

З БІБЛІОТЕКИ
НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА

Імені

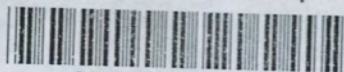
ШЕВЧЕНКА

У ЛЬВОВІ.

Ч.

1975

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00650750 (N)

З БІБЛІОТЕКИ
НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА

імені

ШЕВЧЕНКА

У ЛЬВОВІ.

7

~~1975~~

5002
2012

1975

и. 47373/9,

IX

ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСЬКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імені Шевченка.

ТОМ IX.

під редакцією

ІВАНА ВЕРХРАТСЬКОГО, Дра ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦЬКОГО
і Дра ЄВГЕНА ОЗАРКЕВИЧА.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SECTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

BAND IX.

REDIGIRT VON

JOHANN WERCHRAATSKYJ, Dr. VLADIMIR LEWYCKYJ
u. Dr. EUGEN OZARKEVYČ.

У ЛЬВОВІ, 1903.

Накладом Наукового Товариства імені Шевченка.

З печатні Наукового Товариства імені Шевченка
під зарядом К. Беднарського.

КНИГАРНЯ НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА ІМЕНІ ШЕВЧЕНКА

має на складі між иньшими отої книжки і брошури :

	КОРОН
Вобяк Григорий. Про наші губи	0-10
— Причинки до ліхенології східної Галичини	0-10
Верхратский Іван. Зоології (на висні класи)	1-60
— Ботаніка (на висні класи)	1-40
— Мінералогія	1-40
— Соматології	1-80
— Начерк соматології	3-—
— Нічна лівка мотилів	0-10
Верхратский-Ростафінський. Ботаніка для висших клас	2-40
Глібовицкий Клим. Рівнянє питого степеня	0-40
— Права руху маятника	0-30
Др. Горбачевский Іван. Причинок до пізнання виживи селяньської людно-	
сти галицького Поділя	0-30
— Загальний метод добуваня нуклеїнного квасу з ортанів	0-06
Др. Дакура Осип. Зі шпитальної казуїстики за рік 1899	0-20
— Інтересний случай повотвору середгрудного	0-20
Збірник секції математично-природописно-лікарської Наукового Товариства	
імени Шевченка. Том I.	3-—
— Том II.	3-—
— Том III. випуск I. Часть лікарска	2-—
— Том III. випуск II. Часть математично-природописна	2-—
— Том IV. випуск I. Часть лікарска	2-—
— Том IV. випуск II. Часть математична	1-—
— Том V. випуск I. Часть лікарска	1-—
— Том V. випуск II. Часть лікарска	1-—
— Том VI. випуск I. Часть математично-природописна	2-—
— Том VI. випуск II. Часть лікарска	2-—
— Том VII. випуск I. Часть математично-природописна	2-—
— Том VII. випуск II. Часть математично-природописна	3-—
— Том VIII. випуск I. Часть лікарска	3-—
— Том VIII. випуск II. Часть математично-природописна	3-—
Левицкий Володимир. Група модулова	0-10
— Еліптичні модулові функції	0-30
— Материяли до фізичної термінології ч. I.	0-20
— " " " " " ч. II. і III.	0-20
— " " " " " ч. IV.	0-15
— Про переступи чисел e і π	0-70
— Електроманетна теорія світла	0-70
— Класифікація наук математичних	0-15
— Короткий начерк теорії функцій автоморфних	0-30
— Теорія перстєня Сатурна	0-40
— Додаток до теорії дробів тяглих та групи модулової	0-20
— Найновіші праці з теорії функцій аналітичних	0-20
— Математика теоретична а практична	0-10
— Д. Гільберта основи геометрії	0-10
— З теорії рядів степенних	0-10
— Ісаметрія метова в оптиці ісаметричній	0-20
— Материяли до математичної термінології	0-35
Матвїєв Софрон. Дещо про лучі Бекереля	0-10
Огоновский Петро. Учебник аритметики для низших клас середних ч. I.	1-80
— Учебник фізики для низших " шкіл середних " " " " " ч. II.	1-60
	2-40

ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСЬКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імені Шевченка.

ТОМ IX.

ПІД РЕДАКЦІЄЮ

ІВАНА ВЕРХРАТСЬКОГО, Дра ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦЬКОГО
і Дра ЄВГЕНА ОЗАРКЕВИЧА.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SECTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

BAND IX.

REDIGIRT VON

JOHANN WERCHRATSKYJ, Dr. VLADIMIR LEWYCKYJ

u. Dr. EUGEN OZARKEVYČ.

У ЛЬВОВІ, 1903.

Накладом Наукового Товариства імені Шевченка.

З печатні Наукового Товариства імені Шевченка
під зарядом К. Беднарського.



58.

РЕВІЗІЙНА БІБЛІОТЕКА
АН УРСР
№ И 47387

З М І С Т.

	Стор.
1. <i>Клим Глібовицький</i> . Микола Генрих Абель і його значіння в математиці	1—88
2. <i>Юліян Гіряк</i> . Роля сталої, плинної і газової фази в хемічній рівновазі	1—42
3. <i>Др. Володимир Левицький</i> . Відношене геометрії метричної до метової	1—11
4. <i>Др. Стефан Рудницький</i> . Фізична географія при кінці XIX. столітя	1—116
5. <i>Др. Михайло Кос</i> . Очні хвиби у новобранців	1—10
6. <i>Др. Вячеслав Морачевський</i> . Переміна матерії при акрометалії	1—6
7. <i>Др. Михайло Кос</i> . Лічене трахоми і других запалень злучниці іхтарганом	1—4
8. <i>Др. Володимир Левицький</i> . Начерк термінології хемічної	1—12
9. <i>Бібліографія і хроніка математично-фізична</i>	1—61

INHALT.

	Seite
1. <i>Klemens Hlibowyczyj</i> . Niels Henrik Abel und seine Bedeutung in der Mathematik	1—88
2. <i>Julian Hirniak</i> . Die Bedeutung der festen, flüssigen und gasartigen Phase im chemischen Gleichgewichte	1—42
3. <i>Dr. Wladimir Lewyckyj</i> . Das Verhältniss der metrischen und projectiven Geometrie	1—11
4. <i>Dr. Stephan Rudnyckyj</i> . Physische Geographie am Ende des XIX. Jahrhunderts	1—116
5. <i>Dr. Michael Kos</i> . Augengebrechen der Wehrpflichtigen	1—10
6. <i>Dr. Wenzel Moraczewskyj</i> . Stoffwechselversuch bei Acromegalie	1—6
7. <i>Dr. Michael Kos</i> . Behandlung des Trachoms und anderer Bindehautentzündungen mit Ichthargan	1—4
8. <i>Dr. Wladimir Lewyckyj</i> . Ein Grundriss der chemischen Terminologie	1—12
9. <i>Mathematisch-physikalische Bibliographie und Chronik</i>	1—61

МИКОЛА ГЕНРИХ АБЕЛЬ І ЄГО ЗНАЧЕННЯ В МАТЕМАТИЦІ.

(З нагоди столітніх роковин єго уродин).

НАПИСАВ

Клим Глібовицький.

Світ науковий обходив 1902. р. столітню річницю уродин великого генія, математика норвегського Абеля. В виданнях товариств наукових усіх народів вийшли або ще вийдуть статті посвячені пам'яті сего незвичайного чоловіка — велита, яких не чснуть на сотки історія культури людскости¹⁾. Може раз на сто років спроможесь природа на єство такої сили духа, яка була у Абеля; творчість єго така величезна, а діла такої ваги в історії розвою математики, що прямо непонятним здає ся, щоби се міг зробити чоловік, що в 27. році життя зійшов до гробу. — Не годить ся-ж і нам остати зовсім по заду других і не почитити Абелевого ювілею; а не мож сего зробити краще, як передаючи спадщину по нїм виданням Наукового Товариства ім. Шевченка.

ЧАСТЬ ПЕРША.

Житє Абеля.

Микола Генрих Абель (Niels Henrik Abel) родив ся 25. серпня 1802. р. в селі Findoe в Норвегії, де батько єго був протестантским

¹⁾ Єго пам'яті посвячений приміром величавий твір: N. H. Abel, memorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. (Leipzig, B. G. Teubner 1902, ціна 21 марок).

пастором. Дитячі літа перевів Абель в Gierrestadt, сусідній парохії, де вже в р. 1803. перенїс ся его отець. І ту розпочалося образованє малого хлопця під проводом самого батька і тревало до р. 1815, поки він не вступив до школи катедральної в Християнії. Ту зразу не вирізнявся він від своїх співучеників; аж коли в р. 1818. Holmbøe зістав іменованій професором в тій власне школі, тоді на окремих годинах, які сей професор призначив на вправлюванє своїх учеників в розв'язуваню проблемів з алгебри і геометрії, показавсь вперше талан Абеля, і від тоді став він розвиватись безпримірно



1802 — 1829.

скоро. Вже тодашні его поступи казали догадуватись в нїм генія. Проф. Holmbøe зайняв ся ним і поза годинами шкільними перейшов з ним основи рахунку різничкового і інтегрального Айлера (Euler). Відтак Абель ішов вже дальше самостійно, читав праці Lacroix'a, Francoeur'a, Poisson'a, Gauss'a, Lagrange'a і сам став пробувати сил своїх. Скінчивши школу катедральну вже по смерті свого батька вступив він на університет в Християнії, а що батько не оставив средств на его образованє, то деякі з поміж професорів зложились, щоб дати Абелеви можливість незалежного істнованя,

конечного для так визначного талану. По двох роках ряд на внесенє сенату академічного надав єму надзвичайну стипендію в висоті 200 Sp. річно. І ту стипендію pobирав він через два роки аж до правильного укінчення студій університетських.

В тім часі працював Абель з великим запалом і написав кілька розправ друкованих в „Magazin für die Naturwissenschaften“ в Християнії. Перша з них друкована в р. 1820. має заголовок: „Allgemeine Methode Functionen einer variablen Grösse zu finden, wenn eine Eigenschaft dieser Functionen durch eine Gleichung zwischen zwei Variablen ausgedrückt ist“. І вже тоді займав ся він справою розвязки алгебраїчної рівняння п'ятого степеня; раз навіть здавалось єму вже, що найшов розвязку, та на жаль спостеріг похибку в своїй роботі. Але се его не зразило, і він постановив собі або дійти до розвязки або показати, що розвязка є неможлива. Се останнє вдалось єму і він в р. 1824. оголосив в Християнії свій доказ під заголовком: „Mémorial sur les équations algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré“. Так розяснив Абель се питанє в теорії рівнянь алгебраїчних, питанє найважнійше, яке було до розвязання в аналізі, як каже Legendre¹⁾.

З огляду на ту визначну діяльність наукову надав ряд Абелеви на его просьбу стипендію 600 Sp. річно на протяз двох років, щоби єму уможливити дальше фахове образование на заграничних університетах. Абель хотів зразу їхати прямо до Парижа, але що разом їхали і другі его країни і вибирали Берлін, то і він поїхав разом і не жалував сего, бо там познакомив ся з Crelle'ом, що став відтак его щирим приятелем і був ним аж до смерті. Дневник „Crelle's Journal“, якого перший зошит вийшов з початком р. 1826. в часі побуту Абеля в Берліні, причинив ся немало до літературної слави Абеля. Він був одним з найдіяльніших співробітників сеї часописи і в кождім зошиті була бодай одна або дві его розвідки; а кожда з них причинила ся немало до піднесення поваги сеї часописи.

З кінцем лютого р. 1826. покинув Абель Берлін і на Липск, Фрейбург, Дрезно і Прагу поїхав до Відня; по місяцю, десь з кінцем мая, виїхав він з Відня до Італії та Швейцарії, а в липни був вже в Парижі, де задержав ся на довше, бо до січня 1827. р. Ту

¹⁾ Обширне представленє сеї kwestії находить ся в розвідці: „К. Глібовицкий. Рівнянє п'ятого степеня (Збірник матем. природ. том II).

познакомився він з многими математиками, а між ними і з Cauchy'ом. Відтак побув ще в Берліні та Копенгазі, а в маю був вже з поворотом в Християнії. Ту старався він о катедру математики на університеті, але обі катедри, які були, були на сей час заняті, а нової для Абеля ряд не хотів утворити. І так оставав він без місця аж до р. 1828, коли то поручено єму заступство проф. Hansteen'a на час подорожи сего до Сибєрії. Вже тоді був Абель членом королівської академії наук в Thronthjem.

Приятелі Абеля в Німеччині звернули увагу пруского міністра просвіти на визначний талан Абеля і спонукали, що ряд згодився запросити єго на берлінський університет. В тім самім часі кількох членів королівської академії наук в Парижі звернулися до короля шведского з проською, щоби покликав Абеля на університет в Штокгольмі, та пруский ряд поспішився. Crelle дістав припорученє поспитати Абеля, чи евентуально прийняв би запрошенє, а по прихильній єго відповіді мав остаточно уложити ту справу і стягнути Абеля до Берліна. Єще того самого дня сповнив Crelle припорученє, та на жаль було за пізно — лист прийшов вже по смерті. Невпинна праця послїдних років, а також журба о завтра підкосили і так не сильне здоровлє Абеля. В грудні 1828. р. серед лютої зими виїхав він до гуті желїзної в Froland коло Arendal, де була єго наречена панна Кетр (пізнійше пані Keilhau); там захорував в січні 1829. р. і мимо усяких старань і заходів нареченої і властителїв гуті помер на чахотку дня 6. цвїтня 1829¹⁾.

Можна ємїло сказати про него: Коли-б був пожив довше, то не одно єще були-б про него почули. То, що Абель оставив по собі, дає повне право до такого висказу. Вистанє згадати доказ про неможливість алгебраїчної розвязки рівнань загальних степеня висшого чим четвертий, єго праці над функциями еліптичними, які властиво він сотворив разом з Jacobі'm, розправу про загальні прикмети функцій переступних і т. д., щоби бачити, що не сказалося за багато. Се все є праці, що далеко розширили границі аналізи.

Пригляньмося тепер спадщині, яка осталась по єїм так передвчасно померлим єніїяльним математичним дусї.

¹⁾ Порів. Holmboe: *Noties sur la vie de l'auteur* (Передмова до *Oeuvres complètes de N. H. Abel*). Обширну біографію Абеля видав Bjerknes п. zar. Niels-Henrik Abel (Paris, Gauthier-Villars 1885).

ЧАСТЬ ДРУГА.

Твори Абеля¹⁾.

I. Шукане функцій двох величин змінних незалежних x і y , таких $f(xy)$, що $f(z, f(xy))$ є функцією симетричною величини x, y і z . (Oeuvres complètes I. 1).

Вийшовши з частного приміру:

$$f(xy) = x+y, \text{ де } f(z, f(xy)) = z+x+y,$$

де отже виходить симетрична функція даних величин, шукає автор відтак загальної форми функції f . Яко симетрична мусить она сповняти слідуючі рівняня:

$$f(z, f(xy)) = f(x, f(yz))$$

$$f(z, f(xy)) = f(y, f(zx))$$

а коли для скорочення наведем:

$$f(xy) = r, \quad f(yz) = v, \quad f(zx) = s \quad (1),$$

то дістанемо через різничкування:

$$\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial z}} = \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{\frac{\partial s}{\partial z}}.$$

Наколи приймем z постійне, тоді:

$$\frac{\partial v}{\partial y} : \frac{\partial v}{\partial z} = \varphi(y)$$

¹⁾ Твори Абеля вийшли в двох виданнях; перше видане видав Holmboe в р. 1839, друге, дуже старанно зредаговане через L. Sylow'a і S. Lie, вийшло заходом ряду норвегского в Християнії в мові французській в р. 1881. п. заг.: Oeuvres complètes de Niels-Henrik Abel, nouvelle édition (перший том ст. VIII-621, том другий ст. IV-341) ціна 24 марок. — Розвідки Абеля, що ся відносять до алгебраїчної розвязки рівнянь, видав H. Maser враз з творами E. Galois під заг. Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen (Berlin, J. Springer 1889); їх є пять. Дві розвідки Абеля вийшли в „Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften“, а іменно № 71 класиків (з р. 1895) містить: „Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots$ “, а № 111 (з р. 1900) містить: „Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen“. Одна розвідка п. з. „mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendentes“ вийшла в Парижі в р. 1841.

буде функцією самого y , а

$$\frac{\partial s}{\partial x} : \frac{\partial s}{\partial z} = \varphi(x)$$

буде такою самою функцією величин z і x , як v величин z і y ; а з відси:

$$r = \psi \left[\int \varphi(x) dx + \int \varphi(y) dy \right]$$

(ψ якась функція). А коли для скорочення поставимо за інтеграл

$$\int \varphi(x) dx \text{ і } \int \varphi(y) dy \text{ } \varphi(x) \text{ та } \varphi(y), \text{ дістанемо:}$$

$$r = f(xy) = \psi(\varphi(x), \varphi(y)) \quad (2)$$

т. в. форму, яку має мати функція дана, лиш треба обмежити рівняння головні (1), бо форма (2) є більше загальна як (1).

В той сам спосіб буде далі:

$$f(z, r) = \psi(\varphi(z), \varphi(r)) = \psi(\varphi(z) + \varphi\psi(\varphi(z), \varphi(y))).$$

А що се виражене є симетричне з огляду на x, y, z , то:

$$\varphi z + \varphi\psi(\varphi x + \varphi y) = \varphi x + \varphi\psi(\varphi y + \varphi z).$$

Най: $\varphi z = 0, \varphi y = 0$, то:

$$\varphi\psi(\varphi x) = \varphi x + c.$$

Положім $\varphi(x) = p$, то:

$$\varphi\psi(p) = p + c,$$

а коли φ_1 є функцією відвратною до φ такою, що $\varphi\varphi_1(x) = x$, то:

$$\psi(p) = \varphi_1(p + c),$$

а форма загальна функції, яку шукаєм, буде:

$$f(xy) = \varphi_1(c + \varphi x + \varphi y). \quad (3)$$

Автор кінчить натяком, що можна в подібний спосіб найти функції двох величин змінних, що будуть сповняти рівняня дані трох змінних.

Близькою тій розвідці є иньша про: функції, що сповняють рівняне $\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$. (Oeuvres compl. I. 103).

Рівняне:

$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx) \quad (1)$$

буде сповнене, коли приміром:

$$fy = \frac{1}{2}y, \text{ а } \varphi x = \psi x = \log x$$

або коли :

$$fx = \sqrt{1-y^2}, \text{ а } \varphi x = \psi x = \arcsin x.$$

Абель ставить собі за задачу найти загальний вид функцій, що відповідали би даному рівнянню і виводить, що функціями такими будуть :

$$\varphi x = a\alpha \int \frac{dx}{fx + \alpha'x}$$

$$\text{де } a = \varphi'0, \quad \alpha = f0, \quad \alpha' = f'0 \quad (2)$$

$$\psi x = a\alpha \int \frac{dx}{\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \alpha'x} + \varphi 0$$

підчас коли само fx є визначене через рівнянє :

$$f'x (fx + \alpha'x) + (mx - \alpha'fx) = 0 \quad (3)$$

або :

$$c^{2n} = (fx - nx)^{n+\alpha} (fx + nx)^{n-\alpha'}$$

де c означає постійну інтегрування.

Рівняня ті можуть послужити до вишуканя функцій сповнюючих рівнянє (1), в частных случаях, при означених вартостях на n і α' .

Функцію φx виражену ту (2) в видї інтегралу мож також представити при помочи логаритмів в видї :

$$\varphi x = \frac{a\alpha}{n+\alpha'} \log (cnx + cfx), \quad fx \text{ відоме.}$$

В случаях $\alpha' = \infty$, і $n = 0$, fx приймає якусь вартість частну яку найде ся з рівняня (3).

II. Квєстию розвязки рівнянь альгебраїчних розібрав і розвязав Абель в слїдуючих розвідках :

а) Розвідка про рівняня альгебраїчні, де виказуєсь неможливість розвязки загального рівняня пятого степеня. (Християнія 1824, Oeuvres compl. 1881. I. 28).

б) Доказ неможливости альгебраїчної розвязки. загальних рівнянь, степеня висшого як четвертий. (Crelle's Journal I. 1826. Oeuvres compl. I. 66).

в) Розвідка про спеціальну клясу рівнянь, що ся дають альгебраїчно розвязати. (Crelle's J. IV. 1829. Oeuvres compl. I. 478).

г) Про альгебраїчну розвязку рівнянь (твір посмертний, Oeuvres compl. II. 217).

д) Нова теория альгебраїчної розвязки рівнянь (вступ до розвідки попередної, Oeuvres compl. II. 329).

Висліди тих епохальних розвідок, що творять *chef d'oeuvre* Абеля в альгебрі, розібрали ми основно в наведеній вище розвідці¹⁾, тому пригадаєм тут лиш хід гадок в головних чертах.

1. Абель каже ось-так: Розв'язати альгебраїчно рівняне значить виразити корені рівняня через функції альгебраїчні сочинників. Тому-то розбирає він вперед загальний вид функцій альгебраїчних і шукає, чи можна сповнити дане рівняне, наколи вставимо на місце незвісної виражене функції альгебраїчної.

Най:

$$c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots + c_{r-1} y^{r-1} + y^r = 0 \quad (1)$$

буде дане рівняне з сочинниками $c_0, c_1, c_2, \dots$, що є вимірними функціями величин незалежних $x', x'', \dots$, та най функція альгебраїчна величин $x', x'', \dots$:

$$y = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \quad (2)$$

сповняє то рівняне. Вставивши то виражене за y в дане рівняне одержимо (редукуючи висші степені p , чим $p^{\frac{n-1}{n}}$) виражене виду:

$$r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0 \quad (3)$$

де $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ є функції вимірні величин $p, q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$. Рівняне (3) сповнить ся лиш тоді, наколи:

$$r_0 = 0, r_1 = 0, \dots, r_{n-1} = 0.$$

Оно ся сповнить також, коли за $p^{\frac{1}{n}}$ будемо класти по черзі:

$$\alpha^s p^{\frac{1}{n}} \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

де α є корені рівняня:

$$\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \dots + 1 = 0.$$

З огляду на се дістанемо на y ряд вартостий (q_1 кладемо $= 1$).

$$y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

$$y_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} \alpha^{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

Звідси можна кожду з величин:

$$p^{\frac{1}{n}} q_0, q_2, \dots, q_{n-1}$$

¹⁾ пор. Глібовицкий loc. cit.

виразити вимірюмо через $y_1, y_2, \dots$. Бачимо проте, що наколи рівняне якесь дасть ся альгебраїчно розв'язати, то на кожний корінь рівняня дістанемо виражене таке, що кожда функція, яка в нього входить, є вимірюмою функцією коріннів даного рівняня (1).

Наколи загальне рівняне пятого степеня має мати розв'язку альгебраїчну, то в склад его увійдуть функції виду $v = R^{\frac{1}{m}}$, де R є вимірюма функція сочинників рівняня, а m є число перве. На основі (1) є v вимірюма функція коріннів; она має m різних вартостей, а так як число різних вартостей, які функція m величин може приймати, не може бути менше, як найбільше число перве, що приходить в добутку $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m$, бо в противнім разі зведе ся до 2 або 1, а се є функція пятох величин x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , то m яко число перве може бути рівне 1, 2, 5. $m = 1$ треба відкинути, бо корінь рівняня не може бути вимірюмою функцією сочинників; остає отже $m = 2, 5$.

Возьмім $m = 5$; загальний вид функції п'ятиварієтної пятох величин є:

$$\sqrt[5]{R} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4;$$

з відси:

$$x = s_0 + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}},$$

а відтак, як передше:

$$s_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} (x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) \quad (\alpha^5 = 1).$$

То рівняне є неможливе, позаяк права сторона має 120 вартостей, коли тимчасом се має бути корінь рівняня 5. степеня:

$$z^5 - s_1 R = 0.$$

Остає отже $m = 2$. Тоді є:

$$\sqrt{R} = p + qs,$$

де p і q є функції симетричні, а $s = (x_1 - x_2) \dots (x_4 - x_5)$; а що, наколи перемінімо x_1 і x_2 випаде:

$$-\sqrt{R} = p - qs,$$

то мусить бути $p = 0$, отже $\sqrt{R} = qs$, значить ся, що кожда альгебраїчна функція першого степеня, що виступає в вираженню на корінь, мусить мати вид $\alpha + \beta \sqrt{s^2} = \alpha + \beta s$ (α, β симетричні функції). А що є річ неможлива, коріні виразити через функцію виду $\alpha + \beta \sqrt{R}$, то мусить істнувати рівняне:

$R^m = \sqrt[m]{\alpha + \beta \sqrt{s^2}} = v$ (α, β функції симетричні, m число перве, v виміряма функція корінїв). З відси є:

$$v_1 = \sqrt[m]{\alpha + \beta s}, \quad v_2 = \sqrt[m]{\alpha - \beta s}, \quad v_1 v_2 = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}.$$

Наколи би функція $v_1 v_2$ не була симетрична, то для $m = 2$ було би $v = \sqrt{\alpha + \beta \sqrt{s^2}}$, значить ся v малоби чотири вартости, що неможливе. Мусить отже $\gamma = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}$ бути функція симетрична; тоді є:

$$p = v_1 + v_2 = R^{\frac{1}{m}} + \frac{\gamma}{R} R^{\frac{m-1}{m}}, \quad R = \alpha + \beta \sqrt{s^2}.$$

Положим за $R^{\frac{1}{m}}, \alpha R^{\frac{1}{m}}, \alpha^2 R^{\frac{2}{m}}, \dots$ де $\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \dots + 1 = 0$, то дістанем місто p вартости $p_1, p_2, \dots, p_m$. Легко показати, що p має m ріжних вартостей; звідси слідує $m = 5$, а тоді:

$$p = R^{\frac{1}{5}} + \frac{\gamma}{R^5} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4.$$

З відси слідує далі:

$$x = s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + s_3 p^3 + s_4 p^4,$$

або:

$$x = t_0 + t_1 R^{\frac{1}{5}} + t_2 R^{\frac{2}{5}} + t_3 R^{\frac{3}{5}} + t_4 R^{\frac{4}{5}}$$

($t_0, t_1, \dots$ виміряні функції R і сочинників даного рівняня. З відси (як передше):

$$t_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} (x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) = p' \quad (4)$$

далі є:

$$p'^5 = t_1^5 R,$$

а що

$t_1^5 R$ має вид $u + u' \sqrt{s^2}$, то є $p'^5 = u + u' \sqrt{s^2}$, або $(p'^5 - u)^2 = u'^2 s^2$.

Звідси би виходило p' через рівняне 10. степеня, якого сочинники є симетричними функціями, а що се неможливе, бо після (4) p' мало би 120 ріжних вартостей, то і загальне рівняне степеня пятого (а так само і вишого) не дасть ся розвязати.

2. Та хотяй рівняня степеня вишого чим 4. взагалі альгебраїчно розвязати ся не дадуть, то однак є певна кляса рівнянь всяких степенїв, що дають розвязку альгебраїчну; такими є приміром рівняня виду $x^n - 1 = 0$. Розвязка таких рівнянь опираєсь

на відношеннях, які заходять між коріннями. І так: коли два корінні рівняння незведимого є так зв'язані між собою, що один з них можна виразити вимірно через другий, тоді розв'язка рівняння даного дає ся звести до розв'язки якогось числа рівнянь низшого степеня. А і само рівнянє данє дасть ся тоді розв'язати альгебраїчно, коли степєнь єго є числом первим.

Так само дасть ся розв'язати рівнянє, єсли всі єго корінні можє представити в видї:

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{n-1} x \quad (\theta^n x = x)$$

(є се Абелева група правильна), де θx є вимірна функція величини x , $\theta^2 x$ така сама функція, що θx , два рази взята ($\theta^2 x = \theta \theta x$) і т. д.

Метода, якою послуєє ся Абель при розв'язуваню сїх послїдних рівнянь, годить ся з методою Gauss'a, поданою в „Disquisitiones arithmeticae“ pag. 645 sqts.

В сїм случаю всі корінні рівняннє дадуть ся виразити вимірно при помочи одного з них; але на відворот рівняннє, котрих корінні мають ту прикмету, не все дають ся розв'язати альгебраїчно, крімє що-йно наведеного случаю.¹⁾

Розв'язка альгебраїчна рівняннє є можлива єще в однім случаю, а се тоді, коли всі корінні рівняннє дадуть ся виразити альгебраїчно через один з них, приміром z , а поміж двома якими-небудь коріннями тогож рівняннє θx і $\theta_1 x$ заходить відношенє:

$$\theta \theta_1 x = \theta_1 \theta x.$$

(є се група абелева).

На случай, коли степєнь рівняннє даного $\varphi(x) = 0$ (а все маємо на думці рівняннє незведимі) μ дасть ся розложити ся на:

$$\mu = \varepsilon_1^{\nu_1} \varepsilon_2^{\nu_2} \varepsilon_3^{\nu_3} \dots \varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha}$$

де $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots$ є числами первими, тоді x буде можна винайти через розв'язку ν_1 рівнянь степєня ε_1 , ν_2 рівнянь степєня ε_2 і т. д. і всі ті рівняннє дадуть ся альгебраїчно розв'язати.

Коли $\mu = 2^\nu$, можна найти вартість x через витягненє ν корінїв квадратових.

Ті вислїди стосує Абель до функцій колових і показує, що щоби подїлити округ кола на $(2n+1)$ рівних частий, вистанє:

¹⁾ Рівняннє ті назвав Kronecker „рівняннями Абелевими“.

- 1) поділити округ на $2n$ рівних частин.
- 2) поділити лук на $2n$ рівних частин.
- 3) витягнути корінь квадратний з величини $(2n + 1)$.

Послідний теорем висказав вже і Gauss в *Diquisitiones arith.*, на що і Абель ся покликує.

3. Дальші его праці з обсягу **альгебри** відносились до сумованя рядів. Тут належать:

Досліди над рядом:

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

(Oeuvres compl. I. 66)

Розвідка ся важна є тим, що в ній по раз перший (спрецизовано) поставлено умовини збіжності ряду.

Тих умовин і прикмет рядів збіжних вчислює автор 6, а є они слідуєчі:

I. Єсли $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \dots$ становлять ряд величин додатних, а квот $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, для ростучих безнастанно вартостей m , зближає ся безконечно до границі α , де $\alpha > 1$, тоді ряд:

$$\varepsilon_0 \varrho_0 + \varepsilon_1 \varrho_1 + \varepsilon_2 \varrho_2 + \dots + \varepsilon_m \varrho_m + \dots$$

— де ε_m для m безнастанно ростучого не наближає ся безконечно до нуля, — є рядом розбіжним.

II. Наколи в ряді $\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \dots$ квот $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$

для ростучих вартостей m зближає ся безнастанно до границі $\alpha < 1$, тоді ряд

$$\varepsilon_0 \varrho_0 + \varepsilon_1 \varrho_1 + \varepsilon_2 \varrho_2 + \dots$$

— де $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ не переходять одиниці, — є рядом збіжним.

III. Єсли $p_m = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_m$

є меньше, чим якась означена величина δ , тоді

$$r = \varepsilon_0 t_0 + \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + \dots + \varepsilon_m t_m$$

є меньше, чим $\varepsilon_0 \delta$, де $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ суть величинами додатними маліючими.

IV. Наколи ряд

$$f(\alpha) = v_0 + v_1 \alpha + v_2 \alpha^2 + \dots + v_m \alpha^m + \dots$$

є збіжний для якоїсь вартости δ змінчивої α , то він буде збіжний і для кожної меншої вартости α , а для безнастанно маліючої вартости β функция $f(\alpha + \beta)$ зближає ся безконечно до границі $f(\alpha)$, коли α є рівне або меньше чим δ .

V. Коли $v_0 + v_1 \delta + v_2 \delta^2 + \dots$

є рядом збіжним, а $v_0, v_1, v_2, \dots$ представляють функції величини x , тяглі в границях межі a і b , то ряд

$$f x = v_0 + v_1 \alpha + v_2 \alpha^2 + \dots,$$

де $\alpha < \delta$, буде також збіжний і буде функцією тяглою x в тих самих границях.

VI. Бели через $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \dots$, $\varrho_0', \varrho_1', \varrho_2', \dots$

назначимо вартості чисельні відповідних членів двох рядів збіжних

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots = p, \quad v_0' + v_1' + v_2' + \dots = p'$$

то наколи ряди

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \dots, \quad \varrho_0' + \varrho_1' + \varrho_2' + \dots$$

суть збіжні, тоді ряд $r_0 + r_1 + r_2 + \dots$ котрого член загальний є:

$$r_m = v_0 v_m' + v_1 v_{m-1}' + v_2 v_{m-2}' + \dots + v_m v_0'$$

буде новим рядом збіжним, а його сума буде рівнатись:

$$(v_0 + v_1 + v_2 + \dots) (v_0' + v_1' + v_2' + \dots).$$

По тім вступі автор приходить до властивої задачі вишукання суми ряду:

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \quad (1)$$

для всіх вартостей дійсних або мнимих x і m , для яких сей ряд є збіжний.

Назв'єм наш ряд через $\varphi(m)$ і положім для скорочення:

$$1 = m_0, \quad \frac{m}{1} = m_1, \quad \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = m_2, \quad \dots, \quad \frac{m(m-1)\dots(m-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \mu} = m_\mu$$

$$\text{то } \varphi(m) = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \dots + m_\mu x^\mu + \dots \quad (2)$$

$$\text{Най } x = a + bi, \quad m = k + k'i \quad (i = \sqrt{-1})$$

де a, b, k, k' є числа дійсні, то дістанемо

$$\varphi(m) = p + qi$$

де p і q суть рядами.

Представмо x в виді

$$x = a (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{де } a = \sqrt{a^2 + b^2}$$

так само:

$$\frac{m - \mu + 1}{\mu} = \delta_\mu (\cos \gamma_\mu + i \sin \gamma_\mu)$$

де

$$\delta_{\mu} = \sqrt{\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2}$$

то :

$$m_{\mu} x^{\mu} = \alpha^{\mu} \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \delta_3 \cdots \delta_{\mu} [\cos(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{\mu}) + i \sin(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{\mu})].$$

Для скорочення назовемо :

$$\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \delta_3 \cdots \delta_{\mu} = \lambda_{\mu}$$

$$\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{\mu} = \Theta_{\mu}$$

тоді :

$$m_{\mu} x^{\mu} = \lambda_{\mu} \alpha^{\mu} (\cos \Theta_{\mu} + i \sin \Theta_{\mu}).$$

а $\varphi(m)$ представить ся :

(3)

$$\varphi(m) = 1 + \lambda_1 \alpha (\cos \Theta_1 + i \sin \Theta_1) + \lambda_2 \alpha^2 (\cos \Theta_2 + i \sin \Theta_2) + \cdots + \lambda_{\mu} \alpha^{\mu} (\cos \Theta_{\mu} + i \sin \Theta_{\mu}) + \cdots$$

з відси :

$$\begin{aligned} p &= 1 + \lambda_1 \alpha \cos \Theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \cos \Theta_2 + \cdots + \lambda_{\mu} \alpha^{\mu} \cos \Theta_{\mu} + \cdots \\ q &= \lambda_1 \alpha \sin \Theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \sin \Theta_2 + \cdots + \lambda_{\mu} \alpha^{\mu} \sin \Theta_{\mu} + \cdots \end{aligned} \quad (4)$$

З форми на λ_{μ} виходить

$$\lambda_{\mu+1} = \delta_{\mu+1} \lambda_{\mu}$$

отже :

$$\lambda_{\mu+1} \alpha^{\mu+1} = \alpha \delta_{\mu+1} \lambda_{\mu} \alpha^{\mu}$$

або :

$$\frac{\lambda_{\mu+1} \alpha^{\mu+1}}{\lambda_{\mu} \alpha^{\mu}} = \alpha \delta_{\mu+1}$$

а що :

$$\delta_{\mu+1} = \sqrt{\left(\frac{k-\mu}{\mu+1}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2}$$

для вартостей μ ростучих в безконечність зближає ся до одиниці, через що

$$\frac{\lambda_{\mu+1} \alpha^{\mu+1}}{\lambda_{\mu} \alpha^{\mu}}$$

наближає ся до границі α , проте p і q буде збіжне або розбіжне, залежно від того, чи α є більше, чи менше від одиниці.

Представмо ряд $\varphi(m)$ в виді:

$$p + qi = r(\cos s + i \sin s)$$

де

$$r = \sqrt{p^2 + q^2};$$

взьмим, що:

$$s = \psi(k, k'), \quad r = f(k, k'),$$

то:

$$p + qi = \varphi(k + k'i) = f(k, k') [\cos \psi(k, k') + i \sin \psi(k, k')]$$

а вид тих функцій f і ψ буде:

одної:

$$\psi(k, k') = \beta k + \beta' k' - 2m\pi$$

де β і β' суть якимись величинами постійними,

а другої:

$$f(k, k') = e^{\delta k + \delta' k'}$$

де δ і δ' суть рівнож величинами постійними.

З відси:

$$\varphi(k + k'i) = e^{\delta k + \delta' k'} [\cos(\beta k + \beta' k') + i \sin(\beta k + \beta' k')] \quad (5)$$

є найзагальнішою функцією, представляючою суму ряду $\varphi(m)$ з неозначеними ще на разі величинами постійними $\beta, \beta', \delta, \delta'$.

Розділім часть першорядну і другорядну, то дістанемо:

$$e^{\delta k + \delta' k'} \cos(\beta k + \beta' k') = 1 + \lambda_1 \alpha \cos \Theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \cos \Theta_2 + \dots + \lambda_\mu \alpha^\mu \cos \Theta_\mu + \dots \quad (6)$$

$$e^{\delta k + \delta' k'} \sin(\beta k + \beta' k') = \lambda_1 \alpha \sin \Theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \sin \Theta_2 + \dots + \lambda_\mu \alpha^\mu \sin \Theta_\mu + \dots$$

а для $k' = 0$ взори ті перейдуть на:

$$e^{\delta k} \cos \beta k = 1 + \frac{k}{1} \alpha \cos \varphi + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 \cos 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 \cos 3\varphi + \dots \quad (7)$$

$$e^{\delta k} \sin \beta k = \frac{k}{1} \alpha \sin \varphi + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 \sin 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 \sin 3\varphi + \dots$$

а з відси для $k = 1$ найдемо:

$$e^{\delta} = \sqrt{1 + 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2} \quad \text{і} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\alpha \sin \varphi}{1 + \alpha \cos \varphi}$$

т. з.

$$\delta = \frac{1}{2} \log(1 + 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2), \quad \text{а} \quad \beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha \sin \varphi}{1 + \alpha \cos \varphi} \right)$$

а тоді рівняння (7) представлять ся остаточно в виді:

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{k}{1} \alpha \cos \varphi + \frac{k(k-1)}{1.2} \alpha^2 \cos 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3} \cos 3\varphi + \dots \\
 = \sqrt{(1 + 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)^k} \cos ks \\
 \frac{k}{1} \alpha \sin \varphi + \frac{k(k-1)}{1.2} \alpha^2 \sin 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3} \sin 3\varphi + \dots \\
 = \sqrt{(1 + 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)^k} \sin ks
 \end{aligned} \quad (8)$$

де α значить найменшу вартість, яку β може прийняти. Та вартість заключена в поміж $-\frac{\pi}{2}$ а $+\frac{\pi}{2}$. Подібно, як β і δ , найде ся вартости на β' і δ' і они будуть $\beta' = \delta$, $\delta' = -\beta$. А тоді рівняння (6) можуть прийняти вид:

$$\begin{aligned}
 1 + \lambda_1 \alpha \cos \Theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \cos \Theta_2 + \dots + \lambda_\mu \alpha^\mu \cos \Theta_\mu + \dots \\
 = e^{\delta k - \beta k'} \cos(\beta k + \delta k') = p \\
 \lambda_1 \alpha \sin \Theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \sin \Theta_2 + \dots + \lambda_\mu \alpha^\mu \sin \Theta_\mu + \dots \\
 = e^{\delta k - \beta k'} \sin(\beta k + \delta k') = q
 \end{aligned} \quad (9)$$

Отже наш ряд $\varphi(m) = p + qi$ буде:

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-\mu+1)}{1.2.3\dots\mu} x^\mu + \dots \\
 = e^{\delta k - k\beta'} [\cos(\beta k + \delta k') + i \sin(\beta k + \delta k')]
 \end{aligned}$$

де $m = k + k'$, а $x = a + bi = \alpha(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

з чого виходить:

$$\begin{aligned}
 \alpha = \sqrt{a^2 + b^2}, \alpha \cos \varphi = a, \alpha \sin \varphi = b, \delta = \frac{1}{2} \log(1 + 2a + a^2 + b^2) \\
 \beta = \arctg\left(\frac{b}{1+a}\right).
 \end{aligned}$$

Вставивши тое і кладучи m замість k , а n замість k' , дістаємо на суму ряду:

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{m+ni}{1} (a+bi) + \frac{(m+ni)(m+ni-1)}{1.2} (a+bi)^2 + \\
 + \frac{(m+ni)(m+ni-1)(m+ni-2)}{1.2.3} (a+bi)^3 + \dots \\
 + \dots + \frac{(m+ni)(m+ni-1)\dots(m-\mu+1+ni)}{1.2.3\dots\mu} (a+bi)^\mu + \dots
 \end{aligned} \quad (10)$$

$$= [(1+a)^2 + b^2]^{\frac{m}{2}} e^{-n \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{1+a} \right)} \left[\cos \left\{ m \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{1+a} \right) + \frac{1}{2} n \log ((1+a)^2 + b^2) \right\} + i \sin \left\{ m \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{1+a} \right) + \frac{1}{2} n \log ((1+a)^2 + b^2) \right\} \right]$$

Виразенє то сповняє ся для всяких $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$ менших чим одиниця.

Для $b = 0$ і $n = 0$ дістанемо ряд поданий в заголовку.

Єслиж $\sqrt{a^2 + b^2}$ є рівне одиниці, тоді наш ряд буде збіжний для всякої вартости m заключеної поміж -1 і $+\infty$, єсли рівночасно не є $\alpha = -1$. Наколиж $\alpha = -1$, то m мусить бути додатне. У всіх иньших случаях ряд є розбіжний.

Ту треба згадати також про другі ряди, якими займав ся Абель.

І так ряд:

$$y = \varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \dots + \varphi(n)x^{n-1}$$

— де n є число ціле додатне, скінчене або безконечно велике, а $\varphi(n)$ означає функцію алгебраїчну виміримую величин n , — сумує автор при помочи рядів виду:

$$p = A0^\alpha + Ax + A2^\alpha x^2 + \dots + An^\alpha x^n$$

$$q = \frac{B}{\alpha^\beta} + \frac{Bx}{(\alpha+1)^\beta} + \frac{Bx^2}{(\alpha+2)^\beta} + \dots + \frac{Bx^n}{(\alpha+n)^\beta}$$

котрі на суму дають:

$$\frac{p - A0^\alpha}{A} = x + 2^\alpha x^2 + 3^\alpha x^3 + \dots + n^\alpha x^n =$$

$$= x d(x \cdot d(x \dots d(x \cdot d\left(\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right)))$$

$$a \quad \frac{q}{B} = \frac{1}{x^\beta} + \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \dots \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx(x^{\beta-1} - x^{n+\beta})}{1-x}$$

а що ряд даний складаєсь з рядів тих двох видів, то і сума цілого ряду буде через них визначена.

Подібно находить і суму ряду:

$$z = f(0)\varphi(0) + f(1)\varphi(1)x + f(2)\varphi(2)x^2 + \dots + f(n)\varphi(n)x^n$$

де $f(n)$ означає функцію яку небудь, а $\varphi(n)$ функцію виміримую.

¹⁾ Oeuvres compl. II. 41.

Окремо займає ся еще автор рядом:

$$\psi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots \quad 1)$$

Подає іменно лежандрівські висліди сумованя сего ряду для частних аргументів в границях збіжності $(-1 \dots +1)$, а відтак сумує сей ряд для аргументу, що є добутком функцій двох змінних, а іменно:

$$\psi\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{y}{1-y}\right) = \psi\left(\frac{y}{1-x}\right) + \psi\left(\frac{x}{1-y}\right) - \psi y - \psi x - \log(1-y) \log(1-x).$$

В тім взорі x і y мусять мати такі вартости, щоби величини: $\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{y}{1-y}\right)$, $\frac{y}{1-x}$, $\frac{x}{1-y}$, y , x не перевищали одиниці. А то стане ся для додатних x і y , коли $x+y < 1$. — Наколиж $y = -m$, тоді мусить $x+m < 1$, а коли оба і x і y суть від'ємні, тоді вистане, наколи кожде з них є менше чим одиниця.

III. Перейдім тепер до другої царини аналізу, яку Абель збогатив безсмертними дослідями, а се до теорії функцій еліптичних, та перегляньмо по черзі его розвідки в тій області.

1. Перша его розвідка має заголовок:

Розвязка загального problemu відносячого ся до перетворення функцій еліптичних. (Oeuvres compl. I. 253).

Ту ставить собі Абель за завданє найти всі можливі случаї, в яких сповнить ся рівнанє різнничкове:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2 y^2)(1-e_1^2 y^2)}} = \pm a \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2 x^2)(1-e^2 x^2)}}$$

наколи за y вставимо функцію алягебраїчну величини x , виміриму або невиміриму.

Задача дуже тяжка на око з огляду на загальність функції y дасть ся спровадити до случаю, коли y є виміриме, змінить ся лиш сочинник a даного рівняня, а прочі величини є c_1 є e_1 остануть ті самі.

Положім:

$$\Theta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2 x^2)(1-e^2 x^2)}}$$

¹⁾ Oeuvres compl. II. 249.

то x буде якоюсь функцією величини Θ ; назв'їм її $\lambda\Theta$. Дальше назв'їм через $\frac{\omega}{2}$ і $\frac{\omega'}{2}$ вартости Θ для $x = \frac{1}{c}$ і $x = \frac{1}{e}$, а через $\Delta\Theta$ функцію $\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}$.

Тоді на підставі рівняня:

$$\lambda(\Theta \pm \Theta') = \frac{\lambda\Theta \cdot \Delta(\Theta') \pm \lambda\Theta' \cdot \Delta(\Theta)}{(1-c^2e^2\lambda^2\Theta) \cdot \lambda^2\Theta'}$$

де Θ і Θ' означають величини які небудь, і на підставі твердження, що рівняне:

$$\lambda\Theta = \lambda\Theta'$$

сповнить ся, коли положимо:

$$\Theta' = (-1)^{m+m'}\Theta + m\omega + m'\omega'$$

де m і m' є які небудь числа цілковиті додатні або від'ємні, легко буде можна дістати загальне виражене на y і на вартости величин c_1 і e_1 .

Най $y = \psi(x)$ буде функцією вимірною, якої шукаємо, то x виражене яко функція y буде корінем рівняня $y = \psi(x)$; а всі коріні сего рівняня то будуть всі ріжні вартости вираження:

$$\lambda(\Theta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \dots + k_r\alpha_r)$$

які дістанемо, даючи величинам $k_1, k_2, \dots, k_r$ всі вартости цілковиті, підчас коли $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ мати муть вид: $\mu\omega + \mu'\omega'$ (μ і μ' числа вимірні). Назв'їм вартости повисшого вираження:

$$\lambda\Theta, \lambda(\Theta + \alpha_1), \lambda(\Theta + \alpha_2), \dots, \lambda(\Theta + \alpha_{m-1})$$

і положім $\psi(x) = \frac{p}{q}$ (p і q функції цілковиті величини x без спільного подільника), тоді:

$$p + qy = A(x - \lambda\Theta)(x - \lambda(\Theta + \alpha_1)) \dots (x - \lambda(\Theta + \alpha_{m-1}))$$

а рівняне се сповнить ся для всякої вартости x . А яко сочинник при x^{m-1} буде мати вид $f - gy$, де f і g є величини постійні.

На случай, коли p і q є степеня першого, розв'язка нашої задачі може мати слідуочі три види:

$$1) \quad y = ax, \quad c_1^2 = \frac{c^2}{a^2}, \quad e_1^2 = \frac{e^2}{a^2}$$

$$2) \quad y = \frac{a}{ec} \frac{1}{x}, \quad c_1^2 = \frac{c^2}{a^2}, \quad e_1^2 = \frac{e^2}{a^2}$$

$$3) \quad y = m \frac{1-x\sqrt{ec}}{1+x\sqrt{ec}}, \quad c_1 = \frac{1}{m} \frac{\sqrt{c}-\sqrt{e}}{\sqrt{c}+\sqrt{e}}, \quad e_1 = \frac{1}{m} \frac{\sqrt{c}+\sqrt{e}}{\sqrt{c}-\sqrt{e}}, \quad a = \frac{m\sqrt{-1}}{2}(c-e).$$

Для якого-небудь степеня m функції p і q дістанемо:

$$y = \frac{f' + f \cdot \varphi\theta}{g' + g \cdot \varphi\theta}$$

де f' g' є сочинники при x^{m-1} в p і q , а $\varphi\theta$ має вид:

$$\varphi\theta = (1-k)x + \frac{k''-k'}{e^c} \frac{1}{x} \sum_{\alpha} \frac{2x \Delta(\alpha)}{1 - e^2 c^2 \lambda^2 \alpha \cdot x^2};$$

k , k' і k'' є рівні зеру або одиниці.

З тих перетворень витягає Абель дуже важні твердження, що дотичать еліптичних функцій; і так:

а) Наколи рівнане:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2 y^2)(1-e_1^2 y^2)}} = \pm a \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2 x^2)(1-e^2 x^2)}}$$

сповнить ся через підставлене: $y = \psi(x) = \frac{p}{q}$, де степені функцій p і q є рівний добуткови mn , то всегда буде можна найти функції вимірими φ і f такі, що наколи положимо:

$$x_1 = \varphi(x) = \frac{p'}{q'},$$

то дістанемо:

$$y = f(x_1) = \frac{p_1}{q_1}$$

$$\frac{dx_1}{\sqrt{(1-c_2^2 x_1^2)(1-e_2^2 x_1^2)}} = a_1 \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2 x^2)(1-e^2 x^2)}}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2 y^2)(1-e_1^2 y^2)}} = a_2 \frac{dx_1}{\sqrt{(1-c_2^2 x_1^2)(1-e_2^2 x_1^2)}}$$

при чім степені функцій p' і q' є рівний одному з чинників m і n , а степені p_1 і q_1 другому.

б) Який-небудь бувби степені рівняня $p - qu = 0$, то все можна буде дістати вартість x в y дорогою альгебраїчною. Маємо отже одну класу рівнянь, що дадуть ся розвязати альгебраїчно; Їх корінні будуть функціями вимірими величин:

$$y, \quad \frac{1}{\Gamma_1}, \quad \frac{1}{\Gamma_2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{\Gamma_p}$$

де $n_1, n_2, \dots, n_r$ є перші зглядом себе, а їх добуток рівнаєсь степеневі рівняня даного; $r_1, r_2, \dots, r_r$ мають вид:

$$\xi + t \sqrt{(1-c_1^2 y^2)(1-e_1^2 y^2)}$$

(ξ і t функції цілковиті y).

в) Коли шукаєм всіх можливих розвязок рівняня:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c^2 y^2)(1-e^2 y^2)}} = a \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2 x^2)(1-e^2 x^2)}}$$

і оно дасть розвязку альгебраїчну що до x і y без згляду на те, чи y дасть ся представити вимірно через x чи ні, то величина постійна a буде мати вид $\mu' + \sqrt{-\mu}$, де μ і μ' є числа вимірні, а μ є все додатне. При такій вартості на a можна найти безконечне число різних вартостей e і c , що будуть сповняти наше рівняне, а всі они дадуть ся виразити через коріні.

г) Через введенне нових змінних перейде рівняне на:

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-b^2 \sin^2 \psi}} = a \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Наколи заложимо φ і ψ дійсне, а модуль $c < 1$, а надто рівняне дістане на інтеграл функцію альгебраїчну що до $\sin \varphi$ і $\sin \psi$, то a буде квадратним корінем з додатної вимірної величини.

Яко додаток до попередних перетворень функцій еліптичних випроваджує Абель теорему:

Щоби рівняне:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2 y^2)}} = a \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2 x^2)}}$$

сповнити рівнянем альгебраїчним о змінних x і y , при чім модули c і c_1 є менші як 1, а сочинник a дійсний або мнимий, потреба, а zarazом вистарчає, щоби ті модули так були звязані з собою, щоби одно з виражень $\frac{\omega_1}{\tilde{\omega}_1}$ і $\frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1}$ дало ся виразити вимірно через $\frac{\omega}{\tilde{\omega}}$,

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2 x^2)}}$$

$$\frac{\tilde{\omega}}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2 x^2)}}$$

$$b_1 = \sqrt{1-c^2}$$

а де ω_1 і $\tilde{\omega}_1$ відносять ся до модулів c_1 і b_1 .

2. В окремій розвідці випроваджує Абель:

Число перетворень функції еліптичної одержаних через підставлене функції вимірної, котрої степе́нь є числом першим. (Oeuvres compl. I. 309).

Приймім, що рівняне

$$\frac{dy}{\Delta'} = a \frac{dx}{\Delta} \quad (1)$$

де $\Delta' = (1-y^2)(1-c_1^2 y^2)$, $\Delta = (1-x^2)(1-c^2 x^2)$

сповнить ся, коли за y підставимо функцію вимірю x виду:

$$y = \frac{A_0 + A_1 x + \dots + A_{2n+1} x^{2n+1}}{B_0 + B_1 x + \dots + B_{2n+1} x^{2n+1}}$$

де $2n+1$ є числом першим, а бодай один з сочинників A_{2n+1} і B_{2n+1} є ріжний від зера. Найзагальнійшим розв'язанем рівняня (1) буде для $B_{2n+1} = 0$:

$$y = a \frac{x \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2 \alpha}\right) \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2 2\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2 n\alpha}\right)}{(1 - c^2 \lambda^2 \alpha x^2) [1 - c^2 \lambda^2 (2\alpha) x^2] \dots [1 - c^2 \lambda^2 (n\alpha) x^2]}$$

$$c_1 = c^{2n+1} \left[\lambda \left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \lambda \left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) \dots \lambda \left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) \right]^4$$

$$a = \frac{c^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c_1}} (\lambda\alpha \cdot \lambda(2\alpha) \cdot \dots \cdot \lambda(n\alpha))^2 \quad (2)$$

де $\alpha = \frac{m\omega + m'\omega}{2n+1}$, $\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta}$, $\frac{\omega'}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta}$

а m і m' суть числами цілими.

Всі прочі вартости на y будуть виду $\frac{f' + fy}{g' + gy}$, де y подане через (2) а f' , f , g' і g суть величинами постійними, сповняючими рівняне:

$$\left(1 + \frac{g+f}{g'+f'} x\right) \left(1 + \frac{g-f}{g'-f'} x\right) \left(1 + \frac{g+c'f}{g'+c'f'} x\right) \left(1 + \frac{g-c'f}{g'-c'f'} x\right) = (1-x^2)(1-c'^2 x^2).$$

Рівняне то дає 24 системів вартостий ріжних поміж собою. Отже найдемо, що кожній вартості α відповідає 24 вартостий y і 12 вартостий модулу c_1 ; але позаяк що дві вартости y суть рівні, лише противних знаків, то число ріжних вартостий y буде 12, а так само число вартости c_1 буде рівнати ся шість. Кожній

вартості c_1 відповідають дві різні вартості функції y . Отже коли числам m і m' дамо якінебудь вартості цілковиті, дістанемо всі можливі розв'язання нашого problemu.

3. Дальша розвідка з теорії функцій еліптичних носить заголовок:

Досліди над функціями еліптичними. (Oeuvres compl. I. 141).

На вступі подає Абель коротку історію функцій еліптичних від часу Euler'a, що виводив ті функції до математики доказавши спроможности інтегрування рівняня:

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4}} + \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \epsilon y^4}} = 0$$

аж по часи Legendre'a, котрий показав, що всякий інтеграл еліптичний т. є. інтеграл

$$\int \frac{R dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4}}$$

де R є функцією вимірюмою, а $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ величини постійні дійсні, можна звести до одного з трох видів:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \theta}}, \quad \int d\theta (1 - c^2 \sin^2 \theta), \quad \int \frac{d\theta}{(1 + n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \theta}},$$

т. є. інтеграл першого, другого і третього виду.

Абель займає ся в своїй розвідці функцією відвортною, функцією $\varphi(x)$ означеною рівнянями:

$$x = \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \theta}}$$

$$\sin \theta = \varphi(x) = x$$

а надавши їй вид:

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2)}}$$

або:

$$\varphi'(\alpha) = \sqrt{(1 - c^2 \varphi^2 \alpha)(1 + e^2 \varphi^2 \alpha)}$$

займає ся прикметами трох функцій

$$\varphi \alpha, \quad f \alpha = \sqrt{1 - c^2 \varphi^2 \alpha}, \quad F \alpha = \sqrt{1 + e^2 \varphi^2 \alpha}.$$

Деякі з тих прикмет виходять безпосередно з відомих прикмет інтегралів першого виду, інші є менше видні.

І так справджує теорем додавання для функцій φ , f , F , випроваджує їх періодичність, через що стає нам відоме заховане ся функцій на цілім необмеженім просторі змінної дійсної і мнимої, накопи знаєм заховане ся функції для вартостей дійсних в границях $\frac{\omega}{2}$ і $-\frac{\omega}{2}$, а для вартостей мнмих в границях $\frac{\tilde{\omega}}{2}$ і $-\frac{\tilde{\omega}}{2}$; даліше випроваджує Абель, що рівняня $\varphi\alpha = 0$, $f\alpha = 0$, $F\alpha = 0$ мають безконечне число корінїв, перше з них в виді:

$$\alpha = m\omega + n\tilde{\omega}i,$$

друге:
$$\alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right)\omega + n\tilde{\omega}i,$$

третє:
$$\alpha = m\omega + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tilde{\omega}i;$$

се є вже всі корінї тих рівнянь.

Одною з найбільше характеристичних прикмет тих функцій є, що $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$, де m є числом цілим, можна виразити вимірюмо через $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ (теорем множення). Але случай відворотний не має місця, бо рівняня, які виражають $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$, є взагалі рівнянями вищих степенїв, отже відвернення не є однозначні. Але корінї тих рівнянь дадуть ся виразити при помочи φ , f , F і то коли $m = 2n$ (паристе), то:

$$\varphi\alpha = x = \pm \varphi \left[(-1)^{m'+\mu'}\alpha + \frac{m'}{2n}\omega + \frac{\mu'}{2n}\tilde{\omega}i \right]$$

де m' і μ' є додатні, менші від $2n$. Отже всі ріжні вартости на x дістанемо кладучи за m' і μ' всі вартости $(0 \dots 2n-1)$; число корінїв є $8n^2$. — Колиж $m = 2n+1$ (непаристе), тоді:

$$x = \varphi \left[(-1)^{\mu'+m'}\alpha + \frac{m'}{2n+1}\omega + \frac{\mu'}{2n+1}\tilde{\omega}i \right],$$

де за m' і μ' треба класти всі вартости цілковиті $(-n \dots +n)$; число корінїв є тоді $(2n+1)^2$.

Так само:

$$y = f\alpha = f \left[\alpha + \frac{2m'}{m}\omega + \frac{\mu'}{m}\tilde{\omega}i \right]$$

(m' і μ' цілковиті менші від m); корінїв буде m^2 .

А:
$$z = F\alpha = F \left[\alpha + \frac{m'}{m}\omega + \frac{2\mu'}{m}\tilde{\omega}i \right]$$

(m' і μ' цілковиті додатні, менші від m); корінїв буде m^2 .

Через розв'язку тих рівнянь доходить Абель до представлення функцій $\varphi\left(\frac{\alpha}{m}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{m}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{m}\right)$ при помочі функцій $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$, $F(\alpha)$. Задачу ту ділить він на дві частини, при чім шукає вираження наперед для $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ при помочі $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, а відтак для $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ при помочі $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, бо всяке число мож розбити на $2^v(2n+1)$.

В першій случаї приходять в вираженню самі лиш коріні квадратів, в другій треба розв'язати рівняне степеня $(2n+1)^2$, а розв'язка та, як доказує Абель, дасть ся все перевести алегбраїчно. Вираження, якими представлені є коріні сего рівняня, заключають дві величини постійні, що зависять від рівняня степеня $(2n+1)^2 - 1$. Та розв'язка сего рівняня дасть ся звести до розв'язки лиш одного рівняня степеня $2n+2$; тільки се рівняне не дасть ся взагалі розв'язати алегбраїчно.

Та в дуже многих случаях розв'язка алегбраїчна є можлива, пр. коли: $e = c$, $e = c\sqrt[3]{3}$, $e = c(2 \pm \sqrt[3]{3})$ і т. д.

Першим з тих случаїв займає ся Абель і стосує сей случаї до геометрії, щоби при помочі ліній і циркуля поділити округ лемні-скати на m рівних частин, наколи $m = 2^n$, або 2^{n+1} , або коли m є добуток більше чисел тих обох видів. Є се той сам теорем, який стосував Gauss до кола.

Функції $\varphi(n\alpha)$, $f(n\alpha)$, $F(n\alpha)$ можна представити в ріжнім виді.

Назначім через $\sum_k^{k'} \psi(m)$ суму, а через $\prod_{m=k}^{k'} \psi(m)$ добуток всіх $\psi(m)$, які одержимо кладучи за m всі вартости цілковиті ($k \dots k'$),

далі через $\sum_k^{k'} \sum_v^{v'} \psi(m\mu)$ суму, а через $\prod_{m=k}^{k'} \prod_{\mu=v}^{v'} \psi(m\mu)$ добуток всіх вартостей функції $\psi(m\mu)$, які одержимо кладучи за m всі вартости цілковиті від k до k' , а за μ всі вартости цілковиті від v до v' , тоді наші функції представлять ся в виді сум:

$$\varphi(2n+1)\alpha = \frac{1}{2n+1} \sum_{-n}^{+n} \sum_{-n}^{+n} (-1)^{m+\mu} \varphi\left(\alpha + \frac{m\omega + \mu\omega i}{2n+1}\right)$$

$$f(2n+1)\alpha = \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{-n}^{+n} \sum_{-n}^{+n} \mu (-1)^m f \left(\alpha + \frac{m\omega + \mu\tilde{\omega}i}{2n+1} \right)$$

$$F(2n+1)\alpha = \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{-n}^{+n} \sum_{-n}^{+n} \mu (-1)^\mu F \left(\alpha + \frac{m\omega + \mu\tilde{\omega}i}{2n+1} \right)$$

або в виді добутків:

$$\varphi(2n+1)\alpha = (2n+1)\varphi\alpha \prod_{m=1}^n \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2}i + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}}.$$

$$\cdot \prod_{\mu=1}^n \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}.$$

$$\cdot \prod_{m=1}^n \prod_{\mu=1}^n \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{m\omega + \mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2}i + \frac{m\omega + \mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{m\omega - \mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{m\omega - \mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}.$$

$$f(2n+1)\alpha = f\alpha \prod_{m=1}^n \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}}.$$

$$\cdot \prod_{\mu=1}^n \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}.$$

$$\cdot \prod_{m=1}^n \prod_{\mu=1}^n \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega + \mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2}i + \frac{m\omega + \mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega - \mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{m\omega - \mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}.$$

$$\begin{aligned}
 F(2n+1)\alpha &= F\alpha \prod_{m=1}^n \frac{1 - \frac{\varphi^2 \alpha}{\varphi^2 \left(\frac{\tilde{\omega}}{2} i + \frac{m\omega}{2n+1} \right)}}{1 - \frac{\varphi^2 \alpha}{\varphi^2 \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega} i}{2} + \frac{m\omega}{2n+1} \right)}} \cdot \\
 &\cdot \prod_{\mu=1}^n \frac{1 - \frac{\varphi^2 \alpha}{\varphi^2 \left(\frac{\tilde{\omega} i}{2} + \frac{\mu \tilde{\omega} i}{2n+1} \right)}}{1 - \frac{\varphi^2 \alpha}{\varphi^2 \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega} i}{2} + \frac{\mu \tilde{\omega} i}{2n+1} \right)}} \cdot \\
 &\cdot \prod_{m=1}^n \prod_{\mu=1}^n \frac{1 - \frac{\varphi^2 \alpha}{\varphi^2 \left(\frac{\tilde{\omega} i}{2} + \frac{m\omega + \mu \tilde{\omega} i}{2n+1} \right)}}{1 - \frac{\varphi^2 \alpha}{\varphi^2 \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega} i}{2} + \frac{m\omega + \mu \tilde{\omega} i}{2n+1} \right)}} \frac{1 - \frac{\varphi^2 \alpha}{\varphi^2 \left(\frac{\tilde{\omega} i}{2} + \frac{m\omega - \mu \tilde{\omega} i}{2n+1} \right)}}{1 - \frac{\varphi^2 \alpha}{\varphi^2 \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega} i}{2} + \frac{m\omega - \mu \tilde{\omega} i}{2n+1} \right)}}
 \end{aligned}$$

Се є вартости для $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$, коли m є числом непаристим; аналогічні взори вийдуть і для m паристого.

Наколи підставимо в тих взорах $\alpha = \frac{\beta}{2n+1}$, дістанемо взори на функції $\varphi\beta$, $f\beta$, $F\beta$, які зі згляду на неозначене число n можуть зміняти ся на безконечно много способів. Поміж всіми тими взорами заслугоють на увагу ті, які випадуть, коли вставимо $n = \infty$. Тоді дістанемо на функції $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ вираження зложені з безконечно много виразів; і так з взорів на суми дістанемо безконечні ряди:

$$\varphi\alpha = \frac{1}{\text{ес}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{(2\mu+1)\omega}{[\alpha - (m+\frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu+\frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2} - \frac{(2\mu+1)\tilde{\omega}}{[\alpha + (m+\frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu+\frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2} \right)$$

$$f\alpha = \frac{1}{e} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2[\alpha - (m - \frac{1}{2})\omega]}{[\alpha - (m + \frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu + \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2} - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2[\alpha + (m + \frac{1}{2})\omega]}{[\alpha + (m + \frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu + \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}$$

$$F\alpha = \frac{1}{c} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{(2\mu + 1)\tilde{\omega}}{[\alpha - (m + \frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu + \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{(2\mu + 1)\tilde{\omega}}{[\alpha + (m + \frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu + \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}$$

а з взорів на добутки:

$$\varphi\alpha = \alpha \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{\mu^2 \tilde{\omega}^2}\right) \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\mu^2 \omega^2}\right) \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(\alpha + m\omega)^2}{\mu^2 \omega^2}\right) \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(\alpha - m\omega)^2}{\mu^2 \tilde{\omega}^2}\right) \left\{1 + \frac{(m - \frac{1}{2})^2 \omega^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}\right\}^2$$

$$f\alpha = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{(m - \frac{1}{2})^2 \omega^2}\right) \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{[\alpha + (m - \frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2 \tilde{\omega}^2}\right) \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{[\alpha - (m - \frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2 \omega^2}\right) \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(m - \frac{1}{2})^2 \omega^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}\right) \left\{1 + \frac{(m - \frac{1}{2})^2 \omega^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}\right\}^2$$

$$F\alpha = \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{(\mu + \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}\right) \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(\alpha + m\omega)^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \omega^2}\right) \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{[\alpha + (m - \frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}\right) \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(m - \frac{1}{2})^2 \omega^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}\right) \left\{1 + \frac{(m - \frac{1}{2})^2 \omega^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}\right\}^2$$

Через застосоване функцій вилжених та колових до повисших взорів дійдем до еще простіших виражень на функції $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$:

$$\varphi\alpha = \frac{\omega}{\pi} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right) \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{4 \sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}} - e^{-\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}}\right)^2}}{1 - \frac{4 \sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}} + e^{-\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}$$

$$F\alpha = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1 + \frac{4 \sin\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}} - e^{-\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}{1 - \frac{4 \sin\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}} - e^{-\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}$$

$$f\alpha = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right) \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{4 \sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}} + e^{-\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}}\right)^2}}{1 - \frac{4 \sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}} + e^{-\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}$$

А вже найпростіший вид після Абеля буде:

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi} x\right) = \frac{4\pi}{c\omega'} \sqrt{q} \left(\sin x \frac{1}{1-q} + \sin 3x \frac{q}{1-q^3} + \sin 5x \frac{q}{1-q^5} + \dots \right)$$

$$\lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi} x\right) = \frac{4\pi}{c^2\omega'} \sqrt{q} \left(\cos x \frac{1}{1+q} + \cos 3x \frac{q}{1+q^3} + \cos 5x \frac{q}{1+q^5} + \dots \right)$$

$$\text{де } q = e^{-\frac{\tilde{\omega}'}{\omega'} \pi}, \quad \sqrt[4]{c} = \frac{1-r}{1+r} \frac{1-r^3}{1+r^3} \frac{1-r^5}{1+r^5} \dots, \quad r = e^{-\pi i - \frac{\omega'}{\tilde{\omega}'} \pi}$$

а де λ і λ' означають функції, на які перейде φ і f , коли за α

$$\text{підставимо } 1 - \frac{2\pi}{x}.$$

На підставі повисшого вираження на модуль c дійдем до відношення загального між модулями; а іменно, коли функція еліптична має модуль: $\sqrt[4]{c} = \frac{1-r}{1+r} \frac{1-r^3}{1+r^3} \frac{1-r^5}{1+r^5} \dots$, то модуль кожної иньшої функції еліптичної дасть ся перетворити на перший, наколи в виражене на c вставимо на місце r $r^{\frac{n}{m}}$, де n і m є які небудь два числа цілковиті додатні.

Legendre показав в своїх „Exercises de calcul integral“, як можна замінити інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

на иньші інтеграли того самого виду з різними модулями. Того теорію згенералізував Абель доказавши, що наколи назначимо:

$$\alpha = \frac{(m+\mu)\omega + (m-\mu)\tilde{\omega}i}{2n+1}$$

де бодай одно з поміж чисел m і μ є перше зглядом $(2n+1)$, то дістанемо:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}} = \pm a \int \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$$

де:

$$y = f.x \cdot \frac{(\varphi^2\alpha - x^2)(\varphi^22\alpha - x^2) \dots (\varphi^2n\alpha - x^2)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)(1+e^2c^2\varphi^22\alpha.x^2) \dots (1+e^2c^2\varphi^2n\alpha.x^2)}$$

$$\frac{1}{c_1} = \frac{f}{c} \left[\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) \dots \varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) \right]^2$$

$$\frac{1}{e_1} = \frac{f}{e} \left[\varphi\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2} + \alpha\right) \varphi\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2} + 2\alpha\right) \dots \varphi\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2} + n\alpha\right) \right]^2$$

$$a = f(\varphi\alpha \cdot \varphi2\alpha \cdot \varphi3\alpha \dots \varphi n\alpha)^2$$

де f є неозначене, c_1 і e_1 є виражене через c і e при помочи функції φ так, що існує лиш одно відношене поміж тими величинами. Відношене се можна представити також при помочи рівняня альгебраїчного. Величини e_1 і c_1 можуть приймати усякі вартости крім 0 і ∞ .

На основі повисших взорів можна при помочи функцій φ , f , F дістати безконечне число перетворень, що є великої ваги в зіставленю повної теорії перетворень функцій еліптичних.

4. Дальша розвідка Абеля з теорії функцій еліптичних під заголовком: „Теория функций эллиптических“ ділить ся на дві частини. (Oeuvr. compl. I. 326.)

Перша часть говорить про функції еліптичні яко інтеграли неозначені і не згадує ся в ній ніщо про природу величин дійсних або мнимих, з яких ті функції ся складають. В тій частині послугуєсь Абель слідующими означеннями:

$$\Delta(x, c) = \pm \sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}$$

$$\tilde{\omega}(x, c) = \int \frac{dx}{\Delta(x, c)}, \quad \tilde{\omega}_0(x, c) = \int \frac{x^2 dx}{\Delta(x, c)}$$

$$\Pi(x, c, a) = \int \frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right) \Delta(x, c)}$$

так що $\tilde{\omega}(x, c)$, $\tilde{\omega}_0(x, c)$, $\Pi(x, c, a)$ означають функції першого, другого і третього виду.¹⁾

Часть друга говорить про функції о модулах дійсних менших як одиниця. На місце функцій $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_0$ і Π впроваджує Абель три інші, а се функцію $\lambda(\theta)$ означену рівнянем:

$$\theta = \int_0^{\lambda\theta} \frac{dx}{\Delta(x, c)}$$

отже функцію відвернену першого виду, і дві функції:

$$\tilde{\omega}_0(x, c) = \int (\lambda\theta)^2 d\theta$$

$$\Pi(x, c, a) = \int \frac{\Delta\theta}{1 - \frac{\lambda^2\theta}{a^2}}$$

які одержимо кладучи в вираженнях на $\tilde{\omega}_0(x, c)$ і $\Pi(x, c, a)$ $x = \lambda\theta$.

а) Часть перша. Функції еліптичні мають ту прикмету, що суму кількох-небудь тих функцій можна виразити через одну лише функцію того самого виду з додатком якогось вираження алгебраїчного і логаритмічного. Коли ψx буде представляти яку-небудь функцію виду:

¹⁾ се властиво не є функції, але інтеграли еліптичні.

$$\psi x = \int \left[A + Bx^2 + \frac{\alpha}{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \frac{\alpha_1}{1 - \frac{x^2}{a_1^2}} + \dots + \frac{\alpha_r}{1 - \frac{x^2}{a_r^2}} \right] \frac{dx}{\Delta x},$$

то :

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \dots + \psi x_\mu = C - Br - \frac{\alpha a}{2\Delta a} \log \frac{fa + \varphi a \Delta a}{fa - \varphi a \Delta a} - \\ - \frac{\alpha_1 a_1}{2\Delta a_1} \log \frac{fa_1 + \varphi a_1 \Delta a_1}{fa_1 - \varphi a_1 \Delta a_1} - \dots - \frac{\alpha_r a_r}{2\Delta a_r} \log \frac{fa_r + \varphi a_r \Delta a_r}{fa_r - \varphi a_r \Delta a_r}$$

де C є стала інтегрована, p функція алгебраїчна, $f(x)$ і $\varphi(x)$ дві якінебудь функції цілковиті що до x , одна паристого степеня, друга непаристого, о сочинниках змінних.

Окремо для функцій першого, другого і третього виду форма ся перейде по черзі на:

$$\tilde{\omega} x_1 + \tilde{\omega} x_2 + \dots + \tilde{\omega} x_\mu = \tilde{\omega} y + C$$

$$\tilde{\omega}_0 x_1 + \tilde{\omega}_0 x_2 + \dots + \tilde{\omega}_0 x_\mu = \tilde{\omega}_0 y - b_{\mu-1} + C$$

$$Px_1 + Px_2 + \dots + Px_\mu = Py - \frac{a}{2\Delta a} \log \frac{fa + \varphi a \Delta a}{fa - \varphi a \Delta a} + C$$

де $b_{\mu-1}$ є сочинником при найвишій степені x в функції $\varphi(x)$, а :

$$y = \pm \frac{a_0}{x_1 x_2 \dots x_{\mu-1}}$$

(a_0 вираз вільний в $f(x)$; знак $+$ або $-$ залежить від того, чи μ непаристе чи паристе).

$$\tilde{\omega} x = \int \frac{dx}{\Delta x}, \quad \tilde{\omega}_0 x = \int \frac{x^2 dx}{\Delta x}, \quad Px = \int \frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Delta x}.$$

Суму якого-небудь числа функцій еліптичних можна проте представити одною лиш функцією того самого виду з додатком величини постійної для функцій першого виду, а функції логаритмічної для функцій третього виду. — Теорем сей не є новий, бо его поставив еще Legendre.

