хмар, змінитись вже по кільканацяти (12—13) днях в пояс довгий на 20° , а пляма 3° проміру змінила би ся по одноразовій ротації в пояс довгий на 120° . Повеже такі случаї не трапляють ся, то і не можна говорити, що плями мають природу хмар.³⁾ Плями після теорії Zöllner'a можуть бути тільки жужлями, що пливають по плинній поверхні сонця. Рух власний плям викликають існуючі в сонячній атмосфері течії, що уносять жужлї независимо від ротації в ріжні сторони. Ті течії можна взагалї подїлити на дві головні класи: полуденникові і рівнобіжникові. Полуденникові дадуть ся знов подїлити на два роди. Одні з них ідуть від бігунів до рівника, а причиною їх є поверхневе терте течій, що ідуть в сонячній атмосфері від бігунів до рівника.⁴⁾ Другі полу-

¹⁾ Über den Aggregatzustand der Sonnenflecke l. c. ст. 505 дд.

²⁾ Über das Rotationsgesetz der Sonne etc l. c. ст. 93.

³⁾ Über das Rotationsgesetz der Sonne l. c. ст. 93. Сей закид Zöllner'a Kirchhoff'ови полягає на похибці. Zöllner проміняв ту степенї за мінути. Ріжниця межі кутами ротаційними місць о 1° геліографічної ширини від себе віддалених вивосить не 1.6° , а $1.6'$. Отже пляма 3° проміру змінила би ся в 120° довгий пояс аж по 60 ротаціях. Pop. Reye Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen ст. 177.

⁴⁾ Rotationsgesetz l. c. ст. 58.

денникові струї йдуть від рівника до бігунів в наслідок різниці температури. Атмосферні струї, що йдуть від бігунів до рівника, збочують в наслідок ротації сонця і стають східними вітрами, котрих скорість збільшає ся, чим більше они наближають ся до рівника і досягає максимум в його околицях. Ті вітри викликають поверхневим тергем припізнєне в ротації сонічної поверхні, котре в теорії булоб найсильнїйше на рівнику.¹⁾ В теорії отже скорість обороту булаб на рівнику найменша. Що річ має ся зовсім противно, се справляє прямовісна воздушна течія при рівнику. В наслідок вищої ту температури воздух уносить ся в гору. Та прямовісна струя рівноважить горизонтальну в цілости так, що поверхневі верстви сонця зістають виключно під впливом своїх спідних верств, що порушають ся рівномірно але відносно скорше. Для того скорість обороту є у рівника найбільша, а меньшає в мірі, як зближаємо ся до бігунів. В часі максимум сонічних плям бігунові струї є слабші в наслідок тертя о численні плями, що находять ся тоді на поверхні сонця. Для того тоді сильнїйший є вплив долїшних верств, що відбувають скоршій оборот, отже ротація взагалі скорша (як се вже нераз завважано).

Сонічні плями відбувають рух власний не тільки під впливом струй сонічної поверхні, що їх уносять, але і під впливом вітрів. Вітри віючи в ту саму сторону, в котру іде течія, посувають жужлеві острови ще скорше, слиж віють в сторону противну, задержують в руху плями, а навіть самі течії, при чім плями ділають як острови на ріках.²⁾ Найсильнїйшим може сей вплив стати під час часового максимум т. є. під $\pm 17.5^\circ$ геліографічної ширини. Ті локальні забурєня викликані вітрами є причиною незгідности обрахованих позицій плям з обсервованими. Досліди Spörer'a доказують, що ті різниці власне найсильнїйше виступають під час часового максимум і то в максимум місцевім.³⁾ Дійсний рух плям залежить після Zöllner'a також від якості і степеня занурєня жужлевого острова, що творить осередок плями. Ті жужлі в наслідок зглядно значної грубости і скоршого руху у долїшних чим у горішних верств приймають (іменно що грубші) скієне положєне, так що передня часть є правильно піднесена, а долїшня глубше занурєна. Під впливом того великого тисненя стремить пляма, щоби ся перевернути. Часом бачимо без сумніву таке явище, пляма занурєє

¹⁾ Über das Rotationsgesetz etc. I. c. ст. 76.

²⁾ I. c. ст. 78 дд.

³⁾ I. c. ст. 81 дд.

ся та випливає в місці, де би ся находила, сли би ся була удержала на поверхні сонця. Часто пляма вказує ся дещо далше, поза місцем призначеним законом, по причині більшої скорости ротації внутрішніх верств сонця. Те тиснене від переду викликає також дуже часто сегментацію плями. Оно в полученю з сильними вітрами, що витворюють ся на берегах жужлевих островів, викликає вкінці часто розірване плями на кілька частий, котрі ідуть в різні сторони. Кожда з тих частий, сли не підпаде розтопленю, витворює над собою осібний притінок і стає нормальною сонічною плямою. Розірвані кусні ідуть в різні сторони під впливом згаданих льокальних вітрів з ріжними скоростями, бо є нерівно занурені в плинний масі сонічної поверхні.¹⁾ Степень зануреня є важний також для дійсного руху цілих плям. Він є змінний іменно підчас повставаня і заниканя плям, бо тоді жужлевий остров робить ся грубший або тоньший. А власне тоді, як доказали обсервації, дійсний рух плям є дуже змінний. Грубість жужлевого острова є з початку мала, а іменно в відносині до розтяглости. Потім она росте в наслідок поступуючого в перед остудження а також зглядно в наслідок обтоплєваня ся задної части жужлевого острова, яка в наслідок згаданого скісного положеня лежить в глибоких і горячійших верствах. Коли ся зближає пора заниканя плями, жужлевий остров стає знов тоньшим в наслідок приросту температури під ним.

Розгляньмо тепер, як толкує Zöllner на підставі своєї теорії розміщенє плям по поверхні сонця.

Наперед що до льокального розміщеня плям виводить Zöllner теоретично, що коло великої і виобразованої сонічної плями не повинні повставати нові, бо околичні відносини сему не сприяють. Натомість в періоді повставаня плями або групи може в тій самій околиці повстати більше плям. Теорія стоїть ту як видимо в цілковитій згоді з дійсностю. Загальне розміщенє сонічних плям є після теорії Zöllner'a условлене розміщенєм атмосфери чистої і вільної від хмар, котра облегчає промінюванє. Zöllner доказує на підставі своєї теорії, що такі атмосферичні відносини панують меньше більше межі 10° а 35° геліографічної ширини. Сонце має після Zöllner'a огнисто-плинну поверхню. В наслідок постійного промінюваня остуджує ся поверхня. Глубше лежачі, отже горячіші і специфічно легчі верстви сонічної матерії старають ся взнести ся в гору. Сли би сонічна куля була в супочинку, відбувало би ся

¹⁾ Ibidem ст. 88 дд.

таке кружене без перешкоди на кождім її місці. Але сонце обертає ся коло своєї осі і та его ротація викликає зміни в напрузі сили тяжести, котра, як знаємо, є завсїгди функцією ширини. Під сонічним рівником взносять ся отже постійно внутрішні горячі маси сонічної матерії в гору і відпливають ідь бігунам. Остудивши ся по дорозі в наслідок промінювання опадають і вертають до рівника. По дорозі через зіткненє ся зі спідними верствами знов ся огрівають і тим способом сей процес круженя постійно ся повторює. В висших ширинах сильнїйша іррадіація не позволяє на так сильну циркуляцію. Дятого рівникові околиці сонця, як се зрештою вже потвердили термоскопічні досліди, є теплїйші, а полярні околиці зимнїйші. Наслідки є такі самі як на землі. Повстають отже і на сонці по обох сторонах рівника в певнім від него віддаленю дві полоси сонічних пассатів. В тих полосах, подібно як і земських полосах пассатів воздух визначає ся чистотою і ясностію. Дятого в стрехах сонічних пассатів найчастїйше повстають плями.

Періодичність сонічних плям вияснює Zöllner слїдуючим способом.

Вважає він пересїчне число і поверхню сонічних плям, що в певнім періоді часу находять ся на поверхні сонця, за число сталє. В часі того періода може те число (сли не будемо узглядняти позасонічних впливів) бути зависиме 1) від евентуальної зміни середної температури сонця, 2) від взаїмної зависимости плям від себе в відносинах льокальних тих околиць сонця, де плями виступають.¹⁾ Можемо ту прийняти, що середна температура сонця не змінєє ся ані *in plus* ані *in minus* а то тим більше, що маємо на думцї час 11 лїт, отже зглядно дуже короткий. Дятого можемо в рахунок брати лиш взаїмні відносини плям. Они є, як з попередного знаємо, дуже змінні, щоби отже середна скількість і поверхня плям могли бути сталою величиною, мусить їх дійсна скількість колибати ся межі двома екстремами: *maximum* і *minimum*. Сли в тім колибаню заходить певна правильність, можемо сміло число і величину сонічних плям представити яко періодичну функцію часу. Після Zöllner'a є перехід від *maximum* до *minimum* сонічних плям і на відворот нїчим иньшим, як тільки великим вирівнуванєм тисненя і температури в сонічній атмосфері. В часі *maximum* панують на цїлій майже поверхні сонця відносини, що сприяють витвореню ся плям т. є. ясна і прозрачна атмосфера. Підчас *minimum*

¹⁾ Über Periodicität etc. I. c. 342.

річ має ся цілком противно. Час того вирівнювання є в обсягу певних границь ріжний; се зависить від спроможности проводження, від рухливости і від маси тіл, що творять плями, т. є. самих жужлів і лежачої над ними сонічної атмосфери. Середні вартости на означене тпх трох відносин будуть що найменше для довших часів сталі, а з ними і період сонічних плям. Розуміє ся, що по довших часах, коли ся теплота сонця зменьшить, змінить ся і час тревання періода. Довжина його буде щораз маліти, тахіма будуть щораз скорше по собі наступали, аж вкінці ціла поверхня сонця покриє ся оболочкою жужелиць, звіщаючи тим кінець орґанічному життю нашої планетарної системи.

Третою важнішою теорією, що повстала при початку осьмого десятка літ XIX. столітя, є друга теорія Faye'a. Як і инші сучасні теорії цілком новою она не є. Вже John Herschel висказував думку, що плями є воздушні вири в атмосфері сонця. В виду закидів, іменно зі сторони англійських астрономів з Kew піднесених проти першої его теорії, попав Faye на другу і розвів думку J. Herschel'a на підставі новіших наукових здобутків на тім поли. Теорія его не відразу повстала. Много заміток і закидів з ріжних сторін підношених зложило ся на сей кінцевий вид, що їй був наданий. Перший ескіз сеї другої теорії начертав Faye при кінці року 1872.¹⁾

Сонічні плями є після нової теорії Faye'a цикльонами, що врізають ся з гори в глибину атмосфери сонця. Они повстають в слідуєчий спосіб: Фотосфера відбуває свій ротаційний рух в ріжних геліографічних ширинах з ріжною скоростію. Наслідком того є численні вири в атмосфері сонця, котрі прямують до вирівняня ріжних скоростий у ріжних полос фотосфери. Поводять ся они подібно як водні вири або вертні воздушні нашої атмосфери і так само як наші цикльони ідуть за горішніми течіями воздуха, так і сонічні цикльони сліднують по течіях фотосфери. Рух в них є після Faye'a аступний, т. є. з гори в долину, длятого потягають они за собою в глибину сонічного ілюба околичні части горішних, отже зимнійших верств сонічної атмосфери, що головно складають ся з водня. В сей спосіб повстає в центрі вира придушене сьвітла і теплоти на так довго, як довго треває вировий рух. Вкінці водень потягнений в глибину розгріває ся на ново, іде в гору і вибухаючи творить

¹⁾ Comptes rendus т. 75 ст. 1664 дд. Ibidem т. 76 ст. 301 дд. Ориґінальний уступ Faye'a у Newcomb-Engelmann'a о. с. ст. 310—312 представляє, як виглядала его теорія в 1877 році.

протуберанції. Пенумбра повстає з остужених, потягнених в діл частий фотосфери, иньші части виром відкинені на бік творять вінець походень, що окружає пляму.

В цілі дальшого уґрунтованя своєї теорії констатує Гає, що різниця в скорості ротації є досить значна, щоби могла викликати вировий рух, бо виносить 24 m в 1 секундї на 1° геліографічної ширини. Таких вирів є на поверхні сонця незмірно много, дуже різної величини, бо не тільки плями, але і пори є такими вирами. Так само мають і земські цикльони дуже різну величину. Сонічні цикльони мають подібно як земські напрям до ділення ся на два або більше центрів обороту. В той спосіб з одного вертня повстає два, або більше, котрі ся потім взаїмно відпихають. Дійсні обсервації слідів вирового руху, пр. на уложеню ниточок притінка, після Гає'а длятого є так рідкі і трудні, бо хмари притінка закривають звичайно перед нами те, що ся дїє ві внутрі плями.

Періодичність сонічних плям толкує Гає дуже замотано і неясно. Згадаємо тільки те, що він єї робить зависимою від ваганя в формі внутрішних верств, на котрі скондензована материя фотосфери спадає в виді дощу. Такий рясний і тяжкий дощ мусить поволи змінити час ротації тих верств.

Ахиллевою пятою теорії Гає'а була все та обставина, що з неї без сумніву виходило, що сонічні цикльони вертять ся па північній півкулі сонця в ту саму сторону, що і вказівки годинника, а на полудневій півкулі в сторону прямо противну. Через те саме мусіла б упасти аналогія з земськими цикльонами, бо ті ведуть ся прямо противно. Длятого Гає перечить прямо в очи дотеперішним результатам метеорологічних дослідів над цикльонами і уперто твердить, що земські цикльони також на північній півкулі обертають ся як вказівки годинника. Сучасно приписав Гає земським цикльонам цілком неправдиву власність, що їх рух є зступний, бо того треба ему було, щоби перевести аналогію з сонічними цикльонами, себ-то плямами, в котрих без сумніву виказали зступний рух спектроскопічні обсервації. Також та теза стоїть в суперечности з законами метеорології і надає теорії Гає'а характер великої довільности. Одинокa різниця, яку найшов Гає межі сонічними а земськими цикльонами, полягає на тім, що коли земські цикльони мають рух прогрессивний в ширині і довжині географічній, то сонічні цикльони відбувають тільки еліпсоїдальні осциляції в 80—160 днях, амплітуди 2° — 4° .¹⁾

¹⁾ Пор. рисунки Гає'а Comptes rendus т. 76 ст. 389.

Вже від самого повстання не бракувало теорії Гає'а численних і завзятих противників. Зараз з початком 1873 р. виступив против нього Secchi і підніс найважніший та дуже трафний закид, що іменно ротаційний рух є у плям лиш дуже рідко видимий. Пересічно лиш 5—6 плям в році виконують ротаційні рухи, або мають притінок спіральної будови.¹⁾ Під впливом власне того закиду додав Гає пізнійше, що оборот сей закриває нам пенумбра зложена з нагромаджених хмар. Але Secchi знов виказав, що є се припущенє дуже довільне, котрого жадним способом не мож доказати. Острійше взяв ся до Гає'а французский фізик Vicaire.²⁾ Закинув він теорії Гає'а, що она не толкує неправильного і змінного виду плям, недостаточнo толкує темну їх краску. Цілком не толкує теорія Гає'а явищ ірануляції, розміщення плям, їх руху власного і т. д. Деякі вивішні закиди Vicaire'а полягають що правда тільки на непорозуміню, але ті, що є узасаднені, не одержали від Гає'а достаточної відправи.

Так само дуже слабi є відповіді Гає'а на закиди Tacchini'ого. Звернув він їх проти Гає'а з тої самої точки погляду, що Secchi, іменно завважав підчас своїх довголітніх обсервацій, що спіральні рухи є у плям дуже рідкі а ротація їх коло осі відбуваєсь дуже часто в противнім напрямі, як сего теорія Гає'а вимагає.³⁾ Гає жадного аргумента проти тим закидам не міг навести. При поновлюваню своєї теорії огранчив ся він лиш на виясненю ірануляції і періодичности. Ірануляцію вияснює він приймаючи, що ціла поверхня сонця є покрита такими цикльональними вирами мінімального проміру 1". Становлять они тз. пори і своїм густим виступуванєм викликають явище ірануляції. В полосах сонячної поверхні, що тому сприяють, розширюють ся ті пори в плями — т. є. більші цикльони, котрих вісь однак завісїди ся находить в центрі первісної пори. Такий цикльон витворюючий пляму триває через певний час, потім знов зменьшає свій обвід та вертає до скромних розмірів пори.⁴⁾ В той спосіб толкує Гає ірануляцію, спосіб витолкованя періодичности цілком аналогічний до способу Zöllner'a.⁵⁾

Найважнійші однак закиди підніс против теорії Гає'а американський учений Young. Правда що співчасно він вважає теорію

¹⁾ Comptes rendus tome 76. 1873. ст. 254.

²⁾ Ibidem ст. 703 дд.

³⁾ Comptes rendus tome 77 ст. 606.

⁴⁾ Comptes rendus tome 77 ст. 626.

⁵⁾ Поп. Comptes rendus tome C. ст. 593 дд. Sirius т. XVIII ст. 121.

Гає'а найімовірнійшою.¹⁾ Young'a разить передовсім брак ротаційного руху у плям. Потім звертає він увагу на обставину, що навіть тоді, коли можна у плям сконстатувати ротацію, она не відбуває ся на тій самій півкулі в одну сторону, але противно часто ся лучає, що плями належачі до тої самої групи, ба навіть поодинокі часті складові тої самої плями відбувають оборот в прямо противні сторони. Дальше є різниця ротаційних скоростей рішучо за мала, щоби могла викликати ротаційний рух. Вносить она для двох точок сонічної поверхні, що лежать під 20° геліографічної ширини і є від себе віддалені о сонічну $l' = 0.90$ географічних земських миль на день. А прецінь сонічна мінута велика на 26.5 географічних миль.

Против теорії Гає'а піднесено ще з иньшої сторони закид — він є в звязи річевій з повстанем нової цикльональної теорії плям. Іменно в р. 1873 Tarry, взагалі признаючи теорії Гає'а много імовірности, зробив єму в подробицях сей закид, що земські цикльони є прецінь получені з опаданем барометра і рухом атмосфери з долу в гору а не з гори на діл.²⁾ Гає відповів на те з великою певністю себе, що цикльони се явища цілком ріжні від сонічних циклонів, а зрештою і межі земськими лиш певні роди мають рух воздуха в гору.³⁾

Але невдовзі потім, переглядаючи найновішу літературу понав Гає на книжку німецького ученого Теодора Реє п. т. *die Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen in der Erdatmosphäre mit Berücksichtigung der Stürme in der Sonnen-Atmosphäre*, що була написана ще в початках 1872 р. Реє не знаючи ані про праці Гає'а ані про закид Tarry'ого, поставив самостійну теорію, що виясняє сонічні плями подібно як теорія Гає'а з модифікацією, пропонованою Tarry'м з пильним узглядненем теорії Kirchhoff'a та дослідів Spörer'a.

Реє ставить на ст. 178 своєї книжки⁴⁾ сліднуючу тезу: Плями сонічні се хмаристі продукти конденсації в глибших районах сонічної атмосфери, котрі подібно як маси хмар наших земських циклонів відновлюють ся від долу. А творять ся они в спосіб сліду- ючий. В місцях, де температура поверхні сонця осягає свої льо-

1) Comptes rendus т. 95 ст. 1310 пор. Young die Sonne ст. 170.

2) Comptes rendus т. 77 ст. 44 дд.

3) Comptes rendus т. 77 ст. 1122.

4) Пор. також Comptes rendus т. 77 ст. 5.

кальні тахіта, вносять ся гази і металічні пари, що становлять сонячну атмосферу, в гору, де ся остуджують і згущають творячи якби темну хмару, що абсорбує в значній мірі світло і тепло, що приходить з долу від властивої поверхні сонця. В наслідок того стає ся там хмара осередком остудження і темноти. Коло неї з подвійною скоростію вистрілюють в гору прямовісні течії. Они уносять з собою рештки скондензованих хмаринок і творять з них при-тїнок. Ротация сонця ділаючи на такі хмари так само, як ротация землі ділає на земські хмари, викликає оборотовий рух, замінюючи хмару в циклон. По хмарі того не видно, як не видно і по земських хмарах, що товаришать циклонові. Они як знаємо все є одностайні і ніколи не мають спірального уложеня. — Сонячні циклони викликають подібно як і земські рух атмосфери в гору. Они повстають в двох стрехах по обох сторонах рівника з тої причини, що розложенє температури є на сонці таке саме, як на землі, а крім того понеже атмосфера є під сонячним рівником значно вища як у бігунів. Про властивий рух сонячних циклонів не много може Reye сказати, бо і у земських циклонів не пізнано його і до тепер. Серментанція відбуває ся і у одних і у других однаково. Тільки в способі зникання є ріжниця. Плями зникають далеко скорше чим земські циклони.

Reye цілком не має претензій, щоби єго теорія була ві всіх точках досконала, але мимо своєї скромности приписує головній своїй тезі: плями, се сонячні циклони, значіне більше чим звичайній гіпотезі.¹⁾

Переходячи всі важніші теорії сонячних плям, що повстали в початках осьмого десятка лїт XIX. віка, належить вкінці звернути увагу на третю теорію Secchi'ого, котра появилася як би на закінченє світлого ряду тих теорій. Перші її почини подав Secchi вже в 1873 році²⁾ і держав ся її до кінця життя. Був се отже мов би результат кількадесятилітньої праці — для того належить сей останній вислів поглядів Secchi'ого обширно представити. Та теорія сонячних плям є властиво лиш частию загальної теорії сонця поставленої тоді Secchi'м, але її цілої представити ту не можемо і мусимо ся ограничити лиш на тих її частях, що відносять ся до істоти самих сонячних плям. Сонце після Secchi'ого не находить ся ніколи в стані цілковитого супочинку. З ріжних причин повстають на єго

¹⁾ Reye. Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen ст. 185.

²⁾ Comptes rendus т. LXXVI. ст. 250 дд., 519 дд. звязке а докладне представленє своєї теорії подав Secchi в Newcomb. Engelmann о. с. ст. 302–310.

поверхні заєдно вибухи. З них найліпше видимі є для нас протуберанції, що складають ся з розпаленого водня. Але при тих вибухах з розпаленим воднем є часто змішані металічні пари. Они мають більшу густоту і питимий тягар, длятого не можуть при вибуху досягнути тої висоти, що маси далеко лекшого водня. Ті металічні пари складають ся головню з пар соду, маїну, желіза, вапня, котрі як знаємо викликають в сонічній дуговині явище лїній Fraunhofer'a. Коли отже така маса металічних пар найде ся межі фотосферою а оком обсерватора, став ся абсорпция сьвітла дуже визначною і обсерватор має вражінє темної плями на фотосфері. Абсорпційні лїнії є в тій околиці ширші і менше виразні, а коли маса є достаточню густа і високо в гору винесена, видимо нераз навіть відверненє абсорпційних лїній. Відвертають ся найчастійше лїнії водня, котрий доходить до найбільших висот, а також лїнії соду і маїну, бо пари тих металів є також досить легкі. З того випливає: Сонічні плями повстають з металічних, абсорбуючих пар, що добувшись з внутра сонця і умістивши ся межі фотосферою а оком обсерватора, задержують для него велику часть сьвітла фотосфери. Ті пари є тяжші, чим окружаючі їх верстви сонічної атмосфери. Коли отже зможе ся сила вибуху, котра їх до такої висоти винесла, ті пари западають в глибину атмосфери і творять заглибленє, виповненє масою, що темнійша і більше абсорбує чим єї околиця. Длятого виглядають плями як заглибленя. Коли вибух, що дав початок плямі, є наглий і коротко триває, хмара, що повстала з металічних газів, під впливом горяча сусідних околиць фотосфери недовго розгріває ся і пляма никне. Часто однак вибух триває пару місяців, тоді і пляма удержує ся на поверхні сонця протягом кількох ротаційних періодів. Часом вибух, що як здавалось, вже кінчавсь, нараз відзискує свою силу і пляма, що туй-туй мала зникнути, знов росте і розвиває ся на ново. Змінність плям зависить від змінности вибухів, а ті, як знаємо з аналогії вулканічних вибухів на землі, є дуже капризні.¹⁾

Пляма складає ся з осередка і притінка. Притінок повстає з легких мрак і течій фотосферної матерії, котрі старають ся заляти внутрішню темну масу і часом яко ясні мости проривають єї на цілій розтягlosti. У кождої плями розрізняємо три періоди. В першім періоді: повставаня, темна хмара силою вибуху підно-

¹⁾ Щоби заховати звязь і хід думок Secchi'oro повторюємо ту много річий, які ми вже висше обговорювали.

ситься в гору і прибирає в наслідок сильного заворушення дуже неправильний, нероздвоєний вид. Часом вибух приймає вид і властивості вихру, котрий виносить темну хмару дуже високо, та творить неправильну набренілість довкола осередка новоповсталої сонячної плями. Она має тоді дуже неправильний притінок, або і (що частійше) цілком його не має. Сила вибуху і викликані нею рухи відзначаються незмірною швидкістю і нагальністю. На просторі кількох квадратних степенів фотосфера є тоді в постійнім заворушенню. Але невдовзі починає сила вибуху маліти і настає другий період розвитку плями: період спокую. В тім періоді винесена в гору темна маса опадає в діл і стараєся прийняти менше або більше округлий вид. Понеже она є тяжша від фотосфери, отже западає в її глибину та творить лійковате заглиблене. До сеї депресії пливе зі всіх сторін фотосфера в формі концентричних струй, щоби її залити, але коли вибух триває далі, то пляма удержується і прибирає круглий вид. Коли вибух переведеся, починаєся третій період: зникання, струї фотосфери заливають темне внутро плями, горячо сусідніх околиць довершає діла і пляма зникає. Істнуванє тих трьох фаз потверджають обсервації. Коли пляма підчас першого періоду свого істнування наблизиться до сонячного края, а має при тім значний промір, то місце її перебування зраджують вибухи металічних пар, а іменно соду, желіза і магну. Пляма в періоді спокую має звичайно круглий вид і є окружена красними походнями а також ясними огняними язиками водня і металічних пар. Але ті язики є вже низькі та незначні. В періоді зникання не показує пляма жадних металічних вибухів, часом тільки незначні вибухи водня; фотосфера, що їх окружає, є знов в ненастаннім руху.

Сонячні плями є отже тільки другорядним явищем. Їх повстанє і істнуванє є зависиме 1) від сонячних вибухів, котрі попереджають і витворюють пляму. 2) від спосібности абсорбованя світла у хмар, котрі повстають в наслідок тих сонячних вибухів. Вибухи самого водня ніколи пр. не викликають сонячних плям, лиш тільки походні. Але плями, хотяй є тільки другорядним явищем, прецінь дають нам найліпше понятє про насильні рухи у внутрі сонця. Число плям відповідає числу вибухів, а оба ті явища разом взяті є внішніми признаками діяльности сонця. Плями як знаємо виступають по обох сторонах сонячного рівника тільки до 30° геліографічної ширини і не виходить майже ніколи поза ту праницю. (Завважати належить, що трицятий рівнобіжник ділить кожду гемісферу на два, об'ємом рівні відтинки.) Полоси, в котрих найбільше плям ся знаходить, не мають сталого положеня, місцеві махіма

плям відбувають рух від рівника до бігунів. Дійшовши до певної ширини, звичайно до 30° , плями зникають, наступає звичайно тоді часове *minimum*, а потім знов вказують ся плями, але вже в околицях рівника, та знов починають свою мандрівку до бігунів. Слож розважимо, що фотосфера має також власний рух в довжині, котрий є найбільший під рівником, можемо з того заключити, що ціла фотосфера підлягає рухови вировому, що іде від рівника до бігунів в напрямі скіснім до полуденників. Теорія тих рухів фотосфери не є дотепер звісна; Secchi думає, що они є в звязи зі способом поствання і виобразування сонця. Діяльність сонця підлягає значним флюктуациям в періоді $11\frac{1}{3}$ літ. Она росте протягом 4 літ, а маліє прогягом 7 літ, отже далеко повільнійше. Она є получена зі змінами в земскім магнетизмі в спосіб дотепер незнаний. Можна припускати, що існує безпосередний електромагнетний вплив сонця на нашу землю, або що він є посередний: тепло викликане на землі впливом сонця ділає на її магнетизм. Можна з великою імовірністю прийняти, що етер, котрий наповняє простори нашої планетарної системи, не може бути зависимий від діяльності сонця, бож оно є центральним тілом тої системи. Були між ученими такі, що хотіли приписувати зміни в чинности сонця впливам планет, але ті послідні є занадто малі, щоби могли мати подібні наслідки. Наука доперва тоді потрафить вияснити причини періодичности на сонци, коли відкріє звязь тепла з електричностю, магнетизмом та гравітацією.

Нову свою теорію розвинув Secchi систематично в особнім письмі переславім S. Newcomb'у, котрий пишучи в 1877 р. свій підручник астрономії, просив найславнійших тоді геліологів, щоби коротко сформулували свої погляди на будову сонця, для его книжки. Крім Secchi'ого прислали Young, Faye, Langley, а тогдашні погляди Newcomb'a зібрав також коротко видавець другого німецького видання его книжки: H. C. Vogel. Погляди Faye'a не змінились від часу поставлення его другої теорії аж до р. 1877 цілковито, отже повторювати їх не будемо, але погляди ниньших згаданих учених коротко перейдемо, понеже кінець сімдесятих літ XIX віка є для геліографії дуже важною епохою, котру належить як найвиразнійше схарактеризувати.

Young вважає річню безсумнівною, що плями є заглубленнями в поверхні фотосфери. Їх темна краска повстає в наслідок абсорпційного ділання газів і пар, котрі наповняють їх вутро. Дуже часто, хотай не завсїгди витрискує водень і металічні пари довкола пенумбри. Понад осередком плями хромосфера є вгнута, імовірно існує

також зступна течія в середині плями. Що ся тичить причини повстання плям і їх вигляду, жадна дотеперішня теорія не вдовольє Young'a. Теорія Faye'a видає ся єму найбільше до правди подібною, але прийняти єї не може зі згляду на 1) брак систематичної ротації у плям, 2) їх дуже ріжні види. Однак теорія Faye'a має в собі якусь часть правди і може бути отвітно змодифікована, щоби вияснити згадані дві трудности. Young не пропонує на разі жадної модифікації теорії Faye'a в тім напрямі, але всі планетарні впливи вважає а *limine* неімовірними. Так само не може Young собі вияснити, в який спосіб впливають на себе заворушення на сонічній поверхні та земський магнетизм.¹⁾

Langley думає, що тепер (т. є. в р. 1877) можна вже з евіденцією видати суд про дотеперішні погляди на істоту сонічних плям, чи се є жужелиці на плинній поверхні (Zöllner), чи хмари (Kirchhoff). Але сей суд випадає у Langley'a дуже блідо, ба навіть трудно його вирозуміти. Langley вважає фотосферу цілковито газовою і зложеною з пар, котрі суть рідші і лекші чим найтонші хмариночки (*citrus*) нашої атмосфери. Обсервация плям вводять близьку звязь між телескопічними обсервациями фотосфери, а спектроскопічними хромосфери. Довели они, як думає Langley, до безсумнівного результату, що на цілій поверхні сонця ділає одна велика система внутрішньої циркуляції. Течії ведуть зі собою тепло витворене через конденсацію ві внутрі сонця на єго поверхню і забирають зі собою остуджений та сильно абсорбуючий материял. Та циркуляція сягає зглядно дуже глибоко і є в тривкій звязи з майже горизонтальними течіями, котрі безліч разів обсервовано в горішних веретвах фотосфери в сусідстві плям. З обсерваций плям набрати мож на думку Langley'a прямо переконаня, що ту ділає щось в роді циклонів. А темні є плями тому, що в їх глибині (єї вважає Langley дуже значною, ба незвичайною) находить ся „затемнююча атмосфера“, імовірно пірвана в діл згаданюю прямовою циркуляцією. Она то творить се шаре тло на котрім виглядають завішені хмари і хмарки фотосфери. Ся шара материя виповнює внутро плями і через него то дивимо ся в єї глибину, котра длятого видає ся так темною. В пньшім місци говорить Langley: Дотепер не поставлено ще жадної теорії устрою сонця, котра би вільна була від закидів. Але хотяй ще не найдено ключа до вияснення всіх сонічних явищ, то прецінь теорія Faye'a найбільше дає поясненє

¹⁾ Newcomb. Engelmann о. с. ст. 314.

Видимо отже виразно тільки те, що Langley є рішучим противником теорії жужлів, а перекилюєть ся до теорії хмар і то на спосіб Faye'a. Не можемо отже говорити про яку небудь самостійну теорію Langley'a, бо він анї не пробував вияснити дійсного руху або періодичности сонічних плям.¹⁾ Навіть те, що Langley сказав позитивно про сонічні плями, є дуже невиразне, навіть несміле і нерішуче. Таку саму побіжність і брак рішучости бачилисьмо уже у Young'a; Newcomb же перевисшає еще своїх американських товаришів під тим зглядом, бо анї словом не зраджує своїх поглядів на істоту сонічних плям та думає, що геліологія чекає поки-що на свого Newton'a.²⁾

Представивши тим способом погляди великих геліологів подивимо ся і на погляди кількох „малих“, що ту належать хіба зі зглядів хронологічних, бо на пробіг дискусії над істотою сонічних плям зовсім они не вплинули.

До теорії Herschel'a навіязує Lüdinghausen-Wolff. Думає він, що сонічні плями се отвори в фотосфері. Крізь них ми дивимо ся на саме ядро сонця. Оно не є в звичайнім значіню слова темне, але так розпалене, що наше око не може захопити так коротких світильних фільок.³⁾ Ту належить також висше згадана метеоритова гіпотеза В. Peirce'a. Твердить він, що плями повстають в наслідок спадання на сонце метеоритів, котрих перстень протинає его дорогу і через згрубіня в однім місці викликає що 11 літ maximum плям.⁴⁾ Така гіпотеза хіба в таким разі мала б певну претензію до научного характеру, елибисьмо прийняли, що не через безпосередне продертє фотосфери викликають метеорити повстанє сонічних плям, але посередно, в наслідок різниць температури, викликаних їх упаданєм. Для докладности додамо ще, що теория Reis'a найшла приклонника ві Франції в Vicaire'im, котрий також твердив, що сонце палить ся яко пальне тіло і продукти того спалєня творять плями; а також згадаємо про цілком оригінальну теорію електричну Planté'oro.⁵⁾ Видячи схожість межи ви́шним виглядом сонічних плям а наслідків електричного тока з батерії 400 елементів на поверхні бібули до фільтрованя, що є напущена солоною водою, ставить Planté ту електричну теорію. Думає він,

¹⁾ Newcomb. Engelmann о. с. ст. 314 дд.

²⁾ Ibidem ст. 302.

³⁾ Humboldt т. I ст. 347 дд.

⁴⁾ Young о. с. ст. 148.

⁵⁾ Comptes rendus т. 76 ст. 1541 дд. т. 77 ст. 40 дд.

що плями повстають наслідком електричних вибухів зі середини сонячного ядра, котре є наладоване додатною електричністю. (Так заключає Planté на підставі власних дослідів з розпаленими кулями). Сонце є для него тілом газовим, що покрите плинною оболочкою. Про ту гіпотезу не дасть ся більше сказати як те, що є оригінальна. Треба іменно завважати, що перенесене досвідів переведених в лабораторії в всесвітні простори є річ що найменше за сміла.