Теорем сей можна виразити при помочи трох иньших простійших теоремів, дуже важних в своїх застосованях :

1) Коли якийсь інтеграл виду :

$$\int (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \dots + y_\mu dx_\mu)$$

— де $y_1, y_2, \dots, y_\mu$ є функції алгебраїчні величин $x_1, x_2, \dots, x_\mu$, зв'язані поміж собою якимсь числом рівнянь алгебраїчних — дасть ся виразити через функції алгебраїчні, логаритмічні, еліптичні в спосіб:

$$\int (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \dots + y_\mu dx_\mu) = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\nu \log v_\nu + \alpha_1 \psi_1(t_1) + \alpha_2 \psi_2(t_2) + \dots + \alpha_n \psi_n(t_n),$$

де $A_1, A_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ є сталі, а $v_1, v_2, \dots, t_1, t_2, \dots$ функції алгебраїчні величин $x_1, x_2, \dots$, а $\psi_1, \psi_2, \dots$ якінебудь функції еліптичні, то все буде можна виразити сей інтеграл в спосіб:

$$\delta \int (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \dots + y_\mu dx_\mu) = r + A' \log \varrho' + A'' \log \varrho'' + \dots + A^{(k)} \log \varrho^{(k)} + \alpha_1 \psi_1(\Theta_1) + \dots + \alpha_n \psi_n(\Theta_n),$$

де δ є число ціле, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, A', A'', \dots$ сталі, а $\Theta_1, A_1(\Theta_1), \Theta_2, A_2(\Theta_2), \dots, \Theta_n, A_n(\Theta_n), \varrho', \varrho'', \dots, \varrho^{(k)}$ є функції вимірні величин $x_1, x_2, \dots, x_\mu, y_1, y_2, \dots, y_\mu$.

Теорем сей служить не лиш до розвязки передше поданого теорему загального, але крім сего є він підставою до застосовання функцій алгебраїчних, логаритмічних і еліптичних до теорії інтегрування форм різнничкових алгебраїчних.

2) Коли інтеграл виду:

$$\int (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \dots + y_\mu dx_\mu)$$

дасть ся виразити функцією алгебраїчною і логаритмічною виду: $u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\nu \log v_\nu$, то $u, v_1, v_2, \dots$ все будуть функціями вимірними величин: $x_1, x_2, \dots, x_\mu, y_1, y_2, \dots, y_\mu$.

Коли отже маєм інтеграл $\int y dx$, де y є з x зв'язане якимсь рівнянням алгебраїчним, то тоді $u, v_1, v_2, \dots$ є функціями вимірними величин x і y^1).

Покладім в відношенню якінебудь заходячим між функціями еліптичними:

¹⁾ Є се „теорем Абелевий“, важний в теорії „інтегралів Абелевих“. На ній основує автор нову теорію інтегрування форм різнничкових алгебраїчних. Задачею сей теорії є виконати всі можливі перетворення інтегралів форм алгебраїчних при помочи функцій алгебраїчних і логаритмічних. Через се зводиться ся до можливо малого числа інтегралів, то представляють в скінченім виді всі інтеграли тої самої класи.

$$\alpha_1 \psi_1(x_1) + \alpha_2 \psi_2(x_2) + \dots + \alpha_\mu \psi_\mu(x_\mu) = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\nu \log v_\nu, \quad (A)$$

де $\psi_1(x_1), \psi_2(x_2), \dots, \psi_\mu(x_\mu)$ означають функції еліптичні, — $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_\mu = x$, а модулі тих функцій $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_\mu = c$, то ліва сторона рівняння (A) буде інтегралом $\int \frac{rdx}{\Delta x}$, де r є функцією вимірною змінної x .

Отже:

3) Коли поміж функціями $\tilde{\omega} x, \tilde{\omega}_0 x, \Pi_1 x_1, \dots, \Pi_\mu x_\mu$, — де модулі функцій першого, другого і третього виду суть ті самі, — заходить відношене:

$$\alpha \tilde{\omega} x + \alpha_0 \tilde{\omega}_0 x + \alpha_1 \Pi_1 x_1 + \alpha_2 \Pi_2 x_2 + \dots + \alpha_\mu \Pi_\mu x_\mu = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\nu \log v_\nu,$$

то $u, v_1, v_2, \dots, v_\nu$ все будуть виду $p + q\Delta x$, де p і q суть функціями вимірними x .

Порівнюючи рівняне (A) з рівнянем одержаним з него через різничене, можемо (A) обнижати, так що число функцій еліптичних в тім рівнянню буде маліти, а в кінці через повторяне дійдемо до рівняня, в котрім будуть приходити лише функції альгебраїчні і логаритмічні.

І так теорем поставлений на самім вступі „части першої“ зводить ся до сповнення рівняня:

$$\psi(x) = \beta_1 \psi_1 y_1 + \beta_2 \psi_2 y_2 + \dots + \beta_n \psi_n y_n + u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\nu \log v_\nu.$$

А щоби се рівняне сповнити в случаю найзагальнішійм, потреба:

1) Найти всі случаї, коли дасть ся сповнити рівняне:

$$(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2) = p^2(1 - x^2)(1 - c^2 x^2) \quad (1)$$

(p і q функції вимірні неозначеного x , а c і c' величини постійні).

2) Сповнивши рівняне (1), звести три функції $\tilde{\omega}(y'c')$, $\tilde{\omega}_0(y'c'a)$ $\Pi(y'c'a)$ до виду:

$$r + A \tilde{\omega} x + A_0 \tilde{\omega}_0 x + A' \Pi(xa') + A'' \Pi(xa'') + \dots$$

де r означає часть альгебраїчну і логаритмічну.

3) Найти умовини потрібні і достаточні, щоби функцію виду:

$$\alpha \tilde{\omega} x + \alpha_0 \tilde{\omega}_0 x + \alpha_1 \Pi'(xa') + \alpha_2 \Pi''(xa'') + \dots$$

— де всі функції еліптичні мають той сам модуль — виразити при помочи функцій альгебраїчних і логаритмічних.

Найлекша є умовина послїдна і тому від неї зачнемо.

Взїр, що позволяє функції еліптичні якінебудь всіх трох видів виразити при помочи функцій алыгебраїчних і льюгаритмічних, є:

$$\beta \tilde{\omega}x - \frac{2m_1 \Delta \alpha_1}{\alpha_1} \Pi' \alpha_1 - \frac{2m_2 \Delta \alpha_2}{\alpha_2} \Pi' \alpha_2 - \dots - \frac{2m_n \Delta \alpha_n}{\alpha_n} \Pi' \alpha_n = \log \left(\frac{fx + \varphi x \Delta x}{fx - \varphi x \Delta x} \right) + C$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ мусять сповняти рівняне:

$$(fx)^2 - (\varphi x)^2 (1-x^2) (1-c^2 x^2) = (x^2 - \alpha_1^2)^{m_1} (x - \alpha_2^2)^{m_2} \dots (x - \alpha_n^2)^{m_n}$$

а з поміж функцій fx і φx одна є париста, друга непариста.

Таке є відношене найзагальнійше поміж функціями відносячимися до того самого модулу і тої самої змінної. Цікаве, що у взорі повисшім нема зовсім функції еліптичної другого виду.

Друга умова, то сповнене рівняня:

$$(1-y^2)(1-c'^2 y^2) = r^2(1-x^2)(1-c^2 x^2)$$

де y і r суть функціями вимірими величини x . Через підставлене

$$r = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dy}{dx}$$

де ε є постійне, можна се рівняне звести до виду:

$$\frac{dy}{V(1-y^2)(1-c'^2 y^2)} = \frac{\varepsilon dx}{V(1-x^2)(1-c^2 x^2)}$$

або:

$$\frac{dy}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x, c)}$$

а інтегруючи одержимо:

$$\tilde{\omega}(y, c') = \varepsilon \tilde{\omega}(x, c) + C.$$

Отже коли існує відношене між якимнебудь числом функцій еліптичних, а c означає модул одной з них довільно вибраной, то поміж прочими функціями найдесь бодай одна о модулі c' така, що між функціями *першого виду* відповідаючими модулам c і c' існує відношене:

$$\tilde{\omega}(y, c') = \varepsilon \tilde{\omega}(x, c) + C$$

де y є функція вимірна x , а де ε є постійне. Якийнебудь буде степеень тої функції

$$y = \psi(x) = \frac{p}{q}$$

де p і q суть функціями цілковитими x , то все модуль c' буде мати b вартостей різних між собою, а до кожної вартості модуля c належати будуть дві вартості y . Значить, що функція y буде мати 12 різних вартостей. Вид тої функції буде залежати від вартостей a і b в рівнянню

$$p - qu = (a - by)(z - x)(z - x')(z - x'') \dots (z - x^{(\mu-1)})$$

де a і b суть постійні, а $x', x'', \dots, x^{(\mu-1)}$ суть коренями рівняння $y = \psi(x)$.

І так для b рівного zero, а μ непаристого $\mu = 2n + 1$

$$y = a \frac{x(e_1^2 - x^2)(e_2^2 - x^2) \dots (e_n^2 - x^2)}{(1 - c^2 e_1^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \dots (1 - c^2 e_n^2 x^2)}$$

для $b = 0$, а $\mu = 2n$

$$y = \frac{a(1 - \delta_1^2 x^2)(1 - \delta_2^2 x^2) \dots (1 - \delta_n^2 x^2)}{x(1 - c^2 e_1^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \dots (1 - c^2 e_{n-1}^2 x^2)}$$

для $a = 0$, а $\mu = 2n + 1$

$$y = \frac{a(1 - c^2 e_1^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \dots (1 - c^2 e_n^2 x^2)}{x(e_1^2 - x^2)(e_2^2 - x^2) \dots (e_n^2 - x^2)}$$

для $a = 0$, а $\mu = 2n$

$$y = a \frac{x(1 - c^2 e_1^2 x)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \dots (1 - c^2 e_{n-1}^2 x)}{(1 - \delta_1^2 x^2)(1 - \delta_2^2 x^2) \dots (1 - \delta_n^2 x^2)}$$

де $e_1, e_2, \dots$ суть коренями рівняння $e^n = 0$, а e_n є функція величини e така, що:

$$\frac{de_n}{de} = n \frac{de}{de},$$

а де $\delta_1, \delta_2, \dots$ суть коренями рівняння $q = 0$.

Рівнянне $y = \psi(x)$, де $\psi(x)$ є функцією вимірюваною x , сповняюче:

$$\frac{dy}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x, c)}$$

має ту прикмету, що дасть ся розвязати при помочи самих лиш коренів.¹⁾

Через се дістаємо цілу величезну класу рівнянь алягебраїчних якихнебудь степенів, що дадуть ся розвязати алягебраїчно.

¹⁾ Теорем сей, званий теоремом множення функцій еліптичних, має перворядне значіне в дальшій розвою функцій еліптичних.

На третю умовину відповідає автор, що відношене якебудь між функціями еліптичними о модулах $c_1, c_2, \dots, c_m$, не може істнувати, наколи поміж відповідними функціями першого виду не заходить відношене:

$$\tilde{\omega}(x, c) = \frac{1}{\varepsilon_1} \tilde{\omega}(y_1, c) = \frac{1}{\varepsilon_2} \tilde{\omega}(y_2, c) = \dots = \frac{1}{\varepsilon_m} \tilde{\omega}(y_m, c)$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_m$ суть величини постійні, а $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ функції виміряні змінної x .

Але коли якусь функцію еліптичну $\varphi(x)$ о модулі c' мож виразити через другі функції еліптичні о модулах $c_1, c_2, \dots, c_m$, то все буде мож ту функцію виразити при помочи функцій еліптичних, — всіх з тим самим модулем c , де c є довільно вибраним з поміж модулів $c_1, c_2, \dots, c_m$. Тота функція представить ся:

$$\varphi y = \int \frac{r dx}{\Delta(xc)}$$

де y і r є функції виміряні змінної x .

б) В частині другій подані лиш самі висліди без доказів, а всі они відносять ся до прикмет функції $\lambda\theta$.

1. Функція $\lambda\theta$ є двоперіодична і має період один дійсний, другий мнимий.

$$\lambda(\theta + 2\tilde{\omega}) = \lambda\theta,$$

$$\lambda(\theta + \omega i) = \lambda\theta$$

де $\frac{\tilde{\omega}}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(xc)}, \quad \text{а} \quad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x, b)}$

$$(b = \sqrt{1-c^2}, \quad \sqrt{-1} = i)$$

2. Функція $\lambda\theta$ стає ся зером і безконечностю для безконечного числа вартостей дійсних і мнимих θ :

$$\lambda(m\tilde{\omega} + n\omega i) = 0,$$

$$\lambda\left(m\tilde{\omega} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega i\right) = \frac{1}{0}$$

де m і n є числа цілі додатні або відємні.

Дальше для:

$$\theta' = (-1)^m \theta + m\tilde{\omega} + n\omega i$$

$$\lambda\theta' = \lambda\theta.$$

3. Функція $\lambda\Theta$ сповняє рівняне:

$$\lambda(\Theta' + \Theta) \lambda(\Theta' - \Theta) = \frac{(\lambda\Theta')^2 - (\lambda\Theta)^2}{1 - c^2 (\lambda\Theta)^2 (\lambda\Theta')^2}$$

де Θ і Θ' суть якінебудь величини змінні дійсні або мнимі.

4. Функція $\lambda\Theta$ дасть ся розвинути на добуток або суму дробів на багато способів. Приміром кладучи:

$$q = e^{-\frac{\omega}{\bar{\omega}}\pi}, \quad p = e^{-\frac{\bar{\omega}}{\omega}\pi}$$

дістанемо:

$$\begin{aligned} \lambda(\Theta\omega) &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{c}} \sqrt{q} \sin(\pi\Theta) \frac{[1-2q^2\cos(2\Theta\pi)+q^4][1-2q^4\cos(2\Theta\pi)+q^8][1-2q^6\cos(2\Theta\pi)+q^{12}] \dots}{[1-2q\cos(2\Theta\pi)+q^2][1-2q^3\cos(2\Theta\pi)+q^6][1-2q^5\cos(2\Theta\pi)+q^{10}] \dots} \\ &= \frac{4\sqrt{q}}{c} \frac{\pi}{\bar{\omega}} \left[\frac{1}{1-q^2} \sin(\Theta\pi) + \frac{q}{1-q^3} \sin(3\Theta\pi) + \frac{q^2}{1-q^5} \sin(5\Theta\pi) + \dots \right] \\ \lambda\left(\frac{\bar{\omega}}{2} - \Theta\omega\right) &= \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{(1-pe^{-2\pi\Theta})(1-pe^{2\pi\Theta})(1-p^3e^{-2\pi\Theta})(1-p^3e^{2\pi\Theta}) \dots}{(1+pe^{-2\pi\Theta})(1+pe^{2\pi\Theta})(1+p^3e^{-2\pi\Theta})(1+p^3e^{2\pi\Theta}) \dots} \end{aligned}$$

Аналогічно мож представити функцію другого і третього виду.

5. Дуже важна прикмета функції $\lambda\Theta$ є слідуєча: (для скорочення підставимо $\Delta\Theta = \pm \sqrt{(1-\lambda^2\Theta)(1-c^2\lambda^2\Theta)}$)

Наколи рівняне:

$$(\lambda\Theta)^{2n} + a_{n-1}(\lambda\Theta)^{2n-2} + \dots + a_1(\lambda\Theta)^2 + a_0 = b_0 \lambda\Theta + b_1(\lambda\Theta)^3 + \dots + b_{n-2}(\lambda\Theta)^{2n-3} \Delta\Theta$$

буде сповнене, коли за Θ підставимо $2n$ вартостей $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{2n}$, таких що $(\lambda\Theta_1)^2, (\lambda\Theta_2)^2, \dots, (\lambda\Theta_{2n})^2$, суть різні поміж собою, тоді буде все:

$$\lambda(\Theta_1 + \Theta_2 + \dots + \Theta_{2n}) = 0$$

$$-\lambda(\Theta_{2n}) = \lambda(\Theta_1 + \Theta_2 + \dots + \Theta_{2n-1}) = \frac{a_0}{\lambda\Theta_1 \cdot \lambda\Theta_2 \cdot \dots \cdot \lambda\Theta_{2n-1}}$$

сочинники $a_0, a_1, \dots$, $b_0, b_1, \dots$ можуть бути якінебудь, а можна їх визначити, позаяк $\Theta_1, \Theta_1, \dots, \Theta_{2n-1}$ є дані.

А отсе також важна прикмета:

Коли покласти

$$p^2 - q^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = A(x - \lambda\Theta_1)(x - \lambda\Theta_2) \dots (x - \lambda\Theta_\mu)$$

де p і q є якінебудь функції цілковиті x , то все мож буде вибрати величини $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots, \Theta_\mu$ так, що виражене:

$$\lambda(\Theta_1 + \Theta_2 + \dots + \Theta_\mu)$$

буде зером або безконечністю.

Подібно приміром, коли

$$p^2 - x^2(1 - x^2)(1 - c^2 x^2) = A(x^2 - \lambda^2 \Theta)^\mu$$

де одна з функцій p і q , є париста а друга непариста, тоді буде:

а) для p паристого:

$$\lambda(\mu\Theta) = 0, \text{ коли } \mu \text{ є паристе}$$

$$\lambda(\mu\Theta) = \frac{1}{0}, \text{ коли } \mu \text{ є непаристе.}$$

б) для p непаристого

$$\lambda(\mu\Theta) = 0, \text{ коли } \mu \text{ є непаристе}$$

$$\lambda(\mu\Theta) = \frac{1}{0}, \text{ коли } \mu \text{ є паристе;}$$

а з відси виходить, що коли рівняне повисше має місце, то:

$$\lambda\Theta = \lambda \left(\frac{m\tilde{\omega} + \frac{1}{2}n\omega i}{\mu} \right)$$

де m і n суть цілі і менші чим μ .

6. Поміж величинами $\lambda \left(\frac{m\tilde{\omega} + n\omega i}{2\mu + 1} \right)$ а коренями одиниці

$(2\mu + 1)$ ими існують дуже цікаві відношення:

$$0 = \lambda \left(\frac{2m\tilde{\omega} + \omega i}{2\mu + 1} \right) + \delta^k \lambda \left(\frac{2m\tilde{\omega} + 2\omega i}{2\mu + 1} \right) + \delta^{2k} \lambda \left(\frac{2m\tilde{\omega} + 3\omega i}{2\mu + 1} \right) + \\ + \dots + \delta^{2\mu k} \lambda \left(\frac{2m\tilde{\omega} + 2\mu\omega i}{2\mu + 1} \right)$$

$$0 = \lambda \left(\frac{\omega + m\omega i}{2\mu + 1} \right) + \delta^{k'} \lambda \left(\frac{2\tilde{\omega} + m\omega i}{2\mu + 1} \right) + \delta^{2k'} \lambda \left(\frac{3\tilde{\omega} + m\omega i}{2\mu + 1} \right) + \\ + \dots + \delta^{2\mu k'} \lambda \left(\frac{2\mu\tilde{\omega} + m\omega i}{2\mu + 1} \right)$$

де $\delta = \cos \frac{2\pi}{2\mu + 1} + i \sin \frac{2\pi}{2\mu + 1}$, а всі величини $\lambda \left(\frac{m\tilde{\omega} + n\omega i}{2\mu + 1} \right)$

суть коренями одного лиш рівняня степеня: $(2\mu + 1)^2$, котрого сочинники є функціяма вимірними c^2 .

7. Коли функція

$$\int \frac{dx}{A(xc)}$$

о модулі c , дійсним і меншим чим одиниця, дасть ся перетворити на иньшу:

$$\varepsilon \int \frac{dy}{\Delta(x, c')}$$

о модулі c' дійсним або мнимим, через підставлене за y якоїнебудь функції альгебраїчної x , тоді модуль c' дасть ся виразити через одно з помежи рівнянь:

$$\sqrt[4]{c'} = \sqrt{2} \sqrt[8]{q_1} \frac{(1+q_1^2)(1+q_1^4)(1+q_1^6) \dots}{(1+q_1)(1+q_1^3)(1+q_1^5) \dots}$$

$$\sqrt[4]{c'} = \frac{1-q_1}{1+q_1} \cdot \frac{1-q_1^3}{1+q_1^3} \cdot \frac{1-q_1^5}{1+q_1^5} \dots$$

де $q_1 = q^{\mu}$, а μ виміряне, або, що на одно вийде:

$$q_1 = e^{\left(\mu \frac{\omega}{\omega'} + \mu' i\right)\pi}$$

μ і μ' які небудь числа виміряні.

8. Функція $\lambda\theta$ має застосоване в теорії перетворень. І так при єї помочи показуєсь, що, щоби дві функції дійсні перетворити одну на другу, т. зн. щоби сповнити рівняне:

$$\int \frac{dy}{\Delta(x, c')} = m \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} \int \frac{dx}{\Delta(x, c)}$$

потреба, щоби поміж функціями $\tilde{\omega}$, ω , $\tilde{\omega}'$, ω' заходило рівняне:

$$\frac{\tilde{\omega}'}{\omega'} = \frac{n}{m} \frac{\tilde{\omega}}{\omega}$$

де n і m є числа цілі.

9. На увагу заслуговує случай, коли один з поміж модулів мож перетворити на єго доповнене $\sqrt{1-c^2} = b$.

В тім случаю будемо мати з узглядненем рівняня:

$$\frac{\tilde{\omega}'}{\omega'} = \frac{n}{m} \frac{\tilde{\omega}}{\omega} :$$

$$\frac{\tilde{\omega}}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{n}} \quad \text{і} \quad \frac{dy}{\Delta(y, b)} = \sqrt{mn} \frac{dx}{\Delta(x, c)}.$$

Модуль c буде визначений рівнянем альгебраїчним, котре мож розв'язати при помочи корінів; бодай так буде дійсно, коли $\frac{m}{n}$ є повним квадратом. У всіх случаях легко виразити c через безко-нечні добутки.

І справді коли

$$\frac{\tilde{\omega}}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{n}},$$

тоді маємо:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{c} &= \sqrt{2} e^{-\frac{1}{3}\pi V\frac{m}{n}} \frac{(1 + e^{-2\pi V\frac{m}{n}})(1 + e^{-4\pi V\frac{m}{n}}) \dots}{(1 + e^{-\pi V\frac{m}{n}})(1 + e^{-3\pi V\frac{m}{n}}) \dots} \\ &= \frac{(1 - e^{-\pi V\frac{n}{m}})(1 - e^{-3\pi V\frac{n}{m}}) \dots}{(1 + e^{-\pi V\frac{n}{m}})(1 + e^{-3\pi V\frac{n}{m}}) \dots} \end{aligned}$$

Коли два модулі s і s' дадуться перетворити один на другий, то вони будуть зв'язані між собою алгебраїчно. Але взагалі буде неможливо виразити s' через s при помочі коренів і тільки в тім случаю буде це можливе, коли s мож перетворити на його доповнене.

Рівняння модулюві мають ту прикмету, що всі їх корені мож виразити вимірно при помочі двох з поміж них; а всі корені дадуться виразити через один з помежи них при помочі коренів.

10. Функцію $\lambda\theta$ мож розвинути на:

$$\lambda\theta = \frac{\theta + a\theta^3 + a'\theta^5 + \dots}{1 + b'\theta^4 + b''\theta^6 + \dots}$$

де чисельник і знаменник є рядами збіжними.

Кладучи:

$$\begin{aligned} \varphi\theta &= \theta + a\theta^3 + a'\theta^5 + \dots \\ f\theta &= 1 + b'\theta^4 + b''\theta^6 + \dots \end{aligned}$$

можемо ті функції виразити при помочі рівнянь:

$$\begin{aligned} \varphi(\theta' + \theta)\varphi(\theta' - \theta) &= (\varphi\theta f\theta')^2 - (\varphi\theta' f\theta)^2 \\ f(\theta' + \theta)f(\theta' - \theta) &= (f\theta f\theta')^2 - c^2(\varphi\theta\varphi\theta')^2 \end{aligned}$$

де θ і θ' є незалежні змінні.

IV. Широко опрацьовує автор теорію переступних функцій еліптичних. Ту належить розвідка:

1. Теория переступных функций эллиптических. (Oeuvres compl. II. 93.)

Автор розпочинає зведенням інтеграла

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}}$$

на функції алгебраїчні.

Назв'їм для скорочення корінь через $\sqrt{R}$ та розбираймо:

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$$

де P значить функцію алягебраїчну виміриму x .

P мож розложити на члени виду Ax^m і $\frac{A}{(x-a)^m}$, де m є числом цілковитим. Автор розбирає ті інтеграли:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} \quad \text{і} \quad \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$$

спершу окремо, а відтак разом.

а) Зведенє інтеграла

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}.$$

Пошукаймо загальної функції алягебраїчної, котрої різничка дасть ся розложити на члени виду

$$\frac{Ax^m dx}{\sqrt{R}},$$

бо тоді інтеграл тої функції так розложеної дасть відношенє загальне поміж інтегралами виду

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}.$$

Функція шукана не може заключати иньших корінїв, лише $\sqrt{R}$, а як функція вимірна величин x , $\sqrt{R}$ буде мати вид:

$$f(x, \sqrt{R}) = Q' + Q \sqrt{R}$$

де Q і Q' суть функціями вимірими x , або опустивши Q' , позаяк оно буде заключати лише самі вираженя вимірими x , дістанемо:

$$f(x, \sqrt{R}) = Q \sqrt{R}.$$

Функція Q мусить бути цілковитою, бо в противнім случаю, колиб заключала член виду $\frac{1}{(x-a)^m}$, тоді різничка вираженя

$$\frac{\sqrt{R}}{(x-a)^m}:$$

$$d \left[\frac{\sqrt{R}}{(x-a)^m} \right] = \left[\frac{\frac{1}{2} \frac{dR}{dx}}{(x-a)^m} - \frac{mR}{(x-a)^{m+1}} \right] \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

малаби за сочинник при $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ функцію дробову, хіба що R мало-би привнайменше два сочинники рівні т. з. інтеграл мавби зовсім иньшый вид, бо $\int \frac{Pdx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}}$.

Тото Q яко цілковита функція алыгебраїчна представить ся:

$$Q = f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \dots + f(n)x^n;$$

зріжничкуймо найдену функцію $Q\sqrt{R}$, то дістанемо:

$$d(Q\sqrt{R}) = \frac{RdQ + \frac{1}{2}QdR}{dx} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}} = S \frac{dx}{\sqrt{R}},$$

а коли за Q і R підставимо вартости, дістанемо на S якусь функцію цілковиту x степеня m , пр.

$$S = R \frac{dQ}{dx} + \frac{1}{2}Q \frac{dR}{dx} \quad (1)$$

$$= \varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \dots + \varphi(m)x^m; \quad (2)$$

з порівняння сочинників (1) і (2) вийдуть вартости на φ :

$$\begin{aligned} \varphi(p) = (p+1)f(p+1)\alpha + (p+\frac{1}{2})f(p)\beta + pf(p-1)\gamma + (p-\frac{1}{2})f(p-2)\delta + \\ + (p-1)f(p-3)\varepsilon \end{aligned} \quad (3)$$

де $p = 0, 1, 2, 3, \dots m$.

А що дотичить вартости n , то випаде $m = n + 3$.

І тепер функція наша:

$$Q\sqrt{R} = \int S \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

представить ся в видї:

$$\begin{aligned} \varphi(0) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}} + \dots + \varphi(m) \int \frac{x^m dx}{R} = \\ = \sqrt{R} (f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \dots + f(m-3)x^{m-3}) \end{aligned} \quad (4)$$

То є найзагальнійше відношене поміж інтегралами виду $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$, виражене функціями алыгебраїчними. З рівняня сего мож випровадити всі зведеня (réduction), які інтеграли сего виду допускають. Ліва сторона сего рівняня є заразом найбільше загальним

інтегралом виду $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ (P функція цілковита x), який дасть ся виразити через функції альгебраїчні.

В рівнянню (4) є очевидно $m \geq 3$, бо права сторона є функцією цілковитою x , отже всяке $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$, $m \geq 3$, дасть ся виразити через інтеграли того самого виду о нижшім m . Лише

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$$

суть незведимі при помочи функцій альгебраїчних, і то суть одинокі функції переступні в інтегралі

$\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ (P функція цілковита), (інтеграли абелеві I-го, II-го і III-го виду).

Щоби звести інтеграл $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$, положимо в рівнянню (4)

$\varphi(m) = -1$, а позаяк:

$$\varphi(m-1) = \varphi(m-2) = \dots \varphi(3) = 0$$

то:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} &= \varphi(0) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} - \\ &- \sqrt{R} (f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \dots + f(m-3)x^{m-3}) \end{aligned}$$

а сочинники $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $f(0)$, $f(1)$, $\dots$, $f(m-3)$ дістанемо з (3) кладучи $p = 0, 1, \dots, m$.

І так приміром $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}}$ виразить ся через названі функції переступні ось як:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}} &= \left(\frac{5}{24} \frac{\beta \delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\varepsilon} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} \\ &+ \left(\frac{5}{12} \frac{\gamma \delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} \\ &+ \left(\frac{5}{8} \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} - \frac{2}{3} \frac{\gamma}{\varepsilon} \right) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} \\ &- \left(\frac{5}{12} \frac{\delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{\varepsilon} x \right) \sqrt{R} \end{aligned}$$

Інтеграл $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ дасть ся, як бачилисьмо, виразити через три функції переступні. Колибсьмо хотіли се число функцій переступних зменьшити, то поміж величинами $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ мусілиби зайти якісь відношеня. Приміром, щоби $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ виразити через функції алягебраїчні, требаби покласти $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi(2) = 0$, а тоді три з поміж $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ виразять ся через дві прочі. Приміром інтеграл $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}}$ виражений функціями алягебраїчними буде:

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}} = - \left(\frac{5}{12} \frac{\delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{\varepsilon} x \right) \sqrt{R}$$

6) *Зведенє інтеграла*

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}.$$

В тім случаю Q яко функція дробова дасть ся розложити на дробі частинні:

$$Q = \frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \dots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}$$

$$d(Q\sqrt{R}) = \int \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

де S кладемо:

$$S = \varphi'(0) + \varphi'(1)(x-a) + \varphi'(2)(x-a)^2 + \frac{\chi(1)}{x-a} + \frac{\chi(2)}{(x-a)^2} + \dots + \frac{\chi(m)}{(x-a)^m}$$

а φ і χ суть сочинниками при відповідних степенях $(x-a)$, такі які випадуть з розвиненя.

А інтеграл: $Q\sqrt{R} = \int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ представить ся:

$$\begin{aligned} & \varphi(0) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{x dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} \\ & + \chi(1) \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \chi(2) \int \frac{dx}{(x-a)^2 \sqrt{R}} + \dots + \chi(m) \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}} \\ & = \sqrt{R} \left(\frac{\psi(1)}{(x-a)} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \dots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}} \right) \quad (5) \end{aligned}$$

З сеї форми видно, що

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}, m > 1$$

все дасть ся виразити через три інтеграли:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} \text{ і інтеграл } \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}},$$

та що сей останній *взагалі* є незведимий. Він дасть ся звести лише через відповідне дібране величин $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, подібно, як три попередні функції переступні. Кладучи в (5) $\chi(m) = -1$, $\chi(2) = \chi(3) = \dots = \chi(m-1) = 0$, дістанемо:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}} &= \varphi(0) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} + \chi(1) \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} \\ &- \sqrt{R} \left(\frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \dots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}} \right) \quad (6) \end{aligned}$$

Єслиж $(x-a)$ є чинником функції R , отже R стає зером для $x=a$, тоді (5) не дасть ся застосувати до зведення інтеграла $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$. Та коли за m положимо $m+1$ і в так зміненим взорі покладемо $m=1$, тоді інтеграл $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$ дасть ся виразити через $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}} &= \varphi(0) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} \\ &- \sqrt{R} \left(\frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \dots + \frac{\psi(m)}{(x-a)^m} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

Ві всіх прочих случаях оно є неможливе, позаяк рівняне (6) закладає $m > 1$.

Інтеграл $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ дасть ся також звести в случаю, коли $(x-a)$ є чинником R . Взір (7) перейде тоді на:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} &= -\frac{a^2 + a(a' + a'' + a''')}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} \int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{a + a' + a'' + a'''}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} \\ &+ \frac{2}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} - \frac{2}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} \cdot \frac{\sqrt{R}}{x-a} \quad (8) \end{aligned}$$

де $R = (x-a)(x-a')(x-a'')(x-a''')$.

Щоби найти відношене поміж інтегралами виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$,
положім:

$$\begin{aligned} & \varphi(0) \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}} + \\ & + \varphi(3) \int \frac{dx}{(x-a''')\sqrt{R}} = \sqrt{R} \left(\frac{A}{x-a} + \frac{A'}{x-a'} + \frac{A''}{x-a''} + \frac{A'''}{x-a'''} \right) \\ & \frac{A}{x-a} + \frac{A'}{x-a'} + \frac{A''}{x-a''} + \frac{A'''}{x-a'''} = Q \end{aligned}$$

Та коли в то рівняне підставимо вартости за $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$
і т. д., тоді дістанемо відношене:

$$\begin{aligned} & \varphi(0) \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}} = \\ & = \sqrt{R} \left(\frac{A}{x-a} + \frac{A'}{x-a'} + \frac{A''}{x-a''} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

То є відношене між трома якиминибудь з по-
межи інтегралів:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-a''')\sqrt{R}}$$

значить, два з поміж них можна виразити через
два другі, наколи $(x-a)$ є чинником R . В противнім
случаю, коли $(x-a)$ не є чинником R , відношене ні-
яке між інтегралами не існує.

Пошукаймо тепер еще, чи інтеграли

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$$

не дадуть ся звести на інтеграли виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ і які відношеня
мусять тоді існувати поміж $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$.

Позаяк $(x-a)$ мусить бути чинником R , проте на підставі (9):

$$\begin{aligned} & \varphi(0) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{x dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} = \\ & = A \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + A' \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} + \sqrt{R} \left(\frac{B}{(x-a)} + \frac{B'}{(x-a')} \right) \end{aligned}$$

Підставивши за $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ і $\int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$ вартости, дістанемо з порівняння сочинників вартости на A, A', B, B' , а межі $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2)$ вийде відношене:

$$2\varepsilon\varphi(1) - \delta\varphi(2) = 0.$$

Кладучи $\varphi(1) = 0$ а $\varphi(0) = 1$ дістанемо $\varphi(2) = 0$, а тоді:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{(a-a'')(a-a''')}{(a''+a'''-a-a')}\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \frac{(a'-a'')(a'-a''')}{(a''+a'''-a-a')}\int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} + \frac{2\sqrt{R}}{(a+a'-a''-a''')(x-a)(x-a')} \quad (10)$$

Колиж покладемо $\varphi(0) = 0$, а $\varphi(2) = 1$, тоді $\varphi(1) = \frac{\delta}{2\varepsilon}$ і дістанемо:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2}\delta \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} &= \frac{a'(a'-a-a''-a''')f'(a)}{2(a'-a)(a+a'-a''-a''')}\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} \\ &+ \frac{a(a-a'-a''-a''')f'(a')}{2(a-a')(a+a'-a''-a''')}\int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} \\ &+ \frac{\sqrt{R}}{(a-a')(a+a'-a''-a''')}\left(\frac{a'(a'-a-a''-a''')}{x-a} - \frac{a(a-a'-a''-a''')}{x-a'}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

де:

$$f'(a) = \frac{df(a)}{da} \quad f(x) = R.$$

Отже бачимо, що $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ дасть ся виразити при помочи інтегралів $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ і $\int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$. А вже інтеграли $\int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$ і $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$ не дадуть ся виразити в сей спосіб. Коли $a+a' = a''+a'''$, то (10) і (11) стають ілюзоричні, а лишаєсь лише рівняне (8); в тім случаю мож найти відношене поміж двома інтегралами виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$; оно буде:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} = \frac{2\sqrt{R}}{(a''-a)(a''-a')(x-a)(x-a')}$$

З сего видко, що коли $(x-a)^m$ є подільником функції N , $(x-a)^{m-1}$ буде подільником M , отже $\frac{M}{N}$ не може мати членів виду $\frac{B}{(x-a)^m}$ при $m > 1$. Дальше, коли $(x-a)$ є чинником заключеним в R , то він буде і чинником P , отже M і N будуть його мати яко чинник спільний, значить $\frac{M}{N}$ не може заключати також виражень $\frac{B}{x-a}$, наколи $(x-a)$ є чинником R . $\frac{M}{N}$ є на случай, коли $m > n+2$ і $m < n+2$, величиною постійною, а лише на случай коли $m = n+2$, може бути функцією цілковитою першого степеня, (m означає степеня функції P , а n функції Q), і на тій підставі $\frac{M}{N}$ буде мати вид:

$$\frac{M}{N} = Bx + B' + \frac{C}{x-a} + \frac{C'}{x-a'} + \frac{C''}{x-a''} + \dots$$

де $(x-a)$, $(x-a')$ не суть чинниками в R .

З сего виходить, що інтеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$ є незведимий в ні-

якім случаю. Він становить незведимість особливу (transcedente particulière).

T' представить ся: (12)

$$T' = k \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + k' \int \frac{x dx}{\sqrt{R}} + L \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \dots + L^{(v)} \int \frac{dx}{(x-a^{(v)})\sqrt{R}}$$

І се є найзагальнійше відношеня між нашими інтегралами.

Щоби скористати з сего рівняня, автор розв'язує кілька (пять) частинних проблемів, з котрих перший є:

А) Виразити інтеграл $\int \frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}}$ через як най-

менше число інтегралів виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

Наколи $P, Q, P', Q', \dots, P^{(r)}, Q^{(r)}$ суть степенів: $m, n, m', n', \dots, m^{(r)}, n^{(r)}$, то они мають $m+n+m'+n'+\dots+m^{(r)}+n^{(r)}+r+1$ сочинників неозначених, а додавши до сего ще $A, A', \dots, A^{(r)}$, будемо мати всіх сочинників неозначених:

$$m+n+m'+n'+\dots+m^{(r)}+n^{(r)}+2r+2=a'$$

отже :

$$A \frac{M}{N} + A' \frac{M'}{N'} + A'' \frac{M''}{N''} + \dots + A^{(r)} \frac{M^{(r)}}{N^{(r)}} \\ = k + k'x + \frac{C + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{\nu-\alpha'+1} x^{\nu-\alpha'+1}}{D + D_1 x + D_2 x^2 + \dots + D_{\nu-\alpha'+1} x^{\nu-\alpha'+1}} = P$$

(ν є сумою степенів N , N' $N^{(r)}$, k і k' суть які небудь). А то

значить, що: Інтеграл $\int \frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}}$ можна виразити через

$$\nu + \alpha' + 2 \text{ інтегралів виду } \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

В случаю частнім, іменно коли всі P будуть степеня $m = n + 2$, випаде: $\nu - \alpha' + 2 = 2$. Тоді

$$S = k + k'x + \frac{C + C'x}{D + D_1 x + D_2 x^2} = k + k'x = \frac{L}{(x-a)} + \frac{L'}{(x-a')}$$

а інтеграл сего:

$$\int \frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}} = T' - L \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} - L' \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}.$$

А позаяк r є довільне, то при $r = 0$

$$T' = A \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}$$

а коли крім сего положимо $n = 0$, бо оно також є довільне, то $m = 2$. Положім:

$$P = f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^2, \text{ а } Q = 1$$

дістанемо:

$$N = P^2 - Q^2 R = (f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^2)^2 - R = D + D_1 x + D_2 x^2$$

$$M = A \left(2N \frac{dP}{dx} - P \frac{dN}{dx} \right)$$

$$= A [2(D + D_1 x + D_2 x^2)(f^{(1)} + 2f^{(2)}x) - (D_1 + D_2 x)(f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^2)] \\ = C + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

а з відси через порівнянє сочинників одержимо $C, C_1, C_2, C_3, D, D_1, D_2, f, f^{(1)}, f^{(2)}$, отже:

$$\frac{M}{N} = \frac{C + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3}{D + D_1 x + D_2 x^2} = \frac{C_3}{D_2} x + \frac{C_2 D_2 - C_3 D_1}{D_2^2} + \frac{C' + C'_1 x}{D + D_1 x + D_2 x^2}$$

де для скорочення положено:

$$\frac{C_1 D_2 - C_3 D}{D_2} - \frac{D_1 (C_2 D_2 - C_3 D_1)}{D_2^2} = C_1' \quad \text{а}$$

$$C - \frac{D(C_2 D_2 - C_3 D_1)}{D_2^2} = C'$$

$$\text{Возьмим } \frac{C_3}{D_3} = k' \quad \text{а} \quad \frac{C_2 D_2 - C_3 D_1}{D_2^2} = k$$

то наколи: $\frac{C' + C_1' x}{D + D_1 x + D_2 x^2}$ розібємо на:

$$\frac{L}{x-a} + \frac{L'}{x-a'} \quad \text{тоді:}$$

$$\int \frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}} = -L \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} - L' \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} \quad (13)$$

$$+ \frac{k'}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} x + \sqrt{\varepsilon} x^2 + \sqrt{R}}{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} x + \sqrt{\varepsilon} x^2 - \sqrt{R}} \right)$$

і то є шукане зведенє.

Коли $k=0$, а $k'=1$, то взір сей перейде на:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{R}} = (G + H\sqrt{K}) \int \frac{dx}{(x-\sqrt{K})\sqrt{R}} + (G - H\sqrt{K}) \int \frac{dx}{(x-\sqrt{K})\sqrt{R}} \quad (14)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{\frac{\beta}{\delta} \sqrt{\varepsilon} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} x + \sqrt{\varepsilon} x^2 + \sqrt{R}}{\frac{\beta}{\delta} \sqrt{\varepsilon} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} x + \sqrt{\varepsilon} x^2 - \sqrt{R}} \right)$$

де:

$$G = \frac{4\alpha\delta^2\varepsilon + \beta\delta^3 + \beta^2\varepsilon^2 - 4\beta\gamma\delta\varepsilon}{2(\delta^4 + 8\beta\delta\varepsilon^2 - 4\gamma\delta^2\varepsilon)}$$

$$H = \frac{\delta}{4\varepsilon} \left(\frac{\beta^2\varepsilon - \alpha\delta^2}{\varepsilon\beta^2 - \alpha\delta^2} \right), \quad K = \frac{4\varepsilon}{\delta} \left(\frac{\varepsilon\beta^2 - \alpha\delta^2}{4\gamma\delta\varepsilon - 8\beta\varepsilon^2 - \delta^3} \right)$$

На случай, коли $D_2 = 0$, рівняне (13) перейде на

$$\int \frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}} = \left[\frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}} f - \left(\frac{k'}{3\varepsilon} - k \right) \mu \right] \int \frac{dx}{(x+\mu)\sqrt{R}}$$

$$+ \frac{k'}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} x + \sqrt{\varepsilon} x^2 + \sqrt{R}}{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\varepsilon} x^2 + \sqrt{R}} \right)$$

$$\text{де: } f = \frac{4\varepsilon\gamma - \delta}{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{а: } \mu = \frac{(f^2 - \alpha^2)\sqrt{\varepsilon}}{f\delta - \beta\sqrt{\varepsilon}}$$

а взір (14) представить ся:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{3\varepsilon} (\mu' - \mu) \int \frac{dx}{(x + \mu)\sqrt{R}} + \frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}} \log \left(\frac{\frac{\mu'}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} x + \sqrt{\varepsilon} x^2 + \sqrt{R}}{\frac{\mu'}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} x + \sqrt{\varepsilon} x^2 - \sqrt{R}} \right)$$

$$\text{де: } \mu' = \frac{4\varepsilon\gamma - \delta^2}{8\varepsilon} \quad \text{а } \mu = -\frac{\delta}{2\varepsilon};$$

між сочинниками $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ заходить тоді відношенє:

$$(4\varepsilon\gamma - \delta^2)^2 + 4\delta^2(4\varepsilon\gamma - \delta^2) + 32\beta\delta\varepsilon^2 - 64\alpha\varepsilon^3 = 0.$$

До зведень тих дійшли ми в той спосіб, щосьмо спровадили $\frac{M}{N}$

до виду $\frac{C + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3}{D + D_1x + D_2x^2}$ кладучи $P^2 - Q^2R = D + D_1x + D_2x^2$.

Але се можна би зробити також в иньший спосіб, приміром кладучи:

$$R = (p + qx + rx^2)(p' + q'x + x^2) \\ P = f(p' + q'x + x^2), \quad Q = 1.$$

Поступаючи анальоґічно найдемо, що $\int \frac{(k+x)dx}{\sqrt{R}}$ на сей спосіб звести ся не дасть, за се $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ дасть ся звести до одного

лише інтеграла виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = -L \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + A \log \left[\frac{f(p' + q'x + x^2) + \sqrt{R}}{f(p' + q'x + x^2) - \sqrt{R}} \right] \quad (15)$$

де:

$$L = \frac{pq' - qp' + (rq' - q)a^2}{(rq' - q)a} \\ A = \frac{f^2 - r}{f(rq' - q)}, \quad a = \frac{q - q'f^2}{2(f^2 - r)}$$

а f визначене є рівнанєм

$$f^4(q'^2 - 4p') - f^2(2qq' - 4p - 4p'r) + q^2 - 4pr = 0.$$

Положимо в зорі (15) $r = 1$, $q' = -q$, $p' = p$, то дістанемо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(p+qx+x^2)(p-qx+x^2)}} = 2\sqrt{p} \int \frac{dx}{(x-\sqrt{p})\sqrt{(p+qx+x^2)(p-qx+x^2)}} \quad (16)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{4p-q^2}} \log \left(\frac{\frac{q+2\sqrt{p}}{\sqrt{4p-q^2}} \sqrt{p-qx+x^2} + \sqrt{p+qx+x^2}}{\frac{q+2\sqrt{p}}{\sqrt{4p-q^2}} \sqrt{p-qx+x^2} - \sqrt{p+qx+x^2}} \right).$$

Можна ще через підставлення $P = f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^2$ звести інтеграл

$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ і на інші способи, пр. кладучи:

$$N = P^2 - R = k(x-a)^4, \quad R = \varepsilon(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''').$$

Взір зведення буде:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}} = L \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}} \quad (17)$$

$$+ A \log \frac{f + f'x + f''x^2 + \sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}{f + f'x + f''x^2 - \sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}.$$

де:

$$A = - \frac{1}{2\sqrt{(p+p'-2a)(p''+p'''-2a)}}$$

$$L = 2\sqrt{\frac{(a-p)(a-p')(a-p'')(a-p''')}{[2a-(p+p')][2a-(p''+p''')]}.$$

а коли в тім зорі положимо $p'' = -p$, $p''' = -p'$ і назовемо $(p+p')$ через q , а pp' через r , то (17) перейде на:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}} = 2\sqrt{r} \int \frac{dx}{(x-\sqrt{r})\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}} \quad (18)$$

$$- \frac{1}{(q^2-4r)} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{q^2-4r} \sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}}{2r\sqrt{r}-q^2x+2\sqrt{r}x^2} \right)$$

А то є той сам взір, що (16), лише представлений в іншому виді. Додати треба, що все можна прийняти P і R без спільного чинника, (бо через перерібку все мож дійти до таких P' і R , котрі не будуть мати спільного подільника).

Б) Н а й т и у м о в и н и п о т р і б н і, щ о б и :

$$\int \frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + \dots + k' + k}{x^m + l^{(m-1)} x^{m-1} + \dots + l'x + l} \frac{dx}{\sqrt{R}} = \Lambda \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}$$

Спосіб переведення остане той сам.

Положім :

$$Q = e_1 + e^{(1)}x + e^{(2)}x^2 + \dots + e^{(n-1)}x^{(n-1)} + x^n$$

$$P = f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^2 + \dots + f^{(n+1)}x^{(n+1)} + x^{n+2}$$

де n є число ціле, сповняюче умову $2n + 4 > m$.

Най :

$$x^m + l^{(m-1)}x^{m-1} + \dots + l'x + l = (x-a)((x-a')(x-a'') \dots (x-a^{(m-1)}),$$

то щоби $\frac{M}{N}$ звести до виду :

$$\frac{x^m + k^{(m-1)}x^{m-1} + k^{(m-2)}x^{m-2} + \dots + k}{x^m + l^{(m-1)}x^{m-1} + l^{(m-2)}x^{m-2} + \dots + l} = \frac{M'}{(x-a)(x-a') \dots (x-a^{(m-1)})}$$

потреба положити :

$$N = P^2 - Q^2 R = C(x-a)^\mu (x-a')^{\mu'} (x-a'')^{\mu''} \dots (x-a^{(m-1)})^{\mu^{(m-1)}} = CS$$

$$\text{де} \quad 2n + 4 = \mu + \mu' + \mu'' + \dots + \mu^{(m-1)};$$

а то сповнимо, кладучи пр.

$$P = Fx, \quad Q = fx, \quad R = \varphi(x)$$

і дістанемо $(m-1)$ рівнянь :

$$(Fx)^2 = (fx)^2 \varphi x$$

$$\text{або :} \quad Fx = \pm fx \sqrt{\varphi x} = i fx \sqrt{\varphi x}$$

$$x = a, \quad a', \quad a'', \dots a^{(m-1)}. \quad (19)$$

А ріжничкуючи перше $(\mu-1)$ разів, друге $(\mu'-1)$ разів і т. д. дістанемо зі згляду на a рівняне виду :

$$\begin{aligned} d^p Fa = \pm d^p fa \sqrt{\varphi a} + p d^{p-1} fa d\sqrt{\varphi a} + \frac{p(p-1)}{2} d^{p-2} fa d^2 \sqrt{\varphi a} + \\ + \dots + fa d^p \sqrt{\varphi a} \end{aligned} \quad (20)$$

$$a = a, \quad a', \quad a'', \dots$$

а кладучи :

$$p = 0, \quad 1, \quad 2, \dots \mu$$

$$p = 0, \quad 1, \quad 2, \dots \mu'$$

$$p = 0, \quad 1, \quad 2, \dots \mu'' \quad \text{і т. д.}$$

дістанемо рівняння потрібні до визначення e , $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, f , $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, і т. д. Щоби найти k , k' , k'' , і A , утворім:

$$\frac{dN}{Ndx} = \frac{\mu}{x-a} + \frac{\mu'}{x-a'} + \frac{\mu''}{x-a''} + \frac{\mu'''}{x-a'''} + \dots$$

$$\frac{dN}{Ndx} = \frac{h + h^{(1)}x + h^{(2)}x^2 + h^{(3)}x^3 + \dots + h^{(m-1)}x^{m-1}}{1 + l^{(1)}x + l^{(2)}x^2 + l^{(3)}x^3 + \dots + l^{(m-1)}x^{m-1}} = \frac{t}{S}$$

а :

$$\frac{M}{N} = \frac{A \left(2 \frac{dP}{Qdx} S - \frac{PT}{Q} \right)}{S} = \frac{k + k^{(1)}x + k^{(2)}x^2 + \dots + k^{(m-1)}x^{m-1} + x^m}{S}$$

а з відси:

$$k + k^{(1)}x + k^{(2)}x^2 + \dots + k^{(m-1)}x^{m-1} + x^m = A \frac{2 \frac{dP}{dx} S - Pt}{Q};$$

для $x = a$ буде:

$$k + k^{(1)}a + k^{(2)}a^2 + k^{(3)}a^3 + \dots + a^m = -i\mu A \sqrt{\varphi} \psi(a) \quad (21)$$

де $\psi(x) = (x - a')(x - a'')(x - a''') \dots$

для $x = a$, a' , a'' , $a^{(m-1)}$.

Через се дістанемо з (21) m рівнянь на визначені: k , $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, $k^{(m-1)}$ при помочи A , a , a' , a'' , a^{m-1} , а на A найдемо вартість:

$$A = - \frac{1}{(\mu a + \mu' a' + \mu'' a'' + \dots) f^{(n+2)} + 2f^{(n+1)}}.$$

Коли $\mu = \mu' = \mu'' = \dots = \mu^{(m-1)} = 1$, рівняння остануть ті самі, а $m = 2n + 4$.

Возьмім $n = 0$ і щоби найти сочинники, покладім:

$$R = (x - p)(x - p')(x - p'')(x - p''')$$

а в рівняннях:

$$P = \sqrt{R + CS}, \quad S = 1 + l^{(1)}x + l^{(2)}x^2 + l^{(3)}x^3 + x^4 = \Theta x$$

положім $x = p$, p' , p'' , p''' , то на підставі (19) дістаємо чотири рівняня:

$$f + p f^{(1)} + p^2 f^{(2)} = \sqrt{C} \sqrt{(\Theta p)} \quad p = p, p', p'', p'''$$

а усуваючи з тих рівнянь f , $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, дістанемо рівняне:

$$\frac{\sqrt{(p-a)(p-a')(p-a'')(p-a''')}}{(p-p')(p-p'')(p-p''')} + \frac{\sqrt{(p'-a)(p'-a')(p'-a'')(p'-a''')}}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')} +$$

$$+ \frac{\sqrt{(p''-a)(p''-a')(p''-a'')(p''-a''')}}{(p''-p)(p''-p'')(p''-p''')} + \frac{\sqrt{(p'''-a)(p'''-a')(p'''-a'')(p'''-a''')}}{(p'''-p)(p'''-p'')(p'''-p''')} = 0$$

котре вказує, які відносини мусять заходити, щоби сповнилось заложенє поданє в заголовку.

Перейдїм другі частні случаї.

1) $m=2$, $n=0$.

Се мож сповнити кладучи:

$$\alpha) P^2 - R = C(x-a)(x-a')^3$$

$$\beta) P^2 - R = C(x-a)^2(x-a')^2$$

$\alpha)$ Наколи $P^2 - R = C(x-a)(x-a')^3$, то з рівнянь (19) і (20) вийдуть вартости на f , $f^{(1)}$; $f^{(2)}$, а на відношенє між a і a' дістанемо:

$$\sqrt{\varphi a} - \sqrt{\varphi a'} - \frac{1}{2}(a-a') \frac{\varphi'(a')}{\sqrt{\varphi a'}} + \frac{1}{8}(a-a')^2 \cdot \frac{2\varphi a' \varphi''(a')^2}{\varphi a' \sqrt{\varphi a'}} = 0$$

$$A = - \frac{1}{(a+3a')f^{(2)} + 2f^{(1)}}$$

$$\beta) \text{ Коли } P^2 - R = C(x-a)^2(x-a')^2$$

то підставляючи вартости за f , $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ і A знайдені з рівняня (20) в вираженях на k і k' дістанемо:

$$\frac{k+k'x+x^2}{(x-a)(x-a')} = 1 + \frac{2b+2b'x}{(x-a)(x-a')},$$

де:

$$b = \frac{a' \sqrt{\varphi a} + a \sqrt{\varphi a'}}{\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}} + \frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}}, \quad b' = \frac{\sqrt{\varphi a} + \sqrt{\varphi a'}}{\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}} + \frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}}$$

Отже інтеграл виразить ся:

$$\int \frac{dx}{\varphi(x)} = - \int \frac{(2b+2b'x)}{(x-a)(x-a')} \frac{dx}{\sqrt{\varphi x}} + A \log \frac{P + \sqrt{\varphi x}}{P - \sqrt{\varphi x}}$$

а відношенє поміж a і a' буде:

$$a' = \frac{(pp' - p''p''')a + (p+p')p''p''' - (p''+p''')pp'}{(p+p' - p'' - p''') - pp' + p''p'''}$$

2) Для $m=1$ буде:

$$P^2 - Q^2R = C(x-a)^{2n+4}$$

$$\int \frac{x+k}{(x-a)} \frac{dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

k виразить ся безпосередно з рівняня (21) $k = -a - \mu A \sqrt{\varphi a}$, а величини A , a , f , $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, e , $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, і т. д. найде ся при помочи (20).

Підставивши вартість за k в повисшім інтегралі одержимо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \mu A \sqrt{\varphi a} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

В той спосіб найде ся всі інтеграли виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, які мож спровадити на інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ при помочи функції льогаритмічної виду $A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$.

З цілого сего уступу бачимо, що коли заходить рівняне

$$\int \frac{x^m + k^{(m-1)}x^{m-1} + k^{(m-2)}x^{m-2} + \dots + k^{(1)}x + k}{(x-a)(x-a')(x-a'') \dots (x-a^{(m-1)})} \frac{dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{P+R\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

то поміж сочинниками a , a' , a'' , $a^{(m-1)}$, k , k' , $k^{(m-1)}$ буде істнувати $(m+1)$ рівнянь, значить буде мож $m+1$ з поміж тих величин вибрати довільно і при їх помочи означити прочі. Звідси виходить, що можна положити:

$$\frac{x^m + k^{(m-1)}x^{m-1} + k^{(m-2)}x^{m-2} + \dots + k^{(1)}x + k}{(x-a)(x-a') \dots (x-a^{(m-1)})} =$$

$$= \frac{x^m + k_1^{(n-1)}x^{n-1} + \dots + k_1^{(1)}x + k_1}{(x-a)(x-a') \dots (x-a^{(n-1)})} + \frac{L}{x-c} + \frac{L'}{x-c'} + \dots + \frac{L^{(n-1)}}{x-c^{(n-1)}}$$

де $k_1^{(n-1)}$, $k_1^{(n-2)}$, $k_1^{(1)}$, k_1 , a , a' , a'' , $a^{(n-1)}$ суть які-небудь.

Отже інтеграл

$$\int \frac{x^n + k_1^{(n-1)}x^{n-1} + \dots + k_1^{(1)}x + k_1}{(x-a)(x-a') \dots (x-a^{(n-1)})} \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

мож виразити через n інтегралів виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$. Так само видно, що можна інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ виразити че-

рез n інтегралів виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, з поміж котрих $(n-1)$ є довільних зі згляду на a .

В) Найдти всі інтеграли виду $\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{R}}$, що дадуться виразити при помочи функції $A \log \left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}} \right)$.

Позаяк
$$\int \frac{(x-k)dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

то ріжничка
$$x+k = \frac{M}{N}$$

а з сего виходить, що $N=c=\text{const.}$

З взорів:

$$M = \frac{A \left(2N \frac{dP}{dx} - P \frac{dN}{dx} \right)}{Q}$$

$$N = P^2 - Q^2 R \quad \text{дістанемо:}$$

$$c(x+k) = 2Ac \frac{dP}{dx}, \quad c = P^2 - Q^2 R.$$

З рівнянь тих мож винайти k і A , наколи P і Q суть відомі. Принявши $c=1$, положім в наших рівняннях:

$$P = f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^2 + \dots + f^{(n+2)}x^{n+2}$$

$$Q = e + e^{(1)}x + e^{(2)}x^2 + \dots + e^{(n)}x^n$$

то дістанемо на A і k вартости:

$$A = \frac{e^{(n)}}{(2n+4)f^{(n+2)}}, \quad k = \frac{f^{(1)}e^{(n)}}{(n+2)e^{f^{(n+2)}}}$$

Що до вартостей P і Q , то їх дістанемо з рівняня:

$$P^2 - Q^2 R = 1.$$

Іменно, коли за P і Q підставимо повнєші вираження, дістанемо:

$$(f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^2 + \dots + f^{(n+2)}x^{n+2})^2 - (e + e^{(1)}x + e^{(2)}x^2 + \dots + e^{(n)}x^n)^2 (\alpha + \beta x + \dots + \varepsilon x^4) = 1. \quad (22)$$

Розвинувши се і порівнявши сочинники, дістанемо $(2n+5)$ рівнянь на означене $(2n+4)$ сочинників: $f, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(2n+2)}, e, e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$, значить ся, що понад се дістанемо ще відношене поміж $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$. Сочинник при x^{2n} буде: $f^{(n+2)} - \varepsilon e^{(n)} = 0$, а через се вартости на A і k перейдуть на:

$$A = \frac{1}{(2n+4)\sqrt{\varepsilon}}, \quad k = \frac{1}{(n+2)\sqrt{\varepsilon}} \frac{f^{(1)}}{e}. \quad (23)$$

Є ту лиш недогідність рахунку, а то та, що рівняня, які вийдуть з порівняня сочинників в (22), не суть лійнійні. Але рівняня ті мож заступити системою рівнянь лійнійних в слідоющий спосіб: Коли в рівняню:

$$P^2 - Q^2 R = 1$$

місто x положимо $\frac{1}{y}$, одержимо рівняне виду:

$$(Fy)^2 - (fy)^2 \varphi(y) = y^{2n+4}$$

котре для $y = 0$ перейде на:

$$Fy = fy \sqrt{\varphi y}$$

а в нїм:

$$F(y) = fy^{2n+2} + f^{(1)}y^{n+1} + \dots + f^{(n+2)}$$

$$f(y) = ey^n + e^{(1)}y^{n-1} + \dots + e^{(n)}$$

$$\varphi(y) = \alpha y^4 + \beta y^3 + \gamma y^2 + \delta y + \varepsilon$$

Зріжничкувавши рівняне $Fy = fy\sqrt{\varphi y}$ $2n+3$ разів дістанемо для $y = 0$ по підставленю вартостей:

$$f^{(n+2)} = c e^{(n)}$$

$$f^{(n+1)} = c e^{(n-1)} + c^{(1)} e^{(n)}$$

$$f^{(n)} = c e^{(n-2)} + c^{(1)} e^{(n-1)} + \frac{1}{2} c^{(2)} e^{(n)}$$

(24)

$$f^{(2)} = c e + c^{(1)} e^{(1)} + \frac{c^{(2)}}{2} e^{(2)} + \frac{c^{(3)}}{2.3} e^{(3)} + \dots + \frac{c^{(n)}}{1.2 \dots n} e^{(n)}$$

$$f^{(1)} = c^{(1)} e + \frac{c^{(2)}}{2} e^{(1)} + \frac{c^{(3)}}{2.3} e^{(2)} + \dots + \frac{c^{(n+1)}}{1.2.3 \dots (n+1)} e^{(n+1)}$$

$$f = \frac{c^{(2)}}{2} e + \frac{c^{(3)}}{2.3} e^{(2)} + \frac{c^{(4)}}{2.3.4} e^{(3)} + \dots + \frac{c^{(n+2)}}{1.2.3 \dots (n+3)} e^{(n+1)}$$

$$0 = \frac{c^{(3)}}{2.3} e + \frac{c^{(4)}}{2.3.4} e^{(1)} + \frac{c^{(5)}}{2.3.4.5} e^{(2)} + \dots + \frac{c^{(n+3)}}{1.2.3 \dots (n+3)} e^{(n)}$$

$$0 = \frac{c^{(4)}}{2.3.4} e + \frac{c^{(5)}}{2.3.4.5} e^{(1)} + \dots + \frac{c^{(n+4)}}{1.2.3 \dots (n+4)} e^{(n)}$$

$$0 = \frac{c^{(n+3)}}{2.3 \dots (n+3)} e + \frac{c^{(n+4)}}{2.3 \dots (n+4)} e^{(1)} + \dots + \frac{c^{(2n+3)}}{1.2.3 \dots (2n+3)} e^{(n)}$$

де в сочинники c , $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, і т. д. вийшли крім c ще α , β , γ , δ , ε . З $n+1$ послідних з поміж тих рівнянь виразимо $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(n)}$

при помочи e , а крім сего дістанемо відношене поміж $c^{(3)}, c^{(4)}, \dots$ і т. д. Перших $(n+2)$ рівнянь дасть знова $f, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n+2)}$ виражені при помочи e . Само e є довільне і в висліді не буде приходити. Коли положимо $k=0$, то і $f^{(1)}=0$, а з відси дістанемо ще друге відношене поміж $c^{(1)}, c^{(2)}, \dots$ і т. д. і тоді побачимо що:

$$\text{Інтеграл} \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}}$$

дасть ся виразити при помочи логаритмів все, наколи поміж $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, заходять два відношеня, які дістанемо, коли вилімінуємо з $n+1$ з поміж (20) і з $f^{(1)}=0$ величини $e, e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$. (Ограничене $k=0$ не впливає на загальність проблему, бо вистане в висліді положити $x=y+k$, а дістанемо той сам інтеграл, як колиб не були закладали $k=0$).

І так пр. для $n=0$ того відношене поміж $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ представить ся:

$$\gamma = \frac{2\varepsilon\beta}{\delta} + \frac{\delta^2}{4\varepsilon}.$$

Пр.: $n=1$;

можна положити $\varepsilon=1, \beta=-\alpha$, тоді з рівнянь (20) вийде: $\delta=2, \gamma=3$, а (яко довільне) возьмемо $=2$, то дальше вийде: $e^{(1)}=1, f^{(3)}=1, f^{(2)}=3, f^{(1)}=0, f=-\frac{\alpha}{2}-2, k=0, A=\frac{1}{6}$

отже:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}} = \frac{1}{6} \log \left(\frac{x^3+3x^2-2-\frac{\alpha}{2}+(x+2)\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}}{x^3+3x^2-2-\frac{\alpha}{2}-(x-2)\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}} \right)$$

Рівняне: $P^2-1=Q^2R$ можна переробити:

$$(P+1)(P-1)=Q^2R=P'^2Q'^2R''.$$

Положім ту:

$$Q=P'Q', \quad R=R'R'',$$

то дістанемо:

$$P+1=P'^2R'$$

$$P-1=P'^2R''$$

а з відси:

$$2=P'^2R'-Q'^2R''$$

(25)

А то є простійше рівнянє, чим $P^2 - Q^2 R = 1$. Пожиток з сего рівняня побачимо.

Положїм:

$$R' = x^2 + 2qx + p, \quad R'' = x^2 + 2q'x + p'$$

а P' і Q' возьмїм постійні, то дістанемо через порівнянє сочинників в (25) по підставленю вартостей за R' і R''

$$P = \frac{2x^2 + 4qx + p + p'}{p - p'}, \quad Q = \frac{2}{p - p'}, \quad k = q, \quad A = \frac{1}{4}.$$

А інтеграл виразить ся:

$$\int \frac{(x+q)dx}{\sqrt{(x^2+2qx+p)(x^2+2q'x+p')}} = \frac{1}{4} \log \left(\frac{2x^2+4qx+p+p'+2\sqrt{R}}{2x^2+4qx+p+p'-2\sqrt{R}} \right)$$

Є ще і другий спосіб розв'язаня рівняня:

$$P^2 - Q^2 R = 1 \quad (26)$$

а є він слїдуючий:

$$\text{Поставмо:} \quad R = r^2 + s,$$

де r є степєня другого, а s першого, то:

$$P^2 - Q^2 r - Q^2 s = 1.$$

Перший сочинник в P^2 і в $Q^2 r$ мусить бути той сам, отже можна положити:

$$P = Qr + Q_1$$

де Q_1 буде степєня $n-1$, наколи Q є степєня n , а наше рівнянє перейде на:

$$Q_1^2 + 2QQ_1 - Q^2 s = 1.$$

А коли v є найбільшою функцією цілковитою, що містить ся в $\frac{r}{s}$, тоді:

$$r = sv + u,$$

де u є постійне.

Через се дістанемо:

$$Q_1^2 + 2QQ_1 u + Qs(2vQ_1 - Q) = 1$$

або кладучи:

$$Q = 2vQ_1 + Q_2$$

$$s_1 = 1 + 4uv, \quad r_1 = r - 2u$$

дістанемо місто рівняня (26):

$$s_1 Q_1^2 - 2r_1 Q_1 Q_2 - sQ_2^2 = 0$$

А стосуючи до сего рівняня на той сам лад і дальші підста-
влення виду:

$$s_m = s_{m-2} + 4u_{m-1}v_{m-1} \quad (27)$$

$$r_m = r_{m-1} - 2u_{m-1} \quad (28)$$

$$r_m = s_m v_m + u_m \quad (29)$$

$$Q_m = 2v_m Q_{m+1} + Q_{m+2}$$

де Q_{m+2} є степеия $n - m - 2$, дійдемо до рівняня:

$$s_n Q_n^2 = (-1)^{n+1}$$

де Q_n буде величиною постійною, а тим самим і s_n буде постійне.
А то значить, що коли $P^2 - Q^2 R = 1$ дасть ся розвязати при по-
мочи функцій цілковитих, тоді одна з поміж величин:

$$c, s_1, s_2, s_3, \dots$$

є постійною і на відворот. А коли приміром $s_n = \text{const}$, тоді P є
степеия $n + 2$, а Q степеия n . Отже треба по черзі класти $s, s_1,$
 $s_2, \dots = \text{const}$, щоби найти всі вартости R .

З рівнянь (27), (28), (29), виходять слідуючі прикмети величин
 r, s, u, v для $s_n = \text{const}$:

$$r_{n-k} = r_k, \quad s_{n-k} = s_{k-1} u^{\pm 1}, \quad v_{n-k} = v_{k-1} u^{\mp 1}, \quad u_{n-k} = -u_{k-1}.$$

Для n непаристого $= 2\alpha + 1$ дістанемо кладучи $k = \alpha + 1$:

$$u_\alpha = 0,$$

а для n паристого $= 2\alpha$ дістанемо:

$$u_{\alpha-1} + u_\alpha = 0.$$

То значить, що коли $P^2 - Q^2 R = 1$ дасть ся розвязати, а P
є степеия непаристого, тоді $u_\alpha = 0$, а коли P є степеия парис-
того, тоді $u_{\alpha-1} + u_\alpha = 0$ і на відворот: $u_\alpha = 0$ в разі непари-
стого степеия P , а $u_{\alpha-1} + u_\alpha = 0$ в разі P паристого суть умови-
нами потрібними і достаточними до розвязання рівняня $P^2 - Q^2 R = 1$.

З взорів перетворюючих (трансформацийних)

$$Q_m = 2v_m Q_{m+1} + Q_{m+2}$$

$$Q = 2vQ_1 + Q_2, \quad P = rQ + Q_1$$

одержимо $\frac{P}{Q}$ в виді дроба тяглого:

$$\frac{P}{Q} = r + \frac{1}{2v} + \frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_2} + \dots + \frac{1}{2v_{n-2}} + \frac{1}{2v_{n-1}}$$

а збиваючи се на дроб звичайний одержимо P і Q .

$\sqrt{R}$ дістанемо кладучи в $\frac{P}{Q} = \sqrt{R} \quad n = \infty$

$$\sqrt{R} = r + \frac{1}{2v} + \frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_2} + \dots \text{in inf.}$$

На случай коли $P^2 - Q^2 R = 1$ дасть ся розвязати, дроб сей буде періодичний.

Щоби означити величини v_m , u_m , s_m і r_m для всякої вартости m , положім:

$$r_m = x^2 + ax + b_m, \quad s_m = c_m + p_m x, \quad v_m = (g_m + x) \frac{1}{p_m}.$$

Коли ті вартости підставимо в (27), (28), (29), дістанемо через порівнянє сочинників рівняня, з котрих поступенно найдемо c_m , p_m , b_m , g_m , u_m . — Так само мож ті величини дістати, зіставляючи названі рівняня з рівнянем:

$$(c_{m-1} + p_{m-1} x)(c_m + p_m x) + (x^2 + ax + b_m)^2 = (x^2 + ax + b)^2 + c + px.$$

Тут дістанемо ще відношеня:

$$c_{m-1} c_m = c + b^2 - b_m^2, \quad p_{m-1} p_m = 2(b - b_m) = 2q_m$$

де $(b - b_m) = q_m.$

$$c_{m-1} p_m + c_m p_{m-1} = p + 2a(b - b_m)$$

а з відси по перерібіці:

$$q_m = \frac{\frac{1}{2} p^2 + (ap - 2c)q_{m-1} - q_{m-2} q_{m-1}^2}{q_{m-1}^2}$$

$$\frac{c_m}{p_m} = \frac{c + q_m q_{m-1}}{p}, \quad q_m = a - \frac{c_m}{p_m}, \quad p_m = \frac{2q_m}{2q_{m-1}} p_{m-2}$$

маємо: $q_m = b - b_m,$

отже: $q = b - b = 0, \quad q_1 = b - b_1$

з відси: $b_m = -b_{m-1} + 2 \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}} \left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}} \right)$

а для: $m = 1 \quad b_1 = -b + 2 \frac{c}{p} \left(a - \frac{c}{p} \right)$

$$q_1 = 2 \frac{bp^2 - ap + c^2}{p^2}$$

Застосуємо се до інтеграла:

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}}$$

Для упрощення можна положити $c=0$ і будемо мати:

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}} = \frac{1}{2n+4} \log \left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}} \right)$$

а узгляднивши $P^2 - Q^2R = 1$

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}} = \frac{1}{n+2} \log (P + Q\sqrt{R})$$

Щоби се рівняне було можливе, потреба перше всего, щоби:

$$P^2 - Q^2R = 1$$

дало ся розв'язати. Се станесь, наколи $s_n = \text{const}$, а що $s_n = c_n + p_n x$, проте мусить бути:

$$p_n = 0.$$

Коли та умова $p_n = 0$ буде сповнена, то все буде мож визначити k так, що $\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}}$ буде рівне $\frac{1}{n+2} \log (P + Q\sqrt{R})$.

Вартість k мож буде винайти, так як шукало ся єї повніше:

$$k = \frac{1}{n+2} a + \frac{f^{(1)}}{e}. \text{ Ту того } k \text{ буде мати вартість:}$$

$$k = \frac{1}{n+2} a + \frac{1}{n+2} \left(\frac{c_1}{p_1} + \frac{c_2}{p_2} + \dots + \frac{c_{n-2}}{p_{n-2}} \right)$$

Позаяк умова $p_n = 0$ є рівноважна з иньшою, іменно $q_n = 0$ або $q_{n-k} = q_{k-1}$, то збираючи все то разом дістанемо слідуєче правило, щоби найти всі інтеграли виду:

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px+c}}$$

які дадуть ся представити функцією логаритмічною:

$$2A \log [P + Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px+c}]$$

іменно:

Обчислює ся всі величини $q_2, q_3, q_4, \dots$ після взора:

$$q_m = \frac{\frac{1}{2} p^2 + (ap - 2c) q_{m-1} - q_{m-2} q_{m-1}^2}{q_{m-1}^2}$$

закладаючи:

$$q = 0, \quad q_1 = 2 \frac{bp^2 - ap + c^2}{p^2}$$

Відтак кладе ся по черзі:

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0, \dots, \quad q_n = 0$$

або, що на одно вийде:

$$q_{n-k} = q_{k-1}.$$

Тоді всі вартости, які R може мати, одержимо позбуваючись з тих рівнянь і рівняня $R=0$ одної з поміж a, p, b, c . Найшовши R найдемо k :

$$k = \frac{1}{n+2} a + \frac{1}{n+2} \left(\frac{c}{p} + \frac{c_1}{p_1} + \dots + \frac{c_{n-1}}{p_{n-1}} \right)$$

де:

$$\frac{c_m}{p_m} = \frac{c + q_m q_{m-1}}{p}.$$

Дальше $\frac{P}{Q}$ представить ся:

$$\frac{P}{Q} = x^2 + ax + b + \frac{1}{x+g} + \frac{1}{p} + \frac{1}{x+g_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{x+g_2} + \dots + \frac{1}{x+g_{n-1}} + \frac{1}{p_{n-1}}$$

де:

$$g_m = a - \frac{c + q_m q_{m-1}}{p}.$$

А з відси дістанемо P і Q , коли сей дроб тяглий замінимо на дроб звичайний, памятаючи що $q_{n-k} = q_{k-1}$. Найшовши се маємо наконєць

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}} = \frac{1}{n+2} \log [P + Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}]$$

Г) Найти всі інтеграли виду $\int \frac{x+k}{x+l} \frac{dx}{\sqrt{R}}$, які дадуть ся виразити через функцію логаритмічну

$A \log \left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}} \right)$. Єсть се вправді частний случай заключений в проблемі (Б), та для его ваги в теорії функцій еліптичних розв'яземо его окремо при помочи проблему попередного.

Вийдемо з рівняня:

$$\int \frac{(y+k')dy}{\sqrt{R'}} = A' \log \left(\frac{P'+Q'\sqrt{R'}}{P'-Q'\sqrt{R'}} \right)$$

і коли в нїм за y підставимо $\frac{1}{x+1}$, дістанемо

$$-k' \int \frac{(x+k)dx}{(x+1)\sqrt{R}} = A' \log \left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}} \right)$$

де $k' = \frac{1}{k-1}$, а P, Q, R означають вартости, на які перейде P', Q', R' по підставленю $y = \frac{1}{x+1}$.

Вартість на l дістанемо з порівняня сочиників в рівнянях:

$$R = (1 + (x+1)a + (x+1)^2 b) + p(x+1)^3 + e(x+1)^4$$

$$R = (b^2 + c)(x^4 + \delta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha)$$

іменно l виразить ся при помочи α, β, γ і δ , а наш інтеграл представить ся в виді:

$$\int \frac{(x+k)}{(x+1)\sqrt{(x^4 + \delta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha)}} = A \sqrt{b^2+c} \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

де: $A = -\frac{A'}{k'}$

а звідси:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = (k-1) \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{R}} = A \sqrt{b^2+c} \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

або:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{R}} = \frac{1}{1-k} \int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{A\sqrt{b^2+c}}{1-k} \log \left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}} \right)$$

І в той спосіб дістанемо всі інтеграли виду

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

які дадуться виразити через інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ і функцію логаритмічну $A \log \left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}} \right)$.

Д) Відношене поміж інтегралами виду:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

Загально неможливо є виразити інтеграл $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ через інтеграли $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$. Але в границях, іменно для таких x , котрі дають $R=0$, все мож інтеграл $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ виразити через такі інтеграли.

І так, коли інтеграл:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

зріжничкуємо зі згляду на a і $\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}$ зведемо на інтеграл $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, дістанемо узглядняючи таке $x = r$, що для него $R = f(x) = 0$, таке рівняне:

$$\begin{aligned} & \sqrt{fa} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}} - \sqrt{fx} \int \frac{da}{(x-a)\sqrt{fa}} = \\ & = \int \frac{da}{\sqrt{fa}} \int \frac{(\frac{1}{2} \delta x + \epsilon x^2) dx}{\sqrt{fx}} - \int \frac{dx}{\sqrt{fx}} \int \frac{(\frac{1}{2} \delta a + \epsilon a^2) da}{\sqrt{fa}} \end{aligned}$$

Маємо в той спосіб різницю двох інтегралів $\sqrt{fa} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}$ і $\sqrt{fx} \int \frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}}$ виражену через інтеграли виду:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{fy}} \text{ i } \int \frac{(\frac{1}{2}dy + \varepsilon y^2)dx}{\sqrt{fy}}.$$

Наколи інтеграл $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}$ возьмемо в границях від $x = r$ до $x = r_1$, де r_1 також є вартістю, що сповняє $fx = 0$, дістанемо:

$$\begin{aligned} & \sqrt{fa} \int_r^{r_1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}} = \\ &= \int_r \frac{da}{\sqrt{fa}} \int_r^{r_1} \frac{(\frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2)dx}{\sqrt{fx}} - \int_r^{r_1} \frac{dx}{\sqrt{fx}} \int_r \frac{(\frac{1}{2}\delta\alpha + \varepsilon\alpha^2)da}{\sqrt{fa}} \end{aligned}$$

Взір сей має важне значіне в теорії функцій еліптичних.

Можна найти еще загальнійше відношене межи інтегралами означеними в слідуючий спосіб:

Най s означає якунебудь функцію логаритмічну виду:

$$A \log \left(\frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}} \right) + A' \log \left(\frac{P' + Q'\sqrt{R'}}{P' - Q'\sqrt{R'}} \right) + \dots$$

то:

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{R}} \left(B + Cx + \frac{L}{x-a} + \frac{L'}{x-a'} + \dots \right)$$

а з відти:

$$s = \int \left(\frac{B + Cx}{\sqrt{R}} \right) dx + L \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + L' \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} + \dots$$

а інтегруючи від $x = r$ до $x = r_1$ одержимо:

$$\begin{aligned} s' - s &= \int_r^{r_1} \frac{(B + Cx) dx}{\sqrt{R}} \\ &- \int_r^{r_1} \frac{dx}{\sqrt{fx}} \left[\frac{L}{\sqrt{fx}} \int_r \frac{(\frac{1}{2}\delta\alpha + \varepsilon\alpha^2) da}{\sqrt{fa}} + \frac{L'}{\sqrt{fa'}} \int_r \frac{(\frac{1}{2}\delta\alpha' + \varepsilon\alpha'^2)}{\sqrt{fa'}} + \dots \right] \\ &+ \int_r^{r_1} \frac{(\frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2) dx}{\sqrt{fx}} \left[\frac{L}{\sqrt{fa}} \int_r \frac{da}{\sqrt{fa}} + \frac{L'}{\sqrt{fa'}} \int_r \frac{da'}{\sqrt{fa'}} + \dots \right] \end{aligned}$$

Рівнянє се дає відношенє поміж системою інтегралів виду :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{fy}}, \int \frac{y dy}{\sqrt{fy}}, \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{fy}}.$$

Крім до тепер виведених відношень поміж функціями переступними, випроваджує автор такіж :

2. Відношеня для частної класи функцій переступних. (Oeuvres compl. II. p. 54).

І так, коли y є функцією x ($y = \psi x$) сповняючою рівнянє :

$$y f x + \varphi x \frac{dy}{dx} = 0,$$

тоді між функціями тими заходить буде відношенє :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\psi a} \int \frac{\psi x dx}{x - a} - \psi x \varphi x \int \frac{da}{(a - x) \varphi a \psi a} = \\ & = \sum \left((n+1) \alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1} \right) \int \frac{a^m da}{\varphi a \psi a} \int x^n \psi x dx \end{aligned}$$

де α і β суть сочинниками належачими до :

$$\psi x = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

$$f x = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots$$

Причїм треба зазначити, що інтеграли зі згляду на x належить брати від тої вартости x , яка зводить до зєра функцію ψx . φx , а зі згляду на a від тої вартости a , яка зводить до зєра функцію $\frac{1}{\psi a}$.

Наколи $\psi x = \frac{1}{\sqrt{\varphi x}}$, тоді повисше відношенє переходить на :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\varphi a} \int \frac{dx}{(x - a) \sqrt{\varphi x}} - \sqrt{\varphi x} \int \frac{da}{(a - x) \sqrt{\varphi a}} = \\ & = \sum \frac{1}{2} (n - m) \alpha_{m+n+2} \int \frac{x^n dx}{\sqrt{\varphi x}} \int \frac{a^m da}{\sqrt{\varphi a}} \end{aligned}$$

а для відомого нам вже виду функції φx :

$$\varphi x = (1 - x^2)(1 - c^2 x^2)$$

дістанемо відношенє:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} - \\ & - \sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)} \int \frac{da}{(a-x)\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}} \\ & = c^2 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} \int \frac{da}{\sqrt{(1-a^2)(1-a^2c^2)}} - \\ & - c^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} \cdot \int \frac{a^2 da}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}} \end{aligned}$$

котре служить як точка вихідна до вивпроваджування прикмет функцій еліптичних. — Бєть се твердженє Абеля найбільше основне в цілій теорії інтегралів альгебраїчних.

3. Як виразити суму функцій переступних $\int f(yx) dx$, де y є функцією x , через означене число функцій того самого виду, показує Абель в уступі під заголовком: Порівнанє функцій переступних. (Oeuvres compl. II. p. 66).

Коли y є функцією альгебраїчною, означеною рівнянем:

$$0 = \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \dots + \alpha_m y^m \quad (1)$$

де α суть функціями цілковитими x :

а так само:

$$0 = q + q_1 y + q_2 y^2 + \dots + q_{m-1} y^{m-1} \quad (2)$$

де q суть функціями цілковитими x і якогось числа иньших змінних $a, a_1, a_2, \dots$, де ті a суть сочинниками при різних степенях x в функціях $q, q_1, q_2, \dots$. З обох тих рівнянь можна y виразити вимірно при помочи $x, a, a_1, a_2, \dots$. Нехай r буде тою функцією, значить $y = r$, то підставивши ту вартість за y в одно з обох рівнянь даних, дістанемо:

$$s = 0$$

де s є функцією цілковитою $x, a, a_1, a_2, \dots$.

Зріжничкувавши єго і помноживши через $f(yx) = f(rx)$, дістанемо:

$$f(yx) dx = \varphi(x) da + \varphi_1(x) da_1 + \varphi_2(x) da_2 + \dots \quad (3)$$

де $\varphi(x), \varphi_1(x), \dots$ суть функціями вимірними $x, a, a_1, a_2, \dots$.

Наколи $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ суть коріннями рівняння $s = 0$, то підставивши їх по черзі в останнє рівнянє, дістанемо суму:

$$f(y_1 x_1) dx_1 + f(y_2 x_2) dx_2 + \dots + f(y_n x_n) dx_n = R da + R_1 da_1 + \dots$$

де R, R_1, R_2 , суть функціями вимірними а a_1, a_2 виду:

$$R_m = \varphi_m(x_n) + \varphi_m(x_{n-1}) + \dots + \varphi_m(x_2) + \varphi_m(x_1).$$

Позаяк ліва сторона повисшого рівняння різничкового є цілко-витою різничкою, то і права сторона також мусить дати ся з'інте-грувати:

$$\int R da + \int R_1 da_1 + \int R_2 da_2 + \dots = \varphi, \text{ де } \varphi \text{ є функцією альге-браїчною і логаритмічною величин } a, a_1, a_2, \dots.$$

Назвавши ще $\int f(yx)dx$ через $\psi(x)$

$$\text{дістанемо: } \psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \dots + \psi(x_n) = C + \varphi. \quad (4)$$

При помочи сего рівняння можна виразити суму якогонебудь числа функцій ψx через означене число функцій того самого виду.

Величини $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ суть функціями змінних неза-висимих $a, a_1, a_2, \dots$. Ясною річею є, що закладаючи число тих змінних рівне μ , мож уважати число μ з поміж величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ яко незалежними, а прочі $n - \mu$ яко їх функцій. Функції ті мож вишукати.

Положим в рівнянню (4) $n = \mu + \nu$, а $x_{\mu+1} = c_1, x_{\mu+2} = c_2, \dots, x_n = c_\nu$, то оно перейде на:

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \dots + \psi(x_\mu) = C + \varphi$$

де $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ суть звязані між собою рівняннями:

$$\Theta(x_1) = 0, \Theta(x_2) = 0, \dots, \Theta(x_\mu) = 0$$

$$\Theta(c_1) = 0, \Theta(c_2) = 0, \dots, \Theta(c_\nu) = 0 \quad (5)$$

Колиж тепер покладемо $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \dots, x_\nu = x'_\nu$

$$a: \quad x'_{\nu+1} = \beta_1, x'_{\nu+2} = \beta_2, \dots, x'_\mu = \beta_{\mu-\nu},$$

$$\text{дістанемо: } C = -\varphi' + \psi(x'_1) + \psi(x'_2) + \dots + \psi(x'_\nu)$$

а:

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \dots + \psi(x_\mu) = \varphi - \varphi' + \psi(x'_1) + \psi(x'_2) + \dots + \psi(x'_\nu),$$

де $x'_1, x'_2, \dots, x'_\nu$ суть означені рівняннями:

$$\Theta(x'_1) = 0, \Theta(x'_2) = 0, \dots, \Theta(x'_\nu) = 0$$

$$\Theta(\beta_1) = 0, \Theta(\beta_2) = 0, \dots, \Theta(\beta_{\mu-\nu}) = 0$$

$$\Theta(c_1) = 0, \Theta(c_2) = 0, \dots, \Theta(c_\nu) = 0 \quad (6)$$

То коли s означимо через $\Theta_1(x)$, то буде також

$$\Theta_1(x') = 0, \quad \Theta_1(\beta x) = 0, \quad \Theta_1(sx) = 0,$$

позаяк $a, a_1, a_2, \dots, a_{\mu-1}$ суть визначені двома послідніми рядами рівнянь (6).

$$\begin{aligned} \text{Отже буде: } \Theta_1(x) = & (x-x_1')(x-x_2') \dots (x-x_{\nu}') \\ & \cdot (x-\beta_1)(x-\beta_2) \dots (x-\beta_{\mu-\nu}) \\ & \cdot (x-c_1)(x-c_2) \dots (x-c_{\nu}) \end{aligned}$$

а ділячи рівняне $\Theta_1(x) = 0$ через добуток:

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2) \dots (x-\beta_{\mu-\nu})(x-c_1)(x-c_2) \dots (x-c_{\nu})$$

дістанемо рівняне степеня ν , котрого корені будуть величинами:

$$x_1', x_2', \dots, x_{\nu}'.$$

А коли так визначені суть $x_1', x_2', \dots, x_{\nu}'$, яко функції $c_1, c_2, \dots, c_{\nu}$ то можна їх уважати яко змінні а визначені через (5). В той спосіб величин $x_1, x_2, \dots, x_{\mu}$ суть незалежні, а $x_1', x_2', \dots, x_{\mu}'$ стають функціями тих змінних.

V. Прочі розвідки Абеля належать до різних ділів математики, а вимінити з них належить слідуочі:

1. Про функцію переступну $\sum \left(\frac{1}{x} \right)$. (Oeuvres compl. p. 24

et 30). Функція $\sum \left(\frac{1}{x} \right)$ названа через Абеля Lx є першою функцією переступною, яка приходить в рахунку ріжничковім, є се функція такої самої ваги в рахунку ріжничковім як $\int \frac{dx}{x}$ в рахунку інтегральнім.

Автор зачинає представленням її в виді ряду і принявши що

(1)

$$L(a+x) = a + \beta x + \gamma x(x-1) + \delta x(x-1)(x-2) + \epsilon x(x-1)(x-2)(x-3) + \dots$$

находить через ріжничковане вартости на $a, \beta, \gamma, \dots$, через що $L(a+x)$ прийме вид:

(2)

$$L(a+x) = La + \frac{x}{a} - \frac{x(x-1)}{2a(a+1)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3a(a+1)(a+2)} - \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4a(a+1)(a+2)(a+3)} + \dots$$

Наколи за x возьмемо число ціле, тоді ряд сей буде мати скінчене число членів, а если будемо знали вартість $L(a)$, то будем знати так само і $L(a+n)$, де n є число ціле додатне.

І так, коли в взорі тім підставимо по черзі $x = 1, 2, 3$ і т. д., то знаючи вартість $L(a)$ для всіх величин на a , від $a = 1$ до $a = 2$, найдемо $L(a)$ для всіх прочих вартостей на a . [Позаяк функція

$\sum \left(\frac{1}{x} \right) = Lx$ має одну величину постійну довільну, то для якоїсь даної вартості на a буде мож за ню підставити яку небудь вартість функції $L(a)$, прим. $L(1) = 0$, тоді з нашого взора (2) дістанемо: $L(0) = -\infty$, $L(a) = -\infty$].

Щоби найти $L(a)$ від $a = 1$ до $a = 2$, треба взір (2) представити в відповіднім виді:

$$L(1+\omega) = \frac{\omega}{\omega+1} + (S_2-1)\omega - (S_3-1)\omega^2 + (S_4-1)\omega^3 - \dots$$

$$\text{де } S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots;$$

кладучи $-\omega$ на місце ω дістанемо (3)

$$L(1-\omega) = \frac{\omega}{\omega-1} - (S_2-1)\omega - (S_3-1)\omega^2 - (S_4-1)\omega^3 + \dots$$

а позаяк: $L(2-\omega) = L(1-\omega) + \frac{1}{1-\omega}$, то:

$$L(2-\omega) = 1 - (S_2-1)\omega - (S_3-1)\omega^2 - (S_4-1)\omega^3 - \dots$$

Взори (3) мають важне застосоване при обчисленю рядів. Бо позаяк $S\varphi(x) = \sum \varphi(x+1)$, то буде мож найти суму всяких рядів, котрих член загальний є φx , наколи знаємо $\sum \varphi x$.

Обчислім для приміру суму ряду гармонічного при помочи функції $L(x)$:

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} + \dots + \frac{a}{b+cx} = S \left(\frac{a}{b+cx} \right) = P$$

маємо $P = \sum \left(\frac{a}{b+c+cx} \right) = a \sum \left(\frac{1}{b+c+cx} \right)$.

Положім $b+c+cx = cy$, то $P = \frac{a}{c} \sum \left(\frac{1}{y} \right) = C + \frac{a}{c} L(y)$
 $P = C + \frac{a}{c} L \left(\frac{b+c}{c} + x \right)$. Щоби означити C , положім $x = 0$,
 тоді $P = \frac{a}{b}$, а з відся: $\frac{a}{b} = C + \frac{a}{c} L \left(\frac{b+c}{c} \right)$, отже:

$$P = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \left[L \left(\frac{b+c}{c} + x \right) - L \left(\frac{b+c}{c} \right) \right];$$

для $a=1$, $b=1$, $c=2$ буде:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{1+2x} = 1 + \frac{1}{2}L\left(x + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}L\left(\frac{3}{2}\right).$$

Функція $L(1+a)$ дасть ся представити при помочи інтегралу:

$$L(1+a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{x - 1} dx$$

кладучи $x^{a'}$ на місце x і називаючи $aa' = m$, дістанемо:

$$L\left(1 + \frac{m}{a'}\right) = a' \int_0^1 \frac{x^m - 1}{xa' - 1} xa'^{-1} dx$$

а взір сей говорить, що доки y є якою небудь величиною дійсною, то $L(y)$ дасть ся все виразити через функції альгебраїчні, логаритмічні і колові, бо інтеграл $\int \frac{x^m - 1}{xa' - 1} xa'^{-1} dx$ дасть ся для цілковитих вартостей a' і m представити при помочи функцій альгебраїчних, логаритмічних і колових.

Цікаві суть також деякі прикмети тої функції; і так:

$$L\left(\frac{1}{a}\right) + L\left(\frac{2}{a}\right) + L\left(\frac{3}{a}\right) + \dots + L\left(\frac{a-1}{a}\right) = a \log\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$2L(2a) = 2\log 2 + L(a) + L\left(a + \frac{1}{2}\right)$$

$$L(na) = \log n + \frac{1}{n} \left[L(a) + L\left(a + \frac{1}{n}\right) + \dots + L\left(a + \frac{n-1}{n}\right) \right]$$

і т. д.

Різничкуючи поступенно функцію $\sum\left(\frac{1}{a}\right)$ дістанемо:

$$\frac{d \sum\left(\frac{1}{a}\right)}{da} = \frac{\sum\left(d \frac{1}{a}\right)}{da} = - \sum \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{d^2 \sum \frac{1}{a}}{da^2} = \frac{\sum d^2 \left(\frac{1}{a}\right)}{da^2} = + 2 \sum \frac{1}{a^3}$$

$$\frac{d^n \sum \frac{1}{a}}{da^n} = \frac{\sum d^n \left(\frac{1}{a}\right)}{da^n} = \pm 2.3.4 \dots n \sum \frac{1}{a^{n+1}}$$

де знак $+$ буде, коли n паристе, а $-$, коли непаристе.

То і на відворот:

$$\sum \frac{1}{a^2} = \frac{d \sum \frac{1}{a}}{da}, \quad \sum \frac{1}{a^3} = \frac{d^2 \sum \frac{1}{a}}{da^2} \text{ і т. д.}$$

Ті всі функції переступні вишорядні мож представити при помочи інтегралів означених:

Було, що:

$$\sum \frac{1}{a} = La = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - 1}{x - 1} dx;$$

різничкуючи се зі згляду на a дістанемо:

$$\sum \frac{1}{a^2} = - \int_0^1 \frac{x^{a-1} \ln x}{x - 1} dx \quad \text{де } \ln x = \int \frac{dx}{x}$$

$$\sum \frac{1}{a^3} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{a-1} (\ln x)^2}{x - 1} dx \quad \text{і т. д.}$$

$$\sum \frac{1}{a^\alpha} = \pm \frac{1}{2.3. \dots \alpha} \int_0^1 \frac{x^{a-1} (\ln x)^{\alpha-1}}{x - 1} dx$$

або:

$$\sum \frac{1}{a^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{x^{a-1} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{\alpha-1}}{x - 1} dx \quad (\Gamma \text{ функція Euler'a})$$

найшовши сталу інтегрованя і вставивши в посліднім взорі одержимо:

$$\sum \frac{1}{a^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{x^{a-1} - 1}{x - 1} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{\alpha-1} dx$$

2. Інтеграл скінчений $\sum^n \varphi x$ виразити через інтеграл означений поодинокий. (Oeuvres compl. II. 45).

Після Parseval'a можна інтеграл скінчений $\sum^n \varphi x$ виразити через інтеграл означений подвійний.

Абель представляє той сам інтеграл $\sum^n \varphi x$ при помочи інтегралу означеного поодинокого.

Він надає функції φx вид:

$$\varphi x = \int e^{xv} f v. dv \quad (1)$$

де інтеграл береться поміж двома якимись границями v незалежними від x , fv означає функцію v залежну від виду φx .

Інтегруючи обі сторони для $\Delta x = 1$ дістанемо:

$$\Sigma \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{e^v - 1} dv$$

з додатком сталої інтегрування. А по n -кратнім інтегруванню одержимо:

$$\Sigma^n \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{(e^v - 1)^n} dx \quad (2)$$

з додатком:

$$C + C_1 + C_2 x^2 + \dots + C_{n-1} x^{n-1},$$

де C, C_1, C_2 , суть сталими інтегрування.

$\frac{1}{(e^v - 1)^n}$ дасть ся представити в виді:

$$\frac{1}{(e^v - 1)^n} = (-1)^{n-1} \left(A_{0,n} p + A_{1,n} \frac{dp}{dx} + A_{2,n} \frac{d^2 p}{dv^2} + \dots + A_{n-1,n} \frac{d^{n-1} p}{dv^{n-1}} \right).$$

Різничкуючи се рівняне одержимо взори на сочинники: $A_{0,n}, A_{1,n}$ і т. д.

$$A_{0,n} = 1, \quad A_{1,n} = \sum \frac{1}{n}, \quad A_{2,n} = \sum \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{n} \right),$$

$$A_{3,n} = \sum \left[\frac{1}{n} \sum \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$A_{n,n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \dots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1}, \quad A_{0,1} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}.$$

А що після Legendre'a (Exerc. de calc. int. Т. II. p. 189).

$$\frac{1}{e^v - 1} = \frac{1}{v} - \frac{1}{2} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt \sin dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

проте для n паристого

$$\frac{d^n p}{dv^n} = \frac{2 \cdot 3 \dots n}{v^{n+1}} - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n dt \cos vt}{e^{2\pi t} - 1}$$

для n непаристого будемо мати знак $-$ і $\sin vt$ місто $\cos vt$. Інтеграл $\int e^{vx} fv \sin vt dv$ найдемо кладучи в рівняню (1) за x раз $x + ti$, другий раз $x - ti$; дістанемо іменно:

$$\int e^{vx} \cdot \sin vt \cdot fv \cdot dv = \frac{\varphi(x+ti) - \varphi(x-ti)}{2i}$$

а так само:

$$\int e^{vx} \cdot \cos vt \cdot fv \cdot dv = \frac{\varphi(x+ti) + \varphi(x-ti)}{2}$$

узгляднвши при тім

$$\int \varphi x dx = \int e^{vx} fv \frac{dv}{v^3}$$

дістанемо по підставленю:

$$\begin{aligned} \sum^n \varphi x &= A_{n-1, n} \Gamma(n) \int \varphi x dx^n - A_{n-2, n} \Gamma(n-1) \int \varphi x dx^{n+1} + \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} \int \varphi x dx + (-1)^n \frac{1}{2} \varphi x \\ &+ 2(-1)^{n-1} \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{P \cdot dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(x+ti) - \varphi(x-ti)}{2i} + \\ &+ 2(-1)^{n-1} \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{Q \cdot dt}{e^{\pi t} - 1} \frac{\varphi(x+ti) + \varphi(x-ti)}{2} \end{aligned}$$

де: $P = A_{0, n} - A_{2, n} t^2 + A_{4, n} t^4 - \dots$

а: $Q = A_{1, n} - A_{3, n} t^3 + A_{5, n} t^5 - \dots$

Взором (3) представлений є інтеграл скінчений $\sum^n \varphi x$ при помочи інтеграла означеного поодинокого.

3. В розвідці:

Визначні прикмети функції $y = \varphi x$, означеної рівнянем:

$$fy \cdot dy - dx \sqrt{(a-y)(a_1-y)(a_2-y) \dots (a_m-y)} = 0$$

де fy означає якунебудь функцію y , що не стає ся зером ані безконечностию для $y = a, a_1, a_2, \dots, a_m$. (Oeuvres compl. II. 51), — доказує автор, що функція φx є функцією періодичною о періоді $2a$ означенім рівнянем:

$$\alpha = \int \frac{f(y) dy}{V\psi y}$$

де отже α означає вартість x відповідаючу вартості $y = a$.

$$\varphi(v) = \varphi(v + 2n\alpha + 2n_1\alpha_1 + 2n_2\alpha_2 + \dots + 2n_m\alpha_m)$$

$$\text{де} \quad n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m = 0$$

а де $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ і т. д. суть вартостями x для $y = a_1, a_2, \dots a_m$.

4. Теория фуніцій творячих (génératrice) і визначаючих (determinante). (Oeuvres compl. II. 77).

Бєли $\varphi(xyz)$ представляє якунебудь функцію змінних x, y, z , то мож найти функцію $f(u, v, p)$ таку, щоби:

$$\varphi(x, y, z) = \int e^{xu+yv+zp} f(u, v, p) du dv dp$$

число змінних може бути якєнебудь.

В рівняню тїм називає автор φ функцією творячою функції f і значить єї: $\varphi(x, y, z, \dots) = fgf(u, v, p, \dots)$, а f називає визначаючою функції φ і значить: $f(u, v, p, \dots) = D\varphi(x, y, z, \dots)$.

Возьмім функцію одної змінної:

$$\varphi x = \int e^{vx} f v \cdot dv$$

$$\varphi x = D\varphi x$$

$$f v = fg \cdot f v$$

так само:

$$\varphi_1 x = \int e^{vx} f_1 v dv$$

то:

$$\varphi x + \varphi_1 x = \int e^{vx} (f v + f_1 v) dv$$

отже:

$$D(\varphi x + \varphi_1 x) = f v + f_1 v$$

т. з.:

$$D(\varphi x + \varphi_1 x) = D\varphi x + D\varphi_1 x$$

так само:

$$D(\varphi x + \varphi_1 x + \varphi_2 x + \dots) = D\varphi x + D\varphi_1 x + D\varphi_2 x + \dots$$

а рівночасно:

$$fg \cdot (f v + f_1 v + f_2 v + \dots) = fg \cdot f v + fg \cdot f_1 v + fg \cdot f_2 v + \dots$$

Дальше випроваджує автор, що :

$$D \left(\frac{d^n \varphi v}{dx^n} \right) = v_n D \varphi v,$$

$$fg. (v^n f v) = \frac{d^n f x}{dx^n}$$

що :

$$D \left(\int \varphi x dx^n \right) = v^{-n} D \varphi x, \quad fg(v^{-n} f v) = \int \varphi x dx^n$$

Потім :

$$D(\Delta_\alpha^n \varphi x) = (e^{v\alpha} - 1)^n f v, \quad fg. [(e^{v\alpha} - 1)^n f v] = \Delta_\alpha^n \varphi x$$

$$D(\Sigma_\alpha^n (\varphi x)) = (e^{v\alpha} - 1)^{-n} f v, \quad fg. [(e^{v\alpha} - 1)^{-1} f v] = \Sigma_\alpha^n \varphi x$$

де α значить різницю x .

Бєлє возьмемо загально :

$$\delta(\varphi x) = A_{n, \alpha} \frac{d^n \varphi(x + \alpha)}{dx^n} + A_{n_1, \alpha_1} \frac{d^{n_1} \varphi(x + \alpha_1)}{dx^{n_1}} + \dots$$

то :

$$\delta(\varphi x) = \int e^{vx} \cdot f v (A_{n, \alpha} v^n \cdot e^{v\alpha} + A_{n_1, \alpha_1} v^{n_1} e^{v\alpha_1} + \dots) dx$$

отже :

$$D(\delta \varphi x) = f v \cdot (A_{n, \alpha} v^n e^{v\alpha} + A_{n_1, \alpha_1} v^{n_1} e^{v\alpha_1} + \dots).$$

Назвїм :

$$A_{n, \alpha} v^n e^{v\alpha} + A_{n_1, \alpha_1} v^{n_1} e^{v\alpha_1} + \dots = \psi(v)$$

тоді :

$$D(\delta \varphi x) = \psi(v) \cdot D \varphi x$$

а :

$$D(\delta \delta_1 \delta_2 \dots \varphi x) = \psi(v) \cdot \psi_1(v) \cdot \psi_2(v) \dots D \varphi x.$$

Теорія та є дуже придатна при розвиваню функцій на ряди.

Розвинім для приміру $\varphi(x + a)$ при помочи різничкових сочинників φx .

Визначаюча функції $\varphi(x + a)$ є рівна $e^{va} f v$, а функції $\frac{d^n \varphi x}{dx^n} = v^n \cdot f v$. Ходить о розвиненє e^{va} на вираженя виду $A_n v^n$, отже буде :

$$e^{va} = 1 + va + \frac{v^2}{1.2} a^2 + \frac{v^3}{1.2.3} a^3 + \dots + \frac{v^n}{1.2.3 \dots n} a^n + \dots$$

а:

$$e^{v\alpha} \cdot fv = fv + \alpha \cdot vfv + \frac{\alpha^2}{1.2} v^2 fv + \frac{\alpha^3}{1.2.3} v^3 fv + \dots$$

а беручи функцію творячу кожного члена сего рівняня дістанемо з увагою на:

$$fg(e^{v\alpha} \cdot fv) = \varphi(x+a) \text{ і } fg(v^n fv) = \frac{d^n \varphi x}{dx^n}$$

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi x + \alpha \frac{d\varphi x}{dx} + \frac{\alpha^2}{1.2} \frac{d^2 \varphi x}{dx^2} + \dots$$

форма відома нам з рахунку різничкового.

Таких примірів застосування повнішої теорії випроваджує автор більше.

Дальше є пару розвідок, в яких автор старає ся ріжні функції виразити при помочи інтегралів означених пр.:

5. Виразити $\varphi(x+yi) + \varphi(x-yi)$ через інтеграл означений. (Oeuvr. compl. II. 222).

Часть дійсну сеї суми $\varphi(x+yi) + \varphi(x-yi)$ можна на случай, коли φ є функцією альгебраїчною, логаритмічною, виложничною або коловою, представити в видї дійсним і скінченім, та не мож сего зробити в случаю загальнім. За се мож саму суму представити при помочи означеного інтеграла:

Коли $\varphi(x+yi)$ і $\varphi(x-yi)$ розвинемо після взору Taylor'a, то дістанемо на суму:

$$\varphi(x+yi) + \varphi(x-yi) = 2 \left(\varphi x - \frac{\varphi'' x}{1.2} y^2 + \frac{\varphi'''' x}{1.2.3.4} y^4 - \dots \right) \quad (1)$$

Щоби найти суму сего ряду, возьмім під увагу:

$$\varphi(x+t) = \varphi x + t \cdot \varphi' x + \frac{t^2}{2} \varphi'' x + \frac{t^3}{2.3} \varphi''' x + \dots$$

Помноживши обі сторони рівняня через $e^{-v^2 t^2}$ та інтегруючи від $t = -\infty$ до $t = +\infty$ одержимо:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+t) e^{-v^2 t^2} dt = \\ &= \varphi x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2 t^2} dt + \varphi' x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2 t^2} \cdot t dt + \frac{1}{2} \varphi'' x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2 t^2} \cdot t^2 dt + \dots \quad (2) \end{aligned}$$

а що:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2 t^2} t^{2n+1} dt = 0$$

проте остануть самі паристі різнички функції φx . Інтеграли з паристими виложниками при t будуть мати вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2 t^2} \cdot t^{2n} dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \sqrt{\pi}}{2^n v^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{v^{2n+1}} \cdot A_n$$

По підставленню вартостей за них в рівнянню (2) одержимо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) e^{-v^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{v} \left(\varphi x + \frac{A_1}{2} \frac{\varphi'' x}{v^2} + \frac{A_2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\varphi'''' x}{x^4} + \cdots \right) \quad (3)$$

Помноживши се через $e^{-v^2 y^2} \cdot v \cdot dv$ і з'інтегрувавши від $v = -\infty$ до $+\infty$ дістанемо остаточно:

$$\frac{2y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v \cdot dv \cdot e^{-v^2 y^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) e^{-v^2 t^2} dt = 2 \left(\varphi x - \frac{\varphi'' x}{2} \cdot y^2 + \frac{\varphi'''' x}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot y^4 \cdots \right) \quad (4)$$

Другий член сего рівняня є рівний:

$$(\varphi x + y i) + \varphi(x - y i)$$

отже:

$$\varphi(x + y i) + \varphi(x - y i) = \frac{2y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v dv \cdot e^{-v^2 y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) e^{-v^2 t^2} dt$$

дасть суму $\varphi(x + y i) + \varphi(x - y i)$ виражену означеним інтегралом.

6. Числа Bernoulli'ого виражені при помочи означених інтегралів і випроваджене звідси виражене скінченного інтегралу $\mathcal{Z}\varphi x$. (Oeuvr. compl. II. 224).

Числа Бернулього суть то сочинники $A_1, A_2, A_3 \cdots$ в розв'язанню функції $1 - \frac{u}{2} \cot \frac{u}{2}$ на ряд після ростучих степеней u :

$$1 - \frac{u}{2} \cot \frac{u}{2} = A_1 \frac{u^2}{2} + A_2 \frac{u^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + A_n \frac{u^{2n}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2n}$$

Вартости тих сочинників суть:

$$\frac{A_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n} = \frac{1}{2^{2n-1} \pi^{2n}} \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots \right)$$

Возмім на увагу інтеграл:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{2n-1} dt}{e^t - 1}.$$

Розвинувши его знаменник на ряд дістанемо :

$$\int \frac{t^{2n-1} dt}{e^t} = \int e^{-t} t^{2n-1} dt + \int e^{-2t} t^{2n-1} dt + \dots + \int e^{-kt} t^{2n-1} dt + \dots$$

а позаяк :

$$\int_0^{\frac{1}{0}} e^{-kt} t^{2n-1} dt = \frac{\Gamma(2n)}{k^{2n}}$$

проте :

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1} dt}{e^t - 1} = \Gamma(2n) \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots \right) = \frac{\Gamma(2n) \cdot 2^{2n-1} \cdot \pi^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \cdot A_n$$

отже :

$$A_n = \frac{2n}{2^{2n-1}} \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1} dt}{e^{\pi t} - 1}$$

При помочи послідного вираження мож функцію $\Sigma \varphi x$ виразити означеним інтегралом.

$$\Sigma \varphi x = \int \varphi x dx - \frac{1}{2} \varphi x + A_1 \frac{\varphi' x}{1 \cdot 2} - A_2 \frac{\varphi''' x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + A_3 \frac{\varphi^v x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \dots$$

Підставивши за $A_1, A_2, A_3 \dots$ вартости дістанемо (винявши

перед скобки $\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t} - 1}$):

$$\Sigma \varphi x = \int \varphi x dx - \frac{1}{2} \varphi x + \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t} - 1} \left(\varphi' x \frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{t^3}{2^3} + \frac{\varphi^v x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{t^5}{2^5} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned} \text{а що: } & \varphi' x \frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{t^3}{2^3} + \frac{\varphi^v x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{t^5}{2^5} - \dots \\ &= \frac{1}{2i} \left[\varphi \left(x + \frac{t}{2} i \right) - \varphi \left(x - \frac{t}{2} i \right) \right] \end{aligned}$$

проте $\Sigma \varphi x$ виразить ся рівнянем :

$$\Sigma \varphi x = \int \varphi x dx - \frac{1}{2} \varphi x + \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t} - 1} \frac{\varphi \left(x + \frac{t}{2} i \right) - \varphi \left(x - \frac{t}{2} i \right)}{2i}$$

Суть також розвідки, в яких Абель подає способи інтегрування деяких рівнянь різничкових. Пр.:

7. Інтегруване рівняння різничкового $dy = (p + qy + ry^2) dx = 0$ де $p, q, i r$ суть функціями самого y . (Oeuvr. compl. II. 229).

Рівняне різничкове: $dy = (p + qy + ry^2) dx = 0$ (1) перейде через підставлене $y = zr'$ на:

$$(2) \quad dz + (pe^{\int q dx} + re^{-\int q dx} z^2) dx = 0 \quad \text{т. є на рівняне}$$

виду: $dy = (P + Qy^2) dx$

а се рівняне (1) дасть ся з'інтегрувати, наколи $pe^{\int q dx} = ar e^{-\int q dx}$, бо тоді

$$\frac{dz}{a + z^2} = - \frac{p}{a} e^{\int q dx} \cdot dx, \quad \text{отже:} \quad (3)$$

$$z = -\sqrt{a} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \int p dx \cdot e^{\int q dx} \right)$$

значить, що:

$$y = -\sqrt{a} \cdot e^{\int -q dx} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \int e^{\int q dx} \cdot p dx \right) \quad (4)$$

Через підставлене (3) перейде рівняне (1) на:

$$dy + \left[p + \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{r dx} - \frac{dp}{p dx} \right) y + ry^2 \right] dx = 0 \quad (5)$$

а его інтеграл на:

$$y = -\sqrt{\frac{p}{r}} \operatorname{tg} \int \sqrt{rp} dx$$

або виразивши tang функціями виложничими на:

$$y = \sqrt{-\frac{p}{r}} \cdot \frac{1 - e^{2 \int dx} \sqrt{-pr}}{1 + e^{2 \int dx} \sqrt{-pr}} \quad (6)$$

Пр. для $p = -r = \frac{1}{x}$ інтеграл сей буде $y = \frac{1 - cx^2}{1 + cx^2}$.

Та помімо сего, що — як видно в деяких случаях — через відповідне підставлене рівняне дасть ся з'інтегрувати, то всеж догіднішим для інтегрування рівнянь є чинник інтегрующий. Коли приміром чинник інтегрующий возьмемо $z = e^x$, то рівняне (1) перейде на:

$$\frac{dr}{dx} = (p + qy^2) \frac{dr}{dy} + 2qy \quad (7)$$

Рівняне се взагалі не є лекше до розв'язання чим (1); та мож-
найти багато частных случаїв, в яких рівняне (7) дасть ся з'інте-
грувати.

Возьмім приміром за чинник інтегруючий

$$\frac{1}{(\alpha + \beta y)^2},$$

тоді рівняне (7) перейде на:

$$dy + \left(\frac{\alpha'}{\beta} - \frac{\beta'}{\alpha} y^2 \right) dx = 0 \quad (8)$$

де α' значить $\frac{d\alpha}{dx}$ а $\beta' = \frac{d\beta}{dx}$

причім α і β будуть зв'язані рівняннями:

$$\alpha' - \beta p = 0, \quad \beta' + \alpha q = 0.$$

З'інтегрувавши (8) дістанемо:

$$\int \frac{dy}{(\alpha + \beta y)^2} + fx = 0$$

або:

$$fx - \frac{1}{\alpha + \beta y} = 0.$$

Щоби найти fx , треба се останнє рівняне зрізничкувати, ви-
разити y при помочи x , тоді:

$$f'x = -\frac{\alpha'}{\alpha\beta^2}, \quad \text{а} \quad fx = -\int \frac{\beta'}{\alpha\beta^2} dx$$

а тоді інтеграл рівняня (8) буде:

$$\frac{1}{\beta(\alpha + \beta y)} + \int \frac{\beta'}{\alpha\beta^2} dx = 0$$

т. є.

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta^2 \left(C - \int \frac{\beta'}{\alpha\beta^2} dx \right)}$$

Застосоване чинника інтегруючого до розв'язання рівнянь ріж-
ничкових показує автор ще і на рівняню:

$$(y + s) dy + (p + qy + ry^2) dx = 0$$

розв'язуючи его на кілька способів при помочи різних чинників інтегруючих. Т. II. р. 236).

8. Умовини потрібні, щоби функція більше змінних і їх різничок скінчених, — де ті змінні суть незалежні одна від другої — була цілковитою різничкою. (Oeuvres compl. II. 9.).

Най U буде функцією, що має бути цілковитою різничкою а ΣU єї інтегралом, то наколи ΣU має бути цілковитим інтегралом, тоді і $\delta \Sigma U$ також ним буде.

Наколиж:

$$U = f(x, y, z, \dots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots \Delta^2 x, \Delta^2 y, \Delta^2 z, \dots)$$

то:

$$\Sigma \delta U = \Sigma \delta x \cdot P + \Sigma \delta y \cdot Q + \Sigma \delta z \cdot R + \dots + \alpha$$

де:

$$P = f_x - \Delta f'(\Delta(x - \Delta x)) + \Delta^2 f'(\Delta^2(x + 2\Delta x + \Delta^2 x)) - \dots$$

$$Q = f'_y - \Delta f'(\Delta(y - \Delta y)) + \Delta^2 f'(\Delta^2(y + 2\Delta y + \Delta^2 y)) - \dots$$

і т. д.; α означає часть поза знаком інтегрування.

Позаяк $\delta x, \delta y, \delta z, \dots$ суть незалежні, проте $\Sigma \delta x \cdot P, \Sigma \delta y \cdot Q, \Sigma \delta z \cdot R, \dots$ не будуть цілковитими інтегралами, хіба що $P = 0, Q = 0, R = 0$. А се значить, що щоби функція більше змінних і їх різничок скінчених була повною різничкою, потреба, щоби сповнили ся слідуючі рівняня:

$$0 = f'(x) - \Delta f'[\Delta(x - \Delta x)] + \Delta^2 f'[\Delta^2(x - 2\Delta x + \Delta^2 x)] - \\ - \Delta^3 f'[\Delta^3(x - 3\Delta x + 3\Delta^2 x - \Delta^3 x)] + \dots$$

$$0 = f'_y - \Delta f'[\Delta(y - \Delta y)] + \Delta^2 f'[\Delta^2(y - 2\Delta y + \Delta^2 y)] - \\ - \Delta^3 f'[\Delta^3(y - 3\Delta y + 3\Delta^2 y - \Delta^3 y)] + \dots$$

$$0 = f'_z - \Delta f'[\Delta(z - \Delta z)] + \Delta^2 f'[\Delta^2(z - 2\Delta z + \Delta^2 z)] - \\ - \Delta^3 f'[\Delta^3(z - 3\Delta z + 3\Delta^2 z - \Delta^3 z)] + \dots$$

і т. д.

Се суть умовини конечні, а як автор дальше доказує, разом і достаточні.

Рівняня ті випроваджує автор ще і другий раз як умовини потрібні, щоби інтеграл функції даної був maximum або minimum. Є се іменно предметом розвідки: Про maxima і minima інтегралів. (Oeuvres compl. II. р. 1.). Там окрім випровадження повисших взорів, є ще і два частні приміри яко застосоване виведених рівнянь.

Закінченє.

Так перейшов я по черзі всі праці Абеля, великі обємом, багаті різнородністю обсягів, а перворядного значіння в історії розвою математики. Вже перші його праці з обсягу розв'язування рівнянь альгебраїчних мають епохальне значіння в альгебрі. Квестія, яка через два століття оставала непорішеною, а якій посвятили свої праці майже всі визначні математики XVIII. століття, як Euler, Bézout, Lagrange, Vandermonde, Malfatti і иньші, квестія альгебраїчного розв'язання рівняння п'ятого степеня, вийшла тепер на нову дорогу. Стало ясно, що рівняння степеня вищого чим четвертий, альгебраїчно розв'язати не дадуться, а тим самим і дослідити на тім поли мусіли звернутись в иньшій напрямі; треба було шукати иньших функцій, що при їх помочі рівняння п'ятого степеня далося розв'язати. Це й довело до розв'язання при помочі функцій еліптичних.

Теорія груп абелевих дала новий спосіб розв'язування рівнянь альгебраїчних, а дальше можливість пізнання, коли рівняння дасться розв'язати альгебраїчно. Теорія ця, піднята пізнійше через Galois, розвинула ся широко і отворила нове поле до дослідів над функціями аналітичними. Не менше цінні є праці Абеля, що відносять ся до функцій еліптичних, а період 1815 – 1829, на який припадає час творення Абеля, мож безперечно назвати найважнішим в розвою теорії функцій еліптичних. Прикмети функцій еліптичних, виписаних теоремою множення зложеного, по части доказані, а по части лиш (інтуїційно) віщо перечуті Абелем, стались товчком до дальших праць в тім напрямі Jacobi, Hermite'a, Jouberta, Greenhilla, Webera, а передовсім Kroneckera, який не лише доказав теорему Абеля, але відкрив глибокі відносини сеї науки до альгебри і теорії чисел. В тім множенні зложенні беруть початок „числа альгебраїчні“, які доперва в останніх часах стали загальним добром ширших кругів математичних. Відкрите альгебраїчної природи рівняння, відносячого ся до поділу періодів функцій еліптичних, основує ся на відношеннях поміж коренями того рівняння, відношеннях, які відкрив Абель.

Его дослідити над функціями переступними суть підставою до цілої нової теорії функцій і інтегралів абелевих, а його славне твердження о сумі інтегралів абелевих є найбільше основним твердженням в цілій теорії функцій альгебраїчних і їх інтегралів. З ним вязнуть ся праці Riemanna і ціла теорія поверхний ріманівських,

дальше праці Eulera, Weierstrassa, Neumanna, а також Clebscha і Gordana, який щасливо зробив *ту* початок до сполуки понять геометричних і аналітичних.

В загалі у всіх галузях аналізу слідний вплив сего великого чоловіка.

Перемишль, вересень 1902. — май 1903.



Роль сталої, плинної і газової фази в хемічній рівновазі.

I.

Від коли хемія вступила на науковий шлях, від тоді датуєсь повстане проблему самої сути тої внутренної сили, що поводить хемічні переміни. Вже навіть старинна грецька філософія говорить про симпатію і антипатію атомів. Від того старинного погляду наука не поступала так дуже наперед, якби собі може дехто уявляв. Нині тая симпатія атомів має лише нову наукову назву хемічного свояцтва чи посвоячення, котрим коротко збуваємо неясну для нас квестію. Но з другої сторони годі заперечити, щоби на тім поли забракло коли серйозної і совісної праці. Безперечний поступ у тім напрямі в порівнаню з поглядами старинних зробили Бореллі і Лемері, котрі собі уявляли, що атоми мають гачковату структуру, дальше Нютон, Бергман і Бертолє, котрі підряджують хемічні процеси явищам взаємної атракції маси, яко щось зовсім анальоґічного спаданю каменя на верхню землі. Пізнійше (в половині XIX віку) панувала довгий час іпоте́за Берцелія о електричних силах, котра однакож, не причинилась зовсім до поступу на дорозі вяснення властивої сути хемічної сили.

Нинішнє становище хемії в тій квестії є таке, що ті праці троха ще за передчасні, як на теперішний стан науки і від коли вчені зачали займатись не самою суттю, но лиш обсягом і сферою проявлюваня тої своячної міжатомової сили, а особливо в зависимости від внішніх фізичних умовий якими є пр. масове відношене складових тіл систему, температура і тиск, що впрочім зовсім не свідчить о зрезигнованю з того понадного для нас питаня, тільки о зрілім і строго науковім его трактованю, отже від коли питаємось,

не чому кваси інвертують цукор, но як го інвертують, і т. д.; від того часу прийшла наука до посідання закладних і основних законів, котрі кермують хемічними перемінами, хоч не подають нам найглубшої причини, чому заходить хемічна реакція взагалі.

Загально звісний факт, що наколи зробимо собі якийсь зовсім здовільний уклад кількох різних субстанцій, або як то тепер говорить ся : хемічний систем, то сейчас повстає у нїм якийсь міжчастинковий рух, якась для нашого ока несхїпна внутренна вимїна, котра так перестроює поодинокі складові того систему, що їх виїшні власности, визір, яким они проявляють ся нашим змислам, приймає зовсім нові форми. І з тих власне нових форм ми пересвідчаємось о внутренній переминї, о руху, котрим кермують неїмовірно прості закони, до котрих математичного сформуловання приходимо по довгих, трудних обсерваціях і експериментальних працях. Той рух устає по уплавї якогось часу цілком, нові тіла (твори) не змінюють вже дальше своїх прикмет, словом настає рівновага.

На встанованє такої рівноваги звернули увагу вже Венцель (1777) і Бертоле (1799), котрі завважали, що границя стану рівноваги є зазвичайною від скількості реагуючих творів.

Про таку рівновагу можна ще загально то сказати, що она доперва тоді наступає, як один або більше творів (тіл) переміняють ся зовсім квантитативно в иньші твори о цілком нових прикметах, про що нам свідчить найбільша часть перемін між мінеральними творами і з чого, як знаємо, зроблено як найобширнїйше приміненє в аналітичній хемії, або рівновага наступає вже в половинї переміни, загально сказавши в певній лиш части, так, що вагово-масове відношенє хемічних творів по обох сторонах знаку хемічного рівняннє вросло до якоїсь характеристичної для того систему максимальної вартости в даних фізичних умовах. В органічній хемії маємо незмірно численні приміри, де реакція здержує ся вже в половинї переміни одних хемічних творів на иньші.

Дуже цікавим є дальше фактом, що єще в часї, коли о математичнім трактованю хемічного свояцтва не могло бути й бесїди, формовано собі повні глибокої інтуїції погляди і прочувано гейби інстинктивно, що наука мусить вглубитись в незмірно дрібний свїт частинок і там студіювати напруженє між ними, бо в тих лиш ріжничкових відношенях зєумованих в системи ділаючі фізично на наші змисли і доступні нашій обсервації і експериментації, є напрям і сила з якою відбувають ся хемічні явища. Досить лиш пригадати дві перші з шістьох тез Guyton'a de Morveau виголошених ще в 18. віку, а іменно;

I). *Corpora non agunt, nisi fluida*. Хемічна лучба не насту-
пить, если бодай одно з тіл не є так плинним, щоби єго найдріб-
нйші частинки могли підлягати хемічній силі, котра їх має з собою
получити.

II). Тая сила свояцтва може ділати виключно між найдрібнй-
шими частинками творів.

III). і т. д.

Як бачимо автор несвідомо, мовби в прочутю витичує науці
дорогу, вказує область, в котрій попросту бачить фізичну можли-
вість слідження за загальними законами хемічних перемін і реакцій.
Ту область представляють очевидно реакції, що заходять виключно
в газових системах, одноцільних наскрізь, де частинки самі собою
вимишують ся безперестанно.

Газовий стан матерії, та її крайня форма, де всяке притя-
ганє між частинками, терте і т. д. є зовсім виключене, предста-
вляє найдогіднйші условия для аналітичного студіювання хемічних
сил, приміри хемічних перемін будуть отже в газових системах
самі собою найпростійші, тим то не диво, що наука мусіла зверну-
тись вперед до перестудіювання тої області. Туда ступаючи випро-
вадили Гульдберґ і Варе (1865) перший основний закон діланя мас
(*Massenwirkung*), дальші епохові праці St. Claire-Deville'a (1866)
і Горстманна (1865—1870), що впроваджують в хемію незвичайно
цінну термодинамічну доктрину, вибрали собі за субстрат явища
диссоціації, тому що правда дуже обширна, бо сягаючи далеко
поза газові переміни, всеж таки виходячу і обертаючу ся коло тих
последних.

Тому я уважаю за відповідне випровадити вперед коротенько
закон діланя мас на основі кінетичної теорії газів.

Частинки матерії, що находить ся в тій фазі є в найбільшій
поступній руху, отже бють об окружуючі стінні і о себе незмірно
часто, ослабляють через те взаїмну притяжну силу поодиноких
атомів, котра їх держить в частинці, словом бомбардують ся вза-
їмно, через що в разі присутности кількох ріжних хемічних творів
спроваджують таку зміну в данім системі, що нагромаджують велику
скількість свободних атомів, котрі відбувають незвичайно скорі рухи.

Но обопільне свояцтво первнів, що найшлись тим способом
in statu nascendi не перестає ту ділати, отже в слід за тим роз-
биті атоми сполучують ся знов з собою, ґрупуячись лиш трохи
відмінно і творячи відповідні комбінації.

Больцман видить навіть теоретичну можливість випроваджу-
вання при помочи рахунку правдоподібности як раз тих нових творів,

котрі мусять повставати через комбінацію атомів первнів присутніх, навіть їх чисельне до себе відношене (що має ґрунтуватись на первісних вагових відношеннях).

Чим сильнійше буде розбите атомів в частинках, від котрих виходимо, тим сильнійше може заходити реакція в напрямі творення нових тіл; а то розбите є в певній заґисимості від скількості взаїмних ударів між частинками. Тая знов скількість є при близших даних виїшних умовах точно означеною, хоч для нас скількістю не знаною. Однак те ще нас не виключає по крайній мірі від якостного аналізованя тих відносин. Що тут заходить проста пропорціональність між степенем переміни а скількістю ударів в одній пр. секундї, то річ певна, а всякий сумнів є виключений.

На частість взаїмних частинкових ударів в данім газівім системі впливає з осібно присутність тіл A_1 , A_2 , A_3 , і т. д., а в сумі буде та загальна скількість заґисима від продукту концентрації всіх тіл.

Наколи степенъ переміни будемо міряти скількістю тіл, що повстають або зникають в певнім часї пр. також в одній секундї (в практиці бересь звичайно мінуту) то спровадимо цілу студию хемічної динаміки до слїдженя скорості переміни (v). Тая скорість, як бачимо, буде все пропорціональною до продукту концентрації всіх ділаючих тіл, котрий напишім $c_1 c_2 c_3$ і т. д. Буде отже лиш пропорціональною, а рівною доперва тоді, коли той продукт $c_1 c_2 c_3 \dots$ помножимо через якусь сталу вартість k , котру можемо назвати сочинником скорості, котрої величина чи абсолютна чисельна вартість мусить заґисїти від безґлядної температури, від меньшого чи більшого свояцтва атомів, з котрих новий твір має зложити ся, якої абсолютна вартість, словом буде математичним виразом нмовірности, що реакція в тім напрямі і в тім степені буде взагалї заходити.

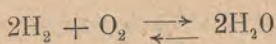
Нові газіві твори, що повстають при таких перемінах ділають зовсім так само як попередні, з котрих они повстали, отже бють об себе і стїни, бомбардують ся і викликають через нове розбиване частинок на атоми *in statu nascendi* реакції цілком противні, що стремлять до витворби тіл, з котрих ми вийшли, реакції звані в термодинаміці відвертні*). (*Umkehrbare, reversible Reaktionen*).

*) Ту треба замітити, що лиш на таких відвертних реакціях в газівих системах можна було оперти випроваджене] закону ділани мас, бо рівновати які ту бу-

Те нове наворотне діланє буде, ясна річ, так само пропорціональне до продукту концентрації творів, що повстали при першій перемінї, то є до їх масової вартости в одиниці об'єму.

В загалї, если реакція поступає наперед в якімсь напрямі, то скорість з якою під обсервацию взятий систем стремить до стану рівноваги, є вже різницею двох скоростей $v - v'$, з котрих кожда ділає в цілком противнім напрямі. Нї одної нї другої не зможемо ніколи експериментально знайти. Ми можемо лиш ствердити, що різниця між противними що до себе скоростями є доволї великою, тоді, як виражаєм ся, хемічна реакція поступає. Доперва, коли різниця приймає вартість нулі, або парціальні скорости зрівнують ся, зникає на око всякий рух і виміна, а на їх місце наступає зглядна, що так скажу, рівновага. Зглядна тому, бо після погляду кінетичної теорії рівновага ніколи не може прийти. Беззглядна хемічна рівновага в газових системах, ідентична з ундуляційною або термічною смертю може настати доперва при температурі абсолютної нулі, — 273° Цель., де є виключений всякий рух частинок. Кождий материяльний систем, що находить ся в температурі понад — 273° Цель. є вже тимсамим в молекулярнім руху з котрого при різницях в напружінях енергії того самого рода, в напруженях аналогічних до різниці електричних потенціалів, різниці в температурі двох тіл в однім системі, різниці в віддаленях двох тіл від осередка притягаючої атракційної сили, впливає вічна і ненастанна виміна, стремліне до рівноваги, вирівнуванє тих хемічних напруженій. Та сили, які ту проявляють ся, надібають і поконують найріжнійші опори, отже виладовують різницю чи злишку енергії в найріжнійші напрями і форми а через те викликають нечувану різнородність то фізичних, то хемічних явищ, котрими мертва та жива природа ділає на наші змисли, на нашу свідомість. В послїдних десятках літ повстала в хемії нова наука, що попросту, вдирась в ту область, що виясняє нам генезу того богатства форм, в яких як неорганічне кому, так органічне житє нам проявляєсь, ба не лиш генезу в загалї, але намагаєсь випроваджувати з математичною точностию конечність прояву таких а таких конкретних форм. Наука та заїніцтована і математично уґрунтована американським хеміком Джібсом,

вають, є справдїнні, реальні, що дають ся осягнути з обох боків знаку хемічного рівняня, в противстваленю до множества таких випадків, де рівноваги є фальшиві, як пр.



в низких температурах.

називаєсь тепер наукою о фазах і про ню як раз я бажаю в тій вступній студії висказати кілька загальних, признаю, під зглядом практично-наукової вартости банальних поки що гадок.

Отже вперед вертаю до дальшого характеризованя хемічної рівноваги і реасумую ще раз коротенько дотеперішні розважуваня реакцій між газовими творами. Ріжниця $v - v'$ називаєсь скоростію переміни, а продукт концентрації поодиноких газових тіл в системі, що стоять по одній стороні знаку хемічного рівняня, і котрих та активна маса числить ся тепер грамово частинковими або молярними одиницями, помножений ще через сталу „ k “, є виразом одної з тих парціальних скоростей v або v' —

Отже випадкова

$$V = k \cdot c_1 \cdot c_2 \dots - k' \cdot c'_1 \cdot c'_2 \dots$$

При рівновазі зменьшуєсь она до нулі, тоді

$$k \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \dots = k' \cdot c'_1 \cdot c'_2 \cdot c'_3 \dots$$

а відношенє k до $k' = \frac{k}{k'}$

можна знайти з рівняня

$$\frac{k}{k'} = \frac{c'_1 \cdot c'_2 \dots}{c_1 \cdot c_2 \dots}$$

отже тимсамим представити знаними

нам (з відповідної хемічної аналізи систему має розуміти ся) концентраціями. Той квот, як показує експериментальний дослід має сталу вартість для кожного хемічного систему при незмінній температурі. Називають его тепер сочинником рівноваги і означають великим K .

$$K = \frac{k}{k'} = \frac{c'_1 \cdot c'_2 \dots}{c_1 \cdot c_2 \dots}$$

Тут отже маємо вже цілком точно означені математичні взаємини між k_1 , k'_1 , c_1 , c_2 , і т. д. представлені незвичайно простим рівнянем. Через відповідну дискусію того рівняня випроваджуємо всі заключеня, котрі можуть для нас мати практичну вартість і позволять нам пояснити собі справу, регулювати і бути попросту панам над напрямом хемічних реакцій. Один з таких заключень пр. той що степень переміни в одиниці часу не зависить від абсолютної скількості поодиноких складових творів, лиш від їх активних мас з осібна, иньшими словами концентрації або скількості маси в одиниці обему, є основним законом хемічної статики і називаєсь законом дїланя мас.

В дотеперішних розважуванях, що мали нас допровадити до наведеного математичного взору стояли ми на тім, що в стані рів-

новаги міждробинний рух дальше відбуває ся, що складні дальше на себе впливають і що в тім стані відворотні собі перемінні зносять ся ідеально. То можна коротко ще так назвати, що хемічна рівновага в загалі не є статична, лиш динамічна.

Рівновагу між чистою водою а її парою толкує Клавзіус в той спосіб, що через означений менніск води перелітають безперестанно частинки в противних собі напрямках, але так, що як раз тільки газових частинок затоплюєсь моментально в воді, кілько їх видобуваєсь з плинної части в газовий простір.

Зовсім так само можна собі толкувати рівновагу між иньшими газовими творами, плинними, або сумішкою одних і других. По треба застеречись, що тії закони, заключеня не бийшли з чисто теоретичної дедукції а потім доперва зістали доказані експериментально, лиш як раз навпаки, з дослїдних фактів, з дуже великого материялу, в котрім є перестудійовані найріжнійші хемічні реакції, менше або більше скомпліковані, доходить ся до емпіричних математичних взорів, а доперва в дальшій консеквенції до погляду на суть хемічної рівноваги, котра тим характеризуєсь, що в кождім моменті переміна в обох напрямках є рівна.

Тому закон ділання має треба нині уважати за дослїдний, експериментальний факт, незалежний зовсім від теоретичної кінетично-частинкової спекуляції; наколи давнійше приміненя кінетичної теорії до випроваджуваня нині нам знаних реляцій було визнаване принайменше занадто сьміле і неvistарчаюче, то тепер хемічна статика і кінетика як найвимовнійше потверджує кінетичні погляди на сталу, плинну і газову матерію, так що ми нині можемо нею навідворот послугуватись до виясненя собі взагалі наряду і степеня хемічних перемін, до виясненя поки що більше образowego ніж беззглядно правдивого *).

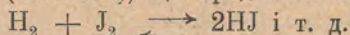
Випадало би тепер подати ту деякі приміри, котрі би мали в конкретний спосіб ілюструвати випроваджуване а описля по передискутованю практичне примінене математичних рівняній, що формують природні закони, після котрих відбувають ся всякі явища в природі, а спеціяльно хемічні реакції.

Та при теперішнім стані науки є перестудіюване вже так велике число спеціальних хемічних реакцій, що представити мені їх ту фізично неможливо. Я передискутую, а радше згадаю лиш про

*) То буде, ясна річ, зависіти від конкретних випадків. Одні менше скомпліковані дають ся легко кінетичною теорією пояснити, иньші вимагають ще іпотетичних преміс. Один з таких типових примірів наводжу низше.

кілька рефлексій, які насувають ся при читанні хемічної динаміки. Вперед кілька слів, про чисто газові системи.

На реакції повставання йодакового квасу з водня і газового йоду, перестудієваної в тім*) напрямі Готфієм (Hautefeuille), пізнійше Лемоаном (Lemoine), що представляєсь хемічно:



видимо, що з двох різних, що до хемічної природи, частинок повстають дві рівні. Если тая реакція відбуває ся в замкненім системі, зі всіх боків, то замість парціальних концентрацій, котрі були очевидно вихідною точкою при таких емпіричних студиях можна брати на основі газового закону Дальтона, пропорціональну їм вартість парціального тиску кожного з тих трех газових тіл.

Парціальний тиск для H_2 назначім p_1 , для J_2 p_2 , а для HJ p , то після више представленого загального закону в стані рівноваги маємо

$$v = v'$$

$$\text{або } k \cdot p_1 : p_2 = k' \cdot p \cdot p = k' \cdot p^2.$$

$$\text{а з відси } \frac{k'}{k} = \frac{p_1 p_2}{p^2}$$

Отже стала рівноваги, котру ван'т Гоф (van't Hoff) називає попросту сталою свояцтва, велике K буде $= \frac{p_1 p_2}{p^2}$ і буде змінятись лиш враз з температурою систему. Ту згадаю коротенько, що названий хемік потрафив зробити дуже важний крок вперед до вияснення хемічного свояцтва через впроваджене в математичну реляцію сталої K з температурою. Загально сформулював він ті відношення в той спосіб:

При підношенню температури наступає переміна, що спротивляєсь, протиділає тому підношенню, то є наступає масове пересування рівноваги в тім змислі, що наступає реакція, котра в своїм пробігу абсорбує теплоту систему. Дальше, виходячи з того погляду на хемічну реакцію, що то є енергетична проява, зовсім аналогічна до такої фізичної переміни як топлене сталих тіл, пароване або кипінне течий і т. д., примінив він ту термодінамічні закони, особливо другий основний закон, що модифікує переміни одних форм енергії на инші, через що прийшов до математичної формулки

$$\frac{d \ln k}{dT} = - \frac{q}{RT^2}$$

де K є сталою рівноваги, котрої абсолютна вартість, як знаємо вже,

*) Lemoine, Ann. d. chim. et de Rys. [5] 12. 145; Bodenstein, Zeitschr. f. Physik. Chem. 22, 1.

зависить виключно від концентрації поодиноких реагуючих творів, q означає вглинену (заабсорбовану) скількість теплоти, а R рівняєься сталій для ідеальних газів ($= 1.99 \text{ cal.}$)

Наколи той газовий систем стиснемо і зменшимо его обем на n -ту часть первісної вартости, тоді парціальний тиск поодиноких складових збільшаєть ся на n -ту вартість. Дістанемо тоді

$$\frac{n \cdot p_1 \cdot n \cdot p_2}{np \cdot np} = \frac{p_1 \cdot p_2}{p^2} = K.$$

Звідси видимо, що внішний тиск не має ту найменшого впливу на рівновагу. Зовсім противно має ся річ при розкладі, диссоціації газів на лекші фізично частинки.

Ту з одного хемічного індивідуум A , возьмім з одного моля повстає n_1 молів субстанції A_1 , $+ n_2$ молів субст. $A_2 + \dots + i$ т. д.

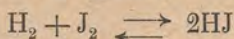
Стала рівноваги K , котра ту називає ся сталою диссоціації має вартість

$$K = \frac{p_1^{n_1} p_2^{n_2}}{p}$$

де $p_1, p_2, p_3, \dots$ і т. д. означає парціальні тиски газів, що ту повстають, (p парціальний тиск першого газу), $n_1, n_2, \dots$ число молів тих нових індивідів з окрема. Збільшенє внішного тиску, як то дуже легко порозуміти з аналогії до попередного случаю, впливає дуже сильно на стан хемічної рівноваги. А імено чисельник..... росте дуже скоро вже не лиш через збільшенє парціальних тисків $p_1, p_2, \dots$ і т. д. але також, через вартість експонентів $n_1, n_2, \dots$, котрі по найбільшій части в практиці, в призначеню до типових розкладових перемін мають вартість більшу від 1, тоді як знаменник мусить збільшатись виключно своїм активним концентрованєм, своїм парціальним тиском.

Дальше дослід показує, що вартість цілого дробу не зміняєься пропорційально до зміни чисельника викликаної внішним атмосферичним тиском, бо вона має сталу вартість K , отже з того виходить скорий зріст активної вартости знаменника, або первісного газу в порівнаню з тамтими. Словами: внішний атмосферний тиск впливає сильно на стан газової диссоціації.

Берім річ загальнійше, отже втягнім ту і перший примір:



то дістанемо правило:

Стан хемічної рівноваги є независимим від внішного тиску лиш в тім случаю, як вчасі хемічної

реакції не зміняєсь число частинок, як сума молів по обох сторонах знаку хем. рівняння в тасама, або (на основі законів Ге-Ліссака і ipotesi Авогадри) як об'єм газового систему не зміняєсь.

Іншими словами можна схарактеризувати вплив внішнього тиску, а додам мимоходом і температури, на стан хемічної рівноваги: збільшене тиску сприяє реакції, при котрій наступає контракція первісного об'єму, а підвищуване температури сприяє реакції, при котрій абсорбує ся теплота.

Не можна здержатись, щоби не навести в тім власне місци кілька гарних рефлексій проф. Оствальда, крайного енергетиста як го називають, на тему сути хемічної енергії.

Всі переміни і явища в природі не є нічим иншим як ненастанними змінами енергетичних станів. Наколи ми в стані змірити ті зміни після якості і кількості, тоді доперва можемо їх науково означити і здефініювати. Цілий внішний сьвіт, що нас окружає, можна уважати за уклад, в котрім енергія найрізнійших форм є розложена в означений собі спосіб в просторі і часі. При таких феноменах як переходжене одних хемічних тіл в инші переміняєсь хемічна енергія майже все в инші форми. В які? запитаємо. Проф. Оствальд так відповідає. При всіх хемічних реакциях змінюєсь вічно концентрація присутних в системі творів. Ті як раз зміни становлять цілу суть тих реакцій. З того легко зрозуміємо, що форма енергії, яка ту проявляє ся, буде енергією об'єму, котра знов входить в загальну енергію механічну. Згадані дві її форми т. є об'єму і хемічна входять в себе взаємно, і тим поводують внішні явища. Отже нова наука, що називаєсь хемічною механікою, заслугоує вповні на тую назву, бо наука о хемічній рівновазі є справді наукою про реляції між механічними а хемічними формами енергії.

На закінчене згадаю ще про найважнійші способи якими нині слідить ся поступ хемічних реакцій. В одноцільних газових системах найвизначнійшу аналітичну ролю при означуваню масових відношень мають:

1) звичайні т. зв. хемічно-вагові методи або волюметричні і розумієсь газометричні о скільки дають приміняти ся.

2) визначуване густоти, котра змінюєсь всюда там, де змінюєсь об'єм або що на те саме виходить скількисть газових молів в наслідок хемічної переміни.

При диссоціації та друга метода є дуже корисна. Специфічна вага систему маліє враз із ростом диссоціації, бо об'єм газів збільшуєсь при тім дуже спільно, хоч їх маса лишаєсь все та сама.

Припустім, маємо 100 частинок або молів. Якась їх дробова частина α , диссоціюєсь на n нових молів, отже їх нове число виносить тоді 100 $n \cdot \alpha$. Нездиссоційованих лишилось 100 $(1 - \alpha)$. По скінченій диссоціації в стані рівноваги сума всіх молів збільшиться на

$$100(1 - \alpha) + n 100 \alpha = 100 [1 + (n - 1) \alpha].$$

або внакше пропорціональний приріст маєсь як $1 : 1 + (n - 1) \alpha$.

Означім тепер специфічну вагу первісного газу через δ , здиссоційованого Δ , то на основі ipotesi Авоґарди маємо пропорцію

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{1}{1 + (n - 1) \alpha}$$

а звідси

$$\alpha = \frac{\delta - \Delta}{(n - 1) \Delta}$$

В той спосіб через визначене питомого тягару газу перед і по здиссоціюваню, приходимо незвичайно простою метою до найдена α , т. є. молярного степеня розкладу.

Дальші фізикальні методи визначування квантитативного пробігу диссоціації можуть ґрунтуватись на помірах скорості еффузії газів, специфічної теплоти при сталім тиску C_p , проведенню теплоти перед і по диссоціації, часом навіть зміни барви газу.

Однак найоригінальніший спосіб квантитативного слідження диссоціації газових творів подав Девіль, про котрого я вже згадав, що він впровадив термодинамічну доктрину в хемію. Наведене тих метод не відповідає загальному характерови розвідки, тому згадаю про них дуже коротенько.

Девіль студіював диссоціацію CO^2 на $\text{CO} + \text{O}$ в дуже високих температурах. А позаяк про безпосередні експериментальні досліди ту тяжко навіть подумати, проте примінював він ту термодинамічну методу. Щоби вперед випровадити одну типову і дуже важну формулку, що виражає вплив температури на калоричну прояву якої небудь хемічної реакції, заложім слідуєче.

Наколи ми якусь хемічну реакцію переводимо в температурі t_1 , то єї калоричний затон*) най виносить $U_1 \text{ cal}$.

Тая сама реакція переведена в температурі t_2 дає на вні $U_2 \text{ cal}$.

Подумаймо собі тепер слідуєчий замкнений процес.

Вперед заходить переміна в температурі t_1 , отже дістаємо на вні теплоту..... + $U_1 \text{ cal}$.

*) Wärmetönung.

Тепер відвиснуємо температуру систему з t_1 на t_2 , до чого зуживаємо..... $(t_2 - t_1) c_1$ cal. де c_1 означає спец. теплоту продуктів хемічної реакції.

В тім місці уявім собі, що реакція відвертає ся і переходить термодинамічно відвертним способом очевидно цілий час при сталій температурі t_2 в противну сторону. Експериментально завважаємо тоді абсорбцію теплоти, що виносить..... $- U_2$ cal. Наконець остудім систем первісних тіл, котрі ту зрегенерувались, назад до температури t_1 , то достанемо тоді..... $+(t_2 - t_1) c$ cal. де c означає спец. теплоту систему, в котрого ми вийшли.

З принципу захованя енергії можна вже теоретично догадуватись, що в тім замкненім процесі не можна на вні ані дістати ані стратити жадної теплоти, бо ту вертаємо до того стану з котрого ми вийшли. (Закон Гесса 1840). Отже можна сьміло написати:

$$U_1 - (t_2 - t_1) c_1 - U_2 + (t_2 - t_1) c = 0, \text{ також}$$

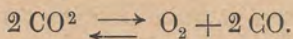
$$U_1 + (t_2 - t_1) c = U_2 + (t_2 - t_1) c,$$

$$\text{або } c - c_1 = \frac{U_2 - U_1}{t_2 - t_1}$$

що можна висказати словами:

Злишка специфічної теплоти реагуючих тіл над спец. теплотою тіл, що повстають при реакції, проявляєсь нам на вні, експериментально, приростом кальоричного затону або ефекту на 1° підвищеної температури.

Послідня формулка має, як легко догадатись, перворядне місце в термохемії. Заставім ся тепер над практичним приміном того взору на реакцію:



c може ту означати лиш спец. теплоту газу CO_2

c_1 " " " " " " сумішки $2 \text{CO} + \text{O}_2 + n \text{CO}^2$,

t_1 най означає комнатну температуру $+15^\circ$ Цель, а t_2 здовільно ставлену, в тім випадку степеновану що раз више аж до 3000° Цель.

U_1 , представляє ту кальоричний ефект при спаленю CO на CO^2 при 15° Цель., або висказуючись яснійше при оксидації $2\text{CO} + \text{O}_2$. Тоді U_2 , котре означає теплоту що вивязуєсь при тій самій реакції, але в температурах 100° , 1000° , 2000° , 3000° Цель. і т. д. можна з послідної формулки дуже легко обчислити на тій основі, що: 1) c і c_1 змінюють ся лиш дуже незначно при ріжних температурах

2) різниця між c_1 і c_2 є взагалі дуже невелика 3) абсолютна вартість c_1 сумішки $2\text{CO} + \text{O}_2 + n\text{CO}_2$ не залежить практично від n .*)

Тепер пригадаймо собі формулку ван т'Гофа

$$\frac{d \ln k}{dT} = - \frac{q}{RT^2}$$

котра представляє нам сталу рівноваги K яко функцію абсолютної температури, або наколи та послідна є, як в нашім конкретнім случаю званою, стало здефіньованою (бо здовільно вибраною), яко функцію q т. є. калоричного затону реакції, Той послідний уміємо вже обчислити для кожної температури, отже по вставленю q і T в формулку ван т'Гофа можемо K , або масові відношення CO_2 , CO і O_2 дуже легко обчислити інтегральним рахунком. Девіль подає ту табелю:

Із 100 молів CO_2 здиссоціювало ся:

при ввішнім тиску	0.001	0.01	0.1	1	10	100	атмос.
в темп. 1000° Цель.	0.7	0.3	0.13	0.06	0.03	0.015	
1500° "	7	3.5	1.7	0.8	0.4	0.2	
2000° "	40	12.5	8.0	4.0	3.0	2.5	
.							
.							
4000° "	97	90	80	63	45	25	

Про велике значенє тої табелі для металургічної техніки досить згадати.

Та муцу йти дальше. Нїм приступлю до розтворів подаю один еще примір реакції, між газовими, але вже і одним сталим твором. Випадок під кожним зглядом типовий, тому буду старатись его докладнійше обговорити.

Горстмани студіював іменно закон ділання мас на диссоціації сталих тіл. Яко вихідну точку взяв сублимацію амоніаку карбоніаку.