Рік 1877, а в кождім разі найпізнійше кінець сїмдесятих лїт XIX. віка можна вважати епохою рівно важною, як поява теорії старшого Herschel'a при початку тогож віка. Межи тими двома епохами лежить другий період розвитку геліології взагалї, а спеціяльно нашої відомости про сонячні плями. В тім періодї, дуже короткїм, сли єго порівняємо з попереднім, зробила наука прямо великанські поступи. Представилисьмо їм вже деінде, ту звернемо лиш уваги на перед на великанське число материялу, зискане в численних обсерваториях при помочи усовершених і урізнороднених інструментів і помічних средств. З них найважнійшим є без сумніву нововинайдений спектроскоп. Розсліджено подрїбно структуру фотосфери, плям, походень, відкрито протуберанції та корону, пізнано хемічний склад сонця і в головних чертах його будову при помочи спектральної аналізи. Наслідки тих обсерваций та відкрить були для пізнання явища сонячних плям дуже важні. Те пізнанє придбало собі іменно много всесторонности і докладности. Дійсний рух сонячних плям і їх періодичність стають від тепер сталими добутками науки і на тих підставах повстає кілька наукових теорій сонячних плям. Збирають они все знанє свого часу в тім напрямі і старають ся пояснити тайну сих явищ. Як в початках XVII віка, так і тепер двома головними дорогами пішли в своїх теориях учені. Одні вибрали теорію жужлеву — Zöllner і єго приклонники, другі теорію хмар — отже Kirchhoff, Secchi, а посередно також Faye і Reye, хотия головну ролю в витвореню плям признають цикльонам. В критичне обговорюванє тих теорій запускатись ту не будемо та зазначимо тільки, що ті теорії на довгий час вичерпали зміст сонячної фізики. Число і значінє теорій та гіпотез, що повстали по 1877 році, є так мале в порівнаню з тим материялом, що рік-річно виходить з астрономічних та астрофізичних обсерваторій, що кождий мусить признати, що як початок XIX. віка був під безперечним впливом гіпотези Herschel'a, так теперішні учені зістають під впливом

ріжних теорій з перед 1877 року. Не можна що правда заперечити фактам повставання пізнійших теорій, але того значіння, що колись теорії Zöllner'a, Kirchhoff'a, Secchi'oro, Faye'a, Reye'a мали, не втіла ніяка новіша теорія досягнути.

Для того то представляючи найновіші теорії та гіпотези сонічних плям, будемо їх групувати після найважнійших теорій другого періода нашого знання про сонічні плями.

Теорія Zöllner'a найшла в короткім часі значне число прихильників, головню тому, що була зі всіх теорій найосновніше оброблена. Вже в літах 1870 і 1871 висказали ся за сею теорією Respighi і Falb, у Франції Gazan.¹⁾ Крім того мали її потому прийняти Бредихин, Lohse і Spörer. Так бодай можна вичитати в першім німецькім виданю астрономії Newcomb'a на ст. 314, а відомість ту повторив Günther.²⁾ Тимчасом є она лиш в часті правдива. Бредихин дійсно висказав про фізичний устрій сонця ті самі погляди, що Zöllner.³⁾ Але Lohse є прихильником теорії хмар на спосіб Secchi'oro, а навіть в певній мірі і Kirchhoff'a, бо в значній часті опирає ся на Spörer'i, що є від Kirchhoff'a в теорії зависимий. Зміст теорії Lohse'ого такий: В наслідок нарушеня рівноваги в атмосфері сонця з вишніх причин (може планетарних впливів) прориває ся верства металічних пар і поветає вибух. Їго продукти остудивши ся опадають назад на поверхню фотосфери, викликають ту замішанє, вири і течії зі всіх сторін (звідси походить промінюватість притінка), котрі коли устане вибух, заливають пляму, що повстала з єго продуктів.⁴⁾ Так само Spörer ніде виразно не зазначив, що прихильаєть ся до теорії Zöllner'a. Повздержувала єго, як впрочім і других та обставина, що Zöllner прийняв для сонця сталий стан еціпнення, та що за тим ішло, занадто низьку температуру. Подібність до Zöllner'івскої теорії бачимо лиш в виясненю періодичности і дійсного руху плям.⁵⁾ На думку Spörer'a є періодичність викликана ріжницею в промінюваню рівникових а полярних

¹⁾ Sirius т. VI, 1871 ст. 42 Comptes rendus т. 83. ст. 658 і 1188.

²⁾ Навіть в другім виданю своєї книжки Handbuch der Geophysik т. I ст. 76.

³⁾ Newcomb-Engelmann о. с. ст. 325.

⁴⁾ Beobachtungen angestellt auf der Sternwarte des Kammernherrn v. Bülow zu Bothkamp. Heft III. 1875. ст. 45 дд.

⁵⁾ Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam т. II. 1880. ст. 79 дд.

околиць сонця. Ті різниці в промінюванню викликає знов різна густота хмарної оболонки сонця. Під рівником температура є вища, а звідти густота поверхневих верств менша. Ко бігунам температура обнижає ся, густота росте. Понеже промінюване безнастанно триває, різниця в густоті стає щораз більша — вкінці мусить слідувати вирівнане. Оно діє ся в той сам спосіб, що в наших земських морях т. є. посередством струй, але що сонце є газовим тілом, то вирівнане починає ся з більшою силою доперва тоді, коли різниці сильнійше зростуть, а те вимагає довшого часу — на сонці над 11 літ. Коли вирівнане доходить до кінця, тоді маємо часове мінімум сонічних плям; тимчасом в околицях бігунів відносини так ся змінили, що заходить потреба нового вирівнання, котре ся також без проволоки починає. Сам Spörer признає, що єго висказ є доперва ескізом теорії, але виразно вже бачимо вплив Zöllner'a.¹⁾ Дійсний рух плям поветає після Spörer'a в наслідок: 1) течій з внутра сонця, що приносять меншу скорість ротаційну долішних верств на поверхню, 2) атмосферних течій, що ведуть з собою знов більшу скорість горішних верств. З глибини з приходить на поверхню сонця по усуненню опору скорість:

$$v = 2 \pi (R-z) \cos b \frac{w}{360^\circ}$$

де R = луч сонця, $b = \varphi$, w = кут оборотовий. З сеї формули можна вивести иньшу вигідну до обрахования формулу:

$$R \xi = (R-z+h) w$$

в цілі обчислення оборотового кута ξ , де h є висотою, з котрої приходять згадані атмосферні течії

Для доповнення поглядів Spörer'a мусимо додати, що в пізнійших своїх публікаціях він починає ся уже не признавати до теорії Kirchhoff'a. Іменно вже від початку своїх почдамських публікацій перестав Spörer виступати против правдивости явища Wilson'a, а вкінці навіть виразно сказав, що мусимо вважати деякі сонічні плями заглибленнями, та не заперечував, що є можливою річю, щоби всі сонічні плями такими були.²⁾

Теория Zöllner'a мала що правда дуже великий вплив на розвиток сонічної фізики, іменно для того, що до послідного потягнення

¹⁾ Цілком подібно виясненє періодичність і французский учений Lamey, що мабуть також стоїть під впливом Zöllner'a. Comptes rendus т. 82. ст. 1262 дд.

²⁾ Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam т. IV. ст. 416 дд. Sirius т. XIX ст. 55.

пера була викінчена. Але власне задля того свого викінчення не найшов Zöllner учеників ані наслідників. По теорії Zöllner'a не повсталася жадна нова більша теорія жужлів. Взагалі найшов Zöllner найбільше прихильників в Німеччині. Всім промовляла до серця основність і докладне викінчене його теорії. Голос Bauschinger'a можемо вважати в тім згляді за міродайний.¹⁾

Натомість теорії хмар, що давали більше спосібности розвинення індивідуальних поглядів, найшли в найновіших часах много прихильників. Можна се сказати іменно про теорії Secchi'ого, котрі дуже заохочували пізнійших учених. Теорія Kirchhoff'a не входить вже в рахунок в тім періоді, бо нема тепер хіба вже нікого, хтоби заперечував, що плями є заглубленнями, коли се так наглядно доказав Ricco.²⁾ Тої самої думки є Trouvelot³⁾ і Janssen,⁴⁾ котрі поза тим твердженням, що плями є заглубленнями, нічого позитивного про них не висказують.

Межі новітніми прихильниками теорії хмар вичислимо, йдучи хронологічним ладом, наперед Hastings'a професора в Baltimore. Підставою його теорії є прямовісні течії з внутра сонця до його поверхні. Ту наступає в наслідок експансії остуджене і конденсація в тих течіях і через те повстає грануляція. Скондензований матеріял остуджує ся дуже скоро в наслідок значної спроможности промінювання та творить рід диму, котрий поволи западає в вільні місця межі грануляціями, де в наслідок більшого горяча знов ся улетучує. Той дим є власне темним тлом, на котрім тим виразніше відбиває ся грануляція. Коли в яким місці сонячної поверхні повстане зступна течія, то зі всіх сторін прямують до неї вітри, приносять з собою дуже много згаданого диму, та нагромадивши його витворюють сонячну пляму. Маса диму, що западає в глибину, творить осередок плями, промінистий притінок витворюють доосередні вітри, що викликають збочене течій, котрі ідуть прямовісно в гору, на напрям поземий. На підставі сеї теорії вияснює Hastings, длячого пенумбра на внутрішній границі є найяснійша. Пояснене буде найпростійше, коли порівнаємо прямовісну течію з поземими. В течії прямовісній, що іде в гору, остуджує ся матеріял в наслідок розширення так довго, аж доки не дійде до конденсаційної точки. Тоді виділяє ся нагло цілий матеріял, спосібний до

¹⁾ Sirius т. XVII. ст. 152 дд.

²⁾ Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei p. 1897. 5. ст. 202 дд.

³⁾ Sirius т. XIX. ст. 51. дд.

⁴⁾ Comptes rendus т. 68 ст. 312.

кондензації, причім виділене дещо ся приізниє в наслідок увільненого при тім тепла. Безпосередно потім стають виділені частини в наслідок промінюваня зглядно темними. Цілком инакше поведуть ся поземі течії. Ту остуджує ся материял не через розширення, а через промінюванє. Понеже однак промінюванє сталої частинки є значно сильнійше, чим промінюванє окружаючого єї газу, то остуженє поступає головнє в наслідок промінюваня сталих частинок. Коли отже покаже ся перша частинка, то мусить задержати своє світло так довго, аж доки цілий материял, з якого ся она складає, не згустить ся. Звідси виходить, що в такій поземій течії світло поволи ся змагає, а потім відразу маліє, що ся цілком згоджує з обсервованими фактами.¹⁾

Дальшим приклонником теорії хмар є Young. Він, як знаємо, був з початку за теорією Gaye'a, але потім перехилився на сторону Secchi'ого а навіть запропонував одну модифікацію до его теорії. Думає він іменно, що плями можуть бути-заглибленнями в фотосфері, але що викликає їх не так тисненє вибухових продуктів з гори на діл, як зменшенє тисненя з долу до гори, в наслідок вибухів в сусідніх околицях сонічної поверхні. Фотосфера не є в кождім разі тяглою, одностайною обволокою, але є зглядно тяжка в порівнаню з парами і газами, котрі ся під нею находять. Відносини подібні як у наших земских дощевих хмар, що стисло беручи є пштымо тяжші від воздуха, що їх уносить. На сонци фотосфера тисне з гори на атмосферу, що находить ся під нею, а та не будучи пружива тисне на фотосферу з долу. Коли в яким небудь місці фотосфери отворить ся устє для вибуху, то в околиці повстає в наслідок зменшеного тисненя з долу зовсім природно заглибленє. Оно удержує ся так довго, доки в сусідстві триває вибух.²⁾

Young подав в найновіших часах також свою теорію дійсного руху сонічних плям. Після его думки належить шукати поясненя нинішного дивного обороту сонця в его минувшости. Прискоренє під рівником є полишкою попередних ротаційних відносин сонця, а не впливом якихсь сил ділаючих в теперішности. Протівно — тепер всі сили сонця старають ся відносини ротаційні під ріжними геолографічними ширинами вирівнати. Своя річ, той процес вирівнуваня іде зглядно так поволи, що ледво по кількох століттях люди при дуже уважнім досліджуваню могли б його сконстатувати. При-

¹⁾ Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences November 1880 і American Journal of Science Januar 1881. Young o. c. ст. 292 дд

²⁾ Young o. c. ст. 172 дд.

чиною того прискорення вважає Young перстень з мраковинної матерії, що свується перед віками на поверхню сонця.¹⁾

Взагалі теорії Secchi'ого з літами находили собі щораз то більше прихильників, бо були згладно найменше аподиктичні та легко давались в різні сторони нагинати. Великим здобутком для теорії Secchi'ого був передовсім славний англійський спектроскопіст Norman Lockyer, що отверто заявив свою згоду з нею.²⁾ Другим ученим, що вже в найновіших часах, бо в останнім десятиліттю прилучився до теорій Secchi'ого, був шведський спектроскопіст Dunér.³⁾ Іменно в католицьких кругах був Secchi дуже популярний. К. Браун, представляючи космогонію з християнського становища, подав свою теорію сонячних плям, котра є дуже близько споріднена з теоріями Secchi'ого, хоча Günther думає, що Braun деякі свої принципи бере з теорії Reye'a.⁴⁾

Рівновага в газовій атмосфері сонця є після Braun'a неперервна в напрямі прямокутнім. Верстви остужені в наслідок промінювання опадають на діл так довго, доки не зустрінуть верств більшої густоти. На їх місце вносять ся нові маси в гору. При остужуванню ся зступаючих верств повстане в сонячній атмосфері щось в роді дощу зложеного з плинного бору, крему і угля. Пари, що зносять ся в гору, творять зернята ірануляції, верстви опадаючі темне тіло. В той спосіб опаданем одних верств а взношенем ся других виявлює Braun явище ірануляції. Крім того згладного і правильного круження газових мас тривають на сонці заєдно вибухи в роді вулканічних і викидають металічні пари далеко поза фотосферу. Там однак они удержатись не можуть і в наслідок промінювання. Остужуючись і згущаючись опадають они на діл і западають в глибину фотосфери, творячи лійковаті заглиблення т. є. плями. Осередок їх творять ті остужені і загущені металічні пари, котрі, як се очевидно видають слабше світло, чим окружаюча їх фотосфера. Она будучи гарячіша поволи знов огріває остужені пари, що творять пляму і зальявши її вкінці викликають явище походень, котрі як знаємо є звичайно наслідним явищем плям.

¹⁾ Pop. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik т. IX. 1898. ст. 3—5.

²⁾ Pop. Sirius т. XXVI. ст. 150 дд.

³⁾ Nova acta regiae societatis Upsaliensis (3). 14. ст. 12. pop. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik IV. Jahrgang 1893. s. 6.

⁴⁾ K. Braun. Über Kosmogonie vom Standpunkte christlicher Wissenschaft. München 1889. ст. 130 дд. Pop. S. Günther, Handbuch der Geophysik. II Auflage. т. I. ст. 75.

Але найважнішим наслідком теорій Secchi'ого було се, що они були підставою дуже основно обробленої теорії Егона Oppolzer'a.

Плями сонячні а іменно їх осередок є масами газів і пар, котрі в наслідок своєї низької температури викликають сильну абсорбцію світла висланого фотосферою. Показують се наглядно досліди Young'a і Duner'a над дуговиною сонячних плям. Недвижність абсорпційних ліній вказує на те, що ві внутрі плями в абсорбуючих масах панує великий спокій. Длятого Oppolzer разом з Duner'ом перехилив ся на сторону теорії Secchi'ого, заразом признаючи се доказаним фактом, що плями є заглублення в фотосфері. Але цілком инакше вияснює Oppolzer, длячого локальне остудження триває так довго. Твердить він іменно, що в заглубленю фотосфери понад осередком плями (зложеним з остужених продуктів сусіднього вибуху) находять ся гази в дуже високій температурі, що не допускають конденсації газів фотосфери в тім місці. Маємо отже в кожній плямі два великі екстремі температури, про що свідчать знов спектроскопічні і термоскопічні досліди.²⁾ Причиною того істнування коло себе таких екстремів температури є після Oppolzer'a течія в сонячній атмосфері з гори на діл. (Є се щось в роді down rush, котрий англійські астрономи вважали причиною остуження в плямах.) По дослідям Hann'a температура такого опускаючого ся в діл стовпа воздуха в земській атмосфері є в горі вища понад середню вартість. Аж при самім долі, де прямовисний рух переходить в повільний рух поземий, слідує остужене під впливом промінювання, котре збільшає ще чистість і сушу лежачих під нею верств воздуха. На сонци ті різниці температури мусять бути безконечно більші, чим в земській атмосфері, де їх наслідком є тільки мраки. Така отже зступаюча течія удержує в горішних регіонах лійковатого заглублення, що творить сонячну пляму, велике горячо, котре не позволяє на тім місці загуститись фотосфері, а в долі викликає сильне остужене, витворюючи в части і удержуючи в сей спосіб осередок в відповідно холодній температурі. Ті різниці теплоти мусять бути о стільки ще сильніші, що течії зступні також длятого є горячіші, позаяк они є тільки наслідком течий вступних

¹⁾ Egon von Oppolzer. Über die Ursache der Sonnenflecken. Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, CII. II Abtheilung. a. st. 375 dd. Astronomische Nachrichten т. 132.

²⁾ Frost в Astronomische Nachrichten Nr. 3105/6 ст. 143 dd. виказав, що плями є не раз тепліші як фотосфера, що їх окружає.

т. є. тих, що вносять ся в гору. Течії вступні заключають велике число пар іменно желіза, є отже аналогічні земским течіям вохким. Піднесши ся високо аж до хромосфери тратять вступні течії свої пари і вертають назад на діл цілком вже сухі, та дуже розігріті. Іменно заключені в них пари кондензують ся в наслідок взношеня ся в гору і полученого з ним остуженя. Тепло увільнене наслідком конденсації є дуже значне. Коли отже така вертаюча з гори течія стріне ся з фотосферою, то улетучить скондензовані ту гази.

Фотосфера стане отже прозочною на просторі, що прибере в наслідок згаданої течії вид лійковатий. Вкінці течія прямовісна розвітвлить ся на кілька течій горизонтальних, а під місцем сего розвітвлення находячі ся гази дуже сильно ся остужують по причині значного промінюваня. Газова верства на дні лійка буде для того зглядно дуже темна і утворить осередок плями. Стіни лійка підпадають також впливам промінюваня, але так як они є до поверхні сонця наклонені, отже остужене і затемнене не буде так сильне як в осередка. Стіни лійка становлять пенумбру.

Рух дійсний, періодичність і розміщенє плям толкує Oppolzer в слідуєчий спосіб. Зступні течії вимагають отвітних течій в гору. Ті повстають в околицях бігунів і викликають в горі горизонтальні течії ко рівникови. Ті вітри стремлять в ниєші ширини в довго розтягнених шрубових лініях яко східні вітри і там, де ся спускають на поверхню сонця, повстає сонічна пляма. Коли вступні течії під бігунами є сильнійші, зступають вже в висших ширинах, число плям начинає рости і слідує maximum. Коли ті течії є слабші, спускають ся аж під самим рівником — тоді припадає minimum. Ті течії викликають також характеристичну ротацію сонця. Приходячи з під бігунів, приносять они дуже малу ротаційну скорість. Для того пропізнають они позірно рух оборотовий сонця. В дійсно-сти так не є, бо спізняють ся самі плями, а властиво бігунові вітри, що їх витворюють. Те припізнєне буде більше під висшими ширинами, бо ту вітри мають ще свою первісну скорість. В околицях ближших рівника проявляє ся вже вплив тертя о поверхню, коли іменно згадані вітри зглядноповоди свою дорогу відбувають. Для того під рівником ротація здає ся нам бути найскорійшою, а в міру як росте ширина, що раз то повільнійшою.

Теория Oppolzer'a дасть ся звести в слідуєчим реченю: Плями се явища промінюваня, і відповідають барометричним звишкам нашої атмосфери (отже походні барометричним знижкам). Понеже автор попер свої виводи основною, математичною аналізою, отже теория его зробила в учених кругах деяке вражінє. Scheiner обговорюючи

її звертає увагу на те, що Oppolzer дуже совістно опирає ся на земську метеорологію. Scheiner думає, що кожда теорія сонічних плям заслуговує на поважне трактування, сли визискує аналогії сонічних явищ з явищами нашої атмосфери. На думку Scheiner'a виїшов Oppolzer на добру дорогу, шукаючи на сонці аналогії до так важких в нашій атмосфері барометричних звижок і знижок. Слизько навіть з вислідами праць Oppolzer'a ся не згодили, належить ся єму все таки заслуга, що показав дорогу, на котрій ведучи дальше досліди можна дійти до вияснення тайни сонічних явищ.¹⁾ Так само з великим признанєм виражуєсь про теорію Oppolzer'a I. Fényi S. J. астроном з Kalocs'a, котрий подаючи свою теорію явищ сонічних, без застережень приймає теорію плям Oppolzer'a і вважає навіть доказом своїх виводів те, що їх результати пр. що до сонічних походень цілком ся згоджують з Oppolzer'івськими.²⁾

Сим кінчимо ряд теорій сонічних плям, що приймаючи устрій сонця газоволетивим, вважають сонічні плями атмосферними утворами в роді хмар. Приклонником тих теорій є також J. Wilsing, котрий не виставив жадної власної теорії ані за жадною з існуючих виразно ся не висказав. Але дав він деякі вияснення, що дотичать періодичности і дійсного руху сонічних плям, а тих вияснень не мож промовчати. Отже подамо ті погляди Wilsing'a яко додаток до теорії хмар.

Wilsing³⁾ думає, що періодичність сонічних плям дасть ся вияснити механічними процесами, котрі виходять з самоїж конституції сонця. Wilsing твердить, що сонце не є ані сталою, ані огняно-плинною, але розпаленою газовою кулею. Розуміє ся однак, що газ під впливом тиснення зверхних верств находить ся в глибинах сонічного ілюба в цілком відміннім стані як сей, щосьмо привикли приписувати газам. Young прирівнує стан зціпнення газу вінутри сонця зі станом зціпнення смоли. Коли на поверхні сонця находить ся якісь заворушення, (пр. ті течії внішньої обволокы сонця, що викликають дійсний рух сонічних плям) тоді повстають також і в руху ротацийнім деякі заворушення. Они справляють, що вісь симетрії не припадає вже на вісь обороту. Рухлива маса поверхні сонця стараєсь знов прийти до рівноваги, підчас коли терте тому ся супротивляє. Тим сильним діланєм двох елементів повстає пе-

¹⁾ Astronomische Nachrichten т. 137 стр. 228 дд.

²⁾ Astronomische Nachrichten Nr. 3355. Нор. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. Jahrgang VII. 1896. ст. 13.

³⁾ Astronomische Nachrichten Nr. 3039. ст. 258. дд.

ріод, котрий проявляє ся в виступанню на поверхні сонця явищ, що стремлять до вирівнення сих двох впливів і заведення знов стану рівноваги. Ті явища, як легко зрозуміти — се плями і протуберанції. Ріжні обставини впливають на час треваня сих періодів, для того ріжниць часові є дуже великі. Доперва середні вартости з більшого числа обсерваций будуть могли мати претензю до точности.

Що до дійсного руху сонічних плям твердить Wilsing, що сонце складає ся з двох інтегральних частин: з внутра і зверхньої оболочки. Внутро сонця обертає ся коло своєї осі так, якби мало сталий стан зціпнення. Частинки єго мають рівну кутову скорість. Зверхня оболочка становить досить грубу верству і обертає ся довкола тої самої осі що і внутро, але має під ріжними рівнобіжниками ріжну кутову скорість. Оказують се дійсні рухи сонічних плям, котрі власне в тій зверхній верстві повстають. Є они відбитем рухів зверхньої верстви, що знов після Wilsing'a є полишкою течій, що давнійше існували на поверхні сонця. В наслідок внутрішнього тертя течії ті поводи зникають, але зник се такий повільний, що в часі тих парусот лїт, в котрих обсервовано ротацію сонця, не міг бути ще поміченим.¹⁾

Дві теорії, котрими закінчимо перегляд теорій сонічних плям, не дадуть ся навязати до жадної теорії попереднього періода. Конвенціональні жужлї, хмари і цикльони втратили вже дуже довіре. Для того шукано нових доріг, оригінальних способів вияснення сонічних явищ. І позетали дві оригінальні теорії — електрична Zenger'a і рефракційна теория сонця A. Schmidt'a приноврвлена до сонічних плям Julius'ом.

Хід думок Zenger'a²⁾ є слїдуючий :

Фотографії сонця роблені ним самим при помочи фотографічного апарата, отже обнимаючи значні простори неба довкола сонця, дали дуже цікаві результати. Кружок сонця на таких фотографіях є тоді чисто відбитий на плиті, коли земска атмосфера є супокійна і коли нема заворушень в земскім магнетизмі. Підчас атмосферичних або магнетичних заворушень сонічний кружок є на фотографії окружений шарима або білими плямами, котрі мають колистий або

¹⁾ Для доповнення вже тільки згадаєм ще про цікаві дослїди Бєлопольського. Наповнив він склянну кулю водою і окружилима стеарини і вправив єї в повільний оборотовий рух. Коли сей рух потім поводи здержав, окружки стеарини відбували рухи зовсім аналогічні до тих, що відбувають сонічні плями. Пор. *Astronomische Nachrichten* Nr. 2954.

²⁾ *Die Meteorologie der Sonne und ihres Systemes* von K. W. Zenger Wien, Pest, Leipzig 1886.

еліптичний вид. Коли забурення на землі є дуже сильні, тоді ті утвори прибирають великі розміри і вид витягнених еліпсів або клинів. Величина їх і види змінюють ся протягом кількох хвилин. Щоби витолкувати те явище, твердять Zenger,¹⁾ що викликають його вири, котрі повстають в найвищих регіонах земської атмосфери і поволи ся спускають на поверхню землі, причім вісь вира поволи пересуває ся в просторі. Дальше вносить Zenger з пороблених собою дослідів, що причиною тих вирів є електричні виладовання з всесвітнього простору до земської атмосфери. В наслідок тих виладовань починають наперед голочки леду в найвищих верствах нашої атмосфери кружити, пориваючи за собою частинки воздуха. З многих поменьших вирів повстає один більший і зступним рухом спускає ся на поверхню землі, стримуючи в своїм обсязі активні лучі сонця та викликаючи описані вже фотографічні явища.²⁾

Так як вже від давна Airy, Вільф і інші учені доказали, що атмосферичні і магнітні забурення на землі стоять в тривкій звязі з діяльністю сонця т. є. з плямами і протуберанціями, отже Zenger думає, що електричні виладовання, котрі є причиною атмосферних вирів, мають своє жерело на сонці. Ту нераз вже помічано спіральні рухи в сонічних плямах. Коли отже того тепер і інші обставини вимагають, мусимо признати (говорить Zenger), що плями сонічні є електричні вертні воздушні (elektrische Tromben). Повстають они в слідуєчий спосіб: Продукти вибухів сонічних вносять ся як знаєм до дуже великих висот, бо сила вибухів є величезна. Серед атмосферних течій, викликаних вибухом, повстають циклоні. Сталі і газові частинки вируючи в них витворюють наслідком тертя о газові маси фотосфери сильний електричний потенціал. Під впливом виру газові маси вносять ся в гору і та маса пар, котру мож назвати великанським набитим електричністю акумулятором, виладовує їх з силою, що незмірно переважує силу виладовань електричності земської.

Великі сонічні плями є огнищами дуже сильних і нагальних виладовань електричних в напрямі протуберанцій. Ті виладовання є жерелом велитенних вирів в межипланетарнім просторі, котрі за посередництвом розсіяних там метеоритів переносять ся нераз аж до атмосфер поодиноких планет.³⁾

Видимо отже, що Zenger згоджує ся в значній частині з вировою теорією Faye'a. Твердить він навіть, що його теорія виповнює зна-

¹⁾ І. с. ст. 2.

²⁾ І. с. ст. 5.

³⁾ І. с. 9.

чну люку в Гауе'івській теорії циклонів, пояснюючи, звідкіля ся бере сила викликуєча вировий рух і проводяча его далі. Але дорога, якою Zenger дійшов до своєї теорії і ціле її переведенє так дуже оригінальне, не позволяє его зачислити в ряд звичайних послідователїв теорії Гауе'а. Іменно в дальшій часті своїх виводів признає Zenger можливість теорії Kirchhoff'a а навіть Zöllner'a¹⁾, стараючись тим доказати, що його погляди не стоять в суперечности з теоретичними дослідями тих учених.

Згадані вище метеорити, котрі разом взяті після Zenger'a перевишають свою масою маси планет, відбувають дороги помотані, а для нас прямо не обчислимі і зближають ся часто до сонця. Понеже електричний потенціал сонця є в відношеню до оточуючої їх просторони, а іменно до метеоритових роїв, комет і планет дуже значний, проте коли для сонця приймем електричність додатну зглядом тих тіл небесних, що ся до него зближають, зрозумімо ті величезні вири і кондензації на сонічній поверхні, які ся нам представляють як плями або протуберанції.

Коли признамо плями електричними вертями, що в їх внутрі приходить до конденсації вибухових продуктів, впаде по думці Zenger'a одимоккий закид, котрий можна зробити теорії Kirchhoff'a, коли ся опирати будем на досвіді. Принявши іменно теорію Zenger'a, легко вияснити причину льокального остуженя, не знану Kirchhoff'ови. Вировий рух викликає значне розрідженє газів, отже знижку температури ві внутрі вертя. Та знижка температури, а zarazом згущаюча сила електричності витворює темний осередок плями. Коли пляма т. є. електричний вертець находить ся недалеко центра сонічного кружка, тоді бачимо виразно її осередок і пенумбру. Явище пенубри повстає через те, що вир творячий пляму має вид стіжка зверненого до нас підставою. Его припідставна часть і наш кут видження має у края підстави сего стіжка значно тоншу верству скондензованих газів перед собою, чим при її осередку. Вільзенівське явище походить з того, що вісь сонічного циклона займає зглядом лінії видження щораз то скіснійше положенє по причині обороту сонця.

Безчисленні пори сонічної поверхні є се цієля Zenger'a плями в мініатурі; фотосферну сітку творять делікатні прогалини в жужлевих (sic) островах, що плавають на поверхні огняноплинного сонічного ядра.

Періодичність сонічних плям вияснює Zenger як легко ся дорозуміти, впливами планет, які собі виображує як великанські

¹⁾ І. с. ст. 159.

магнети. Але і ту є Zenger в значній мірі оригінальний. Maxima плям сліднують у него не тоді, коли планети є найближше сонця, лиш коли є найдальше, бо тоді сонце може найсильніше ділати на близькі єму рої метеорів. Одинайцятилітний період плям викликає планета Юпітер, більші періоди спільне діланє Юпітера, Сатурна і Урана.¹⁾

Теорію Zengera представилисьмо обширно лишень якo *curiosum*. В науковім сьвіті ніхто єї не брав поважно. Зараз по указаню ся книжки Zenger'a звернув Whipple w *Quarterly Journal* англійського метеорологічного товариства увагу на обставину, що Kew'ські фотографії сонця від кількох літ стало що день знимані, ніколи не показували явищ, котрих досмотрює ся Zenger. Понеже Zenger на сєй закид не реагував, вважає Pernter підставу єго теорії за ману і похибку, а виказавши дальше єго невластиву методу, відмовлює теорії Zengera всякого наукового значіння.²⁾ Осуд може за строгий, але закиди важні.

Так само оригінальна, але на строгих научних підставах оперта є теорія сонця Августа Schmidt'a³⁾. Понеже він не займає ся спеціяльно сонічними плямами, проте вистарчить про ню тільки се сказати, що Schmidt не признає істнованя фотосфери якo зі всіх сторін ограниченої кулі і твердить, що сонце в дійсности не посідає ограничаючої єго поверхні.

Отже сонічний край, для обсерватора так виразний, є тільки явищем рефракції в газовій атмосфері сонця. Schmidt вийшов від теоретичних дослідів над рефракцією Kummer'a і Seeliger'a та попер свою гіпотезу строгими математичними виводами. Єго виступленє супроти того, що протягом кількох століть вважанє було самозрозумілим, було в кождім разі дуже сильним кроком. До Schmidt'a прилучивсь лишень Knopf, що застосував єго теорію до методи спектроскопічних дослідів над обротом сонця. Против Schmidt'a виступив Oppolzer, боронячи істнованя фотосфери і сонічного края та маючи за собою більшість фахових учених⁴⁾. Але видно теорія Schmidt'a має за собою певні дані, коли в найновіших часах виступив W. H. Julius з виясненєм сонічних явищ на підставі сєї теорії і єї консеквенції.⁵⁾

¹⁾ І. с. ст. 147 дд.

²⁾ *Meteorologische Zeitschrift* J. IV. 1887. *Litteraturbericht* ст. 13.

³⁾ *Die Strahlenbrechung auf der Sonne, ein geometrischer Beitrag zur Sonnenphysik* Stuttgart 1891.

⁴⁾ S. Günther. *Handbuch der Geophysik*. т. I. стр. 70.

⁵⁾ *Sonnenphänomene als Folgen anormaler Dispersion des Lichtes betrachtet*. *Astronomische Nachrichten* Bd. 153. 1900 Nr. 3673. ст. 433—446.

Заложім, що плямі відповідає та частина поверхні сонця, де в наслідок виврових рухів (Gaue) або сильних течій прямовисних матерії виказує великі різниці в густоті. Темноту плями і розширене в її дуговинні Фраунгоферівські лінії пояснювано дотепер різницями температури, меншою спроможністю промінювання, конденсацією, сильнішою абсорбцією в тім місці і т. н. Межі поодинокими теоріями сонячних плям панують з сеї причини великі різниці. Інакше ся річ представить, коли її розсматрувати будем зі становища теорії Schmidt'a. Після неї в край сонячного кружка тільки оптичною манною, котра походить з правильного заломання лучів світла в газовій, знікуди строго не обмеженої масі. Позірна поверхня фотосфери не може отже бути вважана границею тіла, а лиш критичною сферою, котрої луч рівняє ся лучеві кривини горизонтальних лучів світла, що проходять через одну точку сеї сфери. О різнім стані зціпненя по обох сторонах сеї кулястої поверхні не може бути бесіди. Також ві внутрі критичної сфери збільшає ся середня густота матерії і її спроможність до свічення дуже поводи. Дотепер в великих глибинах знаходять ся верстви, що висилають світло з тяглою дуговиною.

Явище плям повстає, як заклалисьмо, в наслідок льокальних різниць природи і в також оптичною манною. Іменно в наслідок сих різниць густоти підлягають лучі світла, що приходять з сонячного внутра, аномальному заломанню. Ті роди лучів, котрих сочинник заломання в надмірно великий або і надмірно малий, підлягають в наслідок сих різниць далеко більшому розстріленню, чим ті, котрі правильно ся заломують і витворюють масу фотосфери. Длятого земський обсерватор, дивлячись в те місце сонячної поверхні де панують певні різниці в густоті, видить з сего ненормально заломаного світла далеко менше чим світла заломаного нормально. Звідси в сеї місця т. є. плями темні. Лучі, котрі на сонці підлягли аномальній дисперзії, мусять в дуговині плям по частині недоставати, отже: лінії Fraunhofer'a ту ся розширюють.

Сам Julius признає, що його вияснене плям удержуєть і упадає разом з теорією Schmidt'a, бо в від неї безпосередно зависиме. Безсторонному видасть ся се об'яснене нічим иньшим як бистрим аргетс, але не науковою теорією. В нинішніх часах вияснене загального виду плям не старчить навіть за гіпотезу.

Видати критичний суд о теоріях сонячних плям випадало б мені тепер, представивши їх читачам в порядку, що не много лиш

різнять ся від хронологічного. Не в се однак легка річ, іменно коли ходять о короткість і ясність погляду. Іменно в тих теорій і гіпотез передовсім значне число, а коли при тім ще майже кожда в з иньшої точки погляду виставлена, орієнтація в тім лабіринті в досить трудна. Дятого вже при їх подрібнім представленю збував я деякі теорії дуже коротко, застановляючи ся рівночасно над иньшими значно довше, щоби в той спосіб звернути увагу на деякі тільки теорії серед многих. Дальше вважали їх творці, що на поли теорій сонічних плям можна безкарно висказувати найдивніші ідеї. Часто поняті не можем, як могли учені, що мали нераз велику і справедливу славу, надавати своє імя теорії, що була неможлива до удержання.¹⁾

В нинішних часах від наукової теорії сонічних плям вимагає ся дуже много. Передовсім мусить она вияснити всі явища, котрі коли небудь обсервовано у сонічних плям при помочи далевида. А тих явищ прибуло в кількох послідних десятиліттях дуже много, зібрано іменно великанський обсервацийний матеріал. Дальше мусить кожда теорія вияснити значне вже числе явищ термо і спектроскопічних. Але се ще найлегчі задачі для теорій. Далеко трудніше в вияснене дійсного руху і періодичности сонічних плям, бо ту мусить автор кождої теорії плям ставити свою власну теорію сонця, або застосовувати ся до иньших, бо всякі позасонічні впливи днес цілком не мають популярности між ученими.

Коли від теорій сонічних плям зажадаєм всіх згаданих умовин, то на таку назву заслужать менше більше лиш теорії: Kirchhoff'a, Secchi'ого, Oppolzer'a, Faye'a, Reyé'a і Zöllner'a — иньшим признати можна що найвисше назву гіпотез.