*) Треба розуміти в тім змислі, що тую теоретичну формулку можна ужити лиш при виповненю тих трех умов, бо лиш тоді реакція є відвертна термодинамічно.

Тая матерія удітає при рівночасній майже диссоціації пар, котрі, що й не повстають з якимсь означеним напруженєм при даній температурі.

Абсолютна вартість того сублімаційного напруження маліє враз з тим, як нагромаджують ся пари над сталою матерією, наконець приймає вартість нулі в хвили, як приходить рівновага, то є тільки частинок вилітає в газовий простір, кілько їх згущає ся на верхній сталого твору в туюж форму.

Поки що, розгляньмо реакцію, що заходить лиш в газовій фазі, а іменно сам процес диссоціації. Означім собі парціальний тиск першого тіла π , другого p_1 , третього p_2 , то для реакції.



Закон діланя має виражуєсь математично

$$k\pi = p_1^2 \cdot p_2$$

як то ясно виходить з молярного відношення тіл в тім хемічній рівнянню.

Парціальний тиск π не має сталої вартости в газовім стані, бо зменьшує ся дуже скоро враз з підношуванєм температури, але наколи находить ся і стала фаза в системі, тоді вже не змінє своєї беззглядної вартости, доки сталый твір зовсім не зникне. Отже в рівнянню $k\pi = p_1^2 \cdot p_2$ ліва сторона незмінє своєї чисельної вартости, а через те саме і права сторона $p_1^2 \cdot p_2$ задержує сталу вартість. Максимальну вартість диссоціаційного напруження означім через P . На амоняк припадає тоді після закону Дальтона $\frac{2}{3}P$, а $\frac{1}{3}P$ на CO_2 . Отже стала вартість $k\pi$ виносить тоді $(\frac{2}{3}P)^2 \cdot \frac{1}{3}P = \frac{4}{27}P^3$, де P дає дуже легко змірнати ся манометром, а тим самим експериментальне стверджене поставленої формулки є можливе.

Тепер дуже легко порозуміти, що нове впроваджуване амоняку до систему впливає далеко більше на обнижуване степеня диссоціації газового амоніаку карбаміану, ніж додаток CO_2 . Отже дістаємо ту дуже важне заключене, котрого аналогії при иньших хемічних реакціях можуть мати принципіальну вартість в хемічній практиці.

Ще одно заключене, дуже загальної натури, насуваєсь при розважуваню того класичного приміру. Парціальний тиск π є ту супроти p_1 і p_2 дуже малий, що константуємо експериментально, (через хемічну аналізу), тому сублімація сталого твору буде ту

розмірно дуже скоро поступати. Коли знов противно при сублімації якого небудь твору пари, що виходять, будуть досить поволи диссоціювати ся, тоді сильно також зменшить ся зглядне темно процесу сублімації.

Той факт може на око видатись досить дивним, коли зважимо, що при диссоціації постває з одної частинки дві або й більше нових частинок, з котрих кожда має свій газовий тиск. Отже мимо того, що загальний тиск в замкненій атмосфері систему взростає дуже сильно, сублімація не зменшуєсь, лиш навпаки поступає скоршим темпом.

Знамениту того аналогію маємо при процесі розчинювання сталих тіл в інших плинних, котрих сила розчинювання йде в дуже численних случаях рівнобіжно зі степенем електролітичної диссоціації частинок, що розпускають ся.

Та виїшна суперечність вияснить ся нам зовсім, як собі з другої сторони пригадаємо, що вплив виїшного атмосферного тиску на стан рівноваги систему є зовсім виїшний від парціального тиску твору, котрий своєю присутністю і участю в реакції нормує пересув масової рівноваги в одну або другу сторону хемічного рівняня відповідно до постуляту закону ділання мас.

Переїдїм гадкою ще раз ті скомпліковані відношеня.

Кождїй зміні температури відповімє якась зміна максимального сублімаційного напруженя сталого карбамініюму на газовий. Скорість з якою той простий систем стремить до свого питомого максимального напруженя в данїй температурі або що на одно виходить, скорість сублімації, зависить виключно від напруженя нагромаджених пар карбамініюму в системі, як то зовсім ясно виходить з енергетичного поняття скорости переміни і з кінетичного поняття динамічної рівноваги.

Після закону Дальтона домішуване яких виїшних, „чужих“ газів пр. азоту, кисня, а в нашім випадку навіть NH_3 або CO_2 не може мати найменшого безпосередного впливу на зміну максимального напруженя газового карбамініюму в суміщі, що ту при сублімації постває, або виїшними словами не змінєє сталої „K“ реакції самого сублімування, котра збільшуєсь лишє від виїшої температури.

Так отже підвишуванє температури збільшує той тиск в наслідок інтензивніїшої сублімації, по здругої сторони, пригадаймо собі, мусить також зменшувати єго, а то по поводу майже рівночасної диссоціації тих частинок на NH_3 і CO_2 , при чім стала „K“ процесу диссоціації має вже в тих условиях доволі велику вартість.

Поки не зникне стала фаза будуть зносити ся ідеально ті два собі противні впливи, котрих інтензивність може більшати при енергічним допроваджуваню теплоти до систему дуже нагло. Виразом тої незвичайно займавої динамічної рівноваги хемічних сил є ту тая вислідочна сталість парціального тиску газових частинок карбамінію, котра так довго задержить ся, доки більшане енергії систему через абсорбцію внішньої теплоти не перемінить цілком сталої матерії на диссоційовані газові частинки.

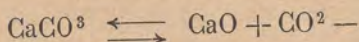
Такий обяв випадкової сталости тиску повтаряєсь в теоретичній хемії дуже часто і подібних примірів можнаби ту много ще навести.

Вже Гюльберг і Вааге завважали, що в гетерогенічних системах, то є таких, де хемічні твори находять ся при собі в різних агрегатах, активна маса сталих складнів є зовсім незмінна. В послідних часах Нернст поставив іпотези в дусі кінетичної теорії, що она є рівноважна а радше просто пропорціональна до скількості частинок сталої матерії, що переходять в означених очевидно условиях в розчин або як в наведенім примірі в газ при сублімації. Дуже влучно згадує Русбум про дотеперішнє пояснюванє тих відношеній в коротенькім, але знаменитім історично-критичнім вступі до своєї праці, котрої частину оголосив перед двома роками^{*)}.

Передовсім пригадує, що можна їх собі пояснювати двоюко, а іменно за Нернстом кінетично або термодинамічно „фазовим законом“, що відкрив Джібс.

Наведений випадок сублімації я старає ся роз'яснити як найдокладнійше кінетичною теорією.

На зовсім подібний лад толкує ся нині диссоціацію угляну вапового на окис ваповий і на газ CO^2 , котру представляє ся схематично.



При степеннім огріваню вапно розкладає ся з щораз більшим парціальним тиском CO^2 . При температурі $+ 812^\circ$ Цель. той тиск дістає свою максимальну вартість одної атмосфери і тоді вже температура систему отвореного на вільнім воздуху не підносить ся так довго, доки CaCO^3 не розложить ся зовсім квантитативно на $\text{CaO} + \text{CO}^2$. При тім диссоціаційний тиск CO^2 не зміняєсь ту так само, як в попереднім случаю, доки в системі не зникне стала фаза CaCO^3 , котра достарчує безперестанно свіжі порції CaO і CO^2 .

^{*)} Dr. H. W. Bakhuis Rooseboom. Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre. Braunschweig 1901.

Сталість тиску і задержане температури при $+812^{\circ}$ Цель, мимо ненастанного ogrівання пояснює Нернст тим, що приймає в системі побіч CO_2 ще газові матерії CaCO_3 і CaO .

Через таке іпотетичне заложене ціле явище можна зрозуміти яко постулят закону ділання мас, зовсім аналогічно як в наведеним случаю диссоціації карбамініяну.

Але Горетман пояснював собі реакції того типу инакше, а іменно в слідуєчий спосіб.

Незмінність і незалежність активної вартости сталої фази в гетерогенічній системі проявляє ся тим, що при якім небудь переході тої форми матерії в иньшу, будь то в фізично иньшу фазу (плинну чи газову), будь то лиш в альотропну або полімеричну сталу форму, можемо завважати сталий максимальний тиск при піддержуваню незмінної температури в системі. Та сталість є зовсім незалежною від масового відношеня, від скількості сталої форми*).

І чим більше сталих творів, тим легше рівновагу математично опреділити, бо тим менше є она зависимою від масової скількості поодиноких членів систему. Сталість тиску і температури $+812^{\circ}$ при диссоціації CaCO_3 на CaO і CO_2 толкує Горетман коротко присутністю аж двох сталих творів т. є. CaCO_3 і CaO . Виходить, додаю від себе, що наколиби CO_2 не був газом, лиш також сталою матерією, то навіть пересув максимальної вартости диссоціаційного тиску враз із змінами температури булиби також виключені.

На тім коротенькім зазначеню другої теорії поперестаю. В докладнійше єї обговорене не можу ту входити, бо мусівби вивести вперед цілий фазовий закон. Зроблю то аж при кінці розвідки і там буду мав нагоду сказати ще кілька слів про те.

Як бачили ми зрозуміне цілого механізму хемічних перемін було строго сполучене з конечним знанем величини і хемічної структури частинок. В молодечих стадиях розвою має нова доктрина о хемічних рівновагах нечувати трудности через таке обмежене, бо о фізичній конфігурації та хемічній структурі частинок плинних а тим менше сталих творів ми не маємо майже жадного виображення. А предся їх знане малоби не лиш для хемії, але і для всіх майже природних наук неоцінену вартість. При нинішнім стані науки годї собі представити, щоби до знаня молекулярної структури сталих і плинних творів можна дійти иньшою дорогою, як дорогою,

*) На розкладі CaCO_3 на $\text{CaO} + \text{CO}_2$ перший заобсервував той факт Ієбрай (Debray) 1867 р.

сказати-б, а *posteriori*, з точного і всестороннього знання хемічної рівноваги між материями, котрих фізичний і хемічний характер хочемо дослідити.

На закінчене того вступу до властивої теми додаю ще, що роля того посереднього газового твору (амоніаку карбамідину), котрого активна маса в системі не змінює ся мимо його наглої переміни і регенерації, насуває дуже живо на гадку аналогію до ролі, яку декотрі твори грають в невідомому ще механізмі всяких каталітичних перемін. В згаданім случаю сублімації і диссоціації без іпотетичного заложення тої посередньої фази, не можна би ту примінити закону ділення мас до вияснення їх пробігу. Що та й фаза є ту чисельно, на вагу беручи, зникнуло мала, в границях за субтельних для наших аналітичних метод, то є очевидно чистий припадок. Та й фаза може бути що до своїх змів, що так скажу, вільно великою, але ту треба на то бити, що она не може цілком зникнути, пропасти в переміні тому, що після Діжбса хемічний потенціал якої небудь матерії приймає зовсім інші вартости в хвили, як концентрація маси в даній системі зближуєть ся до нуля. Власне тим наглим змінам напружень треба приписувати заховане дуже собою цікавої хоч провізоричної сталости парціального тиску тої посередньої фази.

Возьмим тепер під розвагу каталізу.

Через строго математичне трактування хемічних реакцій доходить ся до висновку, що переміна не поступить ніколи так далеко, щоби одна сторона хем. рівняння зовсім зникла, щоби зникаюча субстанція чи фаза зменшилась до абсолютної нуля. Динамічно говорить ся, що то наступить доперва по часі $t = \infty$, а розуміємо в той спосіб, що вартість хемічного потенціалу матерії, котрої концентрація зближуєть ся до нуля збільшуєть ся прогресивно і таким чином зачинає протиділати силі, що ю має знищити. Наведу ту в кількох словах математичне сформулювання тих відношень за Оствальдом [Ostwald. Lehrb. der allg. Chemie. Zweiten Bandes zweiter Theil. Leipzig 1896—1902 стр. 129].

Основне рівняння для хемічної рівноваги, примінене до гомогенічної маси котра складає ся з двох незалежних від себе складових творів представить ся при сталім t , p і m_1 [маса одного з творів] математично:

$$m_1 \left(\frac{\alpha \mu_1}{dm_1} \right)_{t, p, m_1} + m_2 \left(\frac{\alpha \mu_2}{dm_2} \right)_{t, p, m_1} = 0. (\mu_1 \text{ і } \mu_2 = \text{потенціали } m_1 \text{ і } m_2)$$

Если m_2 має перейти в нулю, то будемо мати:

$$\left(\frac{\alpha \mu_1}{dm_1} \right)_{t, p, m_1} = 0 \text{ (I) або } \left(\frac{\alpha \mu_2}{dm_2} \right)_{t, p, m_1} = \infty \text{ (II).}$$

Розгляньмо тепер такий конкретний случай. До течі, розчинника m_1 , додаємо дуже маленьку скількість иншої матерії dm_2 . Ту dm_2 мусить отже мати позитивну а не негативну вартість. Наколиб (I) було правдиве, то $\alpha \mu_1$ мусіло би бути $= 0$, то зн. потенціал розчинника не змінив би ся. Тим часом дослід показує, що він зменшуєть ся, бо наколи передтим розчинник був в рівновазі зі своєю парою, то по розпученню в собі dm_2 його парове напруження стає меншим. Отже диференціальний квот (I) має скінчену негативну вартість, а тим самим бачимо, що не (I) але (II) є правдиве.

Наколиб ми тепер до розчинника m_1 додавали не індиферентну субстанцію dm_2 , лиш таку що викликає хемічні в ній переміни, то можливість каталізованя стає нам

ясною на нові закону ділани мас, бо активна вартість посередної матерії може ту приймати найрізнішші скінчені вартости.

Аналогія, котру ту підношу, впадає тим більше в очи, що при каталізах маємо так само ненастанну регенерацію посередної матерії, а її потенція потрібний непаче системови до перемін в означенім напрямі, буде регулюватись сам:

а) поємисто, то є масово-ваговою скількостю фази, щоби тим самим надати собі взагалі якусь чисельну вартість, зависиму від умовій систему,

б) нівеляційно, що так скажу, то є тим, щоби свою прибрану вартість ненастанно задержувати. В виду того пояснюванє хемічних рівноваг в гетерогенічних системах за Пернстом кінетичною теорією можнаби також підтягнути під пояснюванє фізичною каталізою або навідворот.

Закон ділання мас, як бачилисьмо, випроваджено індукційною методою з хемічних перемін, що заходять між газовими творами, бо нині можемо лиш кінетично-молекулярною теорією їх льобічно выяснити і зрозуміти. О его абсолютній правдивости нині ніхто не сивніваєсь, бо дослідом зістав як найдокладнійше потверджений і потверджуєсь дальше в щоденній лябораторийній і технічній практиці на вічну пам'ять, подібно як закон захованя маси в аналітичній практиці. Тому реакції між сталими і газовими творами уявляємо собі яко переміни, що відбувають ся виключно між самими газовими творами в той спосіб, що сталі матерії вперед сублімують а доперва їх пари реагують на себе хемічно наслідком диссоціації, якій они підпадають в висшій температурі.

Коли отже напружности сублімації яких небудь сталих творів будуть нам знані, дальше коли сочинники диссоціації пар, що при тім повстають, будуть нам так само знані в цілій тяглій реляції від температури, тоді напрям реакції можна предвидіти, а цілий її квантитативний пробіг дуже докладно обчислити. З того становища виходячи висказуєсь Пернет, що найблизшою задачею загальної хемії є подати тії всі сочинники як найбільше вичерпуючо, для всіх даючих ся подумати частинок матерії, що можуть повставати через комбінацію сїмдесять кількох первнів до що раз висшої класи. Як бачимо домагання не аби які.

II.

По такій поверховній характеристиці реакцій, котрі можуть зайти між сталими і газовими творами і які розуміємо тягом в світі кінетичної теорії частинок, переходжу до дальшого не менше в самій річі поверховного начеркненя хемічної рівноваги в розчинах. Ту мушу зазначити, що нову форму матерії то є плинну фазу,

можемо уважати за відмінне в дечім середовищі від попереднього середовища чужих індиферентних газів, котре від тамтого ріжнить ся лиш більшим сконцентрованем маси в просторі. Сублімація сталої матерії при відповідно високій температурі відбуває ся в самій річї так само і в иньшій індиферентній плинї, як передше в атмосфері воздуха, безводника квасу угляного або в вакуум, по сублімації виступає так само при досить високій температурі електролітична диссоціація на йони, як тепер науково виражаємо ся, а всяка хемічна вміна в розчинї може відбувати ся, виконклюдовано консеквентно і дослїдно стверджено, виключно між йонами.

Отже при зіставленю сталого твору побіч иньшого (хемічно індиферентного) плинного маємо зовсім подібні відношеня, як в попереднім случаю, а ціла ріжниця лише в тім, що великого значеня і впливу на стан хемічної рівноваги набирає ту аттракційна міжчастинкова сила котра в газівім середовищі була лиш диференціальною величиною, рівною нулі. Требаби тут згадати о дуже цікавих дослїдах Ганная і Гогарта над розчиннюванем сталих творів в газах під високим тиском, котрі приміром завважали, що алькоголь више своєї критичної температури то є в газівім стані розпускає в більшій скількості йодак потасовий. Той послїдний сублімує ту при аномально високім напруженю*). Дальше студії Віллярда**) виказують той факт, що гази згущені високим тиском мають власність розпускати сталі матерії, приміром бром парує в атмосфері стисненого кисня з далеко більшим напруженем ніж в порожни (вакуум). (Хоч і ту є виїмки пр. скомпримований газ водня розпускає слабше сталі субстанції).

Отже при розчиннюваню сталих матерій в течах маємо цілком анальоїчний случай до їх сублімації в атмосфері иньших сильно скомпримованих газів. Више згадані факти годять ся як найлучше з тим, що плинні твори впливають в без порівняння більшій мірі на агрегатні зміни сталих творів від газів, що мають напружене одной атмосфери.

Справді дивні гадки насувають ся нам, коли вглублюєм ся в той сьвіт нечуваної ріжнородности відношеній, яку ту вивязують ся. В границях температури від 0° Цель. — до 20°, а атмосферного тиску 720—760 mm помічаємо тільки найріжнійших тревалих атомних комплексів, тільки хемічних індивідуїв, що обняти їх уміло навіть для фахових майже неможливо. А цілу комплікацію треба

*) Ostwald. Lehrb. der allg. Chemie. B. I. 1891. стр. 612.

**) Journal de physique [3]. 5. 453. 1896.

очевидно віднести до різних напружностей, відмінних і питомих для кожної хемічної субстанції з особа. Питаює тепер, відки бересь тая нечувана ріжнородність напруженій, з котрих кожда представляєь графічно иньшою кривиною в зависимости від температури і тиску? Чи хвилевий напрям тих кривин буде в кождім случаю зависіти лиш від температури і тиску? Фазовий закон дає на те негативну віповідь і повідає, що крім тих двох чинників то є температури і тиску ділає ту ще третій найсильнійший хемічний (чинник) вплив, вплив чужих тіл, що находять ся припадково в данім системі, вплив середовища чи медіум.

При найповерхнійшій характеризованю хемічної динаміки і статик в розтворах можна виказати дуже досяглу ролю, яку відграють три типові форми матерії в хемічній рівновазі то є стала, плинна і газова форма.

Щоби собі виробити який такий погляд на цілу тую обширну kwestию, спробую тепер нашкіцувати цілий механізм міжчастинкових рухів в системі, що находить ся в плиннім середовищі на основі кінетичної теорії.

Кінетична енергія частинок зависить виключно від абсолютної температури, єсть єї дефініцією. Відношенє енергії поступного руху частинок до внутренної енергії виручючих атомів є знане, пред-

ставляєь квотом $\frac{C_p}{C_v}$, їх ріжниця для ідеальних газів виносеть $R = 1.99 \text{ cal.}$, котра зменьшує ся до нулі, як температура опадає до 273° Цель. Чим більше підносеть ся температура тим більше візрастає тая ріжниця, але то помічаєь лиш у газів, що складають ся з більше атомних частинок, де ріжниця стає визначнійшою.

Отже при більшеатомних частинках газовий тиск буде дуже скоро зміняти ся з температурою, критерій по поводу диссоціації будуть частійше являтьс і ту треба шукати причини того в далеко більшій мірі ріжнородного поведєня під взгядом хемічного характеру в протиставленю до ідеальних газів.

Всі газові частинки мають в однозначних виїшних условиях зовсім ідентичні виміри в просторі. Всі збилисьби в одну безглядну масу (що малаби правдо-подібно вповняти в тяглий і безпроривний спосіб простір), наколиб не мали в собі жадної енергії, що проявляєь на внї газовим тиском о стілько, о скілько она перевешила міжатомну аттракцію масн.

Анальоґічно беручи, ціла атмосферна напружність сталої, плинної і газової маси є лише виразом злишки кінетичної енергії части-

нок над атракційною силою маси. Ціла спосібність диссоціації зложеної частинки є лиш дальшою реляцією тої злишки.

Звідси можна випровадити слідуюче дуже загальне заключенє:

Чим з легких атомів суть збудовані частинки матерії, тим її тревалість в наших условиях буде меньша, тим її критична температура буде низша і на відворот, бо вміру того як зменьшуєсь атомна вага маліє також атракційна сила і наконєць не вистарчає, щоби поконати кінетичну енергію атомів, котрі з вирового руху, подібного до руху планет, переходять раз на все в поступовий рух або висказуючись инакше стала або плинна материя переходить в газову форму.

В найбільшій часті дослідна практика не противить ся зовсім такому висновкови. Всі легко улітаючі матерії складають ся понайбільшій часті з атомів, що мають домірно малу атомну вагу. Дуже наглядних репрезентантів тої класи творів маємо в ідеальних газах. Коли тепер яка небудь материя перейде раз в поле, що лежить вище її критичної температури, коли переступить критичну ізотеру, тоді вже має спроможність примінитись до найширших умов внішнього тиску, бо буде мусіла співістувати (коєзистувати) безпроривно в газовій формі при найрізніших гетерогенічних системах. В плинну форму не перейде ніколи. Більше зложені частинки матерії, що легко улітають мають звичайно можність дальшого диссоційованя в дуже високій температурі на меньше зложені, а кондензованя (згущаня) при маліючій енергії поступового руху, котрі то однак переміни відбувають ся все після математичного шаблону, нормального законом діланя мас. Отже тимсамим мають можність захованя своєї газовой фази в дуже широких границях внішнього тиску, в котрих мусять наступати основні фазові переміни для иньших станів скупленя, то є сталого і плинного.

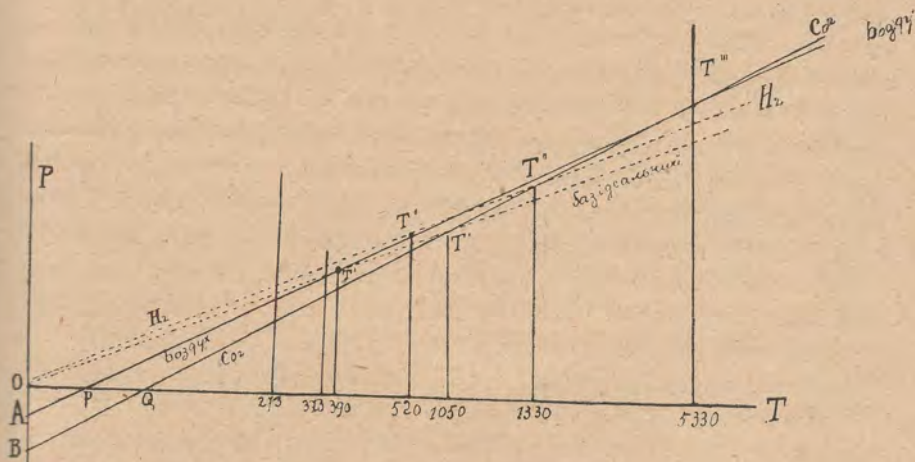
І те як раз становить цілий характер газовой фази матерії, що в дуже просторім шматі на діаграмі, що йде в гору від критичної ізотери, потрафить вдержатись в коєзистенції при найрізніших укладах в протиставленю до плинної і сталої фази.

Та нелишень потрафить вдержатись, але з другої сторони впливати своєю присутністю, своїми хемічними прикметами і своїм енергетичним темпераментом (висш: згадана пр. фізична та хемічна каталіза) на стан хемічної рівноваги у тих системах. Звідси стає нам зрозумілою ціла досягність точного знаня кривих напружености пар в зависимости від температури та внішнього тиску для всіх газових творів, звідси з другого боку розуміємо, чому так велика

скільки найрізнішійших сталих та плинних творів сублімує або парує в звичайній температурі.

Таке характеристичне заховане газової матерії відмінилоби ся доперва дуже близько температури — 273° Цель, для творів, що мало різнять ся від ідеальних газів, а степенно в щораз вищих температурах понад — 273° , чим відповідна матерія є у вище згаданім зміслі менше трівкою в наших фізичних умовах або чим її властива температуральна нуля стоїть вище — 273° Цель.

Мимоходом мушу ту застеречись проти евентуальних і дуже справедливих замітів, що газовий тиск твору не буде зависіти виключно від висоти своєї температуральної нулі. Оно справді так ся має, а щоби тії відносини легко порозуміти вистарчить подати ту за van Laar'ом графічне представлене систему кількох простих ліній газового тиску для слідуючих чотирох субстанцій: H_2 , CO_2 , воздуха і газу ідеального*).



Але спішусь до плинного середовища. При газовій фазі не було й бесіди о якій небудь комплікації від масової атракції. Її вартість була за мала, щоби впливати на стан хемічної рівноваги. Зовсім противно мають ся відносини в плинних системах. Зближене частинок є ту вже так велике, що переступає критичну ізотерму, в слід за чим частинки у всіх своїх рухах підпадають своїй власній притягаючій силі.

Безмірне число можливих частинкових одиниць, що можуть повстати через комбінацію 70 первнів, з котрих кождий має иньший тягар атомний або пропорціональну її притягаючу силу, стає причиною такої різнородности функцій тої атракції, що доволі тяжко

*) I. I. van Laar. Die Thermodynamik in der Chemie. 1893. S. 15.

представити собі відвагу кінетичної теорії, що намагаєсь вишукати загальні закони, після котрих тую різнородність можнаби опанувати точно одною лиш гадкою, або, що на те саме виходить вияснити фізично причину всіх реакцій в розтворах та предвидіти заховане кожного твору в кожних даючих ся подумати внїшних умовах як що до тиску, температури, так і матерьяльного середовища (Medium).

Молоденька наука „фізикальна хемія“ не встигла ще здефінювати і конкретно вповісти дуже простих законів, котрі в першій мірі справляють реакції в ту або другу сторону, але нині можна надїятись, що їх математичне сформульоване висить у воздуху, що в плиннім середовищі все дасть ся спровадити до атракційної маси атомів. Енергетика сповнила вже свою задачу о стілько, що вповіла дуже много законів, при котрих помочи можна зрозуміти всі межидробинчі рухи в газових творах, що ґрунтують хемічну динаміку особливо основний закон діланя мас. Але там ділає виключно термічна енергія, а є зовсім введімінована атракційна сила.

Накидаєсь питанє, якимже чудом удалось в послїдних часах ван'т Гофови так углубитись в розчини, де прецінь панує дуже великий тисяч-атмосферичний внутренний тиск, що є споводований виключно між-частинковою атракцією маси? Цїла его нечувано досягла теорія розтворів не узглядає нї на волос тої атракційної сили. Пригадаю лиш, що для етеру пр. Стефан обчисляє на основі реляцій між теоретичними законами капілярної сили а парованєм течей, що внутренний тиск є о 1287 атмосфер більший, нїж тиск его пари, его пружність на внї, а з критичних даних вставлених в рівнане ван дер Вальса (van der Waals) обчисляєсь 1400 атмосфер*).

Отже чому ван'т Гофа теорія не згадує про вплив середовища на стан хемічної рівноваги, чому стає безсильною супроти осмотичного тиску сконцентрованих розчинів, а тим більше супроти сталих творів?

Спробую відповісти коротенько на то питанє при помочи кінетичної теорії на основі закону диссоціації, про котрий я згадав в першій части. Вперед однак, нїм го ту ще раз наведу, зверну увагу на давний, бо ще 1807 р. Дальтоном поставлений закон, котрий повідає: в сумішці кількох газів загальний тиск є рівний сумі парціальних тисків кожного газового складня.

Подумаймо собі тепер такий найпростший гетерогенічний систем двох тіл, індиферентних до себе в хемічнім змислі. В замкненім

*) Ostwald. Zeitschrift für physikalische Chemie I 46. 1887.

мали бсьмо різне число частинок, отже тимсамим проста пропорціональність між тиском газу а его розчиненою кількості булаби звихнена, або иньшими словами газ не слухав би закону Анрі'я.

Дальше, як видимо, заходить також точна пропорціональність між концентраціями N_2 , а N_2 H_2O і т. д., отже тимсамим маємо загварантовану просту пропорціональність між гідратами а газовими частинками N_2 .

Розчинник, становить, зовсім відмінне середовище від вакууму або від атмосфери газів через свій атракційний тиск. Єсли однак заходить такий случай, що той розчинник мимо свого великого тиску не впливає зовсім на зміну числа частинок газового твору, що при контактї переходить на основі свого руху в его плинну фазу, отже тим самим не змінє поєму активної концентрації даних частинок в розчинї, тоді слїдуюча висше згадана формулка набирає ту актуального значеня:

„Стан хемічної рівноваги не зависить від внїшного тиску лиш тоді, як через хемічну реакцію не змінєє ся число частинок або як обєм газів не змінєєсь.

Висше згаданий примір відповідає тим умовам, бо слухає закону Анрі'я. Означім собі осмотичний тиск розпущеного азоту через π , газовий тиск через p , тоді дістаємо пропорціональність $\pi = L \cdot p$, або коли замість парціальних тисків возьмемо концентрації:

$$c = L \cdot C$$

де L означає сочинник розчинюваня.

На основі тої простої пропорції можна було всі закони, що нормують динамічну рівновагу між газовими творами розширити на твори розчинені в індиферентних плинах, що зробив тенїяльний ван'т Гоф. Вплив середовища зазначив ся лиш тим, що пружність або лучше тиск газу понад плином не є прямо рівний осмотичному тискови, а є лиш пропорційональним до его вартости. Зрівнятись з ним може лиш в такім случаю як

$$v = V \text{ чи } \frac{1}{v} = \frac{1}{V} \text{ або}$$

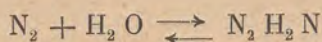
$$c = C$$

то є наколиб простїрна концентрація газового твору в розчинї і в вакуум, що з ним стикає ся, була та сама. Але то в практиці майже ніколи не виступає, хіба при материях, що себе взаїмно в безграничній степені розпускають, бо внутренне атракційне тертя при

поступнім руху того самого газового твору в обох середовищах має зовсім різні вартости.

Отже сочинник рівноваги буде для творів розчинених в інди-ферентнім середовищі зовсім такий сам, як наколиб ті твори нахо-дилися в газовій формі в вакуум або в якимсь чужім індиферентнім газі. Цілу різницю можнаби хіба добачувати в скорості внутрен-них відворотних перемін, або, як кому подобавсь, в скорості вну-тренніх віртуальних перемін. В такім случаю рівновага в плиннім середовищі малаби характер в більшій (або меншій) мірі збли-жений до безгладної статичної рівноваги від газового систему. Она пригадує придавлені хитання, котрих амплітуди не змінюють ся. Отже в менніску на границі двох фаз малибиємо немовби лиш скік в тім придавненню, але не в вартости сочинника рівноваги.

Комплікації зі взгляду на можливу а навіть дуже імовірну реакцію:



(котру мимоходом згадаю можна знаменито помічати пр. в наглих скоках сочинника розчинювання в воді глянберської соли) не треба так довго боятись, доки розчинник находить ся в перемагаючим надмірі, де число молів N_2 супроти числа молів H_2O є нескінчено малим.

Отже коли частинки якогонебудь газу по переході в чужий пливний твір не переступають ще в наслідок дуже високого вну-тренного тиску свого критичного стану зі взгляду на можливе иньше уложенє атомів в середині частинки або иньшими словами: як не зачнуть ані диссоціювати ся, ані кондензуватись ні полімеризуватись, тоді тиск середовища, котрий мимо своєї імпонуючої вартости не потрафить в жадний спосіб змінити числа розпущених молів, еліміну-єсь і з ним „бодай так довго не треба числитись, доки через хемічні переміни в розтворах дістаємо ча-стинки творів, для котрих температура середовища лежить висше їх критичної температури“.

Отже середовище зачне при матерних послушних законови Анрія впливати на рівновагу в що й по згаданім змислі аж тоді, коли концентрація розпущених частинок буде дуже велика, коли їх активність взросте аж до тої границі, що они самі або зачнуть між собою полімеризуватись, або входячи в сполуки з розчинком зачнуть впливати сильно на свої молярні відношеня до него і т. д.

Тоді всі дуже прості закони хемічної рівноваги для гомогенічного газового систему страчують ту свою вартість і значінє, і тому всі сконцентровані розчини не слухають вже законів ван'т Гофа.

Рідкий розчин заховуєсь під зглядом свого осмотичного тиску, що стоїть в простім відношенню до концентрації розчинених молів, зовсім як ідеальні гази до того степеня, що ван'т Гоф розтягнув на него відразу гіпотезу Авогадра.

Але ту zarazом видимо як на долони, що тоє ціле щасливе виселіміноване атракційної сили частинок середовища, можна було розтягнути лиш на дуже рідкі розтвори і на гази послухі законам Боіля і Ге-лїссака. Но коли те просте і в високім степені припадкове условие не є виповнене, тоді стаємо перед нечуваною ріжнородністю і комплікацією, котру бажаю дальше легонько шкіцувати кінетично. Досить згадати лиш про імпонуючий розріст електролітичної теорії, котра узглядняє один лиш дуже спеціальний случай дисоціації частинок, що розпустились.

Отже атракційній силі медіум треба приписати першорядну досяглість. Она становить жерело напруження верхні течі, котре держить частинки мимо величезної вартости їх термічної енергії в фізичній рівновазі так, що всі разом місто розсунутись експлозійно та побільшити тисячі разів свій об'єм представляють збиту, одноцільну, плинну фазу.

Тая фаза має своє питоме поле егзистенції, о специфічній собі розтягlosti на дияграмі температури і масової атракції, котра має ся відворотно до простірнього сконцентрованя частинок. При допроваджуваню теплоти через огріванє плинну підносимо кінетичну енергію частинок, котрі розсуваючись в наслідок інтензивніших потручувань побільшують обем фази аж до критичної вартости. В тій температурі, званій критичною температурою, термічна енергія поступного руху частинок поконує вже атракційну енергію так сильно, що сума об'єму всіх частинок, коволюм (*b*), займає вже лиш третю частину цілого об'єму плинного твору, котрий ексериментально міримо. Енергія верхні змаліла ту до нулі, менніск зник, а плинна фаза заховуєсь як газ.

Колиб тая фаза мала в собі розчинену якусь чужу матерію, котраби улїтала вже в критичній температурі розчинника, то тая сумішка заховувалаби ся в тих условиях зовсім після закону Дальтона, яко сумішка двох газів. В міру того як зачнемо остуджувати сумішку буде рости енергія верхні розчинника т. є. твору що є в перемагаючій надмірі в сумішці. А величина напруження верхні, видима функція фізичного сконцентрованя частинок, зменьшує

дуже сильно напружене пари обох творів на вні, бо придавлює або скорочує пересічну дорогу їх поступового руху, котрого виразом є як раз згадана пружність. Для ідеальних плиннів т. є. таких, котрих частинкова вага в обох фазах є тасама, буде можна поставити зовсім аналогічно до висше наведеного закону Анрія, пропорціональність того придавлення до масового сконцентрованя фази, а вартість сочинника пропорції буде в поодиноких случаях зависіти лиш від форми верхні.

Одже приходимо до висновку, що від скількості нагромадження маси в плиннім середовищі, отже від масового поєму плинної фази буде зависіти енергія напруження верхні котра зменьшує атмосферну пружність пари частинок розчинника і заразом частинок чужих матерій в нїм розпущених. В той спосіб посередня (випадкова) пружність рідкого розчину слабо улїтаючих творів є все меньша від суми напружености обох складнів в тих самих условиях. Так толкую собі придавлене пружности сумішки при помочи кінетичної теорії, хотяй впрочім термодинамічно толкує ся ще простійше.

Так отже ту знов через дуже щасливі обставини здибаємо для рідких розчинів просту і в очи бючу пропорціональність того придавлення, котра нині по працях французского фізика Раульта виражує ся дробом $\frac{N}{n+N}$, де N означає число молів розчинника, n число молів розчиненої матерії. Послїдна формулка по розширеню гіпотези Авогадра на розчинив ван'т Гофом стала основою до визначування числа молів в розчинах або навідворот частинкової ваги розчиненої субстанції.

Що до широкого приздаченя і відповідного примінюваня тої формулки на найріжнійші типи хемічних перемін в розчинах згадаю лиш, що ту ще лежить широке поле до праці, котру заїніціювали в послїдних часах Дігем і Маргілес через енергетичну теорію сумішок.

Тепер вертаюсь назад до характеризованя тиску а іменно високого тиску.

Внїшний тиск впливає на даний систем зовсім так як притягаюча (атракційна) сила маси. Він стає по тім самим боці поруч неї в борбі з термічною енергією, котра стремить до розпорсненя матерії в просторі, до збільшеня об'єму всіх творів поза їх критичну вартість то є аж в газову форму. В тім новім стані поле можливих перемін, котрим дає основу, як знаємо вже, чим раз дальша диссоціація, мусить чим раз більше стїсняти ся та малїти власне по поводу вислімінованя притягаючої сили.

Як бачимо, маємо ту дві противні сили, що ненастанно ділають на матерію в противних напрямках. Кожда з них стремить зовсім незалежно від другої до якоїсь собі питомої критерії. При крайній побіді термічної енергії маса систему переходить в газ, в противнім случаю, при відпровадженню тої енергії через остуджене дістаємо сталі твори. Недалека вже здаєсь будучність зунітаризує ті дві сили наскрізь та докаже, що ті дві сили мають зовсім одноцільний характер і природу, що они є по просту рухом космічного етеру, котрий ту інтерферує ся.

Я буду пробувати зазначити, що в дорозі до згаданої строго наукової унітаризації сил, що ділають в природі наука про фази зробила вже великий крок наперед і то крок експериментальний.

Від коли іменно дістала наука в свої руки свободне примінене тих двох собі противних сил в свої досліді, то є сили між-частинкового притягання і термічної сили, від коли фізики навчили ся збільшати або степенно зменьшати вплив першої штучним тиском, отже зменьшуванем об'єму тіл або концентрованем маси, а вплив другої сили обсервувати через штучне викликуване різних температур, від того доперва часу найшлась наука в дуже корисних умовах розвою, якими нині тішать ся. Відтак треба ще було розмірно не довго чекати на раціональне студіюване тих обох сил в граничних областях, в полях, на котрих сильно переважає одна з них а друга є диференціально, зникаючо малою. До тепер фізика і хемія пережила вже одну добу правдиво майстерного аналітичного перестудіювання діланя термічної енергії на матерію, як що до її поеми, так і напруження через кінетичну теорію. Живемо в хвили найбільшого триумфу тої теорії. Ван Вальс (van der Waals) положив підвалину другій добі, котра тепер приходить і буде ще раз більше розвиватись. Она вже тепер кидає ясне світло на дуже важну, але і дуже скомпліковану роль середовища особливо плинного в хемічних перемінах.

Ван Вальс перший показав дорогу експериментальної аналізи притягаючої сили маси частинок через степенне їх зближуване за посередництвом компресії газів, через зменьшене свободної дороги їх поступного руху аж на критичне віддалене, при котрім обі сили ідеально рівноважать ся. Іншими словами виказав можливість переходження газової маси в плинну і на відворот в тяглий спосіб, без наглих скоків. Коли лиш ослабимо термічну енергію достаточним зменьшенем температури, атракційній енергії прийдемо в поміч внішнім тиском, тоді впадаємо дуже легко в поле тої характеристичної тяглости.

Отже в плинній фазі, як я вже мав нагоду вище згадати, панує дуже високий тиск, що виражується в тисячах агмосфер. При тій самій температурі вартість того тиску буде змінатись для різних хемічно творів, бо кождий з них є збудований з відмінних, що до тягару атомного, атомів. На основі до тепер представлених законів хемічної рівноваги можна звідси витягнути такий висновок:

Кожда хемічна реакція, при котрій число частинок по обох сторонах знаку є тасама або що на тесаме виходить, при котрій молярний сочинник не змінєє свої суми в часі переміни, буде заходити в тім самім квантитативнім степені в кождім плиннім, але індиферентнім розчиннику, коли лиш стала розчинювання для всіх складових реакції не змінить ся для відповідних середищ, наколи не повстають занадто легко улїтаючі продукти і т. д. Ціла ріжниця буде лиш в придавленю реакції, ріжнім для ріжних розчинників, що далоби ся легко змірити та порівнати визначуванем скорости переміни в поодиноких случаях.

Таку дорогу експериментального студіювання впливу плинного середовища можнаби назвати динамічною, а вишу запропоновану і примінену Нернстом, що лежить на визначуваню степеня розділювання якоїсь матерії між два або більше розчинників „статичною“ методою. Та друга метода основується на перенесеню закона Дальтона і Анріа на дві поруч себе єствуючі плинні фази. При хвилині застанови можна ту добачити можливість щораз дальшого розтягання осмотичної теорії ван'т Гофа від одної плинної фази до другої враз зі всіма мериторичними і експериментальними консе-квенціями.

Бєли тепер возьмемо під увагу другий случай, де при хемічних реакціях змінєє ся сума молів, тоді вплив середовища буде дуже великий і осмотична теорія стає ту безсилною.

Отже зовсім анальоґічно до того як я згадав вище при зіставленю газової і плинної матерії, правило розділювання плинних фаз (Vertheilungs-satz) поставлене на основі кінетичної теорії Нернстом має дуже широке приміненє при „тонких“ розтворах.

Нині вже не сумніваємо ся, що цілий ряд дуже характеристичних явищ пр. стручування або розчинювання матерій має свою причину виключно тільки в вирівнуваню атракційного спаду між дотичними фазами. Можна ту замітити про дотеперішні дивні будь що будь здогади, що при розчинюваню сталих матерій маємо раг excellence явища диссоціації частинок на меньше зложені але між собою ідентичні комплекси, крім звичайної сублимації супроти того, що диссоціація, як знаємо, є класичним приміром тих крайних

случаїв, де вишній тиск ділає як раз в кондензуючій напрямі. Але коли тасам хемічна матерія має в різних розчинниках всілякий степен розчинюваня, то можна догадувати ся, що вже невеличка різниця в тих тисках буде рішати напрям хемічної переміни або по відповіднім змодифікованю того постуляту, що середнє міжчастинкове віддаленє входить ту на перший плян та викликає вже дуже маленькими різницями в тих віддаленях величезні різниці внутренних тисків.

Отже в розчинах маємо критерію борби тих двох собі противних сил в найвисшій та рішачій фазі. Як в газових системах переважує виключно термічна енергія, в сталих атракційна так в характеристичній посередній фазі видимо перехрещене обох і степеннє їх рівноваженє здовж цілого поля екзистенції плинної матерії. Прогресивне пересуванє стану рівноваги між ними в границях згаданого поля проявляє ся нам цілим рядом фізичних перемін в розчині як пр. розчинюванем або осаджуванем сталих творів а дальше посередно через сотворенє нових фізичних умов в данім системі і досяглими нераз хемічними перемінами.

Тую квестію підніс Геєн в своїй теорії плинів, де дотеперішні лиш здогади формулує математично

$$\frac{f}{f^1} = \frac{r^{1n}}{r^{n^2}}$$

В тім взорі, „ r “ означує середню віддаль частинок гомогенічного плину, „ f “ атракційну силу, або внутренній тиск середовища „ n “ має ту досить велику вартість, бо $=7$. Отже ту маємо щось в роді гравітації Ньютона.

Що той взір не має, як показало ся пізнійше з дослїду, точного, математичного значеня, то проте з того ще не виходить, щоби го з засади відкидати, бо якостно (квалітативно) бодай в доволяючий спосіб толкує нам надзвичайно ріжнородні відношеня між течами а частинками инших творів.

Отже плинне середовище представляє найріжнійші а zarazом всі можливо найкориснійші условия до переведеня хемічних перемін в означених напрамах, що для нас можуть бути дуже пожадані. Там можуть поєставати найздовільнійші фізичні условия навіть такі, як негати́вний тиск, через котрі моглиби ми перейти до метастабільних і лябільних, на мою гадку, станів, що мають, як легко догадаємо ся, принципіальне значенє для розвою науки. Отже тіч є сотворена до того, щоби в собі переводити найосновнійші та найбільше скомпліковані хемічні переміни, тим то не диво, що природа виконує при єї помочи архисинтези, про котрі нинішня наука може лиш несьміло мріти.

В сій розвідці хочу звернути увагу на деякі висліди дотеперішньої науки експериментальної, що йде в тім напрямі. Тому мушу бодай коротко згадати про теорію ван дер Вальса, а радше відповісти на питанє, як далеко дійшла кінетична теорія в пояснюваню впливу плинного середовища на хемічні переміни. Учений сей використав аномральне захованє газів доконалих під високим тиском. — Він заключив, що тая комплікація мусить походити від самотворби притягаючого поля в середині газowego твору, сказати-б від кінетичного автомасованя газовой фази. Отже різні вартости продукту PV вздовж табелї зростаючого компримацийного тиску уважає за скількостний вираз того внутренного притягання і піддає его математичній аналізі. Тую аномральність можна помітити пр. на продукті PV для етилену при 20^0 Цельс. і сильнім тиску:

$$\begin{array}{rcc} P = 31,58 \text{ Atm.} & 84,16 \text{ Atm.} & 398,71 \text{ Atm.} \\ PV = 0,914 & 0,399 & 1,248. \end{array}$$

Славна формулка $PV = \text{konst} = RT$, — що замикає в собі закони Боїля, Ге-лїссака та іпотезу Авогадри, котра ту тим виражує ся, що R є для всіх газів тесаме, коли порівнюємо їх грамово частинкові скількості, — відповідає отже дійсним відносинам лиш при малім P а дуже великім V , бо тоді і міжмолекулярне притягання і беззглядний обєм газовой матерії „b“ не впливають на вартість RT .

$$\text{Тодї } PV - RT = 0.$$

Но при зближуваню до критичного стану, як бачимо емпірично на поданім примірі $PV - RT = 0 = f$, де f представляє якусь загальну функцію, котра доперва для безконечно великої вартости V має вартість $= 0$. Щоби тую функцію визначити впровадив van der Waals в те рівнанє еще внутренний тиск, що мусить бути відворотно пропорціональний в першім приближеню до квадрату обєму $\frac{a}{V^2}$, з другої сторони поправив сумаричний обєм V в той спосіб, що поменшив го о абсолютний обєм матерії газовой зв. коволюм „b“ через що дістав формулку

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT.$$

Як видимо те рівнанє із згляду на V є вже рівнанєм третого степеня, отже при здовільно вибраній а незмінній вартости T , крива лїнія, що представляє зависимість P від V перестає бути регулярною іперболїчною ізотермою що мала форму слїдуючу (fig. 1. стор. 34)

і переходить на вищу форму*). Обчисліть іменно

$\frac{dP}{dV}$ при сталій температурі

отже:

$$\frac{dP}{dV} = \frac{2a}{V^3} - \frac{RT}{(V-b)^2}.$$

При великих вартостях на T має той диференціальний кват негати́вну вартість отже кривина має менше більше ви́зір I.

Дальше при малих вартостях на

V , де $V - b$ зближує ся до 0 маємо також $\frac{dP}{dV}$ негати́вне, отже ліва сторона ізотерми II. і III. перебігає як I.

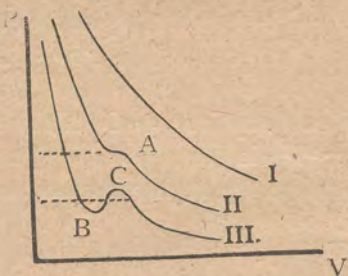
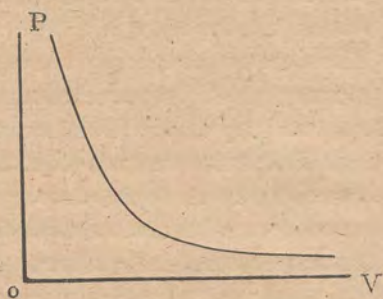
$$\text{Але як: } \frac{2a}{V^3} - \frac{RT}{(V-b)^2} = 0$$

то на ізотермі II, мусить вже в якімсь місці пр. в А наступити мале вигнене рівнобіжне до V , а коли возьмемо ще низшу температуру то вже будуть слідувати позитивні вартості $\frac{dP}{dV}$ отже наступають вже вигинання в гору на право пр. BC.

Але нїм приступлю ще до закінчення тої дуже очевидно поверховної характеристики теорії van der Waals'a, зверну увагу на студию Arthur'a A. Noyes'a, що в дуже простий спосіб толкує аномальність газових законів в розчинах кінетичною теорією**).

Коли ван'т Гоф розтягав закони Боїля і Авогадри на рідкі розчини, то ясно зазначив, що ті закони відносять ся лиш до дуже многих случаїв в дійсности, що при солях, силь-

них засадах і квасах подибує ся значно більше обнижене пружности температури ціпнення розчину, ніж того теорія Авогадри вимагає.



*) J. H. van't Hoff. Vorlesungen über theoretische und physikalische Chemie. 1900. Drittes Heft. S. 9.

**) Über die Abweichungen von den Gasgesetzen in Lösungen. Von Arthur A. Noyes. Zeitschr. f. physik. Chemie. B. V. 53. 1889.

Тую атомалію вияснив не довго потім Аргеніус іпотезою електротної диссоціації. Але крім тих виїмків, котрі вже тепер знов годять ся з теорією van't Hoff'a, є ще другі далеко численніші. Як далеко іменно сягає експериментальне визначуване температури цїплення густіших розчинів — яка-б не була матерія або розчинник — нігде не подибує ся сталої вартости на частинкову вагу при ріжних концентраціях, тільки раз менші а раз значно більші вартости. Тії аномалії можна з одної сторони без сумніву толкувати повстанням більших молекулярних комплексів в таких умовах, але з другої сторони такі случаи треба знов за виїмки уважати, а головної причини треба шукати в аналогії до поведення газів під дуже високим тиском.

На таке пояснюване звертали увагу — як пише Noyes — Ostwald, (*Zeitschrift für physik. Chemie* 2, — 280), Arrhenius, (*ibid.* 2, 499), Beckmann, (*ibid.* 2 734), — а він піддає її математичній аналізі о скільки єму стає експериментального матеріялу.

В розчинах треба отже як при газах від цілого об'єму відчислити об'єм частинок розпущеної матерії, а замічений тиск осмотичний треба збільшити о вартість, що представляє притягання між частинками. Но при розчинах тії відношення много більше скомпліковані ніж в газах. Ту об'єм розчину треба зменшити не лиш о об'єм частинок розпущених, але ще о об'єм частинок розчинника, бо оба скорочують в той сам спосіб свободну дорогу руху частинок. Дальше крім взаємного міждробинного притягання розпущеної матерії треба ще взяти в рахунок притягання між ними а частинками розчинника, котре впрочім, ясна річ, перевишає дуже много попереднє. Отже як означимо собі через p осмотичний тиск, v об'єм розчину в літрах, в котрім маємо розпущений один моль матерії, B об'єм того моля, b об'єм частинок в одному молю матерії, c об'єм частинок в одному літрі розчинника, то об'єм розчину треба зменшити о $[b + (v - B) c]$. Міждробинне притягання між матерією а розчинником є пропорціональне до простірної концентрації кожного з них або до $\frac{1}{v}$ resp.

$\frac{v - B}{v}$ Тому, як стала „а“ представляє питоме притягання, то осмотичний тиск треба зменшити о вартість $\frac{a}{v} \frac{v - B}{v}$ а тоді місто формулки van der Waals'a

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = \text{konst. одержуємо:}$$

$$\left(p - \frac{a}{v} - \frac{v-B}{v} \right) (v - [b + (v-B)c]) = \left(p - \frac{a}{v} - \frac{v-B}{v} \right) \cdot (1-c) \left(v - \frac{b-B}{c} \right) = K.$$

Вартість $\frac{a}{v}$ в порівнянню з p і таксамо вартість B в порівнянню з v є взагалі дуже мала, отже за $\frac{v-B}{v}$ можна в приближенню поставити 1. Поділім ще крім того рівнянне через сталу $(1-c)$ то дістанемо.

$$\left(p - \frac{a}{v} \right) \left(v - \frac{b-Bc}{1-c} \right) = pv - a - p \frac{b-Bc}{1-c} + \frac{a}{v} \frac{b-Bc}{1-c} = \frac{K}{1-c}$$

Тое рівнянне стає ще простішим при розваженню, що $\left(\frac{a}{v} \frac{b-Bc}{1-c} \right)$ є дуже мале отже можемо заложити v відворотно пропорціональне до p .

Нехай a_1 буде новою сталою, то формулка так предстать ся :

$$pv - p \frac{b-Bc}{1-c} + pa_1 \frac{b-Bc}{1-c} = p(v - (1-a_1) \frac{b-Bc}{1-c}) = \frac{K}{1-c} + a$$

або коротше $p(v-d) = K_1$

$$\text{де } K_1 = \frac{K}{1-c} + a, \quad d = (1-a_1) \frac{b-Bc}{1-c}$$

По такім розвиненню теорії виказує Noyes на цілім ряді обчислень, котрі примінив до широкого матеріялу поданого Бекманом [Zeitschr. f. phys. Ch. 2, 715], що така теорія знаменито годить ся з обниженем температури цїпнення доволі згущених розчинів.

З цілого ряду визначувань Бекмана обчислив d після рівнянн

$$p(v-d) = p_1(v_1-d) \text{ або } d = \frac{p_1 v_1 - pv}{p_1 - p}$$

елімінуючи заразом в той спосіб блуди експериментальні, що з такої пари вартостей на „ d “ брав середну. Потім для кожного окремого визначення обчисляв вартість $p(v-d)$, котра після наведеної теорії мусить бути незмінною для якої небудь концентрації. Щоби читателєви показати, як така теорія добре годить ся, обчислив середну

вартість із всіх $p(v - d)$, а в найближшій колумні представив відношене кожної з них до середньої.

Я подам ту кілька таблиць, котрі він уложив.

Над кожною з них є напис матерії, її формулка, тягар чистинковий і обчислена середня вартість d . В першій колумні є подане обнижене температури цїпнення p (що є майже просто пропорціональне до осмотичного тиску), в другій обем розчину v , в котрім є розпущений моль, в третій pv продукт обох, в четвертій вартості на $p(v - d)$, а в послідній їх відношене до середньої.

I. В розчині бензолу

p	v	pv	$p(v - d)$	відношене
1.	Ацетон $(CH_3)_2 CO$	(58)	$d = - \cdot 064$.	
1.220	4.594	5.606	5.684	1.001
3.615	1.507	5.448	5.679	1.000
5.365	0.9921	5.322	5.666	0.998
8.470	0.6088	5.157	5.686	1.001

Середна: 5.679

2. Бензальдегид $C_6H_5 \cdot CHO$ (106) $d = - \cdot 027$.

1.000	5.846	5.846	5.873	1.000
3.130	1.850	5.789	5.873	1.000
5.245	1.093	5.732	5.873	1.000

Середна: 5.873

3. Ацетофенон $C_6H_5 \cdot COCH_3$ (120) $d = + \cdot 0122$.

1.650	3.526	5.817	5.797	1.000
3.235	1.804	5.835	5.795	1.000
5.425	1.079	5.857	5.791	0.999
8.370	0.705	5.902	5.800	1.000

Середна: 5.796

4. Бензофенон $(C_6H_5)_2 CO$ (182) $d = + \cdot 069$.

0.960	6.120	5.876	5.809	1.002
2.480	2.408	5.971	5.800	1.001
4.440	1.371	6.087	5.781	0.997
6.140	1.010	6.197	5.773	0.996
8.420	0.7604	6.401	5.820	1.004

Середна: 5.797

Дальше наводить праву камфору $C_{10}H_{16}O$ (152) $d = +0.1154$, хлораль $d = +.0276$, ацеталь, квас оцтовий, фенетоль, нафталіну і т. д. разом 14 матерій. Потім подає 21 таких таблиць для різних матерій розпущених в квасі оцтовім і 6 таблиць для матерій розпущених в воді. Всюди та сама згідність.

Отже формулка $p(v - d) = \text{konst.}$ дає добре вираз тій аномалії супроти закону Воіля.

Дальше ставить Noues питанє, чи обчислене з таблиць Бекмана „d“ має справди значенє сталої „d“ випровадженої в теорет. формулці. Як видно она складає ся з многих инших чинників і є так скомплікована, що він не сподїє ся, щоби ю можна докладно кількостно доказати. Але деякі заключеня, які тут дають випровадити ся, справджують ся з дійсностю дуже добре.

З рівняня $d = \frac{1 - a_1}{1 - c} (b - Bc)$ виходить, що 1) чинник $\frac{1 - a_1}{1 - c}$ є все позитивний, отже 2) d мусить бути раз позитивне раз негативне після того, чи „b“ є більше чи менше від Bc — иньшими словами — чи обєм розпущених частинок є більший, чи менший від обєму частинок розчинника при рівних з другої сторони обємах, А дальше сумаричний обєм частинок в обох случаях (b resp. Bc) є рівний продуктови обєму одинокої частинки і числа частинок, котре знов є просто пропорціональне до питомої, — а відворотно до молекулярної ваги. Означім через b_0 і b_1 обєми одної частинки розчинника resp. розпущеної матерії, а через A_0 і A_1 відповідні квоти пропорціональні до числа частинок і наконєць зберім всі незнані чинники в X, то дістанемо:

$$d = \frac{1 - a_1}{1 - c} (b - Bc) \text{ або } \frac{d}{B} = \frac{1 - a_1}{1 - c} \left(\frac{b}{B} - c \right)$$

$$\text{рівне } \frac{d_1}{B_1} X = A_1 b_1 - A_0 b_0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{Для иншої субстанції } \frac{d_2}{B_2} X = A_2 b_2 - A_0 b_0.$$

Через полученє тих двох рівнаній

$$\left(\frac{d_1}{B_1} - \frac{d_2}{B_2} \right) X = A_1 b_1 - A_0 b_0 \dots \dots \dots (2)$$

З рівнаній (1) і (2) можна в деяких случаях обчислити зглядні розміри різних частинок. X є позитивне. Отже після того чи вираз при нїм є позитивний чи негативний, буде $A_1 b_1$ більше або менше від $A_0 b_0$ (або $A_2 b_2$). Дальше по розваженю ще того, що лиш тоді можна робити слїдуючі обчисленя, як $A_1 - A_0$ (або $A_1 - A_2$)

має знак протилежний як вираз при X, подає знов таблицю, в котрій є обчислені зглядні розміри різних частинок, що були розпущені в бензолу.

назва	символь	$\Delta \times 100$	$\frac{d}{V}$	частинка більша від	а менша ніж
бензолъ	b_0	1.13	+105	b_6	$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}$
ацетофенон	b_1	.86	+565	b_6, b_8, b_7, b_8	$b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_{10}$
ацеталь	b_2	.70	$\angle$	$b_0, b_1, b_5, b_6, b_7, b_8, b_{10}$	b_3, b_4
камфора	b_3	.65	+750	$b_0, b_1, b_2, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_{10}$	
бензоан етиловий	b_4	.70	+606	$b_0, b_1, b_2, b_5, b_6, b_7, b_8, b_{10}$	
нафталина	b_5	.90	+428	b_0, b_1, b_6, b_7, b_8	
ацетон	b_6	1.40	-896	b_7, b_8	$b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}$
бензальдегид	b_7	.99	-267	b_6	$b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_{10}$
нітробензолъ	b_8	.98	-490	$b_0, b_1, b_5, b_6, b_7, b_8$	$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_{10}$
бензофенон	b_9	.60	+414	$b_0, b_1, b_5, b_6, b_7, b_8$	$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_{10}$
фенетолъ	b_{10}	.80	+566	$b_0, b_1, b_5, b_6, b_7, b_8$	b_3, b_4

З того видно, що ві всіх случаях, де конституція позволяє судити о зглядних розмірах різних частинок, доходить ся до такої самої оцінки з обчисленої вартости що до d —. Noyes розбирає дальше подрібно ті відношення і відповідає на евентуальні закиди, особливо на kwestию аномального в тім зміслі поведєня оксимів і матерій алькогольних. Але в те входить нам непотрібно.

Замітне лиш се, що в плинній фазі комплікує ся закон діланя мас головню обємами частинок, що ділають на себе і то в мірі без порівняня більший, ніж питомими притяганнями між ними.

Так в той спосіб дійшли ми за думками Noyes'a до відношеній в плиннім середовищі, що є цілком аналогічні до стисненої газовой фази, котру теоретично обробив ван дер Вальс. Видимо ту, що найвизначнійшу ролю при тих перемінах відграють абсолютні зміри частинок матерій. Стоячи доперва на тій точці, можна оцінити, як слід працю ученого Ph. A. Guye оголошену в *Compt. rend.* 110 141. 1890 [Ref. Ostwald, *Zeitschr. f. ph. Ch.* V. 275], де він реасумуючи свої розважуваня над теорією ван дер Вальса, виказує, що стала „b“ в рівнанню $\left(p + \frac{v}{a^2}\right)(v - b) = RT$ мусять бути пропорціональна до молекулярної рефракції хемічної матерії. Як прийме ся $R = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{d}$,

то $\frac{MR}{K}$ буде рівне konst. K представляє ту відношене критичної температури (в безгляднім численю) до критичного тиску, котре з другої сторони є пропорціональне до сталої „ b “ згаданого рівняня.

Видимо з того ясно, що оптика може віддати неоціненні услуги кінетичній теорії плинів і взагалі хемії. Для цілости скажу ще пару слів про критичні стани. В місці (А) на лівій П, фіг. 2. на стороні 34., матерія знаходить ся в критичнім стані, отже температура, тиск і обем називають ся критичними (T_k), (P_k), (V_k). Обчислім условия того стану, отже вперед рівняне ван дер Вальса напишім в формі

$$V^3 - \left(b + \frac{RT}{P} \right) V^2 + \frac{a}{P} V - \frac{ab}{P} = 0$$

При температурах низше A маємо три коріні $V = V_1$, $V = V_2$, $V = V_3$, чому відповідає $(V - V_1)(V - V_2)(V - V_3) = 0$. При самім A ті коріні є рівні: $V_1 = V_2 = V_3 = V_k$ а тоді $(V - V_k)^3 = V^3 - 3V_k^2$

$$+ 3V_k^2 V - V_k^3 = 0, \text{ отже } b + \frac{RT_k}{P_k} = 3V_k (1), \frac{a}{P_k} = 3V_k^2 (2)$$

$$\frac{ab}{P_k} = V_k^3 (3), \text{ наконець:}$$

$$V_k = 3b \text{ з (2) і (3)}$$

$$P_k = \frac{a}{27b^2} \text{ з (2)}$$

$$T_k = \frac{8a}{27bR} \text{ з (1)}$$

$$a = 3V_k^2 P_k$$

$$b = \frac{1}{3} V_k$$

$$R = \frac{8V_k P_k}{3T_k}$$

Коли тепер в рівняню $\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$ тиск, обем

і температуру будемо виражати у відповідних критичних вартостях як одиницях, отже: $P = \alpha V_k$, $V = \beta V_k$, $T = \gamma T_k$, а відтак вилімінуємо a , b , і R то дістанемо

$$\left(\alpha P_k + \frac{3P_k}{\beta^2} \right) \left(\beta V_k - \frac{V_k}{3} \right) = \frac{8\gamma V_k P_k}{3} \text{ або}$$

$$\left(\alpha + \frac{3}{\beta^2} \right) (3\beta - 1) = 8\gamma \text{ рівняне зредуковане.}$$

Оно представляє систем зредукованих критичних ізотерм, що є ідентичні для кожної матерії без згляду на її хемічну будову (хоч з другої сторони для тої самої матерії не є правдиве).

На кожний случай видимо, що всяка хемічна сполука є збудована після того самого ідеального пляну. Що відповідаючі собі місця на такій кривині для різних утворів є в звичайних умовах оточуючої нас природи, лиш ріжно супроти себе положені, в слід за чим мають ріжні агрегатні форми на нашім обсерваційнім нівю, котрим перетнемо систем із всіх знаних матерій. Місця переходу тих форм в себе для кожної матерії з окрема є в звичайнім укладі сорядних p , v , t , ріжно положені, через зміну умов обсервації ми їх можемо здовільно пересувати.

Пригадаймо собі тепер з примірів давнійше наведених, що кожний з основних трьох агрегатних форм, має відповідно до перемогли будь то аттракційної, будь то термічної енергії цілком иншу роль в хемічній реакції.

I. Що в газовій фазі можуть мішати ся з собою фізично найріжніші матерії, що єї поле існує в порівнянню з тими двома є дуже широке, бо від тиску 0 аж до ∞ як лиш температура буде висша від критичної. Дальше, що тая фаза є одна одинокка, хочби як много містила в собі хемічних складнів, отже по поводі свого питомого енергетичного темпераменту потрапить єству вати з найріжнішими гетерогенними системами, а ново впроваджена в них викликати нераз основні переміни.

II. Що відношення рівноваг комплікують ся найбільше в плинних фазах, де обі енергії перехреснують ся. Число тих плинних фаз, що навіть поруч себе єсткують, може бути вже доволі велике, а активна вартість складнів не є незмінна, як при сталих творах (Horstmann), ані навіть не є пропорціональна до концентрації як при газах (див. теорія Noyes'a), з виключенєм рідких розчинів (теорія van't Hoff'a).

З того видимо, що на внішній вигляд хемічної рівноваги впливають найбільше два чинники енергетичні то є температура і тиск, бо від їх укладу та зміни буде в першій лінії залежати всякий міжмолекулярний та міжатомний рух матерії та єї системів, бо всяка хемічна матерія має в їх укладі своє поле єствовання обмежене (крім хемічних елементів) відділене різко агрегатними та аллотропними (або ізомерними) фазами.

Видимо також, що при чисто газових системах зміна атмосферного тиску, має найбільше значення, при сталих та плинних висотах температури (бо в них міждробинний тиск обчислює ся в тисячах кілограмів на 1 cm^2). Як з тої точки погляду, розберемо славу регулу фаз, впроваджену термодинамічно Джібсом з рівняння $de = td\eta - pdv + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2$ [де de означає зміну цілої

енергії, pdv ентропії (припустім енергії термічної), — pdv зміну праці а $\mu_1 dm_1 + \dots$ і т. д. зміну хемічної енергії,] то видимо, що там оба роди енергії, про котрі ту цілий час говорено є поруч себе зіставлені з противним знаком.

Отже вплив температури і тиску (або енергії притягання) є ту зіставлені поруч впливу хемічного середовища і зсумовані разом. Але найцікавійше, що при деяких системах можна один з механічних впливів навіть хемічним заступити.

Пр. етер мішає ся з водою і дає дві фази плинні, що верствують ся одна на другій. В міру того, як їх взаїмний сочинник розчинювання підносить ся враз з температурою, зникають обі, та зближують ся до критичної точки, в котрій цілком змішають ся. Але зовсім те саме явище можна викликати при сталій температурі степенним додаванем алькоголю, котрий розпускаючись в обох фазах, побільшує в них оба попередні сочинники способом тим самим.

На таке сповидне, поки що, з'унітаризоване сил, котре в регулі фаз видимо, а навіть як в тім случаю мірямо, хотів я звернути увагу.

Юліян Гіриак.

Відношенє геометрії метричної до метової.

НАПИСАВ

Др. Володимир Левицкий.

1. В геометрії можливі є дві точки виходу; або опираємо ся на незмінности т. зв. метричних власностей фігур (пр. незмінність віддаленя двох точок, постійність кута, замкненого двома простими і т. п.), або можемо стати на становищу загальнійшій і оперти ся на незмінности т. зв. метових власностей фігур (пр. постійність відношеня подвійного поділу). Звичайно робить ся так, що вперед розсліджує ся власности метричні фігур, а від них переходить ся до власностей метових; но та дорога не конче є потрібна. Можна здвигнути цілу будівлю геометрії метової при помочи виключно їй питомих аксіомів без відкликуваня ся до помочи геометрії метричної.¹⁾

В так побудованій геометрії метовій остають без зміни усякі власности метові при якій-небудь колїнеації (посвяченню), якої виразом є формули (в сорядних однородних):

$$\left. \begin{aligned} \rho x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 \\ \rho x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 \\ \rho x_3' &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 \\ \rho x_4' &= a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 \end{aligned} \right\} 1).$$

Ту маєм 15 сочинників, значить ся маєм в трирозміровім просторі ∞^{15} посвячень, отже геометрия метова займаєть такими відношеннями фігур, які остають без зміни для 15-частної групи G_{15} .

¹⁾ Пор. Enriques: Geometria proiettiva. Bologna 1897.

2. Приймім отже, щосьмо здвинули вже геометрию метову і спитаймо, як тепер на відворот від тої загальнійшої геометрії перейти до спеціальнійшої т. є метричної геометрії.

В геометрії метовій не робить ся ніякої різниці між поодинокими площами, бо они всі є рівноважні, за се геометрия елементарна вирізняє площу безконечно далеку. Наколи отже хочем перейти від геометрії метової до елементарної, мусимо вперед долучити до неї площу безконечно далеку. Через се мусимо з поміж усіх ∞^{15} посвоячень вибрати такі, що площі безконечно далекої не нарушають, при яких отже площа та сама в себе переходить. Будуть се — в звичайних прямокутних сорядних — посвоячення подібні:

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \end{aligned} \right\} 2).$$

Сочинників є тут 12, отже посвоячень маєм ∞^{12} , а група G_{15} спаде через долученє безконечно далекої площі на G_{12} .

Але через се ми не дійшли ще до геометрії елементарної, в якій фігури уважаєм тоді за рівноважні, наколи они переходять в себе через рух (отже є пристайні), або через відбите (пристайність відворотна), або через перетворення подібні (подібність). Ті всі перетворення дають групу G_7 (т. є. ∞^6 рухів, ∞^1 відбить і перетворень подібних); наколи до неї хочемо дійти, щоби ся найти в царині геометрії елементарної, мусимо долучити до геометрії метової попри площу безконечно далеку ще якийсь утвір з 5 сталими; сей утвір остати мусить без зміни при усяких колінеациях. Твором з 5 сочинниками є крива другого степеня (переріз стіжковий; значити его будем через C_2). Понеже ми долучили до геометрії метової безконечно далеку площу, то і долучена крива C_2 лежати мусить в тій безконечно далекій площі і бути уявна (мнима). Таку криву C_2 називає Кляйн і Lie колом кулистим (Kugelkreis). Щоби его дістати, треба перерізати кулю, дану в сорядних однородних:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a_{11}tx + 2a_{12}ty + 2a_{13}tz + a_{14}t^2 = 0$$

(т звичайно $= 1$, наколи берем сорядні неоднородні) площею безконечно далекою; дістанем тоді рівняне кола кулистого:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0. \quad 3).$$

В сорядних Plückera (площі) u, v, w дістанемо — як Кляйн доказує — рівняне сего утвору:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Наколи отже хочемо перейти від геометрії метової до елементарної, мусимо долучити до неї площу безконечно далеку і кулисте коло.

В геометрії на площі річ о стілько упрощує ся, що місто безконечної площі треба брати просту безконечно далеку $t=0$ і утвір $x^2+y^2=0$; оба они разом дають т. зв. мнимі точки колові; прості $x+iy=0$ та $x-iy=0$ перетинають ся проте в двох безконечно далеких точках колових. Ті точки колові відповідають кулистому колу в просторі.

[Ту мусимо додати, що сам утвір $x^2+y^2+z^2=0$ є стіжком мінімальним (стіжок, що з него остав лиш вершок); его творячі є простими мінімальними. На площі є $x+iy=0$ і $x-iy=0$ простими мінімальними, а кут між двома простими на площі є рівний:

$$\varphi = \frac{1}{2} \log DV \quad 4),$$

де DV є стосунок подвійного поділу між тими двома простими, а мінімальними, що ідуть з вершка сего кута — як се Laguerre¹⁾ доказав. Се виражене на кут буде нам дальше потрібне].

Загальнйше можна розв'язати квестію переходу від геометрії метової до елементарної в площі, долучаючи не мнимі точки колові, але долучаючи після Cayley'a²⁾ який небудь переріз стіжковий C_2 , який назовем абсолютним перерізом стіжковим. Дістанемо тоді три різні евентуальности:

- 1) берем абсолютний C_2 мнимий.
- 2) " " C_2 дійсний.
- 3) " мниму пару точок.

Геометрію з долученням мнимим C_2 назовем за Кляйном еліптичною, з долученням дійсним C_2 гіперболічною, з долученою парою точок мнимих параболічною. Та послідна є, як се відразу видно, ідентична з геометрією, що повстала з метової через долучене точок колових.

3. Побачимо тепер, яка заходить зв'язь між тими трома рядами геометрії Cayley'a а т. зв. геометрією неевклідовою; підєм ту дорогою, вказаною через Кляйна в его викладах про геометрію метову в зимовім семестрі р. 1900/01 в Гетінген.

Як відомо, в геометрії евклідовій на перший план висуваєсь т. зв. аксіом лній рівнобіжних.

¹⁾ Пор. Nouvell. Annal. 1853.

²⁾ Пор. Philos. Transact. 1859.

Возьмим якусь лінію і получим точку q на ній з якоюсь точкою p ; най же та точка q посувався постійно на право, то тоді



граничне положене луча pq назвем положенем рівнобіжним. Чи можливе є тільки одно таке положене? В дій-

сности точка q може посуватись і на ліво до положення граничного і тоді можливе є друге положене рівнобіжне. Заходить отже kwestія, чи оба ті положення є одним і тим самим, чи ні, т. є. чи через точку p переходять дві, чи одна рівнобіжна. Геометрія евклідова приймає лиш одну рівнобіжну; наколи однак приймем дві рівнобіжні ідучі через p , не станемо в суперечности з логікою, а дійдем до геометрії, якої вислїди будуть відмінні від вислїдів геометрії евклідової. Тою дорогою пішли *J. Bolyai*¹⁾ і *Лобачевский*²⁾ і сотворили перший рід геометрії неевклідової, де через кожду точку переходять дві рівнобіжні.

Але можлива є еще і друга евентуальність, на яку звернув увагу *Riemann*³⁾. Заложене, що існує граничне положене для лінії, що іде через точку p , містить в собі заложене, що дана лінія є безконечно довга. В дійсности (пр. в світї фізичнім) не повинно ся говорити про лінію безконечно довгу; можна говорити, що лінія є необмежена, дуже, дуже довга, але не нескінчена (так пр. в геометрії метовій кожда проста є замкнена). В виду сего не може існувати і положене граничне, але що найбільше асимптотичне; нема отже і ліній рівнобіжних.

Приходим через се до другого рода геометрії неевклідової, вповні логічної, як і перша; ту в просторі нема зовсім ліній рівнобіжних, а кожда проста є замкнена і скінчена. А що аналогічний случай заходить на кулі, де кожда лінія вертає сама в себе, проте геометрія *Riemann*'а носить також назву геометрії сферичної; можемо собі з'уявити певну кулю о лучу R , де виступають аналогічні відносини, як в геометрії *Riemann*'а; тоді є $\frac{1}{R^2}$ мірою кривини кулі, а разом мірою кривини простору

¹⁾ Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens etc. (пор. *W. Bolyai*: Tentamen 1832).

²⁾ Exposition des principes de la géométrie, Kasan 1826. недруковане; опісля 1829.

³⁾ Über die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen (*Riemann's Werke*) надруковане по смерті *R.*

Riemann'a. (В дійсности є два роди сеї геометрії, на що увагу звернув доперва Klein¹⁾; один рід, де дві прості перетинають ся в одній точці, а через дві точки переходить одна проста; є се поєдиньча геометрія. Другий рід, де дві прості перетинають ся в двох точках, де отже через дві точки переходить безконечно много прости, є т. т. зв. подвійною геометрією R. Та в се ближе не входимо). Аналогічно перший рід геометрії неевклідової назвати можемо геометрією псевдосферичною; їй відповідає куля о лучу iR , отже мірою кривини сеї геометрії є $-\frac{1}{R^2}$; та о тім далі буде обширнійше бесіда. — Очевидно для геометрії евклідової є $R = \infty$, отже міра кривини виносить 0.

4. Вернім тепер до геометрії метової, то побачимо, як тісна звязь заходить між нею, а трома що-йно наведеними родами геометрії метричної. Покаже ся, що геометрія параболічна відповідає звичайній геометрії евклідовій, гіперболічна геометрії Лобачевского, а еліптична геометрії Riemann'a. На се перший звернув увагу Кляйн²⁾.

Переходу довершимо в слідуєчий спосіб. Наколи маєм два лучі о сорядних лінійових $(x_1 x_2 x_3)$ і $(x_1' x_2' x_3')$, то кут між ними виражує ся, як відомо, формулою:

$$\omega = \arccos \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}} \quad 5),$$

а кут між двома площами о сорядних площі $(u_1 u_2 u_3)$ і $(u_1' u_2' u_3')$ виражує ся формулою:

$$\varphi = \arccos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2}} \quad 6),$$

де $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ представляє в сорядних лінійних, а $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$ в сорядних площі рівняне стіжка мінімального.

Місто мінімального стіжка приймим за підставу після теорії Cayley'a абсолютний переріз стіжка C_2 в сорядних однородних; через се обмежимо ся до площі.

Наколи сорядні $x_1 : x_2 : x_3$ представляють в площі точку, або в точці луч, а сорядні $u_1 : u_2 : u_3$ на площі просту, або в точці площу, то рівняне безглядної кривої C_2 буде:

$$\Omega(x_1 x_2 x_3) = 0 \text{ в сорядних точкових, а}$$

$$\Phi(u_1 u_2 u_3) = 0 \text{ в сорядних лінії простої.}$$

¹⁾ Math. Annal. 4. p. 604.

²⁾ Math. Annal. 4. 6.

Узагальнюючи за Кляйном рівняння 5) та 6) дістанемо на відступ двох точок (x_1, x_2, x_3) і (x_1', x_2', x_3') форму:

$$\omega = \text{c. arc cos} \frac{1}{2} \frac{x_1' \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + x_2' \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} + x_3' \frac{\partial \Omega}{\partial x_3}}{\sqrt{\Omega(x_1, x_2, x_3)} \sqrt{\Omega(x_1', x_2', x_3')}} \quad 7),$$

де в чисельнику виступає пів бігунової; стала c є довільна, бо від нас зависить вибір одиниць мірничих. Кут між двома простими означимо рівнянем:

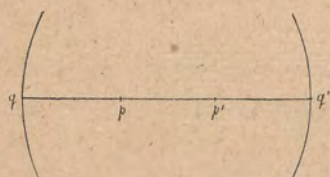
$$\varphi = \text{arc cos} \frac{1}{2} \frac{u_1' \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + u_2' \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + u_3' \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}}{\sqrt{\Phi(u_1, u_2, u_3)} \sqrt{\Phi(u_1', u_2', u_3')}} \quad 8).$$

Місто формул тригонометричних впровадимо форми Lagnerre'a:

$$\omega = c \frac{i}{2} \log DV, \quad \varphi = \frac{i}{2} \log D_1 V,$$

де DV є відношенє подвійного поділу. Се відношенє означимо в слідуючий спосіб:

$$DV = \frac{pq \cdot p'q'}{pq' \cdot p'q}$$



де $p(x_1, x_2, x_3)$ і $p'(x_1', x_2', x_3')$ є точки дані, що їх відступу шукаємо, а q і q' точки, де лінія pp' перетинає беззглядну криву C_2 .

Аналогічно є:

$$D_1 V = \frac{(\sigma\tau)(\sigma'\tau')}{(\sigma'\tau)(\sigma\tau')},$$

де σ і σ' є дані прості, а τ і τ' стичні, поведені до C_2 з точки, з якої ідуть прості σ та σ' . Очевидно значать $(\sigma\tau)$, sinus'u відповідних кутів.

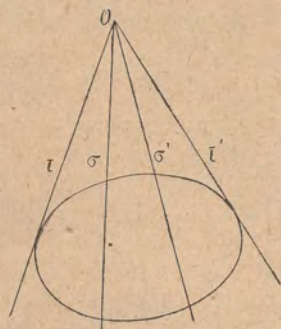
Перейдім тепер до поодиноких слу-
чайв.

5. Най крива C_2 буде мнима, отже маєм случай геометрії еліптичної.

Наколи криву C_2 віднесемо до трикутника спряженого з самим собою, дістанемо:

$$\Omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\Phi = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$



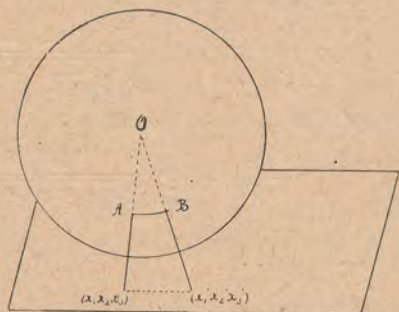
(сорядні однородні). Тоді дістанемо після формул 7) і 8) на відступ двох точок:

$$\omega = c \arccos \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}}$$

а на кут між двома простими:

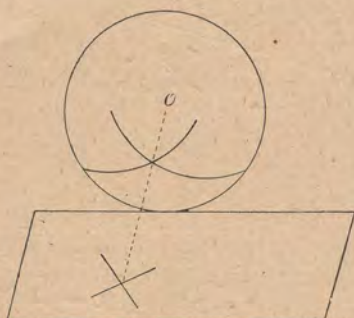
$$\varphi = \arccos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2}}.$$

В порівнянню з формулою 5) бачимо, що відступ двох точок є c рази так великий, як кут між простими, що ідуть через точку O , а кут між двома лучами є рівний куту між двома площинами, що ідуть через O . Наколи отже з O (поза площею Cayley'a) зачеркнемо кулю лучом $R = c$ і з O поведемо лучі до даних точок (x_1, x_2, x_3) і (x_1', x_2', x_3') , то відступ точок, в яких лучі ті перебувають кулю, є c рази так великий, як кут середоточний, що ті лучі его замикають. Можна проте сказати: Відступ двох точок на площі Cayley'a є рівний елементарному відступови їх образів A і B на кулі о лучу c .



Друга формула порівняна з 6) каже нам, що кут Cayley'a між двома простими на площі є рівний куту, який творять відповідні найбільші кола на кулі о лучу c , зачеркненої довкола точки O .

В загальї можна сказати: Відношення метричні геометрії еліптичної є впрост метом відповідних відношень, які існують на кулі, зачеркненої з точки O . Тамти при тім треба, що відношенє метове між кулею а площею є дво-однократне, бо два кінці проміру дають все на мет лиш одну точку.



Проста в геометрії еліптичній є скінчена, бо їй відповідає на кулі найбільше коло, а се має довготу $2R\pi = 2\pi c$; проста має проте довготу о половину меншу, т. є. $\pi c = \pi R$. Як з сего бачимо, R є сталою характеристичною, стисло звязаною з одиницею довготи (c).

Понеже проста є скінчена, тому в геометрії еліптичній нема граничного положення, нема проте рівнобіжної. — Як з сего видно, геометрія еліптична Cayley'a веде просто до геометрії неевклідової Riemann'a о просторі необмеженім, але не нескінченім.

6. Возьмім случай другий, т. є. криву беззглядну C_2 дійсну; через се маєм геометрію гіперболічну.

Наколи і ту рівняне кривої C_2 віднесемо до трикутника спряженого з самим собою, дістанемо:

$$\Omega = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

$$\Phi = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2.$$

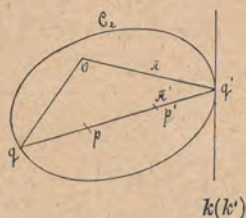
Відступ двох точок є ту:

$$\omega = c \arccos \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2' - x_3 x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2}}$$

а кут між двома простими:

$$\varphi = \arccos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' - u_3 u_3'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 - u_3^2} \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 - u_3'^2}}.$$

C_2 є дійсне, можна проте її нарисувати; тоді всі наші операції відбувати ся будуть в середині C_2 . Що дотикає кута φ між двома простими, то і ту остає то само, що передше, бо стичні, що ідуть з точки перетинання ся обох простих (а прості берем в внутрі кривої) до кривої C_2 , є мнімі. — Інша річ є з відступом обох простих.



Понеже:

$$\omega = c \frac{1}{2} \log DV,$$

а

$$DV = \frac{pq \cdot p'q'}{pq' \cdot p'q}$$

має дійсну вартість, а крім сего відступ обох точок має бути дійсний, то мусить бути конче:

$$c = -iR,$$

де $-\frac{1}{R^2}$ буде мірою кривини геометрії гіперболічної.

Що ся діє в безконечности? Покажемо, що обвід кривої C_2 представляє безконечно далеке, що проте проста має дві безконечно далекі точки, або що через одну точку ідуть дві віддільні рівнобіжні.

І справді в внутрі C_2 є $DV = \frac{pq' \cdot p'q'}{pq' \cdot p'q}$, а $\omega = \frac{R}{2} \log DV$.

Як довго знаходить ся p' в внутрі C_2 , так довго є DV дійсне. Наколи p' паде в q або q' (отже на C_2), то DV станеться рівне 0 або ∞ , $DV = \pm \infty$, отже віддаленє $pp' = \pm \infty$. Наколи p' вийде поза C_2 , то $DV < 0$, отже відступ pp' стане мнимий. Кожда проста має проте дві дійсні безконечно далекі точки, а се точки пересічи її з C_2 . Наколи возьмемо в C_2 точку O і получимо її з p' , то наколи p' стремить до q і q' , дістанемо дві рівнобіжні Oq і Oq' до pp' . В геометрії гіперболічній називаємо проте рівнобіжними такі лінії, які ся перетинають в точках обводу кривої беззглядної C_2 .

Бачимо проте, що геометрія гіперболічна в'яже ся з геометрією Лобачевського.

Який кут замикають дві рівнобіжні?

Наколи ті рівнобіжні є π і π' , а через їх точку пересічи поведем стичні k і k' до C_2 , то ті стичні спадають разом ($k = k'$). Тоді:

$$DV = \frac{\sin \pi k \cdot \sin \pi' k'}{\sin \pi k' \cdot \sin \pi' k} = 1, \quad \log DV = 0,$$

отже: дві рівнобіжні перетинають ся в точках беззглядної кривої C_2 під кутом zero.

З сего слідує дуже цікаве свійство трикутників вписаних в криву C_2 ; в кождім таким трикутнику всі кути рівняють ся zero, а боки є до себе рівнобіжні.

Бачили ми, що геометрію еліптичну можна інтерпретувати на кулі, або в загалі на поверхні о сталій додатній кривині в звичайнім нашім просторі. Завважити треба, що і геометрію гіперболічну можна інтерпретувати в звичайнім просторі на певних поверхнях псевдосферичних зі сталою кривиною відємною. Поверхні такі розсліджував перший Minding¹⁾, на їх значінє для геометрії неевклідової звернув однак увагу доперва Beltrami²⁾. Він доказав, що геометрія на таких поверхнях зовсім згоджує ся з геометрією Лобачевського. Вже Minding³⁾ постеріг, що наколи на таких

¹⁾ Crelle's Journal Bd. 19. 20. 1839. 1840.

²⁾ Saggio di Interpretazione della Geometria non-Euclidea (Giorn. di Matem. VI. 1868). Інші праці про ті поверхні є: Dini: Comptes rendus I. 1865, Enneper: Götting. Nachr. 1868. Bianchi: Dissertat. (Pisa 1879). Lie: Nouv. Archiv für Math. Bd. 4—5. 1879—1880. Backlund: Math. Annal. 19. (1882). Bianchi: Lezioni di Geomet. differenziale (1886).

³⁾ loc. cit.

поверхнях уважати будем трикутники утворені через лінії геодезичні, то в тих трикутниках будуть мали значіне усі форми тригонометрії сферичної, наколи в них місто луча R вставимо — iR . Такі форми дістав сучасний до Minding'a Лобачевський в своїй геометрії, але схожість їх з геометрією на поверхнях псевдосферичних постеріг доперва Beltrami.

7. Возьмім тепер третій случай геометрії Cayley'a т. є. геометрію параболічну, де абсолютна крива C_2 дегенерує ся в мниму пару точок.

Пара точок колових є:

$$u_1^2 + u_2^2 = 0,$$

но ми ідучи за Кляйном, напишемо се рівнянє в загальнійшій виді:

$$u_1^2 + u_2^2 + \lambda u_3^2 = 0,$$

де λ може приймати вартости додатні, відємні та zero. Для $\lambda > 0$ є абсолютна крива C_2 мнима (случай геометрії еліптичної), для $\lambda < 0$ є C_2 дійсна (геометрія гіперболічна); $\lambda = 0$ дає случай граничний, який тепер розбираємо.

В сорядних точок напишім рівнянє загальне абсолютної кривої C_2 в виді:

$$\lambda(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = 0.$$

Для $\lambda = 0$ є $x_3^2 = 0$, т. є. маємо подвійну безконечно далеку площу.

Кут між двома простими в розуміню Cayley'a буде тепер:

$$\varphi = \arccos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' + \lambda u_3 u_3'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \lambda u_3^2} \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + \lambda u_3'^2}};$$

з відси випаде для $\lambda = 0$:

$$\varphi = \arccos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}}$$

т. є. дістаєм відразу вираженє на кут таке саме, як в геометрії евклідовій.

Розслідім, чи і на відступ двох точок випаде для $\lambda = 0$ таке саме вираженє, як в геометрії евклідовій.

Для $\lambda = 0$ випаде на віддаленє двох точок:

$$\omega = c \arccos \frac{u_3 u_3'}{u_3 u_3'} = c \arccos 1 = 0;$$

то само дає і $\log DV$. Но побачимо, що річ випаде інакше, наколи в иньший спосіб перейдем до границі. Возьмім іменно: місто $\arccos$ $\arcsin$ на основі рівняня:

$$\arcsin = \arccos(\sin = \sqrt{1 - \cos^2});$$

тоді дістанемо на відступ двох точок взагалі:

$$\omega = \text{c arc sin} \sqrt{\frac{(\lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2)(\lambda x_1'^2 + \lambda x_2'^2 + x_3'^2) - (\lambda x_1 x_1' + \lambda x_2 x_2' + x_3 x_3')^2}{(\lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2)(\lambda x_1'^2 + \lambda x_2'^2 + x_3'^2)}}$$

Привієм λ дуже мале і розвинемо повнеше форму після степеней λ ; дістанемо:

$$\omega = \text{c arc sin} \sqrt{\frac{\lambda(x_1^2 x_3'^2 + x_2^2 x_3'^2 + x_1'^2 x_3^2 + x_2'^2 x_3^2 - 2x_1 x_1' x_3 x_3' - 2x_2 x_2' x_3 x_3' + \lambda^2(\dots))}{x_3^2 x_3'^2 + \lambda(\dots)}}$$

Наколи пропустимо вирази з λ^2 в чисельнику, а з λ в знаменнику, дістанемо:

$$\omega = \text{c arc sin} \sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{(x_1 x_3' - x_1' x_3)^2 + (x_2 x_3' - x_2' x_3)^2}{x_3^2 x_3'^2}}$$

Переїдїм до сорядних неоднородних, отже положім:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = x_3' = 1,$$

то дістанемо:

$$\omega = \text{c arc sin} \sqrt{\lambda} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Для $\lambda = 0$ перейшов би сей вираз в zero, наколиб не стала c , якої вибір лежить в наших руках. Виберім проте c так, щоби все $c\sqrt{\lambda} = 1$, а крім сего положім за $\sinus$ сам лук (се можливе з огляду на безконечно мале λ); тоді дістанемо:

$$\omega = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

а се є відступ двох точок, виражений взором геометрії аналітичної.

Бачимо проте, що геометрія параболічна Cayley'a відповідає геометрії евклідовій.

З причини вище поданих відношень між геометріями Cayley'a а трома родами геометрії елементарної переніс Кляйн назви: геометрія параболічна, гіперболічна і еліптична на геометрію Евкліда, Лобачевского і Riemann'a.¹⁾

Тернопіль, в лютім 1903.

¹⁾ Пор. літературу (крім вище поданої): W. Killing: Die nichteuklidischen Raumformen 2 Bde (Paderborn); Clebsch-Lindemann: Geometrie Bd. 2. 1 Leipzig 1891. F. Klein: Nichteuklidische Geometrie (автографоване) Göttingen 1893 (I. II). F. Klein: Projective Geometrie (в манускрипті в бібліотекі семінара математичного в Göttingen) 1901.

Фізична географія при кінці XIX. століття.

(Наукова хроніка за 1898, 1899 і 1900 р.).

Написав Др. Стефан Рудницький.



Нинішня розвідка не хоче бути нічим иньшим, як лиш *науковою хронікою* в області фізичної географії за пару послідних літ минушого що-йно століття. Рік тому рішив ся я приступити до зладження огляду важнійших праць в тій царині. Я почав роботу, але она за пару місяців так у мене під руками виросла, що я вагувавсь навіть поміщати її в „Науковій Хроніці“ Збірника.

Але через особний титул моя теперішня праця не затратила ціх наукової хроніки, хоч я подекуди старавсь її нагнути до загально прийнятого шабљона розвідки. Сей хронікарський характер треба мені виразно зазначити.

Я старавсь ту обняти і коротенько зібрати всі важнійші пости фізичної географії в літах 1899 і 1900, узглядивши при тім що найважнійші прояви з 1898 р. Що цілковите вичерпанє літератури було мені не можливе — не подивує ся ніхто, бо у львівських бібліотеках дуже малу лиш скількість географічних і споріднених публікацій мож було найти. Часто мусів я брати материял з другої руки, що впрочім в того рода розвідках, як теперішня, невеликою ще є провинною.

Зібраний материял я поділив на кілька груп після частий фізичної географії. Ідучи за приміром многих підручників я поставив на переді метеорольоію та кліматольоію разом з земским магнетизмом, дальше океанографію, а потім вже динаміку та морфольоію суші. Географії рослин і зьвірят в нинішній хроніці я не узглядив, бо ті два діли радше зачисляти належить до біогеографії, як до фізичної географії в тіснійшій значіно.

Закін приступимо до метеорольоічної часті, належить мені подати звістку про підручники обіймаючі цілість фізичної географії. На згадку заслугують ту передовсім два: Wagner'a і Günther'a.

Компендія фізичної географії Вагнера знаходить ся в першому томі його „Lehrbuch der Geographie (Hannover und Leipzig, Hahn, 1900)“, де обнімає книгу II. (ст. 228—561). Вправді не так знаменито, як математична географія в тім самім підручнику, є все таки і фізична географія ту дуже добре, а іменнож оригінально оброблена. Вплив Richthofen'a, Supan'a і Penck'a особливо в морфологічній частині є виразний, але зовсім самостійний погляд на цілість предмету надає творови Вагнера дуже велику вартість. Хоч оно до річи не належить, додам, що перший том Lehrbuch'a, обнімаючий загальну географію, є дійсно епохальним явищем і буде з певністю на цілі десятки літ підставою географічних студій. Головно цікавий є методичний вступ, а вже по вік остане характерною для розвитку науки географії (особливоз же фізичної частини) величезна різниця, яка заходить між теперішнім обробленням Вагнера загальної географії (1900) а такимже обробленням в останнім виданні (1883) сего підручника, де ще попри імя Вагнера фігурувало імя Гутто. Ту наглядно видимо, як змінився цілий характер географічної дисципліни в нецілих 20-ох літах, як скоро она поступила від сухої топографічної систематики до генетики.

Другою дуже знаменною для поступу географії фізичної книжкою є Günther: Handbuch der Geophysik II. Aufl. Stuttgart, Enke. I. Bd. 1897, II. Bd. 1899.

Се в своїм роді без сумніву chef d'oeuvre і підручник кончений для того, що хоче в геофізиці працювати. В історичнім вступі автор дуже уміло розграничає геофізику від споріднених з нею наук: фізики, астрономії та геології, признаючи їй землю на поле ділання. Перша книга обраляє космічне становиско землі, друга її величину, вид, густоту і рухи в просторі та картографію; третя внутрішнє тепло землі, вулканізм і землетрясення; четверта магнетні та електричні явища; пята атмосферологію: шеста океанографію; сема відносини моря і суші між собою, послідна морфологію земскої кори. Очитанє автора велике, отже звід літератури величезний. І ту порівнянє другого видання сеї книжки з першим (1884/5) як не мож ліпше поучує, як сильно в останніх літах зросла фізична географія і як розширивсь її обсяг.

З иньших книжок, що обнімають цілість або більші уступи з фізичної географії, треба згадати про другі видання знаменитих підручників французького геолога Lapparent'a. Его Traité de géologie (тепер II. ed. Paris Masson 1899, 1900) визначаєсь тим, що на кождім кроці узглядає потреби географа і їх нераз дуже уміло заспокоює. Leçons de géographie physique Paris, Masson 1898, того самого автора

збагатились в другім виданю новими розділами: про море і (дуже важним) про класифікацію гір.

Занотувати належить також друге видане фізичної геології Мухометова (Ст. Петербург, Єрлх, 1899), що важна з огляду на російські і азійські відносини там представлені (часто на підставі автопсії).

В звітній збірці Göschen'a вийшла коротенька книжочка Günther'a *Physische Geographie* (Leipzig, Göschen 1899), що в 11 розділах подає елементи нашої науки в досить приступний спосіб.

В Англії виходить від 1899 р. дуже широко закреслений атлас до фізичної географії: *Bartholomew's Physical Atlas*. Вийшов дотепер лиш IV. том: *Atlas of Meteorology*, Westminster, Constable 1899, 35 карт. Однак, хоч публікація ся дуже коштовна і на позір дуже поважна, то не може бути навіть для р. 1899 вважана останнім словом науки, бо не углядає дуже многих і важних новітніх метеорологічних праць. Проте і карти сего атласу в многих місцях остають поза наукою.

В серпні 1899 відбувся в Берліні VII-ий міжнародний конгрес географів. Ту обмежує лиш згадкою, що займався він дуже многими квестіями фізичної географії. Про головніші реферати сего конгресу подам звітку на иньшій місці Збірника.

I. Метеорологія і кліматологія*)

Склад і обсяг атмосфери.

Відкрите нежданого дотепер газу арґону, що входить попри кисень і азот в склад нашої атмосфери, навело учених на думку, чи нема в ній ще иньших незаних дотепер газових складників. І дійсно вже в 1898 р. удало ся Ramsay'єви і Travers'ови відкрити три нові гази, що входять в склад воздуха: Криптон, Неон і Метарґон¹⁾. Відкрите послідувало дорогою спектроскопічною. В дальших розслідах показало ся, що метарґон властиво не існує, натомість відкрили згадані учені ще один газ, а се ксенон. Всі ті гази є одно-

*) [Pop. Meinardus, Bericht über die Fortschritte der geographischen Meteorologie. Geographisches Jahrbuch XXIV. 1901. I. H.].

¹⁾ Zeitschrift für phys. Chemie XXXVI. 564.

атомні. Криптон і ксенон відзначають ся значним атомним тягаром (81·6 згл. 128·0, Neon має лиш 20·0). Скількисть їх всіх разом в воздуху є так мала, як скількисть золота в морській воді, не може отже практично в рахунок входити¹⁾. Киснем воздуху займавсь Leduc і найшов, що скількисть его в атмосфері в різних підсонях і висотах колибається лиш між 23·11 а 23·23% тягару²⁾. Досліди над тимсамим газом робив Stoney і порівнюючи скількисть кисня в атмосфері зі скількістю его в земській корі дійшов до результату, що на 2½ м. груба веретва земської кори має тількиж само кисня, що ціла атмосфера³⁾. Stoney думає, що водень і гелі в наслідок рухливости своїх частинок втікли з земської атмосфери, але се є мабуть неправдиве, бо істнованє гелі є доказане, а сьвіжо найшов Gautier, що на 10.000 частий сухого воздуху при 0° є всегда 1½ частий водня⁴⁾.

Скількисть квасу вугляного в воздуху означив St. Maurice de Thierry на двох стацях в висоті 1080 м. і 3050 м. на схлонах Монбляна і рівночасно в Парижі. Вислід був: скількисть вугляного квасу меньшає ідь горі, але дуже слабо⁵⁾.

Levy і Henriet виказали, що по при квас вугляний є в воздуху ще і иньші гази заключаючі вуголь пр. окис угля (CO)⁶⁾

Gautier думає, що всі ті гази заключаючі вуголь походять з процесів хемічних в ростиннім і звірячім сьвіті, бо аналіза морского воздуху ні сліду їх не показала⁷⁾.

Тойсам учений виказав також, що в воздуху існує йод, що правда не яко газ, а в виді сталім. Походить він мабуть з иньших організмів живучих в морі, бо морський воздух показав его найбільшу скількисть (на 1000 l — 0·167 mg). Воздух міський виказав его 13 разів меньше, подібнож воздух гірський і лісовий, з висотою зростає і скількисть йоду, бо органічний пил, що его заключає, іде горою⁸⁾. Морський воздух заключає також сіль кухонну (0·022 g. на 1 m³)⁹⁾.

¹⁾ Поп. Proceedings of Roy. Soc. LXIII. 405. LXVII. 329. Comptes Rendus CXXVI. 1610. Nature LVIII. 127. Annuaire pour l'an 1900 publié par le Bureau des Longitudes. 1899 стр. 15.

²⁾ Comptes Rendus CXXVI. 413.

³⁾ Philosophical Magazine XLVII. 565. Met. Zeitschrift 1899. 371.

⁴⁾ Comptes Rendus CXXVII. 693.

⁵⁾ Comptes Rendus CXXIX. 315.

⁶⁾ Comptes Rendus CXXIII. 125. CXXVI. 1651. CXXVII. 353

⁷⁾ Comptes Rendus CXXXI. 13 і 86.

⁸⁾ Comptes Rendus CXXIX. 9.

⁹⁾ Ibidem CXXVIII. 715.

На підставі 20-літніх обсервацій в Парижі сконстатував Albert Levy, що скількість озону виносить пересічно 1.65 mg. на 100 m³. Maximum припадає в червні (2.03), minimum в падолисті (1.34)¹⁾.

Паданнями пороку пассатового займається від певного часу німецька морська обсерваторія²⁾. В літах 1894 і 1895 їх майже не було, за се дуже часті були они в 1898 р.³⁾.

Ту можнаб також примістити досліді над блукаючими огнями Müller'a⁴⁾. В який спосіб они повстають, дотепер властиво незвісно. Є се фосфоризуючий воздух, але для чого він фосфоризує, не знаєм, чи в наслідок примішки фосфорного водня, чи ньших газів.

Причинок до пізнання висоти атмосфери подає Denning. Він находить, що лиш в дуже рідких случаях запалюють ся метеорити вище чим в 240 km. від поверхні землі⁵⁾.

Промінюванє.

Промінюванє сонця є так трудне до близшого пізнання, що мимо дуже довгих старань не удалось і до нині докладно означити т. з. сталої сонічної. Який є стан дослідів над сею справою, найхарактернійше показує конкурс, що его розписала берлінська академія наук тепер вже по раз другий. Задачню конкурсвою є: означити сталу сонічну так докладно, щоби в її обсерваціях протягом року видний був вплив ріжного в афелі і перігелі віддаленя землі від сонця.

Актінометричні досліді на горі Monte Rosa навели Ricco на гадку, що з одної стації не можна докладно означити сонічної сталої, а треба її означити на кількох стаціях мало від себе віддалених в поземім напрямі, а значно в прямовіснім. На горі Rosciamelone над долиною Susa вибрав він отже 4 стації в висотах 501 m, 1722 m, 2834 m і 3537 m. Від 2—6 вересня 1898 роблено обсервації актінотром Violle'a і Ricco найшов з них, що стала

¹⁾ Ciel et Terre XIX. 291.

²⁾ Pop. Segelhandbuch für den Nordatlantischen Ocean. Hamburg 1899 133 sqts.

³⁾ Annalen der Hydrographie XXVI. 1898. 246.

⁴⁾ Gaea 1900. 541.

⁵⁾ Ciel et Terre XIX. 158 d.

сонячна виносить 2·5 калорій на 1 см² і минуту¹⁾. Дещо пізніша дискусія інших вислідів і формул не змінила переконання Risso'a і він uznав за найліпшу вартість на стаду сонячну 2·5—2·6 калорій²⁾. Її се вартість без сумніву за мала. Pernter з обсервацій різних учених на Монблянї і Monte Rosa прийняв за сонячну сталу 4 калорій³⁾.

Дотична розвідка Schreiber'a заключає лиш формули⁴⁾; так само розвідка Steiner'a⁵⁾.

Reusker вказує на вагу тїни гір на кліматичні, біологічні і гігієнічні відносини місцевостей, положених в долинах. Іменно ходить ту о се, що гори закриваючи части небозводу зменьшають час сонячного промінювання і його скількість. Для кількох місцевостей в Альпах і в Німеччинї Р. обчислює сей вплив⁶⁾.

Ясність і поляризацию світла неба в зеніті обсервував 1894 1896 Jensen фотометром Вебера. Показало ся, що нормальний дневний хід поляризації в зеніті є функцією висоти сонця. Minimum припадає на час кульмінації сонця, maximum тоді, коли оно стоїть о 2° нисше орудю. Коло полудня і пізно пополудня хід поляризації заколючуєсь. В лїті поляризация є зглядно мала, в зимі зглядно велика. Дим, мрака і хмари дуже шкодять нормальному її ходови⁷⁾.

Абсорбцию зьвіздяного світла розелїджували Müller і Kempf рівночасно в Катанї і на Етні. Дослїди не довели до рішучого результату, бо воздух в Катанї був наслідком довгої посухи і множества пороку так непрозорий, що зьвізди раз о 0·24, другий раз аж о 0·53 класи показувались слабші, чим на Етні⁸⁾. Промінюване сонця підчас цїлковитого затемніа 1898 I. 22. розелїдив на підставі 154 стацій в Індиях Eliot і найшов, що так натуга промінювання, як і температура слїдували досить докладно за змінами величини сонячного кружка⁹⁾.

¹⁾ Memorie della società degli spettroscopisti italiani 1898. XXVII. 10

²⁾ Memorie della Reale Accademia di Torino 1898. Ser. II. XLVII. 319.

³⁾ Meteorologische Zeitschrift 1896. 105 д.

⁴⁾ Abhandlungen des Sächsischen met. Instituts. 1899. H. 4.

⁵⁾ Meteorologische Zeitschrift 1898. 193 д.

⁶⁾ Verhandlungen des XII. deutschen Geographentages in Jena. 225 д.

⁷⁾ Beiträge zur Photometrie des Himmels. Schriften des natur. Vereins f. Schleswig.-Holstein XI. 1899. H. 2. 281 д.

⁸⁾ Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam XI. Nr. 38. 211.

⁹⁾ Indian Meteorological Memoire XI. 1898. 1 д.

Цікаві дослідн про абсорбцію сонячного тепла в атмосфері робив Angström на трох стаціях розміснених на різних висотах вулкана Pico de Teyde. Показало ся, що загальна сила промінювання росте підчас дня від висоти 0—3700 м. близько о 30%, а прямовісна сила промінювання о 22%. Той приріст промінювання з ростучою висотою є тим скорший, чим більша зенітальна віддаль сонця. Сочинник прозорості показавсь значним¹⁾. Müller²⁾ найшов, що натуга промінювання сонця є найменша в липни. Кривина вказувалаб на minimum в грудни або січни. Другостепенного maximum в вересни не сконстатовано.

Заки покину справу промінювання, мушу ще згадати теорію Svante Arrhenius'a. Він на підставі обсервацій промінювання старає ся вяснити вікові кліматичні періоди³⁾. Він обчисляє, що зменшене скількості вугляного kwasу о $\frac{2}{3}$, викликалоб під +55° ширини обнижене температури о 3°, під +20° о 4·1°. Побільшене скількості сего газу в атмосфері викликалоб підвишене температури о 3·3°, зглядно 4·4° і ослаблене денних і річних колибань температури.

Температура воздуха.

а) Промінюване, абсорбція і розділ тепла.

Абсорбцію сонячного тепла в атмосфері розсліджував математично Schreiber і обрахував для різних географічних ширин теплоту, яку дістають, коли приймем за сонячну сталу 3 калорії, а за вартість абсорбційну 0·4. Вислїди одержані є зовсім відмінні від результатів Langley'a, Violle'a⁴⁾ та иньших.

Liznar обчислив на підставі права промінювання Stefan'a температури рівнобіжників морських і сухопутних⁵⁾, котрі згоджують ся дуже близько з дійсно обсервованими, а инакше обчисленими температурами.

Про розділ температури в атмосфері уложив Körpen зовсім оригінальні тези. Поземий розділ температури робить Körpen зави-

¹⁾ Nova acta regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. 1900 Серія II.

²⁾ Aktinometerbeobachtungen im Observatorium zu Katharinenburg, Извѣстія императорской Академіи наук. XI. 1899. 61.

³⁾ Ciel et Terre XX. 389 g. 411 d

⁴⁾ Abhandlungen des kgl. sächs. meteorol. Institutes 1899 H. 4.

⁵⁾ Meteorologische Zeitschrift 1900. 36 d.

сими від 1) ріжниць в промінюваню 2) термічних ріжниць моря і суші і 3) від вітрів та струй морських. З сего виводить він 9 головних засад: 1) Середні температури меншають разом з сумою промінювання від рівника до бігунів. 2) Ріжниці температурні пір року більшають в тім самім напрямі. 3) Захмаренє в день, в літі і в низьких ширинах знижає, в ночі, в зимі і в високих ширинах підвищає температуру. 4) Середні річні температури від рівника ко бігунам меншають скорше на суші, чим на морі. 5) Ріжниці температурні пір року і дня є більші на суші чим на морі. 6) Вода покрита грубим льодом поводить ся як суша, а суша покрита снігом показує свойства суші ексцесивно. 7) Вітри, наколи не віють постійно в одну сторону, вирівнюють ріжниці температури, слиж віють постійно, то пересувають температурні відносини в своїм напрямі. 8) Таксамо пересувають морські струї температурні відносини в тім напрямі, в котрім течуть. 9) Наколи гори стримують вітри, клімат дістає льокальні властивости.

До прямовісного розділу температури подає Кӧрпен чотири тезв: 1) Температура сухого воздуха обнижає ся о 10^0 на 1 km. зміни висоти, бо кождий газ остуджуєсь при меншаню тиску. 2) Бєли воздух є вохкий, то при остудженю повстають хмари, теплота при тім увільнена зменьшає при дальшій взношеню остудженє о половину. Слиж впаде дощ, то він приносить з собою низшу температуру з гори, а сам паруючи єще єї обнижає. 3) Рухи прямо-вісні воздуха є досить рідкі — не ма їх, коли воздух в певній висоті є мало що зимнійший або і теплійший як на долині. Тоді прямовісна зміна температури є не 10^0 а лиш 4— 5^0 на 1 km. 4) Абсолютна висота температури є означена тою температурою, при котрій на поверхні суші або моря є рівновага між одержанням а виділенням теплом¹⁾. З нових графічних представлень розділу температури згадати треба про новий „Physical Atlas“ Bartholomew'a і Herbertson'a, (Westminster 1899. Constable), котрий однак оригінальних карт не подає.

б) Температуру над ріжними родами ґрунту розелджував Jaubert і виказав, що температура є висша над деревяним бруком або бітумінічним ґрунтом, чим над муравою. Над камінним ґрунтом температурне колибанє є ві всіх порах року меньше²⁾. Mellish виказав, що в легкім ґрунті в глибині 1 стопи є температура о 1^0 F

¹⁾ Köppen Klimalehre. Leipzig 1899. Meteorologische Zeitschrift 1900. 183 д.

²⁾ Comptes Rendus CXXVI. 1405 д.

висша чим температура воздуха, в тяжкім же ґрунті лиш о 0.2° , що зависить мабуть від інсоляції. Мах. ріжницї випадає в жовтні, min. в марті¹⁾.

в) *Вплив ліса на температуру* воздуха і землі не перестає цікавити учених, іменно, що ся kwestія до тепер не рішена. Schubert оголосив дуже цікаву студію про температуру ґрунту і воздуха в лісах²⁾. В зимі є ґрунт лісовий дещо тепліший, як поза лісом, в літі холодніший, середно також дещо холодніший. Подібно, лиш меньше виразно, поводить ся температура воздуха.

Не меньше знаменна є друга розвідка про сю справу, що впрост дотичить питання впливу ліса на клімат: Schreiber. die Einwirkung des Waldes auf Klima und Witterung. Dresden, Schönfeld 1899. S. розеліджував всі метеорольоґічні стації Саксонії і прийшов до висліду, що ріжницї в кліматі між тими стаціями походять лиш з ріжної висоти понад поверхнею моря. Ані географічна ширина та довжина, ані льокальне положене не мають великого впливу. Ліс також впливає дуже мало на температуру, бо цілком ліснеста околиця є річно лиш о $0.4-0.8^{\circ}$ холодніша як околиця цілком позбавлена ліса. Ще менший, ба навіть дуже сумнівний, є вплив ліса на вихкість і висоту опарів.

г) *Температура снігової оболони* була предметом дослідів В. Саткого в Тернополи (1896—1898). Взагалі є поверхня снігова о 0.4° холодніша чим воздух, в 5 см глубини температура є о 1.9° , в 10 см. о 2.3° висша чим на поверхні³⁾.

д) *Температура в містах* є завсїгди висша чим в околици. Hann сконстатував в Грацу, що температура міста є середно висша о 1.4° . Мах. 1.7° припало в жовтні, min. 1.0° в цвітні. Також колибання температури є значно менші в місті⁴⁾.

е) *Неперіодичні колибання температури.*

Про наглі приморозки і способи, щобі їх шкідливий вплив на вегетацію зменьшити, говорить Trabert на підставі студії Hammon'a⁵⁾. Головні средства є: зменьшене промінюваня штучними заслонами, підвишене точки топлєня через палєне гною та мокрої соломи,

¹⁾ Quarterly Journal of R. Met. Society. XXV. 1899. 238 дд.

²⁾ Über den jährlichen Gang der Luft und Bodentemperatur im Freien und in Waldungen etc. Berlin 1900.

³⁾ Meteorologische Zeitschrift 1899. 97 д.

⁴⁾ Sitzungsberichte der Wiener Academie. Math. nat. Cl. CVII. II a. 167 д.

⁵⁾ Meteorolog. Zeitschrift 1899. 529 д.

доставляване тепла воздуху через малі огники, відпроваджуване зимного воздуха з гори в долину через аспірацію викликану паленням огня в долинах.

Назен розслідував хід температури і вохкості перед приходом наглого зимна. Він найшов, що зглядна вохкість тоді сильно зменьшавсь і осягає свій найнижший степен на пару годин, заки температура стане опадати. Чим низше спаде вохкість, тим низше спаде температура¹⁾.

Наглі і великі горяча в Австралії 1896 І. обговорює Todd. Их причиною були знижки барометричні, що допроваджували до полудневої Австралії північні жаркі вітри. По переході знижки температура нагло опала. (Melbourne 1896 І. 23 : V^a 14.3°, IV^p 42.2°, V^p 26°)²⁾.

Справа маєвих приморозків і т. з. зимних съвятих займала знов многих учених, іменно, що поветаня тих приморозків дотепер не вияснено. Bezold, на підставі дослідів Müttrich'a, сконстатував уже на певно, що дні 11—13 мая є завжди під зглядом температури аномально холодні³⁾. Hennig пробує вияснити єю справу на підставі синоптичних карт. Характерне є для маєвих приморозків те, що сучасно на западі або північнім западі виступає високе тиснене. Спад температури слідує по переході знижки, коли прийде антициклон⁴⁾.

Зовсім нову дорогу до виясненя сего явища подав найновіший час. Постановлено розслідувати сей проблем (враз з многими иньшими) через рівночасне пускане в різних сторонах Європи бальонів з інструментами, що самі реєструють. Таке міжнародне пущене бальонів відбуло ся 1897. V. 13. і переконало всіх, що бодай в тім случаю обнижене температури в западній Європі походило з того, що 10 km. груба струя полярного воздуха дісталась аж туду. Над східною Європою віяла струя рівникового теплого воздуха. Hergesell думає отже, що маєві приморозки повстають наслідком великих воздушних струй, що ідуть від бігуна⁵⁾.

є) *Прямовісний розділ температури* є тепер дуже актуальним предметом розсліdiv. Бальони і змії пускані в різних сторонах сьвіта показали, що відносини в горішних районах атмосфери є

¹⁾ Monthly Weather Review. XXVI. 1899. 291 д.

²⁾ Meteorologische Zeitschrift 1899. 518 дд.

³⁾ Meteorologische Zeitschrift 1899. 114 дд.

⁴⁾ Wetter XV. 1898. 85 g. 105 g. 131 g. 145 d.

⁵⁾ Meteorologische Zeitschrift 1900. 15 g. Petermanns Mittheilungen 1900. 111 д.

нам майже незнані а дуже цікаві. Обсервації на дуже високо положених стаціях також недавно лиш розпочато так, що ціла та віть метеорології є дуже молоденька. Тим не менше її розвиток поступає дуже скоро і каже надіятись щораз то красивих результатів¹⁾.

Температура високих гір розсліджує ся в Європі головню в Альпах, де є кілька дуже високо положених стацій.

В долишню австрійських Альпах (Raخالpe, Schneeberg) розсліджував Trabert меншане температури з висотою. Він найшов передовсім велику різницю сторони під і за вітром. Між висотами 200 а 800 є сторона за вітром середню в році о 1° тепліша — різниця росте з висотою і доходить іменно в літі до 2° . В загалі маліє температура в найнижших регіонах в літі дуже скоро, в зимі же дуже поволі. Чим висше йдем — тим скорше приходить літне maximum і зимове minimum²⁾.

Температуру верхів Sonnblick (3106 m) і Obir (2140 m) обробив Hann. Замітна є ту аномалія денного ходу температури з другорядним maximum о 4° а minima-ми о 11° і 7° . Дати річного ходу температури є: Obir рік -0.2° , січень -7.4° , липень $+8.3^{\circ}$; Sonnblick рік -6.3° , лютий -12.9° , липень 1.2° . Середнє убунане теплоти з висотою є середню 0.60° на 100 m., в грудни 0.51° , в серпни 0.69° . Цікава є температурна різниця між Obir-ом а Целівцем. В літі є ту різниці 0.65° на 100 m., в зимі 0.1° на 100 m.³⁾.

Прямовісний розділ температури в середнонімецьких горах опрацював Kremser⁴⁾. Температура маліє з висотою в тих горах (Гарц, Карконоші, Erzgebirge, Thüringerwald) значно скорше по полудневій чим по північній їх стороні, іменнож на весну. Середний річний убуток теператури є 0.57° .

На шпилью штрассбурскої вежі (136 m) виносить денна амплітуда температури 4.8° , на долині 7° . Maximum приходить на горі $3^h 50^m_p$, на долі 2.48^m_p . Minimum $6^h 5^m_a$, зглядно $4^h 50^m_a$.

Результати сімох міжнародних бальонових злетів 1897—1899, котрі дали 32 температурні ряди, опрацював Hergesell. Отсе єго

¹⁾ Загальну орієнтацію що до тих розслідів подає книжка Fonvielle: Les ballons sondes etc. Paris. Gauthier-Villars 1898.

²⁾ Meteorologische Zeitschrift 1898. 249 d.

³⁾ Anzeiger der k. k. Akademie der Wissenschaften 1898. XIII.

⁴⁾ Klimatische Verhältnisse des Elbstromgebietes, Berlin 1899. 26 d. SA. з Elbstromwerk.

⁵⁾ Petermanns Mittheilungen 1900. 28 d.

висліди: 1) Денна кривина температури зі зростаючою висотою скоро пласне. Денні колибання температури є вже в висоті 800 m. навіть в погідних днях ледви 3—4°. 2) Горішні верстви атмосфери не підлягають так сильному промінюванню як долішні, для того в ночі температура в міру підношення в гору росте. Атмосфера виказує ві всіх висотах аж до 10000 m. колибання температури, котрі доходять або переходять 40°. Місцеві ріжницї в температурі є також дуже значні і в великих висотах навіть при малім віддаленю (100 km.) доходять до 30—40°. 4) Маєві приморозки повстають мабуть в наслідок великих рухів в атмосфері, що спроваджують обширні струї полярного походження. Температура вільної атмосфери буде середно 8° 4° 0° — 7° — 13° — 18° — 26° — 33° — 40° — 48° — 54° для вис. (в km.) 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10¹⁾

Ту згадати також належить праці: о убытку температуры з висотою Assmann'a²⁾, що займає ся его колибанем; і о положеню ізотерми 0° Illes'a v. Edvi jr.³⁾

Teisserenc de Bort випускав від р. 1898 в Trappes много не-обсаджених бальйоників, з тих декотрі дійшли до 14000 m. висоти. Висліди: Температура ріжних висот показує в протягу року значні колибання, о яких дотеперішні бальйонові злети не давали понятя. Пр. ізотерма —25° мала протягом 16 місяців колибання, що доходили до 5000 m., ізотерма —50° колибалась о 4000 m. З сего показуєсь, що аж до висоти 10000 m. є тенденция до річного колибання температури. Змінчивість теплоти не убуває, як дотепер думано, з висотою. Противно аж до найзначнійших висот повно ту коротких і довгих колибань⁴⁾.

З тих обсерваций Teisserenc'a пробував обчислити Abbe середні відносини температури в атмосфері.

Они представляють ся так:

Висоти	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 km.
Температура	9	5	0	—4	—9	—16	—21	—29	—38	—42	—51 °C
Убытокеї на 1 km.	4	5	4	5	7	5	8	9	4	9	°C ⁵⁾

В Америці роблять дослідї над горішніми регіонами атмосфери при помочи зміїв, що несуть в воздух термо-і барографи. Frankenfield опрацював розультати таких помічань на 17 стаціях Сполу-

¹⁾ Petermanns Mittheilungen 46. 1900. 97 d. Meteorol. Zeitschrift 1900. 1 дд

²⁾ Meteorol. Zeitschrift 1899. 266 д.

³⁾ Ibidem 157 д.

⁴⁾ Comptes Rendus et CXXIX. 417 д.

⁵⁾ Monthly Weather Review XXVII. 1899. 415 д.

чених держав. Прямовісний убуток температури після Abbe був на перших 1000 „feet“ 3.7° , на слідуючих тисячках 3° , 2.8° , 3° і 5.6° F. Коли небо було захмарене, убуток тепла був значно менший, часом навіть підвищувалась температура¹⁾

Сей убуток температури з висотою є обчислений для літніх місяців. (V—X). Середний убуток температури в році є 5° F. на 1000 feet. Градієнт був найбільший до 1000 feet $= 7.4^{\circ}$ F. Відси аж до 5000 f. зменшавсь постійно аж до 3.8° , звідси в гору знов почався убуток збільшати²⁾.

Убуток денного колибання температури з висотою розсліджував Clayton в Blue Hill Observatory при помочи зміїв. Коли в висоті 0 m. колибання денне виносило 11.6° , то в висоті 500 m. оно спало до 2.4° , а в висоті 1000 m. до 0.2° .³⁾

Після аналогічних дослідів Hergesella для Штрасбурга було колибання температури на поверхні землі в ночі 4.6° , на висоті 800 m. (ballon captif) лиш 0.7° ; в день 12.8° , згідно 3.9° . Minimum температури було на долі між IV^h а V_a^h ; в горіж межі I^h а II_a^h).

Дуже важні замітки про зміни прямовісного градієнта температури обнимає нова праця Bezold'a „die klimatologische Bedeutung der Lehre von den auf-und absteigenden Luftströmen“⁴⁾ Она належить однак радше до теоретичної чим до географічної метеорології.

Тиснене воздуха.

Розділ тиснення представлений в новім Atlas of Meteorology подібно як температура на підставі застарілих дещо праць Buchan'a.

Тиснене воздуха на 20 великобританських стаціях опрацювали всесторонньо і дуже методично Pearson і Lee⁶⁾.

Найвище дотепер сконстатоване тиснене воздуха було 1900 I. 23. в Барнаулі в томській губернії. Барометр показував о 7 годині рано 789.2 mm, т. є. спровадивши сю вартість до позему моря 808.7 mm. В Іркутську було вже в 1896 р. одно maximum лиш

¹⁾ U. S Weather Bureau Bulletin. 1899. 1 д. пор. Cleveland Abbe Monthly Weather Review XXVII. 1899. 413 д.

²⁾ Nature 1900. LXIII. 199 д.

³⁾ Meteorologische Zeitschrift 1898. 25 д.

⁴⁾ Meteorologische Zeitschrift 1898. 49 д.

⁵⁾ Sitzungsberichte der kgl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1900.

⁶⁾ Philosophical Transactions Vol. 190. 1898. 423 дд.

дуже мало що менше, бо 808·4 mm. Повідомляючи о тім подає Воейков також найвищі тиснення без редуції на позем моря. В депресії Люкчун в середній Азії одержано 796 mm. Для озера Боджанте-кул, що лежить там —130 m. низше поверхні моря, випадало-б яко maximum 812 mm, тількиж для позему Мертвого моря (—384 m)¹⁾.

В своїх розслідах над температурою вільної атмосфери зайнявся Hergesell також відносинами тиснення воздуха до розділу температури в значних висотах. Великі температурні ріжницї, що виступають в тих горішних регіонах, викликають також великі ріжницї в тисненю, так що наслідок динамічних впливів є в порівнянню з наслідком температурних впливів мінімальний. Злеті баллонів доказали, що розділ воздушного тиснення в поземі моря є зовсім льокальним, другорядним явищем, що викликане великими температурними заколатами в горі²⁾.

Про денний період колибання воздушного тиснення оголосив обширну розвідку Hann³⁾. Він розрізняє цілоденне або террестричне колибання, т. з. південну осциляцію і трикратну денну осциляцію. Цілоденне колибання підлягає великим місцевим і часовим заколатам, є сильнійше в погідні дні, чим в хмарні, зависить мабуть від денного колибання теплоти і має на мори меншу амплітуду, чим на суші. Амплітуда меншає, коли ширина географічна росте. Південна осциляція не стоїть під впливом погоди і є в амплітуді та фазовім часі така як космічні явища, т. є., що єї зависимість від пори року і географічної ширини є дуже правильна. Причиною сеї осциляції є щоденно повторюючі ся колибання температури. Головні maxima припадають на еквінокції, головне minimum на червень і січень. Є ще трикратна денна осциляція, котрої амплітуда меншає разом з географічною шириною. Про иньші поменьші праці над денними колибаннями воздушного тиснення диви Meteorologische Zeitschrift 1898 і 1899.

Довші чим денні, а коротші чим річні колибання воздушного тиснення вже від давна замічено і приписувано їх впливам місяця.

Börnstein зібрав значний матеріал обсервацийний з великого числа стацій, щоби найти звязь між тисненням воздуха а деклінацією

¹⁾ Meteorologische Zeitschrift 1900, 207 д.

²⁾ Petermanns Mittheilungen 1900, 109 д.

³⁾ Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien CVII. IIa. 1898. 63—159.

місяця. З барограмів берлинських, магдебурських і поцдамських показало ся, що протягом сидеричного місяця підлягає тисненню воздуха одноразовому колибанню, котрого maximum припадає на 12-ий, а minimum на 23-ий день по північнім lunistitium. Не так виразне є згадане колибанє в Відні, ще слабше в Upsala, San Fernando, і Port au Prince; зовсім нема єго в Батавії. Колибанє се є виразнійше в зимі чим в літі і виступало властиво лиш в р. 1884—1898 не є отже постійним явищем. Подібне колибанє відкрив Börnstein і для синодичного місяця¹⁾.

Вітри.

Hildebrandsson і Teisserenc de Bort видали книжку під т. *Les bases de la meteorologie dynamique etc.*, де подають історичний, дуже основний огляд підстав нинішньої метеорології — отже давніших розслідувань над загальною циркуляцією атмосфери, пізніших над бурями тропічними і нашими. Дальше слідує уступ про метеорологічну організацію міжнародну, про дальші роботи над циклонами і т. д.²⁾.

Теорії рухів атмосфери не належать властиво до географії, тому вчислю лиш найважніші праці. Schreiber подає гідродинамічні рівняння різнначкові і термодинамічні формули з дотичними обсерваційними вислідами³⁾. А. Schmidt оброблює умови рівноваги тепла в атмосфері після кінетичної теорії газів⁴⁾. Одна з головніших засад Schmidt'a є, що при підносячих ся струях воздуха головну ролю відіграє праця підношеня. Bezold доказує знов, що найважніша ту є праця експанзії⁵⁾. Bjerknes впроваджує новий принцип в теоретичну метеорологію, беручи в рахунок не тільки вже ріжницї тиснення, але ріжницї густоти⁶⁾.

Загальна атмосферна циркуляція. Перегляд її умов робить Körpen подаючи кілька нових гадок⁷⁾. Davis займає ся причинами загальної циркуляції, а головнo впливом воздушних струй на ти-

¹⁾ Meteorologische Zeitschrift 1900. 420.

²⁾ Paris, Gauthier-Villars 1898—1900.

³⁾ Abhandlungen des kgl. sächs. Meteorol. Instituts III. 1898. 24.

⁴⁾ Beiträge zur Geophysik. IV. 1899.

⁵⁾ Meteorologische Zeitschrift 1898. 441 д.

⁶⁾ Svenska Weten. Akad. Handl XXXI. Nr. 4. 35 д.

⁷⁾ Annalen der Hydrographie XXVII. 1899. 563 д.

снене¹⁾. Mägis представляє натугу загальної циркуляції воздуха яко функцию спадку температури від рівника до бігуна²⁾.

Циклонічні і антициклонічні рухи атмосфери. Көрпен розсліджує з теоретичного становища відносини припливу і відпливу воздуха в циклонах і антициклонах³⁾.

Таксамо переважно теоретична є студія Polis'a про воздушні струї в циклонах і антициклонах на підставі 10-літних синоптичних табель. Причини пересування циклонів є переважно механічні. Напрям посування ся спадає з найбільшим кутот відклонення, котрий звичайно лежить висше чим 1000 m⁴⁾.

Розділ і колибанє температури в циклонах розсліджував Deschevrens. Температура в циклонах загалом підносить ся, в антициклонах опадає. Високу температуру циклонів треба приписати збіжности воздушних струй, що зійшовшись в центрі циклони, підносять ся в гору; низьку температуру антициклонів тому, що воздух в їх центрі уступає і переходить в розбіжні струї⁵⁾.

Van Behber доказує, що погода в середній Європі є зависима від положення барометричних максімів, причім розрізняє 5 головних типів⁶⁾.

Kassner виказує для європейських стаций велике захмаренє підчас циклони, мале підчас антициклони. Азийські стації пр. Тифліс ведуть ся відмінно⁷⁾.

Erk сконстантував, що поздовж підніжа баварських Альп лежить шлях малих знижок, що мають значний вплив на фени і бурі⁸⁾.

На підставі обервацій зроблених на баллонах в Росії вивів Поморцев важні заключеня про прямовісну зміну скорости і на-пряму вітрів в циклонах і антициклонах. В антициклонах скорість вітру росте постійно від поверхні землі в гору. В циклонах також росте з початку скоро, потім зменьшаєсь дуже в регіонах хмар „cumuli“ 500—1500 m., потім же знов росте. Зміна напруму вітрів

¹⁾ Quarterly Journal of Meteorological Society XXV. 1890. 160 д. Wetter XVI. 1899. 201 д.

²⁾ Meteorologische Zeitschrift 1898. 157 д.

³⁾ Meteorologische Zeitschrift 1898. 161 д.

⁴⁾ Meteorologische Zeitschrift 1899. 337 д.

⁵⁾ Memorie della Academia Pontificia dei Nuovi Lincei 1898. 14. На ті елю-кубрації впрочім трудно згодитись; диви Meteorologische Zeitschrift 1898. (59).

⁶⁾ Archiv der deutschen Seewarte XXII. 1899. 26.

⁷⁾ Meteorologische Zeitschrift 1899. 242 д.

⁸⁾ Meteorologische Zeitschrift 1898. 173 д.

є також від долу найбільша, вище она зменшує ся іменно в циклонах і є звернена на право. Рух хмар „cumulus“ і напрям ізобари на землі є завжди в тривкій звязи. Визначна звязь є також між швидкістю руху хмар пірястих (cirrus) а повстанем і напрямом циклонів. Чим скорше посувають ся хмари пірясті по небі, починає барометр зараз опадати, так що їх скорий рух є признаком наближення ся циклонів¹⁾.

Важні причинки до загального пізнання циклонів дали згадані вже досліди, що роблять їх в Америці при помочи паперових зміїв осмотрених самопишучими апаратами, що летять не раз до дуже значних висот (max. 3679 m.). Clayton вивів з тих дослідів, що майже всі властивости циклонів дадуть ся вивести з температурних відносин різних воздушних веретв.²⁾.

Про тропікальні западно індійські циклони з. з. Hurrican'i пише найлучший доселі їх знаток Vines, що в них є напрями вітрів в різних висотах дуже різні, в низших веретвах майже рівнобіжні до ізобар, а в висших зовсім розбіжні. Дальше розсліджує V. положене вершка параболічних доріг циклонів. Оно пересуває ся, йдучи від червня до серпня, коли є maximum hurrican'ів, щораз дальше на північ ($+18^{\circ}$ 33° ширини), а потім знов вертає ся на південь. Цікавий є викритий V-ом закон, що hurrican'i ходять тими самими дорогами, що хмари cirrus, їх параболічні дороги є отже наслідком горішних воздушних струй³⁾.

Про східноазійські гуратани тз. тайфуни оголосив Doberck книжку: The Lawss of Storms. Hongkong 1898. Тайфуни повстають з слабих знижок, що появляють ся над Філіпінами і полудневокитайским морем. Першим їх признаком є легкі хмарки cirrus, що йдуть від сходу на північ. Красна погода і висока температура панують на берегах згаданого моря. Коли центр тайфуна наблизить ся на 1000 km., починають показуватись хмари cumulus, на мори починаєть місцями сильне фільованє, викликане сильними вітрами, що віють довкола тайфунового центра. На полудни від него виступають бурі з громами. Коли центр начне ся приближати, стає дуже парно і барометр паде (досить впрочім поволи 2.5 mm. на добу); колиж тайфун віддалений вже лиш о 500 km., повстають на

¹⁾ Annalen der Hydrographie 1898. 173 d.

²⁾ Blue Hill Met. Obs. Bull. 1899. Nr. 1.

³⁾ Vines. Investigation of the cyclonic circulation etc. Washington, Weather Bureau 1898.

мори сильні фії, потім небо зовсім затягаєсь хмарами і разом з барометром опадає і температура. Коли тайфун вже лиш о 300 km. віддалений, починає ляти дощ і вихор та морська буря починають щораз більшати, аж вкінці доходять до страшної сили. На кілька-нацять km. довкола центра в тз. оці тайфуна панує цілковита тишина воздуха, але боввани морекі є ту страшні. Найнижше тиснене не припадає на саме „око“ тайфуна, але випереджує его пересічно о 30 km. Часто є в тайфуні і поза его „оком“ значні простори, де зовсім нема вітру. Взагалі більшу шкоду роблять фії чим вітер, так на берегах суші, як і на мори. Відносини впрочім не завсїгди є такі схематичні, як подано. Dobereck представляє їх подрїбно, годї однак докладїйше ту ними зайнятись¹⁾. Важні подробиці про тайфуни подає також розвідка Froe'го²⁾. Підчас тайфунів в вересни 1897 р. завважано раз, що в 75 мїнутах опало тиснене воздуха о 31·8 mm., а потім в 40 мїнутах піднеслось о 35·7 mm. Абсолютне maximum скорости вітра було 205·2 km. на годину. Дотепер найдені скорости вітра при бурях є значно меншї³⁾. Тайфунами з р. 1895 і 1896 займаєсь Doyle⁴⁾.

Зв'язь межи африканськими „Tornados“ а припливом і відпливом моря припускає Oriola, замїтивши, що властива торнадам конфїгурація облаків підчас припливу не змінє свого зиду на небо-зводї, а підчас відпливу з великою скористію посуваєсь вперед⁵⁾.

Про *воздушні труби* (вертні) стрїчаєм в послїдних часах кілька розвідок. Jansson описує таку воздушну трубу, що знищила лїс коло Borås в Швеції 3. липня 1899 р.⁶⁾. Haltermann помічав цїкаві малі вертні в обсягу гольфштрема⁷⁾. Miethе, видїв як повставали малі вертні при пожарі торфяника гіфгорнеского і завважав і ту також, що вертілись відворотно годинниковій вказівцї⁸⁾. Russell подає відомісти про великі вертні водні (промір при основі 100 стїп), що в маю 1898 р. появились на побережах Нової Полудневої Валїї⁹⁾.

¹⁾ Pop. Meteorologische Zeitschrift 1898. 332 д.

²⁾ Ibidem 1899. 145 д.

³⁾ Pop. зіставленє Köppen'a в Archiv der deutschen Selewarte. XXI. Nr. 5. 17 д.

⁴⁾ Tifones del archipiélago filipino y mares circunvecinos 1895 y 1896. Manila 1899. Petermanns Mittheilungen 1900 [82].

⁵⁾ Annalen der Hydrographie 1900. 258 д.

⁶⁾ Bihang till k. svenska Vet. Ak. Handlingar. 26. Afd. I. Nr. 3.

⁷⁾ Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. 1900. März. 218 дд.

⁸⁾ Prometheus X. 795 д.

⁹⁾ Journal of Royal Society of New South Wales XXXII. 1898 18 с.

Локальним вітрам присвячує новіша метеорологія много праці. Особливо-ж вітрами, що є подібні до альпійського фену, займають ся учені дуже визначно і відкривають їх в різних околицях землі.

Billwiller доказує, що фен може повстати не тільки через те, що струя воздушна перейде через хребет гірський і зступаючи доли, динамічно оґрівась. Фен може також повстати через зступлене на поверхню землі одного з вітрів антициклональної системи¹⁾.

Фен, що приходить з півночі, обсервував Klein в Tragöss (Стирія)²⁾.

Войков описує вітри зовсім подібні до Фену в Кримі і на Кавказі³⁾.

Аналогічні з феном є також вітри Чінуґ (Chinook winds) в Скельних горах⁴⁾.

Над явищем Гарматтана в німецькій кольонії Тото робили в новішних часах досліди Gruner, Mischlich, Seefried і Danckelman. Сей горячий вітер виступає в сухій порі року, що триває від жовтня до цвітня. В часі, коли віє Гарматтан, наповняєсь воздух пиллом і є дуже сухий. Ранками температура сильно обнижуєсь. Гарматтан походить мабуть з північного Судану і полуднево-західної Сагари⁵⁾.

Помірами *сили вітрів* займаєсь Schreiber, порівнюючи різні анемометри. Көррен порівнує анемометричну скалю Beaufort'a з дійсною шкоростю вітрів і становить редуційну скалю для західної Європи⁶⁾.

Прямовісний розділ сили вітру пізнано в послідних часах при помочи баллонів і зміїв значно докладнійше, чим дотепер. Clayton уставив таку табелю приросту шкороости вітру:

Висота	50—150—250—350—450—950 m.				
Середній приріст шкороости вітра	0.8	1.0	1.3	1.6	1.9 m. на секунду ⁷⁾ .

Hellmann виказує, що денний хід анемометру є в значній мірі функцією висоти устанавлення сего приладу. Щоби отже збутись блудів і різниць, радить він прийняти міжнародно устанавлене ане-

¹⁾ Meteorologische Zeitschrift 1899. 204 д.

²⁾ Ibidem 1898. 61.

³⁾ Ibidem 1898. ст. 430.

⁴⁾ Ibidem 1898. 63.

⁵⁾ Mittheilungen aus den deutschen Schutzgebieten XII. 1899. 1 д.

⁶⁾ Archiv der deutschen Seewarte XXI. 1898. 21 с.

⁷⁾ Meteorologische Zeitschrift 1898. (25) д.

мометру на 20 м. над землею на особнім руштованю¹⁾. Hann, оброблюючи обсервації денної періоди скорости вітра на штрасбурекх вежах, редукує обсервації не на позем улиць, а на позем дахів 20 м. над землею²⁾.

Coeurdevache найшов, що денний період скорости вітра в Perpignan є в прямім відношенню до прямовісного градієнта температури між Perpignan а Pic du Midi (в Піренєях 2859 м. висоти)³⁾.

О п а д и.

Про *парованє* води морської робив дослїди Mazelle і найшов, що вода морска при 3.73‰ засолєня парує повільнїйше, чим вода солодка, в відношенню меньшаючїм враз зі скількостію парованя⁴⁾.

Coeurdevache представляє парованє як функцію температури, скорости вітру і зглядної вохкості. Зі зростом температури о 5° збільшає ся парованє о 1 mm, о тількиж само більшає оно, коли зменьшить ся зглядна вохкість о 5‰. Коли скорість вітру збільшить ся о 1 м., може збільшитись парованє навіть о 0.9mm.⁵⁾

З розвідок про *вохкість воздуха* згадаю працю про денний період зглядної вохкості в Полї, Е. Mazelle⁶⁾. Maximum зглядної вохкості припадає середно на 5. годину рано, minimum на першу по полудни. В погідних днях припадають екстрєми скорше, в хмарних пізнїйше. Амплїтуда в погідні дні є в зимі 9 раз, в літі 3 разів більша, чим в хмарні.

Frankenfield на підставі обсервацій зібраних зміями найшов, що середна вохкість скорше меньшає в гору, чим випадалоб з теоретичних формул Hann'a⁷⁾.

Про *хмари* дали послїдні роки XIX. столїтя велику літературу, бо власне тоді зачались публїкувати результати тз. міжнародного року хмар. (Internationales Wolkenjahr 1896 V. 1 до 1897. VI. 1.).

¹⁾ Meteorologische Zeitschrift 1899. 546.

²⁾ Ibidem 1899. 457 д.

³⁾ Annales de la Société Meteorologique XLVII. 1899. 41 д.

⁴⁾ Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien CVII. 1898. 280 д.

⁵⁾ Ann. Soc. Mét. de France. XLVII. 1899. 186 д.

⁶⁾ Sitzungsberichte der Akad. Wien. II. a. CVIII. 1899. 42.

⁷⁾ Monthly Weather Review XXVII. 1899. 413 д.

Образи характеристичних хмар находимо в атлясі: *Polis. Wolkentafeln. Karlsruhe. Braun 1899.* Кілька цікавих фотографій хмар є поміщених в *Monthly Weather Review XXVI. 1899. 59 д.* Дуже красні фотографії хмар пороблено на обсерваторії Фляммаріона в Juvisy¹⁾.

Цікаві обсервації хмар роблять ся в бальонах. Süring обсервував 1899. X. 3. динамічне повстанє хмар „cumulus“ в розбурханих вихром верствах воздуха підчас своєї воздушної плавби²⁾. Розличні хмари над Альпами бачив геолог Heim, коли переїжджав в жовтні 1898 бальоном Vega понад Альпами. Їго помічання є дуже важні для пізнання загального захмареня над горами³⁾.

З розвідок про *захмаренє* назвем слідуєчі важніші :

Études internationales des nuages 1896 — 1897. Upsala 1898 і 1899. Hildebrandsson, Lundal і Westman обговорюють там форму, висоту, напрям, скорість і т. д. хмар. У всіх з виїмком „altocumulus“ і „Cirrocumulus“ при вишій температурі є і висота більша. Скорість росте особливо в зимі і напрям тоді є блисший взагалі до північного. В літі мож завважати і денний період.

В часі міжнародного року хмар робив обсервації в Manila Algué⁴⁾.

Про вплив рік на хмари, що над ними находять ся, подає цікаві замітки Erk. Підчас воздушної плавби бальоном замітив він, що на хмарах ясно рисувались напрями рік Інну і Сальцах⁵⁾.

Kassner доказує, що коли в хмарах cirrus і cirrostratus повстають хмарні фидї, то в 65 случаях на 100 слідує по 24 годинах дощ, в 75 на 100 по 48 годинах⁶⁾.

Про дощ і єго розміщенє оголошено при кінци XIX. віку много праць.

Meissner подає на підставі почдамских обсервацій, що імовірність дощу і єго скількість є найбільші, коли тизненє воздуха перестає опадати, а починає підноситись⁷⁾.

¹⁾ Knowledge 1900. 174 д. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik XI. 1900. табл. V.

²⁾ Meteorologische Zeitschrift. 1900. 177 д.

³⁾ Die Fahrt der Weza, Basel. 1899. 66 д.

⁴⁾ Las nubes en archipiélago Filipino. Manila 1899.

⁵⁾ Meteorologische Zeitschrift 1898. 216 д.

⁶⁾ Das Wetter XVI. 1899. 265 д.

⁷⁾ Das Wetter XVI. 1899. 129 д.

Уже оцінює середню річну скількість опадів так. Австралія має 520 mm., Азія 555 mm., Європа 615 mm., північна Америка 630 mm., Африка 825 mm., південна Америка 1670 mm.¹⁾

Дуже цікавий виклад про походження дощу мав під час VII. міжнародного конгресу географів Е. Brückner. Він доказує, що хвиною є річню уважати океан одним, або хочби переважним джерелом водяної пари в атмосфері, а не ірсо і опадів. Дві третини річної скількості дощу походять з парованя континентів, а лиш $\frac{1}{3}$ з парованя океана, бо відповідну скількість води віддають океанові ріки. Частина води, що прийшла з моря крізь атмосферу на сушу, пересічно три рази опадає ту як дощ, заки знов не поверне до океана. Однак майже ніколи не трапляється, щоб вода випарувалась в однім місці, впадала там же як дощ. Звичайно несуть її вітри дуже далеко. Потверджують гадку Брікнера обставини, що літні дощі елевацийні, дощі при бурях антициклоніальних і дощі в багатьох великанських просторах, пр. в краях над Мараньоном, можуть походити лиш з маленької частини з океанів. Лиш континентальним походженням дощів дадуться витолкувати посухи, що обіймають так великі простори, як пр. в 1893. році²⁾.

Про розділ дощу на просторах океанів пише Supan³⁾. Прилучена карта показує, що дощеві полоси в загалі є аналогічні розділові воздушного тиснення понад океанами. Лиш над індійським океаном показуєся певного рода аномалія, бо рівникова дощева полоса розтягається ту аж до 20° південної ширини.

Hildebrandsson оголосив дальшу розвідку про головні центри діяльності в атмосфері та про неперіодичні колибання опадів на поверхні землі. Цікаві є відкриті ним компенсації пр. Азорів і Ісландії в зимі, опадів в зимі на Сибірі і літніх мусонних дощів в Індях⁴⁾.

Про денний хід літніх дощів вийшла обширна розвідка Less'a на підставі берлінських обсервацій. Дні зі зливами ведуться зовсім інакше, чим дні зі звичайними дощами. Великі різниці приносять також напрям вітру. Мимо того можна на підставі зібраних даних уставити прогноз, іменно коли ся має синоптичну карту перед

¹⁾ Ann. de la Société météorologique de France XLVI. 1898. 149.

²⁾ Bericht des VII. Internat. Geographen-kongresses in Berlin 1899. II. 412 d. Berlin 1901.

³⁾ Petermanns Mittheilungen 1898. 179 d. Meteorologische Zeitschrift 1899. 183 d.

⁴⁾ Kong. Svenska Vetenskaps. Ak. Handlingar XXXII. 1899. Nr. 4.

собою. В звичайних днях maximum припадає 12—1 р., minimum о 3—4 а. Колиж прийде злива, то денне maximum припадає о 5—6 р, а minimum 6—7 а.¹⁾

Про вплив ліса на водні опади згадати належить лиш розвідку Weise'ого²⁾. Він твердить, що ліс в загалі не може ані збільшити ані зменшити скількості опадів, але локально може мати деякий вплив, механічно спиняючи рух воздуха³⁾.

Великі зливи в короткім часі були також предметом студій. Клясичним їх тереном є тропічні полоси. Під Камерунськими горами в Debundja впало в червні 1896. і 7. середно 1524 mm., в серпні 1562 mm., а в Bibundi в році 1897—10485.5 mm.⁴⁾ В Nedunkeni на острові Ceylon впало 1896. XII. 15—16 в 24 годинах 807 mm⁵⁾.

Але і в нашім уміркованім кліматі можуть трафитись величезні зливи. І так 1899. IX. 13. впало в Reichenhall 222 mm. дощу, а в пяти сусідних днях 485 mm.⁶⁾ В Jewell (Maryland) впало 1897. VI. 26—27 в 18 годинах 375 mm.⁷⁾ В Рєці (Fiume) 1898. X. 19. впало від години 9.35 до 12.50 в ночі 222 mm., з того в 50 мінутах 200 mm⁸⁾. Навіть на Сагарі занотовано в 1899. IV. 12. страшенну зливу. 800 m. широка зовсім висохла Wadi Urirlu наповнила ся водою на хлопа високо, так нагло, що французька воєнна експедиція стратила 6 людей, що ся втопили і ледви спаслась від загибелі⁹⁾. Після Symons'a бувають в Лондоні дни, в котрих впаде до 13% річної скількості опадів¹⁰⁾.

Сніг. В новійших часах много дослідів роблено над видом сніжних хрусталів. Bentley, Perkins і Nordenskiöld зробили кількасот фотографій різних цікавих видів хрусталиків сніжних.

Про покриву сніжну не було в останніх часах важвійших праць з ввімкою російської Гейнца про опади, скількість снігу і пароване в річних басейнах європейської Росії¹¹⁾.

¹⁾ Meteorologische Zeitschrift. 1900. 49—71.

²⁾ Wetter 1899. XVI. 186 д.

³⁾ Великі праці Hamberg'a, що вийшла ще в 1896. годі нам згадувати, хоч реферат про ню вийшов в Meteorologische Zeitschrift доперва в 1898. р.

⁴⁾ Mittheilungen aus deutschen Schutzgebieten. XI. 3.

⁵⁾ Meteorologische Zeitschrift, 1898. 360.

⁶⁾ Ibidem 1899. 521.

⁷⁾ Ibidem 1899. 36.

⁸⁾ Ibidem 1898. 439.

⁹⁾ Petermanns Mittheilungen 1899. ст. 174 д.

¹⁰⁾ Meteorologische Zeitschrift. 1899. 26.

¹¹⁾ Розвідка мені на жаль не доступна, реферат в Meteorologische Zeitschrift

Написана ся розвідка на підставі 15-літних обсервацій (1887—1895) в 94 стаціях. З доданих карт розділення скількості снігу виходить, що $\frac{1}{3}$ — $\frac{1}{5}$ всіх опадів річно в Росії становить сніг. Від грудня до марта сніг творить 75—100% опадів (з виїмком лиш полудневої Росії). Махімум скількості снігу припадає в північно-східній Росії на жовтень, а чим дальше на південний захід, тим припізнюєсь аж до марта. В більшій части краю припадає однак махімум на грудень і січень.