Теорія Kirchhoff'a яко найстарша, днес може найменше має за собою. Супротивляє ся она наперед загально вже тепер приятому фактови, що сонічні плями се заглиблення, і не може дятого витолкувати характерного вигляду пенумбри. Не толкує дальше Kirchhoff в який властиво сповіб повстають хмари, що творять плями, звідки походить конечна до їх повстаня локальна знижка температури. Найсильніший удар завдає єї однак дійсний рух і періодичність плям. Тих властивостей плям не може вияснити теорія Kirchhoff'a. Але она має се значіне, що вплинула дуже сильно на теорію Zöllner'a, бо творить подекуди єї підставу. Kirchhoff приймає іменно за найімовірніший стан сціпнення сонічної поверхні стан

¹⁾ Bauschinger: kritische Darstellung der Sonnenfleckentheorien. Sirius т. XVII. стр. 124.

плинний, і дає тим субстрат теоретичним виводам Zöllner'a. Kirchhoff доказавши, що темний і зимний осередок сонця є нонсенсом і що він мусить бути тілом розпаленим, що видає тяглу дуговину, положив тривку підставу під всі пізнійші досліді і теорії.

Теорії Secchi'ого цілком иньший мають характер як теорія Kirchhoff'a. Виясняють они дуже добре вигляд плям, але решті вимогів, котрим повинна відповісти кожда теорія сонічних плям, теорії Secchi'ого не відповідають. Натомість оперта на них теорія Oppolzer'a має за собою дуже много імовірности, бо опирає ся на відносинах в земській атмосфері, те дає на всі майже вимоги досить вичерпуючі, оперті на математичній аналізі відповіді. Але знов періодичність і дійсний рух плям не є так вияснені, як би ся мож було того сподівати в виду иньших частий теорії Oppolzer'a. Полярні вітри, що стремлять ко рівникови в шрубових лініях і своїм зступуванем в ріжних ширинах викликаючи періодичність та дійсний рух сонічних плям, є досить неімовірні, хотяй далиб ся вивести теоретично, Впрочім не бачимо причини, чому єї вітри, викликаючи повставанє сонічних плям, не зступають на ширших просторах, якби сего належало очікувати, а на деяких лиш точках поверхні сонця.

Теорії воздушних вертнів Faye'a і Reye'a представляють иніший вигляд плям також доволі добре, але конечно для їх витвореня процесу майже ніколи не бачимо. Впрочім повставанє циклонів при так малій ріжниці скорости сонічного обороту на противположених місцях великих навіть сонічних плям є що найменше зачадочним явищем. Крім того, як вже згадалисьмо, супротивляє ся теорія Faye'a основним законам прийнятим земскою метеорологією. Розміщенє і сегментацію плям вияснюють вирові тесрії цілком добре, але виясненє дійсного руху і періодичности є у Faye'a недостаточне.

Позістає ще тільки теорія Zöllner'a, геніяльно подумана, як і иньші теорії сего ученого і дуже докладно виведена. Анї одної обсервації не полишає она без виясненя і то опертого на основній математичній аналізі. Визискавши уміло результати дослідів Kirchhoff'a, він перший звернув увагу на те, що причин місцевої і часової правильности в виступуваню плям належить шукати в самімже устрою сонця. І випровадив теорію розміщеня і періодичности плям так, як ніхто перед ним і по нїм. Так само переконуючі є результати його дослідів над теорією обороту сонця. Одна тільки річ може бути у Zöllner'a заквестіонована, а то єго założенє, що поверхня сонця є огнисто-плинна. Занадто низька температура поверхні сон-

ця, що є получена з тим станом зціпнення викликає поважні сумніви. Плиний стан сціпнення сонічної поверхні вимагав сталого стану сціпнення плям. І те викликало у учених сумніви, але Zöllner виказав, що найповажнійший закид Reye'a полягає на непорозумінню.¹⁾

Так отже Ахиллевою п'ятою теорії Zöllner'a остала плинність сонічної поверхні і вимагана нею низька його температура. Але коли ся ліпше застановимо над тою слабою стороною теорії Zöllner'a, то закиди противників много сили стратять. Передовсім вражає нас зглядно великий супокій в фотосфері при нагальних рухах плям і протуберанцій. Звернув на се увагу Newcomb²⁾ і почислив *in plus* теорії Zöllner'a. Деяке, хоч тільки негативне значінє малиб ще і дві иньші обставини. Іменно вияснюючи відносини, що панують на сонці, можемо взагалі шукати аналогії тільки в земських відносинах, що є як знаєм безмірно ріжні від сонічних.

Дальше наші позитивні відомости про хемічний склад і устрій сонічного внутра є майже ніякі. Аналіза спектральна відкрила нам іменно лиш склад атмосфери сонця, а про склад його внутра дозволила нам лишень на припущєня. Впрочім досліди учених над поведєнем тіл в дуже високих температурах і під великим тисєнем не поступили ще так далеко, щобєсьмо аподиктично могли твердити, що поверхня сонця, де панують відносини так відмінні від земських, не може бути плинною, наколи приймєм для неї температуру хочби і кілька разів виєшу від прийнятої Zöllner'ом.

На мою думку є отже теорія Zöllner'a найлучшою зі всіх дотепер поставлєних теорій сонічних плям. Чи она є правдива, се инша річ, але в виду стагнації, що від певного часу панує на поли теорій плям, можна теорії Zöllner'a заповісти на будучність многих ще приклонників і значну трєвалість.

¹⁾ Pop. Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen etc. cr. 177 i Zöllner über den Aggregatzustand der Sonnenflecke. I. c. cr. 522 дд.

²⁾ Newcomb Engelmann o. c. cr. 323.

Причинки до історії розвитку і інволюції желези thymus у риб кістноскелетних (Teleostei).

НАПИСАВ

ФЕДІР ПРИМАК.

(Інститут анатомії порівняльної ц. к. університета у Львові).

Железа thymus була до недавна у низших зьвірят зовсім незвісна. Вперве найдено її і описано у чоловіка, а відтак у декотрих висших ссавців. Доперва Meckel¹⁾ в початку XIX. віка викрив у водяних птахів оруде, котре назвав glandula thymus. Однак Haugstedt²⁾ і Simon³⁾ в основнійших дослідях доказали, що згадане оруде Meckel-а не було глезою (thymus), а лише звичайним нагромадженням товщи, яке Meckel помітив і хибно описав яко thymus. На правдиве положене gl. thymus у птахів вказав доперва Lucae⁴⁾, хоч і опісля ще багато анатомів заперечували істнуванє тої желези у птахів, а нинішню глезу (gl. thymus) у тихже зьвірят уважали железою щитовою (Schilddrüse, thyroidea).

Тривку основу до дослідів порівняльно-анатомічних глези (thymus) положив згаданий повисше Simon котрого погляди відтак

¹⁾ Meckel, Abhandlungen aus der menschl. und vrgl. Anatomie u. Physiologie, Halle 1806.

²⁾ Haugstedt, Thymi in homine ac per seriem animalium descript. anatom. physiol. Havniae 1832.

³⁾ Simon, A physiological Essay on the thymus gland. London 1845.

⁴⁾ S. Lucae, Anatomische Untersuchungen der Thymus in Menschen u. Thieren, Frankfurt a/M. 1811—1812.

розширив і поглибив Ecker¹⁾ і Leydig²⁾. Simon розглядав анатомічну будову різних хребовців (Vertebrata) і прийшов до заключення, що thymus питомою є лише звірятам, котрі віддихають легкими; він твердив, що риби і земноводники (Amphibia) [котрі також подібні до риб як пр. печеровець (Proteus), гущер (Siren)] не мають тої желези. Після него не мають thymus і пуголовиці Rana paradoxa, що також віддихають зявами. Однакож ті погляди Simona не удержалися, бо, як вислідив Ecker, железа thymus находиться також в тілі пуголовиць віддихаючих зявами.

Викритє thymus у риб належить вже до найновіших здобутків науки. Іменно Stannius³⁾ винайшов у кругоротів (Cyclostomi) двійне орудє, що „находить ся по обох боках cardia тутже поза зявами“. У перекустих (Plagiostomi) а іменно у дерпана звичайного (Squatina vulgaris) описав Ecker thymus яко подовгасту, лопатовату масу, котра находиться понад яминами зявними. Зовсім подібно Stannius представляє thymus яко велику, сіру, мягку, лопатовату масу железову, котра, поміщена в горі над луками зявними, розширює ся ід передови, а з'ужує ід задови. Крім повисше згаданих вчених занимали ся дослідями над thymus у риб також Leydig і Dohrn⁴⁾. Іменно сей послідний подав нам кілька дуже важних помічаній, дотикаючих розвитку thymus у Selachii-в. Відтак належить згадати отут і Афанасієва⁵⁾ (професора з С.-Петербурга), котрий, розсліджуючи анатомічну будову thymus у різних хребовців, не виключаючи і риб, положив неоцінені заслуги основними помічаннями, дотикаючими передовсім способу заникання (інволюції) сего орґана, о чім впрочім понизше обширнійше поговоримо.

Приведена література зовсім еще не пояснює нам значіння і функції фізіологічної gl. thymus для звіриноґо тіла. Железа thymus все ще являє ся для нас загадкою. А особливо у найнижших хребовців, то єсть у риб, єствованє єї для орґанізма буває ріжними ученими ріжно поминана. По нинішний день нема одноцільної гадки що до походження тої желези: одні виводять єї з виєскірні (екто-

¹⁾ Ecker, Blutgefäßdrüsen. Handwörterbuch der Physiologie von R. Wagner Bd. IV, 1853.

²⁾ F. Leydig, Lehrbuch der Histologie. Frankfurt a/M. 1857 pg. 429.

³⁾ Stannius, Lehrbuch der vergleichenden Anatomie der Wirbelthiere. Berlin 1846.

⁴⁾ Dohrn, Studien zur Urgeschichte des Wirbelthierkörpers IV. Mittheilungen aus der Zoolog. Station zu Neapel Bd. V. Heft 1.

⁵⁾ Afanassiew, Über Bau und Entwicklung der Thymus der Säugethiere. Archiv f. mikrosk. Anatomie, Bd. XIV. 1877.

дерми), інші із середскірні (мезодерми). Fr. Maurer¹⁾, De Meuron²⁾, Schaffer³⁾ і J. Beard⁴⁾, котрих студії на тім поли належать до найновіших і найвартішших здобутків анатомії та фізіології згаданого орудя, все ще виявляють великі недостачі, так що повстає питання, а особливо найважніша фаза в її розвитку поки-що не рішена.

Глеза (thymus) є лімфатичним тілом. Її сітчасту тканину заповнюють незлічимі лейкоцити, котрих походження, по мимо, що вони становлять головну складовину згаданого орудя, є поки-що неясним. Досліди наші, посвячені спеціально тій річі, наглядно нас переконали і в тій гадці як найсильніше утвердили, що лімфатичні клітини thymus прямо з клітин наболонних витворюють ся. Постереження се являє ся нам фактом загальної морфологічної ваги і принципіального значення, бо оно зовсім перечить загально прийнятим поглядам що до специфічності листків зародочних та що до походження лімфатичних елементів з мезенхіми.

Пригадаймо собі, який то прилєсок з одної, а остру критику з другої сторони, викликала праця Retterer-a⁵⁾, котрий доказував походження лейкоцитів і сітчастої остроми (Netzwerk) в узликах лімфатичних (Lymphknötchen) з наболони. Stöhr⁶⁾, що саме накинув ся був з острою критикою на погляди Retterer-a, назвав також і дані Юлії Platt, Gronowitsch-a, Klaatsch-a, v. Kupffer-a і Фр. Maurer-a що до походження лучнотканних і лімфатичних тканин з енто- чи з ектодерми хибними і зовсім не переконуючими. „Auf Irrthümern... beruht“ — каже він — „die grosse Mehrzahl der Arbeiten, welche die Lehre der Specifität der Keimblätter stürzen wollen, welche Bindegewebe und Leucocyten von Ekto- oder Entoderm abzuleiten versuchen“.

¹⁾ Fr. Maurer, Schilddrüse u. thymus der Teleostier. Morpholog. Jahrb., Bd. 11, 1885.

²⁾ De Meuron, Recherches sur le développement du thymus et de la glande thyroïde. Recueil Zool. Suisse, 1886.

³⁾ Schaffer, Über den feinen Bau der Thymus u. deren Beziehungen zur Blutbildung. (Sitzungsberichte der kais. Akadem. der Wissenschaften CII. Bd. Abth. III. Jahrg. 1893. Heft I—X).

⁴⁾ J. Beard, The Development and probable Function of the Thymus. Anat. Anzeiger, Bd. 9, 1894.

⁵⁾ Retterer, Origine épithéliale des leucocytes et de la charpente réticulée des follicules clos. Compt. rendus. Soc. Biol., 1897. Histogenèse du tissu réticulé aux dépens de l'épithélium. Verhandl. der anat. Gesellschaft auf der 11. Versammlung, 1897.

⁶⁾ Stöhr, Über die Entwicklung der Darmlymphknötchen. Ibid. 1897.

Студиюючи препарати, які зладили ми до зовсім иньших цілій, іменно до слідження розвитку зародочного шарановавих (Cyprynoides) і лососоватих (Salmonides), завважали ми під мікроскопом образи, що нас споводували до помічання розвитку лімфатичних елементів желези thymus. З початку веденої роботи ми стояли по стороні Stöhr-a, проте вже а рiогi всяку можливість повставання лімфатичних елементів з наболони ми цілковито виключали. Однак по дуже основних обсервациях і студиях препаратів зладжених ми дійшли до результатів зовсім противних. Тим паче, що подібні процеси відбувають ся також і в thymus жирунів (Selachii), як се бачимо з розвідки J. Beard-a¹⁾, що нам случайно в часі дослідів попала в руки. Іменно J. Beard виводить також і у плахура (Raja) лімфатичні клітини thymus безпосередно з наболони.

Молодші стадії слідили ми на зародках петруга (salmo). Ми можемо вповні потвердити дані Maurer-a, що перші пуплі thymus розвивають ся з наболонного згрубіння горішних кінців (dorsalen Enden) щелин зявних (Kiemenspalten). Що клітини тих перших пуплів суть клітинами наболони, сего доказав Maurer нехибно, бо они переходять безпосередно в наболонні клітини зяв; що під наболонию находить ся оболонна властива (membrana propria), котра становить границю межи наболонию а находячою ся під нею тканию, на се цілковито з Maurer-ом годимо ся. Але негодимо ся з ним в чім иньшій.

Іменно після Maurer-a, елементи розвиваючої ся глези (thymus) мають вже від першої хвилини повстаня питоменний визір, бо клітини не мають ніяких границь, а ядра клітинні є малі, точковаті, дуже густо побіч себе нагромаджені і закрашують ся інтензивнійше, ніж ядра клітин наболонних. Ті послідні мають — після Maurer-a — в супротивці до первістних елементів thymus виразні границі і овальні ядра, що красяьт ся блідо і визначають ся виразною будовою ядристою (deutliche Kernstructur). котра в первістних елементах thymus має бути затертою. Ядра ті — після Maurer-a — „gleichen sofort den lymphoiden Elementen“. Сей погляд Maurer-a зовсім хибний, бо клітини завязку thymus нічим непохожі на лімфатичні елементи, але противно они мають дуже виразний характер наболонний і лишень мало-помалу переходять в лімфатичні клітини, о чім понизше основнійше буде бесіда.

¹⁾ Beard, The True Function of the Thymus. Lancet, 1899.

У зародка петруга, що мав 63 днів, збита маса thymus складає ся — після Maurer-а — з однородних густо побіч себе нагромаджених ядер, що на краю наросту переходять непроривно в наболонні клітини слизової оболонки ямин зявних; однак вже й тепер покривова верства thymus складає ся з плоских і великих наболонних клітин, так що все оруде має лишень односторонню огортку наболонну, хоч всі єго складові елементи суть витвором epithelium. Округлі ядра thymus „machen den Eindruck von lymphoiden Elementen“. В тій стадії помічав Maurer всмикуване лучноткани до завязка thymus. Лімфатичні ядра, що становлять головну масу thymus, має він не за лучнотканні частини, тільки „für Elemente epithelialen Ursprunges“, котрі вибуяли на наболони (epitheliale Wucherung) із внішньої ткани. Іменно слідуючим способом доказує Maurer наболонне походження ядер лімфатичних:

„Zunächst sind die Elemente alle vollkommen gleichartig. Ferner sind sie durch eine Membrana propria gegen das subcutane Bindegewebe abgegrenzt; diese Membran wird nur an den Stellen durchbrochen, an welchen die Bindegewebszellen in das Organ eindringen. Drittens gehen an der Grenze des Organs die lymphoiden Elemente direct in die Epithelzellen der Kiemenhöhlenschleimhaut über“. Maurer однак, що найважнішим тут являє ся, не характеризував сего безпосереднього переходу, так що з єго опису зовсім не виходить, що клітини наболони дійсно в лімфатичні елементи перетворюють ся, хоч в самій основі гадки єго зовсім слушні.

Maurer уважає ті „lymphoide Elemente“ творами темпорарної натури і тому каже їм по часі назад в клітини наболонні перемінити ся, причім знов не пояснює способу сєї переміни, що являє ся нам істологічним курийозом.

Вельми заслужений згаданий дослідувач зве лімфатичні елементи „lymphoide Kerne“. І справді они виглядають як ядра, бо ослоняюча їх плязма є незвичайно тоненька і густо-часто лишень при дуже сильнім побільшеню мож єї ледви-залежди додати. Maurer характеризує дуже поверхню сю дивоглядну переміну тих майже позбавлених плязми лімфатичних елементів, котрі лежать або зовсім свобідно побіч себе або розміщені посеред вроснутої тут зо вні лучноткани. Іменно, начеркнувши коротенько сї відносини у петруга, що мав вже 4 місяці, говорить він так: „Die primären Thymuszellen (значить у него тільки що „die lymphoiden Elemente“) haben sich insofern verändert, als ihre Kerne grösser geworden sind, sich weniger intensiv färben und deutliche Structur erkennen lassen, kurz

ein Verhalten zeigen, das man... als Beginn eines Rückfalles in ihren epithelialen Charakter bezeichnen darf“.

Прийняте сего переображення всьпятиного ядер лімфатичних в наболонні клітини є чистою гипотезою із сторони Maurer-а, вимушеною — здається — на те, щоби якимось способом „lymphoide Elemente epithelialen Ursprunges“ з лімфатичних складнів дефінітивної глези (thymus) виключити, бо ті елементи, одвітно загально прийнятій теорії, повинні з мезодерми походити.

Maurer приймає дальше, що лімфатичні елементи, які вийшли з наболони, так довго задержують свій характер, як довго они розростаються і становлять головну масу thymus. Вправді лучноткань, що безпосередно одягає thymus, вже вісім днів опісля, як появився завязок желези, починає вростати, всмикувати ся до thymus, однак она є лишень тканию остромною (руштованем), що становить мовби подвижника для судин кровних. Але по двох-трох місяцях, каже дальше Maurer, наколи починають лімфатичні елементи мезодерматичного походження до thymus вростати, переміняють ся лімфатичні елементи наболонного походження назад в клітини наболонні. „Die primären epithelialen Elemente allmählich in ihrer Proliferation erschöpft, verlieren ihr lymphoides Aussehen und nehmen auch äusserlich ihren epithelialen Charakter wieder auf“. Такий погляд Maurer-а є — як вже повисше сказано — зовсім хибним. Понисше наведені досліди доказують зовсім недвужначно, що переміна клітин наболонних в лімфатичні елементи дійсно довершує ся і, що раз таким способом повсталі левкоцити свій характер задержують і ніяк не переміняють ся в клітини наболонні. Противно они заховують ся в незмінній формі аж до найпізнійших стадій і доперва по часі або роздроблюють ся на зернисту масу або перетворюють ся в червоні тільца крови (еритроцити), як се впрочім понизше викажем.

Видумку Maurer-а що до всьпятиного розвитку левкоцитів в наболонні клітини уже Beard скритикував зовсім справедливо в „Anatom. Anzeiger“ l. c. 1894. А впрочім з дотичної розвідки Maurer-а годі дізнати ся, чи автор повсталі з наболони клітини дійсно за лімфатичні елементи уважає, чи лишень за творива, що похожі на лімфатичні елементи, бо раз (на сторони 161) говорить він „an der Grenze des Organs gehen die lymphoiden Elemente direct in die Epithelzellen der Kiemenschleimhaut über“, на иньшій знов місци зве ті самі елементи, „lymphoid aussehende Zellen der epithelialen Anlage“. Тож дуже трафно замітив Beard, коли сказав, що „The expression „lymphoid aussehende Zellen“ would seem indicate, that Maurer does not regard these cells as true lymph-cells“. Beard подібно в до-

слідях над розвитком thymus у Raja дійшов до заключення, що і тут „the lymph elements of the thymus are the direct offspring of the epithelial cells of a gill-cleft“. До того самого заключення дійшов він на підставі поновлених помічаній над розвитком thymus у плахура (Raja), де лімфатичні клітини сего орудя мають виключно з наболони витворювати ся.

В пізнійшій розвідці о розвитку thymus у земноводників (Amphibia) припускає Maurer¹⁾, що тут лімфатичні клітини „durch Theilung aus den Epithelzellen hervorgehen können“ (через дільбу з клітин наболонних можуть повставати). В яйцеватім завязку thymus 17 mm довгої личинки жаби (пуголовача) вирізняє Maurer субстанцію стрижеву (Marksubstanz) і субстанцію корову (Rindensubstanz). „Die Zellen des Markes“ — каже він — „gleichen in ihrem Aussehen vollkommen den Epithelzellen der ersten Anlage, während die Genese der kleinen Rundzellen der Rindenschicht eine doppelte Deutung gestattet. Sie können nämlich ebenso gut durch Theilung aus Epithelzellen hervorgehen als auch mesodermaler Herkunft, d. h. mit den Gefäßen hineingewuchert sein. Ich neige zur letzteren Annahme, da es mir nicht möglich war, neben den kleinen Rundzellen und den spärlichen dazwischenliegenden Epithelzellen der Rinde Theilungsfiguren oder sonstige Übergangsformen zu entdecken. Beide Zellenformen lagern scharf unterscheidbar neben einander, zwischen den verästelten Bindegewebszellen, welche das Organ durchsetzen“. Так говорить Maurer, і він має зовсім слушність, коли на підставі власних помічаній (треба додати неосновних і поверхних) удержує походжене лімфатичних ядер з клітин наболонних кори лише за „möglich“, бо він не бачив ані поділових фігур (Theilungsfiguren) ані перехідних форм (Übergangsformen). Однак сей погляд Maurer-а дотикаючий Amphibia є недостаточним, походячим або з несовісного студійованя препаратів або з неосновної методи консервованя материялу (через що імовірно лучноткань не задержала ся в природнім виді). В зовсім відповідних стадиях розвоєвих thymus у риб кісткоскелетних²⁾ бачили ми не лиш численні карийокінетичні фігури поділові клітин наболонних, але й також прегарні форми перехідні між обома родами клітин, що понизше буде основнїше обговорено.

¹⁾ F. Maurer, Schilddrüse, Thymus u. die Kiemenreste bei Amphibien Morphol. Jahrbuch 1888.

²⁾ Карийокінетичні фігури в великій кількості обсервували ми також в thymus земноводників (Amphibia) а іменно на препаратах зладжених до постеріганя концентричних тілець (Гассала), о чім иньшим разом буде бесіда. — Автор.

Яко материял до дослідів служили нам переважно зародки петруга (*Salmo fario* L.) і молодий карас звичайний і золотий (*Carrasius vulgaris* і *C. auratus*), хоча малисьмо під рукою також препарати з ковблика (*Gobio fluviatilis* і з вюна (*Cobitis fossilis*) та слижа (*Cob. barbatula*). Об'єкти утравлювалисьмо почасти в самім концентричнім субліматі, по части в сумішці концентричного сублімату і 3 проц. квасу азотного (на половину); передовсім сей останній плин явив ся дуже пригідним як до розм'ягчування ткани кістної, так і рівночасно також до ніжнього утравлювання всіх тканий. До крашення уживали ми еозин-гематоксиліни і алькоголічного розпусту сафраніни, що особливо достатчала образів інструктивних.

Погляди Mauger-а, що перші пуплини *thymus* петруга повстають з наболонних згрублостей горішних кінців ямин зявних і що ті пуплини дуже вчасно з собою зливають ся, так що творять одно наболонне згрубінє горішної стіни ямини зявної, ми потверджуємо. Однак не годимо ся з Mauger-ом мовби то клітини тих пуплів уже від початку ріжнили ся від иньших клітин наболони ямини зявної, і мовби то між ними не видно було границь та ядра їх були менші. Ми бачили, що клітини завязка *thymus* уже в найранших фазах розвитку виявляли видні границі, а ядра їх були зовсім такої самої величини і зовсім з тою самою окривою, що і ядра наболони на иньших місцях ямини зявної.

Перша зміна наболони завязка *thymus* починає ся уже в тім часі, коли *lamella cutis* еще нігде не прорвана, і коли еще в завязку *thymus* віяких слідів лучноткани і судин кровних не мождобачити. Зміна починає ся в понизших партіях завязка, коли партії верхні, що переходять в наболонь ями зявної, еще зложені з зовсім невіржненої епітелії (*epithelium*). Зміна розпочинає ся від того, що клітини укладають ся свободнійше одна побіч одної, віддаляють ся від себе, розсувають ся, а межиклітинні містки видовжують ся, тоншають і відтак зникають, лиш декотрі з них задержують ся. Нам видає ся дуже імовірним, що сї довгі нитки, які мовби узонькі кладки, лучать розвільнені клітини, завдячують своє повстанє зільлятю певної скількості первістних, коротких і ніжних містків межиклітинних.

Особливо виразне розсуванє (*Lockerung*) клітин наболонних бачили ми на препаратах з зародків петруга, що були 1,2 см довгі. Таке звільненє довершує ся в припідставних партіях *thymus*. Іменно на верхні (що яко горішна стіна зяв становить підставу для желези *thymus*) находить ся 2—3 веретви тісно до себе прилягаючих клітин наболонних, котрі дуже енергічно множать ся, як сего доказують

численні карийокінези і мітози, які ми в клітинах тих партій в великій кількості бачили. Таким отже чином кількість молодих клітин заєдно росте, коли число верстов індіферентних, більш до верхніх клітин наболонних, ще через довгий час те саме полишає ся. Сьвіжо повсталі клітини, не маючи тут доволі місця, входять до середини завязка желези, де підлягають згаданому повисше розповільненню.

У зародків петруга, що мали 1,5 см довготи, подибувалисьмо тут і там судинки кровні і лучнотканні елементи, котрі мож дуже легко пізнати по їх подовгастім, веретенонатім і почасти волокнистім виді; елементи ті, що вже на перший погляд різнять ся від розвільнених клітин наболонних, всикують ся тут і там через *cutis lamella* до наболонного завязка желези *thymus*. В тій стадії бачили ми численні форми перехідні від індіферентних клітин наболонних партій периферичних до згаданих повисше клітин розвільнених, що з початку повязані з собою міжклітинними містковатими висувками, а в дальшій розвою і тих послідних позбувають ся і громадають ся як зовсім свобідно побіч себе лежачі клітини лімфатичні.

Fig. 1 (гл. табл. I.) представляє нам частину стрілового перекрою (*Sagittalschnitt*) через завязок желези на 1,5 см довгого зародка петруга. При внїшній верхній жел. *thymus* находимо битком побіч себе нагромаджені клітини, що визначають ся блідими, примінно великими, майже безхроматиновими, округлавими або овальними ядрами. В одній з тих клітин, як також і в другій понизше лежачій бачимо хороші фігурні ділитьби ядер. На препаратах утревалених в сумішці сублімату і 3 проц. HNO_3 , а закрашених відтак сафраніною находилисьмо дуже багато мітоз. Поява мітотичних фігур, що доказують дуже скорої множи клітин наболонних, є для нас дуже великої ваги, бо се є сьвідомством, що роля наболони при твореню елементів *thymus* є активною, а дальше, що кількість клітин епітельних завязка желези стало росте.

Елементи, що повстали через ділитьбу більших і ще індіферентних клітин наболонних, суть менші і замикають в собі також ядра менші чим у клітин матерних. Більшість тих енергічним процесом ділитьби поменшених ядер клітинних задержує вже свої скупі розміри і переходить мало-помалу в лімфатичні елементи. Рівночасно зі скорим помножуванем і зменшуванем обему клітин йде рука в руку і їх розвільнене.

На повисшій (1) фігурі бачимо наглядно дуже красно перехідні степені від несвобідних еще, більших, тісно побіч себе лежачих клітин наболонних до таких, що на обем менші, більш від себе

віддалені, а довгими містковатими волокнами пов'язані. Ті останні клітини характеризують ся маленькими ядрами і дуже вбогою плязмою, котра немовби тонесеньким пластком огортає ядра. Такі клітини майже вже зовсім мають характер лімфатичних елементів, котрих однак спосіб (*modus*) розвоєвий, як також приналежність до клітин наболонних виявляє хочби ся обставина, що плязма їх лучить ся непроривно з сусідніми клітинами наболонними, а іменно за посередю довгих, ніжних, волокнистих містків. Із таких клітин доволі розвільнених, але еще пов'язаних з собою обопільно бачимо знов ряд дуже ядерних образів переходових до зовсім вже свободних клітин, що не лучать ся з собою; клітини ті визначають ся ніжними, обводовими висувками, котрі виходять з плязми і очевидно представляють тут прочки (рештки) повисших міжклітинних містків. А відтак доходимо до клітинних форм, що, лишені всяких висувов, мають ледви сліди плязми і суть зовсім перетворені в типові лімфатичні елементи, значить ся, представляють малі, округлі ядра, котрі визначають ся так тонесенькою огорткою плязми, що її не легко навіть і при сильних побільшеннях мож доглядіти.

Ядра лімфатичних елементів вирізняють ся від ядер індиферентних клітин наболонних, як також від блідих, кужільоватих ядер клітин лучнотканних, не лиш меншими розмірами, але також і тим, що они красять ся сафраніною дуже інтензивно, інтензивнійше ніж ядра всяких иньших клітин. Ту последню появу поянює нам та обставина, що в ядрах лімфатичних виступає субстанция хроматинова (она сильно поглитає сафраніну) в більшій скількості, ніж пр. в ядрах типових клітин наболонних, а дальше, що та хроматина творить в них більше або менше густу сіль, коли ядра иньших клітин (пр. наболонних або лучнотканних) поседають дуже скупо хроматини, що виступає в них в виді зеренець. Так при крашеню препаратів сафраніною получали ми як найвиразнійші переходи від більших, зовсім блідих (клітин) ядер наболонних до менших засібнійших в хроматину, інтензивнійше закрашених, а навпослі до типових, повисше описаних лімфатичних елементів.

До повного обговореня kwestії що до первістного жерела лімфатичних елементів *thymus*, мусимо оттут з великим натиском дві важні обставини запримітити. Іменно: 1) в жаднім ядрі лімфатичного елемента *thymus* не бачили ми мітоз або якихсь иньших форм ділитьби, проте помножуване тих елементів в дотичних стадиях слідує не через ділитьбу уже нагромаджених левкоцитів, але виходить завсеїгди з індиферентних клітин наболонних,

причін в тих послідних відбуває ся дуже скоре множене на мітотичній дорозі; 2) в розвільненій піднаболонній лучноткани, в якій (в повисше описаній стадії) бачили ми судини кровні і бліді, кужілеваті лучнотканні елементи, не було ні одного левкоцита, хоча в завязку thymus була їх вже велика скількість нагромаджена. Проте уже з тої причини виводжене лімфатичних елементів thymus з піднаболонної лучноткани є виключене; таке виводжене не має ніякого наукового підкладу і видає ся нам дуже невдалим, особливо, коли зважимо повисші дані, де наведено ріжні форми переходові від індіферентних наболонних клітин аж до типових тілець лімфатичних.

Зміни левкоцитів завязка thymus, як взагалі ніяких форм вспятих, щоб вказували перетворбу лімфатичних елементів в наболонні клітини, ми не бачили в жадних стадиях розвитку: ані на повисше описаних, ані на слідуючих препаратах старших особнів. Раз повставші левкоцити, котрих головну складовину становлять ядра, бо плязми на них лиш дуже скупо находить ся, задержують свій здіб (habitus) аж до дуже пізних стадий розвитку thymus. А навіть в стадиях далеко старших, як ті, що ми їх повисше описали, відбуває ся безнастанна трансформація клітин наболонних в левкоцити. Так пр. на численних препаратах, де жел. thymus в декотрих місцях свого тіла починає вже хилити ся до інволюції, бачили ми значнійше розвільнюване наболонних клітин корових thymus, обнажуване їх з плязми та прямоване до внутра, де відтак наступає повна їх переміна в левкоцити.

Дуже займаві і поучаючі образи в тім згляді мали ми у караса (Carassius vulgaris), на 2'6 см довгого. (Гл. фіг. 2). Грушковата железа, як бачимо, є в тій стадії єще з кришою зявної ямини безпосередно получена, хотяй відділюване (відставане) при підставі уже намітило ся. На стрілових перекроях засновок thymus найчастійше має вид грушки (очевидно не у всіх риб та не у всіх стадиях), котрої чільна часть є уміщена в заглибі між кістьми лобиновими, а іменно замикають її: з заду кости ушні (otica), з переду кости окоямні (ossa orbitalia). Підстава thymus переходить безпосередно в наболонь ямини зявної, котра в дотичній стадії є ще сильно згубіла. Thymus при підставі (basis) є розширена, іменно двома пластами (передним і задним) підставовими остає в тісній, безпосередній звязи з наболонню горішньої даховатої стіни зяв.

В повисшій стадії (фіг. 2) свободіно стремляча в гору железа thymus є окружена дуже ніжною, вільною і блідою лучнотканию,

в котрій находимо судини кровні без найменшого сліду навкруг них левкоцитів. Зате появляють ся левкоцити в згаданій отружувальній (вільній) ніжній лучноткани, а іменно у тій її частині, що тісно прилягає до тонесенької внішньої оболонки верхньої *thymus*. Оболонка та є на численних місцях просаджена судинами кровними, що востають до середини желези.

В підставовім платі *thymus* находять ся еще індиферентні клітини наболонні, котрі чим висше ід горі переходять у вільнішу наболонь, яку майже на цілій периферії грушкватого виростка *thymus* находимо іменно під внішньою окриваючою її ніжною оболонкою. Середину тіла *thymus* доповняє дуже велика скількість лімфатичних елементів, то єсть левкоцитів, поміж котрими добачуємо мірно розміщену лучноткань вільнішу, зложену з кужілеватих клітин, поруч з сітчастою дуже ніжною лучнотканиною (*reticulum*). Судин кровних постерігаємо тут велику скількість. Вельми займавою і дуже важною являє ся тут та обставина, що і в тій, відносно уже так пізній, стадії, все ще таки в клітинах наболонних бачимо численні мітози і як найкрасші форми перехідні від таких клітин наболонних, що енергічно множать ся каріокінетичною дорогою, до щораз свободнійше укладаючих ся, а відтак до найхарактеристичніших типових білих тілец крови (левкоцитів) доходимо.

Фіг. 3. зображає нам частину прорізу стрілового через глезу (*thymus*) караса (*Carassius vulgaris*) повисшої стадії при сильнім побільшеню. При споді бачимо еще зовсім індиферентну наболонь безпосередно в стіну ямини зявної переходячу; в тій наболоні на ліво видно врослу судинку кровну і кілька кужілеватих клітин лучнотканних. При самій долній підставі бачимо дві фігури мітози. Їх поява, що в наболоні дотичних серій препаратів у великій кількості виступає, є — як зазначено повисше — свідомством скорого розросту ткани — скажу спішного множення клітин наболонних. Входячи в середину *thymus*, бачимо, як клітини наболонні ід внутрі свободнійшають. Многі з них вже зовсім не вяжуть ся з собою міжклітинними волокнистими містками, хоча многокутним своїм визором зраджують наглядно своє наболонне походженє. Дотична фігура 3. ілюструє нам знаменито висше описаний перехід від розвільнених, еще получених з собою клітин (на право ід середині) аж до таких, що вже зовсім свободно побіч себе нагромаджені. Ядра тих послідних, красять ся сафраніною інтензивнійше, ніж ядра зовсім еще індиферентних клітин, котрі тутже при верхні находять ся. Ядра клітин наболонних визначають ся грубою огорткою плязми, що тоншає в міру освободжуваня та посуваня клітин до середини тіла

thymus, так що у ядер лімфатичних з неї остають ледви наслідкові сліди.