Про густоту снігу на Монблянї робив досліди Vallot. В висоті 3020 м. була густота снігу 0.48, в висоті 4350 м. 0.40. Фірн на висоті 4792 м. в 15 м. глубини мав густоту 0.86, лід ледівцевий в висоті 3020 м.—0.88, в висоті 1850 м.—0.91. Щоби сніг перейшов в лід ледівцевий, потреба 12—15 літ¹⁾.

Про град оголосив Trabert розвідку, де представляє критично всі дотеперішні теорії про його повстанє. Дві kwestії ставить він на переді 1) яка є причина спливу води, з котрої творить ся градове зерня 2) яка причина так сильного обниження температури. Першою причиною є мабуть електричність, другої дотепер не знаємо. Є лиш гіпотези²⁾.

1897. VII. 1—4 графлялись підчас дуже сильних градусів в Стирії і Каринтії градові зерна до 1 kg. ваги, а до 15 см. проміру³⁾. Величина граду в Індії є ще більша. 1894. I. 1. падали кусні леду до 2 kg. тяжкі⁴⁾.

В посліднім десятку літ XIX. столітя уряджувано дуже численні проби, щоби розганяти градові тучі вистрілами з моздрів. Іменно в Стирії і Італії займають ся тепер сею справою дуже живо. Література до сего вельми богато. Так пр. італійський професор Бомбіачі публікує що рік кілька статей про стріляне до туч.

Воздушна електричність і бурі.

Про розсіяне електричності в вільній атмосфері робили досліди Elster і Geitel⁵⁾. Оно є сильно зависиме від мраки, опадів і тоді

¹⁾ Meteorologische Zeitschrift. 1899. 294.

²⁾ Meteorologische Zeitschrift 1899. 433.

³⁾ Meteorologische Zeitschrift 1898. 29—32.

⁴⁾ Indian Meteorological Memoire VI. 1899. Meteorol. Zeitschrift. 1900. 524 дд.

⁵⁾ Versammlung deutscher Naturforscher in München 1899. Abth. für Physik und Meteorologie. 2. Sitzung am 19. September.

є менше. Сила вітру і абсолютна вохкість не мають видного впливу. В горах в ясних днях росте розсіянє електричності зі зростом висоти. Загальний погляд на воздушну електричність у обох учених такий: Воздух містить в собі частинки самостійно наладовані додатною і відємною електричністю в майже рівнім числі. Електричні напруги воздуха повстають, коли більше частинок є наладованих одною з двох електричностей¹⁾).

Причинок до теорії воздушної електричності подає Trabert²⁾ обговорюючи проби Pellat'a вказати втрату електричності у паруючої води³⁾. Trabert перечить вислідам Pellat'a, що вода тратить електричність до своєї пари при парованю. На тій тезі, котру хотів Pellat боронити, опираєсь в значній мірі теорія електричності воздушної Exner'a. Trabert доказує рахунком, що скількість електричності, котра би прийшла в земську атмосферу з парою водною тоді, коли би ціла земля була покрита одностайно водою, є дуже маленька в порівнянню зі скількістю електричності земскої поверхні. Після теорії Exner'a мусілиб обі скількості бути рівні.

Le Cadet робив цікаві досліди над атмосферною електричністю при землі і в балівні. Він замітив, що понад 1000 m. висоти хід густоти додатної електричності воздуха і хід абсолютної вохкості є зовсім згідні. В нижніх регіонах тої згідності нема. Le Cadet вважає впрочім не водяну пару, а вугляний квас розносчиком додатної електричності⁴⁾.

Elster і Geitel найшли, що воздушні опади містять в собі значні дози додатної або відємної електричності питомої. Коли так нераз оден рід електричності з опадами сплине на землю, приходить в воздухі другий рід до переваги⁵⁾.

Денні колибання воздушної електричності обсервував Chauveau вже від 1891 на вежі Ефля і в інших кількох французских місцевостях; він найшов два типи сего колибання: лїтний і зимовий, аналогічні такимже лиш сильнійшим періодам відкритим в зимнім і горячим підсоню⁶⁾.

¹⁾ Поп. Terrestrial Magnetism. 1899. IV. 213 д.

²⁾ Meteorologische Zeitschrift 1899. 377 д.

³⁾ Journal de Physique. III. Ser. 8. 1899. 253 д.

⁴⁾ Ref. Meteorologische Zeitschrift 1898. (67 д.).

⁵⁾ Terrestrial Magnetism IV. 1899. 15 д.

⁶⁾ Ciel et Terre. XX. 523 д.

Coeurdevache виказує на обсерваціях в Perpignan і на Pic du Midi, що денний хід атмосферної електричності має тим більшу амплітуду, чим менша різниця температури¹⁾.

Про *огонь св. Ельма* написав Arendt ґрунтовну студію. Сявище є взагалі частійше підчас бурливої, чим підчас супокійної погоди, але природа его ще не досить вияснена²⁾.

Лискавки удалось в останніх літах кілька разів відфотографувати. Rümker відфотографував стяжкову лискавку в Гамбурзі і найшов її дійсну ширину 10 m. Вітер має на форму таких лискавок великий вплив³⁾.

Статистику перунів опрацьовують тепер в різних краях дуже пильно і она дала вже много цікавих вислідів. Bezold, що працює над сим предметом від довшого часу, найшов, що пр. в Баварії від 1833. до 1897. число перуном трафлених будинків зросло шість разів. Що цікавійше — число таких домів підлягає певним колибанням, що є згідні в своїм ході з зглядними числами сонічної діяльності (Вольфа). В літах мінімумів сонічних плям перуни роблять менше шкоди, ще менше в літах максимів⁴⁾. Подібну статистику зробив Kassner для прускої Саксонії та Ангальту в літах 1887—1897. Вислїди анальоґічні — зріст небезпеченства від перунів винїс в 10 літах 33.7%⁵⁾. Zeller виказує подібний зріст числа перунів в Віртемберґії, але думає, що сей зріст є лиш позірний, викликаний лиш чисто технічними та соціальними причинами: будованєм високих домів, збільшенєм їх простору і т. д.⁶⁾.

Так само значний зріст небезпеченства перунів сконстатував Arendt в північній Німеччині, але виказав заразом, що сей зріст має свою причину в зрості числа бурій в загалі⁷⁾. Притім доказали Arendt і Hellmann, що число бурій не є найбільше підчас припливу моря, як загалом думают над північним морем⁸⁾.

Stearns опрацював річний період бурій на островах і побережах, іменно в западній та полудневій Европі. Бурі тра-

1) Ann. de la Société météorol. de France. XLVII. 1899. 43 д.

2) Wetter XV. 1898. 2. 37. 49.

3) Himmel und Erde. XI. 134.

4) Sitzungsberichte der kgl. preuss. Akad. der Wiss. Berlin. 1899. 291 д.

5) Über Blitzschläge in der Provinz Sachsen und Hzm. Anhalt 1887—97. Merseburg 1898.

6) Gaea. 1900. 663.

7) Wetter. XVI. 1899. 1. 32.

8) Veröffentlichungen des Preussischen Meteorol. Instituts. Berlin 1899. Meteorologische Zeitschrift 1898. 85 д.

фляють ся ту частійше в зимі, чим в літі, та приходять звичайно в ночі¹⁾).

Бурю без громів обсервовано 1899. VIII. 14. в Шангаю. Була она дуже сильна і відразу по кілька лискавок являлось на небі, а грому не чути було ніякого²⁾).

Оптичні явища в атмосфері.

Про *барву сонця* при горизонті на пустині і на морі пише Franceschi. В пустині, коли є мрака або сильний вітер, сонічний кружок є цілком білий без проміння. Колиж нема вітру ні мраки, є сонічний кружок червонявий і то звичайно горішня его часть є слабше, долішня сильнійше червона. Інших барв не бачив Fr. ніколи. Такіж самі барви має сонце і на морі. Т. з. зелений промінь є на думку Fr. явищем „інтраоптичним“, що викликане контрастом між жовтою чи оранжевою фарбою сонця, а синявою неба³⁾).

Блимане зьвізд толкує See фильованем воздуха. Оно є викликане атмосферними струями. Ті воздушні филі ділають подібно як сочки, відклонюють та розкладають білі лучі на барвні. Коли довжина фильок менша, чим промір сочки телескопа, тоді блимане зьвізд меншає або і зовсім гине⁴⁾).

Дуже цікаві є звістки, що їх збирає Maurer про т. з. *земне світло* (Erdlicht)⁵⁾. Оно проявляєсь в тім, що деякі ночі є нерівно яснійші чим другі, хоч атмосферні і космічні відносини є зовсім однакові. В такі ясні ночі мож бачити вдовж цілого горизонта слабше чи міцнійше сяєво, що іде зенітови щораз слабше. Бачили се світло вже Saussure, Humboldt і Bessel, котрий вважає се світло анальотичним до світла нічної сторони планети Венери. 1871. XI. 14. було се світло в Halle так ясне, що мож було на дворі коло півночі навіть звичайний друк читати, хоч місяця не було, а небо було захмарене. В загалі се світло є найсильнійше звичайно в пізній осени, але від 1895 – 99, коли его в Швайцарії докладнійше обсервують, припадали его максимуми на різні пори року. В лютім

¹⁾ Monthly Weather Review. XXVI. 1898. 452.

²⁾ Wetter 1899. 264.

³⁾ Bulletin de l' Institut égyptologique. Serie 3. Nr. 7.

⁴⁾ Astronomische Nachrichten Nr. 3450.

⁵⁾ Meteorologische Zeitschrift 1899. 257.

1899 р. явилось се світло в невиданій доси силі. Дуговини єго дотепер не знаєм, тож трудно сказати дещо певного про натуру земного світла.

Незвичайну *воздушну ману* бачив Mack 1890. XII. 3. На західнім небі близько горизонту була вузка смуга хмар cumulostratus. Сонце находилось понад нею, а під нею появилось друге позірне сонце в тім самім прямі. Оно було якийсь час ясніше, чим дійсне сонце, потім однак се послідне пояснішало. По кількох мінутах явище щезло. Мана ся повстала наслідком воздушних верств з сочинником зломаня, що меншав ідь долови¹⁾.

Про *круги досонічні і домісячні* говорять розвідка Messerschmitt'a²⁾. Від часу заведеня самопишучих апаратів по стацях метеорологічних не обсервуєсь тих явищ так докладно, як давніше. М. розрізняє два роди кругів 1) малі круги, інакше звані світляними вінцями, 2) великі круги або перстені. Світляні вінці оточують сонце, місяць, або і ясніші зьвізди барвистими кругами аж до віддали 1—6°. Они суть дифракційними явищами — світло угинаєсь в водних баньочках і показує дуговинні барви. Великі круги мають 22° луча і виступають часто в товаристві ще більших кругів з лучем 46° і 90°, позірних сонць зглядно місяців, прямовисних стовпів і т. д. Дуговинні барви є при тім більше або менше виразні. Великі круги повстають через зломанє світла в ледових хрусталиках. Виразистість їх є ріжна — в загалі домісячні круги лекші до замічення, чим досонічні. В загалі що до місцевого розділення видно більше кругів досонічних і домісячних в виших географічних ширинах, чим в околицях близьких рівника. Що до часового розділу, найбільше сонічних кругів є на весну, а місячних в зимі. Денне тахітим досонічних кругів припадає коротко перед полуднем, домісячних же по півночі та (другостепенне) о 8-ій вечером. М. находить також певну звязь між виступованєм кругів, а 11-літнім періодом сонічної діяльності.

Цікаве явище п'ятикратної дуги обсервував Berger в Schweidnitz. Дві верхні дуги були зовсім нормально впорядковані після фарб. Трета, четверта і пята мали барви так само уложені, як друга від гори³⁾.

¹⁾ Meteorologische Zeitschrift 1900. 187.

²⁾ Annalen der Hydrographie. 1900. 32.

³⁾ Gaea 1900. 122.

Про зміни і колибання клімату.

Ekholm виходить з założenia, що теплота сонця є від найдавніших починів життя органічного постійна, а всякі зміни кліматичні мають інші причини. Для вияснення колибань геологічних кліматів уживає він гіпотези Arrhenius'a, що приписує колибання теплоти в геологічних епохах колибаням скількості вугляного квасу в воздуху. Обнижене температури підчас ледової епохи бачить Ekholm в тій обставині, що скількість вугляного квасу в атмосфері тоді значно зменшилась. Колибанняж знов в тій скількості Е. виводить з поступенного корчення ся землі. З початку земска кора скорше корчилась, чим земске ядро, тому попукала і вулкани, що виресли на прогалинах, ввели в атмосферу много вугляного квасу. Той квас маючи власність задержувати сонічне тепло, підвишив температуру атмосфери а також і земскої кори, так що та послідна знов розтяглась. Анорганічні і органічні процеси в дальшій розвитку землі знов прогинули много вугляного квасу (іменно в карбоні) і температура знов обнижалась аж до пермскої ледової епохи. Тепер знов кора корчилась сильнійше як ядро, знов попукала і цілий круговорот почавсь на ново. В кенозоїчній епосі знов було найтеплійше, потім прийшла ледова епоха, а тепер знов скількість вугляного квасу, а з ним і температура росте.

Другорядні колибання клімату приписує Е. ріжному в часі нахилу земскої осі до екліптики. Оно зміняєсь в періоді 40000 літ. Про треторядні колибання в історичних часах виражає ся Е, що ціла ріжниця полягає в більшій континенталізмій клімату в давніших часах¹⁾.

З між всіх вікових колибань клімату найбільшу літературу має тз. *ледова епоха*. До величезної скількості існуючих вже теорій сеї епохи прибуває що рік кілька нових, більше або менше імовірних. Подам ту лиш пару найновіших.

Нарбоє шукає причини ледової епохи в великій вулканічній діяльності при кінці кенозоїчній епохи, котра множеством викиненої водної пари викликала сильні опади і остужене поверхні землі²⁾.

Hull приписує все Gulf-Stream'ови. При кінці пліоцену наступило в Америці винесене поверхні землі, котре відтяло гольфову

¹⁾ Ekholm: Om klimatets ändringar i geologisk och historisk tid samt deras orsaker. Ymer 1899. 353.

²⁾ Zeitschrift der deutschen Geol. Gesellschaft. 1898. 441.

струю від мексиканського моря. Она стратила в наслідок того 10^0 теплоти, а крім того прибрала иньший напрям і не обливала так як тепер берегів Європи, що також значно ся була піднесла.

Chamberlin хотівби майже усе приписати винесенням і западаням земскої кори з углядненем ріжних метеорологічних елементів як: відмінного складу атмосфери, ріжного розкладу воздушного тиснення etc.¹⁾.

В 1891 р. поставив Dubois теорію, після котрої колибання клімату в послідних тисячках літ є наслідками відповідних змін сонячної температури. Scheiner, славний геліолог найновіших часів, доказує, що ся теорія є імовірна. Обнижене середної температури земскої атмосфери о 10^0 вимагалоб обниження промінювання сонця о $\frac{1}{9}$. Scheiner приймає після найновіших дослідів, що температура сонця лежить межі 5000^0 а 10000^0 , отже після права промінювання Stephan'а зменшене промінювання сонця о $\frac{1}{9}$ значилоб обнижене его температури о 3% т. є. 150^0 — 300^0 . Такі зміни температури не можуть бути зовсім дивні, коли зважимо, як великі зміни що хвилька відбувають ся в фотосфері. По думці Scheiner'а скорше належить дивуватись, що при таких обставинах температура землі є так постійна. Сліб отже завели телюричні теорії, теорія Dubois'а може їх місце заступити²⁾.

Про зміни клімату в історичних часах і про малі періоди кліматичні прибуло в послідних роках багато нових матеріалів.

Zumoffen потверджує ще раз висліди Fischer'а і иньших, що в історичних часах воздушні опади ві всіх краях над середземним морем (також в Сирії і Палестині) значно ся зменшили³⁾.

35. *літний період* кліматичний Брікнера потверджуєсь в такім проценті випадків, в яким і не потверджуєсь. Mac Dowall потвердив его істнованє в вирівнаних обсерваціях воздушного тиснення в Лондоні (від 1876), в тім напрямі, що зимно-вохкі періоди мають низше, теплі і сухі вясне тисненє⁴⁾. Натомість Кремзер не найшов в температурі і опадах ельбского бассейна 35 літних періодів⁵⁾.

11. *літний період сонячних плям* находить все многих приклонників. Frank Very виводить з него період промінювання сонця,

1) Petermanns Mittheilungen. Bd. 46. LB. 81.

2) Astronomische Nachrichten. CXLIX. (1899) Nr. 3561. 161.

3) Bulletin de la Société de géographie. XX. 344 д.

4) Nature 1898. LIX. 175.

5) Klimatische Verhältnisse des Elbstromgebietes. Separatabdruck aus dem Elbstromwerk. Berlin, 1899, 48. 87.

заворушень в енергії загальної циркуляції та остаточно період магнетний і кліматичний¹⁾).

Мас Dowall працює над 11-літнім періодом від кількох літ дуже витревало, на жаль оброблюючи материял обсерваційний лиш немногих стацій. Він знаходить, що для Greenwich 1841—96. припадають на minima плям холодні літа і острі зими, на maxima теплі літа і лагідні зими²⁾. Люстри коло maxm'ів плям є загальною тепліші чим повинні бути, люстри коло min'ів холодніші³⁾. В розділі опадів 11-літний період менше виразний⁴⁾.

André знаходить, що в рсках 1864—71 і 1879—95 maxima температури Lyon'у припадають на maxima сонічних плям, minima на minima. В часі між 1771—1879 річ має ся зовсім відворотно⁵⁾.

Flammarion порівнюючи період сонічних плям з температурою Парижа, фенологічними явищами тамже і поворотом перелетних птиць до середньої Франції 1853—98, прийшов до заключеня, що на maxima плям випадають: висша температура, скорший розвиток ростин і скорше прибуте птиць⁶⁾.

Взагалі погоня за періодами в метеорології тепер процвітає. Мас Dowall замічає, що в Greenwich 1841—99 теплі літа припадають на другу половину десятиліть, холодні на першу⁷⁾. Rosquigny Adanson знаходить, що в середній Франції наступають що року XI. 24—30. дуже сильні атмосферні заворушення⁸⁾. Hazen „відкриває“ температурну періоду 12·96 днєвну в Omaha⁹⁾. Рибкін завважав, що атмосферні явища в Росії повторюють ся з великою правильною що 3—7 днів¹⁰⁾. Royer пробує поставити тижневий і місячний період бурій¹¹⁾.

Хоть *вплив місяця на погоду* є від довшого часу як здавалось „ein überwundener Standpunkt“, то все таки знаходять ся учені, що старають ся місяцєви єго значіне для погоди знов реституувати.

¹⁾ Astrophysical Journal. VII. 1898. 255.

²⁾ Meteorologische Zeitschrift 1899. 473.

³⁾ Nature LIX. 77.

⁴⁾ Ibidem 583.

⁵⁾ Ciel et Terre XIX. 45.

⁶⁾ Ciel et Terre XIX. 342.

⁷⁾ Meteorologische Zeitschrift 1900. 381.

⁸⁾ Ciel et Terre XVIII. 497.

⁹⁾ Report of Chief Weather Bureau 1897/8. 323.

¹⁰⁾ Bulletin de l'Academie des Sciences de St. Pétersbourg 1898. 5 ser. IX. 273.

¹¹⁾ Annales de la Société météor. de France XLVI. 1898. 76.

Barthe доказує, що в Німеччині температура коротко перед повнею є о 2° низша, чим перед новом¹⁾). Мас Dowall прямо противний вислід дістав з Гринвіцьких обсервацій, Helm Clayton згідний²⁾).

Börnstein доказує, що в сидеричнім місяці тиснене воздуха відбуває виразний (в Берліні, Магдебургу і Почдамі) період з максімами 10. і 17. дня³⁾).

Ekholm і Svante Arrhenius доказавши істноване впливу місяця на воздушну електричність, старають ся доказати его вплив на полярне сяєво і бурі. Бурі виказують в Швеції 1880—95 виразний період рівний тропічному місяцеві з maximum на 5 днів перед, minimum 6 днів по полудневім lunistitium⁴⁾).

Про звязь кліматологічних елементів між собою і їх вплив на погоду призбируєсь що року щораз більше матеріялу, бо ся справа має велику вагу для предсказуваня погоди.

Дуже важні досліди над впливом метеорологічних відносин над північним атлантийським океаном на зимову температуру заходної і середньої Європи поробив Meinardus⁵⁾).

Висліди ось такі: Ся в місяцях XI—I. температура Gulf-Stream'a є висока (низька), то температура в Європі буде в місяцях II—IV. висока (низька). Також: ся ріжниця в тисненю між північно атлантийським minimum, а континентальним maximum тоді є великі, то температура Європи буде висока; сяж малі — низька.

Lesshaft займаєсь впливом колибань теплоти гольфштрема на дороги і виступуванє знижок в Росії. Коли є в гольфштремі maximum температури, знижки ідуть понад Росію на SO, в иньших зимах на NO. Істнує також дволітний період, іменно в зимах років паристих (пр. 1873/4) йшли знижки на SO і температура була лагідна, в непаристих противно. Причини тих явищ належить шукати в температурних відносинах гольфштрема та колибанях великої воздушної струї полярної⁶⁾).

Hellmann займаєсь лагідними зимами з нагоди, що послідними часами зими в середущій Європі були дивно лагідні. Зиму зовем лагідною, коли грудень і січень є тепліші чим середно. Тоді зви-

1) Wetter. XVI. 61.

2) Symons Monthly Meteor. Magazine XXXIV. 1899. 20. 68.

3) Meteorologische Zeitschrift 1900. 420.

4) Kong. Svenska Vet. Ak. Handlingar XXXI. 2. 1899.

5) Meteorologische Zeitschrift 1898. 85. і Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde 1898. 183.

6) Meteorologische Zeitschrift 1899 539.

чайно вже падолист і лютий є теплі та мала імовірність (0.15%), що mareць буде зимний. Зате такі зими є вохкі і бурливі. Літо потім звичайно горяче¹⁾.

Причини холодних літ Європи середньої і западної шукає Madsen в ледових горах, що являючись від часу до часу на Атлантийськiм океані сильно остуджують воздух. В 1890. році їх число було дуже велике, тож і липень сего року належав до дуже зимних²⁾.

Справа *прогнози погоди* на кілька днів наперед займає від 1896, коли van Bebber написав про се книжку, учених. Bebber винайшов в погоді середньої Європи 5 головних типів і після них хоче проповідати погоду на кілька днів наперед головню для хліборобів. Свої погляди розвинув він на ново в часописи Wetter, 1899. 217 д. і позискав собі приклонника в Grossmann'ї, що теоритично доказує можливість таких прогноз. Натомість Klein рішучо виступає против тих прогноз, що на его думку можуть лиш ще більше дискредитувати метеорольоію в очах ширших кругів. Він доказує, що Bebber властиво нічого нового не подав, а обсервації навіть льокальні, сли узглядняють відносини виспих регіонів атмосфери, дають лїпші результати, чим прогнози на підставі засад Bebber'a³⁾.

Спеціальна кліматольоія.

Не може она бути предметом нашої хроніки, бо виказує множество матеріялу, що лиш для льокальних відносин ріжних країв може мати вагу. Тому то і я відсилаючи до XXIV. тому часописи Geographisches Jahrbuch, де на ст. 120 дд. є ціла важнійша література подана та в часті обговорена, ограничу ся лиш на деяких річах важнійших, та на деякі матеріяли важні для кліматольоії руских земель.

В *полярнім підсоню* треба згадати обсервації фену в западній Гренляндії і дуже низьку температуру, яку найшла бельгійська експедиція в полудневім полярнім підсоню. Абсолютне minimum виносило -43.1° , середна температура літа лиш -1.5° .⁴⁾

¹⁾ Wetter XV. 25. Meteorologische Zeitschrift 1899. 58.

²⁾ Meteorologische Zeitschrift 1899. 125 д.

³⁾ Annalen der Hydrographie 1900. 273. Gaea 1900. 258. 475.

⁴⁾ Meteorologische Zeitschrift 1900. 75.

Восейков вивів з порівняння обсервацій бельгійських і обсервацій Нансена, що морський клімат під полудневим бігуном є значно зимнійший, чим морський клімат арктичний. Suran вносить з тих низьких температур літа, що коло полудневого бігуна є льодом покрита суша, з котрої вітри в літі несуть зимно на море¹⁾.

В кліматології Європи заслугують на згадку дальші праці Mohn'a над кліматом Норвегії, Hamberg'a над воздушним тисненем в Швеції, Dickson'a про температуру морської поверхні і єї вплив на клімат В. Британії, Scott'a над числом опадів тамже і Mellish'a про температуру почвы в Англії і Шкоції, вкінці Buchanan'a над кліматом гори Ben Nevis. У Франції Plumandon зібрав висоту опадів і число днів з опадами в краю. Появилось велике число локального матеріалу. В Німеччині заслугують на увагу праці: du Mont'a над розділом воздушної вохкості в північній Німеччині, Grossmann'a про бурі на берегах німецьких морий, публікація дощевих карт пруских провінцій Hellmann'a, робота Kremser'a про клімат ельбського бассейна і т. д.

З австрійського кліматологічного матеріалу мусим згадати кілька новіших праць, що в части відносять ся до кліматології руских земель.

Про повени 1897 р. поміщена в „Beiträge zur Hydrographie Österreich-Ungarns herausgegeben vom k. k. hydrographischen Centralbureau II. Heft. 1898. 170 ст.“ обширна розвідка.

K. Szulc. Ogólny zarys stref klimatycznych Galicyi. Lwów. (Nakładem wydziału krajowego 1898. 24+29 ст. 1. карта) пробує подати начерк кліматології Галичини, головно оглядаючись на потреби хліборобства. Нарис є дуже побіжний і не грішить оригінальністю методи. Матеріал ужитий сягає лиш до 1894 р. і браний часто з другої руки. Автор розрізняє в Галичині, 5 головних кліматичних стриф. I. стрефа обнимає північно-западний кут Галичини на полудне аж по Підгірє, на схід аж менше більше по полуденник устя Сяну, II. стрефа області Сяну, Буга і Стира, III. стрефа північне Поділе, Опіле і область горішного Дністра (виключаючи гори і Підгірє) на схід аж по усте Стрия. IV. полоса обнимає полудневе Поділе і Покуте, V. полоса галицькі Карпати від Шлеска аж по Буковину і є поділена на три підрядні округи.

До кліматології угорської Руси подають угорські публікації в новіших часах значні причинки, сїть метеорологічних стаций

¹⁾ Petermanns Mittheilungen 1899. 283 д.

значно зростає. Raun опрацьовуючи опади Угорщини найшов в Мармароских Карпатах опад до 1520 mm. річно¹⁾. Hegyföky обробив захмарене угорських країв 1871—95²⁾, Hejas бурі в тімже періоді³⁾.

Для кліматології українських земель під російським панованем важні в гидро-метеорологічні обсервації видані метеорологічним відділом гидрографічного уряду в Петербурзі 1898 р. Они обнимають місячні і річні вартости стану води, напряду і сили вітру та температури моря 1890—1896 в 10 стаціях над Чорним і Азовським морем. Дуже важна є також публікація Клосовського⁴⁾, що подає весь кліматологічний матеріал України і Запорожа (для Києва пр. від 1812 р.).

З матеріалів до *кліматології Азії* згадаєм праці: Воейкова і Івickого над середніми температурами східного Сибіру, Тілля над кліматом люкчунської депресії, Elliot'a про гради в Індії і Ганна про клімат малайського півострова.

В *Африці* збиране кліматологічного матеріала йде дуже швидко вперед і число (хоч коротких нераз) обсерваційних рядів щораз зростає. Danckelmann відкрив в Камеруні (Bibundi) друге по Чера Пунджі місце з незвичайно високом опадом (10486 mm. річно), de Martonne обробив обсервації опадів над горішнім Нілем, Struben також обсервації в Капляндії і краю Oranje.

В *Америці* — як легко зрозуміти — найбільше кліматологічного матеріала достачують Сполучені Держави. Report of Chief Weather Bureau 1897/8. ст. 269. Washington 1899. приніс нове представлене середних температур Сполучених Держав на 14 картах. Riemer і Abbe обчислили число градових днів, Henry видав карту середного часу освітлення сонічного, Maryland Weather Service видало дуже красний нарис кліматології сего краю. З кліматологічних матеріалів інших частин Америки назву: розвідку Abbot'a про клімат панамського істму, Bailey'a про клімат Перу, Hanna про клімат аргентинських Андів.

¹⁾ A magyar korona országainak csapadek viszonyai. Витяг Meteorologische Zeitschrift 1898. 471.

²⁾ Поп. Ibidem 1899. 559.

³⁾ Поп. Ibidem 1899. 182.

⁴⁾ Matériaux pour la climatologie du Sud.-ouest de la Russie. Одесса 1899. 32+336+104. 7. карт.

З австралійського матеріяла згадаю праці: Russel'a про опади в New South Wales, Hann'a про клімат авклендских островів і Danskelmann'a про клімат Нової Гвінеї.

II. Земський магнетизм.

Земський магнетизм може похвалитись в останніх літах XIX. століття досить значними поступами, хоч його істота і до тепер не є напевно знана. Той діл геофізики знаходить ся (як впрочім і деякі інші) в періоді збирання матеріалів обсервацийних.

Збирання се відбувався дуже пильно по різних сторонах земського глоба і поволи організується в цивілізованих державах ціла сіть обсерваторий. На кождім кроці констатують учені, що організація одноцільної системи обсерваторий магнетних по цілій землі зовсім моглаб змінити вигляд науки про магнетизм землі.

Магнетний стан землі для епохи 1885'0 представив А. Schmidt¹⁾ опираючись на зведених Neumayer'ом магнетних складових для 1800 місцевостей землі. Обсервацийний матеріал походить з різних часів і далекий є від повноти, треба було часто екстраполювати для великих частий землі, звідки не було обсерваций. Тому праця Schmidt'a може бути названа лиш пробою в тім напрямі, важною для будучих робітників.

Тілло розкладає земську кулю під магнетним зглядом на дві гемісфери. Перша між 90° а 270° східної довготи від Greenwich визначається додатним знаком на загальну натугу, позему натугу і її північну складову. Знов півкуля між 130° а 310° східної довготи має додатну деклінацію і східну складову поземої натуги. Порівнюючи по черзі півкулі між 0° а 180° , між 10° а 190° , 20° а 200° і т. д. між собою з огляду на магнетні елементи, середні річні температури та розміщене на них землі і води, вислідив Тілло, що всяка півкуля з нижшою середною температурою року відзначається більшою натугою поземої сили і деклінації. Зновуж півкуля океанічна, що обнімає між іншими цілий Тихий океан, визначається в виду континентальної півкулі далеко меншою загальною натугою²⁾.

¹⁾ Archiv der deutschen Seewarte XXI. Nr. 2.

²⁾ Terrestrial magnetism and atmospheric electricity 1899. IV. ст. 237 дд.

Зріст кількості магнетних обсервацій виказав, що не всі в новітніх часах обсервовані магнетні явища дадуться витолкувати давніми теоріями. Litznar замітив пр., що сила земського магнетизму зі зростаючою висотою маліє і то три рази скорше, як се виходилоб з теорії Гаусса. З сего вносить Litznar, що магнетні явища земські не дадуться витолкувати самим намагнетизованем землі. Атмосфера земска мусить ту також грати визначну роль¹⁾.

На звязь земського магнетизму з електричністю в земській атмосфері задивлюєсь в подібний спосіб і Trabert. Вислід єго роботи над сим предметом²⁾ є сей, що проти звязи земського магнетизму з електричними проявами в атмосфері не мож навести ніякого важного аргументу.

Земський магнетизм і атмосферна електричність найкрасше проявляють свою звязь в полярнім сьвітлі.

Праці про полярне сьвітло є в загалі численні в новітніх часах, тому і при кінці XIX. віка не бракує цінного матеріалу, щоб на него мені звернути увагу. Передовсім мушу звернути єї на епохальну розвідку про полудневе полярне сьвітло:

Boller: das Südlicht³⁾. Автор збирає і спасує всі обсервації полудневого сьвітла, які до тепер колинебудь зроблено і виводить з них слідуючі висновки: 1) полудневе сьвітло, таксамо як і північне вказує своїм виступованем на 11-літний період. 2) полудневе сьвітло виступає найчастійше в обводі кола, що є 38° віддалене від полудневого магнетного бігуна. 3) і в обсягу того кола є райони, де полудневе сьвітло частійше виступає, іменно в Австралії і на полудне від неї.

Значні причинки до пізнання полудневого сьвітла дали також обсервації Арцтовского підчас бельгійської полярної виправи. Мимо неприхильних атмосферних обставин обсервовано підчас зими 1898 сьвітло 62 рази. Оно представлялось звичайно яко одноцільний лук $8-12^{\circ}$ винесений понад овид. Денний період має maximum між 9 а 10^h р.; річний період невизначний — maximum натуги припадало на еквінокції⁴⁾.

Дуговину полярного сьвітла фотографував Paulsen і відкрив та змірив 16 нових ліній⁵⁾. Підчас російської експедиції на Шпіцберги

1) Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften IIa. CVII.

2) Meteorologische Zeitschrift XV. 1899. 401 д.

3) Beiträge zur Geophysik. III. 56 дд. 550 дд.

4) Comptes Rendus. CXXX. 1900. 1276.

5) Comptes Rendus CXXX. 1900. 653.

в цілі змірення степеня полуденника фотографував дуговину і саме світло Сикора впрочім без важивіших нових результатів¹⁾. Невеликі результати дали також фотографії в Harvard College²⁾.

Докладні помірки полярного світла з 1898. IX. 9. зробив Reimann. Він найшов, що східний кінець луку припадав дещо на схід від лінії Мемель-Лібава ($\varphi = +56^\circ$, $\lambda = +39^\circ$), західний же на океан Атлантийський на захід від Ірландії. Висота лучів доходила до 66 миль, ширина смуги 60 миль³⁾.

Про періодичність в виступанню полярного світла вже від давна знає наука. Її се однак справа не дуже ще вияснена, тому що року появляють ся праці в тім напрямі. Mossmann зобрає всі обсервації північної зорі в Англії 1797—1895 і укладає їх табелярично. Вікова періодичність є невиразна і позваляє лиш розрізнити періоди з численними і нечисленними появами світла. Річний період виказує maxima підчас еквінокцій, minima підчас сольстіцій⁴⁾.

Про вплив місяця на полярне світло робили досліди Ekholm і Arrhenius. Дискусія матеріяла 1722—1896 виказала значний вплив деклінації місяця на розвиток полярного світла. Межи тим тропічним періодом а) періодом колибання воздушної електричності показуєсь цілковитий паралелізм. Maxima, minima і амплітуди припадають на той сам час. З тої згідности вносять автори, що при полярнім світлі настає електричне виладоване між висшими а висшими веретвами атмосфери. Натуга сего виладованя є пропорціональна до атмосферного потенціалу. Місяць є подібно як і земля електрично наладований, а що найвисші веретви атмосфери мають електричність відємну, то она мусить підлягати колибанню в міру змін деклінації місяця. Maxima досягає она на північній півкулі тоді, коли місяць стоїть в найбільше полудневій деклінації, minima, коли місяць має найбільшу північну деклінацію. Ті колибання потенціалу воздушної електричності справляють тропічний період полярного світла⁵⁾.

Крім того місячного періоду виказали Ekkolm і Arrhenius ще істноване дещо коротшого періоду полярного світла, що виносить 25·929 днів. Він є дуже виразний в Скандинавії і під полудневим

¹⁾ Astronomische Nachrichten Nr. 3649.

²⁾ Ciel et Terre 1898. 144.

³⁾ Meteorologische Zeitschrift 1899. 230.

⁴⁾ Pop. Meteorologische Zeitschrift 1898. 307.

⁵⁾ Kongl. Svenska Vet. Ak. Handlingar. XXXI. Nr. 2.

бігуном. Сего періоду не вдалось вивести з періоду оборотового сонця і ёго причини тому трудно авторам дошукатись¹⁾.

Щоб винайти незнані до тепер причини магнетних бур в загалі, виходить А. Schmidt від сконстатованя, що магнетні бурі є се сильні і довготривалі заколоти магнетних елементів. Они мають своє жерело в льокальних відносинах, бо такі бурі впливають що правда на магнетні елементи по цілій землі, але виразно виступають в більше або меньше ограничених полосах. Дальшою властивістю тих заколотів є їх поступовий рух. В виду того Schmidt держить ся що правда дотеперішної гадки, що токи електричні викликають такі колибаня, але вводить ту новість, що приймає істнованє мандруючих вертнів, зложених з електричних токів, і пропонує таке саме синоптичне поступованє в царині земского магнетизму, яке водить ся вже від давна в метеорології²⁾.

З льокальних обсерваций елементів земского магнетизму заслугують на увагу: магнетні елементи Почдаму обчислені Eschenhagen'ом³⁾, обсервациї Schück'a в околицих гамбургского заливу⁴⁾, означеня Moureaux'a магнетних елементів в Parc St. Maur, Perpignan і Nizza⁵⁾, магнетну карту Сіцилії Palazzo і Christoni'ого⁶⁾, нові помірки льокального впливу вулканічних скал на елементи магнетні в Італії⁷⁾.

Магнетні досліди Eschenhagen'a в горах Гарц виказали значний паралелізм між магнетними аномаліями і відхиленнями прями. З того вносять Eschenhagen, що магнетні досліди можуть геологови дати немалі поясненя що до будови і складу глибоких верств землі⁸⁾.

Магнетні досліди в німецькій східній Африці перевів Maurer. Они виказали, що денні колибаня в деклінації ростуть з географічною шириною, підчас коли колибаня поземої натуги і інклінації сильно маліють⁹⁾.

Pochettino мірив в Італії, як зменьшувалась натуга поземої складової земского магнетизму і найшов на 1000 m. зменьшене

¹⁾ Pop. Meteorologische Zeitschrift 1899. 383.

²⁾ Meteorologische Zeitschrift 1899. 385 дд.

³⁾ Wiedemanns Annalen der Physik 65. 951.

⁴⁾ Magnetische Beobachtungen an der Hamburger Bucht. Hamburg 1898.

⁵⁾ Comptes Rendus CXXVI. 234. CXXX. 65.

⁶⁾ Terrestrial Magnetism and Atmospheric electricity 1899. June. 87.

⁷⁾ Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei. VIII. 2 Semestre. Serie

5 a. 1899.

⁸⁾ Forschungen zur deutschen Landes und Volkskunde XI. H. 1.

⁹⁾ Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. X. 1899. 170.

о 0.0005 C. G. S. т. є. дещо більше як теоретично найшов Litznar, а змірив на Monte Rosa Sella¹⁾).

На границях українсько-рускої території в губернії курскій найдено дуже цікаві відносини в земскім магнетизмі. Існує ту локальний магнетний бігун в Кочетовці, де інклінація виносить 90°. Коли від того місця віддаляєм ся, зменьшає ся інклінація що 20 м. о 1°. Ся точка є для деклінації індиферентна, але за те є дві иньші точки, що віддалені від себе о 2 km. мають деклінацію —34° і +96°. В двох иньших точках віддалених від себе о 422 м. виносять деклінація —11° і +45°. Позема натуга доходила до 0.59, підчас коли на рівнику, де она є найбільша, доходить звичайно лиш до 0.40²⁾).

В магнетно - нормальних околицях Італії, іменно над морем коло Fiumicino і понад Фудиньским озером мірив Folgheraiter локальні магнетні заколоти. Він приписує їх вулканічним шутрам і піскам, що містять між иньшими складовими частинами також магнетит³⁾).

Денний хід змін земского магнетизму в полярних сторонах розсліджував Lüdeling і виєлімінувавши ріжні локальні і часові заколоти заключив, що денну зміну мож вважати наслідком систему сил, що окружає правильно землю що 24 годин⁴⁾. Згадані заколоти мають денний хід зовсім відмінний від ходу в иньших полосах землі⁵⁾).

Нові правильности в денній зміні елементів земского магнетизму старавсь винайти Nippoldt на основі гармонічної аналізи. З результатів сеї цікавої студії наведемо хіба те, що ділаючи ту другостепенні сочинники підлягають на цілій землі одному закону і вказують на річний і чотиромісячний період, що походять безпосередно або посередно з положеня землі в всесвітї⁶⁾).

Малі колибання земского магнетизму обсервував Van Bemmelen в Батавії. Они вказують: 1) Піврічний період з maxим'ами в марті і вересні, minim'ами в червні і січні. 2) Денний період з maximum

¹⁾ Atti della Reale Accademia dei Lincei 1899. VIII. Ser. V. 204.

²⁾ Comptes Rendus 126. 138 дд. Nature 57. 323 дд.

³⁾ Frummenti concernenti la geofisica dei pressi de Roma 1900. Nr. 9.

⁴⁾ Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1898. 524.

⁵⁾ Ibidem 1899. 236.

⁶⁾ Annalen der Hydrographie 1898. 267 дд.

о 3-ій, а minimum о 13-ій годині. 3) Зв'язь з сонічними плямами. 4) Згідність з періодичними колибаннями полярного сьвітла¹⁾.

Про річний період сили земского магнетизму каже Schwalbe ось таке: Дотепер був річний період майже нерозсліджений по причині малої своєї амплітуди і коначного дуже докладного знання сочинника температури магнета. Длятого в обсервация річного періоду можлива лиш в дуже немногих великих обсерваториях.

Schwalbe вносить з почдамских обсерваций, що слідує: 1) Істнує виразний річний період, так що складові магнетної сили дадуть ся представити яко функция довготи сонця. 2) Прямовісна натуга має minimum на північній півкулі в літі, maximum в зимі. Западне відклонене і позема натуга виказують на північній півкулі maximum в літі, minimum в зимі, другорядне maximum безпосередно перед minimum т. є. в січні. На полудневій півкулі поводить ся позема натуга прямо противно, т. є. має maximum в часі, коли на північній півкулі зима, minimum в часі, коли на північній півкулі літо. 3) Лінії рівноваги мусять мати в літі тенденцію ближшого приєсуваня ся до себе і по при се збільшаня нахиленя, яке мають в напрямі NO—SW.

За причину річного періоду можна вважати електромагнетні токи, що порушають ся в зимній атмосфері понад поверхнею землі²⁾.

Про довші періоди земского магнетизму наведу слідуєчі розвідки:

Зв'язь періоду сонічних плям з магнетними колибаннями ще раз розслідив Ellis на підставі магнетних обсерваций в Greenwich в літах 1841—1896. Результати тих дослідів лиш потвердили істноване такої звязи. Ellis виказав, що навіть неправильности в довготі періоду плям виступають рівночасно з такими самими неправильностями в магнетних періодах. Так само натуги maxim'ів і minim'ів, а навіть і епохи малих долинок в кривих зовсім гармонізують з собою³⁾.

Опираючись на властивости гончарської глини, що при випалюваню приймає під впливом магнетизму земского питомий магнетизм і задержує его на всегда, пробував Folgheraiter означити магнетну інклінацію в дуже давних часах. Він брав з італійских музеїв старинні вази та мірив їх магнетизм, щоби опісля з него

¹⁾ Kon. Akademie van Wetenschappen. Te Amsterdam 1899. 22 дд.

²⁾ Meteorologische Zeitschrift 1898. 449 дд.

³⁾ Proceedings of Royal Astronomical Society vol. 63. ст. 64 дд.

означити в приближенню елементи земського магнетизму в тих часах, коли ті начиння випалювано. Висліди є дуже цікаві. З дослідів над начиннями, що походять з пятого, шестого і сегого століття перед Христом, виходить, що існувала епоха, в котрій магнетна інклінація виносила в Греції 0. Епоха та припадає менше більше на початок шестого століття. Перед тим т. є. в семім століттю перед Христом була магнетна інклінація навіть полуднева. Від початку шестого століття інклінація дуже скоро стає північною, а при кінци пятого століття виносить вже около 20° . Дослідам своїм навіть сам Folgheraiter не приписує великої певности, бо хронологія начинь є дуже непевна, але виходить з них без сумніву, що був час, коли магнетний рівник переходив через Грецію, ба навіть на північ від неї¹⁾.

Fritsche обчисляє елементи земського магнетизму для епох 1600, 1650, 1700, 1780, 1842 і 1885 зі всіх можливих до ужитку обсерваций з того часу. На підставі того матеріялу обчисляє Fritsche таблиці основних величин для згаданих шести епох після теорії Gaussa, признаючи новіші теорії і формули недостаточними. З так обчислених основних величин заключає Fritsche, що в елементах земського магнетизму зайшли значні вікові зміни. І так пересунулись північний магнетний бігун, точка maximum ідеального розміщення земського магнетизму в північній Америці і тамошня точка maximum цілковитої натуги від NW до SO. Пересуненє те виносило для літ 1650—1836 8° в ширині, а 17° в довготі географічній. А знов полудневий магнетний бігун і дві иньші аналогічні до попередних максимальні точки полудневої півкулі відбули від 1650. до 1836. рух від SO на NW о 8° в ширині, а 27° — 43° в довготі. Причини тих вікових змін шукає Fritsche в змінах температури²⁾.

Wild: Über den säkulären Gang der Inclination und Intensität des Erdmagnetismus in St. Petersburg-Pawlowsk. (Записки. Имп. Ак. Наук. по физ. мат. отдѣленію IX. Nr. 7).

Дотичні дати є перед 1828. р. так нечисленні і непевні, що проба Вільда розтягнути криву вікового ходу земського магнетизму в зад аж до половини XVIII. століття граничить з мало імовірністю. Між 1828. а 1870, р. є обсервації поземої і загальної натуги у зем-

¹⁾ Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei 1899. Seria 5. 8. (1) ст. 69, 121, 176, 269.

²⁾ Die Elemente des Erdmagnetismus für die Epochen 1600, 1650, 1700, 1780, 1842 und 1885 ihre säkulären Aenderungen. Petersburg 1899.

еского магнетизму також ще рідкі і неточні, так що крива Вільда, котра відносить ся до того протягу часу, зовсім непевна. Доперва від 1870 р. можна вважати обсервації вдовольняючими. Віковий хід магнетних елементів для Павловска є від того часу зовсім напевно сконстатований і дозволяє Вільдові на слідуюче сформульоване своїх вислідів: Віковий хід магнетних елементів в Павловску, а мабуть і всюди инде, не є постійний, але звязаний з такою кількістю малих неправильностей, що представлене єго звичайною формулою можна вважати лиш грубим приближенем до дійсности.

III. Океанографія.

З поміж різних частий фізичної географії одною з наймолодших є без сумніву океанографія. Она повстала властиво доперва в сїмдесятих роках дев'ятого століття, коли то спеціальні корабельні експедиції назбирали велику кількість матеріялу, що вперше роз'яснив найголовніші питання науки про море. Сей матеріял опрацьовувано через кілька літ з різних точок погляду і океанографія за той короткий час з слабої вітки виробилась на дуже обширну галузь фізичної географії.

Від того часу океанографія розвивалась досить статочно, хотия заперечити не можна, що в відкритях океанографічних слідувала певна стагнація. Іменно морфологія морського дня остала на 20 літ в головних чертах тасама, яка була в сїмдесятих роках уложена на підставі сондовань кораблів Challenger'a, Tuscarora, Gazelle'i. Доперва в дев'ядесятих роках начали нові океанографічні експедиції приносити множество нового, важного матеріялу. Від кількох літ знов океанографія швидко поступає в перед, бо не тільки спеціальні експедиції збирають нові океанографічні дані, але і всякі инші наукові виправи бодай принагідно докидають камінець за камінцем до дальшого розвитку науки про океани. Рівночасно і літературна праця над проблемами океанографії іде рівнобіжно в перед і починає входити в генетичний напрям.

З представлень обнимаючих загал океанографії згадаю короткий підручник Luigi Hugues: Oceanografia. Torino, Bocca 1901, відповідні уступи в: Köppen'a: Grundlinien der maritimen Meteorologie. Hamburg 1899, Willi Ule'a: Grundriss der allgemeinen Erdkunde,

Leipzig 1900, Milla The International Geography by seventy autors. London 1899, дальше начерк історії океанографічних дослідів Gottschaldt'a¹⁾ і цікаву книжку Chun'a: Aus den Tiefen des Weltmeeres Jena 1900.

В огляді океанографії за останні роки XIX. віку найперше поміщу праці загального змісту, потім перейду поодинокі океани та їх побічні моря.

В морфології океанічних просторів є одною з найвизначніших праць незначна що правда об'ємом, але дуже богата змістом розвідка Supan'a: Die Bodenformen des Weltmeeres²⁾. Она старає ся завести одноманітність в класифікації та номенклатурі просторів морського дна. Автор виходить з чисто орографічної основи, що релєф морського дна зависить в першій лінії не від абсолютної, а від зглядної глибини. Дно всіх океанів складаєсь після Supan'a з двох частий; з континентальної полоси і з властивого дна моря. Континентальна полоса (Kontinentalrand) складає ся знов з двох частий: з континентальної площі (Kontinentalplateau), що є плоским слабо нахиленим продовженням побережжя і має над собою maximum 200 m. води, та з континентальної збочи (Kontinentalböschung), що опадає більше або менше стрімко, а часто порогами до властивого дна морського.

Форми властивого морського дна є до тепер досить мало пізнані та розсліджені. Винесеня з положистими збочами назвати мож підморескими порогами (Schwellen), винесеня, що мають збоча стрімкіші, зовем підморескими високорівнями (Plateaus), а если розпостирають ся поздовж, підморескими хребтами (Rücken). Підморескі високорівні та хребти, если носять на собі острови, зовем островними хребтами чи високорівнями. Крім тих обширних винесень морського дна розрізняє Supan підморескі гори, що сховані зовсім в глибині, підморескі лави, що вже підходять під саму поверхню моря, і островні гори, що вистають вже понад поверхню моря.

Попри винесеня морського дна важні є і заглиблення в ній. Найбільша часть дна морського є зовсім плоска з мінімальними різницями від площі. Таку часть дна зовемо плоским дном (Flachgrund). — Оно може лежати в більшій або меншій глибині. В тім

¹⁾ Progr. Realschule in Kiel. 1900.

²⁾ Petermanns Mittheilungen т. XLV. 1899. ст. 177 дд.

плоским дні можуть бути різні заглиблення тз. підморські доли. З них без сумніву найхарактерніші є тз. рови (Graben, давніше звані Rinnen). Вони всі лежать на краях континентів і то здовж фалдових гір та виказують найбільші глибини, які коли-небудь в морях висондовано. Запропонувавши в той спосіб одноманітні назви різних морфологічних явищ морського дна пропонує Supan, щоби номенклатура підморських вивисень і заглиблень була також одноцільна, щоби іменно надавано їм чисто географічні назви, а не як до тепер імена кораблів або осіб.

Друга часть розвідки Supan'a є властиво об'яснюючим текстом до виданої ним рівночасно оглядової карти будови дна морського. Подамо коротко її зміст, бо вона дуже добре дає нам пізнати, що предприняті в останніх часах океанографічні досліді дають нам зовсім инший погляд на плястику дна океанів, як був сей, що панував доселі.

Після новітніх дослідів будова дна індійського океана не є така проста, як думали до недавна. Є ту в західній і полудневій части п'ять підморських вивисень: Хребет островів Chagos, поріг Маскаренів, Мозамбіка, Crozet і Kerguelen. Найглибші місця є на полудни від малих Сундів (над 6200 m.) як се вже давно було звісно, але дуже значні глибини відкрито також на полудне від австралійського континенту та між порогами Crozet а Kerguelen, в полудневій части океана, де давніше припускали незначні лиш глибини. Будова Великого океана натомість показує ся значно простішою, чим давніше думано. Тихий океан має дві великі заглибини: властиву пацифічну заглибину і заглибину чилійско-перуанську. Ділять їх від себе тз. поріг острова Великодного (Waihu). Заглибина пацифічна похилає ся до западу і має найбільші глибини по окраїнах. Є се ідучи від півночі на полудне: рів алеуцький, рів японський з глибиною Tuscarora вважаною до недавна за найбільшу на землі (8513 m.), рів каролінський, рів Tonga і рів Kermadec, де висондовано найбільшу до тепер знану глибину 9427 m. Чилійско-перуанська заглибина опадає противно до сходу, де при самих побережжях Америки лежить рів Atacama. Для плястики Тихого океана дуже важний також обширний поріг гавайський та численні заглибини, пороги і високорівні в прибережних та середземних морях, що належать до того океана. Новітні досліді в деяких місцях зовсім обертають дотеперішні погляди. — Атлантийський океан перетятий на цілій довжині т. н. атлантийським хребтом і виказує проте дві заглибини. Вони тягнуться ся від хребта, що лучить Ісландію з британськими островами аж мабуть далеко в антарктичний

океан. Незначна підморська набренілість ділить кожду з тих довгих заглибін на дві часті, разом отже на чотири: північно-американську (найглибшу, де висондовано найбільшу глибину в Атлантійському океані 8341 м.), бразилійську, північно-африканську і полуднево-африканську. На північ від ісландського хребта лежить тз. північна заглибина, відділена тз. арктичним порогом від арктичної заглибини, що займає в арктичному океані місце між Гренландією а Шпіцберґами. Дуже цікаві кон'єктури подає Suran що до полудневого Атлантика і дуже основно переходить всі належачі до него прибережні та середземні моря.

Термінологією і номенклатурою підморських форм терену займався також міжнародний географічний конгрес в Берліні 1899. Однак внесенє Wagner'a і Krümmel'a, щоб завести чисто географічну номенклатуру, не стрінулось з загальним признанем¹⁾.

Про підморські долини річні, часті на западно-європейських побережах, пише Hull. Він вважає їх за ерозійні витвори рік ледової епохи, що в деяких прихильних відносинах вдержались перед замуленем. В многих разях однак їх істнуванє вважати належить проблематичним задля малого числа сондовань²⁾.

Такі підморські долини відкрито в послідніх часах в многих околицях, де они були причиною ломаня ся підморських телеграфічних каблїв.

Про відложеня на дні океанів працює від довшого часу Thoulet. На конгресі географів в Берліні подав він цілу класифікацію тих відложень³⁾, представив їх розміщенє картографічно⁴⁾ і займався ґрунтовно їх механічною аналізою, котра може бути дуже важна для пізнаня давнійших геологічних відложень⁵⁾. Важне є також відкритє Thoulet'a, що пороваті скали пр. пумекє, вапняк втягають в себе дуже мілкі частинки ілів⁶⁾, та его досліди над впливом підморських вульканічних вибухів на рід і форму глибинних відложень⁷⁾.

Wrangell займаєсь відложенями річними при морських берегах російських рік⁸⁾.

1) Verhandlungen des 7. int. Geogr. Kongr. Berlin 1899. I. 164 д. II. 350 д.

2) Geographical Journal. XIII. 1899. 285 д.

3) Verhandlungen des 7. intern. Geogr. Kongresses II. 354.

4) Bulletin de la Société de géographie. XX. 1899. 182.

5) Annuaire des Mines 1900. avril.

6) Comptes Rendus CXXX. 1900. 1639.

7) Revue Maritime. CXLVI. 1900. 55.

8) Записки по гидрографіи 1900. т. XXI. 105.

Murray опрацював розміщене вугляну вапна (CaCO_3) на дні океанів і найшов, що 42·5% поверхні дна всіх морей покривають відложених заключаючи більше чим 25% сего вугляну¹⁾.

З хемічних дослідів над морською водою занотую розвідку Thoulet'a про примішки мінеральних і газових частин в морській воді²⁾, і Gautier'a про йод в воді морській. В неорганічних сполуках є вго лиш 0·2—0·5 mg. в літрі води, в органічних доходить він до 2·4 mg.

Brandt доказав, що бактерії, котрих є дуже в морській воді, виділюють з азотинів (MNO_2) і амоняку азот, що входить в воздух находячий ся в морській воді³⁾.

Про температуру моря в загалі оголосив важну розвідку Murray. Цікавий є розділ температури при морськім дні. 5·2% поверхні морського дна має температуру вишу чим 10°, 2·5% має 10° до 4·4°, 48·9% має 4·4° до 1·7°, 40·6% має 1·7° до 1·1°, меньше чим 1·1° виносить температура при дні на 2·8% поверхні дна. Середна температура води при дні = 2·6°⁴⁾

Ізотерми і ізаномалі морської поверхні розелідив в послідних часах Көррен головно зі згляду на знану симетрию, з якою держать ся на північній півкулі теплі струї західних берегів континентів, а зимні східних (на полудневій прямо противно)⁵⁾.

Цікаві дані про пароване води морської та прісної дали досліді, що їх перевели в Терсті Mazelle і Faidiga евапориметрами Wild'a. Вода морська мала соли 3·73%, солодку брали з омброметра. Показало ся, що вода солоні і солодка не завсїгди однако ся заховують. Пароване води солодкої є правильно більше, чим солоні. Коли однак загальне пароване збільшавсь, зменьшав ся рівночасно квот чисел виражаючих пароване солодкої і солоні води. Коли температура підносить ся, збільшав ся і пароване обосторонно, але скорше у солодкої, як у солоні води. Так само має ся річ, коли росте середна скорість вітру. Колиж середна вохкість воздуха росте, зменьшавсь евапорация обосторонно, але вже зовсім однаково⁶⁾.

1) Geographical Journal XIV. 1899. 426.

2) Revue maritime CXLV. 1900. 37.

3) Über den Stoffwechsel im Meere. Kiel. 1899.

4) Geographical Journal XIV. 1899. 34.

5) Annalen der Hydrographie 1898. ст. 356 дд.

6) Anzeiger der kais. Akademie der Wiss. in Wien 1898. Nr. 7. Sitzungsberichte der k. k. Akad. d. Wiss. in Wien. Mat. nat. Klasse. т. 107. IIa. ст. 270. Annalen der Hydrographie 1899. ст. 469.

Про барву води морської іде спір між Abbegg'ом, що переносить на море теорію Tyndall'a про синяву неба¹⁾ і Spring'ом, що синю барву моря виводить з ріжних хемічних причин²⁾.

Прозорість морської води також не є дотепер докладно пізнана. Цікаве питанє, як далеко заходить світло в морські глибини, не є дотепер рішене. Теоретично заходить оно в найбільші глибини, але практичні досліди показали, що так не є. Способом Secchi'ого т. є. через занурюване в море округлого білого кружка, найдено, що світло сонця доходить лиш до 50 м. глибини, а при дуже великій прозорості до 100 м. В дуже многих морях світло не доходить і до 50 м. Виправа австрійського корабля Pola доказала, що прозорість кінчить ся в Східнім Романьскім морі недалеко 40 м. під зеркалом, в Егейскім 36 м., в Червонім вже 24 м. Далеко докладнійша є фотографічна метода. Пливу фотографічну занурює ся до певної глибини і виставляє ся на діланє світла. Потім закриває ся єї знов, витягає ся і розсліджує. До недавна міродайні були в тім напрямі висліди Fol'a і Chun'a, що виказали останні сліди світла в 400, зглядно 500 м. глибини. Luksch підчас виправи Pol'i найшов їх ще в 600 м., але нисше не виказували вже плити якої небудь зміни. Щож однак робити з обставиною, що н. пр. найдено многі рослини в глибинах більших чим 1000 м. Яка є нагуа сонічного світла в глибинах моря, також нічого не знаємо. Одні кажуть, що в глибині 170 м. є лиш так ясно як у нас підчас зоряної ночі, другі твердять, що ще в 4000 м. глибини є так ясно, як підчас повні. Дальше не знаєм, які роди світляних лучів найглубше заходять. В поверхневих верствах найсильнійші є фіолетні, але хто знає, як є в більших глибинах. Досліди над тою справою повинні бути тепер на ново підняті, коли відкрито лучі Röntgena³⁾.

Рух філястий води морської представлений аналітично в книжці Wien: Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig 1900.

Теорію повставаня филь Helmholtz'a популярно представив Baschin⁴⁾.

¹⁾ Prometheus X. 1899. 305.

²⁾ Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie 1899. II. 99.

³⁾ Про висліди Luksch'a пор. Denkschriften der kais. Akademie der Wissensch. in Wien Bd. LXIX. 1900. Mittheilungen der kais. königl. Geogr. Gesellschaft in Wien т. XLIV. 1901. ст. 189 дд. пор. також Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1898. Nr. 30.

⁴⁾ Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde. XXXIV. Berlin 1899. 408.

Vaughan Cornish хоче утворити під назвою кіматології окрему науку, що займалася б не тільки океанічними філями, але і всіми втворами подібними до філь зі снігу, піску, навіть на земській корі¹⁾.

На мареографі в Sydney реєстровано часто високі філі з дуже довгою, майже півгодинною проміжкою між двома горами філі. Вважано їх за сейсмічні, бо є дуже до них подібні, але Russell виказав, що они є чисто метеорологічного походження. Іменно в часі барометричного minimum в тих околицях підноситься зеркала моря дещо, а се вже справляє локальні струї вздовж S і E побережжя. Ті струї лучать ся в проливі Bass'a і втворюють там згадані великі стоячі філі, що відбиваються на сиднейській мареографі²⁾. Подібні стоячі філі обсервував Dawson на берегах Нової Шкоції³⁾.

Великі філі, що повстали 1896. VI. 15. в наслідок землетрясення в Kamaishi, обговорив Davison. Они перейшли в поперек весь Великий океан. На Гавайських островах доходили ті філі по висоті 2.5 m. понад звичайний позем припливу і наробили шкоди. В St. Francisco була їх висота ще доволі значна⁴⁾.

Явище припливу і відпливу моря опрацював теоретично Lévy⁵⁾. Представлене формул Newton'a з модифікаціями лорда Kelvin'a, формул Laplace'a, Darwin'a і Airy'ого та гармонічної аналізи є дуже основне і ясне. Нових доріг однак Lévy не вказує.

Важні причинки до обчислювання неправильностей філь припливу подав Boergen⁶⁾ і Harris⁷⁾.

Thoulet виказав експериментально в околиці Brest'a, що струї повстають при припливі і відпливі мають в різних глинах різний напрям⁸⁾.

¹⁾ Verhandlungen des VII. Internat. Geographen-Kongresses Berlin 1899. II. 207.

²⁾ Revue Scientifique 1898. Nr. 24. Petermanns Mittheilungen 1899. LB. 862.

³⁾ Proceedings of Royal Society of Kanada II. Ser. 5. Sect. III. 1899/1900. 23 d. Petermanns Mittheilungen 1900. LB. 484.

⁴⁾ Philosophical Magazine. L. 1900. 579. Naturwissenschaftliche Rundschau 1901. 115.

⁵⁾ Leçons sur la théorie des marées professées au Collège de France I. Paris 1898.

⁶⁾ Verhandlungen des VII. Intern. Geogr. Kongresses in Berlin. II. 132.

⁷⁾ Nature. LXII. 1900. 258.

⁸⁾ Meteorologische Zeitschrift 1899. 313.

Перегляд розміщення морських струй цілої землі подає карта, видана британським гідрографічним урядом.

Повстання морських струй представив теоретично Bjerknaes, вважаючи їх причиною різниці тиснення і густоти¹⁾.

Witte вияснює появу зимної води при берегах морських відклонюючим діланем обороту землі та відосередної сили струй пливучих луком. Вітер по його думці має дуже малий на не вплив²⁾.

Про подвійні струї в проливах робив Макаров пильні дослідження в Босфорі, Bab el Mandeb, проливі Gibraltar'a, Formosa, La Pérouse. Перші три проливи мали дві струї, що йшли над собою. В проливі Формози йшли дві противні струї поруч себе, бо температура і питомий тягар морської води в при китайським березі значно менші, як при формозанським. Подібно є в проливі La Pérouse'a, де рама великої теплої струї Kuro-Siwo пливе на північ, а поруч неї від NW—SE струя зимна³⁾. Wharton противно приписує повстання таких струй впливам вітру і сильно полемізує з Макаровом⁴⁾.

Pettersson виказав, що при топленні сь пливучих ледів повстають наслідком обниження температури і густоти води морської прямовисні струї⁵⁾.

Перегляд поодиноких океанів, їх середземних та прибережних морий начну від атлантійського океана і зверну увагу на тз. Segelhandbuch виданий для нег в друге інститутом Deutsche Seewarte.

Океан атлантійський.

Північно-атлантійський океан належить до найліпше пізнаних морий. Від нег почались властиві океанографічні дослідження і ведуться від п'ятидесятих років минулого століття постійно. Іменно в 1895. і 1896. році працювали ту різні експедиції, що принесли багато нового, хоч працювали без злуки, а тимсамим без спільного плану.

Данська експедиція на кораблі Ingolf мала головною ціллю зоологічні та хемічні дослідження, які мають велике значіння для океанографії. З важливіших географічних здобутків вкажемо на сконстатоване підморської вулканічної лави на SW від Reykjanes (на

¹⁾ Meteorologische Zeitschrift. 1899. 313.

²⁾ Grogr. Gymn. Brieg. 1900.

³⁾ Proceedings of Royal. G. Society Edinburgh 1899. т. 22. Nr. 4.

⁴⁾ Nature LX. 1899. 261., 316., 544. LXI. 1900. 29.

⁵⁾ Petermanns Mittheilungen 1900. 84.

Ісландії), що колись мабуть виставала понад поверхню моря. В 1578. р. бачив Frobisher в тім місці остров, що тепер не існує¹⁾. Експедиція збрала також важні дані про полярну струю, що йде на сході від Ісландії на південь і стикаєсь з Golfstream'ом на підморській лаві між Ісландією а островами Farøer. Обі струї взаємно спинають ся в своїм бігу. Гольфштрем бере завсїгди верх і лиш часами при сильних північних вітрах відклонюєсь в полудневу сторону. Полярна струя западає звичайно під его теплі води і помішавшись з ними значно підвисшає свою температуру. Лишень в немногих місцях удає ся зимній бігуновій воді не змішавшись проникнути на полудне²⁾.

Над тими відносинами робила дослїди також англійська експедиція на кораблі „Research“. Важні суть крім того дослїди англійського рибацького уряду, що випустив кілька тисячів порожніх флашок і корків. Ті, що їх випущено між островами Farøer і Shetland більше до сходу, поплили на схід, а потім на полудне і були виловлені на Шетляндах, Оркадах та східних побережах Британії. Ті, що їх випущено більше на захід, занїс Гольфштрем на побережа Норвегії, але лиш в дуже малій кількості. Фляшки випущені на німецькім морі виказали, що водна циркуляція на тім морі є з малими виїмками циклонїчна³⁾.

Данія вистачила ще одну виправу в ті сторони. Корабель „Diana“ осмотрював в практичних цілях важні для рибальства а небезпечні задля мраки і непевної погоди води Ісландії і Фарерських островів. Пильними сондованнями (1898 і 1899) успіла експедиція докладно зняти всі нерівности морського дна тих околиць і спорудити докладні мапи⁴⁾.

Карту глубин околиці Азорів головнo після сондовань князя Монасо спорудив Thoulet. З глубини 3100 метрів видобуто під $+47^{\circ}$ ширини, а $29^{\circ}40'$ W довжини від Парижа кілька обломків каміня. Хемічна аналіза виказала, що се є рід базальтового скла тз. трахилїта — отже вульканїчну породу найдено в віддаленю 500 миль від Азорів в напрямі Ісландії⁵⁾.

Новійші дослїди переведені в заливі Fundy Bay, де як звїсно приплив моря є найбільший на цілій землі, бо доходить підчас ви-

1) Petermanns Mittheilungen Bd. XLVI. 1900 ст. 1 дд.

2) Про иньї результати „Ingolf'a“ пор. Naturwiss. Wochenschrift 1900 ст. 249.

3) Ibidem. ст. 30 дд.

4) Geografisk Tidskrift. XV. ч. 3—4.

5) Comptes Rendus т. 128. ст. 849. 1471. Petermanns Mittheilungen 1900. Lb. 481.

сокого припливу середно до 27.1 м. виказали, що однак середня висота припливу є менша, чим в заливі св. Лаврентія¹⁾.

Струям північно-атлантийського океана присвячені є дві спеціальні розвідки: Wegemann'a і Pettersson'a. Wegemann опрацьовує головню історичну сторону предмету²⁾, Pettersson поступає більше конструктивно і стараєсь на підставі давніших і новіших дослідів завести лад в замотаних дотепер наших відомостях про струї сей частин океана. Розріжнює він отже наперед властивий Гольфштрем, що заточує велике півколо довкола моря Sargasso і лучить ся з рівниковими струями від тз. Golfstromtrift, гольфової струї, що виповнює своїми раменами північноатлантийський океан.

Цілий сей простор можна поділити на чотири заглубини: дві західні 1) межі Labrador'ом а Гренляндією 2) межі Гренляндією а хребтом Reykjanes; та дві східні 3) між хребтом Reykjanes а хребтом Rockall 4) між хребтом Rockall а хребтом Wyville Thomson'a. Конфігурація морського дна дуже впливає на циркуляцію води. Важийші вітки гольфової струї є ось ті. В заглубині першій іде одна галузь теплої води аж до 55° ширини верхом, потім пливе під водою аж в пролив Davis'a і топить там ледові гори, в другій заглубині, званій Ірмінтереским морем, маєм лиш одну другорядну галузь теплої води, що прибувши з третої заглубини обливає зі заходу Ісландію, а стрінувшись з зимною східно-гренляндською струєю в даньскім проливі, западає під ню і пливе далше на північ.

Далеко більша є діяльність гольфової струї в обох східних заглубинах. Маємо ту два великі рамена, від котрих розходить ся много менших галузей. Перше з тих двох рамен іде здовж хребта Reykjanes на північний схід і на лаві, що лучить Ісландію з островами Faröer, стикає ся з зимною східно-ісландською струєю. Скручує отже на полудне, а повернувши круто довкола Faröer'ів іде на північ, переходить понад другим раменем східно-ісландської зимної струї та прямує просто до Шпіцбергів. На захід від них входить головна галузь сего рамени під воду і, як виказав Nansen, заходить дуже далеко на північ. Від сего рамени виходять на ліву три головні галузи, на право дві. З тих, що виходять на ліву, одна є згадана вже галузь, що входить в ірмінтереске море. Друга ліву галузь прямує до острова Ян Маєн, трета виходить під 72° на північний

¹⁾ Annalen der Hydrographie 1900. ст. 181 д.

²⁾ Archiv der deutschen Seewarte т. XXII. ч. 4.

запад до берегів Гренландії. З правих галузей одна виходячи під 68° обливає північні кінчини Європи і сягає аж до Нової Землі, друга обливає полудневі кінчини Шпіцбергів¹⁾.

Новіші дослідн про Гольфштрем збирає Врангелъ²⁾.

Звідки походить вода Гольфштрема, розсліджував Cleve на основі обсервацій плянктона і прийшов до вислїду, що плянктон іде тою самою дорогою, що і пливучі більші маси пр. дерево, і походить з тих самих місць³⁾.

Для пізнання струй океанічних є дуже важні дороги ріжних предметів, відданих їм зовсїм на поталу. Найбільше користує океанографія з решток розбитих кораблів та з т. з. почт фляшкових. Пр. розбитий корабель Yale від 1899. X. 30. до 1900. III. 24. заточив круг від рога Hatteras попри острови Бермуди до островів Bahama. З фляшок, що їх в послїдніх часах викинено, одна з $\varphi = -10^{\circ}$, $\lambda = -28^{\circ}56'$ оплила ріг Roque і приплила до Haiti; друга від Канарійських островів через полюс пассатів і гольфштрем заплила до Ірландії⁴⁾.

Плаваючі ледові гори появлялись коло New Foundland в великім числї в р. 1898. Рік 1899. був спеціяльно богатий в ледові гори⁵⁾.

Побічні т. в. середземні і прибережні моря атлантійского океана піддає ся також дуже докладним розслідам, так як они обливають культурні краї, що в інтересї безпеченства плавби, рибальства, при закладаню підморських телеграфів і т. д. не залишують нагоди розслідити їх науково.

Струї заливу св. Лаврентія опрацював Bell Dawson⁶⁾. В американськїм середземнїм морі переведено при закладаню телеграфів цілу серію сондовань.

На европейскїм середземнїм морі маєм до занотованя також кілька робіт.

Каблевий корабель Amber найшов на схід від Сицилії глубини до 3950 m., а на підморекїй височинї Barka дуже неправильний профіль. Фляшковою почтою сконстатовано полуднево-західну струю

1) Petermanns Mittheilungen Bd. XLVI. 1900. ст. 61 дд. 81 дд.

2) Записки по гидрографіи. XXI. 1900. 44.

3) Geographisches Jahrbuch. XXII. 1899. 19.

4) Geographisches Jahrbuch. XXIV. 173.

5) Ibidem 171.

6) The Currents in the Gulf of St. Lawrence. Ottawa 1900.

з Лійонського заливу до рога Пальос¹⁾. В проливі мессиньскім сконстатовано часами так сильні струї, що великі пароходи на слухали керма²⁾.

Розсліди над Чорним морем переведені в р. 1890. і 1891. тепер доперва опрацьовуєсь. Шпіндлер і Врангелъ оголосили про сї досліді обширну роботу в приложеню до 20 тома „Записокъ по гидрографіи“³⁾. Обрахована ту на ново середна глубина Чорного моря на 1197 м. З фляшкової почти на Чорнім морі вносить Врангелъ, що панує ту циклонїчна циркуляція на поверхні води, викликана пануючими вітрами⁴⁾.

Видобуті підчас розслїдів проби відложень на дні моря Чорного і Азовского обробив Мургау⁵⁾.

Прямовісним подїлом температури в Чорнім і Каспійскім морі займаєсь Көррен⁶⁾. В Чорнім морі, як взагалї в слабо засолених середземних морях, що стоять в звязи з більше засоленими, є розклад температури в літї ось такїй: Від поверхні, що є тепла, зменьшаєсь температура дуже скоро, а осягнувши з невеликій (меншій звичайно як 100 м.) глубинї своє minimum, зростає потім статочно, хоч поволи. В зимі температура від поверхні статочно знижаєсь аж до згаданої глубини, потім же знов підвищаєсь. Причини сего явища належить шукати в тім, що долїшні верстви води Чорного моря походять з моря Середземного, є отже більше солоні і густі. Верхні верстви води є в наслідок великого числа впадаючих в се море великих рік сильно засолоджені, отже рідші. Між ними а долїшними верствами нема ніякої виміни, вода з долу не дістаєсь майже ніколи на поверхню, не має проте кисня, а натомість містить в собі великі скількості сїрководня. В зимі поверхнева вода остудившись неможе опати на дно моря, а лиш до певної глубини — она то творить ту посередню, в літї найзимнійшу верству. В Каспійскім морі є відносини зовсім иньші. Оно не лучить ся з ніяким иньшим більше засоленим морем, проте опадає ту температура в літї одностайно аж до дна.

В каналі La Manche переведено також важні океанографічні досліді. Thoulet подав дуже цікаві літольоґічні карти сего

¹⁾ Annalen der Hydrographie 1899. 288. 1900. 498.

²⁾ Ibidem 1899. 568.

³⁾ Петербург 1899. 100 ст.

⁴⁾ Записки по гидрографіи XX. 1899. 233.

⁵⁾ Scottish Geographical Magazine XVI. 1900. 673.

⁶⁾ Annalen der Hydrographie 1899. ст. 468.

каналу в розмірі 1:100000. Бритийська комісія геодезична означила середній позем сеї части моря о 0.04 м. низший від означеного в 1859¹⁾).

Явища припливові і відпливові в Каналі і полуднево-западній часті німецького моря обговорює подрібно Börgen. Велика ріжнородність в часі і натузі тих явищ толкуєсь, як знаєм, інтерференцією припливових филь²⁾).

Море німецьке (північне) має бути в початкових літах XX. століття ґрунтовно розеліджене ві всіх напрямх після плану поставленого на міжнародній конференції морській в Штокгольмі 1899.

Ледові відносини сего моря в р. 1899. і 1900 обробив Herrmann³⁾. Крім того важні є досліди над припливовими і відпливовими струями в тім морі Simpson'a, Buchan'a, Phaff'a.

Море балтійське представив коротко Rein з фізичного і біологічного огляду⁴⁾. Прецизійна нівеляция переведена пруским геодезичним інститутом на побережах Балтійского моря показала, що давний погляд на неправильности зеркала сего моря є неоправданий. До недавна думали, що се зеркало лежить коло Клайпеди (Memel) 30 см. висше, чим в Kiel. Тепер виказано, що та ріжняця вносить ледви кілька сантиметрів і має своє жерело в постійнім віяню западних вітрів⁵⁾.

Про струї балтійского моря оголосив розвідку Engelhardt. Він виказує в нім цикльонічний рух, іменно при полудневім і східнім побережу струю на північ, при шведскім березі на полудне⁶⁾. Струї в Велтах обробив Knudsen⁷⁾.

Океан Індійський розеліджували в остатних роках XIX. століття численні кораблі англійські. Однак їх сондованя є меньше важні в порівнянню до вислідів наукової експедиції німецької, що плавала в р. 1898. і 1899. на кораблі Valdivia⁸⁾.

1) Geographical Journal XIV. 1899. 571.

2) Annalen der Hydrographie 1898. ст. 414. 462.

3) Annalen der Hydrographie 1900. 536.

4) Sb. niederrh. Ges. f. Nat. Bonn 1899.

5) Veröffentlichungen des königl. Preuss. Geodätischen Instituts. N. F. Nr. 4. Postdam 1900. Pop. Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1899. Nr. 47.

6) Aus dem Archiv der deutschen Seewarte XXII. 1899. Nr. 6.

7) Pop. Petermanns Mittheilungen. 1900. LB. 482

8) Висліди єї представив більше популярно Chun в книжці: Aus den Tiefen des Weltmeeres. Jena 1900. 550 c.

Valdivia під научним проводом Chun'a працювала (1898/9) наперед в північно-атлантичному океані, де стверджено зв'язь між питомим тягаром водн морскої, а плавними знарядями ростинок плянктону. В полудневоатлантичному океані відкрито цікаву підводну лаву (25°S, 6°E) і глибину до 5000 м. на захід від лави рога Agulhas. Найважливішим результатом експедиції є однак відкрите значної глибини (над 5000 м.) на границях антарктичного та індійського океану, де перше припускано дуже незначну глибину. В тропічних частях індійського океана переконалися океанографи Valdivi'i, що тз. австральско-індійська заглибина несягає так далеко на полудневий захід, як дотепер припускано. Температури глибини в цілім індійському океані показалися дуже низькі. В глибині 5000 м. температура нігде не доходить до 2°C навіть під рівником, на границі антарктичного океана була всюди нижча 0°. Дуже характерні є відносини температурні в полудневій часті індійського океана (пр. 63°S, 54°E). На поверхні води температура виносила —1° до —1.5°. Між 100 а 200-метровою ізобатою температура води підносилася вище 0° і статочно підвишалася в міру, як глибина росла. Аж менше більше від 3000 м. глибини температура знов стала нижшою від 0°. Цікаве є також відкрите, що тропічне сонце успіває ogrіти лиш тонку зверхню верству моря, так що в глибині 200 м. температура тропічних морий дуже мало ся ріжнить від температури морий уміркованої полоси. З тим получене є ще иньше цікаве явище, яке трафляється в більших озерах прісно-водних, а не в морях. Іменно до глибини 50—100 м. маємо в тропічному індійському океані температуру, що дуже мало ріжнить ся від температури поверхні моря. Потім слідує нагле (на просторі 20—25 м.) обниженє температури часто о 8°—9° і від тоді вже термометр аж до дна морского постійно опадає. Причина того цікавого явища лежить на думку Chun'a в тім, що горішна верства моря є під впливом інсоляції сильно ogrіта. Вода, що під нею лежить, підлягає сильним льокальним струям, але в загалі остає завсїгди в крайні монсунів і проте находить ся все в одній глибині та має низьку температуру.

Крім тих важних відкрить поробила експедиция ще много иньших поменьших пр. розслїдила вплив морских струй на фізичні і хемічні відносини морскої води, наново віднайшла остров Bouvet'a і означила єго положенє, обсервувала антарктичні ледові гори і т. д.¹⁾

¹⁾ Пор. також Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. Bd. XXXIV. 1899 Nr. 2. 75 дд.

Вийшла нова частина голяндського великого атласу індійського океана. Она обнімає ізотерми поверхні моря, температури воздуха, напрям струй і многі метеорологічні дані для червня, липня і серпня¹⁾. Англійська урядова публікація *Meteorological Charts of Southern Ocean etc.* London 1899. представляє в 20 картах температури поверхні моря і струй між 40° а 45° полудн. ширини, 10° а 180° східної довготи.

Побічні моря індійського океана.

Австрійська експедиція на кораблі „ *Pola* “ (1897/8) розслідувала Червоне море. Она занималась більше хемічними та біологічними дослідями, але і морфологічні відносини сего моря були докладніше як дотепер розсмотрені. В полудневій части відкрито шість депресий, що ідуть рядом. З них найглибша є та, що лежить під 22° північної ширини. Там висондовано найбільшу глибіню Червоного моря (2190 м.). В проливі *Bab el Mandeb* найдено максимальну глибину 300 м. Температури і густота води є в тім морі дуже значні. Температура є вища в полудневій части моря, де найдено maximum = 32.5°C, густота, т. є. скількисть соли, більша в північній части, де найдено maximum = 4.08‰ соли. Такі відносини вказували на істнування в проливі *Bab el Mandeb* сильної струї поверхневої від океана до Червоного моря та глибинної струї в противнім напрямі. Такі струї і вказали англійські досліді 1898. року²⁾. Від глибини 700 м. аж до два панує в Червонім морі температура 21.5°. Прозорість води є значно більша в північній, як в полудневій части. Занурена біла таблиця зникала для ока обсерватора там в 50 м. глибини, тут в 39 м. Замітна є велика скількисть кисня в долішних верствах води і нерівно значнійша скількисть органічних субстанцій в намулі Червоного моря, чим пр. в намулі моря Середземного³⁾.

Друга важнійша океанографічна експедиція в обсязі індійських морий плавала в літах 1899. і 1900. по морях австральсько-азійського

Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. 1898. Nr. 10 ст. 517 дд. *Petermanns Mittheilungen* Bd. XLV. 1899 ст. 24, 48, 72, 128. *Jahrbuch der Astronomie und Geophysik.* Bd. X. 226 дд.

¹⁾ *Waarnemingen in den Indischen Ocean etc.* Amsterdam 1900. 22 карти.

²⁾ *Annalen der Hydrographie* 1898, ст 520. дд.

³⁾ *Wiener Akad. Anzeiger* 1898. 13. *Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien* Bd. XLII. ст. 47 д.

архіпелюга на голендерекім судні „Siboga“ під научним проводом Weber'a. Властива єї ціль була розелїдити морську фауну і флору того архіпелюга; але і для географії є вислїди сеї експедиції дуже важні.

Віддавна було вже знаною річню, що в згаданім архіпелюзі находить ся між численними островами кілька значних заглибн. Але до близшого розелїдження дуже замотаних в тих околицях відносно було ще дуже далеко. Для того могла голандска експедиція много нового принести. Сконстатовано наперед, що існують ту дві незалежні від себе заглибини: море Banda і Celebes'a. Море Banda не є так глибоке, як дотепер думано на підставі одного з давнїйших помірїв, що виказав для него максимальну глибину 7800 м. Siboga не висондовала на тім місці ані в єго околиці більшої глибини як 4000 м., найшла за те в иньшій місці 5684 м. Море Banda стоїть в звязи з глибоким (4000 м.) морем коло острова Ceram і заглибинами коло островів Halmahera, Flores, Bali і Savu, де висондовано також значні глибини. Експедиція відкрила також цікавий підморський хребет, що названо хребтом Siboga. Він передїлює море Banda на дві часті. Море Celebes є також розмірно дуже глибоке, бо виказує глибини понад 5000 м.

Знаною вже віддавна було річню, що море Banda від глибини 1600 м. аж до дна має температуру $+3^{\circ}\text{C}$, підчас коли пр. Індійський та Тихий океани на своїм дні мають температуру 1° зглядно 1.8° . Витолковувано се вже давнїйше теоретичним припущенєм, що між тими океанами а морем Banda є підморський вал, на котрім найбільша глибина виносить 1600 м. Правду сего припущеня свїтло потвердили сондованя Sibog'i, доказуючи рівночасно, що зимна вода 3° в морі Banda не походить з І дийського океана, де відділюючий хребет значно висше ся вносить, але з Тихого через молуцкїй пролив. Подібно море Celebes має від 1300 м. до дна температуру 3.7° . І она походить мабуть з Тихого океана, але наглядно сего виказати не могла експедиція, бо не могла найти жаданого підморського хребта. Натомість стверджено, що пролив між островами Bali а Lombok не є глибокий, як давнїйше по недокладних сондованях думано, а плиткїй. Тем самим сильно підтятий є розділ Wallace'a, що з зоогеографічних зглядів поклав тут границю між Азією а Австралією. (На Lombok найдено крім того одного Cyprinoid'a в солодкій водї, що також промовляє проти теорії Wallace'a).

Дуже важні є дослїди експедиції над складом морського дна і над біологією морських глибин. Ту піднесемо тільки те, що мимо

великої глибини тих середземних морей, дно не тільки не має океанічного характеру, але навіть і целатічного годі йому признати. Навіть в найбільших глибинах подибувано прибережні осади, рештки рослин, ба навіть цілі пні дерев, овочі і листя пальми etc., що мабуть становлять поживу для живущих там рослин і звірят. Океанічні осади т. є намул з форамініферами, діатомеами, Radiolaria'ми і т. д. були досить рідкі. З характерних проявів глибинної фауни і флори належить назвати Rhizammina algaeformis (належить до Rhizopoda), звіря що своїми руровидними раменами покриває дно в великих глибинах (maximum в 2798 м. глибини) і глія: Lithotamnium, що творить там цілі лави в малих глибинах (2—40 м.)¹).

Тихий океан і його побічні моря.

Найбільшу дотепер знану глибину на тім океані і на всіх морях висондував в осени 1899 р. американський корабель Nero. В $+12^{\circ}40'$ північної ширини та $145^{\circ}40'$ східної довготи сонда трафилла на дно доперва в 9636 м. глибини²).

Важна є також експедиція на Тихий океан, що в 1899. і 1900. роках підприємляв Agassiz. Виконала она дуже много сондовань, сконстатувала на північ від островів Marquesas депресію до 5770 м. глубокоу, вимірила SO від островів Tonga глибину 8303 м. і найшла недалеко острова Guam (Лядрони) глбину 8802 м. Біологічні висліди були досить малі, дно моря в таких глибинах покривали одностайно грудки піролюзиту. Волоки не витягнули майже ніяких органічних сств з тих глибин на поверхню моря. Agassiz каже, що найінтересніші результати дали досліди над коралевими островами, але належить сумніватись, чи потрафить Agassiz на їх основі захитати теорію Darwin'a в користь своєї теорії по славних верченнях на острові Funafuti в 1897. р., що так світло доказали її імовірність³).

Agassiz найшов, що поодинокі атолї островів Каролїнських, Маршальських і Ellice підносять ся із значних глибин на ізольованих горах і хребтах. На увагу заслугоує велике розповсюджене на дні великих глибин бульб піролюзитових (MnO_2) в дуже значній кіль-

¹) Petermanns Mittheilungen Bd. XLVI. 1900. ст. 182 дд.

²) Geographische Zeitschrift 1899. 509.

³) Petermanns Mittheilungen Bd. XLVI. 1900. ст. 72, 172.

кости. Піролюзит має дуже значний питомий тягар (≈ 5.0), тому то і маятникові обсервації вказують таку надвижку маси в земській корі під океанічними глинами¹⁾.

Важні сондованя і поміри денної температури виконано в літах 1898—1900 на кораблях Egeria, Penguin, Retriever і Pathfinder.

Bell Dawson опрацював табелі припливу і відпливу для бережій британської Колумбії, Hegemann для Нової Зеландії. Врангель представив дотеперішні наші відомості про струю Kuro Shivo²⁾.

Dinklage звернув увагу, що в літі 1897/8 і 1898/9 пливучі льди показувались часто під 48° — 50° полудневої ширини на Тихім океані³⁾.

Також в прибережних морях сего океана роблено замітні досліди. Колчак оброблює обсервації російських кораблів Рурик і Крейсер над питомим тягаром і температурою води в морі японським⁴⁾.

В тім самім морі робив також самі досліди німецький корабель Deutschland⁵⁾.

Російський гидрографічний уряд опублікував обсервації часу замерзання і таяння в російських пристанях над японським та охоцьким морем.

В морі Behring'a роблено обсервації над станом льду на весні⁶⁾. Температуру в сім морі опрацював Girard⁷⁾.

Відносинами в тім морі займає ся також розвідка Lindenkohl'a⁸⁾. В морі Behring'a пр. густота росте рівномірно аж до дна. Температура також опадає, але не рівномірно. Она обнижає ся скоро від поверхні аж до 100 або 150 м., потім підноситься ся незначно до глибини 400 м. Між 500 а 800 м. маєм майже однаку температуру, а звідси она знов опадає аж до дна. Тепла верства між 150 а 409 м. походить ту без сумніву з північного Тихого океану, бо більша густота сеї верстви не дозволяє припускати, щоб она походила з поверхні моря. І в охоцькім морі густота стало росте з глибиною, але теплота є інакше розложена. Під тонкою (50 м.)

1) American Journal of Science. CLXI. 1900. 33, 109, 143, 369.

2) Записки по гидрографіи. XX. 1899. 398.

3) Annalen der Hydrographie. 1899. 398.

4) Записки по гидрографіи. XX. 1899. 95.

5) Annalen der Hydrographie 1899. 226.

6) United States Hydrographical Office. Publ. Nr. 116.

7) Comptes Rendus de la Société Géographique 1899. 79.

8) Petermanns Mittheilungen т. XLV. 1899. ст. 4 дд.

поверхневою верствою теплої води є ту в літї температура між 50 а 200 м. низша від 0°, заразом є ту вода густїйша і більше солонa. Сю зимну верству складає на думку автора вода, що в зимі була при поверхні моря, ту остудилась, а через витворенє ся леду, сильнїйше засолилась. Низше 1500—1800 м. аж до найбільшої глyбини (3370 м.) констатовано всюди 2 2°, що вказувалоб на те, що нїякий з проливів, що лучать Охоцке море з океаном, не є глyбший над 1500—1800 м.

Lindenkohl займаєсь також температурою і густотою середної части Пацифіка. Густота в полудневій стороні є ту більша, як в північній, бо ту впадає багато знатних рік. В загалі густота меньшає до +550 м., а звідси доперва росте. Се приписує L. в части воздушним опадам, в части струї зі сходу, що приносить рідшу та зимнїйшу воду. L. акцентує також важний факт, що коли стрінуть ся рівно густі маси води, з котрих одна є зимнїйша і меньше засолена, а друга теплїйша та більше засолена, то послїдна має тенденцію западати під першу.

Північний ледовий океан є іменно в частях прилягаючих Европі постійно розсліджуваний, хоч більших експедицій туда не висилано.

Weber представляє в своїй книжці про розвиток фізичної географії арктичних країв також розвиток їх океанографії¹⁾.

Nathorst виказав, що найдена Nordenskiöld'ом 1868. р. межі Шпіцберґами а Гренляндією глyбина 4850 м. не існує. Nathorst висондовав там лиш 2697 м. а в сусїдстві 3145 м.²⁾.

Hjort, Gran і Dahl робили 1898—1900 важні дослїди на європейській часті Ледового океана. Брав в них участь також Nansen.

Росня кинулась в послїдних роках XIX. віку до використання свого мурманського побережя, що обліге в части вітками Гольфштрома має вільні від леду пристани. Туди хоче Росня повести нову комунікаційну лінію. Тому маєм завдячувати кілька важних праць про тутешнє море.

Голицин подав розвідку про границі Гольфштрома, що після него сягає в літї аж до Нової Землі³⁾.

¹⁾ Münchener Geographische Studien. 1898. IV. 250 ст.

²⁾ Geographical Journal XIV. 1899. 64.

³⁾ З.писки Имп. Академії наукъ. IX. 1898. 321.

Андреев подає перегляд давніших праць над Гольфштромом 1899 - 1893. і карту сеї струї в тих околицях в р. 1889¹⁾. Книпович на кораблі „Андрей Первозванный“ перевів дослѣди над Гольфштромом важні о стілько, що їх підприймав в зимі. Та струя ділить ся в тім морі на кілька рамен, між котрими є зимна полярна вода. В зимі тепла вода западає під поверхневі зимні верстви²⁾.

На полудневім ледовім океані поробила привагідно бельгійска антарктична експедиція досить важні океанографічні дослѣди. На полудне від Огняної землі найдено наглий опад дна з 300 ва 1800 м., а потім на 4000 м., котра то глибина оставала постійною аж до берегів антарктичних островів. На дні тих глибин находились на диво численні камінці, ба і більше каміне, без сумніву терестричного походження. Близші дослѣди виказали, що сеї матеріал був принесений ледяними горами з антарктичної суші. Те навело учених експедицій на думку, що ледові гори антарктичного океана мають те саме походження, що ледові гори північного океана, а не витворились з морского льоду, як припускає Heim. Близші розслѣди антарктичних земель доказали вповні, що ся думка оправдана. Границя вічного снігу сягає ту аж до зеркала моря, не треба отже і гір, щобі ледівці ся утворили³⁾.

IV. Загальні математичні і фізичні свійства землі.

Про нові постиги в пізнанню математичного виду землі реферував на VII. міжнароднім конгресі географів в Берліні 1898. Helmert. Новійші поміри показують місцями дуже великі різниці від обчислених елементів величини землі. Іменно тз. поміри степенів довжини географічної виказали в новійших часах незгідність з вартостями для сплоченя землі, обчисленими Clarke'ом. Навіть вартість подана Bessel'ом показалась в виду поміру 52° рівнобіжника за великою.

¹⁾ Записки Имп. Русс. Географическаго Общества. XXXIV, Nr. 1.

²⁾ Записки Имп. Акад. Наук. XII. 1900. 419.

³⁾ Gaec 1900 ст. 754. Bulletin de l'Academie de Belgique. 1899. 642.

Тих різниць величин обчислених і обсервованих годі віднести до обсервацийних блудів. Они мають реальну дійсність.

Дуже важне в тім напрямі є питанє: які зміни нормального виду землі повстають через контраст континентальних мас а океана і через вплив великих гірських мас пр. в Азії? Listing приймав, що контраст континентів і океанів може довести до 1000-метрових депресий на океані. Helmert вислідив, що они доходять можуть лиш до ± 500 м. і пр. на островах океанічних є явищами лиш льокальними. На єго думку сила тяжести землі є на океанах і на континентах в приближеню рівно велика в наслідок підземної компенсації мас. Льокальні забуреня можуть бути дуже значні, іменно при стрімких берегах. Таку дуже велику неправильність обсервовано на Гавайських островах.

В виду таких неправильностей має геоїд дуже неправильний вид. Однак новійші досліди показали, що пр. в Європі різниці прямовісні еліпсоїда і геоїда доходять в maximum до ± 100 м.¹⁾.

В загалі добре обчислене величини землі буде можливе доперва по укінченю великих геодезичних робіт і їх докладнім обчисленю. З поміж помірив полуденника початих і проєктованих при кінці XIX. віку згадаю: шведско-російський помір на Шпіцбергах, новий помір полуденника коло Quito. Дуже визначний іменно в наслідок великих розмірів є 50-степеневий лук полуденника від полудневих берегів Мехика аж до берегів Ледового океана і в двоє більший лук африканський, що після проєкту Gill'a має іти з Кап-лянду до Єгипту, а звідси через Малу Азію получитись з луком Struv'ого в європейській Росії. Лук сей обніматиме отже над 100^0 ширини. З помірив рівнобіжників є важний докінчений вже помір рівнобіжника 39^0 в Сполучених Державах Америки північної²⁾.

Добрий загальний погляд на міжнародні поміри землі дає розвідка Orff'a: *Über die Hilfsmittel, Methoden und Resultate der internationalen Erdmessung*. München 1899. Franz.

Новий спосіб означена проміру землі видумали Dufour і Groll, іменно зі зміни положення образів тіл земських або небесних відбитих в воді, котру-то зміну викликає закривлене плинної поверхні води³⁾.

¹⁾ Geographische Zeitschrift. 1900. з. 1. Naturwissenschaftliche Wochenschrift. XIV. 505 д.

²⁾ Geographisches Jahrbuch XXIV. 1901. 5.

³⁾ Gaea 1900 с. 696.

З тих дослідів виходить вже майже певно, що вартість на загальне сплюснене землі буде дещо більша як вартість Bessel'a ($1/_{299}$), так що буде виносила менше більше $1/_{297}$. З тою ж вартостію згоджує ся також нова формула довжини маятника секундового обчислена Івановом:

$L = 99.0997 + 0.5240 \sin^2 \varphi' - 0.0016 (\sin \varphi' - \frac{5}{3} \sin^3 \varphi')$, де φ' = геоцентричний ширині місця¹⁾.

Постійна сили тяжести землі не є ще на думку Krigar-Menzel'a достаточна означена, бо різні методи дають ту різні результати²⁾.

Локальні поміри сили тяжести землі ведуть ся при кінці XIX. віку з великою пильністю.

Sterneck сконстатував, що сила тяжести землі в австрійських копальнях росте в глибину мабуть рівномірно з температурою, т. є. коли перебуванє температури є інтензивнїйше, росте також і сила тяжести сильнїйше. Ся цікава проява не є однак ще на певно розслїджена³⁾.

На бажанє Janssena довершив Hansky на шпилью Монбляна помірів тяжести при помочи Sterneck-івського маятника.

В Meudon $g = 9.8099$, на шпилью Монбляна $g = 9.7947$ ⁴⁾. Таким самим приладом означено силу тяжести в Копенгагені на 9.81579 і сконстатовано на острові Bornholm'ї великі надвижку маси⁵⁾. Для Християніюдержано 9.81945, Гельсінґфорса 9.81992, Пулкові 9.81934⁶⁾.

Відклонів пряма сконстатовано в послїдних часах дуже много. В Фергані они викликають між геодезично а астрономічно одержаною географічною шириною різницї 50''⁷⁾. Дуже великі є відклони в Лїомбардії, бо до 28.7'' в φ а до 35.9'' в λ . В Гарцу они є сорозмірно невеликі⁸⁾, а в середній і північній Швайцарії показались они так малі, що різниця між геоїдом а еліпсоїдом є ту майже ніяка⁹⁾.

¹⁾ Verhandlungen der Generalkonferenz der Erdmessung in Stuttgart 1898. Berlin 1899. год. Petermanns Mittheilungen 1893. з. XII.

²⁾ 72. Vers. deutscher Naturforscher in Aachen. 1900. IX. 17.

³⁾ Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften Bd 108.

⁴⁾ Comptes Rendus t. CXXVII. 942.

⁵⁾ Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. IX. 92.

⁶⁾ Astronomische Nachrichten. Nr. 3547 і 3583.

⁷⁾ Comptes Rendus t. 124. 815.

⁸⁾ Gaea, 1900. 541.

⁹⁾ Das Schweizerische Dreiecksnetz etc. VIII. bearb. v. Messerschmitt, Zürich 1898.

Справа колибання земскої осі, що занимала свого часу так дуже учених астрономів і геофізиків, не є ще дотепер належито вясненена. Дорогу, яку земський бігун заточив в часі від 1890—1898, показує наглядно рисунок Albrecht'a¹⁾. З него видно, що амплітуда явища значно змаліла, але ще не дійшла до зера²⁾. В виду тих фактів, виведених безсторонно з обсервацийних рядів, трудно прилучитись до думок: Gonnessiat'a, що бачить в змінности географічної ширини дві періоди 14. і 12. місячну³⁾, або Chandler'a, що приймає 14-місячну але змінну періоду, або Van de Sande Backhuizen'a, що числить 431 днів⁴⁾. На думку Albrecht'a⁵⁾ істнуванє таких періодів трудно припустити, бо сконстатовано, що кривина сего руху земскої осі не вертає в себе по 7 літах, як думано.

До прихильників 14-місячного періода колибання земскої осі належить також Doolittle. Найважнішим результатом єго праці є однак лиш нове означенє постійної вартости для обсервації (20°580"), що є значно більша від прийнятої Struve'm і парискою астрон. конференцією⁶⁾.

Всі дотеперішні методи і результати дослідів над густотою землі збирає Wawrzik⁷⁾.

Ріжні теорії про стан внутра землі збирає Toulas⁸⁾.

Wiechert обчисляє, що земля складаєсь з желізного ядра проміру 10,000.000 метрів, котре є окружене корою скальною на 1,500.000 метрів грубою. Обєми ядра і кори є майже рівні, відношенє їх мас $\approx 5:2$ ⁹⁾.

Про внутрішню температуру землі пише в тім часі много учених. Дуже важні висліди для пізнання денної виміни тепла між землею а небом і ві внутрі почви дала розвідка Homén'a¹⁰⁾. Не меньше значіне мають і досліди Вільда над температурою почви

¹⁾ Jahrbuch der Astronomie und Geophysik IX. табл. 4.

²⁾ Astronom'sche Nachrichten Nr. 3333.

³⁾ Comptes Rendus t. 126. 710.

⁴⁾ Astron. Journal Nr. 406. cr. 446. Bulletin de l' Akademie des Sciences d'Amsterdam 1898.

⁵⁾ Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation am Schlusse des Jahres 1899 Berlin 1900.

⁶⁾ Results of observations with the zenith telescope of the Flower astronomical observatory. Philadelphia 1899.

⁷⁾ Gymn. Progr. Oppeln 1898.

⁸⁾ Verschiedene Ansichten über das Innere der Erde. Wien 1899.

⁹⁾ Naturwissenschaftliche Rundschau 1898. 215.

¹⁰⁾ Поп. реф. Маурера в Meteorologische Zeitschrift 1898. Lb. 31.

і єї поверхні, коли она покрита ростинністю або снігом, чи ні¹⁾. Але обширніше займатись ту ними не можу, бо обі єї епохальні праці вийшли ще в 1897. р.

При будові сибірської желізниці розсліджував Сергѣєвъ теплоту почви і найшов, що в Чіті 1. линия почва розмерзла до глибини 2.45 м., а звідси аж до глибини 6.30 була замерзла. В Трансбайкалії замерзає почва в зимі на 0.70—4.26 м. глибоко. Під тою верствою, котра в літі розмерзавсь, є стало замерзла верства до глибини 3.28—9.28, що зависить від геологічних відносин і висоти положення. Сніжна покрива ділає на почву дуже отопляючо²⁾.

Підземні відложеня леду в Америці описує Balch. В території Yukon'a найдено замерзлу землю в верстві 30 м. грубій, в славних мінах Klondike є почва на 8—10 м. в глибину замерзла. В Огняній землі найдено ляву і лід в попереми́нних верствах аж в великі глибини, на горі Chimborasso є великі маси леду покриті піском значно низше лінії вічних снігів. Друга часть розвідки присьвячена ледовим печерам, котрих є в Америці значна скількість³⁾.

Scheimpflug і Holler зміривши докладно температури в копальнях ртуті в Ідріі потвердили дотеперішні здогади, що там панує аномально висока температура. Але лиш простір 450—600 м. висоти визначуєсь температурою до 27° C.; всюди довкола виносить температура 10—14° C⁴⁾.

Денний хід температури почви в Тифлісі 1891—1895 обчислив Hann⁵⁾.

VI. В у л ь к а н і з м.

Ся царина, спільна в цілості фізичній географії і геології, не може однак повеличатись в послідних роках XIX. віку якоюсь більшого значіння роботою, що змінялаб погляди і отвирала нові дороги. Всї майже дотичні розвідки займають ся більше або меньше льокальними відносинами, тому-то я зірупую материял після частий сьвіта.

¹⁾ Пор. реф. Naturwissenschaftliche Rundschau 1898. Nr. 8.

²⁾ Извѣстія имп. русс. геогр. Общества XXXIV. 463.

³⁾ Petermanns Mittheilungen 46. LB. 215.

⁴⁾ Sitzungsberichte der k. Ak. der Wissenschaften in Wien. Math. phys. Klasse. CVIII. 950.

⁵⁾ Meteorologische Zeitschrift 1900. 281.

Загальних праць про вулканізм маю до записаня лиш дві важнійші. На взір иньших французских учених, що конечно хотять в розміщеню вулканів і дислокацій бачити фігури геометричні, старає ся Michel Lévy (впрочім досить довільно) великі вулканічні пояси землі спровадити на 6 великих колес, що відповідають гра-нам вписаного в кулю землі чотиростінника¹⁾.

Географічне розміщенє вулканів представив Wäglер²⁾.

Він розрізняє три головні регіони вулканічної діяльності: пацифічний, індійско-антарктичний і атлантський.

Пацифічний регіон є обмежений: американськими Кордильерами, Алеутами, Камчаткою, Курилями, японськими островами, Філіпінами, Молюками, Новою Гвінеєю, островами Сальмонами, Новими Гебридами, Viti, Tonga, Kermadec, Новою Зеландією. Поділити мож сей простір на дві часті: північну і південну, а кождо з них ділить автор на поменьші вулканічні країни. Індійско-антарктичний регіон обнімає індійський і антарктичний океан, східну Африку по центрально-африканський рів, Абіссинію, Палестину і Арменію, Іран і Індію. Цілу решту землі обіймає третій регіон: атлантський.

Що до загального погляду на вулканізм вважає автор его за наслідок виключно корчення ся землі. Чи ядро землі є цїпке, плястичне чи плинне — цїпкі маси земскої кори тиснуть на него. Коли в наслідок корчення ся кори она пукне, підземні маси увільнені від тиснення, розширяють ся і підносять викликаючи вулканічні явища.

Вулкани Європи є зовсім природно найліпше знані зі всіх вулканів. Ісландські вулкани, що лежать в околицях майже незаселених, не часто виступають в періодичних наукових публікаціях, зате італійські вулкани остають під тревалим доглядом учених.

Над вулканізмом Везувія роблять ся в послїдних часах постійні дослїди, котрих головним центром є обсерваторія збудована під шпилем гори. Результати тих дослїдів є для геофізики дуже важні і що хвиля приносять наукові часописи розвязку давно вже поставлених в вулканізмі проблемів або ставлять нові, власне на основі помічань діяльності Везувія.

¹⁾ Bulletin de la Société Géologique de France 1898. XXVI. 105.

²⁾ Mittheilungen des Vereins für Erdkunde in Leipzig 1900. 1.

Послідна дещо більша ерупція того вулькана випала на 1895. рік, коли на північно-західній стороні повстали нові прогалини, з яких зачала випливати в великих кількостях лави з множеством газів.

Підчас того вибуху Везувія обсервував Matteucci вулканічні огні, що виходили з великим шумом з одної з повставших прогалин та вистрілювали і до 50 м. висоти. Того явища дотепер не обсервовано на Везувію, хіба лиш малі, супокійні огники, що є зате дуже тревалі. Згадані великі огні, потривавши кільканацять день, також перейшли в стадію малих і супокійних. Дюговина того по-лума, що без сумніву походить з газів, що містять ся в маїні, є дивним робом тягла¹⁾.

Се одна цікава проява. Другою ще цікавішою є отся. Вже в липню 1895. року перестала лави виходити зі всіх прогалин з ви-їмком одної, що знаходиться у стіп головного стіжка вулькана в т. з. Atrio del Cavallo. Ту витворила ся з лави гарна копула, що за-одно росла під впливом щораз нових струй лави, що над її верш-ком ся розпростирали. Коли беззглядна висота копули дійшла до 835 м. (лютий 1898. р.), не могли вже струї лави досягнути її вершка і зачали бочити на право і на ліво. Сама копула представ-лялась досить імпазантно і значно вже змінювала загальний вид Ве-зувія. В середині она ще не цілком простигла, та від часу до часу добувалась з її боків горяча маса і творила нові струї. Але ви-сота копули не остала на диво незмінною, хотів лави не могла вже по її вершку розливатись та его висоту збільшати. По місяці по-стережено зі здивованем, що копула зросла в висоту о 15 м., а ближші розсліди Mateucci'ого показали, що причиною того побіль-шеня висоти є внутрішнє піднесенє цілої маси лави через інтрузию справдішнього лаякколїта. Сей лаякколїт підніс верхні верстви лави, так само як американські лаякколїти піднесли седїментарні верстви, які спинили лаву, щобн ся не розплила. Таке вулканічне явище обсервовано ту вперве; оно показує, що теорія Buch'a не зовсім є хибна.

В другій половині 1898. р. мав Везувій другостепенний вибух. З під згаданої копули виплили нові струї лави, при чім головний кратер в часті запався і зачав викидати попїл та жужелиці, а по-тім і лаву. Своє maximum осягнув вибух в другій половині вересня,

¹⁾ Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei. 1898. Ser. 5. 7. (1). ст. 314 дд.

але ніяких шкід не зробив. Від того часу стала діяльність вулкану меншати і вказувала взагалі тип діяльності, котрий Matteucci зве типом Stromboli¹⁾. Середину головного кратеру займала лява озерцем на 10 метрів широким, а коли задля великого опору під копулою не могла тамтуди вийти, піднеслась в кратері до 100 м. понад свій давнійший позем і в тій висоті (1060 м.) виплила та зараз значно опала. Висота Везувія по новіших вибухах виносить 1240 м. — Semmola розсліджував звязь діяльності Везувія з фазами місяця протягом двох літ, від липня 1895. до липня 1897. Показало ся, що підчас тих самих фаз вулкан зовсім ріжно ся заховував, з чогоб виходило, що притягання місяця зовсім на вулканічні явища не впливає²⁾.

Крім Везувія ні один з полуднево-європейських вулканів не мав в останніх часах більшого вибуху. На Етні мож було помічати лиш невеликі огні в кратері, що повстали зі спалення газів, та дещо димів. Volcano є тепер лиш сольфатарою. Stromboli має тепер сім кратерів; з них виходять раз жужлі і пари, то знова дим з піском або і малі струї ляви. В марті 1899. р. два кратери з сімох получились в один. На острові Santorin приготовлює ся на думку Matteucci'ого новий великий вибух, подібний до сего, що приключивсь перед трицятьма роками. Хотьа головний кратер все лиш пару виділяє, наступили ту значні обниження терену, іменно того, що в часі останнього вибуху виринув над морську поверхню. Порт св. Юрія розширивсь, а недалеко него цілий островець зник під водою³⁾.

Досліди над вулканами в иньших частях сьвіта поза Європою є більше принагідні, хоч в останніх літах ведуть ся в дуже многих місцах.

В Азії відкрито в 1898. р. новий вулканічний терен, збудований з базальтових ляв в полудневій Арабії⁴⁾. Попри європейські вулкани розсліджують ся тепер докладно вулкани на острові Яві (Java), головно завдяки там осілому голєндерському геологові Verbeek'ови. Він і представив їх коротким начерком⁵⁾.

1) Поп. Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1899. ст. 425. Gaea 1898. ст. 752.

2) Comptes Rendus т. 126. ст. 926.

3) Поп. Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei. 1899. Ser. V. 8. ст. 168.

4) Wiener akademischer Anzeiger 1898. ст. 277.

5) В Petermanns Mittheilungen 1898 p. 25 д.

Вулкани се найвищі гори острова і їх ряд становить скелет Яви. У більшості запавсь кратер, в се отже вже руїни вулканів нераз дуже великі. Найбільший Ringgit має кратер 21 km. проміру. Зате вулкани, що в них задержавсь первісний невеличкий кратер, в висші. Найвищі в Sëmeru (3676 m.). Число всіх вулканів на Яві в 121, з них однак мабуть лиш 14 вибухало в історичних часах. Лява являлась у них досить рідко. Вулкани Яви розміщені звичайно на одній лнії поздовж острова. Ї також поперечні та і рівнобіжні до головного напрямку побічні лнії. Уклад місцями дуже замотаний, бо в западених вже руїнах вулканів повставали нові вибухові стіжки, а ерозия сильно позмінювала зверхний вид руїн. Замітив ту Verbeek і те цікаве явище, що лавіни з каміня повидовбували в збоках вулканів широкі долини зі стрімкими стінами. Петрографічний склад дуже однманітний. Вулканічні скали, багаті ортоклязом, дали по звітріню дуже плідну почву. Подрібно описав один з вулканів Яви званий Lamongan, визначний своїми правильними, в нчч дуже гарними вибухами Fürst¹⁾.

З ннших вулканічних околиць полудневої Азії розсліджували в послдних часах Bücking і Rinne півостров Minahassa на острові Celebes. Ї се край сильно вулканічний і від XVII. до першої половини XIX. віку нераз траплялись вибухи з тамошних численних вулканів, що зрештою сягають ледви 2000 m. висоти. Тепер діяльність їх всіх зійшла до сольфатарового стану. Много в краю фумароль, болотних вулканів і горячих жерел²⁾. Niemeyer описує вулкани височини Idjen ві східній Яві, де довкола великого кратерового перстения зносять ся численні вулкани понад 2000—3000 m. висоти. Відносини дуже цікаві. Ріки плывуть нераз попід струями застиглої лави, в много земних пірамід в мягкім туфі, стіни кратерів зложені з пестрих порід скальних³⁾.

Вулкани австралійських островів, хоч дуже численні, в сорозмірно мало розсліджені з виїмком хіба вулканів на островах Hawaii. В найновіших часах відкрили цікаве вулканічне явище брата Friedländer'и на ляхах острова Ninafo'ou в групі Tonga. Ї се

¹⁾ Pop. Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1898. ст. 112 дд.

²⁾ Pop. Petermanns Mittheilungen aus J. Perthes geographischer Anstalt. Bd. XLV. 1899. ст. 249 дд, Zeitschrift der deutschen Geologischen Gesellschaft т. LII. 1900. ст. 327.

³⁾ Tijdschrift van het Kon. Nederl. Aardrijkskundig Genootschap 1900. Nr. 5—6.

рури з лави, висоти до 2 м. зі стінами грубими на 8—15 см. з отвором в середині, на 25 см. широким. Повстали они мабуть тоді, коли тамошня дуже рідка лавя облила пні кокосових пальм¹⁾.

Середноамериканські вулкани розслідував зі згляду на їх розміщення Sapper, причім відкрив много нових вулканів і виказав, що кілька гір вважаних давнійше вулканами, ними не є. Середноамериканські вулкани не є розміщені на одній поздовжній прогалині, але на більшій скількості коротших прогалин, що є зглядом себе попересувані; се іменно нікарагуанська зглядом костаріканської. Ніяка з тих прогалин не є прямолінійна, всі є більше або менше позаломлювані. Кожда прогалина тягне ся в напрямі існуючих вже молодих вибухових пасм і то або на їх хребті, або на збочи, або й здовж підніжжй. Вулкани дотепер діяльні лежать або на згаданих поздовжних прогалинах, або на коротких поперечних; вулкани, що лежать на боці від головної прогалини, є вже вигаслі. Число коротких поперечних прогалин є в північній часті (San Salvador, Guatemala) більше, в полудневій часті (Nicaragua, Costa Rica) менше. Там є вулкани також тіснійше коло себе розміщені, ту рідше. Там, де много поперечних прогалин, а вулкани близько себе стоять, видає ся, що они є розкинені групами. Найвищі зглядні і беззглядні висоти подибуєм на обох кінцях цілої вулканічної системи²⁾.

Sapper оголосив також спеціальні розвідки про поодинокі вулкани в Guatemala, San Salvador і Nicaragua, що їх сам розслідував 1897. р. Між иньшими ходив він на вулкан Расауа, що визначуєть своєю дуже скомплікованою будовою, вулкан Las Flores, майже виключно збудований з лав, вулкан Suchitan з червоним жужлевим стіжком Cerro Colorado і великаньським (2½ km. проміру) мааром Retana. На вулкані San Miguel замітив Sapper значні зміни в порівнянню з єго описом з 1866. року. Великі партії кратеру запалвсь мабуть наслідком вибуху, що склавсь в початках дев'яностих років. На увагу заслугоє також багатий в кратери вулкан Las Pilas в Nicaragua, що мав вибухи 1850. і 1867. року³⁾. Досліди Sappera в 1895. і 1897. році подвоїли майже число знаних

¹⁾ Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1898. ст. 413 дд.

²⁾ Zeitschrift der deutschen Geologischen Gesellschaft. т. 49. ст. 672 дд.

³⁾ Petermanns Mittheilungen Bd. XLVI. 1900. ст. 149 дд. Zeitschrift der deutschen Geologischen Gesellschaft LI. ст. 578 дд.

вульканів в тамтих сторонах. На вулькані Popocatepetl в Мексику сконстатовано істноване сімох сольфатар і озера, що повстало зі скондензованя фумарольових пар¹⁾.

В околицях золотих рудників Klondike над озером А-Tlin вибух в осени 1898. р. незнаний доселі вулкан. Ясність в ночі була притім так сильна, що помагала при роботі гірнякам²⁾.

УІІ. З е м л е т р я с е н я.

Наколиб хто порівнював нинішні способи розслідування землетрясеня і впливаючі з того погляди на їх істоту з поглядами, що панували трицять літ тому назад, найшов би дуже велику різницю. Різниця походить головню з того, що перше майже лиш самі геологи розслідували землетрясеня і то лиш значнійші, тепер же взялась до того предмету геофізика з так точними і чулими знарядями, що не лиш сильнійші, але і дуже навіть слабії землетрясеня, можна тепер розслідувати. Ті знаряди, що як й давнійше зовуться сейсмометрами, показали, що поверхня землі находиться влаетливо в постійнім дроганю³⁾. Славний англійський сейсміст Milne поділив ті дроганя землі на чотири головні класи: 1) Властиві землетрясеня з великою амплітудою і скорим наслідством по собі по одиноких товчків. 2) Пульзації землі з великою амплітудою, але повільним наслідством товчків. 3) Властиві дроганя землі з малою амплітудою та скорим наслідством. 4) Довготривалі осциляції почви з малою амплітудою і великими проміжками часу. Дуже многі методичні уваги подав в тім згляді Gerland⁴⁾, що розслідує кожде землетрясеня з трех сторін: 1) з прояв упругости т. є. з огляду на рід, вид, творене і рух филь землетрясеня, 2) з наслідків филь на земській корі і 3) що до його властивого походження і причини його повстаня.

¹⁾ Memorias de la Cientifica Sociedad Antonio Alzate Mexico. X. ст. 185.

²⁾ Geographische Zeitschrift. V. 1899. ст. 53.

³⁾ Всі що важнійші сейсмометри описані і критично розсмотрені Ehlert'ом в обширній розвідці, що добре орієнтує про сю kwestию. Beiträge zur Geophysik т. III ст. 350 дд.

⁴⁾ Verhandlungen des 12. deutschen Geographentages ст. 101 дд.

Тремтіння землі з малою амплітудою походять після згідної думки многих учених від рухів в атмосфері, і то почасти від вітрів, почасти від змін в тисненню воздуха. Пульзації землі не є дотепер достаточньо выяснені. Milne і Rebeur приписували значний вплив льокальним барометричним градієнтам, Ehlert виказав, що они являють ся тільки в тім часі, коли земля находить ся в перігелі, і то в ночі. Тому то він думає, що оселя тих пульзаций находить ся в найвисших верствах земскої маіми. Ehlert розеліджував також довготривалі осциляції і сконстатував у них істнуванє ріжних періодів. Є ту іменно 1) денний період, ще має maximum коло 7-ої години рано, а minimum коло 6. вечером. Їго причиною є бодай в части інсоляція, що розширяє і випучує поверхню землі, коли тимчасом внутрішні верстви поволійше ся огрівають. Другий період є місячний і повстає під впливом притягання місяця. Є ще і иньші періодичні рухи пр. рух тзв. точки зерової в поземім маятнику, що дадуть ся звести до впливу річних змін сонічного тепла¹⁾.

Про землетрясеня властиві, що мають велику амплітуду, має Gerland зовсім відмінні погляди, як учені, що виключно з геологічної точки погляду хотілиб їх выяснити. Він констатує вперед, що коли пр. в якійсь дуже віддаленій околиці, що може лежати і по противній стороні земскої кулі, лучить ся землетрясенє, то надовго, заки ще властива його філя дійде до обсерватора і заколибає его інструментом, замітити можна маленький рух в інструменті, з дуже слабкою амплітудою, але зовсім того самого виду, що великий рух інструменту, як се можна переконатись з фотографів. Такі маленькі рухи (tremors) переходять землю зі шкоростю 10—20 km. на секунду. Виходячи з того і опираючись на теорії А. Schmidt'a думає Gerland, що головною причиною землетрясень не є тектонічні заворушеня в сусідстві земскої поверхні, а експльозії на границях 1) сталої земскої кори з маімою і 2) маіми з газовим ядром землі. Так думали вже Zöppritz, а по части Daubrée, думка Gerland'a не є проте зовсім нова, але дуже віродостойна. Головною слабою точкою т. зв. тектонічних теорій землетрясень є те, що навіть в такій Японії, де щорічно лучає ся тільки землетрясень, не видно додатного руху мореского позему. А прецінь так великі землетрясеня, наколиб мали тектонічну причину, мусілиб мати такий наслідок. Так само не бачимо додатного руху позему адрійского моря, хоч Hörnes приписує всі землетрясеня в его око-

¹⁾ Beiträge zur Geophysik III. 131 dd. IV. 68 dd.

лицях тз. періадрійским обломом, т. є. западаню ся куснїв земскої кори над згаданим морем¹⁾. В загалї тепер морям приписують великий вплив на землетрясеня. Milne думає, що більшість японських землетрясень походить з пересувань тиснень на сусіднім морським дні²⁾.

З дальших загальних дослідів над землетрясеннями згадаємо слїдуючі:

Mazelle обсервував денні періодичні колибання ґрунту в Тереті. Вийшли для трох обсервованих маятників одиничні колибання лиш з одним maximum і minimum в місяцях літних (цвітень — жовтень) і подвійні денні колибання з двома денними maximum'ами і minimum'ами в зимових місяцях (падолист — марець). Mazelle найшов також періодичні рухи у камяного стовпа, на котрім стояв прилад. Ті рухи показують в своїх амплітудах згідність з річним ходом колибань температури³⁾.

Про підземні шуми, що їх чути в часї землетрясень, написав дуже поважну річ Davison⁴⁾. Супроти думки многих учених, пр. Gerland'a думає Davison, що з тих голосових явищ при землетрясеннях мож буде витягнути важні дати для пізнання самого землетрясеня. Ті шуми видають на думку Davison'a підземні скальні мася пересуваючись попри себе.

T. Suess стараєть ся вяснити, чому підчас великого землетрясеня в Лісбонї 1755 р. перестали плисти теплицкі терми. Він толкує се виливом филь земскої кори па зеркало заскїрної води⁵⁾.

Теорією землетрясень займає ся Rudzki в двох розвідках⁶⁾. В першій автор розелїджує позірну скорість, з якою розширяють ся землетрясеня, розпроваджуючи математично теорію Schmidt'a про криволїнійні лучи землетрясень, причім вислїди математичні автора цілком згоджують ся з обсервованими фактами. В другій R. досліджує вид пруживих филь в камени і доходить до результату, що він є дуже скомплїкований. Вислїд практичний: Один удар ві внутрі землі може викликати кілька потрясень на єї поверхні. В рухових явищах при землетрясеннях відкрив R. явище аналогічне до оптичного розціплення.

¹⁾ Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik т. XX. ст. 565 д.

²⁾ The Geographical Journal X. ст. 129 д.

³⁾ Wiener akademischer Anzeiger 1900. ст. 149.

⁴⁾ Philosophical Magazine 1900. Ser. V. т. XLIX. ст. 31 дд.

⁵⁾ Mittheilungen des k. k. geologischen Reichsanstalt 1900. 2. ст. 55.

⁶⁾ Поміщені в Gerland'a Beiträge zur Geophysik 1898. III. 495 дд. і 519 дд.

Montessus de Ballore пробує поділити цілу земську поверхню на сейсмічні регіони і їх після різних точок погляду класифікувати¹⁾.

Заворушення поземного маятника в Николаєві над Богом в літах 1897, 1898. і 1899. списує Кортаззи, не виводячи однак з них обсервацій ніяких загальних висновків²⁾.

Rudolph: über submarine Erdbeben und Eruptionen³⁾ описує і розслідує наслідки штучних вибухів під морською поверхнею, щоби вивести з тих дослідів пояснення проявів природних вулканічних вибухів та землетрясень на морі і його берегах.

На думку Harboe'го було велике землетрясє в Загребі (1880. XI. 9.) викликане секулярним обниженням і поземним здавленням земскої кори. Те здавлення було причиною землетрясєня⁴⁾.

Gerland описує цїсарско-німецку головну стацию для розслїдів над землетрясєнями, обговорюючи при тїм загальні задачі сучасної сейсмології⁵⁾.

Новий прилад до обсервованя землетрясєнь винайшов японський учений Omori⁶⁾.

Про урядженє власної взірцевої обсервациї в Гамбурзі з поземем маятником Ehlert'a реферує Schütt⁷⁾.

Спеціальну сейсмічну літературу, що є в теперішнім вже часі дуже богата, перейдем лиш в загальнім огляді після частий сьвіта, в котрих лучались обговорювані в літературі землетрясєня.

В Европі було в послїдних літах досить мало значнійших землетрясєнь. Одним з європейских країв, де найрїдше они приключають ся, є без сумніву українсько-руська територія. В Галичині пр. від кількох лїт ніякого хочби слабшого землетрясєня не сконстатовано. Взагалі ціла Австрія з виїмком хїба Країни є тереном дуже супокійним⁸⁾. Два австрійські землетрясєня з послїдних лїт були науково оброблювані: землетрясєня в Grasslitz (1897. X. 25 — 1897. XI. 7.) і в Sinj (1898. VII. 2.). Із землетрясєнь сусїд-

¹⁾ Beiträge zur Geophysik IV. 331 дд.

²⁾ Beiträge zur Geophysik. IV. 383 дд.

³⁾ Beiträge zur Geophysik III. 273 дд.

⁴⁾ Beiträge zur Geophysik IV. 406 дд.

⁵⁾ Beiträge zur Geophysik IV. 427 дд.

⁶⁾ Гл. Petermanns Mittheilungen 1900. 46. LB. 8.

⁷⁾ Beiträge zur Geophysik IV. 220 дд.

⁸⁾ Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft. XLI. ст. 767.

них країв європейських розслідув саксонські землетрясєня (1889 — 1897) Credner. Він замітив, що їх причина не є горотворче тисненє, а щось иньше і сконстатував, що землетрясєня підлягають двом періодичним змінам: 1) виступають частійше в зимових місяцях, а іменно в жовтні, падолистї і грудні, 2) трапляють ся частійше в ночі 8^h — 20^h, чім в день; найчастійше від 12^h — 20^h. Виянювати тої періодичности не берєсь ще однак Credner¹⁾. Ся осторожність зовсїм на місци, бо пр. грецькі землетрясєня з лїт 1893. — 1898. мають maximum в весняних місяцях, іменно в маю, а minimum в жовтні. Деяке maximum ту також припадає в ночі над раном; сю обставину приписує Eginitis тому, що в часї денної працї многі землетрясєня проходять незаміченими. Місячне maximum припадає на повню, minimum на нів зовсїм протилежно теорїі Perrey'a; перїтей і апогей місяця мало що вплинули на ті землетрясєня. Они до того були частійші в афелю, чім в перїгелю землї.

З иньших європейських країв лише Ісландія в послїдних роках потерпіла від землетрясєнь. Вєї они є вулканїчного походження. Дуже сильне було землетрясєне 1896. VIII. 26 — IX. 10. Много гір обвалилось, земля в многих місцях сильно потріскала²⁾. Меншу натугу мало землетрясєне 1899. II. 27. в околицях Reykjavik³⁾. Землетрясєня в Норвегїї з лїт 1894. і 1895, хоч досить численні, були що до натуги дуже слабї⁴⁾.

В позаєвропейських частях сьвіта є Японїя класичним краєм землетрясєнь. Чужї та за ними в новїйших часах і японські ученї розслідують пильно численні землетрясєня сєго краю. Головно заслуживсь коло студий над тим предметом Sekiya, що владив каталоґ японських землетрясєнь від 416. до 1867. року. Начислив він їх 1898, з них 222 було дуже сильних, що справили великі спустошеня. Найбільша скількість тих тзв. руйнуючих землетрясєнь припадає на лїтні місяцї, найменьша на зиму. Maximum вєїх землетрясєнь разом взятих припадає однак на весну. Руйнуючі землетрясєня виступали в Японїї залюбки ірусами, так що нераз в кількох лїтах було їх много, а потім протягом певного часу не було їх зовсїм. Являлись они головно на вїтшній пацифічний сторонї лука, що становить головну морфолоґїчну лїнїю японського

¹⁾ Abhandlungen der königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften т. XXIV.

²⁾ Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. Nr. 5.

³⁾ Jahrbuch der Astronomie und Geophysik X (1899) ст. 195 дд.

⁴⁾ Pop. Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik XX. 1898. ст. 369.

архіпелага¹⁾. З сильніших землетрясень, що в останніх часах навістили Японію, описує Yamasaki те, що приключилось 1896. VIII. 31.²⁾.

З інших країв Азії може хіба лиш нідерландська Індія порівнятись з Японією так що до числа землетрясень, як і що до їх обсервацій. Montessus de Ballore ще в 1896. р. розслідував, як часто землетрясення являються в різних околицях нідерландської Індії, і найшов, що найбільше землетрясень явилось пересічно в околицях островів Ачу. Від довшого часу ведуться тут в Батавійській обсерваторії докладні дослідження над землетрясеннями. В 1898. помічено там, що найбільше число (71), ба більше чим $\frac{1}{3}$ всіх землетрясень, лучилось в падолисті³⁾. Землетрясення 1899. р. є значно рівномірніші на місяці розділені і не вказують ніякого так сильного максимуму. Найсильніше землетрясення в тім році було в ночі IX. 29--30 на острові Ceram. До 4000 людей тоді погинуло, а тремтіння дійшли аж до Європи і обсервовано їх на маятниках в Штрассбурзі та на острові Wight⁴⁾.

В Азії обсервовано поза тими теренами значні землетрясення на малоазійському півострові в 1895 і 1896⁵⁾. В 1899. р. IX. 21. було сильне землетрясення в околицях Смирни, що наробило великої шкоди⁶⁾. Але найбільше лиха накоїло велике індійське землетрясення 1897. VI. 12., що мало зв'язь з дальшим образованием ся Гімаліїв і було без сумніву тектонічне. Потрясений терен обнимав 4 мільйони км², між іншими і середню Європу, де сейсмографи сильно його відчули.

В Африці і Австралії не записано в останніх літах ніяких більших землетрясень. В Америці були більші землетрясення на острові Гаїті 1897. XII. 29., що обізвалось аж в Николаєві над Богом, що віддалений о цілий квадрант обводу землі⁷⁾, та в Каліфорнії 1898. III. 30. значно менше⁸⁾.

¹⁾ The Journal of the College of Science, Imperial University of Tokyo 1899. XI. ст. 389 дд.

²⁾ Petermanns Mittheilungen XLVI. 1900. ст. 249 дд.

³⁾ Naturkundig Tijdschrift voor Nederl. Indië LIX. 1899.

⁴⁾ Ibidem т. LX. 1900.

⁵⁾ Beiträge zur Geophysik III. 337 дд., 541 дд., IV. 118 дд.

⁶⁾ Gaea 1900 ст. 57.

⁷⁾ Atti della Reale Accademia dei Lincei. 1898. S. V. 7. 316 дд.

⁸⁾ Petermanns Mittheilungen XLIV. 1898. ст. 117.

УІІІ. Будова земскої кори взагалі і дислокації.

Участь ріжних хемічних елементів в складі доступних для нас частий земскої кори представив в процентах Rosenbusch¹⁾. Marpmann старавсь експериментальною дорогою розслїдати повставане верстованих скал. Їго дослїди виказали: 1) Коли піддамо вохкі або і плинні скальні маси, що містять гази, тисненню, так що гази не можуть зовсім уходити або лиш дуже поволи, тоді плинна маса робить ся верстована або лупаквата. 2) В природі можуть верстовані скали повстати в той спосіб, що або осадові верстви дістають ся під тиснене газове і змінюють ся в лупаки або вульканічні ляви стають цїпкими під сильним тисненем газів і тоді творять ся кристалічні породи пр. ігнайс, лосняковий лупак, амфіболіт і т. д. 3) З експериментів показуєсь, що верстоване може повстати і у скал вульканічних²⁾. В загалі теологія експериментальна виказує в послїдних часах поступи важні для фізичної теоратії³⁾.

Середну висоту суші означив в 1891. р. Heiderich на 744 m., а в році 1894. на 735 m. Wagner означаючи ві в 1895. р. скритикував остро методу і роботу Heiderich'a та означив середну висоту суші на 709, округло 700. Heiderich відповів аж 1899 р.⁴⁾. узнаючи вартість найдену Wagner'ом рішучо низькою, а проте нездалою. Тимчасом Wagner, опершись на розвідці Нааск'a, що найшов середну висоту полудневої Америки значно меншою, як приймамо дотепер (580 m. супроти 650 і 760 m.), виказав наглядно, що середна висота континентів виносить 701 m⁵⁾.

Підношеннями і опаданнями земскої кори займаєсь Lapparent⁶⁾ і полемізує з теоремом Suess'a, що опадане земскої кори в первостепенним явищем, а фалдоване та льокальні піднесеня другостепенним і подає численні приміри піднесень ві Франції, Скандинавії та Мелянезії, причім однак пересаджає знов вагу підношень.

Найлекше обсервувати такі підношення і опадання земскої кори над морем. Кількома дотичними працями займемось в уступі про побережа.

¹⁾ Elemente der Gesteinslehre 1898.

²⁾ Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1898. 441.

³⁾ Нов. новий підручник: Meunier, La géologie expérimentale. Paris 1899. Alcan.

⁴⁾ Beiträge zur Geophysik IV. 26 дд.

⁵⁾ Beiträge zur Geophysik IV. 116.

⁶⁾ Soulevements et Affaissements. Revue des questions scientifiques 1898.

Дуже цікаву справу порушив Kahle. З різних місць Німеччини доношено, що предмети з даної місцевості давнійше невидимі нагло ставали видні. Kahle радить докладно фотографувати околицю і винаходить різні способи вияснення вірогідних фактів, щоб не бути зневоленням прийняти локальних обнижень або підвишень земскої кори¹⁾.

Таксамо завважав Repkewitz маленькі колибання в беззглядній висоті деяких сталих точок уміщених в Шарльотенбурзі²⁾.

Messerschmitt порівнюючи зі собою різні прецизійні нівеляції приходить до переконання, що такі зміни беззглядної висоти дійсно існують³⁾. І так знак висоти в Bregenz обниживсь в останніх часах о 0.1 m. Подібні лиш дещо менші обниження (max. 37 mm.) констатовано на східних берегах Женевського озера. Ті обниження легко витолкувати укладанем ся сипкого материялу нанесеного над озера ріками. Цікавіші є зміни висоти в околицях, де лиш тектонічні зміни можуть їх вияснити. А є вказівки, що такі зміни існують пр. в Французькій та швейцарській Юрі, в Туринії, Віртемберзі і т. д. Пізнано се з виразного розширення овиду деяких місцевостей. Такі зміни є наслідком тектонічних рухів земскої кори, іменно при землетрясень.

Про рухи земскої кори появилось в Journal of Geology Chicago 1898. VI. кілька розвідок. Powell звертає увагу на різні услів'я тиснення, під котрим остають маси каменя і розважає, що коли в однім місці слідує винесене, то слідує зараз денудация справляє на данім місці зменшене тягару, а потім винесене, підчас коли опадане земскої кори потягає за собою через седіментацию збільшене тягару і дальше опадане. Van Hise старає ся придумати спосіб обчислення, о скільки скорчилась земля через повстанє гір, причім вказує на різні чинники, які конечно належить узгляднити, а котрих при дотеперішних обчисленнях не узгляднювано. Slichter займає ся тисненем ві внутрі землі і находить, що зміна часу обороту викликалаби великі зміни в тім тисненю.

Тектонічну карту полуднево-західної Німеччини (1:500.000) видав горішно-ренський геологічний кружок⁴⁾. Карта вказує два головні дислокаційні напрями: SO—NW т. з. герцинський і SW—NO т. з. варисційський⁵⁾.

¹⁾ Petermanns Mittheilungen 45. 1899. 218 дд.

²⁾ Zeitschrift für Vermessungswesen 1898. 16.

³⁾ Schweizerische Bauzeitung XXXIV. Nr. 8—10.

⁴⁾ Gotha, Perthes 1898.

⁵⁾ Petermanns Mittheilungen 1899. Lb. 19.

Знана від 1890 р. депресія Люкчун в середній Азії має від кількох літ свою метеорологічну станцію. З її обсервацій Тілловивів в останніх часах, що найнижче в тій депресії положені місця Боянтетур і Таштура лежать 112, згідно 130 м. під по-земом моря¹⁾.

IX. Вітрині і праця вітру.

Регіони, де переважає вітрині над механічною деструкцією, зовем як відомо пустинями. Проблем повстання і розвитку пустинь не так то дуже давно ближше розслідувань. Дперва в останніх десятиках літ XIX. віку наука ближше пізнала механічні і хемічні процеси, що відбувають ся в таких околицях.

В останніх літах XIX. віку розпочав професор єненський Walther ґрунтовні свої студії над проблемами повстання пустинь і їх морфології. Дві важні праці були овочем его дослідів: про форми азійської пустині і про закон повстання пустинь.

Форми азійської пустині помічав Walther підчас своїх подорожий в закаспійський край і Бухару. Тамошня пустиня представляє цікаві явища вітрині і ерозії вітру. Що хвиля подибуєсь там великі каменюкі в середині зовсім порожні, що складають ся лиш з кори кілька сантиметрів грубої. В скалах творять ся заглибини, про котрі напевно знаємо, що не є водою вимиті. Ізольовані скали прибирають по певнім часі форму великанських грибів. Поодинокі камінці мають форму заокруглену і часто змінюють ся прямо в правильні кулі.

Всі ті явища є впливом вітрині. Вегетація не хоронить почви перед палячим промінем сонця. Скальне підложє нагріваєсь тому дуже сильно. В ночі наслідком дуже сильного промінювання температура обнижаєсь значно, часто нижше зєра і наслідки є великі. Поверхня каміня огрівшись сильно розширяєсь так, що відлупуєсь як кусник кори. Є се тз. лущене каміня або десквамація. Колиж камінь нагрітий в день остудить ся в ночі, тоді пукає его зверхня кора, або і цілий камінь. Великий вплив має ту обставина, чи скала містить в собі сіль, чи ні.

Вітрині достарчає материялу, вітер пустині бере сей материял і переносить его з місця на місце. Его працю зве Walther дефляцією. Всі куснячки каміня, які лиш під его силу, пориває вітер,

¹⁾ Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. XI. 1900. 15

тре їх о себе на пісок або і порох і мете его потім, підносячи великанські до 300 м. високі хмари пороку і піску. Де лиш є на землі яка мала перепона, творить ся зараз плоска купа піску в виді переверненого щита. Є се засновок будучої піскової видми. Нагромаджена купка піску становить іменно значну перешкоду для летячого з вітром понад землею піску і задержуючи его в дорозі росте щораз більше. По певнім же часі видма прибирає вид серпа вигнутого проти вітру. Видма ся підносить ся в профілю дуже слабо по стороні вітру (max. 10°), але за вітром творить стрімкий (до 35°) гребінь і маємо типового туркестанського бархана. Часто лучать ся такі бархани в довгі ряди. Але їх існуванє не довге. Найбільше творить ся їх в літі при вітрі північно-північно-східнім. Колиж в жовтні настане вітер полудневий, обертають ся серпи барханів на північ. Але літний вітер все таки є сильніший і жене бархани що року о кілька метрів на південь, засипуючи закаспійську желізницю. Найбільше барханів є в славній пустини Каракум. Они переходять навіть ріку Амударію в той спосіб, що ріка підриває видми правого берега і осаджує пісок на лівім, де его вітер знов хватає.

На полудни вздовж спаду іранської височини уложились значні маси ріни і каміня, нанесеного дощевими водами з гір. На північ від сего пояса тягнесь пояс пустині з глиняним підложєм. Ту губить ся значна часть спливаючих з гір потоків і осаджують ся розпущені в їх воді соли. Солених озерець, мокляків, типових солончаків і солоних степів повно в тій полосі. До якості ґрунту принаровлюєсь і вегетація. Поза тою другою полосєю простягаєсь на північ безмежна піскова пустиня¹⁾.

Свої студії зроблені за Каспієм розширив Walther на иньші пустинні простори і узгляднивши обсервації иньших учених видав обширну книжку п. т. *Das Gesetz der Wüstenbildung in Gegenwart und Vorzeit*. Berlin 1900. Займавий спосіб представлення, ясність і точність знаменують сю дуже визначну роботу Вальтера. Автор обговорює ту передовсім вітрине в его різних проявах кладучи великий натиск на значіне розчинів сільних, що роблять камінь в середині крихким. Дефляція є після W. головним чинником, що моделює поверхню пустині. В перших стадиях розвитку має пустиня гори і долини з часів, коли більше було вихкості і вода могла ще ділати. Потім лишаєсь вітрине, котре з найбільшою силою

¹⁾ Naturwissenschaftliche Wochenschrift. 1898. Nr. 21.

ділає в долинах. Рідкі але сильні хмароломи прятають від часу до часу нагромаджений вітріним материял, а в проміжках часу ділають з повною силою вітрине і дефляція. Через доокружну денудацию зміняєсь височина пустинна порізана ярами в рівнину засіяну відосібненими горами — неначе „свідками“. Також депресії, в котрих лежать оази, вважає W. продуктом дефляції.

Наслідком малої кількості опадів позем ґрунтової води є дуже низький і она є солона. При кождім більшім дощи збираєсь вода в депресиях і розпускаючи в собі сіль, що видвила на поверхню землі, стаєсь солоною. Такі озера є періодичні і періодично змінюють ся в солончаки. Осаджане соли в таких безвідпливових озерах різно відбуваєсь і добре пізнавши его можна би многі проблеми повставаня покладів соли вияснити.

Відложеня, що повстають в пустинях, є різні. В депресиях громадають ся великі кількості піску, ілу, шутру, каміня і т. д. і творять конільомерати. Найважнішим однак продуктом діланя сил природи в пустини є піски, що творять видми і засипуючи часто солені озера витворюють попеременність покладів соли і пісківця, знану з многих залежий соли.

Осібні уступи посвьячає W. ростинности і звїрячому сьвітови пустинь.

Египетско-арабську пустиню між Нілем а Червоним морем розсліджував 1897. р. Fгаas. Широка полоса кристалічних гір тягнєсь поздовж Червоного моря, переходячи на заході в крейдову і еоцєнську полосу, що складаєсь головнo з пісковців. В кристалічних горах замітив Fгаas, що вітер малу ту відгріває ролю — більшу вода. Натомість на високорівнях західних збудованих з нубійского пісківця панують неподільно: вітрине і вітер, хоч Fгаas замітив у вітру дуже слабу силу зглядом піску¹⁾.

До регіонів, де діяльність вітру доходить до великого значіння, зачислити належить деякі надморські околиці покриті пісковими видмами. Дві такі надморські околиці власне в кінцевих літах XIX. віку описано: куроньську косу і побережжя Гасконії.

Куроньська коса пересічно 1—1½ km. широка, а недалеко 100 km. довга, є в цілости вкрита білими мов снігові заспи видмами. Всі ті видми мандрують постійно від моря на схід до куроньского гафу, котрий поволи засипують. Многі видми мають форму півмісяця, подібно як бархани. Річний поступ видм виносить пересічно

¹⁾ Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft. LII. 569 д.

до 5 м. Численні ліси і селитьби людей пали жертвою піску і по пересуненню вітром видми даліше знов показують ся в руїнах. Лиш нечисленні села встигли удержатись і щоб їх ратувати, обсаджено ряд надморських видм ріжними пісковими травами, щоб задержати пісок в руху, а потім обсадити лісом видми, що лежать одалік від берега¹⁾.

Подібні явища, лиш в значно більших розмірах, подибуємо на берегах біскайського заливу в Гасконії. Видми тягнуть ся від устя Адур на північ 240 km. далеко і доходять до висоти 89 м. Простір зайнятий ними обчисляють на 85000 ha, місцями займають полосу лиш 100—200 м. широку, але місцями ширина сеї полоси доходить до 8 km. Поза половою видм надморських, що до тепер мандрують, тягнуть ся нераз прямовісно до них уложені старі видми порослі лісом. В старинности ліс стояв на видмах аж до моря, але в перших початках середніх віків винищено ліс, видми заворушились і зачали йти в глибину краю. Численні заливни, що були ту від давних часів, пісок відділив косами від моря і замінив наперед на гафи, а потім на прибережні озера. Ті озера перті видмами цофались щораз то даліше в глибину суші, заливаючи села. Потім приходив пісок і засипував усе. В той спосіб много місцевостий погинуло. Видми, заступаючи Адурови устя, викликували часті зміни русла сеї ріки роблячи через те також много шкоди. Доперва в ХІХ. століттю задержано видми в поході і обсаджено в части лісом²⁾.

Х. Підземна діяльність води: жерела і печери.

Про вплив лісів на підземні води і жерела оголосив обширну студию Отоцкий³⁾ Він відкрив вже в р. 1891, що верчення в лісі не давали води навіть тоді, коли вільний простір оточуючий ліси, однаково збудований під зглядом геологічним, всюди давав воду. 1893. р. сконстатував О., що ліс не тільки є біднійший в підземну воду, як доокружні степи, але також позем заскірної води лежить в лісах значно глибоше, чим в степах.

¹⁾ Zweck, Litauen, Stuttgart 1900.

²⁾ Le Mang в Deutsche Geographische Blätter XXII. 235, Gaea 1900. том. 5 і 6.

³⁾ Annales de la Science agronomique française et étrangère. II. 1898. поp. Meteorologische Zeitschrift 1898. Lb. (70).

Осібна гидрологічна експедиція вислана 1895. р. в губернії воронежську, херсонську і саратівську, потвердила ті обсервації. Показалось, що пр. в воронежській губернії (ліс Шипова) число жерел і керниць є в лісі значно менше, як в околичнім степі. Глубина водоносних верств була в лісі 2 до 3 разів більша, як в поли. В т. з. Чорнім лісі херсонської губернії показали верчення такий самий результат. Цікаве, що під невеличким полем, лежачим в глибині ліса, висота підземної води значно піднеслась, в центрі поля стала найвище, а в напрямі ідь лісови на всі сторони опадала.

При устю Рейна до Боденського озера відкрито жерела болотного газу, що є зовсім аналогічні знаним Mudlumps в дельті Mississippi та свідчать про творенє ся в тих місцях торфу¹⁾.

В теплих жерелах Італії відкрито в послідніх часах арґон і гелі. Скількість арґону доходить місцями до 3%, гелі до 1.5%²⁾

Над рікою Songwe (доплив Sambesi) відкрили Fülleborn і Glauning в вулканічній околиці кілька дуже богатих горячих жерел. Температура їх доходить до 70°. Красні тераси білого жерелинця окружують ті жерела, в котрих живуть численні гліни. Крім пяти великих горячих жерел є ту ще кілька поменьших, яких температура доходить лиш до 43°. Вода і містить зате в собі велике число алькаліїв і вугляного квасу. В околиці дуже много великих печер з красними сталяктитами і сталягімітами³⁾.

Jaggar переводить класифікацію гейзирів на стоячі і переливаючі ся. В ті послідні напливає деколи з верхних верств зимна вода і справляє, що їх вибухи є неправильні⁴⁾.

Наука про печери від'окремилась вже на особну спеціальну дисципліну. Новий її підручник вийшов власне п. з. Martel, La spéléologie ou science des Cavernes. Paris, Carré 1900. Ся наука будить великий інтерес не тільки у геологів і палеонтологів, але і археологів та туристів вже від давна. В Парижі виходить особна часопись п. т. Spelunca, Bulletin de la Société de spéléologie, котра містить розвідки про жерела, вертепи, безодні і печери.

Т. з. замкову печеру в долині Цункви (Морави) описав Trampler. Она дуже богата звіринними скелетами з четверторядної епохи⁵⁾.

¹⁾ Natur 1898. ст. 202.

²⁾ Chemisches Centralblatt 1898. I. 917.

³⁾ Mittheilungen aus deutschen Schutzgebieten 1900. 18.

⁴⁾ American Journal of Science 1898. V. 323.

⁵⁾ Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XX. 529 д.

Печеру Wind-Cave в південній Дакоті описала Miss Owen. Її довжина — о скільки дотепер пізнана — виносить 97 англ. миль. Зміни стану барометру викликають великі протяги. Печера повстала мабуть через втворене ся численних прогалин в скалах при піднесенню гір Black Hills¹⁾.

Печеру Сибіллї кото Кірхгайм в Віртемберзі розслідув геологічно і палеонтологічно Fraas. Она повстала через вимите водою лісових вапняків швабської Юри²⁾.

1891. відкрито велику бічну печеру в знаній постійненській печері. Она творила після дослідів Müllera (1899 р.) давніше ложище ріки Пивки і має дуже багато красивих сталактитів³⁾.

Дуже цікаву методично і річево розвідку оголосив Grammer про деякі ледові печери долини Австрії. Спеціальну увагу звернув С. на печеру звану Tablerloch і витягнув з тих дослідів ось які загальні замітки:

Температура печери зависить від її будови. Сли печера западає постійно своїм напрямом в діл, воздух в ній буде дуже холодний, в зимі творить ся лід, котрий топить ся в літі та осени, але звичайно не в цілости. Сторона світа, до якої обернений вхід до печери, та його висота беззглядна не мають значіння, зате мають его локальні відносини. Дуже часто купи каміння, що обсипалось з гори і в часті заслонило вхід до печери, роблять зі звичайної печери ледову. В літі росте температура в ледових печерах в наслідок підвищення температури земної поверхні і заскірної води. Печери, котрі підходять в гору, мають все високу температуру. Температура вітрових ям, що є по обох сторонах отверті, є в літі зглядно низька, бо струя воздуха, що переходить крізь печеру, віддає її стінам своє тепло, в зимі зглядно висока, бо стіни знов своєю чергою віддають воздухови своє тепло. І ту відносини локальні дуже много значать⁴⁾.

В Мексику з давна знані дуже численні печери в дуже там розповсюджених кретацейских вапняках, що викликають в многх околицях краю чисто красові явища⁵⁾.

Нову голубу печеру, подібну до Капрейської, лиш дещо меньшу, відкрито на острові Занте⁶⁾.

¹⁾ Bulletin de la Société de Spéléologie. III. Nr. 9. i 10.

²⁾ Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft. LI. 1899. 75 д.

³⁾ Mittheilungen des deutschen und österreichischen Alpenvereines 1899. Nr. 20.

⁴⁾ Eishöhlen und Windröhren-Studien. Abhandlungen der k. k. Geographischen Gesellschaft in Wien. Band. I. Heft. 1 д 15—76.

⁵⁾ Beiträge zur Geologie und Paläontologie der Republik Mexico. 1899.

⁶⁾ Globus т. LXXVII. ст. 134.

XI. Р і к и.

Загальний перегляд праць про ріки і інші області гидрографії подає Ule¹⁾.