Повіше згадали ми, що наболонь в периферичних партіях thymus звичайно зложена з клітин, що побіч себе в довгі ряди уставляють ся. Така стрічковата рядовитість клітин уводняє ся навіть тоді, коли вже клітини, тиснені нововитвореними клітинами наболони, посунули ся до середини, поменшили свою огортку плязми і приймили удачу ядер лімфатичних. Ряди ядер, що виглядають немовби шнурки доволі рідко нанизаних пацьорек, виступають на різних місцях thymus, найлучше однак се увиднене є в підставовій часті желези, що граничить з наболонію ямини зявної; очевидно пізнійше сей уклад ядер в ряди зникає, в міру як округлі, зовсім вільні ядра свobodно розсевають ся по сітчастій лучноткани. На фіг. 4 бачимо такі довгі ряди ядер лімфатичних, іменно по середині thymus, на місці граничнім з наболонію. Поніше маємо кілька верстов клітин індиферентних, що ограничають ямину зяв, яко звичайна наболонь; зараз над наболонію типовою бачимо в ряди уложені клітини, що правда, також наболонні, але вільнійші, котрих границі майже затирають ся, так що плязма поодиноких клітин немов зливає ся в одну масу. Дальше ід середині бачимо ряди лімфатичних ядер, що мають свій початок в наболони.

Так отже на підставі повіше описаних помічаній приходимо отсе до рішучого заключеня, що велика скількість лімфатичних елементів (ядер), які в незмінній формі (они відтак перетворюють ся в червоні тілця крови, о чім поніше буде бесіда) мож і в найпізнійших стадіях розвитку слідити, виводять ся з наболони слизистої оболонки ямин зявних — значить походять прямо з ентодерми, що є фактом загальної, далекосяглої ваги теоретичної. Ми певні, що наболонь є одним жерелом лімфатичних елементів желези thymus, а ніколи, як се навіть і до сегодня думають, лімфатичні елементи thymus не походять з мезенхіми; ми ніколи не бачили, щоби до тіла thymus входили лімфатичні ядра з окружаючої лучноткани, але навпаки ми помічали — особливо вже у старших стадіях — дуже громадне вилучанє левкоцитів з тіла thymus до прилягаючої лучноткани, як се дуже добре бачити мож на фіг. 5. Подібні образи бачити мусів і Mauger. Жаль лише, що німецький вчений в тім случаю заявив мало віри і певности в самого себе і в те, що бачив під мікроскопом, але, йдучи за загально пануючими поглядами, він тим вандрівникам казав іти в противнім вєпятнім напрямі, то єсть сказав, що

они йдуть з лучноткани до середини тіла thymus. „...nach mehreren Monaten — каже Maurer¹⁾ — fallen diese Zellen (epithelialen Ursprunges) in ihren epithelialen Charakter zurück, in dem ihre Proliferationsfähigkeit erschöpft ist. Zu gleicher Zeit brechen längs der Blutgefäße und Bindegewebszüge vom umgebenden Bindegewebe lymphoide Zellen in grossen Massen in die Thymus ein und etabliren sich in einer intermediären Zone, wo sie Lymphfollikel bilden“. Таке заключене Maurer-а зовсім нічо нам не пояснює, а противно оно лиш затемнює належний погляд на справу. Maurer, що казав лімфатичним елементам перетворити ся назад в клітини наболонні, був приневолюений konieczністю вияснити собі якимсь способом ту обставину, що лімфатичні елементи аж до найпізніших стадій розвою thymus, ба навіть тоді, коли вже железа thymus на добре подала ся до інволюції, лімфатичні ядра все ще таки становлять головну складову масу тіла thymus. Тому то сей образ, де він в дотичній стадії бачив громадно розміщені левкоцити в безпосередно прилягаючій до желези лучноткани, був для него дуже пожаданим, бо він єму вказав нове жерело лімфатичних ядер, котрі саме прямували „massenhaft in die Thymus hinein, wo sie sich in einer intermediären Zone etabliren..“ Maurer ніколи не був би дійшов до подібних хибних результатів, наколи би він був а priori не прийняв теорії специфічності листків зародочних, після котрої всякі елементи лімфатичні походять лише з мезенхіми (а ніколи з енто- чи ектодерми).

Ми єсмо в посіданю цілих серій препаратів з всіляких стадій, котрі не лише нас як найосновніше переконують о неправдивости повисших гадок Maurer-а, але разом насунули нам еще дальше сягаючі гадки. Іменно ми певні, що железа thymus в тілі звівиривім, а передовсім у риб, над котрими отес свої досліди ведемо, становить одно з найперших огнищ левкоцитів. Ми розглядали кількокрратно дотичні препарати, почавши від наймолодших зародочних стадій, і завсїгди доходилисьмо до того самого заключеня, що: в ніякій части тіла петруга (*Salmo fario* L.) так довго не мож хочби й одного левкоцита бачити, як довго железа thymus еще находит ся в найраньших стадиях розвою, то єсть як довго в ній лімфатичні елементи еще не появили ся. Ми не подибували ніколи лімфатичних ядер в організмі ембріональних осібняків, у котрих thymus оказувала ся доперва лише яко наболонне згрубіне горішної

¹⁾ Fr. Maurer, Schilddrüse und Thymus der Teleostier. Crop. 170. Morphol. Jahrbuch XI. Bd. 1886.

стїни ямини зявної; натомість в великій кількості постерігали ми левкоцити в різних частях тіла особнїв, що мали глезу (thymus) уже доволі розвинену, thymus з великим засобом лїмфатичних елементів у внутрі. В більшій мірі ще мож се було постерігати на препаратах трохи пізнійших стадій (пр. фіг. 5), на котрих, як бачимо, левкоцити цілими масами виходять з грушковатого тіла желези і розходять ся по сусідних тканях.

Такі образи нас конче удержують в вірі що железа thymus є для організма звіриноґо, а особливо у риб, мовби першою фабрикою левкоцитів, машиною, котра функціонує лише до певного означеного часу, доки не витворяють ся в організмі иньші огнища, як стриж кістний (у риб єго нема¹), селезінь і иньші орудя лїмфатичні, що відтак переймають на себе ролю продукованя левкоцитів. Гадку сю висказуємо тим певнїйше, що і найновїйші дослїди над глезою у Raj-а довели J. Beard-а¹) до зовсїм таких самих здсгадїв. Таке заключене — поки-що ипотеза, основана на дуже точних помїчанях — пояснеє нам zarazом і прояв інволюції сего орудя, що, сповнивши свою задачу для устрою організма, стає для него злишнім, а яко такий мусить нидїти і загинати.

Глеза, як сказано є твором тимчасовим, твором, що у всїх звїрят хребових до певної пори єствує, а відтак, у одних вчаснїйше, у других пізнїйше, зникає з організма. Заник (інволюція) глези, подїбно як і єї розвиток, має ще багато обставин не прояснених; тож, нашими дослїдами думаємо дати доволї важні причинки до пізнаня способу заниканя сего органа.

У чоловіка, як взагалї у висших ссавцїв, глеза доходить до найвисшого розвою уже в часї внутриматеринчого житя даного особня; очевидно затим, що і інволюція єї у тихже звїрят розпочинає ся уже в матерниці або коротко, зараз по народженю. Інакше має ся річ з глезою риб. У них глеза починає розвивати ся з хвилию, як особень (individuum) вступає у фазу житя послїзародочного (постембрионального) то єсть доперва по вилязї. Тому то й єствованє єї у риб, навіть уже в дуже пізних стадиях, бо майже у зовсїм вже старих особнїв, бодай незначними насчадками репрезентованє. У шаранів пр. понад три ссм довгих, ми находили глезу дуже сильно розвинену. Значить ся і інволюція єї у тих хребовцїв починає ся о много пізнїйше, ніж пр. у ссавцїв.

Першим характеристичним проявом інволюції глези єсть по-встаєванє в єї тілї ямин, то єсть місць вільних від лїмфатичних ядер,

¹) J. Beard, The Source of Leucocytes and the true Function of the Thymus. Anat. Anz. Bd. XVIII. 1900/901.

а заповнених звичайно ніжно-зернистою аморфною субстанцією (detritus). Творба таких ямин (гл. фіг. 5) в тілі, що перед тим визначалося великою збитою масою левкоцитів, пояснюється тою обставиною, що левкоцити старших стадій: одні виходять до судин кровних, другі взагалі виемігровують, як се ілюструє фіг. 5, а ще інші або переміняються в еритроцити або нарешті підлягають процесови розпаду і таким чином розсіпаються в згадану повисше мілку ніжно-зернисту масу (detritus) — одним словом левкоцити старших стадій виходять в великій кількості, а лиш дуже незначне число їх доповняється свіжими клітинами лімфатичними. Незначне їх число кажу, бо наболонь тепер стратила уже давню здібність енергично ділитися та витворювати дорогою мітотичною нові лімфатичні елементи в колишній кількості.

Другою важною ознакою знаменаною глезу в фазі її інволюції, являються концентричні (соосередні) тільця. Ці загадочні істотливі творива становлять до нині квестию спірну в мікроскопній анатомії. Особливо у риб їх дуже мало помічано, а один впрочім дуже поважний вчений заперечує цілковито їх існування в глезі риб: „Concentrische Körper“ — пише Schaffer¹⁾ — „wie sie als Reste der epithelialen Anlage (!) in der Marksubstanz der Säugethierthymus vorkommen, fehlen...“. Такий голословний висказ Schaffer-а є зовсім хибним, як взагалі дотична його розвідка являє надто поверхною і не науковою.

Наші дослідження дотично соосередочних тілець глези нас переконали, що: 1) соосередні тільця є примітною ознакою інволюції глези, 2) соосередні тільця не суть останками клітин наболонних, як се говорить Schaffer і як се взагалі подає нині в підручниках істотливіх і анатомічних, але, ми певні, що ті тільця походять з дряхліючих і заникаючих (облітеруючих) судин кровних, як се понизше буде ближше обговорено.

Ecker²⁾ був першим, що назвав повисші творива соосередними (concentrische Körper), він, можу сказати, був першим, що науково розсліджував будову тих тілець. До його часів знало ті творива лише яко тільця Hassal-а, а названі так від імені першого їх винахідника.

¹⁾ Schaffer, Über den feinen Bau der Thymus (der Fische) und deren Beziehungen zur Blutbildung. Kaiser. Akademie der Wissenschaften CII. Bd. Abth. III. Jahrg. 1893.

²⁾ Ecker — Blutgefäßdrüsen. Handwörterbuch der Physiologie von R. Wagner. Bd. IV. 1853.

Гассаль¹⁾ іменно перший їх помітив в крові серця. Після Гассалья ті творива складають ся з певного змісту, замкненого обгортною тобілкою з численних соосередно уложених міхурців (Bläschen). Такі творива бачив Гассаль і в глезі чоловіка і вважав їх за матерні клітини, що замикають в собі численні клітини і ядра дочерні. Зовсім подібно описує розвій концентричних тілець і Гінсбург²⁾, котрий однакж пізнане будови сих творів посуває наперед, бо викриває, що одні з них є поединчі, а другі зложені. Берлін³⁾ пояснює значенє концентричних тілець в той спосіб, що, уважаючи їх за нормальну складову часть глези, каже їм по певнім часі виходити з тіла глези і перемінити ся в железові клітини.

Основнійші досліди над змістом соосередних тілець робив Брух⁴⁾ і прийшов до пересьвіду, що ті творива зложені з самих міхурців (Bläschen), котрих клітини саме підлягають вспятному переображеню. Сей погляд повторив відтак Фрідleben⁵⁾ з більшим засобом наукових даних, в обширній монографії о глезі. Фрідleben не привязує до появи сих творів ніякої фізіологічної ваги для інволюції, а лише уважає їх виразом морфологічних змін, які появляють ся в глезі в часі її найсильнішої функції.

Противно згаданий вже повисше Екер появу соосередних тілець удержує в тісній звязи з інволюцією глези. Він приймає повстає концентричних тілець через збиванє в купки (купкованє) железових (слизних) міхурців, котрі відтак перебувають товщеву переобразу; тільки ті після повисшого автора найчисленніше появляють ся в перийоді інволюції. Те саме стверджує відтак Гіс⁶⁾, котрий однакж виключає звязь соосередних тілець з інволюцією. Сей послідний толкує повстає концентричних тілець в той спосіб, що новоутворені клітини (що се можуть бути за клітини, се нам не відомо) глези через якусь перешкоду не можуть розходити ся і тому збивають ся в купки, приймають плоску форму і таким робом дають почин до

¹⁾ Arthur Hill Hassal's *microscopische Anat. d. menschl. Körpers*. Aus dem englischen übersetzt von Dr. Kohlschütter 1852.

²⁾ Güngsburg, *Notiz über die geschichteten Körper der Thymus*, *Zeitschr. für klin. Medicin*. 1857. pag. 456.

³⁾ Berlin, *Etwas über die Thymusdrüse*, *Arch. f. d. holländ. Beiträge zur Natur u. Heilkunde* Bd. I, 1858.

⁴⁾ Bruch, *Zeitschrift f. ration. Medicin*. Henle und Pfeuffer. Bd. IX. 1850.

⁵⁾ Friedleben, *die Physiologie d. Thymusdrüse etc.* Frankfurt a. M. 1858.

⁶⁾ His, *Beiträge zur Kenntniss der zum Lymphsystem gehörigen Drüsen*. *Zeitschrift f. wiss. Zoologie* von V. Siebold und Kolliker. Bd. X. und XI. Leipzig 1860—62.

творби соосередних тілець, подібно, як се діє ся після Вірхова (Virchow. Archiv B1. III. 222 стр.) у веретвоватих канкроїдальних тілах. Для нас дуже важним є постережене Гісса, що ті елементи глези не легко дають ся випензлювати з ніжних прорізів, але звичайно лишають ся побіч судин в лучноткани.

Киллікер, а відтак Ендрассік¹⁾ збивають погляди Екера і Бруха, мовби то ті творива глези походили з прямої метаморфози клітин і ядер, але натомість приймають они, що переміну клітин і ядер в соосередні тіла поводить мертва безподобна (аморфна) субстанція, котра доокола них (клітин і ядер) в великій кількості наспорує ся. Ендрассік іменно є гадки, що згадана аморфна субстанція осаджує ся головню наоколо тих клітин, котрі вже в певній мірі підлягли вспятній переобразі. Він подибував в концентричних тільцях і еритроцити в більше або менше змінений формі, що після его думки походять з екстравазатів, подибуваних доволі в паренхимі глези. Ендрассік бачив ті концентричні творива лиш в часі інволюції глези, а іменно з початком інволюції бувало їх менше, в дальших стадиях інволюційних постерігав їх велику кількість. Порівнюючи соосередні фігури з волосницями, прийшов до пересвідчення, що концентричні тільця, розростаючи ся, стискають волосниці, так що ті послідні під натиском внішнім приневолені застановити чинність і підпадають здряхленю і заникови (облітерації). Таким способом хоче Ендрассік вяснити брак судин кровних в тих партиях глези, де находить ся велика кількість соосередних тілець.

Відтак належить еще згадати про Пауліцького²⁾. Сей автор в своїх дослідах прийшов до заключеня, що концентричні тільця творять ся з новоутворених клітин, маючих характер наболонний. Такі новоутворені клітини — Павліцки зовсім не подає, в чім они різнять ся від звичайних клітин наболонних — мають дуже скоро множити ся і таким чином повстають купки веретвовато уложених клітин, котрі завдяки внішньому натискови бувають сплюснені і дають початок концентричним тілам. Приймаючи повисший спосіб повставаня соосередних тілець, Павліцки уважає їх патологічними новоутворами, що в нормальній будові глези не появляють ся.

Найобширніша однак і по нашій думці найосновніша студія над глезою, а в особливости над розвоєм тіл соосередних, є праця

¹⁾ Jendrassik, Anatom. Untersuchungen über den Bau d. Thymus. Sitzungsberichte der Kais. Akad. der Wissenschaften 1856. Bd. XXII. Wien 1857.

²⁾ Paulitzky, Disquisitiones de stratis glandulae Thymi corpusculis. Halis 1863. Inaug. diss.

професора Афанасієва¹⁾. Афанасієв вважає концентричні тільця яко судини кровні (в поперечнім прорізі), що, підпавши здряхленню і заникови (облітерації), застановили свою чинність допровадження крові і таким чином поводують нидіне глези. Тільця соосередні становлять у Афанасієва вихідну точку інволюції глези.

Те, що Афанасієв бачив в глезі чоловіка і висших ссавців, ми сконстатували і в глезі риби, а передовсім у риби шарановатих (Cyprinoidei).

Концентричні (соосередні) тільця появляють ся в глезі особня (у риби) в доволі різних періодах життя зависимо від причин чисто індивідуальної натури. Ми порівнювали препарати особнів одні з другими, що на ви́шній визір представляли ту саму стадію життя — той сам рід (species), та сама великість — однак анатомічні відносини в заникаючій глезі виявляли дуже відмінні признаки і то вже як в загальній зверхній формі так також в особливости в її мікроскопній будові. На всякий случай однак соосередні тільця постерігали ми лише в глезі, котра, що найменше бодай тільки в декотрих мішчинках (фолікулах), почала хилити ся до інволюції. Іменно в тих партиях глези виступають соосередні тільця, де лімфатичні елементи розсувають ся, приймають вільнійше розміщенє, побільшають свою плязму і переміняють ся в червоні тільця крові, як се о тім буде бесіда понизше. Визір тих концентричних тіл як також і величина їх бувають ріжні; звичайно однак они округлі, округлаві або овальні, подовговаті: зовсім, під тим зглядом вже на перший погляд, пригадують нам судини кровні, які тут і там поперечно перекровні мож постерігати. Здаєсь нам однакож, що визір тих тілець зависить головно від часу, в яким ми їх студіюємо, значить, чи в часі розвитку, зрілости, чи в стадії вспятної переобрази. Замітимо, що концентричні тільця найінструктивніших образів достатчають в фазі розвитку, в стадії, котру лиш щасливим трафом мож підхопити; тому то часто з поміж препаратів зроблених з кількох особнів на око тої самої стадії, лише декотрі пригідні до постерігання соосередних тілець, бо, як сказано повисше, із-за чисто індивідуальних причин у одних особнів глеза вже на добре улягла інволюції і тільця концентричні виступили в великій скількості, у других інволюція того орудя ледви що розпочала ся і концентричні тільця лиш в дуже скупім числі появили ся. Сей послідний случай, де соосередні тільця виступили в малім числі і де глеза ледви що по-

¹⁾ Афанасієв, Über die concentrischen Körper der Thymus. (Archiv. f. microscop. Anat. Bd. IV.)

чинає хилити ся до інволюції, се як раз найлучша стадія до ступийованя концентричних тілець, бо тут они саме находять ся в першій акції повстання то єсть в розвою.

Розглядаючи препарати, на котрих глеза осягнула вже найвищий ступень розвою, завважали ми в ній зміни, що попереджали безсумнівно зближаючи ся інволюцію глези. А іменно творба згаданих повисше ямин в тілі глези і доволі нагла зміна у визорі судин кровних становлять отту признаку інволюції. Endothelia (внутроболони) судин кровних починають грубіти і витворюють велику скількість ядер, що, укладаючись соосередно, надають судинам концентричний визір. Велика скількість клітин (ядер) повязаних часто з собою межклітинем (фіг. 6 d). зменьшає світло судин, а часом зовсім, особливо у волосниць, затирає проводи і тим чином поводувє їх здрахленє і заник (облітерацію).

На фіг. 6 бачимо цілий ряд тілець соосередних, почавши від звичайних нормальних аж до таких судин, що вже не функціонують, бо світло їх зменьшене цілковито, так що ніяким способом тільця крови не можуть через них просмикувати ся. Фіг. 6 a, представляє нам вельми цікаву форму, котру на перший погляд сейчас пізнаєм яко судину, хотяй endothelium єї аномально згрубіле відріжняє єї від звичайних нормальних судин. Друга з черги форма (фіг. 6 b), вправді значно уже ріжнить ся від попередньої, але все ще таки представляє нам судину, чого доказом хочби отті численні тільця крови, які в єї світлі добачуємо; однак сильно згрубіле endothelium та численні концентрично уложені ядра кажуть нам уважати сю форму нічим иньшим як лиш концентричним тільцем (Гассаля тільцем). А вже тим певнійше можемо те саме сказати про три слідуєчі форми під c, d і e, що нам вже зовсім типові концентричні тільця зображають. Для нас особливо займавою і переконуючою являє ся послідна форма під e, де ми бачимо дуже хорошо заразом і типове концентричне тільце і прилягаючи до него волосницю (в середині єї находимо одно червоне тільце крови), волосницю, котра також вже находить ся в стадії твореня концентричного тільця: endothelium починає грубіти і витворювати ядра імовірно дорогою звичайної ділитби, бо се найкоротший спосіб витворби нових клітин, який довершує наглі морфологічні процеси клітин і тканий, передовсім процеси, що провадять до знидіння тканий. Ся фіг. 6 e, є для нас ще з иньшого згляду дуже важною: іменно на ній є наглядно увиднений факт, який ми в многих місцях констатували, а чого імовірно Афанасієв не постеріг, іменно, що множба ядер в концентричних тільцях слідує не лиш виключно на счот еп-

dothelium, але також і tunica accessoria причиняє ся в великій мірі до побільшення числа ядер. Хочби отті чотири ядра, що прилягають зовні до концентричного тільця і котрі ніяк не є продуктом endo-thelium, насувають нам повнеше гадку.

Концентричні тільця в пізніх стадіях зникають. Іменно їх клітини ендотеліальні зливають ся мовби в одну безвиразну масу, що відтак приймає вид дрібно крупнистий і розпадає ся на дрібненькі зеренця. Найвчаснійше однак підлягають процесови розпаду самі ядра, що відтак випадають з клітин і осадують ся в окружуючій ткани яко дрібно зерниста, мілка маса, що як раз прискорює патологічні зміни, а тим самим і нидіє концентричних тілець, колишних судин кровних. Очевидна річ, що в місце концентричних тілець, як в загалі в місце усеї зникаючої глези являє ся слабка лучноткань, що тут розростає ся надзвичай швидко.

Казаринов¹⁾, що в своїй розвідці о глезі силкує ся збити погляди Афанасієва, а сильно підпирає погляди Гончарукова, мовби то концентричні тіла були останками клітин наболонних, не знаходить в нас приклонників. Противно результати, до яких ми дійшли по дуже основних дослідях над глезою рыб, рішучо промавляють против Гончарукова і Казаринова, а клонять ся на сторону Афанасієва²⁾.

(Розвідку Казаринова хотів я дістати в оригіналі і робив всякі заходи, щоби її получити. Коли однак мій труд в тім згляді зістав безуспішним, бо навіть в Науковім Товаристві ім. Шевченка сказано мені, що годі... як нема її в бібліотеці Товариства, я покористував ся тим, що попало в руки, а се є звітом професора Арнштайна (Arnstein) в „Jahresberichte für Anatomie und Entwicklungsgeschichte von G. Schwalbe. 1900“, що наводжу отее в дословнім виді: „In dem adenoiden Gewebe der Follikel der Thymus findet der Autor epitheloide Zellen einzeln oder in Gruppen; nebenbei findet er häufig junge Hassal'sche Körperchen, die aus ähnlichen Zellen bestehen, daher verwirft der Autor die Ansicht von Afanassiew u. adoptirt die Ansicht von Gontscharukow (Russ. Archiv f. Pathol., klinische Medic. u. Bacteriologie 1895), laut welcher die Hassal'schen Körperchen Reste des ursprünglich epithelialen Bildungsmaterials darstellen).

¹⁾ Kasarinow G. Zur Anatomie der Gl. Thymus Dissertat. St. Peterburg. 1899.

²⁾ Affanassiew, Weitere Untersuchungen über den Bau und die Entwicklung der Thymus und der Winterschlagdrüse der Säugethiere. (Archiv f. mikroskop. Anat. Bd. XIV).

Дальшим дуже важним фактом, нами по раз перший взагалі сконстатованим, є переміна левкоцитів в червоні тільця крови, що ми в глезі риб в перийоді її інволюції в великій мірі постерігали. Що глаза у риб є в можности витворювати червоні тільця крови, сего ні котрий з повисше згадуваних авторів не слідив. Schaffer¹⁾, котрого студії в тім напрямі належать взагалі до найновіших дослідів, прямо виключає участь глези (у риб) в твореню крови. „Der histologische Bau“ — каже сей автор — „scheint meine Vermuthung, dass es sich auch hier um ein zur Bildung von Blutkörperchen in Beziehung stehendes Organ handle, nicht zu bestätigen und die einzige Analogie (poz. der Thymus der Fische) mit der Thymus der Säugethiere besteht in der innigen Verbindung von epithelialen und lymphoiden Zellen“... Ся гадка Шаффера, як також і повисше єго запереченє єствованя концентричних тілець в глезі риб, зовсім недоладні і доводять лише або злї методики в зладжуваню на ту ціль препаратів або взагалі доволі поспішної, поверхної роботи, що відтак доведла єго до хибних результатів.

Ми на основі дуже точних помічаній дійшли до пересвїду, що глаза gl. thymus риб не лиш тільки зовсім гомольогічна з глезою висших ссавців не винимаючи і чоловіка, але ми думаємо, що глаза риб, се є найнизших хребовців, задержала багато примітивних питомостей, яких вже годї добачити у висших звірят пр. у ссавців і через те она у риб представлає для помічателя більший інтерес науковий: морфольогічні дослідї над глезою риб становлять властиву дорогу до пізнаня значеня і функції сего орудя в тілі звїринімі взагалї.

Переміну левкоцитів в червоні тільця крови бачили ми на многих препаратах; однак найвизначнійші в тім зглядї образи получили ми з караса золотого (*Carassius auratus*) понад 6 см довгого — особня, що находив ся в дуже пізній стадії розвоєвій (се був примірник малий, що після запевнюваня торговця мав яких 7 літ). Фір. 7 і 8, що зладжені саме із повисшої стадії *Carassius aur.*, на опак Шафферови — наглядно показують, „dass es sich hier um ein zur Bildung von Blutkörperchen in Beziehung stehendes Organ handelt“.

Фір. 7. відрисована вірно при помочи camera lucida достатчає нам вельми багато материялу на піддержанє нашої гадки. Іменно бачимо тут: 1) і типові левкоцити *a* і типові червоні тільця крови *b*;

¹⁾ Гляди стор. 3.

2) як найвиразніші форми перехідні поміж обома повисшими типами клітин: лімфатичні ядра, означені буквою α , вправді зовсім ще схожі на типові левкоцити (α), але вже відрізняють ся від тих послідних тонесеньким пластиком плязми; другі ядра, означені буквою β , побільшили уже значно свою плязму і через те у своїм виді далеко відійшли від левкоцитів, хоть ядро їх все ще таки виявляє свою генетичну звязь з типовими лімфатичними ядрами; відтак клітини γ , що вже наближають ся до червоних тілець — а на послідку типові вже еритроцити δ .

Те саме бачимо і на фіг. 3, що представляє нам тож усі типи згаданих клітин: з одної сторони (левкоцити) білі тільця крови і червоні тільця крови, з другої сторони посередні форми — усе те при сильнім побільшеню. Сей послідний рисунок, зроблений також при помочи camera lucida, не зображає намонотяглого поля, баченого в мікроскопі, але він є комбінацією з кількох найхарактеристичніших партий, ілюструючих дуже наглядно найважнійші етапи розвою червоних тілець. Іменно, коли глядимо на глезу (під мікроскопом), почавши від долішних, підставових верстов що-раз то вище в гору, переєуває ся перед нашими очима цілий ряд перехідних форм, так що, вийшовши від уложених в ряди левкоцитів, що находять ся тут зараз при оболонці горішньої стіни ямини зявної, доходимо до як найкрасших типових форм червоних тілець, залягаючих цілими масами горішню полосу желези і прилягаючу (до неї) слабку лучноткань. (Замічу, що глеза в тій стадії уже не виявляє жадної дефінітивної форми, а лише представляє ся яко безподобна, з ріжних форм повисших клітин зложена маса, котру наскрізь переростає сильно розвинена лучноткань).

Препарати дотичної стадії (фіг. 7 і 8) спеціально для квестиї переміни червоних тілець становлять для нас неоцінену вартість, а то вже хочби тому, що прямо треба особливого щастя, щоби підхопити сей розвоєвий момент, котрий — як сконстатувалисьмо — у глезі не довго триває. Іменно ми спрепарували дуже багато примірників, що на око видавали ся бути тої самої стадії, що й повисша, однак в жаднім з них не получили ми так переконуючих і так інструктивних образів, бо всюди бачилисьмо глезу або у вчаснійшій стадії розвоєвій, де мала еще виразну грушковату чи палковату форму, або знов в стадії значно пізнійшій, де глеза ледви якимись насадками питоменних елементів була репрезентована.

З повисшою фіг. 8 єсть в тісній звязи також і слідуюча фігура 9, що нам представляє червоні тільця крови в найпізнійшій стадії їх єstownаня, а іменно в стадії їх вже цілковитого розпаду на мілку,

дрібно зернисту субстанцію т. з. *detritus*. Сей образець, є також важним причинком до морфольогії тілець крови взагалі, а особливо до морфольогії тілець крови у риб, що для нас доселі є *terra incognita*.

Зібравши таким чином усе повисше сказане о глезі, а передо-всім, узгляднивши усї три послідні фігури, відносячі ся до історії червоних тілець крови, являє ся ось що:

Глаза риб становить один з найперших орудий, що в перийоді розвою свого (з наболони) витворює левкоцити і підмагає ними увесь організм. Коли однак виобразують ся в тілі риб иньші лімфатичні орудя, що переймають на себе функцію глези, та послідна стає для організма злишною і починає нидіти-заникати. Першим обьявом нидія єї є притуплене здібности клітин наболонних в витворбі лімфатичних клітин, хотяй до послідної хвилі інволюції глези постерігаємо в тій послідній значну скількість левкоцитів — значить ся: згадана здібність наболонних клітин цілком не уступила. Лімфатичні клітини одні входять до судин кровних, другі з них виходять взагалі (fig. 5), але без порівняня більша їх скількість остає в тілі глези. Питанє зاتم, яка судьба жде тих позісталих левкоцитів в глезі? Отже слідує відповідь: они переменяються (те саме імовірно діє ся і з левкоцитами, що увійшли до судин) в червоні тільця крови, які в глезі в стадії єї інволюції цілими збитими масами (комплексами) наспоряють ся.

Афанасієв, котрий також помічав велику скількість червоних тілець крови в нидіючій глезі, не могучи знайти иньшої відповіді на задаване собі питанє, звідки они тут в такій масі взяли ся, пояснює собі єю появу тим, що се як раз тільця крови, котрі виступили з судин кровних, переменених на концентричні тільця. Таке заключене Афанасієва є оправдане о стільки, що Афанасієв, не бачучи переменяні левкоцитів в червоні тільця крови, а лише спосіб перетворби судин кровних в концентричні тіла (де судини в наслідок розросту *endothelium* поменьшують — часами цілковито — своє євітло і таким чином утруднюють кружбу крови), міг зовсім спокійно приймати, що „*Der Untergang der Thymusdrüse und die Veränderungen der Intima derselben bringen ausser der Bildung der concentrischen Körper Störungen in der Blutcirculation zu Stande, die sich durch das Auswandern einer grossen Zahl weisser und rother Blutkörperchen manifestiren*“. Ми рішучо сеї гадки Афанасієва не поділяємо. Після нашої гадки виступлене червоних тілець крови з судин, котрих *endothelium* і *tunica accessoria* (оболонка прилучна) не лиш погрубшали але й скременили, є прямо фізично неможливе.

Тим паче не можемо прийняти повисшого погляду Афанасієва, що нам походжене червоних тілець крові, які помічаємо в глезі під кінець її інволюції у великих масах, є зовсім знане, як се повисше (fig. 7 i 8) доказано. Але натомість годимо ся вповні з Афанасієвим, що „Die Anhäufung einer grossen Zahl angequollener (гл. fig. 8) und vergrößerter Blutkörperchen im Follikel kann nicht ohne Einfluss auf das betreffende Gewebe bleiben; das Reticulum sowie die Lymphonelemente werden von Seiten dieser Gebilde einem Drucke ausgesetzt, atrophiren in Folge dessen und zerfallen“.

Замічу єще, що червоні тільця лише через певний час євтують в глезі в незмінній формі. По часі плязма їх і ядро приймають вид крупнистий і розпадають ся в мілкий зернистий detritus, котрий передовсім приспішує до решти інволюцію глези, а поводити натомість скорий розріст лучноткани (роз. в місце глези).

Близші відомости що до анатомії і фізіології глези (gl. thymus) подам в слідуєчій розвідці, де будуть крім Сурриноїдеї в всякі инші роди особливо риб морських узгляднені. Стація зоологічна в Тереті, куди отсе в половині вересня с. р. під проводом ВП. професора дра О. Нусбавма в наукових цілях виїжджаю, єсть спеціально для сеї студії догідним місцем; тож надію ся зібрати багатий матеріал, щоби основнійше підперти мої повисші заключеня та приспорити нових помічаній в тім предметі так займавм.

Повисша праця провозжала ся в робітні анатомії порівнательн о ц. к. університета у Львові під наглядом мого Високоповажаного Професора Д-ра О. Нусбавма, котрому отсе складаю прилюдно щиро-сердечну подяку за ласкаві вказаня і інструкції, якими підпомагав мене як в зладжуваню препаратів, так і в призбираню дотичної літератури. Руска термінологія і номенклатура тут ужита після проф. Івана Верхратского.

У Львові, дня 15. липня 1901.

Пояснення до таблиці.

Fig. 1. Часть стрілового проріза через засновок глези зарода пструга (1,5 см. довгого). *c* cutis lamella. *r* в ряди усталені, розповільнені клітини наболони. *l* білі тільця крові. Ос. 4, S. homog. Imm. $\frac{1}{15}$ b. Mikr. Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 2. Стріловий проріз через лівий засновок глези (thymus) молодого, 2,6 см довгого караса звичайного. *b* розповільнена лучноткань. *k. e.* наболонь ями зявної. *k* хрястний завязок костий черепних. *m. m* мяз.

T Thymus. Ос. 2, S. 3. Mikr. Merk. u. Ebell. рисовано при camera lucida.

Fig. 3. Частина повизшого препарата (як фір. 2) з місця * при сильнійшій побільшеню. *g* судинка кровна. *b* елементи лучнотканні. *l* левкоцити (білі тільця крові). Ос. 4, S. homog. Imm. $\frac{1}{15}$ b. Mikr. Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 4. Частина стрілового проріза через засновок глези Carass. vulg. 2,2 см довгого. *k. e.* наболонь горішньої стіни ямини зявної. *r* в ряди уложені клітини наболоні. *l* левкоцити. Ос. 2, S. hom. Imm. $\frac{1}{15}$ b. Mikr. Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 5. Стріловий проріз через глезу 3 см довгого караса золотого. *T* глеза. *b* вільна лучноткань. *k* кости черепні. *k. e* наболонь крипії ями зявної. *l* левкоцити, що виступили громадно з глези і розсипалися в окружуючій вільній лучноткани. *j* ямини повстали в тілі thymus, що знаменають початок її інволюції. *n* шпара, відділююча підставу thymus від наболони горішньої стіни ями зявної. *p* підставові пласти thymus. *m* мяз. *x* місце, що виглядає як прірва межі підставою а горішньою частию thymus, походить із-за того, що проріз через тіло глези є поведений більш латерально, так що мікроскотом не дійшов еще до вузенької немов шийки thymus.

Ос. 2, S. homog. Immers. $\frac{1}{15}$ b. Mikroskop Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 6. Соосередні тільця a, b, c, d, e. Ос. 4, S homog. Imm. $\frac{1}{15}$ b. Mikr. Merk. u. Ebell. (tot. tubus.). Рисовано при camera lucida.

Fig. 7. Частина глези при підставі, з'ображаюча білі тільця крові (левкоцити) a, червоні тільця крові b і відтак всякі перехідні форми лімфатичних клітин в еритроцити α , β , γ . Ос. 2, S. homog. Imm. $\frac{1}{15}$ b. tot. tubus. Mikr. Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 8. Зкомбінований рисунок, що нам з'ображає левкоцити *l*, перехідні форми левкоцитів в червоні тільця крові *l'*, *l''*, і відтак ріжні стадії червоних тілец крові *r*, *r'*, *r''*, *r'''*, *r''''*. Ос. 4, S. hom. Imm. $\frac{1}{15}$ b. tot. tubus Mikr. Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 9. Червоні тільця крові, що, досягнувши найвищого ступіню розвитку, розпадають ся, творячи мілку ніжню крупнисту субстанцію (detritus). Ос. 2. S. hom. Imm. $\frac{1}{15}$ b. tot. tubus. Рисовано при camera lucida.

Fig.1.

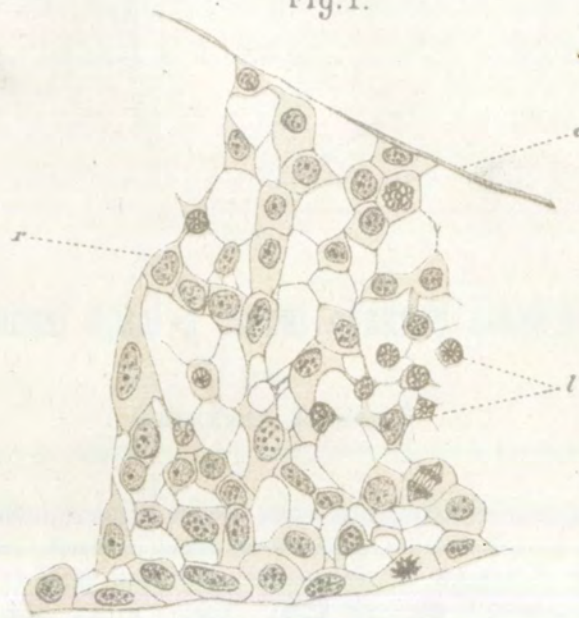


Fig.2.

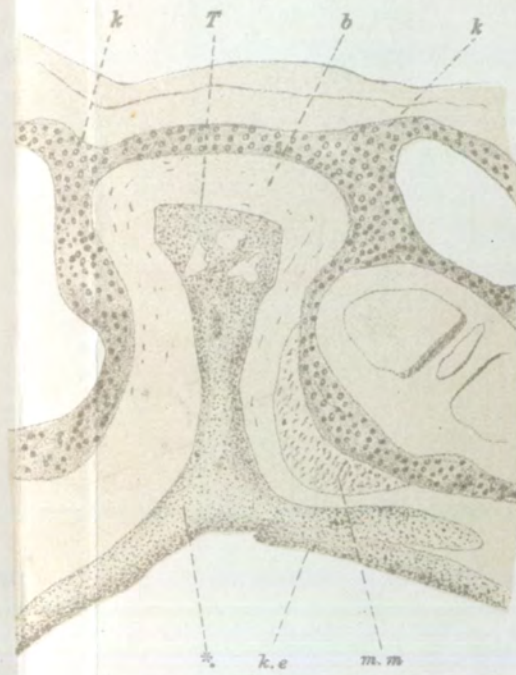


Fig.3.



Fig.4.

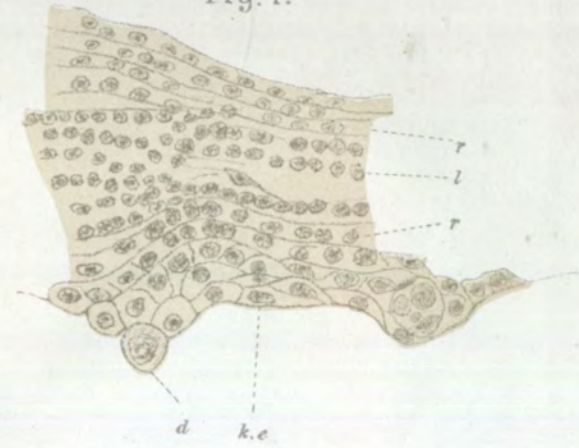


Fig.5.

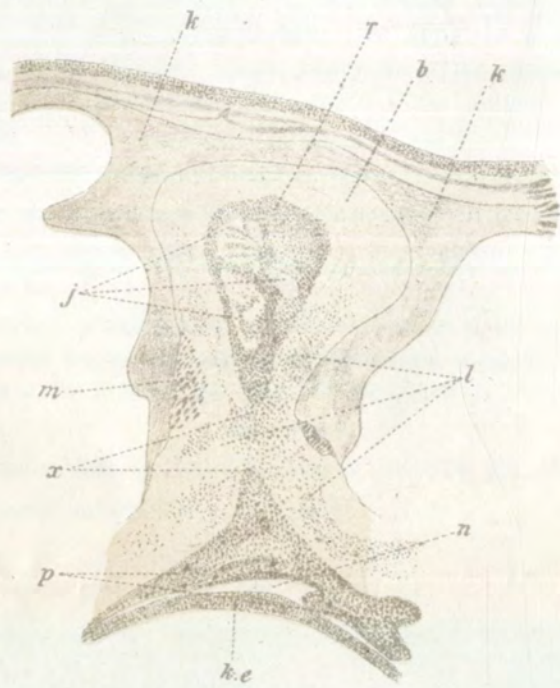


Fig.6.

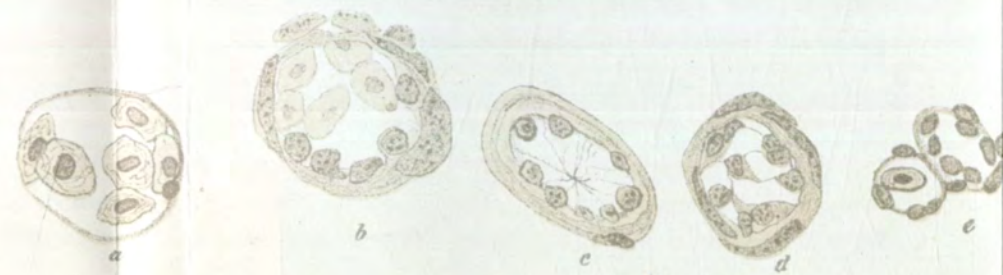


Fig.7.



Fig.8.



Fig.9.

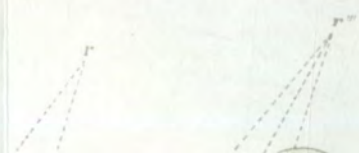


Fig.5.



Fig.6.

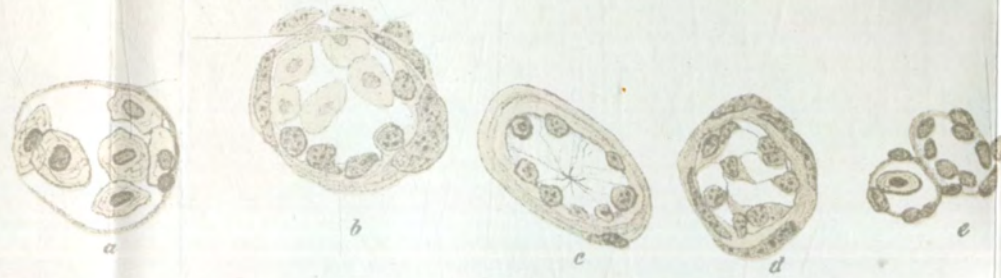


Fig.7.



Fig.8.

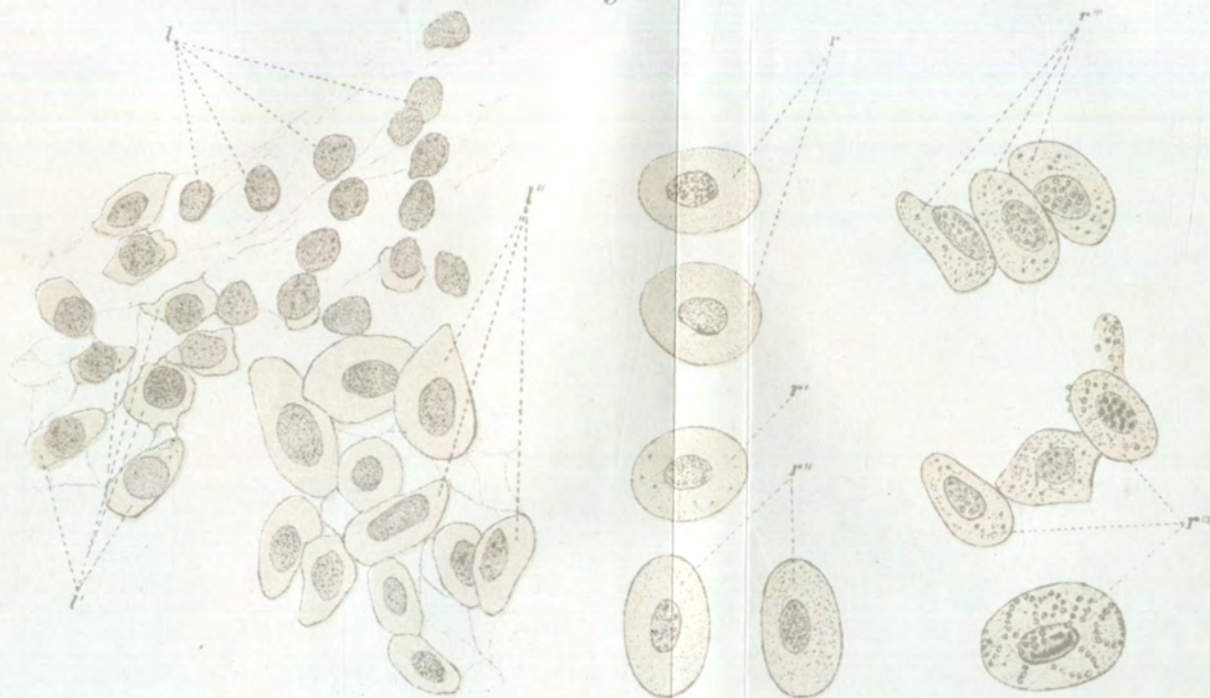
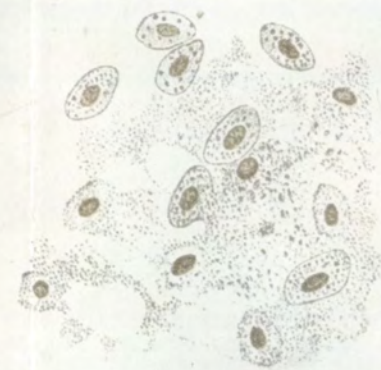


Fig.9.



WTA. PRZYSZŁAK LŁWÓW.

Львівська бібліотека
АН УРСР
№ 11

Львівська бібліотека
АН УРСР
№ 11

Найновіші праці з теорії функцій аналітичних

подав

Володимир Левицький.

Найновіші праці в теорії рядів степенних обнимають головню три проблеми: значіне рядів розбіжних, узагальнене ряду Taylora та заховане ся ряду на обсягу збіжності. В послідних двох роках появило ся дуже много цінних праць, що обнимають згадані проблеми; найважнійші є праці Borel'a, Fabry, Phragmén'a, Painlevé, Mittag-Leffler'a, Pringsheim'a та много иньших. З праць тих хочу звернути увагу головню на праці Mittag-Leffler'a та Pringsheim'a, що появились в р. 1900; но не можу ніяк поминути славної конкурсової роботи Borel'a: *Mémoire sur les séries divergentes* (*Annales de l'École normale* 1899. ст. 1—136), де сей знаменитий геометр займає ся значінем рядів розбіжних і їх численними застосованями, особливо в теорії рівнань ріжничкових. Не беру ся зовсім подавати змісту сеї праці, зверну однак увагу на дуже красне твердження з теорії функцій аналітичних, до якого Borel дійшов в сій роботі. Ї оно таке:

Наколи $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$

є функцією аналітичною, а її долученою функцією є функция

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \dots + \frac{a_n z^n}{n!} + \dots,$$

то доконечною і достаточною условиною, щоби функцию $f(z)$ можна було перевести по за лук $\alpha\beta$ кола збіжності, є, щоби істнувало число додатне $\rho > 1$ таке, що для $|z| = \rho$ добуток

$$e^{-a} F(az)$$

стремить одностайно до зєра, наколи a ростє in inf. Очевидно:

$$F(az) = a_0 + \frac{a_1 za}{1!} + \frac{a_2 z^2 a^2}{2!} + \dots$$

1. Mittag-Leffler впроваджує в своїй праці: „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène“ (Acta matem. т. XXIII. ст. 43—62 і т. XXIV. ст. 183—204 і ст. 205—244) нове поняття т. зв. зв'язки. На площі x маємо сталу точку a ; з неї поведемо луч (пів-луч) і обернемо його раз довкола a та на кожному положенні луча зазначимо однозначним способом таку точку a_1 , що $|a_1 - a|$ є більше, як певне число додатне; $|a_1 - a|$ може бути навіть безконечно велике. Наколи $|a_1 - a|$ є скінчене, то з площі x вилучимо ту частину луча, яка іде від a до безконечності. Той залишок, який остане, наколи поведемо всі татя на пл. x , називає Mittag-Leffler зв'язкою; точка a є її середоточкою, a_1 вершинами. Одна зв'язка є вписана в другу, наколи її всі точки лежать в другій, а вершини обох є спільні. Наколи маємо числа сталі: $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a)$, ..., що підлягають правилу Cauchy т. є. що границя $\left| \sqrt{\frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)} \right|$ є скінченна, то згадана зв'язка A є їх зв'язкою основною.

З даної зв'язки E можемо дістати нові зв'язки $E^{(n)}$, де n є якесь дане число додатне, слідуєчим способом. Возьмімо число додатне g достатньо мале і на лучу l , що виходить з a , відміримо $(n-1)g$; кожде коло зачеркнене з якої небудь точки того луча, заключає в собі частину зв'язки E . Наколи горішня границя для $g \in \rho$ і наколи на l відміримо довгість $n\rho$ і обернемо l раз довкола a , дістанемо зв'язку $E^{(n)}$. Зв'язка $E^{(1)}$ є колом, зв'язка $E^{(n+1)}$ обнімає зв'язку $E^{(n)}$, а всі зв'язки $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, ... творять частину зв'язки E .

До $E^{(n)}$ долучимо n інших зв'язок $E_\mu^{(n)}$ ($\mu = 1, 2, \dots, n$) в сей спосіб, що положимо $\rho_\mu = \alpha^\mu \rho$, де $0 < \alpha < 1$; конструкція є така, як в горі. Зв'язка $E_\mu^{(n)}$ лежить в $E_{\mu-1}^{(n)}$; $E_0^{(n)} = E^{(n)}$.

Подібно як $E^{(n)}$, так само будуюмо зв'язки $E^{(\frac{1}{n})}$ із зв'язки E о середоточці a . На лучу l будуюмо систем n колес о середоточках a $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_{n-1}$; кожде коло переходить через середоточку попереднього; їх лучі є $g, g_1, \dots, g_{n-1}$. Середоточки $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_{n-1}$ вибираємо в сей спосіб, щоби кожде коло перетинало попереднє в точках стичности стичних ідучих з a , та щоби $|\eta_1 - a| = g_1 = g$. Наколи g є достатньо мале, то наш систем колес творить все частину зв'язки E ;

наколи на l відміримо довгість $|\eta_{n-1} - a| + r_{n-1}$ і підставимо за r горішню границю ϱ та обернемо l раз довкола a , дістанемо звізду

$$E\left(\frac{1}{n}\right).$$

Наколи $F(x)$ є функція аналітична, то она є схарактеризована через елементи $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\mu)}(a)$, ..., до яких стосує ся правило Cauchy, що границя $\left| \sqrt{\frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)} \right|$ є скінчена. Галузь функції $F(x)$ є представлена через ряд степенний $\mathfrak{F}(x|a)$, а її переведення є в звізді A одностайні і правильні. Галузь ту значить Mittag-Leffler для звізди A через $FA(x)$ і випроваджує цілий ряд важних теоремів, які ми низше подамо (без довгих та глибоких доказів M. Lefflera).

а) Галузь $FA(x)$ можна всюда представити рядом $\sum_{\mu=0}^{\infty} G_{\mu}(x)$,

де $G_{\mu}(x)$ є функцією цілою:

$$G_{\mu}(x) = \sum_{\nu} c_{\nu}^{(\mu)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu};$$

сочинники $c_{\nu}^{(\mu)}$ є дані а ргіорі незалежно від вибору a і $F^{(\nu)}(\nu = 0, 1, \dots, \infty; F^{(0)}(a) = F(a))$.

Ряд $\sum G_{\mu}(x)$ є збіжний в кожній точці звізди A , а одностайно збіжний в кождім обсягу в середині звізди A . Сочинники $c_{\nu}^{(\mu)}$ мають ту вид:

$$c_{\nu}^{(\mu)} = \frac{1}{\mu^{\nu}} \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!},$$

а:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_{\mu}(x) = \lim_{n=\infty} G_n(x|a),$$

де:

$$G_n(x|a) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}$$

Сей ряд $\sum_{\mu=0}^{\infty} G_{\mu}(x)$ не є однак одностайно збіжний в континуумі, яке обнімає в собі один з вершків звізди A . Внутрі звізди A галузь $FA(x)$, здефініювана тим рядом, є правильна крім вершків звізди і має власність:

$$\left(\frac{d^{\mu} FA(x)}{dx^{\mu}} \right)_{x=a} = F^{(\mu)}(a) \quad \mu = 0, 1, 2, \dots$$

Повисший ряд можна уважати за узагальнене ряду Taylor'a.

б) Ряд $G_n(x|a)$, де $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, є величини, що підлягають праву Cauchy, інакше ся поводить для $n = 1, 2, 3$, а інакше для $n > 3$. В першій случаю існує такий обсяг збіжності K — який одержимо через конструкцію звізди $E^{(n)}$ з огляду на A — що ряд є одностайно збіжний в кождім обсягу в внутрі K , но перестає бути збіжний для кождої точки вні K . Для $n > 3$ ряд не має такого обсягу K . В тім случаю можна через вибір величин $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, зробити, що ряд буде збіжний в точці x' , а не є збіжний в точці x'' , що лежить на лучу, сполучаючим a з x' .

в) Наколи возьмем ряд:

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a) (x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n} = FA(x),$$

де сочинники $c_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ не є залежні від F , а і x , то можна ті сочинники так вибрати, що ряд сей буде збіжний в певній звізді $A^{(\frac{1}{n})}$ і представляє там галузь $FA^{(\frac{1}{n})}(x)$, а вні тої звізди є розбіжний. Та звізда є вписана в звізду основну величин $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, і для $n \geq \bar{n}$, де $\bar{n}$ є число додатне достаточнo велике, замикає сама в своїм внутрі обсяг скінчений, що належить до внутра звізди A . Звізда $A^{(\frac{1}{n})}$ є крім сего вписана в звізду $A^{(\frac{1}{n'})}$ для $n < n'$. — Више наведений ряд стаєсь для $n = 1$ рядом Taylor'a.

г) Возьмім ряд:

$$G_m^{(n)}(x|a) = \sum_{\lambda_1=0}^m \sum_{\lambda_2=0}^{m^2} \dots \sum_{\lambda_n=0}^{m^n} \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n} \right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n},$$

то існує звізда A_n вписана в A — одержимо її так, як $E^{(n)}$ для

Е — така, що $\lim_{m \rightarrow \infty} G_m^{(n)}(x|a)$ є одностаїно збіжна для кожного обсягу в внутрі A_n і представляє там галузь $FA_n(x)$.

д) Найже функція $f_\alpha(x, y, z, \dots)$ змінних $x, y, z, \dots$ буде для безконечного числа вартостей α означена однозначно в обсягу K_α , так що кождий обсяг K_α стає ся тою самою частию обсягу K , наколи α зближає ся безконечно до границі α_0 . Найже $(x, y, z, \dots)$ представляє якусь точку в внутрі K і най кожде число додатне σ відповідає иньшому числу додатному δ такому, що функції $f_{\alpha'}(x, y, z, \dots)$ і $f_{\alpha''}(x, y, z, \dots)$ мають значіне і що $|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma$, наколи $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$. Тоді $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f_\alpha(x, y, z, \dots)$ має точне значіне для кождої точки в внутрі, значить ся, є одностаїно збіжне в точці $(x, y, z, \dots)$.

Наколи $\alpha_0 = \infty$, то $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$ заступаємо через $\left| \frac{1}{\alpha'} \right| < \delta$, $\left| \frac{1}{\alpha''} \right| < \delta$.

Наколи $|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma$ в обсягу X , то кажемо, що $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f_\alpha(x, y, z, \dots)$ є в тім обсягу одностаїно збіжне.

е) Возьмім під увагу звізду A з середоточкою a і звізду $A^{(\alpha)}$ співосередну з нею і вписану в ню ($0 < \alpha < 1$), та най звізда $A^{(\alpha)}$ буде утворена через функцію творячу:

$$f(u|\alpha) = K u e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u} \right)^\beta - 1 \right] du},$$

де $\alpha = 1 - \beta$, $0 < \alpha \leq 1$, а K стала независима від u .

Можна ту функцію f все так вибрати, що при достаточного малім α звізда $A^{(\alpha)}$ заключає в своїм внутрі обсяг даний уміщений в A , так що для $\alpha = 1$ звізда $A^{(1)}$ переходить в коло співосередне з A і вписане в A .

Ту функцію $f(u|\alpha)$ можна далі вибрати так, що, коли A є основною звіздою для величин $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., ряд

$$S_\alpha(x|a) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a),$$

де:

$$\begin{aligned} G_\nu(x-a) = & \frac{h_{\nu-1}^{(1)}}{1!(\nu-1)!} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{h_{\nu-2}^{(2)}}{2!(\nu-2)!} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \dots + \\ & + \frac{h_{\nu-1}^{(\nu-1)}}{(\nu-1)!1!} F^{(\nu-1)}(a)(x-a)^{\nu-1} + \frac{h_0^{(\nu)}}{\nu! a!} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \end{aligned}$$

і де $h_{\nu-\mu}^{(\mu)} \left(\begin{smallmatrix} \mu = 1, 2, \dots, \nu \\ \nu = 1, 2, \dots, \infty \end{smallmatrix} \right)$ є сталі додатні означені, зависимі тільки від функції творячої — ряд $S_\alpha(x|a)$ має звізду збіжності ідентичну з $A^{(\alpha)}$, так що в внутрі $A^{(\alpha)}$ є:

$$FA(x) = S_\alpha(x|a),$$

а для $\alpha=1$ S_α переходить в ряд Taylor'a.

$\lim_{\alpha=0} S_\alpha(x|a)$ має звізду ідентичну зі звіздою A , а рівність

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} S_\alpha(x|a)$$

існує всюди в внутрі A .

Дальше можна ту функцію $f(u|a)$ так вибрати, що:

1) Наколи α є дане, границя горішна вартостей

$\left| \sqrt[n]{G_\nu(x-a)} \right|$ ($\nu = 1, 2, \dots, \infty$) рівнає ся 1 для x в внутрі $A^{(\alpha)}$, а є більша як 1, коли x лежить внї звізди $A^{(\alpha)}$.

2) Наколи x лежить в основній звізді A , існує все таке число $\alpha_0 < 1$, що для $\alpha < \alpha_0$ границя горішна $\left| \sqrt[n]{G_\nu(x-a)} \right| = 1$, а наколи x лежить внї A , границя та є більша як 1.

ж) Наколи E є звізда співосередна, гомотетична і в внутрі звізди $A^{(\alpha)}$, а x є точка на контурі E , а g границя горішна функцій $|FA^{(\alpha)}(x)|$, коли x біжить по контурі, та наколи:

$$FA^{(\alpha)}(x) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a),$$

то:

$$|G_\nu(x-a)| < g \quad (\nu = 1, 2, \dots, \infty)$$

Най $\alpha=1$, то наколи ϵ є коло збіжності, а g число додатне менше як обсяг збіжності ряду Taylor'a:

$$F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} F^{(\alpha)}(a)(x-a)^\nu,$$

та наколи g є границя горішна для $|F(x)|$ на колі о лучу r , а о середоточці a , а точка x є на колі, то:

$$\left| \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \right| < g \quad \nu = 1, 2, \dots, \infty.$$

2. Е. Phragmén в ноті: „Sur une extension d'un théorème de Mittag-Leffler“ (Comptes rendus CXXVIII 1899. 1. ст. 1434) розширяє початкові теореми Mittag-Leffler'a слідуочим способом:

Маєм дану криву C правильну або утворену з кусників кривих правильних, яка не переходить ані через початок ані через безконачність, замкнену або ні; тятем є луч від початку до одної якоїсь точки. Найже $f(x)$ буде функція аналітична правильна в всіх точках кривої C . Phragmén дефініює обсяг B (аналогічний до звізди М. Leffler'a). На кождім лучу, що іде з початку та перетинає криву C , відтинаєм по обох сторонах точки перетятя части тяглі, на яких функція $f(x)$ остає правильна і то части можливо великі. Ті части луча задержуємо, решту відкидаємо; ті задержані части творять обсяг B .

Приймім, що по всіх дорогах в внутрі B $f(x)$ дає ся інтегрувати. Возьмім сталі:

$$c_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z) dz}{z^{\lambda+1}} \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

і многочлени $G_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) такі, що $\lim G_\nu(x)$ стремить до границі $\frac{1}{1-x}$ в цілім обсягу, в яким не ма точки, лежачої на осі дійсній між 1 і ∞ (incl. 1 і ∞).

Утворім символічне виражене:

$$G_\nu(xc) + \frac{1}{xc} G_\nu\left(\frac{1}{xc}\right),$$

де степені c^λ треба заступити вираженнями c_α ; тоді

$$\lim \left[G_\nu(xc) + \frac{1}{xc} G_\nu\left(\frac{1}{xc}\right) \right]$$

представляє функцію $f(x)$ в цілім обсягу B і є одностайно збіжний в кождім обсягу в внутрі B .

2. Досліди А. Pringsheima, поміщені в розправі: „Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergencekreise“ (Sitz. Berichte der k. bayr. Akad. der Wissensch. in München 1900. ст. 37--100) займають ся захованєм ряду степенного на обводі кола збіжності, т. є. ряду:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu \quad (a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i)$$

для $X = \operatorname{Re} z i$, де R є луч кола збіжності.

Розсліді ті коротко зреасумуємо, а іменно наведемо висліди, до яких Pringsheim доходить.

а. Наколи $\sum a_n$ є властиво розбіжне, то границя $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X) = \infty$, де ϱ є дійсне додатне число меньше як 1. Вла-

стиву розбіжність ряду $\sum a_n = \sum (\alpha_n + \beta_n i)$ розуміти треба в сей спосіб, що що найменше один з рядів $\sum \alpha_n$ і $\sum \beta_n$ є розбіжний до $\pm \infty$.

Наколи $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ для якогось місця X має означену вартість, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ мусить бути або збіжний або невластиво розбіжний.

Сума $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{n\vartheta i}$ є тоді збіжна, наколи границя $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho e^{i\vartheta})$ має означену вартість для якогось місця $e^{i\vartheta}$, а члени $(\alpha_n \cos n\vartheta - \beta_n \sin n\vartheta)$ мають для себе (що найменше для $n \leq p$) рівні знаки, а так само члени $(\alpha_n \sin n\vartheta + \beta_n \cos n\vartheta)$.

б. Наколи ряд $\mathfrak{P}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ є збіжний для $|x| < r \leq 1$, то існують слідуєчі дві трансформації:

$$\mathfrak{P}(x) = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n$$

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} s'_n x^n + (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} s'_n x^n,$$

де:

$$s_n = \sum_{\lambda=1}^n a_{\lambda}, \quad s'_n = \sum_{\lambda=1}^n \lambda a_{\lambda}.$$

Наколи границя $\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = 0$, де $s_n = \sum_{\lambda=1}^n a_{\lambda}$, то тоді є також:

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varrho^n = 0.$$

в. Конечною і достаточною умовиною, щоби $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ була збіжна, є умовини:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varrho^n = A \text{ (означене число)}$$

і:

$$\lim \frac{s'_n}{n} = 0, \quad \text{де } s'_n = \sum_{\lambda=1}^n \lambda a_\lambda.$$

Обі ті умови подав вже давнійше Tauber (Monatshefte für Math. i Phys. 1897.) Можна їх розширити і вивістити дуже важний теорем.

Щоби ряд $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty a_n x^n$ був збіжний для якогось місця $x = X$ (на обводі обсягу збіжності), є конечною і достаточною умовиною, щоби границя $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ мала скінчену вартість, та щоби:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} (1 a_1 X + 2 a_2 X^2 + \dots + n a_n X^n) = 0.$$

Наколи $\lim_{n=\infty} n a_n = 0$, то ряд $\mathfrak{P}(x)$ є збіжний для кожної точки $x = X$ такої, що $|X| = 1$, наколи там $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ має скінчену вартість.

Най $\mathfrak{P}(x) = \sum_{v=1}^\infty a_v x^v$ має коло збіжності $|x| = 1$, то для $|x| < 1$ дефінює сей ряд однозначно і тяглу функцію, яку назначимо $f(x)$. На обводі кола є:

$$f(X) = \lim_{\varrho=1} f(\varrho X) = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X).$$

Для такого місця X , де $\lim \mathfrak{P}(\varrho X)$ не існує, є $f(X)$ неозначена. Pringsheim називає ту функцію $f(x)$ функцією приналежною до $\mathfrak{P}(x)$ (zugehörig), а $f(X)$ приналежною функцією крайною (zugehörige Randfunction).

Є можливий такий випадок, що ряд степенний $\mathfrak{P}(x)$ збіжний в колі $|x| = 1$ має на кождім лучу та здовж цілого обводу скінчену та тяглу крайну функцію $f(X)$, а мимо того $f(x)$ в окруженні якого місця X не буде ані тягла ані скінчена. Пр. функція

$f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x-1}\right)^4}$ є на кождім лучу та здовж цілого обводу без винятку тягла, а мимо то не є ані тягла ані навіть скінчена для найменшого окруження точки $x=1$.

Вже давнійше доказав Pringsheim (Sitz. Ber. der k. bay. Akad. 1895. ст. 337), що ряд степенний $\mathfrak{P}(x)$, який є ще в загалі збіжний і на місцях $X = \operatorname{Re}^{9i}$, є в загалі рядом Fourier'a. Тепер на основі сего випроваджує нові твердження.

г. Наколи функція Fourier'a $f(x)$, яка належить до ряду $\mathfrak{F}(x) = \sum a_\nu x^\nu$, а також і квадрат її беззглядної вартості, дає ся в колі збіжності і на нїм одностайно інтегрувати, то тоді збіжний є ряд $\sum |a_\nu|^2$, а також ряд $\sum C_\nu^{-\frac{1}{2}} |a_\nu|$, де $\sum C_\nu^{-1}$ є який-небудь збіжний ряд з додатними членами.

З того слідує дальше дуже важне твердження:

Ряд степенний $\sum a_\nu x^\nu$ є також на обводі кола збіжності абсолютно збіжний, наколи приналежна до него функція Fouriera $f(x)$ (в колі 1) має в оточенню точок обводу збіжності еще в загальї тяглу похідну таку, що її квадрат стає ся безконечністю що-найбільше на такій скількості тих точок ряду нижшого як перший, яка ся дає зредукувати.

д. Далі займає ся Pringsheim рядами степенними, які є на обводі збіжності **без винятку** (ausnahmslos) збіжні, а мимо того не є абсолютно збіжні. Пр. така є функція $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$; $f(e^{2\pi i})$ є скінчено-нетягла. Такі ряди, які без винятку, але услівно є збіжні на колі $|x| = 1$, мають вид:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} x^\nu,$$

де ε_ν є відповідно ± 1 , а M_ν є ряд додатних чисел, які одностайно ростуть в безконечність, так що $M_\nu > \nu$, а $\sum \frac{1}{M_\nu}$ є розбіжна; пр.

$M_\nu = \frac{1}{\nu \log \nu}$. Можна одержати ряди, що ся заховують анальо-гічно, наколи M_ν так виберем, що $\sum \frac{1}{M_\nu^2}$ є збіжна; а іменно виберем M_ν так, що:

$$M_\nu = \sqrt{\nu} m_\nu, \text{ де } \lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty,$$

а:

$$\varepsilon_\nu = (-1)^{\sqrt{\nu}-1}$$

Тоді покаже ся, що конечною умовиною, щоби ряд $\sum a_\nu$ був збіжний, де $a_\nu = (-1)^{\sqrt{\nu}-1} \frac{1}{\sqrt{\nu} m_\nu}$, є, щоби $\lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty$, а достаточною, щоби m_ν росло одностайно, а $\sum \frac{1}{\nu m_\nu}$ була збіжна.

Тоді ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} X^{\nu}$, де a_{ν} має повисше значіне, а $|X| = 1$, є збіжний без винятку. Но ряд сей буде услівно збіжний, наколи m_{ν} так виберем, що вправді $\sum \frac{1}{\nu m_{\nu}}$ є збіжна, але сума $\sum \frac{1}{\sqrt{\nu} \cdot m_{\nu}}$ є розбіжна. Пр. вистарчить покласти:

$$m_{\nu} = (\sqrt{\nu})^{\varepsilon}, (\lg \nu)^{1+\varepsilon}, \lg \nu (\lg \nu)^{1+\varepsilon}, \text{ де } \varepsilon > 0.$$

Існують отже ряди степенні $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}$ з обсягом збіжності 1, які для $|x| = 1$ є ще збіжні без винятку, але услівно; противно $k = 2$ є найменший виложник, для якого $\sum |a_{\nu}|^k$ є збіжна, отже сума $\sum a_{\nu}^k X^k$ є абсолютно збіжна.

е. В кінци займає ся Pringsheim звязею, яка заходить між дійсною а мнимою частию крайної функції.

$$f(\varrho e^{i\vartheta}) = \sum (\alpha_{\nu} + \beta_{\nu}) \varrho^{\nu} e^{i\nu\vartheta} = \varphi(\varrho\vartheta) + i\psi(\varrho\vartheta) \quad \varrho < 1.$$

де:

$$\varphi(\varrho\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_{\nu} \cos \nu\vartheta - \beta_{\nu} \sin \nu\vartheta) \varrho^{\nu}$$

$$\psi(\varrho\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\beta_{\nu} \cos \nu\vartheta + \alpha_{\nu} \sin \nu\vartheta) \varrho^{\nu}$$

Ряд $\varphi(\vartheta) = \sum (\alpha_{\nu} \cos \nu\vartheta - \beta_{\nu} \sin \nu\vartheta)$ (отже для $\varrho=1$ на обводі обсягу) є збіжний або властиво розбіжний, після того, чи гранична вартість:

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} \left\{ \psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta - \alpha) \right\} \cotg \frac{\alpha}{2} (1 - \cos n\alpha) d\alpha$$

випаде скінчена, чи безконечно велика. Конечним і достаточним для збіжності ряду $\varphi(\vartheta)$ є, щоби

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\varepsilon} \frac{\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta - \alpha)}{\alpha} (1 - \cos n\alpha) d\alpha$$

рівночасно з ε стреміло до зєра.

Ряд $\varphi(\vartheta)$ є властиво розбіжний, наколи $\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta - \alpha)$ має для $\alpha < \varepsilon$ стаий знак, а для $\lim \alpha = 0$ стремить до зєра не сильнійше, як $\left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \lg_2 \frac{1}{\alpha} \cdots \lg_k \frac{1}{\alpha} \right)^{-1}$ при так великім k , як хочемо.

Ряд степенний $\mathfrak{F}(x)$, якого функція крайна $f(e^{g_i})$ дає ся абсолютно, а при переході до обводу кола збіжності в загалі одностайно інтегрувати, є властиво розбіжний на всіх місцях перерви функції $f(e^{g_i})$ (Sprungstellen). Місце перерви є таке, де:

$$\lim_{\alpha=0} \psi(\vartheta+\alpha) > \overline{\lim}_{\alpha=0} \psi(\vartheta-\alpha), \text{ або } \overline{\lim}_{\alpha=0} \psi(\vartheta+\alpha) < \lim_{\alpha=0} \psi(\vartheta-\alpha).$$

Ряд степенний $\mathfrak{F}(x)$, який для якогось тяглого кусника свого обводу є збіжний, різниться ся — яко ряд зложений з двох від себе залежних рядів Fourier'a — від звичайного ряду Fourier'a в своїй істоті через се, що його сума [сума $\mathfrak{F}(x)$] ніколи не може мати скоків (перерв). За се не є виключене виступуванє нетяглости без скоків, т. є. такої, де:

$$\lim_{\alpha=0} \psi(\vartheta+\alpha) < \overline{\lim}_{\alpha=0} \psi(\vartheta-\alpha)$$

i

$$\overline{\lim}_{\alpha=0} \psi(\vartheta+\alpha) > \lim_{\alpha=0} \psi(\vartheta-\alpha).$$

Ряд $\mathfrak{F}(e^{g_i})$ є збіжний на кождім місці ϑ , де дійсна або мнима часть функції $f(e^{g_i})$ є тягла та має міру тяглости, яка сповняє (на право та ліво) умову:

$$|\psi(\vartheta \pm \alpha) - \psi(\vartheta)| \leq \left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \lg_2 \frac{1}{\alpha} \dots \lg_k \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} \left(\lg_k \frac{1}{\alpha} \right)^{-q} (q > 0).$$

Göttingen, в марті 1901.

Додаток до теорії дробів тяглих та групи модулової.

(Друга нота.)

Написав

Володимир Левицький.

1. В першій розвідці¹⁾ розслідував я трансформації модулові форми:

$$Uz = -\frac{1}{a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \dots \frac{1}{a+z} = TS^a TS^a T \dots TS^a z$$

де основні трансформації мають вид:

$$Sz = z + 1, \quad Tz = -\frac{1}{z} \quad (z = x + iy)$$

і показав, як можна безпосередно обчислити таку n -кратну ітерацію без звивання дроба тяглого. Взір, який я подав, дає спроможність повисший тяглий дроб обчислити без знання вартостей приближених.

Тепер маю намір піддати розслідам зовсім загальний случай модулових трансформацій:

$$Uz = TS^{an} TS^{an-1} TS^{an-2} T \dots TS^{a_1} z \quad 1)$$

$$Uz = S^{an} TS^{an-1} TS^{an-2} T \dots TS^{a_1} z \quad 2)$$

¹⁾ Збірник мат.-природ. т. IV. зоп. 2.; також Monatshefte für Math. u. Phys. р. XI. ст. 118 sqts. (Wien).

($a_n, a_{n-1}, \dots$ числа цілі дійсні), отже розслїдити дроби тяглі форми :

$$Uz = -\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}} - \dots - \frac{1}{a_1 + z}$$

і

$$Uz = a_n - \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}} - \dots - \frac{1}{a_1 + z}$$

Ті розслїди дадуть нам вигідні форми до обчислення повисше наведених дробів тяглих, зглядно дадуть нам можливість найти місце, до якого загальна модулова трансформація переносить точку z півплощі.

2. Наколи означимо дроб тяглий :

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}} - \dots - \frac{1}{a_1 + z}$$

через $\varphi_n(z)$, дістанемо, як се очевидно, слїдуючу реляцію :

$$a_{n+1} - \varphi_n = \frac{1}{\varphi_{n+1}} \quad 3)$$

Впровадьмо вираженє :

$$\frac{1}{\varphi_n \varphi_{n-1} \varphi_{n-2} \dots \varphi_1} = F_n(z) \quad 4)$$

то після 3) дістанемо :

$$\frac{a_{n+1} - \varphi_n}{\varphi_n \varphi_{n-1} \dots \varphi_1} = F_{n+1}(z)$$

або, що на одно виходить,

$$a_{n+1} F_n - F_{n-1} = F_{n+1}(z) \quad 5).$$

На основі сеї реляції можемо виписати слїдуючі рівняня в числі $(n-2)$:

$$\left. \begin{array}{l} a_n F_{n-1} - F_{n-2} = F_n \\ a_{n-1} F_{n-2} - F_{n-3} = F_{n-1} \\ a_{n-2} F_{n-3} - F_{n-4} = F_{n-2} \\ a_{n-3} F_{n-4} - F_{n-5} = F_{n-3} \\ \dots \dots \dots \\ a_3 F_2 - F_1 = F_3 \end{array} \right\} \quad 6).$$

3. Щоби з цих рівнянь вилінувати величини F_{n-1} , F_{n-2} , F_{n-3} , ..., творимо слідуєчі вираження:

$$a_n = C_n^{(0)}, \quad C_n^{(-1)} = 1$$

$$a_{n-1} a_n - 1 = C_{n-1}^{(0)} C_n^{(0)} - C_n^{(-1)} = C_n^{(1)}$$

$$a_{n-2} C_n^{(1)} - a_n = C_{n-2}^{(0)} C_n^{(1)} - C_n^{(0)} = C_n^{(2)}$$

$$a_{n-3} C_n^{(2)} - C_n^{(1)} = C_{n-3}^{(0)} C_n^{(2)} - C_n^{(1)} = C_n^{(3)}$$

$$a_{n-t} C_n^{(t-1)} - C_n^{(t-2)} = C_{n-t}^{(0)} C_n^{(t-1)} - C_n^{(t-2)} = C_n^{(t)}$$

при чім треба покласти $n > t$; $n = 0, 1$ треба відкинути, бо в тім разі приходилоб в повисших вираженнях a_0 , отже член, якого в дробі тяглім нема.

Для $t = 0$ дістанемо з послідного рівняня:

$$C_n^{(0)} = C_n^{(0)} C_n^{(-1)} - C_n^{(-2)},$$

отже $C_n^{(-2)} = 0$;

для $t = -1$ дістанемо:

$$C_n^{(-1)} = C_{n+1}^{(0)} C_n^{(-2)} - C_n^{(-3)},$$

отже:

$$C_n^{(-3)} = - C_n^{(-1)} = -1$$

і т. д.; загально дістанемо:

$$C_n^{(-2s)} = 0, \quad C_n^{(-(4s+1))} = 1, \quad C_n^{(-(4s+3))} = -1 \quad (n > 1).$$

Очевидно: $C_n^{(t)} = 0$.

Наколи помножимо рівняня 6) поступенно через:

$$\begin{aligned} & 1 \\ & C_n^{(0)} \\ & C_n^{(1)} \\ & C_n^{(2)} \\ & C_n^{(2)} C_{n-3}^{(0)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(-1)} \\ & C_n^{(2)} C_{n-3}^{(1)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(0)} \\ & C_n^{(2)} C_{n-3}^{(2)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(1)} \\ & C_n^{(2)} C_{n-3}^{(3)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(2)} \\ & \dots \\ & C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-7)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)} \end{aligned}$$

і додамо, то дістанемо сейчас:

$$F_n = (a_3 F_2 - F_1) (C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-7)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}) - (C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-9)}) F_2 \quad 7)$$

а що:

$$\varphi_n = \frac{F_{n-1}(z)}{F_n(z)},$$

то дістанемо форму, якої шукаємо:

$$\varphi_n(z) = \frac{(a_3 F_2 - F_1) (C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-1}^{(1)} C_{n-5}^{(n-9)}) - (C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-9)} - C_{n-1}^{(1)} C_{n-5}^{(n-10)}) F_2}{(a_3 F_2 - F_1) (C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-7)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}) - (C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-9)}) F_2} \quad 8).$$

Ся форма має однак лиш значіне для $n > 5$, бо на случай $n = 5$ виступав C_0 , що ми виключили; що так є, слідує з відси, що ми доперва п'яте рівняне помножили через такий чинник, як прочі, підчас коли $\varphi_5 = \frac{F_4}{F_5}$.

Для $n \leq 5$, де отже скількість членів є дуже мала, можемо відразу виписати слідуєчі очевидні форми:

$$\varphi_3 = \frac{F_2}{a_3 F_2 - F_1}, \quad \varphi_4 = \frac{a_3 F_2 - F_1}{(a_3 F_2 - F_1) C_4^{(0)} - F_2}, \quad \varphi_5 = \frac{(a_3 F_2 - F_1) C_4^{(0)} - F_2}{(a_3 F_2 - F_1) C_5^{(1)} - C_5^{(0)} F_2}.$$

На случай $n = 6$ виступають в загальній формі чинники $C_1^{(-4)}$ і $C_1^{(-3)}$, які ми висше вилучили. Наколи однак розважимо, що:

$$\varphi_6 = \frac{F_5}{F_6}$$

та порівнаємо виражене:

$$F_5 = (a_3 F_2 - F_1) C_5^{(1)} - C_5^{(0)} F_2$$

з чисельником форми 8), то дістанемо сейчас:

$$C_1^{(-3)} = -1, \quad C_1^{(-4)} = -\frac{C_5^{(0)} + C_5^{(2)}}{C_5^{(1)}}$$

так що форма 8) дає ся застосувати для всіх тяглих дробів, де $n \geq 6$. Форма та є особливо догідна для висших n , як се сейчас на примірах побачимо.

Наколи в $\varphi_n(z)$ змінимо знак, дістанемо трансформацію модулову 1), наколи обчислимо $\varphi_{n-1}(z)$ та утворимо виражене $a_n - \varphi_{n-1}(z)$, дістанемо трансформацію 3).

4) Тепер випробуємо вірність форми 8) на прикладах.

а) Най:

$$\begin{aligned}\varphi_6(z) &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1+z}{z} = \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{z}{2z-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{2z-1}{3z-2} = \frac{1}{1} - \frac{3z-2}{4z-3} = \frac{4z-3}{z-1}.\end{aligned}$$

Рахунок є отже досить довгий, як бачимо; а тимчасом на основі форми 8) дістанемо:

$$F_1 = 1 + z, \quad F_2 = z$$

$$\varphi_6 = \frac{(2z-1)(C_5^{(2)}C_2^{(-2)} - C_5^{(1)}C_1^{(-3)}) - (C_5^{(2)}C_2^{(-3)} - C_5^{(1)}C_1^{(-4)})F_2}{(2z-1)(C_6^{(2)}C_3^{(-1)} - C_6^{(1)}C_2^{(-2)}) - (C_6^{(2)}C_3^{(-2)} - C_6^{(1)}C_2^{(-3)})F_2}.$$

А що:

$$C_2^{(-2)} = 0, \quad C_2^{(-3)} = -1, \quad C_5^{(1)} = 3, \quad C_5^{(2)} = 7, \quad C_6^{(1)} = 1, \quad C_6^{(2)} = 1, \quad C_3^{(-1)} = 1, \\ C_1^{(-3)} = -1, \quad C_1^{(-4)} = -3,$$

то вийде сейчас:

$$\varphi_6 = \frac{(2z-1)3 - (-7+9)z}{(2z-1) - z} = \frac{4z-3}{z-1}.$$

Інакше: трансформація:

$$TSTS^2TS^2TS^3TSTS_z$$

переносить точку z з півплощі в точку $\frac{3-4z}{z-1}$ тойже.

б)

$$\begin{aligned}\varphi_6 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2+z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{2+z}{3+2z} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{3+2z}{10+7z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} - \frac{10+7z}{27+19z} = \frac{1}{2} - \frac{27+19z}{17+12z} = \frac{17+12z}{7+5z};\end{aligned}$$

а на основі 8) дістанемо:

$$F_1 = 2 + z, \quad F_2 = 3 + 2z$$

$$\varphi_6 = \frac{(10 + 7z) (C_5^{(2)} C_2^{(-2)} - C_5^{(1)} C_1^{(-3)}) - (C_5^{(2)} C_2^{(-3)} - C_5^{(1)} C_1^{(-4)}) F_2}{(10 + 7z) (C_6^{(2)} C_3^{(-1)} - C_6^{(1)} C_2^{(-2)}) - (C_6^{(2)} C_3^{(-2)} - C_6^{(1)} C_2^{(-3)}) F_2}.$$

А що:

$$C_2^{(-2)} = 0, \quad C_2^{(-3)} = -1, \quad C_3^{(-1)} = 1, \quad C_5^{(1)} = 2, \quad C_5^{(2)} = 4, \quad C_6^{(1)} = 1, \quad C_6^{(2)} = 1,$$

$$C_1^{(-3)} = 1, \quad C_1^{(-4)} = -\frac{7}{2},$$

то дістанемо:

$$\varphi_6 = \frac{(10 + 7z) 2 - (3 + 2z)}{(10 + 7z) - (3 + 2z)} = \frac{17 + 12z}{7 + 5z}.$$

в) Возьмім:

$$\varphi_9 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{1+z},$$

то обчисленє через досить довгий рахунок дає на вислід:

$$\frac{18 + 41z}{7 + 16z}.$$

Тимчасом після нашої форми в):

$$F_1 = 1 + z, \quad F_2 = 1 + 2z, \quad a_3 = 2.$$

$$\varphi_9 = \frac{(a_3 F_2 - F_1) (C_8^{(2)} C_5^{(1)} - C_8^{(1)} C_4^{(0)}) - (C_8^{(2)} C_5^{(0)} - C_8^{(1)} C_4^{(-1)}) F_2}{(a_3 F_2 - F_1) (C_9^{(2)} C_6^{(2)} - C_9^{(1)} C_5^{(1)}) - (C_9^{(2)} C_6^{(1)} - C_9^{(1)} C_5^{(0)}) F_2}.$$

А що:

$$C_8^{(1)} = 5, \quad C_8^{(2)} = 18, \quad C_5^{(0)} = 1, \quad C_5^{(1)} = 0, \quad C_4^{(0)} = 1, \quad C_4^{(-1)} = 1, \quad C_9^{(1)} = 1,$$

$$C_9^{(2)} = 2, \quad C_6^{(1)} = 3, \quad C_6^{(2)} = -1,$$

то дістанемо:

$$\varphi_9 = \frac{-(1 + 3z) 5 - (18 - 5)(1 + 2z)}{-(1 + 3z) 2 - (6 - 1)(1 + 2z)} = \frac{18 + 41z}{7 + 16z}.$$

2) Най:

$$\varphi_{10} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5+z},$$

вислід одержаний через довгий рахунок.

Тимчасом після форми 8) є:

$$a_3 = 2, F_1 = 5 + z, F_2 = 14 + 3z,$$

$$\varphi_{10} = \frac{(23 + 5z)(C_9^{(2)} C_6^{(2)} - C_9^{(1)} C_5^{(1)}) - (C_9^{(2)} C_6^{(1)} - C_9^{(1)} C_5^{(0)}) F_2}{(23 + 5z)(C_{10}^{(2)} C_7^{(3)} - C_{10}^{(1)} C_6^{(2)}) - (C_{10}^{(2)} C_7^{(2)} - C_{10}^{(1)} C_6^{(1)}) F_2}.$$

Ту є:

$$C_9^{(1)} = 0, C_9^{(2)} = -1, C_5^{(1)} = 1, C_5^{(0)} = 1, C_6^{(1)} = 0, C_6^{(2)} = -1, C_{10}^{(1)} = 1, \\ C_{10}^{(2)} = -1, C_7^{(1)} = 0, C_7^{(2)} = -1, C_7^{(3)} = -2;$$

отже:

$$\varphi_{10} = \frac{23 + 5z}{(23 + 5z)2 - (14 + 3z)} = \frac{23 + 5z}{32 + 7z}.$$

Значить ся: трансформація TSTSTSTSTSTST²TS²TS³TSz переносить точку z півплощі в точку $-\frac{23 + 5z}{32 + 7z}$.

Наколи всі члени $a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_1 = a$ є рівні, маєм до діла з спеціальним случаем, який я вже в першій розвідці розібрав.

5. Хочемо тепер розслідувати граничний случай $\lim n = \infty$, с. є. безконечно-многочислу ітерацію трансформації модулової. В тій цілі напишім реляцію 8) в слідуючій виді:

$$\frac{a_3 F_2 C_{n-1}^{(2)} (C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-4}^{(n-9)}) - C_{n-1}^{(1)} (C_{n-5}^{(n-10)} - C_{n-5}^{(n-9)}) F_2 - F_1 (C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-1}^{(1)} C_{n-5}^{(n-9)})}{a_3 F_2 C_n^{(2)} (C_{n-3}^{(n-7)} - C_{n-3}^{(n-8)}) - C_n^{(1)} (C_{n-4}^{(n-9)} - C_{n-4}^{(n-8)}) F_2 - F_1 (C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)})}.$$

А що для $\lim n = \infty$ можна покласти:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-4}^{(n-9)}) = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_{n-5}^{(n-10)} - C_{n-5}^{(n-9)}) = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_{n-3}^{(n-7)} - C_{n-3}^{(n-8)}) = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_{n-4}^{(n-9)} - C_{n-4}^{(n-8)}) = 0.$$

проте дістанемо :

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = \frac{C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-1}^{(1)} C_{n-5}^{(n-9)}}{C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}},$$

а се виражене дає, наколи в границі положимо :

$$\lim_{n=\infty} C_{n-4}^{(n-8)} = \lim_{n=\infty} C_{n-3}^{(n-8)} = \lim_{n=\infty} C_{n-5}^{(n-9)},$$

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = \frac{C_{n-1}^{(2)} - C_{n-1}^{(1)}}{C_n^{(2)} - C_n^{(1)}} = \lim_{n=\infty} \frac{(a_{n-1} a_{n-2} - 1)(a_{n-3} - 1) - a_{n-1}}{(a_n a_{n-1} - 1)(a_{n-2} - 1) - a_n},$$

отже на всякий случай дійсну величину; безконечно многократна ітерація Uz дасть проте :

$$\lim_{n=\infty} Uz = \lim_{n=\infty} \frac{a_{n-1} - (a_{n-1} a_{n-2} - 1)(a_{n-3} - 1)}{a_n - (a_n a_{n-1} - 1)(a_{n-2} - 1)}$$

для трансформації 1), а :

$$\lim_{n=\infty} Uz = \lim_{n=\infty} \left(a_n - \frac{a_{n-2} - (a_{n-2} a_{n-3} - 1)(a_{n-4} - 1)}{a_{n-1} - (a_{n-1} a_{n-2} - 1)(a_{n-3} - 1)} \right)$$

для трансформації 2).

С. 6. Кожда зовсім загальна модулова трансформація, зложена з безконечно многих ітерацій основних трансформацій $S^n z$ і Tz (n цілковите яке-небудь число), переносить *кожду* точку додатної півплощі z в безконечно близьке окружене одної з обох точок граничних, які все в дійсні та лежать на перворядній осі. В тих точках тратить отже група модулова свою нетяглисть; а що $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots$ є які-небудь дійсні числа, то з того слідує, що група модулова на цілій дійсній осі є нетягла, що вповні годить ся з зв'язним свойством сеї групи.

Берлін, в червні 1901.



Бібліографія та хроніка математично-фізична.

O. Stolz u. A. Gmeiner. Theoretische Aritmetik; I. Abth. Allgemeines, die Lehre von rationalen Zahlen (Leipzig, B. G. Teubner 1900, ст. IV + 98).

Є се один з підручників, які в останніх часах фірма Teubner'a видає під заг. „Teubners Sammlung der Lehrbücher auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften“. Підручник сей опертий є на поглядах Grassmann'a, Hankel'a, Hauber'a, Dedekind'a, Stolz'a і н., що в останніх часах запанували в цілій теорії чисел. Складаєсь він з чотирох частий; часть перша подає понятє величин і чисел, часть друга займає ся натуральними числами, часть третя обнимає аналітичну, четверта синтетичну теорію чисел вимірних та теорію систематичних дробів. Книжочка ся може служити яко дуже добрий вступний підручник до вищої теорії чисел, а вартість її підносять еще численні приміри, долучені до другої і четвертої части.

Max Simon. Euklid und die sechs planimetrischen Bücher (Leipzig, B. G. Teubner, 1901, ст. VIII + 141).

Є се переклад звісних „στοιχεῖα“ Евкліда, але переклад критичний, осмотрений численними поясненнями та увагами; на початку подані дати біо- та бібліографічні про Евкліда та его твори. Книжка та добра для тих, що займають ся історією математики та хотять пізнати ближше того великого духа, якого вплив перетривав до нинішнього часу.

R. Fricke. Kurzgefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik; analytisch-functionentheoretischer Theil. (Leipzig, B. G. Teubner, 1900, ст. X + 520).

Книжка ся є впливом нового напрям у математиці, до якого почин дав головню Кляйн, а іменно, щоби висліди теоретичні лучити по змозі з практикою (стосована математика). Сей напрям є консеквентно переведений в цілій книжці, яка в 7 розділах подає найважнійші висліди сучасної аналізи та стосує їх до практичних проблемів. Уступ перший посвячений є рядам Fourier'a; є ту подана теорія сочинників тих рядів, теорем їх збіжності (Dirichlet), інтеграли Fourier'a та пристосованє сеї теорії до фізики. В другім уступі маємо теорію функцій кулі та вальця, отже функції Legendre'a $P_n(\mu)$, теорію коренів рівняня $P_n(x) = 0$. Далі є теорія розвиваня функції $f(\vartheta\varphi)$ і якої-небудь функції $\varphi(x)$ після функцій кулі. Заслугує ту на увагу застосованє функцій кулі до електростатики і задача Кеплера, розв'язана способом Bessel'a при помочи функцій вальця. Розділ третій обнимає теорію функцій зложених аргументів, отже функції аналітичні, ряди степенні, теореми Cauchy і Laurent'a, теорію точок особливих, представленє функцій аналітичних через добутки, функцію P , теорію функцій многозначних та поверхні Riemann'a; крім сего є ту стереографічна проєкція площі на кулю. В слідуючім четвертім розділі є теорія функцій еліптичних після Jacobi і Weierstrass'a (отже функції σ , ζ , p , Θ , sn , cn , трансформація Landen'a і и.); інтересне є ту відтворенє площі u через функцію p . П'ятий розділ подає практичне застосованє функцій еліптичних; отже многокутники Poncelet'a, лінії геодезичні на еліпсоїді оборотовій, поверхні співогнисків 2. ряду, застосованє до теорії тепла; сферичний маятник, оборотовий рух тіла ційкого і и. В розділі шестім є теорія лінійових рівнянь різничкових о двох змінних; отже маємо ту теорем істнованя, систем основний інтегралів, теорію обігу інтегралів, рівнянє різничкове гіпергеометричне і функції Z_1 і Z_2 , функцію $\eta(z)$ і відтворенє півплощі z на коловий трикутник площі η та поверхні Riemann'a, що належить до функції $\eta(z)$, на сїть колових трикутників. В кінці послідний уступ обнимає теорію рівнянь різничкових I. ряду з кількома змінними; маєм ту теорію визначників функційних, редукцію рівнянь при помочи послідного множника, рівняня частні першого ряду та систем Jacobi. Далі є ту теорія характеристичних поверхнй (Developable) рівняня $f(xyzpq) = 0$, загальнійші рівняня різничкові $f(z, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0$, та теорем Poisson'a. Уступ сей кінчать

рівняння різничкові динаміки. Крім сего є ту в відповідних місцях подані таблиці функцій кулі та функцій еліптичних.

Як з повисше поданого короткого змісту видно, книжка ся є дуже добрим підручником для тих, що хочать загально поінформувати ся про модерну теорію функцій; вказує она також на се, що теорії аналізу, на перший погляд нічим не звязані з практикою, можуть однак дуже користно придатись до розвязки практичних проблемів.

E. Borel. *Leçons sur les fonctions entières*. (Paris, Gauthier-Villars, 1900, ст. VI + 124).

Підручник сей представляє в коротких рамах теорію функцій цілих (переступних), до якої дав почин Weierstrass, а яку розширили в новіших часах Picard, Poincaré, Hadamard, Borel та інші. Автор її загально звісний учений, що послідніми часами розширив теорію функцій аналітичних знаменитими досліддами над істотою рядів розбіжних, тому-то і его книжка заслугує на тим більшу увагу. Складаєсь она з п'ятох уступів. Перший представляє ідеї Weierstrass'a і его теорію чинників первих, другий представляє ідеї Laguerre'a, отже понятє роду, функції роду 0 і 1 та роду скінченного.

Третій уступ займає ся нерівностями Poincaré (Bull. soc. mat. 1883). Є ту три дуже важні теореми. 1) Наколи функція ціла:

$$F(z) = \left(1 - \frac{z}{a_1}\right) \left(1 - \frac{z}{a_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdots = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots$$

є ряду p , а $M(r)$ є її найбільша безглядна вартість на обсягу збіжності, то:

$$M(r) < e^{\alpha r^{p+1}}$$

наколи α є число додатне (дане à priori) а r достаточнo велике.

2) В тих обставинах $A_m \Gamma \left(\frac{m+h+1}{p+1} \right)$ стремить до зєра, де Γ

є знаною функцією з рахунку інтегрального, а h яке небудь число додатне.

3) Наколи r є достаточнo велике, то:

$$|F(z)| < e^{r^{p+\varepsilon}}, \quad |F(z)| < e^{\varepsilon r^p},$$

де ε є а priori дане.

В тім уступі впроваджує Borel понятє „майоранти“ себ то вираженя:

$$M(r) = |A_0| + |A_1| r + |A_2| r^2 + \dots$$

Четвертий уступ є посвячений розслідам Hadamard'a (Journ. de Mathem. 1893), а особливо двом дуже важним теоремам тогож. Перший з них відносить ся до коренів функції і їх границі, а другий є ось який: „Наколи $G(z)$ є канонічним добутком чинників первих ряду p , а число ε є додатне, то можна найти безконечну скількість колес, яких лучі безконечно ростуть, а на кождім з них заходить нерівність:

$$|G(z)| > e^{-r^{p+\varepsilon}}$$

Пятий розділ подає звівний теорем Picard'a о вартостях, яких функція не може прийняти; крім сего подає ту Borel загальний теорем слідуочий: „Наколи $F(z)$ є функція ціла така, що

$$|F(z)| < e^{r^m}$$

(де m є стала), а $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$, $\psi(z)$, $\psi_1(z)$ є функції цілі ряду скінченого такі, що:

$$\varphi\psi_1 - \varphi_1\psi \leq 0,$$

то наколи $\varphi F - \varphi_1$ та $\psi F - \psi_1$ є ряду скінченого, то і F є ряду скінченого.“

На кінці книжки є додані три ноти. В них займає ся Borel функціями з правильним та неправильним ростом.

Функція ціла $F(z)$ ряду скінченого є тоді функцією з правильним ростом, наколи $M(r)$ т. є. вартість безглядна найбільша функції $F(z)$ для $|z| = r$ містить ся в інтервалі

$$e^{r^\alpha} < M(r) < e^{r^\beta}$$

(α і β дані), а сей інтервал спадає до зєра; в противнім случаю зріст функції є неправильний.

Так представляє ся в короткім нарисї зміст сеї интересної книжки.

E. Weber. Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Leipzig, B. G. Teubner, 1900, ст. XI + 622).

Не так легко подати справозданє з сеї книжки; тільки там материялу, зібраного після новіших теорій та дослідів Jacobi,

Clebsch'a, Lie, Mayer'a, Frobenius'a та інших геометрів, що теорію частних рівнянь різничкових посунули вперед. Книжку ту поділити можна на дві частини; перша (розд. I—XI) обнімає т. зв. проблем Pfaff'a, друга (розд. XII—XIV) обнімає теорію рівнянь різничкових частних першого ряду нелінійових.

В короткім вступі схарактеризований є проблем Pfaff'a слідуючим способом: „Визначити найзагальніший, зложений з m реляцій систем рівнянь зі змінними $z, x_1, x_2, \dots, x_m, p_1, p_2, \dots, p_m$, який можна розв'язати що до тих змінних, та який сповняє повне рівнянє різничкове:

$$dz - \psi(z, x_1, x_2, \dots, x_m, p_1, p_2, \dots, p_m) dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_m dx_m = 0.$$

Pfaff доказав, що існують всегда $2m$ функцій

$$F_i(z, x_1, \dots, x_m, p_1, \dots, p_m) \text{ та } f_i(z, x_1, \dots, x_m, p_1, \dots, p_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

таких, що:

$$dz - \psi dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_m dx_m \equiv F_1 df_1 + F_2 df_2 + \dots + F_m df_m.$$

Вираженє: $\sum_{i=1}^n a_i (x_1, \dots, x_n) dx_i = 0$ називає ся вираженєм Pfaff'a.

Виложивши коротко теорію визначників та матриць (Matrix), теорію скісно-симетричних визначників, твердження Grassmann'a, Frobenius'a, Sylvester'a та и. переходить автор в розд. II. до теорії рівнянь лінійових частних першого ряду, т. є. до понятя інтегралів, характеристик та характеристичних кривих, трансформацій безконечно малих Lie Xf одночастної групи та множника Якобі; дальше є теорія р-частного систему рівнянь:

$$\sum_{k=1}^n \xi_{ks} (x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

р-частного систему Якобі та метода інтегрування Якобі. До систему рівнянь різничкових лінійових частних долучає (ад'юнктує) автор систем рівнянь Pfaff'a, який необмежено можна інтегрувати т. є. систем, до якого можна пристосувати всі безконечно малі перетворення долученої громади:

$$Xf \equiv \sum_{s=1}^n \xi_s (x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_s}.$$

Розділ сей кінчать точні (exakte) рівняня Pfaff'a, т. є. такі рівняня:

$$\nabla \equiv \sum_{i=1}^n a_i (x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i = 0,$$

де ∇ може прийняти вид:

$$\nabla \equiv \varphi(x_1 x_2 \dots x_n) d\varphi(x_1 x_2 \dots x_n),$$

та трансформація Мауєр'а.

В слідуєчій розділі (III) є здефініювана класа вираження Pfaff'a.

$$\text{Наколи:} \quad \Delta = \sum_1^n a_i(x_1 x_2 \dots x_n) dx_i,$$

то класою того вираження є ряд матриці:

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{array} \right\|, \text{ де } a_{ik} \equiv -a_{ki} \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}.$$

Класа та є незмінником (інваріантою) для Δ з огляду на трансформації:

$$\left. \begin{array}{l} y^i = \varphi_i(x_1 x_2 \dots x_n) \\ x_i = \psi_i(y_1 y_2 \dots y_n) \end{array} \right\} (i = 1, 2, \dots, n)$$

До класи відносить ся слідуєче твердження Frobenius'a:

Класа k є, для вираження Pfaff'a париста або непариста після того, чи лінійове рівняне:

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n = 0$$

слідує з систему рівнянь:

$$(\alpha) \quad a_{i1} \xi_1 + a_{i2} \xi_2 + \dots + a_{in} \xi_n = \xi_0 a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

чи ні. Класа є непариста або париста після того, чи $\xi_0 = 0$ слідує з (α) , чи ні.

Розділ IV. обнимає методи редукційні Pfaff'a, Grassmann'a та Jacobі. Після твердження Grassmann'a виражене Pfaff'a Δ , наколи его класа $k = 2\lambda$ (париста), тоді і лиш тоді дасть ся звести до форми:

$$1) \quad z_{\lambda+1} dz_1 + z_{\lambda+2} dz_2 + \dots + z_{2\lambda} dz_\lambda,$$

де z є незалежні функції змінних $(x_1 x_2 \dots x_n)$. Наколи класа $k = 2\lambda - 1$ (непариста), то Δ дасть ся звести до форми:

$$\sigma(z_1 z_2 \dots z_{2\lambda-1}) (dz_\lambda + z_{\lambda+1} dz_1 + \dots + z_{2\lambda-1} dz_{\lambda-1}),$$

де z має значіне як вище, а σ є певна функція.

В разі, коли $k = 2\lambda$, є тільки можлива редукція 1); коли $k = 2\lambda - 1$, можна дістати редукцію:

$$2) \quad dz_\lambda + z_{\lambda+1} dz_1 + z_{\lambda+2} dz_2 + \dots + z_{2\lambda-1} dz_{\lambda-1}$$

Се є основне твердження (Fundamentalsatz).

Два вираження Pfaff'a:

$$\Delta \equiv \sum_1^n a_i (x_1 x_2 \dots x_n) dx_i$$

$$\Delta' \equiv \sum_1^n a'_i (x'_1 x'_2 \dots x'_n) dx'_i$$

є рівноважні, наколи мають ту саму клясу; кляса та є співзмінником (коваріантою) для якої-небудь трансформації змінних $(x_1 x_2 \dots x_n)$.

До кожного вираження Pfaff'a кляси k належать повні системи V і W , а іменно:

$$V) \quad X_s f \equiv \xi_1^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_n} \equiv 0$$

$$W) \quad X_h f \equiv \Pi_{1,2\lambda+1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \Pi_{2\lambda,2\lambda+h} \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda}} - P \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda+h}} = 0$$

($s = 0, 1, \dots, n-k$; $h = 1, 2, \dots, n-k$),

де:

$$P \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)} \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_\lambda & f_1 & f_2 & \dots & f_\lambda \\ x_1 & x_1 & \dots & x_{2\lambda} \end{pmatrix} \text{ (визначник функційний)}$$

$$\Pi_{k,v} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)} \begin{pmatrix} F_1 & \dots & F_\lambda & f_1 & \dots & f_\lambda \\ x_1 & \dots & x_{k-1} & x_v & x_{k+1} & \dots & x_{2\lambda} \end{pmatrix}$$

Тими системами займає ся уступ V. нашої книжки:

V є $(n-k+1)$ -частним повним системом з інтегралами

$$\frac{F_1}{F_\lambda}, \frac{F_2}{F_\lambda}, \dots, \frac{F_{\lambda-1}}{F_\lambda}, f_1 f_2 \dots f_\lambda$$

а W $(n-k)$ -частним повним системом з інтегралами $F_1 F_2 \dots F_\lambda f_1 f_2 \dots f_\lambda$.

Ті два системи V і W є співзмінниками до Δ .

Наколи для непаристого k знаємо інтеграли повного систему V , то послідний k -тий інтеграл найдемо з W через різничковане, елімінацію та ряд квадратур.

Далі ідуть дві методи редукційні за криті (implicit) Clebsch'a та Lie (розд. VI). При їх помочи дістанемо нормальні форми ось-які:

$$\text{для } k=2\lambda \quad \Delta \equiv F_1 df_1 + F_2 df_2 + \dots + F_\lambda df_\lambda$$

$$\text{для } k=2\lambda-1 \quad \Delta \equiv F_1 df_1 + F_2 df_2 + \dots + F_{\lambda-1} df_{\lambda-1} + df_\lambda$$

В уступі VII. про рівноважники інтегралів рівняння Pfaff'a находим твердження:

Рівноважник інтегралів рівняння Pfaff'a

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_m dx_m = 0$$

обнімає що найменше m рівнянь. Найзагальніший рівноважник, який не має виду:

$$p_1 = 0, \dots, p_m = 0$$

дістанемо, наколи до якого-небудь ν -частного систему рівнянь виду:

$$\Psi_i (x_1 x_2 \dots x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \nu)$$

долучимо тих $(m - \nu)$ рівнянь, які повстають через елімінацію q_i

$$\text{з рівнянь } p_i = \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Наколи кляса рівняння Pfaff'a є 2λ (або $2\lambda - 1$), то кождий рівноважник інтегралів, що обнімає менше як λ рівнянь, є конечно особливий.

Возьмім нормальне рівняння Pfaff'a:

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_m dx_m = 0,$$

то трансформація:

$$\left. \begin{aligned} z' &= Z(z, x_1, x_2, \dots, x_m, p_1, p_2, \dots, p_m) \\ x'_i &= X_i(z, x_1, x_2, \dots, x_m, p_1, p_2, \dots, p_m) \\ p'_i &= P_i(z, x_1, x_2, \dots, x_m, p_1, p_2, \dots, p_m) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

називає ся етичною, наколи по вставленю тих вартостей дістанемо:

$$dz' - p'_1 dx'_1 - \dots - p'_m dx'_m \equiv q(z, x_1, x_2, \dots, x_m, p_1, \dots, p_m) (dz - p_1 dx_1 - \dots - p_m dx_m),$$

де q не є ідентично зером.

Теорию і значіне тих трансформацій подає уступ VIII.

В дальшій уступі (IX) є подана метода редукційна відкрита (explicit). Редукція вираження Δ провадить до слідуєчих форм загальних. Наколи $f_1 f_2 \dots f_r$ ($r < n$) є які небудь независимі функції, а матиця

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_{ik} & a_i & f_{hi} \\ -a_k & 0 & 0 \\ -f_{kh} & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

має ряд $2q$, то тоді і лиш тоді Δ можна представити в виді:

$$\Delta \equiv F_1 df_1 + \dots + F_r df_r + F_{r+1} df_{r+1} + \dots + F_q df_q,$$

де $f_1, f_2, \dots, f_q$ є незалежними, а в виді:

$$\Delta = F_1 df_1 + \dots + F_r df_r + F_{r+1} df_{r+1} + \dots + F_{q-1} df_{q-1} + df_q,$$

наколи $f_1, f_2, \dots, f_q, F_{r+1}, \dots, F_q$ є з собою зв'язані.

Розділ X. стосує безконечно малу трансформацію до вираження Pfaff'a. Наколи єго кляса k є непариєста, а безконечно мала трансформація $Xf = \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ сповняє ідентично реляцію $X\Delta = \varrho \Delta$ та належить до громади безконечно малих трансформацій долучених до Δ , тоді є завжди $\varrho \equiv 0$, а $Xf = \sum_{s=1}^{n-k} \varrho_s X_s f$, де:

$$X_s f = \xi_1^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (s=1, 2, \dots, n-k); \quad \xi_1^{(s)}, \dots, \xi_n^{(s)}$$

є розв'язками рівнянь $\sum \xi_k a_{ik} = 0$, ($i=1, 2, \dots, n$).

Наколи кляса є париста, то тоді Xf має вид $\varrho X_0 f + \varrho_1 X_1 f + \dots + \varrho_{n-k} X_{n-k} f$, де $\varrho, \varrho_1, \dots$ є які небудь функції, $X_s f$ має значінє, як вище, а $\xi_1^{(s)}, \dots$ є розв'язками рівнянь $\sum \xi_k a_{ik} = \varrho a_i$.

Ідентичність Якобі та Мауєр'а кінчать сей уступ.

Далі іде (розд. XI) теорія скінчених, однородних та неоднородних стичних трансформацій. При їх помочи маємо слідууючу редуцію.

Наколи $2r-1$ змінних $y_1, y_2, \dots, y_r, q_1, \dots, q_{r-1}$ є зв'язані реляцією:

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_r, q_1, \dots, q_{r-1}) = 0,$$

то вираженє Pfaff'a:

$$dy_r + q_1 dy_1 + \dots + q_{r-1} dy_{r-1}$$

можна звести до форми:

$$q'_1 dy'_1 + \dots + q'_{r-1} dy'_{r-1} \text{ або } dy'_r + \sum_{s=1}^{r-2} q'_s dy'_s$$

після того, чи $\varphi = 0$ заключає в собі y_r чи ні.

Наколи же $2r$ змінних $y_1, \dots, y_r, q_1, \dots, q_r$ є зв'язані реляцією:

$$\varphi(y_1, \dots, y_r, q_1, \dots, q_r) = 0,$$

то вираженє Pfaff'a:

$$q_1 dy_1 + \dots + q_r dy_r$$

можна звести до форми:

$$\sum_{s=1}^{r-1} q'_s dy'_s \text{ або } dy'_r + \sum_{s=1}^{r-1} q'_s dy'_s$$

після того, чи φ є в q однорodne чи ні.

Часть друга книжки (розд. XII—XIV) займає ся рівняннями частними першого ряду нелінійовими: $F\left(z, x_1, x_2, \dots, x_m, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_m}\right) = 0$;

є ту подана теория поверхний інтегральних та характеристик, теория інволюцій, застосованє трансформацій стичних, метода Lagrange'a варіяції сталих, методи Jacobi, Lie та Mayer'a, засада Hamilton'a (функція сил); далі іде теория груп функційних, неоднородних, однородних, бігунових, r -частна група та інволюційні системи ряду зєрового; далі рівнянє Transon'a $F(p, q, x + pz, y + qz) = c$, а в кінці теория Bäcklund'a особливих множиний інтегральних.

Послїдний XV. роздїл подає історію рівнянь ріжничкових частних (Pfaff, Gauss, Cauchy, Jacobi, Natani, Clebsch, Grassmann, Frobenius, Lie, Darboux, Engel).

Задержав ся я довше над тою книжкою, бо она обнимає теорії майже найновїші, які в будучности відіграють певно першорядну ролю. Автор сеї книжки хорошо вивязав ся зі своєї задачі та для сьвіта математичного своїм твором безперечно дуже ся прислужив.

R. Fricke u. F. Klein. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen (I. Bd. gruppentheoretische Grundlagen, Leipzig B. G. Teubner, 1897, ст. VIII+634).

Виклад сей обнимає теорії, до яких почин дали Schwarz та Poincaré, а які головнo розвинув Klein. Складає ся він зі вступу та трох частий.

Вступ обнимає теорію проєктивних означень мір (projektive Massbestimmungen), отже спорідненє перекроїв стїжкових (Collineation), геометрію параболїчну, гіперболїчну та еліптичну і належні до них площі (згд. кулі), понятє груп руху та груп субституцій лінійових $\zeta' = \frac{\alpha \zeta + \beta}{\gamma \zeta + \delta}$.

Часть перша (теория нетяглих груп субституцій лінійових) подає наперед теорію груп циклічних та груп тіл правильних, поділ площі еліптичної та гіперболїчної, теорію групи та підгруп Picard'a і чотиростінний (tetraedrisch) поділ півпростони ζ . Далі є теория груп нетяглих, які не мають безконечно малих субституцій, понятє

району нетягlosti проєктивної площі в групах оборотових, понятє груп належачих до головного кола, нормальний многостінник в просторони гиперболічний та нормальний район нетягlosti на площі ζ та в просторони ζ , теория груп з кривими граничними. Всі групи без субституцій безконечно малих ділять ся на циклічні групи, групи необоротові з двома граничними точками, групи оборотові та групи необоротові з безконечною скількостію точок граничних. Звязи між основними субституціями групи, канонічні райони нетягlosti групи многокутників, однородні субституції та групи кінчать часть першу.

Часть друга (вивід геометричної теорії групи многокутників з субституцій ζ) займає ся вперед групою оборотовою на основі нормальних районів нетягlosti, а іменно еліптичною та параболічною групою оборотовою і їх нормальними шестікутниками та параболічною групою оборотовою з субституціями еліптичними, далі групою необоротовою з двома граничними точками, понятєм роду (Gattung) та поділом типів нормальних многокутників, а в кінци „натуральним“ районом нетягlosti оборотової групи гиперболічної. Далі ідуть канонічні многокутники для різних родів та їх модулі j_1, j_2, j_3 і модулі ад'югтовані (долучені), трансформації системів модулових та модулові групи поодиноких родів. В кінци подана теория чотирокутників колових без кола головного, сім типів таких чотирокутників та їх незмінники, чотирокутник з кутами 0 і его крива гранична; групи необоротові 1. і 2. рода.

Часть трета (аритметичні способи дефініювання властиво нетяглих груп з субституцій ζ) займає ся в розділі „про групи оборотові посеред групи Picard'a“ формами Gauss'a, квадративими формами Dirichlet'a та Hermite'a і їх геометричною інтерпретацією, редукцією і трансформацією означених (definite) форм Hermite'a та Dirichlet'a, редукцією неозначених (indefinite) форм Hermite'a, відтворюючими (reproducirend) групами форм Hermite'a з визначником 5 та 7, та проєктивно-геометричною інтерпретацією форм Gauss'a, групи Picard'a, форм Dirichlet'a та Hermite'a. В дальшій уступі про відтворюючі групи трійкових (ternär) та чвіркових (quaternär) форм квадративих є подана теория їх нетягlosti, рівноважности, доказ істнованя групи форм трійкових та чвіркових; теория Seling'a квадративих трійкових форм, дальші методи конструкторні району нетягlosti поодиноких груп з колом головним та приміри. Послїдній уступ обнимає спеціальні случаи груп з колом головним та груп многостінників з цілими алыгебраїчними сочинниками субституцій-

ними; доказ, що такі групи з сочинниками субституційними дійсними та зложеними є нетяглі та три услівя властивої нетяглости.

Се є короткий зміст сеї дуже важної книжки; бажати би лиш треба, щоби друга часть тої книжки, с. є. функційно-теоретична часть теорії функцій автоморфних скоро вийшла з друку для ужитку всіх, що займають ся за Кляйном геометричною інтерпретацією теорії функцій.

E. Pascal. Die Variationsrechnung (übersetzt vom A. Schepp. Leipzig. B. G. Teubner 1899, ст. VI + 146).

Є се переклад книжки італійського математика, якого численні підручники найшли в останніх часах велике признанє. По історичнім вступі наступає понятє варіяції означених поєдинчих інтегралів, основний проблем рахунку варіаційного, канонічні форми Lagrange'a та Weierstrass'a, проблем Lagrange'a та Mayer'a, метода множника та проблем ізопериметричний; далі іде понятє другої варіяції та її трансформація, варіяції многократних інтегралів (Остроградский, Delaunay), теория брахістохрони та найкоротшої лінії, поверхні мінімальні, а в кінці застосованя.

E Pascal. Repertorium der höheren Mathematik (übers. von A. Schepp). I. Theil: Analysis (Leipzig, B. G. Teubner 1900 ст. XII + 638).

Книжка та — як каже сам автор — має ціль в короткім нарисі злучити найважніші теорії новішої математики; з кожної теорії подає она тільки, кілько треба, щоби читач міг ся в ній з'орєнтувати, та вказує найважніші підручники. В 23 розділах подає автор найголовніші висліди нової аналізи від чисел зложених до знарядів графічних. Є ту отже теория чисел зложених, кватерніонів, субституцій, визначників, рядів; теория рівнянь альгебраїчних та теория Galois, рахунок ріжничковий, інтегральний та рівняня ріжничкові; групи трансформацій, рахунок ріжниць та варіаційний, теория незмінників; функції змінних зложених, функції періодичні, модулові, автоморфні, альгебраїчні, еліптичні, гіпереліптичні, Abel'a, Euler'a, функція гіпергеометрична, функції кулі, Bessel'a та Lamé, функції аналітичні; теория чисел, рахунок імовірности та номографія. Словом є се мовби енциклопедия математична, де з кожної теорії піднесено найважніші моменти. Найбільша вартість книжки в численній літературі, яка до кожного уступу долучена.

Другий том сеї книжки (геометрія) аналогічно зладжений вийшов доселі лиш по італійски.

N. Herz. Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung. (Sammlung Schubert XIX. Leipzig, G. J. Göschensche Verlagshandlung 1900. ст. IV+381).

Підручник сей складає ся з шістьох уступів; пять перших обнимає рахунок імовірности, послідний рахунок блудів. Подана є ту теорія і дуже много задач практичних; отже дефініція імовірности беззглядної та зглядної, право великих чисел, зложена імовірність, імовірність причин, теореми Bernouilli, Bayes'a, Moivre'a та проблем петербурский; моральна надія. З застосовань заслугує на увагу теорія гри, теорія обезпечень та імовірність зізнань свідків, засудів та перечуть (се послідне дуже інтересне). Послідний уступ подає теорію блуду, блуду пересічного та середного, теорію найменших квадратів, вирівнане обсервацій та рівняня нормальні.

На кінци долучені таблиці смертности.

P. Appell. Eléments d'analyse mathématique à l'usage des ingénieurs et des physiciens (Paris, G. Carré et C. Naud 1898. ст. 719).

Як вже заголовок вказує, книжка та має ціль більше практичну; подає она в 24 уступах найважнійші теорії аналізу, а через многі приміри стосує теорію до практики. Є ту зібране все, що входить в теорію рахунку різничкового та інтегрального, отже різничковане усяких функцій, інтеграли неозначені та означені, кубатури брил оборотових та правило Guldin'a, ректифікації кривих та поверхні брил оборотових; далі ідуть інтеграли раціональних функцій, розвиване функцій в ряди, різничковане та інтегроване рядів, ряд Mac-Laurin'a та Taylor'a, розвиване функцій на ряди тригонометричні, вираження неозначені. Опісля слідує теорія стичних до кривих плоских, „maxima“ та „minima“ одної змінної, теорія функцій двох змінних, площа стична до поверхні, „maxima“ та „minima“ функцій двох змінних; кривині кривих плоских та кривих подвійно кривих (крива шрубові), кривина поверхні, лінії кривинові, асимптотичні, геодезичні, напрями та сіти спряжені. Різничковане під знаком інтегрованя, інтеграли вздовж кривих, інтеграли многократні; рівняня різничкові першого ряду, які мож через квадратури інтегрувати, рівнане Clairaut, рівняня різничкові другого ряду і висших степенів, рівняня різничкові другого ряду і висших степенів, рів-

наня ріжничкові діїюві та системи рівнань, рівняня частні першого ряду і деякі другого ряду. Уступ про методи приближень, інтегратори та інтеграфи кінчить сей знаменитий та до того дуже елегантно виданий підручник; впрочім само імя автора добре звісне, щоби розводити ся довго над прикметами єго твору.

A. Schoenflies. Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (Leipzig, B. G. Teubner 1900. ст. V+251).

Книжка ся є рефератом, представленим німецькому товариству математичному. Обнимає она три части. Часть перша обнимає теорию множиний відчисельних (abzählbare Menge), понятє їх „сили“ (Mächtigkeit), понятє множиний невідчисельних та виєші класи чисельні. Часть друга обнимає теорию множиний точкових (Punktmenge), та їх „сили“, теорию множиний відграничених (abgeschlossen) та совершенних та зміст множини точкової. Трета часть приновровлює повнєші теорії до функций змінних дійсних; виступає ту протє понятє тяглости, функции нетяглі та колибаючі ся (oscillirend), основне твердження рахунку інтегрального та теория збіжности рядів.

M. Voigt. Elementare Mechanik. (II. Auflage. Leipzig, Veit et Compagnie 1901. ст. X+578).

Є се підручник для початкових фізиків; но він вимагає знаня рахунку ріжничкового та інтегрального; понятє скалярів, векторів, тензорів та операції ними подає сам автор у вступі. Книжка складає ся з трох частий: механіки точок материяльних, механіки тіл цїпких та механіки тіл, які можна деформувати. Часть перша виходить з засади безвладности Галїлея, дефініює скорість та прискорєне, силу та условини рівноваги, подає теорию свободного спаданя тіл, теорию рухів услівних (маятник сферичний), теорию тертя та опору воздуха, понятє живої сили, праці, потенциялу та енергії, теорию руху середоточного, гравітації, удару, моментів та рівнанє енергії. Друга часть оперує моментами оборотовими та безвладности, подає теорию рівноваги та обороту тіл, та теорию притяганя після закона Newton'a. Часть трета займає ся рівнянями руху ідеальних течий, рухами потенцияльними та вировими, дальше механікою течий, що підлягають тертю, механікою тіл пруживих, однородною деформацією, комбінованою деформацією, згинанєм вальця; дал слїдує теория филь плоских, дроганя напруженої нитки, поступ филь в осередках неограничених та ограничених, теория сопівок,

струн, фуль кулистих; уступ про теорем Poisson'a кінчить часть третю, а разом і книжку.

L. Ambronn. Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde. (Berlin, Julius Springer; I. Bd. 1899. ст. IX+500; II. Bd. 1899. ст. VII + від ст. 503 до 1276.)

Величезний сей підручник обнимає технічний опис найважніших інструментів астрономічних в 7 уступах. Уступ перший займає ся знарядями помічними в астрономії, отже шрубою, прямом, лібелюю, ноніом, та мікроскопами до відчитання крисочок нонія; уступ другий говорить про годинники, їх компензатори та регулятори; уступ третій говорить про поодинокі части знарядів, отже про оси, люнети, об'єктиви, окуляри, рефрактори, зеркала, телескопи Herschel'a, Newton'a, Gregory, Cassegrain'a, оптичні сталі знарядів, побільшене та силу світла; уступ четвертий говорить про колеса, машини до ділення, получене колес з інструментами, про мікрометри, подвійні мікрометри, геліометри. Уступ пятий займає ся знарядями, що служать до особливих цілій, отже знарядями проєкційними, фотографічними рефракторами, фотометрами, фотометром поляризаційним та знарядями спектральними. Шестий уступ говорить про цілі знаряди, с. в. про секстант, октант, знаряди універсальні, альтазімути, колеса в мурах (Mauerkreis), телескопи зенітальні, колеса прямові, знаряди до переходів (Durchgangsinstrumente), колеса полуденникові (Meridiankreise), хромографи, рефрактори уставлені паралактично та люнети кометальні (Kometensucher). Послідний уступ займає ся стовпами під різні знаряди та будовою різних обсерваторий.

Вартість книжки підносять численні хорошо виконані ілюстрації.

T. Beck. Beiträge zur Geschichte des Maschinenbaues. (Berlin, J. Springer 1900. ст. 582.)

Книжка ся подає жите та зміст праць фізиків від найдавніших часів, які причинили ся до технічного розвою механіки. Виступають ту перед нами особи старшого Герона, Паппуса, М. Віррувія Польльона, С. І. Фронтіна, старшого Катона, Леонарда da Vinci (три розвідки), Biringuccio, Г. Агріколі, Єронима Гардана, Й. Бессона, А. Ramelli, В. Lorini, Д. Фонтани (дуже інтересна історія ватиканського обеліска), Сальомона Кауса, Ф. Верантія, J. de Strada, G. Branca, М. Mersenne'a, G. P. Harstörffera та J. Watt'a (винахід машини парової).

В бібліотеці Ostwald'a: „Klassiker der exacten Wissenschaften“ вийшли в останніх часах ось-які книжки:

- Ч. 93. Euler. Drei Abhandlungen über Kartenprojection.
- Ч. 103. J. L. Lagrange. Unbestimmte Analysis.
- Ч. 107. Jakob Bernouilli. Wahrscheinlichkeitsrechnung (I. II. часть).
- Ч. 108. То само (III. IV. часть).
- Ч. 111. Abel: Abhandlungen über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen.
- Ч. 112. A. Cauchy. Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen.
- Ч. 113. Lagrange u. Cauchy. Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung.
- Ч. 116. Lejeune-Dirichlet. Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinus-Reihen. P. Seidel. Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen.

Recueil de travaux offerts par les auteurs à H. A. Lorentz. (Haye, Martinus Nijhoff, 1900, ст. IX + 678).

Книжка ся присвячена звісному фізику Lorentz'ови, професорови університету в Leyden, по причині 25-літніх роковин єго докторату. Обнімає она праці визначніших фізиків, як Brunhes'a, Rayleigh'a, Pellat'a, Aubel'a, Farkas'a, Boltzmann'a, Kaufmann'a, Planck'a, Riecke, Duhem'a, Zeemann'a, Poincaré, Ramsay, Voigt'a, Wan der Waals'a, Berthelot'a, Cohn'a, Wiechert'a, Dorn'a, Wind'a, Des Coudres'a, Goldhammer'a та иньших в язиці французьким, німецьким та англійським.

Журнала бібліографічного *Revue semestrielle des publications mathématiques* (під ред. P. H. Schoute, Korteweg etc. Amsterdam, Delsman en Nolthenius) том IX. часть I. 1901, вийшла з друку.

F. Klein u. E. Riecke. Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen (Leipzig, B. G. Teubner 1900, ст. VI + 252).

Є се виклади, які мали проф. Klein, Riecke, Schilling, Wiechert, Bohlmann, Des Coudres для учителів шкіл середніх в часі Великодніх свят в р. 1900 в Гетінген. Відносять ся они до стосованої математики

взагалі, технічної механіки, начеркової геометрії, математики забезпечень, електротехніки та геодезії. Виклади є обертають ся довкола слідуєчих питань: Що є стосована математика та фізика та яке їх значінє для висших шкіл; в який спосіб може придбати собі учитель відповідні відомости через самоцтво; в який спосіб треба доповнити напрями університетскі з огляду на потреби школи з одної, а знаня з другої сторони.

Другу часть книжки займають деякі давнійші розвідки Кляйна в повисшій матерії.

F. Schilling. Über die Nomographie von D' Ocagne (Leipzig, B. G. Teubner, 1900, ст. 47).

Є се реферат на основі книжки „Traité de nomographie“ d' Ocagne'a (Paris, Gauthier-Villars 1899). Реферат сей обнимає понятє скалі функційної, таблиці рахункові для рівнянь о двох незвісних, для рівнянь о трох незвісних, чотирох та більше незвісних, а вкінці теоретичні примітки.

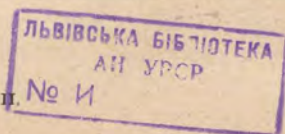
Перегляд важнійших журналів математичних.

Bibliotheca mathematica (журнал присвячений історії наук математичних під ред. G. Eneström'a, проф. в Штокгольмі; Leipzig, B. G. Teubner).

Трета серия, том II. зош. 1. р. 1901. ст. 1—176 містить праці з обсягу історії науки математичних Schmidt'a, Tannery, Suter'a, Curtze, Steinschneider'a, Braunmühl'a, Stäckel'a.

Acta mathematica (під ред. Mittag-Leffler'a в Штокгольмі). том 24. зошит 1. і 2. рік 1900 містять слідуєчі праці:

I. Bendixson: Криві визначені через рівняня різничкові. H. Koch: Кілька kwestий з теорії безконечних визначників. R. Lipschitz: Доказ звязи між чотирма осями оборотовими зміни довготи систему прямокутного, а „максимальним“ чотирикутником. H. Koch: Про розділ чисел первих. G. Mittag-Leffler: Представлене аналітичне одностайної галузи функції моногенічної (дві ноти).



Mathematische Annalen (під ред. Klein'a, Dyck'a, Mayer'a, а в останніх часах Hilbert'a; Leipzig, B. G. Teubner).

Том 54-ий зошит 1. і 2. 1900 обнімає слідуєчі праці: С. Neumann: Про методу середньої арифметичної, а особливо про усвершення, яких дізнали дотичні досліди Poincaré в останніх часах через праці А. Korn'a та E. R. Neumann'a. P. Stäckel: Friedrich Ludwig Wachter, додаток до історії неевклідової геометрії. P. Stäckel: Про вид кривих тору (Bahncurve) в певній класі проблемів динамічних. Н. Minkowski: Про приближене до дійсної величини через виміримі числа. Н. Ricci і Levi-Civita: Методи абсолютного рахунку різничкового і їх пристосовання. А. Hirsch: Про білінійові реляції між періодами інтегралів відворотних громад форм. Н. Richmond: Про поверхні мінімальні. К. Zindler: Про скількість особливих змінних в r -частній групі трансформацій точкових.

Том 54-ий зошит 3. 1901: Geiser і Maurer: Elwin Bruno Christoffel. Windelband: В пам'ять Е. В. Christoffel'a. Спие єго праць. Е. Christoffel: Совершенна теорія функції Riemann'a. Е. Pascal: Основи теорії систему рівнянь різничкових другого ряду. М. Petrovitsch: Про спосіб розширення теореми о середній вартості на рівняння різничкові першого ряду. К. Hensel: Теорія альгебраїчної функції одної змінної та інтегралів Абелевих. Н. Е. Timmerding: Про 16 подвійних площ поверхні Kummer'a. Р. Wolfskehl: Про одну задачу елементарної арифметики.

Journal für reine und angewandte Mathematik (оснований через Crelle, тепер редагований через L. Fuchs'a; Berlin).

Том 123. зошит 1 (рік 1901) містить праці:

Zimmermann: Новий вивід рівняня Plücker'a побіч кількох прямих визначень подвійних стичних плоских альгебраїчних кривих якогобудь ряду (ст. 1—32). Grünfeld: Про кілька білінійових різничкових виражень, що приходять в теорії рівнянь різничкових (ст. 32—41). Jahnke: Група точкова, що належить до потрійно перспективних трикутників (42—47). Jahnke: Конструкція деяких точок в геометрії трикутника (48—53). R. Fuchs: Про лінійові однородні рівняння різничкові, які належать до того самого рода, що і їх долучені (54—65). Thomé: Про лінійові рівняння різничкові з альгебраїчними сочинниками (66—88).

Bulletin de la Société mathématique de France, том 29. зошит I. (падолист та грудень 1907 р.) обнімає праці:

Duporcq: Про замітне уложенє двох параметрів. Touche: Про певну квестію d' Alembert'a. Rivereau: Незмінники лінійових та однородних рівнань частних 2. ряду. Appell: Спеціальна деформація тяглого осередка, вири різних родів. Bricard: Про певне свійство циліндроїда. Borel: Про формули Rodrigues'a. Weill: Про точки основні жмутів лінійових кривих альгебраїчних. Duporcq: Розширенє теорему Simson'a на просторонь. Sparre: Застосованє функцій еліптичних до студіюваня руху проєктилів. Demoulin: Про цилінтроїд та про теорію жмутів комплексів лінійових. Hadamard: Про поступ филь.

Journal de l' école polytechnique, 2-а серия, 5-ий зошит 1900.

Caspari: Азимут, ширина та довжина через рівні висоти звїзд. E. Maillet: Групи класи N -u степеня N що найменше $(u-1)$ рази переходні (transitif). Lescornu: Рівновага пруживости стовпа. Appell: Рівновага пруживости пливача з плинним тягаром. Carvallo: Теорія руху моноциклів та біциклів.

Transactions of the American Mathematical Society volume 2, Nr. 1, 1901. містить ось-такі праці:

Wilczyński: Незмінники систему лінійових рівнань різничкових. F. Sajori: Розбіжні та зглядно збіжні ряди, яких добуток є абсолютно збіжний. B. Porter: Твердженє про згідність точок неособливих та сизигетичних жмутів. W. Strong: Нота про не-кватерніонні системи чисельні. J. C. Fields: Редукція загального інтеграла Abel'a. D. Hilbert: Про поверхні зі сталою кривиною. F. Blichfeldt: Нота про функцію $f(x) \equiv \Phi(x) + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, яка в данім інтервалі різнить ся довільно мало від зера.

American Journal of Mathematics, vol. 23, Nr. 1, 1901.

Kantor: Типи лінійових комплексів раціональних кривих в R_n . Wilczyński: Трансформация систему лінійових рівнань різничкових. L. E. Dickson: Розділ трійкових лінійових однородних субституцій в тілі Galois. J. C. Glashan: Визначенє та розвязка метациклічних рівнань 5. степеня з раціональними сочинниками. E. O. Lovett: Конструкції геометрії Евклідової n -розмірової при помочи тяглих груп. Legh W. Reid: Таблиці клас чисел для кубічних

чисельних тіл. R. A. Roberts: О деяких свойствах площі кривої кубічної з огляду на колові точки в безконечности.

Annales of Mathematics (London) 2-а серія вол. 2. Nr. 2. (січень) 1901. містять праці:

R. E. Moritz. Розширене дослідів Hurwitz'a над переступом е на переступ числа π . A. Emch: Приворвлене функцій еліптичних до рукояті Peaucellier'a. Ch. Augas Scott: Нота про стіжкові криві. R. A. Harris: Про дворозміровий рух течі etc. G. Miller: Про спеціальну класу груп Abel'a. M. Bôcher: Теорія лінійової залежності. A. Hamilton: Особливі точки в родині поверхнний співосередних. D. Lehmer: Добутки совершенних чисел.

Annali di matematica pura ed applicata (журнал італійський під редакцією Bianchi, Cremona, Dini, Jung'a; Milano); серія III, том V. зош. 2. (січень 1901) містить твори:

Pagliano: Про ріжноманітність алгебраїчну 3-розмірову утворену лиш через безконечну площу (ст. 72—106). Bigiavi: Про зведенє рівняня ріжничкового лінійового з сочинниками подвійно періодичними (107—140). Інавігурація пам'ятника для E. Brioschi (ст. 141—164).

El progreso matématico (журнал іспанський; Zaragoza): падолист та грудень 1900.

Aubry: Про певну ідентичність Euler'a (стор. 401—413). Ріжні квестії та задачі (414—432).

Математическій Сборникъ (Москва. 1900).

Том XXI. 1 зошит. С. Антаевъ: Виклад основних свойств рівняня n ого степеня в залежності від системи n рівнянь з коренів даного рівняня (продовженє, ст. 1—53). Е. Сабининъ: Застосованє рахунку варіаційного до доказу теорема зглядом суми кутів в геодезійнім трикутнику, нарисованім на поверхні сталої кривини (ст. 54—61). З переписки академіка Hermite'a з професором В. Анисимовим: о формі інтегралів звичайних рівнянь ріжничкових з сочинниками періодичними (ст. 62—67). П. А. Некрасовъ: Рахунок приближених виражень функцій дуже великих чисел (ст. 68—224).

Том XXII. 2 зошит. П. А. Некрасовъ: продовженє попередньої статії (ст. 225—334). Н. В. Бугаевъ: Зв'язь чисельних

інтегралів по дільникам з чисельними інтегралами по натуральним числам (ст. 335—350). Г. К. Суслівъ: До питання про рух точки в осередку, який ся деформує (351—378). П. А. Некрасовъ: По причині „Отвѣта“ акад. А. А. Маркова (ст. 379—386).

Будучі проблеми математичні. На останнім міжнароднім конгресі математичнім в Парижі в р. 1900 підніс D. Hilbert, професор універз. в Гетінген, цілий ряд проблемів, якими після його погляду мусить ся математика зайняти, щоби тим успішнійше могла дальше ся розвинути. На його погляд в математиці нема „Ignorabimus“; є проблем, то можна его все розв'язати при помочи чистого мислення. Проблеми ті наведемо низше без довгих мотивів, які до них долучає Hilbert¹⁾.

В арифметиці є два такі проблеми:

1. дати безпосередний доказ на твердження Cantor'a (якого до нині не доказано): кожний систем безконечно много дійсних чисел т. є. кожда безконечна множинь чисел є рівноважна або з множиною цілих природних чисел 1, 2, 3, ———, або з множиною всіх чисел дійсних, а проте є рівноважна з continuum (пр. з точками лінії); значить ся в дусі рівноважності є лише дві множини чисел, відчисельна (abzählbar) і continuum.

2. доказати, що арифметичні аксіоми не є між собою суперечні, значить ся, що на їх основі при помочи скінченного числа заключень ніколи не дійдем до вислідів суперечних між собою.

В геометрії маєм ось-такі проблеми:

3. подати два чотиростінники о тій самій підставі і висоті, яких в ніякий спосіб не можна розложити на пристайні чотиростінники, та яких через доданє пристайних чотиростінників не можна доповнити до таких чотиростінників, що для них є можливий розклад на пристайні чотиростінники.

4. збудованє та систематичне обробленє можливих геометрий, (евклідова, неевклідова etc.)

5. розслідити, о скільки понятє тяглої групи перетворень Lie є доступне до наших дослідів без заложеня, що функції, які дефініюють групу $x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), є тяглі і дають ся різничкувати (як у Lie).

До фізики відносить ся слідуєча задача:

¹⁾ Pop. Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissensch. Göttingen 1900. Math. physik. Klasse Heft 3. ст. 253—297.

6. аксіоматичне оброблене — після взорів геометрії — тих частий фізики, в яких вже нині математика відгравала велику роль, с. 6. в першій мірі рахунок варіаційний та механіка.

Теорія чисел має ось-такі проблеми для будучих дослідів:

7. Доказати, що наколи в трикутнику рівнораменнім відношене кута при підставі до кута у вершка є альгебраїчне (але не раціональне), то відношене підстави і рамен трикутника є всегда переступне. Дальше доказати, що степе^{нь} α^β , де α є число альгебраїчне, а β альгебраїчно невимірне, є всегда числом переступним, або що найбільше невимірним (irrational).

8. Доказати в теорії чисел перших тверджене Riemann'a, що всі місця зерів функції:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

мають часть дійсну $\frac{1}{2}$. Коли ся вдасть се доказати, порішити, чи різниця між скількостію чисел перших понизше якоїсь величини x а логаритмічним інтегралом x дійсно не є що до x безконечностію ряду вишого як $\frac{1}{2}$.

Перенести опісля виследи одержані для розділу вимірних чисел перших на теорію розділу перших ідеалів в якімсь данім тілі чисельнім K .

9. Доказати право відворотности (Reciprocitätsgesetz) l -тих решт степенних для якого небудь тіла чисельного.

10. Подати спосіб, в який можна при помочи скінченого числа ділань пізнати, чи рівнане Діофанта має цілі додатні розвязки.

11. Заняти ся теорією форм квадратних з яким-будь числом змінних та якими-будь альгебраїчними чисельними сочинниками.

12. Kronecker доказав, що кожде чисельне тіло Abel'a в обсягу чисел вимірних повстає через зложенє з тіл одиничних (утворених з коренів з одиниці). Розширити се тверджене на случай, наколи місто царини чисел вимірних або мнимої квадратовой царини чисел приймем яко царини вимірности (Rationalitätsbereich) яке-небудь альгебраїчне тіло. Значить ся найти та дискутувати ті функції, які для якогонебудь альгебраїчного тіла мають ту саму роль, як функция виложна для тіла чисел вимірних, а еліптичні модулові функції для мнимого квадратowego тіла.

В альгебрі виказує Hilbert слідуючі kwestії:

13. Доказати, що рівняне 7-ого степеня:

$$f^7 + x f^3 + y f^2 + z f + 1 = 0$$

не дасть ся розв'язати при помочи яких небудь тяглих функцій з двома тільки аргументами.

14. Наколи маєм систем:

$$\left. \begin{array}{l} X_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ X_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right\} (S)$$

то кожде виміриме (раціональне) получене величин $(X_1, \dots, X_n)$ буде очевидно виміриною функцією аргументів $(x_1, \dots, x_n)$; можуть однак істнувати такі вимірні дробові функції величин $(X_1, \dots, X_m)$, які по зробленю субституції (S) перейдуть на цілі функції аргументів $(x_1, \dots, x_n)$; такі функції називає Hilbert зглядно цілими. Рішити, чи все є можливо найти скінчений систем зглядно цілих функцій з аргументами $(X_1, \dots, X_m)$, які можна зложити раціонально з кожної иньшої зглядно цілої функції аргументів $(X_1, \dots, X_m)$.

15-ий проблем відноситься до т. зв. рахунку відчислення (Abzählungskathöl), що єго сотворив Schubert (Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig, 1879). Доказати стисло ті геометричні уелів'я, які Schubert визначив на основі т. зв. засади спеціального положення, та подати точні границі, в яких ті уелів'я є правдиві.

16-ий проблем відноситься до альгебраїчних кривих і поверхнй в просторони. Точно розслідити взаїмне положенє найбільшої скількості віддільно положених куснів (Züge), яку крива альгебраїчна n -ого ряду може мати, далі розслідити скількість, вид та положенє плащів (Mantel), належачих до альгебраїчної поверхні в просторони. Далі визначити найбільшу скількість та положенє циклів граничних (cycles limites) Poincaré для рівняня ріжничкового першого ряду і першого степеня виду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

де Y та X є цілі вимірні функції n -ого степеня змінних (x, y, z) , або в однороднім виді:

$$X \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) + Y \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) + Z \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0,$$

де X, Y, Z є цілі вимірні функції однородні n -ого степеня змінних (x, y, z) , а t параметр.

17. Розслідувати, чи кожна означена (definite) форма не дасть ся представити яко квот сум форм квадратних.

18. Розслідувати, чи також в просторони Евкліда о n розмірах існує лиш скінчене число дійсно ріжних родів ірупу руху (Bewegungsgruppe) з основною цариною. Чи існують також такі многостінники, які не виступають яко основні царини, а однак при їх помочи дає ся просторонь виповнити без перерви через відповідне угруповане пристайних куснів.

Проблеми з теорії функцій.

19. Розслідувати, чи кожде частне рівнане ріжничкове правильного problemu варіаційного (Lagrange'a) має яко розвязки лиш аналітичні інтеграли.

20. Розслідувати, чи кожний правильний проблем варіаційний не дасть ся розвязати, наколи з огляду на дані услівя граничні сповняють ся деякі заложеня (а через се понятє розвязки конче дізнає розширення).

21. Доказати, що всегда існує рівнане ріжничкове лініове класи Фухса з даними особливими точками і даною монодромічною ірупою.

22. Poincaré доказав, що яка небудь звязь альгебраїчна між двома змінними дасть ся все перетворити через функцію автоморфну одної змінної; се значить, що коли є дане рівнане альгебраїчне двох змінних, то для них найдуть ся всегда такі однозначні функції автоморфні одної змінної, що по підставленю рівнане сповняє ся ідентично в тій одній незвісній. Но з сего не слідує зовсім, чи оно є можливо, ті однозначні функції автоморфні нової змінної так вибрати, щоби — наколи та змінна перебігає правильний обсяг тих функцій — через се був представлений також збір в сїх правильних місць даного утвору аналітичного (рівняня). Проблем 22-ий жадає проте розслідження того твердження і тих наведених трудностей.

23. Ту не подає Hilbert ніякого спеціального problemu, лиш висказує бажанє розширити і уґрунтувати дотеперішні теорії рахунку варіаційного.

Плинні кришталі. В послідних часах занимали ся квестією плинних кристалів Reinitzer, Schenck, Abegg, Seitz, а головню O. Lehmann. Сей послідний в двох викладах в „naturw. Verein-і“ в Карльсруге в р. 1900 подав цікаві звістки про азоксіанісолю і азоксіфенетоль. В відповідній температурі є се чисті, ясні течі;

наколи температура ся обнижає, теч стає каламутна, а опісля замерзає і стає кристалічна. Та теч каламутна ломить світло подвійно, а в світлі споларизованім поводить ся зовсім як криштал, витворює чорний хрест, ясні перетені і т. н. Згадані два тіла — а є їх еще більше — з причини їх власностей треба уважати за кришталі. Теч чиста є ізотропна (безподобна), каламутна стаєсь анізотропна (статня). В виду сего Lehmann подає таку дефініцію кришталів: є се тіла статні осмотрені дробинною напрямною силою; свойства, які до тепер лучено з понятєм криштала, як пр. видержність, спроможність росту, однородність і пр., треба з того понятя усунути. Існує проте ціла скаля тіл кристалічних від твердого діаманта до кристалічних течий.

(Beibl. zu Wiedemanns Annal.)

Арґон і єго товариші. Дуже цікаві розеліди над тими тілами перевели в минувшім році W. Ramsay і Morris W. Trawers. Після тих розелідів метанеон не є елементом, а всі прочі нові елементи: гелъ, неон, арґон, криптон та ксенон є газами одноамотовими. Інші свойства тих тіл вказує залучена табличка:

	Гелъ	Неон	Арґон	Криптон	Ксенон
Сочинник заломаня (воздух = 1)	0·1238	0·2345	0·968	1·449	2·364
Газова густота (0 = 16)	1·98	9·97	19·96	40·88	64
Точка кипіння (тисненя 760 m/m)	?	?	86·9° abs.	121·33° abs.	163·9° abs.

Після своїх свійств елементи ті треба в системі періодичнім ось-так примістити:

H	Helium	Li	Be
1	4	7	9
Fl	Neon	Na	Mg
18	20	23	24
Cl	Argon	Ka	Ca
35·5	40	39	40
Br	Krypton	Rb	Sr
80	82	85	87
I	Xenon	Cs	Ba
127	128	133	137

(Proceed. Roy. Soc. **67** p. 329—333, 1901, Natur. **63** p. 165, 1900).

Енергією лучів Рентгена та Becquerela займав ся в минушій році Е. Rutherford (Proc. Roy. Soc. 1900). З його розслідувань над діланем тепляним лучів Х виходить ось-що. Тверді рури, мірені больометром, давали лучі Х, що відповідали 0.046 Watt, а найбільша емісія на секунду виносила 19.5 калорій; енергія та була отже 560 разів більша як сонічна. Сочинник абсорпції для лучів Х при тисненію атмосферичнім був 0.000279, в CO_2 половину того. Взагалі абсорпція в газах росла пропорціонально до тиснення.

Пересуненє вікове осі магнетної земскої. W. van Bemmelen перевів рахунки над зміною положенія магнетної осі земскої в часі від 1600 р. до 1885 р. З рахунків тих вийшло, що вісь магнетна дізнала пересуненія в напрямі східно-західнім, при чім видним способом зростало єї віддаленє від бігунів оборотових. Дорога точок осі лежить майже в ізохасмі с. є. лінії рівночастого виступованія сьвітла полярного; здає ся проте, що вісь магнетна відбуває оборот довкола бігуна сьвітла полярного, а не довкола бігуна географічного.

(Wiedem. Beiblätter 1901. Heft 2.)

Густота електрична на еліпсоїдї. Наколи скількість електричності на еліпсоїдї о осях 2a, 2b, 2c є M, p є нормальна з середотсяки еліпсоїди до точки O, то густота електрична в точці виражає ся після обчислень Н. Dörrie взором:

$$\rho = \frac{Mp}{4\pi abc}$$

(Wiedem. Annal. 1901. Heft 3.)

Perrotin мірив в обсерваторії ніцейській скорість сьвітла способом Fizeau. Після тих помірок скорість сьвітла є 299.90 ± 0.08 тисячів km.

(Comptes rendus 131. 1900 p. 731—736.)

На загальнім конгресї фізиків в Парижі подав Ch. Dufour висліди помірок при помочи сонічного мікроскопа сили сьвітла деяких звїзд в порівнанію з сонцем. Сьвітло місяця є 300.000, Арк-

тура 33 мільярдів, Антареса 132 мільярдів, Атаіра 48 мільярдів разів слабше як світло сонця.

(Physikal. Zeitschrift 1901).

Щоби витворити в газі один йон, треба після Rutherforda при тисненню одної атмосфери середньої енергії $1.90 \cdot 10^{-10}$ erg.; та „енергія йонова“ є здаєсь для всіх газів однака.

Відступ поодиноких набойів в йонах в одній дробині є після обчислення Rutherforda $1.1 \cdot 10^{-9}$ cm., с. є. $\frac{1}{30}$ часть проміру атома; се згоджує ся з вислідами I. I. Thomsona, що відємний йон є лиш маленькою частинкою дробини.

Скількисть енергії, яку висилає один грам окиса уранового протягом одного року, є 0.032 кальорії, яку висилає один грам радіюм, 3000 кальорії.

Виправа дуньска вислана минувшого року під проводом Paulsen a до Ісландії в цілі розслідження світла полярного доказала, що лінії, які виступають в дуговині того світла, є ідентичні з лініями катодальних лучів азота, так що навіть напруги зглядні ліній в обох дуговинах є однакі.

Виправа ся мірила електричність воздушну протягом 53 днів, однак лиш 11 днів серед сприяючих обставин. З помірок сих виходить, що потенціал воздушний зрастав від години 8 рано аж до 12—1 з полудня; опісля спадав аж до години 2 в ночі, та осягав minimum між 3 а 4 годиною рано.

(Verhandlungen der deutsch physik. Gesell. 1900 p. 218 sqts).

Нові лампи електричні. Великим поступом в техніці освітлення електричного є лампа В. Нернста, професора університета в Гетінген. Нернст доказав іменю, що т. зв. діелектрики, що на зимно не пропускають електричного току, стають дуже добрими провідниками через достаточне огріте. Такими тілами є порцеляна та „рідкі землі“ (т. зв. тіла Нернста) пр. царкон. Лампа Нернста складає ся з такого діелектрика, а довкола него в певнім відступі окручена є спірала з платини; до обох тих тіл ведуть провідні дроти. Наколи ток починає кружити, то в першій хвилі переходить він лиш через дріт Pt та розжарує его до білого. Під впливом

горяча перемінює ся однак тіло Нернста в дуже добрий провідник та розжарує ся і видає інтензивне світло, а рівночасно автоматично ділаючий маленький електромагнет вилучає дротик Pt з току електричного. — Ще простіша відміна сеї лампи є лампа, де тіло Нернста ogrіває ся лампкою спиритусовою, а опісля перепускає ток. В обох разях цілий процедер заміни того тіла в провідник требає кілька секунд. Користи сеї лампи є наперед дуже інтензивне світло, дуже зближене до сонічного, далі се, що тіло Нернста не спалює ся в воздуху, отже не потреба до ламп Нернста грушок скляних безвоздушних, як в лампах Едізона, а в кінці найважнійша користь є та, що лампа Нернста зуживає через половину тільки току, що лампа Едізона однакої сили.

Засаду Нернста пристосував Е. Раш (Rasch) до ламп лукових: місто стовпчиків вугля уживає він стовпчиків з тіл Нернста, отже рідкі землі, магнезю, вапно і т. п. Конструкція є аналогічна, як у Нернста (побіч стовпчиків з тіл Нернста є — як звичайно — два стовпчики вугляні, які опісля відсуюють ся). Є ту о стільки вигіднійше, як в лампі Нернста, що як відомо світло лукове постває лиш між кінцями стовпчиків, отже висока температура 3000° — 4000° C, яка є в лампі Раша, не атакує та не нищить оправи мосяжної ламп. Дальша користь сеї лампи є та, що краска світла лежить в наших руках, бо она зависить від материялу. Наколи світло лукове має закраску фіолетну, то світло стовпчика цирконового або магнезійового є зовсім біле. Що до кількості електричності, яка є потрібна в лампі Раша, найліпше показує слідуєче порівняне: один ват витворює в лампі Едізона світло $\frac{1}{3}$ свічки, в лампі Нернста $\frac{2}{3}$ свічки, в лампі луковій вуглевій 2 свічки, а в лампі Раша 4 свічки.

Рівночасно обдумав звісний Auer von Welsbach нову лампу жарову, де дротик вугляний заступив дротиком з осму; є се о стільки користне, що Os дуже є витревалий на діланє тепла, більше як Pt та C; лампа така требає 700 до 1200 годин, а опір нитки осмової є чотири рази менший, як в дотеперішних лампках жарових. До використання токів електричних в дотеперішних закладах треба проте уставляти в ряд по чотири такі лампки осмові. Світло такої лампки є дуже сильне, а на лампці заощаджує ся до 60% в порівнянню з лампкою Едізона.

Цікаві розсліди над планетою Еросом (пор. попередні випуски Збірника) перевів Ch. André. З розслідів тих показує ся, що Ерос є звільдою фотометричною і є системою подвійним; обі астероїди, з яких планета ся зложена, мають проміри в відношенню 3:2, а площа їх орбіт переходить через землю.

(Comptes rendus CXXXII. 1901. ст. 397.)

В найблизших двох роках мож обсервувати слїдуючі наворотні комети:

Комета	Час обігу (в літах)	Перехід через перігеліюм	Після обчислень
de Vico E. Swift	6.4	1901.1	Seares'a
Brorsen	5.5	1901.1	Lamp'a
1894 I (Denning)	7.4	1901.5	Gutesman'a
Encke	33.	1901.7	Иванова
1895 II Swift)	7.2	1902.8	Dickerman'a
Tempel ₃ -Swift	5.5	1902.9	Bossert'a.

(Vierteljahresberichte der astron. Gesellsch. 1900.)

Помер славний математик французский Шарль Hermite. Родж. в р. 1823 був професором школи політехнічної та Сорбонни в Парижи. Від р. 1856 був членом Інституту, а в р. 1892 разом з покійним Pasteur'ом обходив ювілей своєї научної діяльності. Яко математик займав дуже видне місце в світі науковім; його голосні розсліди над переступом числа e , праці над теорією рівняння пятого степеня та висших, в теорії груп та функцій еліптичних та и, виробили ему почесне місце в історії розвою наук математичних та придбали ему безсмертне імя.

Конкурс академії парискої на рік 1902. 1) Усовершити в важній точці застосоване теорії груп тяглих до науки о рівняннях ріжничкових частних. 2) Розвинути і усовершити теорію поверхний, які ся стосують до парабольоїди оборотової.

Academia Pontaniana di Napoli розписує на рік 1901 слїдуючий конкурс: Виклад елементарний основ аксонометричного рисунку з застосованнями усякого рода.

Поняття тяглості. Філософський факультет університету в Гетінген поставив в березні 1898 р. наступну конкурсну задачу: „Через довгий час уважано за загальну засаду для математичного трактування явищ природних засаду тяглості (Stetigkeit) або ще спеціальніше представлене при помочі функцій, які дають ся різнити без ніякого застереження. Ту засаду ввели творці рахунку різниткового та інтегрального яко щось, що само через себе ся розуміє; поступи дослідів математичних показали однак що раз то виразнійше, що при тім tacite за основу приймаю дуже велике число закладень, до котрих ми однак при все існуючій неточности наших зміслових попереджень зовсім не є приневолені. То закладення стоїть вже навіть задалегідь в незгоді з приймаєм дробинної будови матерії. Факультет бажав би собі праці о чисто-науковім характері, яка би питання, що ту виступають, виложила в початково зрозумілий спосіб, згідно піддала точному дослідженню хосенність звичайного представлення тої kwestії. Праця може мати більше характер математичний або філософський та психологічний; історичні студії є пожадані, але не вимагані“. — Наколи перше сформульоване завдання задля її короткості не зістало в властивий спосіб поняття — три надіслані праці показали ся як недостаточні до уділення їм нагороди — оголошує факультет наступне обширне пояснене сеї конкурсної kwestії:

Поставлене питання толковано переважно, або бодай уважано за його ядро, в наступний спосіб: треба рішити, чи ліпше є уважати матерію за збудовану в спосіб молекулярний, чи за тяглу, та чи спеціально нові поступи наук природописних ґрунтують ся на тім, чи на тамтім погляді.

Того рода вивід, піднятий з незалежного становища та з дійсним поглядом на найновіші поступи царин природописних, які ту входять в рахунок, не був би без заслуги. На кождий випадок однак треба би при тім заважати, що ті два погляди власне в найновіших часах що раз то на перемін ся заступають. Наколи Maxwell в науці електричності впровадив теорію тяглості (continuum), то тепер в тій науці через теорію лучів катодальних та електродинамічну теорію світла звертаєм ся назад до атомістичного представлення річ. Фізикальна хемія, яка в науці фаз Gibbs'a характеризує стан матерії через скінчене число параметрів, отже за підставу здає ся приймає поняття тяглості, розвиває з другого боку атомістичну в своїй основі теорію йонів. В тім самім часі, в яким фізика змагає найліпше зробити через виключно „феноменологічне“

представлене явищ, буде хемія науку про положенє атомів в просторони і т. д. — З другого боку треба піднести, що погляд атомістичний не конче потягає за собою ідею сил з віддаленя (Fernkraft), сей погляд можна злучити з ідеєю тяглого в просторони переносеня сил, наколи впровадимо електричні або материяльні атоми (як собі їх хто представляє) яко поодинокі (особливі) місця в осередку, що в тяглий спосіб виповняє просторонь.

Повисший вивід, хоч і як інтересний, не влучає однак властивої теми, поставленої через факультет, лиш давав би для неї тимчасовий материял. До тої теми зближимося дійсно, наколи спитаємо: о скільки є в висше наведених примірах оба погляди (теорія тяглости і теорія дробинова) математично рівноважні для виясненя, або ліпше для представлення досліджених фактів? Змисл теми сейчас ухопимо, наколи усунемо все гіпотетичне та спекулятивне, що ся відносить до самої істоти матерії, та зовсім загально розважимо се, що слідує: Кождий впроваджує, скоро хоче осудити цілковите діланє розтяглих утворів, які є в малих розмірах неоднородні, однородні вартости середні; за ті впроваджує він залежності, які виражає через можливо просто дібрані функції. Так пр. заступає сей, що рахує, в многих случаях сумованє через інтегрованє і т. п. Первісний наклін до такого поступованя здаєсь лежить в натурі наших змислових постережень. Подумаймо пр., що купа снігу, на яку дивимося з далека, або ліс, що замикає овид, здаєсь мати тяглий контур. З тим лучить ся дальше змаганє до можливо простого представлення. О скільки є сей спосіб математично оправданий? Спеціально, який змисл має, стосувати до залежностей, які ми уставляєм поміж однородними середними вартостями, правила рахунку ріжничкового та науки про ряди? А наколи ми через таке застосованє найдем правдиві висліди, чи можемо опісля заключати назад на однородність або неоднородність субстрату? — Доперва наколи поладимо або бодай зрозуміємо комплекс так представлених питань, будемо могли вернути до проблему поясненя натури. Тоді ся спитаємо, яке внутрішнє значінє треба приписати залаженям тяглости (Stetigkeit), які ми привиклі від давна робити, чи они є чимсь більше, як лиш средством помічним до лекшого переведеня математичних розслідів, та в якім змислі мають висліди, з тих залажень випроваджені, претенсію до об'єктивного значіння.

Є неможлива річ, сказанє ту еще основнійше поясняти. Звернемо лиш увагу на дуже простиий примір (який привагідно Boussinesq розбирає). Кождий вчить ся, що потенціал тяжести в середині якогось тіля сповняє рівнанє ріжничкове $\Delta V = 4\pi\rho$. Яке значінє має

се рівнянє ріжничкове, або: яке значінє хочемо величинам V і φ , що в рівнянню ріжничковим приходять, надати для тіла, яке в малих розмірах є неоднорodne (як висє купа снігу)? І як представляють ся ті питання, наколи хочем прийняти будову тіла з атомів, що мають форму точок? Очевидно в однім або другім случаю схочемо впровадити V і φ яко середні вартости; як обчислити ті середні вартости?

По над питаннями та трудностями повнєшого рода перейшли найвизначнійші теоретики минувших десятиків лїт до порядку. Перечитати лиш, як Cauchy або Poisson від погляду молекулярного переходить до ріжничкових рівнянь математичної фізики. А сей наведений примір находить зі сторони великого числа нинїшних фізиків наслідуванє без надумуваня ся. Очевидно входить ту в розважанє множество емпіричних елементів. Досвід дає нам певність, що в загалї мада зміна преміс дуже мало змінє вислїди. Правда не все ся се дїє (наколи заходить „нерівновага“, при вибухах і т. и.); природописці спускають ся з огляду на питанє, чи в данім случаю заходить такий виняток, чи нї, на своє чутє або на експериментальну контролю; а як вислїд показує, слушно.

По нинїшний математик, що роздумує про основи своєї науки, не може в нїякий спосіб так себе ограничати. Він не буде оспорювати хїсна повнєше наведеного поступованя — навіть з відєи возьме охотно імпульс — но по за тим буде жадав точного математичного уґрунтованя та ограничєня такого поступованя. Для єго наклїну до пізнаня міродайним є новїтний розвій математики в напрямі критичнім. Той розвій уважають однак в загальнійших кругах, так зі сторони фізикальної, як і філософїчної, радо за щось додаткового, що для цілий поясненя натури властиво не входить в рахубу. Но однак ніколи не повинно бути задачею, відсувати неприємну критику на бік, але противно єї внутрішню (в єї істотї) побороти. З другої сторони вдоволило ся много математиків тим, нові основи в обсягу їх специяльної науки привести до значїня; они дуже рїдко мали або шукали нагоди відповідно тому змінити відношеня до сусїдних царин. Тому будуть ту відповідні слїдуючі поясненя.

1. Розходить ся о такий розвій математики, який означуєм яко з'аритметизованє єї. Яко одиноку єго основу служить перегляд образу чисел (Zahlbild), згл. прав, після яких оперує ся числами; до тої основи треба звести всі иньші відношеня. Ідея тяглої змінної буде заступлена через загальнійші сформулованя науки о множинях;

ідея функції дізнасть відповідного перетворення. Рахунок різничковий та інтегральний будуть оперті виключно на стисле поняття границі; ожаке ся правилом, а не винятком, що тягла функція не дасть ся зрізничкувати і т. д.

2. Істотною річею є, що змисловий погляд мірений на так з'аритметизованій математиці ожакує ся яко щось неточного, означеного лиш на певну скількість десятичних. Мимо сего з'аритметизована математика буде точкою виходу для квантитативного опанованя сьвіта вишнього¹⁾. В якій формі се має ся стати? І на які улешнення можна собі дозволити, наколи жадає ся від вислідів знов ограніченої точности? Се є центральне питање, під яке підпорядковує ся все вище сказане.

3. В сказанім містить ся, що потрібне є до розвязаня повисших трудностей. Розходить ся о се, щоби математик та емпірик подали собі руку на веспільній царині. Для математика повстає задача, на основі з'аритметизованої науки розвинути обширну науку про приближені методи, розвивати яко окрему науку се, що п. Нейп в новіших часах слушно назвав математикою приближень (Approximationsmathematik).²⁾ Знов же для емпірика буде розходити ся про се, щоби на всіх царинах, далеко більше як до тепер, установити степень точности, до якого (зверхні та внутрішні) обсервації, з яких він виходить, є правдиві, або внутрі якого він хоче мати вірні (zuverlässig) висліди.

Ся наведена програма не жадає в дійсности нічого нового, не достає лиш до тепер стислого єї переведеня. Рахмайстри прилучили ся до неї вже давно, а також в астрономії та геодезії прийнято єї загально від часу робіт Gauss'a. З новіших чисто математичних робіт треба згадати праці Чебишева. Так само треба ту навести твердження Вейерштрасса, що можна кожду в якімсь інтервалі подану функцію тяглу рівномірно приблизити з довільною точністю через виміриму (раціональну) функцію скінченного степеня. Яко нове жаданє виступає ту лишень се, щоби вище наведене поставлене питання більше висунути на перед яко властиву середоточку цілої стосованої математики, та набрати пересьвідчення, що приближене представлене відносин між величинами далеко більше про-

¹⁾ В противнім случаю приходять нові трудности. Пор. вступну промову проф. Burkhardt'a: Mathemat. und naturwissen. Denken, Zürich 1897.

²⁾ Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung XI, 2 (1900).

никає наше ціле мислене, як дотепер думано. Наші вискази про натуру річий стануть однак скромніші. Говорено давніше нераз, що в природі приходять лиш функції аналітичні. Сей висказ змінимо тепер о стільки, що може лиш через неточність нашого погляду на природу вистарчали функції аналітичні, і то дуже прості функції аналітичні. Через се не впадем однак ще в другий екстрем, який в найновіших часах заступає Boltzmann, ставлячи гіпотезу нетягlosti явищ в природі — так сказати — яко конечність мислення.

Значіне питання конкурсового, поставленого через факультет, здаєсь тепер достаточнo піднесене. Ходило о се, щоби комплекс квестий, які входять в рахубу, та понять в прозорій формі виложити і о скільки можна критично розібрати. Математик міг би рівночасно передприняти, науку про приближені метода перевести в спеціальній царині, філософ або психолог неточність нашого змислового постереження в тім або иньшій напрямі точнїйше студювати; згадаймо лиш на кінематограф, так залюбки наводжений через Boltzmann'a. Чого треба безусловно жадати з математичних відомостей, то лиш сего, щоби автор істоту з'аритметизованого знання, як оно тепер виступає в письмах винїшних міродайних математиків, в себе приймав. До сего не вистарчить перечитати загальні вискази визначних авторів, які подробиць новїйшої прецізїйної математики ніколи не тикали, хотяй би се ходило про Гельмгольца або Кірхгоффа, Больцманна або Маха. Математики можна вивчити ся лиш через сконцентроване студіум; в нїй нема ніякої „королівської“ дороги“ (Königsweg).

Дальші свойства лучів Бекереля. Після дослідів F. Giesel'a (Braunschweig) можна видіти лучі Бекереля, що виходять з препарату раду, держаного перед замкненим оком, навіть тоді, коли препарат (найліпше хльорак або бромак) находить ся в скринці зробленій з олова. Має ся тоді чуте, мов би ціле око було наповнене світлом; око мучить ся тому дуже скоро. Навіть сліпий, хотяй у него сочка очна є закаламучена, дізнає під впливом лучів Бекереля вражіння світла, що треба приписати фосфоресценції, яка повстає в середині ока. Дїланє фотографічних лучів Бекереля є таке, як лучів Рентгена, хотяй слабше. — Подібно, як лучі Рентгена, виладовують лучі Бекереля наладований електроскоп (через йонїзацію воздуха). Відмінне однак від лучів Рентгена є їх поведене магнетне; дізнають они, як лучі катодальні, збоченя магнетного, чого нема у лучів Рентгена. — Мимо так сильного проміньо-

вання частинки, які відривають ся від тіл лучистих, є так малі, що требаб міліона літ, щоби рад стратив на вазі 1 mg.

F. Himstedt i W. Nagel стверджують діланє лучів Бекереля на око, але лиш на око, яке в темноті випочало; для такого ока є лучі Рентгена і лучі позафіолетні видимі.

Після обсерваций Himstedt'a ділають лучі Бекереля на селен в сей спосіб, що єго електричний опір зменьшає ся; рад замкнений в подвійну ослону паперову викликав зменьшенє опору в клітинці з селену через верству воздуха грубу на 1 cm. о 1%. Єще сильнїйше ділають лучі Рентгена, які викликають зменьшенє опору селену о 50%. В сей спосіб ділають і позафіолетні лучі; противно позачервоні не ділають на селен зовсім. — (Annal. der Physik 1901, 4, IV. 531).

В розвідці „elektrische Leitfähigkeit in Gasen, die von Kathodenstrahlen durchsetzt sind“ доходить J. C. Mc Lennan до слїдуючих вислїдів: 1. Спроможність проводу, яку в якімсь газі викликають лучі катодальні, є подібна до спроможности, викликаной через лучі Рентгена та Becquerel'a, так що можна прийняти, що в обемі газу, на який трапляють лучі катодальні, повстають додатні та відємні йони. 2. Наколи лучі катодальні падуть на ізолювані металічні провідники, окружені воздухом, то ті провідники, передше ненабиті, одержують малий набій; набой додатні остають знищені (наколи передше на провіднику були), а від'ємні зменьшають ся. Ся утрата набою походить від діланя з'йонізованого воздуха, окружаючого провідник. 3. Наколи катодальні лучі о певній силі переходять через газ, то скількість йонів витворених в однім cm^3 газу залежить лише від густоти газу, а не залежить від єго складу хемічного. 4. Йонїзация, походяча в газах від лучів о сталій натужї, є пропорціональна до тисненя, яке є в газі. 5. При лучах катодальних, подібно як при лучах Рентгена, стоїть число витворених йонів в газі в означенім відношеню до скількості з'абсорбованой лучистої енергії.

(Zeitschr. für phys. Chemie 1901, зом. 5).

Нову методу до означеня тягарів атомових подає L. Benoist на основі своїх розслїдів над проникливістю материялів для лучів Рентгена. Після него питома проникливість елемента, яку мірямо в означених простих условинах, є сталою, яка далеко простійше зависить від тягару атомового, як питоме тепло. Ту сталу

можна легко визначати і она надає елементови єго становище в ряді чисел, які виражають тягар атомовий. Возьмім пр. інд, якого тягар атомовий є після деяких хеміків 75·6, після иньших 113·4. Проникливість інду для лучів Рентгена дає сему елементови місце за сріблом (108) та кадмом (112); отже інд має тягар атомовий 113·4 (а не 75·6).

(Compt. rend. 1901, t. 132 p. 772).

Монахійські хеміки К. А. Hoffmann та E. Strauss одержали з нехбленди, клевеїту, самарскіту та евксенїту олово, яке є лучиво-чинне (як рад); одержали они лиш єго получения, як хльорак та сїркан. Тіла ті флюоризують під впливом лучів катодальних на сино та ділають в темноті на плиту фотографічну. Препарати ті ривалїзують що до сили лучистости з найліпшими препаратами тору та урану. Вартостність того олова, як і єго тягар дробиновий здаєсь є більші як звичайного олова.

(Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. 1901, Jahrg. 34).

Розходженє ся дрогань Гертца в водї мірив С. Gutton в сїй спосіб, що при помочи ексциатора Гертца перепускав филї електричні здовж двох рівнобіжних дротів, які в віддалею 2·5 m від ексциатора переходили через деревляне, парафіною виложене корито. Резонатор до викритя филь складав ся з колеса переломаного, зробленого з мідяного дрота, і стояв між рівнобіжними мідяними дротами. Поза резонатором переходили дроти через друге подібне корито та були злучені містком. Наколи пересувано місток, показувала іскра резонатора мініма та максіма, а відступ містка між одним мінімум та одним максимум давав довгість филь. Поміри роблено наперед в воздухї, опісля в водї (дроти і резонатор уміщувано в водї). Довгість филь в водї була така, як і в воздухї; не залежала она ані від положеня резонатора зглядом дротів, ані від розмірів та поємности ексциатора. Наколи однак дроти уміщено в водї, а резонатор в воздухї, то филь була 8·3 рази меньша як тоді, коли дроти були в воздухї; с. є. сочинник заломаня води для филь електромагнетних є 8·3, число, яке вже і передше найдено. З факту сего, що довгість филь остала така як в воздухї, наколи дроти і резонатор були рівночасно уміщені в водї, слїдує, що період дроганя резонатора мусить при тім 8·3 рази бути більший.

(Compt. rendus 1901 t. 132 p. 543).

Після найновіших обчислень сила, якої уживає ся тепер в печах електричних цілого світа, виносить *summa summa* гин до 230000 конїв парових; з того на фабрикацію карбїду відпадає 185000 (в самій Франції над 60000) конїв, на фабрикацію алюмінієм 27000, міді 11000, а карборунду 2000 конїв.

(*L'etincille électrique*, Paris 1901 Nr. 15).

Нові теорії полярного світла. Після ученого шведского Сванта Arrheniusa є світло полярне наслідком від'ємного електричного виладованя сонця. Виладованя ті підлягають колибанням, які дають ся відчувати на планетах відповідно до їх положеня зглядом площі рівника сонічного та їх віддаленя. Сильне виладованє перетворює ся в катодальні лучі, які є причиною полярного світла. Лучі ті є розповсюднені по цілій землі, але бачити їх можна лиш коло бігуна, де они остають під більшим тисненєм і через те сильнїше світять. Після Arrheniusa всі планети мають хвости утворені з частинок від'ємно електричних, но хвости ті не є так сильні, як у комет.

Дещо подібна є теорія англійского фізика J. J. Thomsona. Приймає він, що всі тіла, отже і сонце, підлягають делікатному промінюваню, подібному до лучів Becquerel'a. Наколи такі сонічні лучі увійдуть в засяг магнетного притягання землі, то они дізнають відклоненя в напрямі до обох бігунів, а наколи они в кінци осягнуть в атмосфері відповідну верству з відповідною густотою, тоді повстають прояви світляні зорі полярної, подібні до лучів катодальних в рурках з розріжненим воздухом. — Теорію ту потверджують досвіді Poulsen'a, після яких дуговина полярного світла є схожа з катодальною дуговоиною азота.

Нові акумулятори Едізона. Едізон побудував нові акумулятори, яких поємність трикратно перевищує поємність дотеперішних акумуляторів з олова. Анодою є в них делікатно розміщена металічна мідь, катодою металічний кадм, електролітом 10%-овий розтвір NaOH; катода і анода відділені від себе перопоною асбестовою. При набиваню повітає CuO, при виладованю редукує ся CuO, а оксидує ся кадм. — В другім акумуляторі Едізона електролітами є надокис желіза і надокис ніклю, електролітом є KOH: при набиваню редукує ся надокис желіза, при виладованю діє ся противно.

Продукція платини на Уралю, де є головне жерело того рідкого металу, представляє ся так :

Видобуто :

Рік	kg	Рік	kg
1891	4226	1896	4930
1892	4570	1897	5649
1893	5094	1898	5978
1894	5208	1899	5946
1895	4406	1900	5438

Курс Pt був в 1900 р. 3500 fr. за 1 kg, кошта продукції 1000—1800 fr.

(L'électricien 1901. Nr. 546).

Продукція алюмінієм в тоннах метричних виносила в послідних 12 літах :

Рік	Сполучені Держави Америки півн.	Інші краї
1889	21·6	70·9
1890	27·9	165·3
1891	68·2	233·4
1892	118·1	487·2
1893	164·4	716·0
1894	250·0	1290·9
1895	417·8	1418·2
1896	590·9	1659·7
1897	1814·4	3394·4
1898	2358·7	4500 0
1899	2948·4	6000·0
1900	4000·0	7500·0

(L'étincille électrique, Paris 1901 Nr. 10).

Хотят в природі дуже много витворюєсь метану (CH_4) (газ блотний), то однак майже нема єго в атмосфері. Толковано се в ріжн. й спосіб, а найчастійше, що газ сей в міру, як ся творить, спалюєсь в атмосфері під впливом озону. Доперва V. Urbain внав на думку і ствердив се досьвідом, що газ сей абсорбують рослини, подібно як безводник квасу углевого (CO_2). Рослини замкнені щільно в начиню, яке було наповнене атмосферою богатою в метан, з'абсорбували протягом 6 до 11 днів 82% сего газу.

(Comptes rendus 1901. t. 132, p. 334).

Після найновіших pomірок J. Dewar'a є середня температура кипіння плинного кисня — 182.5°C , а плинного водору — 252.5°C , значить ся 20.5° абсолютної скалі.

(Proceed. of the Royal Society 1901, vol. 68).

Нові означеня температури, при якій топять ся золото, переведені через L. Holborn'a та A. Day'a дали на вислід 1063.5°C , накопи золото топлено в тиглю, уміщенім в печи електричній, а 1063.9°C , накопи золотий дріт уміщено в термоелементі в точці злютованя сего елементу та розгріто так сильно, що ся сей дріт стопив.

(Annal. der Physik 1901. F. 4. Bd IV).

Температура, в якій топлять ся різні мінерали та скали, є слідуюча (після pomірок C. Doelter'a, довершених при помочи платино-родового пирометру): 1. мінерали: ортокляз 1145°C , альбіт 1100° , лябрадор 1119° , анортит 1125°C , авіт 1075°C , дїальзят 1035° , сподумен 925° , музовіт 1205° , біотит 1115° , нефелін 1042° , левкіт 1300° , магнетит 1140°C . 2. скали: граніт 1240° — 1300° , монзоніт 1115° — 1170° , лїмбургіт 995° , базальт 992° — 1050° , лява з Етни 960° , лява з Везува 1030° — 1090° , левцитіт 1400°C .

(Wiener akad. Anzeiger 1901).

Екстремн температури в XIX. столітї. Після „Revue scientifique“ температура обсервована в Парижі в літах 1801 до 1900 представляє ся ось так. Найнижша температура припала в 45 літах на січень, в 27 літах на грудень, в 21 літах на лютий, в 5 літах на март, а лиш в однім році на падолист. Лиш в двох роках впала температура нїжше 20° , а се 9. грудня 1871 р. (-21.3°C) та 10. грудня 1879 (-23.9°). Переважно (бо в 79 літах) minimum лежало між -5° а -15°C . — Найвисша температура випала в 49 літах на липень, в 33 на серпень, в 14 на червень, а в 2 на май та вересень. Найвисша температура випала на 9. липень 1874 р. ($+38.4^{\circ}\text{C}$), 2. липень 1900 ($+37.7^{\circ}\text{C}$), 8. серпень 1873 та 19. липень 1881 ($+37.2^{\circ}\text{C}$). Пересічне maximum (бо в 68 літах) лежало між $+30^{\circ}$ а $+35^{\circ}\text{C}$.

(Die Natur 1901).

Зимне сьвітло відкрив R. Dubois, професор університету в Люні. Сьвітло се дає один рід бактерий т. зв. фотобактерій, накопи їх культуру годує ся на буліоні з соли морської, гліцерини,

пентону та аспарагіни в начинню скляним. Світло се є досить сильне, так що можна ним освітити цілу салю, мов світлом місяця в повни; триває оно досить довго і є зовсім змне (без сліду теплих лучів).

В часі виправи Нанзена до бігуна північного робив численні поміри прискорення земського капітан Scott-Hansen при помочи маятника Штернека. Поміри ті порівнані з дотеперішними формулами на обчислене прискорення потверджують правдивість другого взору берлінського професора Гельмерта, так що нормальне прискоренє в ширині географ. φ дасть ся представити точно взором Гельмерта:

$$g_0 = 9.78046 (1 + 0.005302 \sin^2 \varphi - 0.000007 \sin^2 2\varphi).$$

Physik. Zeitschrift 1901. N. 38).

Високість хмар мірено недавно в Англії при помочи фотографії та одержано: для „cirrus“ 10200 m, „cirrocumulus“ 8600 m, вершок „cumulus“ 3000 m, підстава 1300 m, „cumulostratus“ 2200 m. Хмари осягають найвищу високість коло 2—3 години з полудня, а опісля опадають.

(Nature).

Директорови обсерваторії Smith'a в Женеві (Нью-Йорк), Wiliam'ови R. Brooks'ови повело ся одержувати фотографії при ужитю виключно світла, яке походило від планети Венери. В найтемнішій порі нічній впускав він через отвір копули в обсерваторії до цілком затемненої комнати лучі сеї планети та при ужитю виключно тих лучів фотографував різні предмети; одержані фотографії були надсподівано виразні та ясні.

(Prometheus 1901. Nr. 590).

На планеті Юпітер виступила 15° півн. ширини чорна пляма з слабою червоною примішкою (після обсерваций п. Solá в Барцельоні); пляма та має вид округлий і є в части оточена чорним перстеньом. Пляму ту спостережено 2. червня, а ще 31. мая Solá обсервуючи поверхню Юпітера не замітив на ній нічого нового. Пляма та є проте імовірно зовсім нова.

(Astron. Nachricht. 1901 червень).

В послідних 14 роках, т. є. від часу введення фотографії до астрономії, виступило після Pickering'a 8 нових зізд, а іменно

Nova Persei 1887, Nova Aurigae 1891, Nova Normae 1893, Nova Carinae 1895, Nova Centauri 1895, Nova Sagittarii 1898, Nova Aquilae 1899 і Nova Persei 1901.

(Die Natur 1901. Nr. 16).

Е. Nichols розслідував в обсерваторії Yerkes'a тепляне проміньоване деяких зізд та планет при помочи дуже докладного радіометра; з розслідів тых випали на зглядне тепляне проміньоване числа:

$$\text{Вега: Арктур: Юпітер} = 1 : 2.2 : 4.7,$$

підчас коли їх ясність 6:

$$\text{Вега: Арктур: Юпітер} = 1 : 1 : 7.8.$$

Отже Арктур 6 соровмірно теплійший, а Юпітер яснійший, як другі тіла.

(Naturwiss. Rundschau 1901. Nr. 19).



И 47373 Т. 7;
Вип. 1-2 (1900)

1975

З БІБЛІОТЕКИ
НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА
ІМЕНІ
ШЕВЧЕНКА
У ЛЬВОВІ.
Ч. 1975

ЗБІРНИК
МАТЕМ.-ПРИРО
ДІКАРСЬКОЇ
СЕКЦІЇ

VII