Вплив рослинної покриви на стан води в ріках опрацював Wollny²⁾. Висліди его праці ось які: 1) Поверхні покриті рістною допроваджують рікам в загалі менше води, чим простори безростивні. 2) Живучі рослини упорядковують доплив води до рік, здержуючи її різними способами в дорозі. 3) Рослини спиняють в дуже значнім розмірі розмиване землі, шутру, піску і т. д. в'язучи корінням сипкі маси і здержуючи сучасно струю води допливаючої до ріки. В рівнинах вплив рістної на стан води в ріках не є значний, хіба лиш на дуже пропускальнім ґрунті. Зате в околицях нерівних вплив сей є великий і збока гір треба конечно заліснити або замінити в пасовища, щоб доплив дощової води до рік упорядковувалась і она терену не розмивала. Рільну культуру в таких околицях треба рішучо закинути, бо она є там мало видатна, а терену не хоронить, бо рільні рослини лиш короткий час вегетують.

Області позаєвропейських рік обчислив пляніметрично Bludau³⁾. Belloc виказав, що Гаронна не впливає під шпилем Малядетт, лиш в долині Аран, що значно змінює положення головного ділу європейських вод в тих сторонах⁴⁾.

Густотою річної сїти в Шварцвалді займає ся Neumann, і находить в загально методичнім розсліду, що она прямо зависить від воздушних опадів, крім того від пропускальности почвы, беззглядної висоти, від часу, як довго лежить сніг, дуже много від будови гір, а також від способу вітрів, ерозії і денудації скал⁵⁾.

Цікаві прояви річної ерозії дослідив Brunhes на однім з регуляційних каналів ріки Savine, часово порожнім. Витворились там в місцях, де були ври, глибокі діри в литій скалі місцями понад 1 м. глибокі⁶⁾.

Гидрографічні відносини горішнього Ніля опрацював по найновішим відкриттям de Martonne, виказуючи, що горішний Ніль скла-

¹⁾ Die Gewässerkunde im letzten Jahrzehnt. Geographische Zeitschrift. VI. 97 д. 148 д.

²⁾ Meteorologische Zeitschrift. 1900. 187 д.

³⁾ Petermanns Mittheilungen 1898. 107 д.

⁴⁾ Globus LXXIII. 19.

⁵⁾ Beiträge zur Geophysik IV. 219 д.

⁶⁾ Naturwissenschaftliche Rundschau 1898. 255.

дає ся з кількох самотійних річних системів, подібно як і інші африканські ріки. Ї се наслідком браку орографічного вибразовання африканського континенту¹⁾. В цілій Африці в загалі міняють ся навіть в тій самій ріці пороги і водопади з місцями, де спадок ріки є мінімальний, та через те повстають острови і озера. Кожда нова виправа в незвісні околиці Африки приносить правильно вісти про нові пороги і озера. І так розсліджуючи головну жерельну ріку Kong'a Luapula, найшов Weatherley величаві водопади, названі ним водопадами Johnston'a²⁾

Великі водопади ріки Lule-Elf, подабаючи в дечим на Нягару в зменшенню, описав Lorenzen³⁾.

Дуже цікавим проблемом займався J. Walther. Розслідив він іменно, чи Oxus (Амударія) вливає коли одно своє рамя до каспійського моря, як се до недавна припускали, рисуючи навіть на мапах ложбище, що його колись сей рукав мав займати. Результат є зовсім негативний. Walther виказує наперед історично, що звістка з XVI. віку про сей рукав є фальшива, а потім геологічно доказує, що мнине старе ложбище Амударії є звичайним пустинним wadi, що не мало ніколи нічого спільного зі згаданою рікою⁴⁾.

Повстало оно як і всі wadi через нагальні зливи, переобразував его вплив вітру, витворюючи топографічну звязь, там де причинової ніколи не було. Найлучшим доказом сего є цілковитий брак відложень річного намулу вздовж мнимого ложбища Оксуса та его мнимого устя в Каспій. Амударія є незмірно богата в намуд і всюди, куди тече, осаджує его в великій скількості. Тимчасом навіть глибокі верчення не показали й сліду сего намулу над Каспієм.

Від давна було знаною річю, що Дунай в своїм горішнім бігу коло містечок Immendingen і Möhringen тратить много води, що западає ся ту в землю. Пересічно 77 днів на рік, головню в літніх місяцях (VII—X), вся вода Дунаю западає тут в глибину землі, так що доперва нові допливи творять на ново ріку. Помічано вже віддавна навіть отвори лійковатого виду, котрими вода витікає. Околичні мешканці припускали, що дунайська вода показує ся на поверхню землі в великій жерелі річки Hegauer Aach, що впливає до Боденського озера. Опирались они на тім, що коли на Дунаю

¹⁾ Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin. XXXII. ст. 303 дд.

²⁾ Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik т. XXI. ст. 381 д. Globus т. LXXVI. ст. 343 дд.

³⁾ Natur 1898. 152.

⁴⁾ Petermanns Mittheilungen т. XLIV. ст. 204 дд.

повінь, тоді з того жерела пливе мутна вода. Виказали се наглядно досліді Кнор'а, що велів кинути до Дунаю велику скількість соли і невдовзі замітив засолене в згаданім жерелі. Endriss припускає отже існування підземного каналу, що однак дуже поволи задля численних перешкод проводить дунайську воду в область Рейна¹⁾.

На взір недавно перед тим явившої ся монографії ріки Одри видала комісія регуляційна Ельби в Магдебурзі велику книгу про сю ріку²⁾. Щоби запобічи грізним повеням Ельби, постановила згадана комісія розслідити всесторонно кліматичні, геологічні і ортографічні відносини бассейна сеї ріки. Книга нею видана обнімає много важного материялу для географа. Іменно много нового приносить Elbstromwerk про відносини діювіяльних рік північної Німеччини до нинішньої Ельби, про повені на тій ріці і вплив припливу та відпливу моря на стан води в її устю. Устє Ельби, що з властиво дельтою, описує Henz³⁾. Водопади судестекх рік, що належать в значній частині до області Ельби, описав Herden⁴⁾.

Marinelli розсліджував дельту ріку Ро і прийшов до висліду, що зріст сеї дельти виносить річно 76 гектарів, а від 1300 р. зросла она о 513 квадратних кілометрів. З сего слідує, що по 12000 літах триєстинський залив буде озером⁵⁾. Дельта Міссісіппі натомисть, хоч значно розширяєсь на простір, то рівночасно западаєсь пересічно о 1 стопу на 20 літ під поверхню моря. Причина тому є вибудоване вздовж рукавів ріки там і гробель. Они не позволяють ріці заливати свої дельти і підвисшати її ровни осадками, підчас коли існуюча вже дельта зложена з нетривкого материялу постійно западаєсь.

Ріку Madeira описує Lamberg⁶⁾.

Ольсєуфієв подає обширну опись ріки Анадир⁷⁾.

Ріку Hwang-Но розсліджував Gaedertz головнo з огляду на регуляційні праці, підняті китайським урядом⁸⁾.

¹⁾ Naturwissenschaftliche Wochenschrift. 1900. ст. 320.

²⁾ Der Elbstrom, sein Stromgebiet und seine wichtigsten Nebenflüsse. Berlin 1899, Reimer. 3 томи і атлас.

³⁾ Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik 1900. XXII. 24 д.

⁴⁾ Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik 1900. XXII. 202.

⁵⁾ Rivista geographica italiana т. V. ст. 24 дд, 65 дд.

⁶⁾ Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XXIII. 20.

⁷⁾ Витяг в Petermanns Mittheilungen 1899. 26.

⁸⁾ Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. ст. 402 дд.

ХІІ. О з е р а.

Серед різних галузей гідрографії дуже красно розвинулась в останніх часах лімнологія. З невеликих початків, які виказувала ще перед пару десятками в тім згляді географічна наука, зросла лімнологія до дуже значних розмірів. Найліпший примір, що вказує, як далеко вже зайшла та галузь географії, дає двотомний опис Женевського озера, що зладив в дев'яťдесятих роках ХІХ. століття Forel. І як вже той его твір, хоч спеціально одному лиш озеру присвячений, мав величезний методичний вплив на пізніші лімнологічні праці, так теперішня видана ним книжка п. т. *Handbuch der Seenkunde*. Stuttgart, 1900. обіцяє стати підставою ділом лімнології на довгий час. Опираючись на дослідів над озерами поміреної полоси в Європі і Америці, обговорює Forel озеро зі всіх можливих точок погляду. Не ту місце подавати хочби в скороченню численні здобутки для лімнології, що виходять з мітких помічань Forel'a. Належить однак згадати, що Forel попри загальні географічні впливи добачує велике значінє також льокально-кліматичних елементів. Дуже важні замітки подав Forel до історії чи життєписи озер, ділячи час існування кожного озера на фази: молодости, зрілости, старости, та дві останні фази, коли озеро стає калужою, а опісля багном. Потім переводить Forel класифікацію озер по різних точкам погляду. Хемічні і термічні відносини озер оброблює Forel дуже основно, присвячуючи потім дуже цікавий уступ теренови, до тепер майже нетяканому т. є. явищам рефракційним над озерами. Forel найшов инші рефракційні явища, коли вода озера є зглядом воздуха зимна, а инші, коли она є тепла. Коли температура води є висша від температури воздуха, видаєсь нам, що овид став вузший і стоїть низше та ближше нас; поверхня озера видаєсь сильно випуклою. Филі озера видають ся висші, як є дійсно. Часто повстає міраж. Коли температура води є зглядно низша від воздушної, тоді: овид є піднесений високо і здає ся ширшим, поверхня озера видаєсь вглубленою, висота филь виглядає меньша, як є.

Forel розслідив також загально колибання температури озер європейських і порівнявши їх прийшов до переконання, що річне колибання температури озерної води є під рівником найменьше, під бігунами найбільше. Озера солодководні ведуть ся в тім згляді далеко правильнійше, чим моря, бо є замкнені і не мають струй¹⁾.

¹⁾ Comptes Rendus. CXXXII. 1089.

Взірцеву лімнологічну монографію подав Lorenz v. Liburnau описуючи Гальштатське озеро¹⁾. Є се майже типічне озеро між озерами Salzkammergut'a; цікаві є лиш прибережні жерела, що в часі дощів значними водопадами спадають до озера. Взагалі в Австрії лімнологія процвітає. На озері Траунскім (Traunsee) викрив Richter т. зв. Seiches т. є. колибання цілого зеркала озера²⁾. Озера чеського ліса опрацював Wagner³⁾ і подав значний причинок до розвязки т. зв. Кар'ового проблему т. є. як ледівці витворили під вершками гір заглибини нині покриті озерами. Плодом ледникової ерозії є в значній часті також альпейські озера коло провала Reschenscheideck, котрі розслідив Müller⁴⁾. Угорське географічне товариство покінчило вже розслідування Болотного озера, що виказало дуже малу его глибину (пересічно 3—5 m. maximum 11 m.) і притім Seiches. Деякі озера поменьші в полудневих Альпах описав Damian⁵⁾. Озеро Сви́ча в Хорватії, описане Граниловичем, є озером красовим майже циркницького типу і показує цікаві температурні відносини⁶⁾. Того самого типу є озера Плітвіцкі, також в Хорватії положені, які опрацював Umlauf⁷⁾. Красові озера в Хорватії, Істрії і Далматії виміряв Gavazzi і оголосив результат своїх помірив⁸⁾.

Періодичні колибання зеркала штариберського озера відкрив і розслідив Ebert. Стоячі филі (Seiches) істнують в тім озері безсумнівно і відбувають ся зовсім гармонічно як рух маятника після права сінусів. Головна филія має час періоду рівний 25 мінутам і є одноузлова. Через ті стоячі филії повстають сильні підводні струї. Крім головної стоячої филії є ще друга, що приходить що 15-75 мінут. Через інтерференцію тих филь повстають різні флєві рухи поверхні. Метеорологічні відносини, а іменно наглі зміни воздушного тиснення, мають на явище стоячих филь великий вплив⁹⁾.

¹⁾ Mittheilungen der k. k. Geogr. Gesellschaft in Wien 1898. Bd. 41. ст. 1 дд

²⁾ Petermanns Mittheilungen Bd 45. 1899 ст. 41.

³⁾ Wissenschaftliche Veröffentlichungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig. 4. 1899.

⁴⁾ Pencks Geographische Abhandlungen т. 1900. зом. 1.

⁵⁾ Abhandlungen der k. k. Geogr. Gesellschaft. I. ст. 79 дд.

⁶⁾ Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. Bd. 23. ст. 108.

⁷⁾ Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik Bd. 21. ст. 22.

⁸⁾ Mittheilungen des k. k. Geogr. Gesellschaft in Wien XII. 1891. ст. 315.

⁹⁾ Sitzungsberichte der Münchner Akademie der Wissenschaften. 1900. 435 д.

Про французські озера написав славний лімнолог Delebesque більшу книжку, відзначену академією наук¹⁾, що приносить дуже много нових даних. Поділ Delebesque'a є незалежним від поділів Forel'a; за критерію приймає він, чи озеро є заглублене в родимій скалі, чи повстало через природну греблю. Узглядено всі озера в цілій Франції і замітити належить, що автор відкрив і розслідув в самих Піренеях 22 озер, дотепер в науці незнаних.

Для озер Шварцвальда виказав Halbfass, що они є наслідком ледової епохи²⁾. Озеро Eichen, що там лежить, показує явища красових озер пр. царкницького. Після Knierer'a діє ся се з тої причини, що оно лежить в полосі тріасового вапняка, могли ся отже красові явища розвинути³⁾. Halbfass розслідув також озеро Dratzig на Поморю, що є озером мореновим, отже також полишкою ледової епохи⁴⁾.

Дослідди над озерами ведуть ся також в Італії дуже пильно. Стан розслідув подає Agostini⁵⁾.

Мертве море розслідув в послідних роках XIX. віку Gautier. Хибна є думка, що вода сего озера є в вічнім супокою. Підчас бурій піднимають ся на нїм великанські боввани. Не правдиве є також оповіданє, що птахи не можуть пролітати над озером, або що рослини над ним рости не можуть. Де лиш є троха солодкої води, там коріння ся буйна вегетація. Що околиці Мертвого моря є пустинні, винна тому лиш велика спека і посуха тамошнього клімату. Півостров Ель Мезра'a ділить Мертве море на дві часті, північну більшу до 399 m. глибоку і полудневу плитку (3—4 m). Ціла гора соли і численні соляні стовпи находять ся на полудневім побережю. Місцями добуваєсь тут сірководень, а на дні моря лежать поклади ріжних бітумів — головно асфальту, що по бурях пливають кригами по поверхні озера⁶⁾. В послідних часах починаєсь уровень Мертвого сильно підносити. Значна часть дельти Йордану і сусідні острівці залиті вже водою. Уровень не обнижає ся в літі, тому мож вияснити те явище або сильнійшим допливом води в остатних часах, або піднесенем дна озера⁷⁾.

¹⁾ Les lacs français. Paris 1898.

²⁾ Petermanns Mittheilungen Bd. 44. 1898. ст. 241.

³⁾ Monatsblätter des badischen Schwarzwaldvereines Bd. 2. з. 11.

⁴⁾ Globus 1900. ст. 1.

⁵⁾ Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1899. ст. 490.

⁶⁾ Le Globe 1900. Natur 1901. 210.

⁷⁾ Geographical Journal, 1900. 10.

Озеро Кукунор і його околиці описав Futterer, котрий розслідував се озеро підчас своєї подорожи поперек Азії. Він думає, що на тім місці в дуже недавній геологічній минувшині було велике озеро ділювіальне. Найнижше місце низини, окружуючої Кукунор, не займає се озеро, се місце є не далеко него над невеличкою річкою без відпливу (висота н. п. м. 3110 м. Кукунор 3300.)¹⁾.

Берг і Ігнатов занимались колибаннями позему озер середної Азії і западної Сибіри. Загалом він опадав від найдавніших історичних часів. Однак від 1880. р. даєсь замітити дуже значне підвищення позему. Озеро Араль, що до сего року стало опадало, піднеслось дотепер загалом о 3 м., так що на рік випадає пересячно 178 мм. Ріка Сирдарія несе тепер значно більші маси води, чим давнніше. Також инші озера кіргіських степів, а іменно в губерніях Омській і Акмолинській, піднесли свій позем досить значно. Чи се, як думають автори, є викликане другостепенним періодом вохкості, чи яким більшим геологічним періодом, що власне розпочавсь, годї сказати²⁾.

Монографію солоних озер з околиць Омска подали Берг, Ельпатовський і Ігнатов³⁾. Є їх три більших, а кожде з них инакшого характеру. Озеро Селети-Деніє, два рази більше від женеvesкого, є дуже плитке (3 м.), гірко-солоне, з водою дуже прозорою зеленої краски. Озеро Кизиль-как є зовсім насичене солю і має від одного наливочника червону барву. І озеро Теке є насичене, а на дні віділюють ся постійно великі шестистінні кристали соли; має оно брудно-молочну краску і заносить фіялками.

Озеро Урмія — також солоне — є тим замітне, що его зеркало в послідних часах зачало дуже сильно підноситись, так що залило околичні урожайні землі. В виду того, що западний берег сильнїше зістав залитий, чим східний, припускає R. Günther, що маєм ту до діла з льокальним западанем земскої кори⁴⁾.

В Гімалаях повстало значне озеро через пересипанє долини великаньским обвалом сусїдної гори⁵⁾.

Африка була завсїгди клясичним краєм озер і що хвиля відкривано там незнані дотепер, а замітні чи то величиною, чи по-

¹⁾ Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1900. XXXV. 297 далі

²⁾ Извѣстія Имп. Русс. Геогр. Общ. XXXVI. 111.

³⁾ Извѣстія императорскаго русскаго географическаго общества. т. 35. 1899.

⁴⁾ Petermanns Mittheilungen Bd. 45 1899. ст. 297.

⁵⁾ Nature 1898. ст. 70.

ложенем, чи і иньшими обставинами озера. І тепер не мине рік, щоби чого цікавого про африканські озера не появилось в научній літературі. Последні літа XIX. столітя принесли новість, що два значні африканські озера зникли з поверхні землі. І так озеро Леопольда або Rikwa, що лежить на схід від озера Tanganyika, замінилось в лісний степ, що лиш в дощевій порі місяцями покриває ся водою¹⁾. Ї се звістка впрочім не в цілости правдива. Другим згаданим озером є часто згадуване в географії озеро Ngami в полудневій Африці. Їго доплив затканий пливучими островами очерету зовсім обмілів і на місці давного великого озера простягаєсь рівнина поросла шуваром²⁾.

З поміж иньших африканських озер розсліджувано последніми часами озеро Nyassa. Як вже давніше думали, повстало те озеро через западене ся земскої кори. Озеро Nyassa становить полудневу часть великого африканського рова. Сьвіжі сліди того западеня земскої кори видно на обривистих берегах озера. За сим сьвідчить і єго значна глибина. Могте висондував ту 785 м. Краска вод озера голуба, прозорність дуже значна. В околиці находить ся много иньших озер, впрочім зовсім иньшого характеру і походження. Лежить там згадане вже висше озеро Rikwa (Rukva, Rukuga, озеро Леопольда), котре в 1899. р. Fülleborn найшов плитким, але не ствердив постереження Langheld'a, що те озеро від 1891. р. цілком висохло. Fülleborn відкрив ще кілька вулканічних озер в краю Konde³⁾. В озері Tanganyika сконстатовано істнуванє деяких морських мякунів, що вказувалоб на колишне передюрійске получене того озера з Червоним морем⁴⁾. Розяснено тепер також, чому содові озерця Лібійскої пустинні мають червону краску. Dewitz найшов іменно в їх воді велике число бактерій, що виділюють червону органічну субстанцію⁵⁾.

Топографію єгипетских содових озер опрацювали Schweinfurth і Lewin. Они лежать в депресії, що повстала через западенє плити нумулітового вапняка. В рові, що повстав через сей залом, лежать

¹⁾ Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik т. 20. ст. 283.

²⁾ Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1899. ст. 198.

³⁾ Поп. Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. 1899. (24) ст. 197 і 441. 1900 (25). ст. 332. Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. т. 20. ст. 283.

⁴⁾ Geographische Zeitschrift V. 109.

⁵⁾ Zoologischer Anzeiger Bd. 32. ст. 53.

ті озера. Скількість їх вод періодично змінюєть і зависить від стану води в Нілю і від дощів в околиці¹⁾.

Великі австралійські озера Lake Eyre і Lake Amadeus знаходять ся від певного часу в стадії цілковитого висихання. Причиною є брак більших притоків і великі маси піску, котрі вітер постійно в них навіває²⁾.

Велике озеро солоне в Utah хотів американський уряд зарибити, але показало ся, що скількість соли навіть для морських риб і устриць за велика³⁾.

Озера Патагонії описує Hatcher. Він розрізняє три роди тих озер: тектонічні, гляціальні і решткові. Н. твердить, що останній рід озер повстав через значне піднесенє суші при кінці треторядної епохи. Тоді значні простори соленої води відділились від моря і зістали по нинішній день озерами⁴⁾.

Про болота і багна занотувати можем з останніх років XIX. столітя лиш кілька розвідок меньшого значіння. Є се царина, де много ще лишаєть робити.

Опис торфяного багна Ecsed над Самошем і Красною та його осушеня подав Czirbusz⁵⁾. Осушенє Поліських болот є вже фактом довершеним⁶⁾. Про використання німецьких торфяників подав Immen-dorff дуже цікаву статю⁷⁾. Вказавши на їх великий простір, радить І. використовувати торфяники, через заміненє їх в плодovиту почву, а противить ся копаню торфу.

Болотний вулкан доселі незаний відкрив Ludwig на Llanos Венецуелі⁸⁾. Він належить до цікавих явищ серед болотних вулканів в загалі.

Славні, а до недавна лиш дуже мало знані болота Флориди, звані Everglades, розслідив Willonghby. Є се великанські багна порослі кипрійскою травою. Вода стоїть в них пересічно 1—2 стопи глибоко. Біфуркації відпливів дуже часті, тому W. говорить про плинний діл водний в тих багницях⁹⁾.

¹⁾ Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. 33. 37 д.

²⁾ Petermanns Mittheilungen Bd. 44. 1898. ст. 7.

³⁾ Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XXII. ст. 333.

⁴⁾ Bulletin of the Geographical Society of Philadelphia. 1900. том. XII.

⁵⁾ Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. Bd. 21. ст. 503.

⁶⁾ Огляд піднятих там робіт в Geographische Zeitschrift VI. 222.

⁷⁾ Deutsche geographische Blätter т. 33. 1900. ст. 71 дд.

⁸⁾ Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. Bd. XX. ст. 394.

⁹⁾ Petermanns Mittheilungen. 1899. I.B. 61.

Т. з. глиняні панви Австралії розслїдила експедиция Horn'a Се плиткі заглибини в глинястїм підложї звичайно округлого виду без нїякої вегетації докола. Їх промір лежить межї пару стопами а 12 km.; глїбина найбільша $1\frac{1}{2}$ m. Они повстають через сплив води з околичного терену до плоских заглибин. Вода зразу всякає в підложє, але потім, коли шпарки затикають ся намулом, остаєсь пару місяців в панві, поки не випарув. Відпливу не має ні одно з тих болотнистих озерець¹⁾.

ХІІІ. Л е д і в ц і.

Який є загальний стан наших відомостей про ледівці і які нові проблеми висувають ся для географії на тїм поли, представляє Richter²⁾, переходячи коротким загальним поглядом роботу кількох послїдних десятків лїт. Заявившись за теорією регеляції вважає Richter теперішними проблемами науки в тїй царинї 1) означене відносин між пробїгом посунення ся в перед ледівця а скоростію руху леду, 2) оброблене фізично термічних питань, а іменно вияснене ріжних термінів дотячних пр. огів, білих і синих полос в ледї і т. д.

В 1894. р. повсталa на цюрихскім геологічнім з'їзді міжнародна ледникова комісія, що постановила собі за головну задачу розслїджувати колибання ледівців. Вже трилїтні, спільними силами ведені, дослїди дали деякі результати, котрі доповняють давнїйші вислїди. Коротко збирає їх Richter³⁾ Ледівці альпейскі найлїпше дотепер пізнані держать ся досять виразно 35-лїтних періодів Brückner'a, причім однак многі ледівці перескакують нераз цілий період колибання, щоби аж в слїдуючїм його тим сильнїйше зазначити. І так перескочили альпейскі ледівці мокрі роки коло 1880. Ледви деякі ледівці в западних Альпах зачали рости, а по десятиох або і 20 лїтах і деякі в східних, але многі тимчасом дальше зменшались.

Є се явище дуже цїкаве — Richter вважає зго важним проблемом.

Таксамо невиразно як альпейскі заховувались в послїдних часах також і піренейскі ледівці. Натомість ледівці країн полярних,

¹⁾ Petermanns Mittheilungen 1898. 8.

²⁾ Neue Ergebnisse und Probleme der Gletscherforschung. Abhandlungen der k. k. Geogr. Gesellschaft in Wien т. I. ст. 1 дд.

³⁾ Petermanns Mittheilungen т. 45. 1899.

Скандинавії, Кавказу і центральноазійських гір загально подаються в зад. З того заключає Richter: Понеже в континентальних просторах ледівці тепер виразно уступають, а в океанічних стоять на місці або заховують ся неясно, то легко буде мож ті їх колибання вияснити за Brückner'ом. По його теорії на тепер т. в. на кінець XIX. століття випадає період посухи, отже уступання ледівців. Слизь они тільки в континентальних просторах виразно уступають, то potwierджує се вповні теорію Brückner'a. Она голосить, що всякі колибання клімату лиш в континентальних околицях виразно можуть виступати, в океанічних лиш невиразно.

Международна ледникова конференція зібралась в серпні 1899. р. і розслідивши ледники Родану і Unteraar, впорядкувала класифікацію і номенклатуру морен та подала многі методичні уваги для дальших дослідів над ледниками¹⁾.

Götz розсліджував центральний Балкан в цілі сконстатовання там ледівцевих слідів. Досліди показали, що ледівців ту ніколи не було, хотяй є много слідів, подабаючих на ледівцеві сліди. Götz виказує, що сліди ті дають ся без натягання звести до ерозии і вітріння. Доперва по ледовій епосі з причини значної висоти опадів наступили в плястиці тутешнього терену значні зміни²⁾. Натомість в горах тз. динарскої системи в западній часті балканського півострова сконстатував Свійіс значні сліди давних ледівців, як моренові вали і карн. Находять ся они на горах Treskavica, Prenj, Čvrtnica, Volujak, Durmitor і иньших, що лежать в Босні, Герцеговині і Чорногорі³⁾. Гори Rila розсліджувані тим самим ученим виказали також много карів, моренових озерець, а навіть малх фірнових просторів⁴⁾.

Положене ледівців іляцияльної епохи в долинах рік Mur і Mürz розсліджував Böhm. По його думці ціла долина ріки Mur аж по Judenburg була покрита одним великим ледівцем до 800 м. грубим, що стояв в звязи з иньшими ледівцями, наповняючими долини горішної Анізи і горішної Драви. Гори над річками Liesing і Mürz були також покриті ледом, але їх долини були від него

¹⁾ Petermanns Mittheilungen 46. Bd. 1900. 77.

²⁾ Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. 35. 1900. ст. 127.

³⁾ Abhandlungen des k. k. Geographischen Gesellschaft in Wien. II. 1900. 195 дд. III. 1901. Nr. 2. ст. 1 дд.

⁴⁾ Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. Nr. 7. 331. дд.

свобідні. Висота фірнкової лійки припадала, між 1300 м. а 1600 м. і подібно як нині більшала, чим далі до середини гір¹⁾.

Керр в подорожі до скандинавських країв замітив, що ледова епоха мала для тих країв велике морфологічне значіння впливаючи моренами і абразією на її пластику. Її вплив належить однак вважати корисним, бо власне на ледникових наносах розвинулась в полудневій Швеції і в Данії дуже плодотворна почва²⁾.

Ціла північно-німецька низина є — як звісно — покрита гляціальними відложеннями, подібно як і значна частина східної Європи. Ці відложення пізнано досить пізно. Коло половини XIX. століття Agassiz перший поставив здогадку, що знайдені на ерратичних каменях риси походять від ледівців, що колись покривали цілу північну Європу, виходячи від самого північного бігуна. Але ту здогадку закинуто невдовзі, а то задля тз. дріфтової теорії Lyell'a. Она припускала існування моря на місці північної Німеччини, по котрім плавали ледові гори відорвавшись від скандинавських ледівців. Каміня, шутер і пісок, що знаходились на тих ледівцях при їх топленні опадали на дно моря і потворили дуже великі відложення піску, глини, шутру, що зовсім змінили характер пластики тих околиць.

Та теорія, прийнята задля великої наукової поваги її творця, не сприяла дальшому розвитку науки. Мимо того локальні дослідження поступали скоро вперед і добували щораз то більше даних, котрі знов щораз трудніше було дріфтовою теорією вяснити. Коли проте Torrell, найшовши ледівцеві шрами на матерних скалах, висказав 1875. р. теорію, що ледівці скандинавські сягали в ледовій епосі аж на північно-німецьку рівнину, та що гляціальні відложення є лишень рештками ґрунтових, начільних або бокових морен, значіння дріфтової теорії заколибалось. Вказано дальші шрами на матерних скалах та ідентичність гляціальних відложень північно-німецьких з моренами нинішніх ледівців, помічано заворушення в горішніх верствах під впливом напору льоду. Що найголовніше звернено увагу на ерозійну діяльність так самих ледівців, як вод, що з їх стоплення повстали, відкриваючи щораз то нові системи долин, куди ті води спливали до моря. Дальші дослідження, головною стратиграфічні, довели — як звісно — до вказання трох ледових а двох інтергляціальних епох і займались тим проблемом протягом дуже

¹⁾ Abhandlungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. Bd. II. 1900. ст. 91 дд.

²⁾ Geographische Zeitschrift VI. 128 дд.

довгого часу. Доперва недавно звернулись німецькі геологи до розсліджування моренних та гідрографічних системів ледової епохи. Відкрито великий систем кінцевих морен від Шлесвігу до східних Прусе, що є продуктом довготривалої епохи супочинку ледів, і вияснено тепер повстанє озеровин надбалтійських ерозією або насипаннями. Досліди над моренами вияснили також дуже много точок з гляціальної гідрографії, пояснюючи витворене ріжних великих східно-західних долин річних ріжним станом леду¹⁾.

Студиями над ледовими відложеннями в північній Німеччині займає ся від певного часу невпинно Keilhack, що поставив собі задачею розелідити напрям ділювіальних рік. Опираючись на давніших відкритях вносить Keilhack, що великі системи плитких долин, що тягнуть ся в північній Німеччині від сходу на захід, служили в ледовій епосі до того, щоб воду зі стоплених ледівців відпровадити до німецького моря. Ті долини повстали при границі ледів, можемо отже з їх положення вивести, де ледовець на довший час повітавав в незміннім положеню. До сих виводів маєм три критерії: 1) кінцеві морени т. є. вали шутру і ерратичних камінїв 2) ґрунтові морени, сильно погорблені, повні озер і мочарищ 3) верстовані, верхом рівні річно-ледові відложення тз. Sandr, осаджені струями зі стоплених ледників.

Найбільшою на полудне висуненою долиною пливають до нині горішна Одра і долішна Лаба. Друга долина йде від Калиша через Берлін до західного Мекленбурга. Трета значнійша долина зовесь Берлінсько-варшавскою. В ній пливають до нині по части Варта, Обра, Одра, Спрея і Гавеля. Четверту головну долину зове Keilhack торунсько-еберсвальдскою. В ній пливе Нотець, долішна Варта, Одра в т. з. Oderbruch і находить ся фіновський канал. В тій долині місцями потворились значні озера в наслідок заставлення води масами леду. Такі були коло Торуня і коло Франкфурта над Одрою.

Коли ледівці ще дальше на північ поступили і ще раз задержались на довше, повстала послідна більша ділювіальна долина тз. rommersches Urstromthal. Она йшла зовсім рівнобіжно до нинішнього балтійського побережа в віддаленю пару миль від него. І в тій долині потворило ся кілька озер, але не велике лиш число води збирало ся в тій долині. Леди зачали ся знов подавати в зад, лишаючи на Поморю кілька крайних долин, нинішнє устє Одрн стало вільне і води східної части німецької рівнини поплили туди

¹⁾ Zeitschrift der deutschen geolog. Gesellschaft 50. 1899. ст. 54 дд.

в Балтик. Одра стала самостійною від Лаби, потім визволилась і Висла¹⁾.

Zache припускає, що велика долина Нотець-Варта-Одербрух повстала наслідком локального западення старших верств в тім місці. Повсталий рів послужив догідним відпливом для стоплених вод уступаючого ледівця скандинавського²⁾.

Типічною гляціальною околицею північної Нїмеччини є т. з. Fläming. Це є височина покрита мов кертівинами безладними горбками, що доходять лиш до 200 м. висоти. Все покриває пісок повний наметняків. Місцями показують ся видми і характерні безводні долини. На границі Лужиць є много безвідпливових ставів і озерець³⁾.

Т. з. сухопутні леди арктичних сторін є в останніх часах предметом пильних розелідів, щоб на підставі одержаних результатів мож було ліпше порозуміти рухи ледів європейських підчас ледової епохи. Берлінське географічне товариство нарочно вислало наукову виправу в Гренляндию, котра розеліджувала рухи, будову і зміни великого ледівця, що сей остров вкриває, єго температуру, творенє гір ледових і т. д.⁴⁾.

Drygalski найшов підчас згаданої експедиції в іренляндских ледниках великі анальотії з ледами, що колись вкривали цілу північну Европу. Ледники іренляндські повстають на горах східного побережа і посувають ся на запад, як се виказали помічання при вистаючих понад лід скалах (nunatak). Крім того поземого руху сконстатовано і прямовісний; лід підносить ся іменно при зіткненню з вистаючими горами. Власне сей рух ділювіяльних ледників полишив такі сліди з європейских землях. Всякі рухи леду стремлять завеїгди до вирівняня тиснення, так що пр. з місця, де лід є грубший, йде рух тудя, де він є тоньший, хочби се друге місце виеше лежало, чим перше. Дуже важні замітки подає Drygalski також про жолобленє озер ледниками. Після него ледники головню вичищують існуючі вже заглибленя і можуть їх розширити. Найліпші услівя для тої роботи ледників є при їх сходженю з гір, де ріжниці в грубости леду великі⁵⁾.

¹⁾ Jahrbuch der k. preuss. geol. Landesanstalt Berlin 1899. ст. 90. дд. Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft. 51. ст. 77 дд.

²⁾ Naturwissenschaftliche Wochenschrift v. Potonié. 1898. 313.

³⁾ Schöne, der Fläming. Leipzig 1898. Duncker & Humblot.

⁴⁾ Richter, Geographische Zeitschrift. V. 126. д.

⁵⁾ Petermanns Mittheilungen т. 44. 1898. ст. 55 дд.

Про колибання ледників в північних регіонах землі робив критичні досліді Rabot¹⁾. Обняв він Скандинавію, Jan Mayen, Ісландію, Гренландію, Шпіцберґ і край Франц-Йосифа. Rabot замітив, що перед XVIII. віком ледівці від кількох століть вже були менші. Підчас XVIII. століття і в початках XIX. зачали они дуже сильно рости і дійшли до такого розвитку, якого не мали від ледової епохи. В XIX. століттю трудно рішити, чи слідував зріст чи зменшене ледівців, бо різні околиці різно ся поведять. В Альпах послідувало велике меншане, в Скандинавії мале, в арктичних сторонах поводились ледівці нерішучо. Не можна ту було також відкрити таких кількадесять-літніх періодів, як в Альпах. Натомість виразні є у арктичних ледівців короткі осциляції та колибання в звязи з порами року. Звязи колибань арктичних ледівців з колибаннями клімату немож було задля браку матеріялу виказати, коли для Альп зроблено се вже давно.

Який вплив можуть мати такі маси леду на вид землі, застановлювались Hergesell, Drygalski, Woodward і Rudzki. Ділювіальні морські бережні лінії показують, що позем моря був тоді вищий. Досліді Н., D. і W. виказали, що трудно сего підвищення позему моря в цілости приписати льокальному притяганню мас леду. D. виказав, що верстви остуджуючись під ледом мусіли скорчитись і заняти низше положене. Rudzki обчислив для обниження температури о 15° обнижене позему суші о 7.21 стопи. Колиж возьмем під увагу охолоджуючий вплив води натопленої з ледівця, котра входить в землю, одержим після R. 21.3 стіп обниження суші. Rudzki взяв крім того в рахунок великий тягар леду і принявши землю за так цїпку і ізотропну, як сталь, найшов рахунком, що она могла під тягаром ледів ледової епохи так здеформуватись, що наступити могли льокальні обниження о 500 m. (докладно 497.8 m.) в разі, если тільки одна гемісфера переходила ледову епоху. Коли обі півкулі мали єї рівночасно, деформація могла сягнути лиш до 347.1 m. Підчас істновання ледових обволок докола бігунів деформація землі і зміни поверхні моря, викликані притяганем ледових мас, неутралїзували ся, але коли лід начав ся тонити і много стратив на масі, тоді деформації ще не уступили і море залило здеформовані простори сягаючи до великих висот²⁾.

¹⁾ Розвідки в Archives des sciences physiques et naturelles. 1899, 1900. 7. 8. 9.

²⁾ Bulletin International de l' Académie des sciences de Cracovie 1899. Avril. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. XI. 1900. 232.

Вже давно звані були ледівці на горі Kilima-Ndscharo, однак великі маси льоду відкрив дотепер 1898. р. Н. Meyer на західнім склоні сего вулкану. Ї там великанське фірнове поле, а з него спускають ся ледові язики. Крім того відкрив Meyer значні сліди давних ледівців і припускає, що і в екваторіяльній Африці була колись епоха великих воздушних опадів, відповідаюча ледовій епосі Європи. Тоді і ледівці були значно більше розвинені, як тепер, коли они находять ся в стадії постійного меншання¹⁾.

Великанський ледовець Malaspina розелідила експедиция князя Савойского на горі сьв. Іллі в північній Америці. Ширина его доходить до 100 km., але его величина значно зменшилась від XVIII. віка²⁾.

Буш розслідив до 190 ледівців Кавказа і найшов, що всі ледівці з північної сторони гір находять ся в рішучім відвороті від 20 літ³⁾.

XIV. Морфологія країн плосковерстованих.

Про велику російську площу занотувати треба в останніх літах XIX. віку дві важні роботи Philipppsona і Павлова.

Philipppson привизбирав материял до своєї розвідки, будучи в Росії підчас геологічного конгресу 1897. Хоч его замітки зраджують подекуди недокладність, то прецінь загальний погляд Philipppson'a на морфологічні відношення російської площі має значну вартість.

Майже на цілім просторі європейської Росії є верстви уложені поземо або дуже мало нахилено. Від дуже давних геологічно часів ніякі заколоти не змінили сего поземного положення. Процес фалдування карбоньских гір над Донцем не відбувся — як думають многі російські геологи — при кінці мезозойної, а з початком кенозойної епохи, а (після Phil.) перед пермскою. Лиш зверхні впливи моделювали від найдавніших часів сю великанську скибу.

Властиві низини значних розмірів є досить рідкі в Росії, бо всюди річна ерозия вепіла вже порізати терен на горбовату-фалисту

¹⁾ Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin т. 26. 1899. д. 88 дд.

²⁾ Die Forschungsreise S. K. H. des Prinzen Ludwig Amadeus von Savoyen nach dem Eliasberge etc. Leipzig 1900.

³⁾ Известія Имп. Русскаго Географическаго Общества XXXIV. 1898. ст. 519 дд.

рівнину винесену 200 до 300 м. понад позем моря. В загальї однак ся рівнина не є властивою тафлею. Ріжні формації виходять в різних місцях на поверхню землі, вказуючи, що вид рівнини завдячує Росія ерозиї і денудациї. Ріки і сухопутні леди давнійшої ледової епохи сего довершили. В північній части Росії заслонюють ледівцеві відложеня властиве підложе ділковито, так що ледви в деяких річних долинах мож его добачити. В полудневій Росії ролю покривала відграває лєс, значно впрочім тонше осаджений, як іляццйальні відложеня. На іляццйальних відложенях розвинулась худа пісковата почва: подсол, а на лесовім підложі південної Росії славний чорнозем. Природною ростинною формацією подсола є лїс, чорнозему степ.

Північна часть російської площі, грубо покрита ледниковими відложеннями і полуднева часть, що є без сумніву лиш деструкційною поверхнею, переходять в себе незамітно і мають менше більше ту саму безглядну висоту. Річні долини є молодші як сама площа і завдячують своє повстанє лиш ерозиї. Показують се: 1) рівна висота площі по обох сторонах долини, 2) значні кїтловини, що переривають долини річні, 3) асиметрия річних долин, що показуєсь в високих правих берегах великих рік пручих на право.

Дальші елюкубрації Р. не нові для всякого, хочби дещо лиш обізнаного з географією України-Руси, а часто хибно поняті і переведені, поминаю, а згадаю лиш про его погляди на повстанє лиманів. Се є долини рік і річок впадаючих до Чорного моря. В найновіших геологічних часах обнизивсь берег моря так, що оно залило долини глибоко ві внутро суші. Філі морські висипали при вилетї сих долин піскові коси і так витворились лимани. Лиш більші ріки змогли пробити собі через косу дорогу до моря. Лимани менших рік є зовсім замкнені і через парованє вода морська сильно еконцентрувалась¹⁾.

Дещо інакше представляє собі проблем морфології рівнин Павлов. На всіх рівнинах, а не найслабше на російській, виступає яко дуже важний динамічний елемент жолобляча діяльність підземної води, котру то діяльність зове П. суффузією. Она викликає льокальні западаня поверхні, отже нерівности різьби. Другу важну діяльність води на рівнинах зове П. аккумуляцією — ріки заповнюють нерівности своїми алювіями. Аккумуляційним матеріалом

¹⁾ Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. XXXIII. 37 дд. Petermanns Mittheilungen XLV. 269 дд.

є в північній Росії головно пісок. Осібне становіско визначає П. т. з. делювіюм, що повстало лиш під впливом вітріня і діланя атмосферичних опадів і лиш під їх впливом зміняє своє положене, стараючись рівнож вирівнати нерівности терену. Се делювіюм протиставляє П. алювієви і елювієви.

Як алювіюм і делювіюм працюють над вирівнанем терену, так ерозия працює над витворенем і виобразуванем нерівностей. Ерозийні явища представляє П. дуже обширно, займаючись між иньшим докладно ярами. Так часту асиметрию долини в Росії поясняє П. не правом Бера, а тектонічними причинами. Він звертає увагу на частий ізоклінізм верств, через що одно збоче долини є стрімке, а друге пологісте. Між иньшими сконстатував П. такі відносини у рік в околицях Курска і Харкова¹⁾.

Нову хронологічну одиницю вводить Davis під назвою „географічний цикль“. Є се час потрібний на се, щоби ново утворена височина змінилась під виїшніми впливами в низину²⁾.

Важні причинки до географії балтійського щита дали праці Hult'a і Immanuel'a.

Hult описує країну Nyland в полудневій Фінляндії. Ціла та околиця складаєсь з високорівний і врізаних в них долин. Високорівні складають ся з граніту і стрімко стоячих кристалічних лупаків, але поверхні високорівний є плоскі і більше або меньше вкриті ґрунтовою мореною. Збоча долин є 30—50 м. високі і дуже стрімкі. Долини є по обох кінцях отверті і лучать ся з собою в своєродну єть. Їх підшва рівна, не дасть ся ніяк витолкувати ерозією рік, хіба лиш леду. Але їх напрям вказує також на те, що они повстали з давних щілин в скалі, котрі розширились під діланем леду в ледовій епосі. Другий рід долин має збоча дуже пологісті і неправильні черти. Се є мабуть претіляційальні заглиблення, повсталі через вітріне. Третій рід долин узкий зі значно нахиленою підшвою вказує на нормальне ерозийне повстанє, але ще перед ледовою епохою. Різьба Nyland'у є отже передледникова. Леди лиш забрали або замінили в ґрунтову морену продукти вітріня і ерозії, а поверхню по своему змодельовали³⁾.

Дещо відмінна, але в загальних чертах аналогічна, є будова півострова Kola описаного Immanuel'ом. Є се високорівня з граніту

¹⁾ Землевѣдѣніе 1898. 91 дд. Ref. Petermanns Mittheilungen 1900. ст. 7.

²⁾ Geographical Journal 1899. 481.

³⁾ Meddelelser Geogr. Förelingen Finnland. IV. 1899.

і гнайсу, яка є однак місцями попереривана слабо розвитими ланцюхами горбків і скал, що є звичайно разом вододілами. Лиш Хибинський хребет взносить ся дещо вище, бо до 760 м. Впрочім є Коля фалистою високорівнею 100—150 м. високою з численними заглибинами. В тих заглибинах находять ся плиткі озера, багна, торфяники і тундри. Побереже зване мурманським є стрімке, скалисте, богате в заляви і острови. Клімат тутешний, досить в зимі лагідний, і вплив Гольфштрема справляють, що кілька тутешних пристаней зовсім не замерзає. Тому звернула Росія на мурманський берег в останніх часах пильну увагу¹⁾. Геологічну будову сего півострова розсліджував Ramsay і найшов, що ту так само, як і в Фінляндії, ерозійні форми походять з часів перед ледовою епохою²⁾.

По північній часті Лябрадору подорожував Low. Морфологічний характер сего півострова дуже подібний до характеру описаних власне країн: височина досить низька з слабкими пасмами горбків і скал. Підложє гранітове лаврентийської формації, місцями виступає кварцитовий дольоміт і ілолупак камбрійський. Шрами ледівцеві виразні³⁾.

XV. Масові і фалдові гори.

Північну півкулю вважає Suess асиметричною. Є іменно значна відмінність в структурі Азії а північної Америки. Азійські фалди уложились луками, котрих вигненє є зверненє на полудне і схід. Фалдуючий рух йде з нутра континенту на внї і почав творити ті луки вже в камбрійскім періоді. В північній Америці є рух фалдовий звернений проти старинної маси канадійського щїта. Фалди окружають сей щит докола, звернені своїми вигненнями на внї. Європейські фалдові гори творять перехід від американської до азійської будови. Сей фалдовий рух в Америці доосередний, в Азії відосередний вказує на асиметрию північної півкулі⁴⁾.

¹⁾ Petermanns Mittheilungen 1899. 134.

²⁾ Fennia. XVI. Nr. 1. 1898. Petermanns Mittheilungen 1899. Lb. 38.

³⁾ Nature 1899. 301. Globus 75. 435.

⁴⁾ Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften. Math. nat. Klasse. LVII. 89.

Паралелізмом в напрямках гір займає ся Gukassian і стараєсь его виказати для деяких гірських пасм герцинської системи¹⁾.

Майже всі нинішні високі гори походять з другої половини кенозоїчного періоду, коли вулканічні вибухи і морщення земської кори були дуже сильні. Перша половина того періоду і цілий мезозойчний період були під тим зглядом спокійні, натомість при кінці палеозойчного періоду виступили дуже сильні заворушення в земській корі. Тим творенем гір в палеозойчній періоді займає ся Fresh і находить, що існує безпосередня зв'язь між географічним положенням і иньшими власностями вугляних залежій, а розкладом і часом повстання сучасних фалдових гір. Рівночасно з фалдами повстали дислокації, а з ними вулканічні вибухи і впливи лави. Повстали тоді 1) гори армориканські, що ішли від NW—SE через північно-західну Францію і пд. зах. часть Англії 2) гори варвезійські що тягнуть ся від середно-французької височини на NE, окружаючи великим луком нинішню чеську кітловину 3) гори палеокарпійські, котрі прямо на захід продовжувались аж над Донець яко 4) гори полуднево-російські. Рівнобіжно з 4) йшли 5) гори арменські, відділені від полуднево-російських обширним заглибленням, де пізнійше витворивсь Кавказ. Високі гори повстали тоді також в центральній Азії (Kwen-lun), на Суматрі, тоді піднеслись Ураль і Alleghanies, а також значна часть гір полудневої Африки²⁾.

Добру монографію найвишого гнізда гір Hart тз. Kalmit'у подає Mehlis³⁾. Ї то група гірська, що належить до маси Богівів, лежить в їх продовженю і складаєсь з нестрого пісківця.

Французький „Massif central“ описує Friederichsen⁴⁾. Се є в значній часті властиво лиш рештка двох, кілька тисяч метрів високих гір, що сходились в тім місці в карбоньській епоєї. Море поступаючи від западу проти цих гір стерло їх майже зовсім з лица землі і утворило великаїнську абразийну поверхню. Центральний масив французький треба отже зачислити до кадовбових гір.

В часі, коли Альпи фалдувались, пережила ся верховина великі зміни. Цілі системи обломів і прогалин перерізали її, а з щілин видобудись вулканічні маси, котрі до нині остали важним динамічним і морфологічним елементом сеї околиці. Вигаслі вулкани

¹⁾ Wiss. Veröffentlichungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig 1899. 195.

²⁾ Geographische Zeitschrift V. 563 дд.

³⁾ Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XXII, 255.

⁴⁾ Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1900. 514.

Овернії походять з тих часів. Два великі вулкани Mont Doré і Cantal, що лежать на полудне від оверньського вулканічного регіону, не мають з ним нічого спільного, повстали нерівно давніше і визначають ся проміжно уложеними долинами, над котрих виобразуванням працювали між иньшими чинниками також ледівці. Они вкривали два рази верхи тих двох гір.

На полудни масива лежать т. з. Causses — вапнякова верховина майже поземо веретвована з численними ярами і красовими явищами.

Про британський масив занотую праці Hull'a і Codrington'a. Они розслідили запалі під зеркало моря долини в Уельсі, Девоні і Корнуельї, котрих дно покрите ледниковими відложеннями. З сего вносять Hull, що в треторяді і при початку ледової епохи британський масив був сильно винесений і сягав аж до Ісландії¹⁾.

Для географії Альп мала дуже велике значіне подорож бальоном, що єї відбув понад сими горами цюрихський геолог Heim (1898. X. 3.²⁾). Він сконстатував, що релієф гір представляєсь дуже слабим, коли находим ся в бальоні високо понад ними. Гори видають ся дивно плоскими, так що наші мапи представляючі гори нерівно виразнійше представляють плястику терену, чим погляд з бальона. Пр. гори Юра не виглядали зовсім на гори і тільки смуговате уложене лук і лісів вказували на ріжницю висот. Зате, коли бальон перелетів понад Альпами і находивсь значно на північ, розвинулась перед воздушними пловцями чудова панорама Альп. Виглядали як заледенілі філії велитенного моря, гори Юра зате лвш як незначні морщини. Головні черти геологічної будови були на причуд виразні, але подробиці зовсім затиралсь.

Монографію Віденьського лісу подав Paul. Будова сих гір така сама, як в більшости пасем в східних Карпатах Флішевих: долішна крейда, горішна крейда, гієрогліфові веретви с'ярого треторяду³⁾.

До многих давнійших поділів Альп прибув тепер новий, знов на чисто геологічних підставах опертий Diener'a. Ділить він іменно Альпи східні і то на пять головних полос. Від півночі перша є Флішова полоса, сильно пофалдована, подібна до карпатевої. Друга полоса, що без визначної орографічної границі припирає до тамтої

¹⁾ Quarterly Journal of the Geological Society. 1898. LIV. 251. Geological Magazine 1898. V. Nr. 8. 353 дд

²⁾ Die Fahrt der Wega. Basel 1899. 55.

³⁾ Jahrbuch der k. k. Geologischen Reichsanstalt 1898. XLVIII. 53 д.

від полудня, є північна-вапнякова полоса, також значно пофалдована, обмежена від полудня довгими поздовжними долинами. Слідуюча центральна полоса виказує пару тектонічних ліній; коло неї групуються старокристалічні маси. Від полудня окружає ту полосу та періадріатичський крайній лук (periadriatischer Randbogen) зложений з вибухових скал. Вдовж ріки Драви тягне ся четверта полоса т. зв. дравська, що складаєсь з двох поменьших. Найбільше на полудне висунена і разом найширша є полуднева вапняна полоса, що переходить в Крає і стикаєсь там з босаньсько-герцеговинською флішвою полосою. Відносно в східних Альпах є отже досить скомбіновані і про симетричність їх не може бути мови¹⁾.

Геотектонічну загадку будови гірнянських Альп, де як звісно молодші верстви лежать під старшими, вияснив Heim лежачою подвійною фалдою. Rothpletz по 20-літніх дослідях дійшов до гадки, що сей проблем дасть ся вияснити лиш тим, що при фалдованю сеї часті Альп верстви попукали і повсталі кусні пересунулись один на другий. Місцями і три такі плити збудовані нормально з юри, крейди і еоцену, положились одна на другій²⁾.

Річні проломи долини в північних Альпах вапняних обговорює Diener³⁾. Первісно ділила одноцільна поздовжна долина північні вапняні Альпи від центральних. Нині она поділена на кілька частий проломами рік: Inn, Chiemseer Ache, Saalach, Salzach, Enns. Всі ті проломи є ерозійні і сягають ще в крейду, але початок всіх був все таки тектонічний. І так пр. пролом Інну повстав там, де фалди троха відхилились на північ. Пролом Салах і Сальцах лежить на тектонічній лінії, а Аугізі зробили дорогу гакуваті обломи в веретвах.

В босаньських, герцеговинських і чорногорських горах робив дальші морфологічні дослідн Свіжіч. Головні елементи плястики динарського систему зводить він до трьох головних елементів. Се є 1) широкі хребти і високорівні, що переходять з динарського напрям (NW—SO) до т. з. метохійського (NO—SW). Їх поверхня є сильно порізана красовими явищами і гляціальними впливами 2) Яри подібні до каньонів, що повстали наслідком ерозії рік Піва, Тарра, Неретва і їх допливів. 3) Т. з. polja, великі зі всіх сторін ограничені китловини — спеціальна властивість динарського систему⁴⁾.

¹⁾ Petermanns Mittheilungen т. 45. р. 1899. ст. 204 дд.

²⁾ Rothpletz, das geotektonische Problem der Glarner Alpen Jena 1898. Fischer. Naturwissenschaftliche Rundschau 1899. 286.

³⁾ Mittheilungen der k. k. Geogr. Gesellschaft in Wien 1899. XLII. 140.

⁴⁾ Abhandlungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien 1900. II. 149 дд.

Свої дослідни над Балканом (від 1895. р.) укінчив Toula 1899. р. і подав докладний образ морфології сих гір¹⁾. Поділити мож їх на дві частини. Западну і північно-западну часть творять чисто фалдові гори, східну часть тектонічні. Значну аналогію має будова Балкану з будовою Карпат. По полудневій стороні Балкану маєм такі самі обломи, як на полудне від Карпат (і Альп). Таксамо в східній частині тих обломів виплили великанські маси вибухові, як се видим у Карпат. Як на північ від Карпат, так і на північ від Балкану лежить велика крейдова тафля.

Історія розвитку Балкану є на думку Тулі така: Був ту старокристалічний континент, що обломавсь і запавсь майже в цілості в палеозойчній періоді. В тріасі було ту плитке море, а по перерві, ріжко в ріжних місцях дозгій, глибоке море, що від ліясу аж по еоцен заливає її околиці. Вже при кінці крейди починають ся ту андезитові вибухи. Від олігоцену є Балкан і його околиця сушею а в старшій міоцені відбуває ся головне фалдоване його верств.

Гори Sierra Nevada були предметом дослідів і опису Rein'a. Характеристичними моментами морфології сих гір є: Острє відграничене на півночі і полудні, рамена виходять від виразного острого хребта в той спосіб, що рамени відповідає всегда з другого боку хребта кітловата долина. Тутешні кари мають дуже стрімкі збока, а в середині малі платкі озерця. Їх відпливи спершу плывуть між плоскими берегами, потім стають береги дуже стрімкі і долина переходить в форму звану Barranco. Повстане тутешних карів не приписує Rein ледівцевій ерозії, а вітріню і діяльності плывучої води. Цілі гори ділять Rein з чисто орографічних засад на три частини: західну, центральний масив з найвищими шпилями і східну²⁾.

З поїздки в Угаль підчас геологічного конгресу в Росії 1898. повстало пару розвідок: Credner'a, Frazer'a, Friederichsen'a Tietze'oro і Philipppsona, що вийшли в 1898. р. Всюди констатують ся: односторонність і асиметрія. Tietze вважає її тектонічною, Philipppson позірною, викликаною абразійними явищами³⁾.

В Кавказі маєм до занотованя три праці учених, що робили ту дослідни в р. 1897. і 1898. Dechu подорожував по східнім Кавказі, а іменно в дотепер майже незваних Хевсурійських горах. Они скла-

¹⁾ Denkschriften der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien. Math. nat. klasse. LXIII.

²⁾ Abhandlungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien, I. zóm. 2 i 3.

³⁾ Petermanns Mittheilungen 1899. Lb. 39.

дають ся головню з лупака ілового. Долини каменисті безлісні, ледівців майже нема, бо гори, хоч і високі та стрімкі, так що нема місця на утворене фірну¹⁾. Буш розсліджував північно-західний Кавказ, іменно склони групи Elbrus. 190 ледівців, між тим 100 незаних, розслідив Буш і сконстатував, що ледівці північного склону від 20 літ постійно меншають. Ботанічні досліді показали велику ріжницю між вегетацією полудневого а північного склону; на полудневім в наслідок більших опадів вегетация буйніша²⁾.

Найважнійші висліди дала однак найкоротша, бо лиш 4 дні триваюча подорож попереку Кавказу по грузинській військовій дорозі Нейм'а. Сей, найбільший може знаток Альп, зладив на підставі своїх заміток порівнюючий образ Кавказу і Альп. Кавказ не може мірятись з Альпами красою і імпозантностію видів, хоч є вищий. Кавказкі пригір'я є дуже монотонні, бо веретви підносять ся лиш поволі ідь горам, а в Альпах фалди є перевернені на північ — проте пригір'я є стрімкі і мальовничі. Західна а східна часть Кавказу дуже ся ріжнять в своїм зверхнім вигляді. Східні кінці гір є каменистою, сильно порізаною горбовиною. Западні окраї гір є ліснсті, зближені видом до Апеннінів. Долини слабо розвинені, діяльність моря випереджує ту значно ерезію пливучих від. Лишень середок гір, а особливо гранітова полоса, має альпейскій вигляд, по і ту недостає ріжнообразности Альп. Долини середньої части гір є подібні до альпейских, але не так мальовничі. З причини браку долинових ступенів мало є водопадів. Брак озер в долинах також зменьшає красоту видів Кавказу.

Впрочім тектонічні і ерозійні явища представляють много аналогій. Такі самі ту потоки, явища вітріня, форми хребтів і верхів, ледівці, морени, насипи і т. д., а іменно в центральній части гір.

Що до геологічного складу верств є Кавказ тим цікавий, що нема ту зовсім кристалічних лупаків і триває. Підложє палеозойне складаєсь головню з ілових лупаків. Юрайскі відложеня подібні як в Альпах; крейда слабо заступлена, зате треторяд, а в нїм сарматскі веретви, займають много місця.

Найзначнійше ріжнить ся Кавказ від Альп тим, що в єго центрі появляють ся вулкани. Є ту еруптивний дуже старий граніт. Найновійші вибухові скали, що творять черен велитнів — вулканів

¹⁾ Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. Nr. 7. ст. 331.

²⁾ Извѣстія имп. русскаго географическаго Общества. XXXIV. 1898. 519 дд.

Ельбруса і Казбека, є андезитами. Обидва вже вигасли і в історичних часах не чувати про їх вибухи, але струї лави тих вулканів походять що найвчаснійше з левої епохи або і початків алювіальної. Ті вулканічні прояви зближують Кавказ до Андів.

Тектоніка Кавказу значно простійша, як Альп. Є одна центральна кристалічна полоса, а по обох її боках йдуть симетрично: палеозойчні лупаки, ліяс, доггер, мальм, треторяд. Немає тут пр. кількох центральних кристалічних масивів, кількох крейдяних і юрайських полос, треторядом виповнених кітловин і т. д. Тектонічні явища, як фалди, обломи і т. д. значно менших розмірів. Головне фалдове припадає на пліоцен і було одноразове — Кавказ є отже того самого віку, що Альпи. Але пізніші судби обох гір були інші. Під час алювіальної епохи Альпи дещо занесли і їх долини затопили озера, під час коли сучасно в Кавказі вибухли андезитові вулкани. Кавказ має проте вищі шпиглі, але Альпи є стратиграфічно, петрографічно і тектонічно далеко різнородніші і величніші. Вони повстали через далеко сильніший фалдовий рух, як Кавказ¹⁾.

Морфологію Тіеншану обробив Friederichsen. Згодом Richthofen'a, що існує цілий тіеншанський систем, новіші дослідження в тих околицях вповні виправдують. Властивий Тіеншан обмежити треба після Friederichsen'a від півночі пасмом Тарбагатай, а від полудня памирським Аляєм, котрий однак wraz з Гіндукушем і памирськими хребтами без сумніву належить зачислити до Тіеншанської системи в ширшій значіню²⁾.

Richthofen займаєсь рядом східно-азійських обломів, що тягнуться від місця, де Янґтсеянґ виступає з гір, через останні вирости Квенлюна, вздовж западного спаду високорівні Шапсі, а в кінці вздовж Хінгану мають для морфології східної Азії велике значіння³⁾.

В Манджурії відкрив Chalnoky базальтову тафлю велику як Галичина, много базальтових решток вулканів і велику абразивну площу, що обнімає мабуть простір від Мукдена аж поза Гланґо. Продукта колишньої абразії змішані з воздушними утворили після Ch. китайський лятерит⁴⁾.

Дуже важні причинки до геології і географії полудневої Сибіри дали дослідження підірвані російськими інженерами і гірниками

¹⁾ Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich 1898. XLIII. 25 д.

²⁾ Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. 1899. 1 дд.

³⁾ Sitzungsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1900. XL. 888 дд.

⁴⁾ Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. 8 дд.

при нагоді будови великої сибірської залізниці. Іменно в Трансбайкалії відкрито множество цікавих тектонічних явищ¹⁾.

Геотектонічні відносини Трансваля і близьких ему країн представив Schenck на підставі своїх трилітніх дослідів в тім краю. Південну Африку порівнює він з переверненою мискою, якої краї становлять: гнайсова плита краю Дамара і Намаква, Каплянд і височини Оранже і Трансваль; середину займає пустиня Kalahari. Schenck звернув увагу на се, що Zwarte Berge є властиво фалдовими горами. Тафлі Каргоо дає S. дуже великий простір, зачисляючи до неї цілий східний і північний Каплянд і цілу височину Оранже. Він є також прихильником теорії Rehnmann'a, що на побережжю Наталю наступив в юрайській епосі великий облом западного краю полуднево-африканської височини. Поділ Трансваля на морфологічні країни тойсам, що у Ремана: Hooge Veld, Boshveld, височина над Лімпопо, долина Лімпопо²⁾.

Високорівню (puna) Atacama в Кордилерах південної Америки розслідив Darapsky. Она не має відпливу, тому її річки гублять ся, є много солончаків і солених озер. Цікаві є китловини зовсім висохлі. Від сходу припірає та височина до Кордилерів, що в тих околицях є сильно вулканічні. І сама височина (в найнижшій місці 2400 м. висока) є перерізана многими рядами відосібнених гір часто вулканічних і має много термів. Сліди колишніх ледівців досить значні³⁾.

Верховину Antioquia в північно-западній Колумбії розслідив Regel. Она складаєсь головнo з кристалічних скал. Гнайси і кристалічні лупаки є сильно пофалдовані, а часто зметаморфізовані. Від півночі і сходу ограничають верховину обломн, від заходу она припірає до Кордилерів, котрих будова є дуже в тім місці замотана⁴⁾.

XVI. Діяльність моря — береги і острови.

1. Бігун т. з. континентальної півкулі означив новою метою Krümmel'a Beythien. Лежить він після него при устю Льюарн під

¹⁾ Petermanns Mittheilungen 1899. Lb. 42.

²⁾ Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1900. 60 дд

³⁾ Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. XXXIV. 281.

⁴⁾ Sitzungsberichte der phys. med. Gesellschaft zu Würzburg. 1900. Nr. 4.

$\varphi = +47.5^{\circ}$, $\lambda = -2.5^{\circ}$. З того виходить для сеї континентальної півкулі 47.8% суші, 52.2% води. Для океанічної півкулі вийшло 6.4% суші, 93.6% води¹⁾. Завважати належить, що Пенк є за тим, щоби прийняти два бігуни для континентальної півкулі, які можуть припасти на Бретанію або Гоїх після того, чи Японію зачисливо до морської чи суходутної півкулі землі.

Про морфологію побережній взагалі написав обширну студію Gulliver²⁾.

Побережжя німецького моря, о скільки належать до німецького цісарства, описав Naage. Підчас олігоцену була ціла північна Німеччина покрита морем — оно відтягнулось підчас міоцену так, що в пліоцені лиш низина над устем Рену була під водою. В ледовій епосі частин північно-західної німецької низини були від часу до часу заливані морем. В алювіяльній епосі сконстатувати можна лиш додатні пересушення берегу, дотепер пр. над Доляртом досить значні. Дуже цікаві дані наводить Н. про вплив припливу і відпливу на побережжя та про замерзане морі при березі і річних усть. Що до kwestії повстання маршів і ваттів займає Н. посереднє становище припускаючи значний вплив річним осадам, але головну ролю віддаючи хемічній та механічній праці моря, що втворює намул і пісок та его громадить. Що до повстання фризійских островів і т. з. галліїв думає Н., що колись суша сягала на захід аж поза нинішні острови і була вкрита пісковими видмами. Поза видмами лежали депресії, подібно як днесь в Голяндії. Наслідком додатного пересушення берегу море вдиралось в устя рік. Они вливали і утворили лягуни прибережні. Поволи наслідком западання ся набережжя розширилися горла річні, лягуни получились разом і з давнішого края суші остали лиш острови і острівці³⁾.

Докладні обсервації, підприняті на нідерляндесім побережжю, виказали для північної Голяндії пересушення лінії високого, а головни низького стану води в некористь моря, хоча филї значно підгризли підніже берегової видми. На острові Texel і побережжя і видма значно пересунулись ідь морю і зискали на просторі. І хоч

1) Beythien. Eine neue Bestimmung des Pols der Landhalbkugel. Kiel 1898. Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. LB. ст. 3.

2) Proceedings of the American Academy XXXIV. 151 дд.

3) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. 35 дд. Petermanns Mittheilungen 1899. 269—271.

в деяких місцях показавсь убуток суші, то в переважнім числі випадків суша приростає постійно¹⁾.

Що утрата суші може наступити не тільки в наслідок додатного руху моря, але і під впливом незвичайно сильних філь морських, свідчать найліпше западні береги Франції. Ту море посувається щороку в деяких околицях о 1 метер. Побережа зложені з більше відпорних скал пр. з вапняка менше підлягають абразії, але все таки кілька дециметрів здобуває щорік море. Лекше прийдець нам вірити в се, коли возьмем на увагу великанську силу поодиноких бовванів. Один такий вепів в млі ока перевернути желізну сигналову вежу коло Biarritz 45 m. високу²⁾.

Ще один дуже важний доказ, що східне побереже Італії щораз то приростає, прибув в останніх часах. Коло місточка Adria — 31 km. від берега морського — найдено було при копаню два староримські кораблі з многими иньшими старинностями³⁾.

Дуже важну розвідку про розвій бережний полудневої Америки оголосив Arldt. Она визначуєь головно тим, що узгляднює дуже визначно вплив геологічного розвитку континенту на его контури. Порівнюване Пешля Африки з південною Америкою є зовсім неумістне, бо контури бережний полудневої Америки зависимі є пр. на западі від фалдових гір, яких в Африці майже нема. Найбільше аналогії має полуднева Америка з північною: На западі великі фалдові гори, на сході старі масові гори, в середині низина. Така будова має великий вплив на контури континенту. Західні побережа полудневої Америки відповідають в повні правилам пачифічного типу бережний, східні показують тип атлантійський — обломів, що стають більші і обширніші ідь полудневи. Тим обломам належить приписати заострене континентів до полудня⁴⁾.

Западно-патагонське фйордове побереже представив на підставі власних подорожій Steffen⁵⁾. Від 41° полудневої ширини аж до свого кінця є побережні Кордильєри Патагонії порозривані фйордами, тим більшими і виразнішими, чим дальше на полудне. Під 46 $\frac{1}{2}$ ° ширини сягають ледівці аж до позему моря, впливаючи значно на

1) Tijdschrift K. Ned. Aardrijkskundig Genootschap Amsterdam 1898. XV. 760. Petermanns Mittheilungen 1899. 40.

2) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. Bd. XXII. 1900 ст. 425.

3) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1900. ст. 290.

4) Mittheilungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig. 1900. 32 дд.

5) Veröffentlichungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1900. 204 д.

морфологію побережжя. Вже Darwin виказав, що оно поводи підносять ся і явища підношення ся суші є в многих місцях дуже виразні, хоч місцями можна їх віднести до діяльності води і ледівців, що своїми моренами підвисили в многих місцях побережжя і утворили численні мілини в морю.

2. Досліди над островами мають для географії дуже велику вартість, так з морфологічного, як і біологічного боку. До того ще дотичній части географії досить далеко до систематичности і суцільности. Досліди в тім напрямі ведуть ся досить пиняво.

В останніх часах дуже заслуживсь коло тої занедбаной галузи географічної науки архикнязь Людвиг Сальватор, що об'їжджає Середземне море і описує острови дотепер в науці мало знані. Про кожний з них видає він опісля осібну монографію. І так в р. 1898. видав описи островів Alboran (на схід від проливу Гібральтар між Іспанією а Африкою) і Ustica (на Тиренськім морі на NE від Палермо) і в 1900. р. остров Giglio (SE від острова Ельби). З них Ustica є збудована з вулканічних скальних пород, Alboran є молодю решткою колишнього континентального мосту між Африкою а Іберійским півостровом, а Giglio складаєсь майже виключно з граніту¹⁾.

Остров Bornholm описав Goerke²⁾, не подаючи однак нічого нового про цікаві тамешні відносини геологічні. Остров Медвежий розсліджував недавно Kessler шукаючи там камінного угля. Але поклади угля є там за малі, щоб виплатились³⁾.

З описів азійських островів можна згадати про опис Філіппінів Le Monnier'a⁴⁾ і островів Batan і Babuyan (між Люзоном а Формозою) Blumentritt'a⁵⁾, що є тим важне, що ті в части вулканічні острови були дотепер дуже мало знані. Остров Різдваий (Christmas Island на полудне від Яви) є тим цікавий, що повстане своє він рівночасно завдячує і вулканізму і коралам⁶⁾. На увагу за слугує також опис острова Formos'и Японця Yamasaki⁷⁾ з тої причини, що подає нові кліматологічні дати вже за японського пановання зібрані в 5 ріжних обсерваториях острова. До географії острова

¹⁾ Pop. Mittheilungen der k. k. geogr. Gesellschaft. Wien 1899. ст. 105 д. 107 д.

²⁾ Himmel und Erde 1898 ст. 225.

³⁾ Geographische Zeitschrift. VI. 1900. ст. 176.

⁴⁾ Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XXI. ст. 1 дд.

⁵⁾ Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien XLI. ст. 593.

⁶⁾ Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. ст. 292.

⁷⁾ Petermanns Mittheilungen XLVI. 1900. ст. 221 дд.

Celebes прибув важний причиннок в розвідці про его геологічні відносини¹⁾. Ця розвідка відноситься ся головню до тамошних вулканів. В тій розвідці описані є також острови Sangir, славні страшним вибухом тамошнього вулкана в 1892. р., що розмірами нагадував Krakatau'ську катастрофу. Близько лежить остров Miangas, вважаний через довгий час неіснуючим. Тепер Wichmann доказав его істнованя²⁾.

Острови Океанії були від довшого часу предметом розелідів, яко головний класичний терен коралевих лав. В 1897. р. був на островах Fiji Agassiz, щоби зібрати на тамошніх атолях нові дані на поперть своєї нової теорії повстаня таких коралевих рифів. Він виступив був ще давнійше проти теорії атолів Darwin'a, приписуючи їх повстане не западаню ся суші, як сей, але діяльності прибоа. Тої теорії обширнійше представляти ту не будем, лиш завважаєм, що она є занадто скомплікована. Її недостаточність підносить Dahl головню що до коралевих лав архіпеляга Бісмарка, обговорюючи загально коралеві теорії³⁾. А вже найсвітлійше задокументували правдивість теорії Darwin'a верчення на коралевім острові Funafuti, де в глибині 300 м. ще верчено в коралевих скалах, котрі могли в виду того повстати лиш при западаню ся підстави, на якій поселили ся коралі⁴⁾. В теперішних часах трудно є на островах Океанії безпосередню сконстатувати їх западанє під поверхню моря (по Suess'івській термінології: додатний рух моря). Bülow мав в останніх часах відкрити такий рух додатний моря на островах Samoa⁵⁾, але Krämer доказує, що він помиливсь, та що на певно такого руху там сконстатувати не можна⁶⁾.

З африканських островів описаних останніми часами є острови Aldabra типовим атолем⁷⁾. Они лежать рядом з Маскаренами, Амिरантами, Seychell'ами на найвищих шпильях підморського хребта, що є рештою давного великого континенту на Індійськім Океані. Seychell'i описав Zaffauk⁸⁾ яко оден з найкрасших закутків землі.

1) Bücking в Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. ст. 249. дд. 273 дд.

2) Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. ст. 290 дд.

3) Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1900. ст. 136.

4) Mittheilungen der k. k. geogr. Gesellschaft in Wien XLII. 1899. ст. 44. Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. 46 д.

5) Globus т. LXXV. ст. 198 дд.

6) Petermanns Mittheilungen XLVI. ст. 8 дд.

7) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XX. 1898. ст. 319.

8) Mittheilungen der k. k. geogr. Gesellschaft in Wien 1899. ст. 163 дд.

Они складаються з старих кристалічних скал і западають поволі під поверхню індійського океана. До вичислених архіпелажів можна би також зачислити вулканічні Комори, з котрих одну: Mayotte описав Couarde¹⁾. Обширну монографію східно-африканських островів подає Keller²⁾.

Вулканічний архіпелаж Marquesas описує Steinen³⁾.

З американських островів описав Barbados (Острови за вітром) Mayer⁴⁾, а Бермуди Verill⁵⁾ вказуючи, що они не є коралового походження, а складаються з вапняка, що повставав з інфільтрованого піску з мушлями. Опісля остров в наслідок додатного руху морського зеркала прийняв вид подабаючий на атоль.

Тернопіль, в грудні 1902.



¹⁾ Ibidem т. XLII. 1899. ст. 263.

²⁾ Die ostafrikanischen Inseln. Berlin. Schall 1898. в Bibliothek der Länderkunde.

³⁾ Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin т. XXV. ст. 489 дд.

⁴⁾ Annalen der Hydrographie 1900. ст. 6.

⁵⁾ American Journal of Science Ser. IV. т. IX. ст. 399.

Очні хиби у новобранців *).

Написав

Др. Михайло Кос.

Хочу подати зіставлене очних хиб у новобранців в 655 случаях, про які я особисто видав оречене за посьлідні три роки. Сам материял походить в части ($\frac{1}{6}$) з військового шпиталю в Ярославі, де залога виносить около пять тисячів людий, по части з великого військового шпиталю в Перемишли, де залога сягає до десяти тисячів жовнірів. Найбільша частина новобранців, підданих ореченю, прийшла була до шпиталю виразно в тій цілі, щоби означити у них рефракцію ока і бистроту зору; незначна частина прийшла була з иньшими хибамі, але про них запало остаточне оречене на підставі очної хиби, котра була міродайною до адміністраційної класифікації. Зовсім не згадує ся в отсих стрічках про тих хорих, що прийшли до шпиталю лічити ся зі своєї очної недуги.

Передовсім треба мати на увазі те, що означити функцію очий у новобранців є значно тяжше, чим у клінічних хорих, де можна брати всі вискази огляданих хорих майже все за правдиві. Противно новобранці мають важні причини робити такі вискази, що вони часто зовсім не годять ся з дійсністю. Вони мають вже наперед готовий плян туманити лікаря, ще заки він почав їх оглядати; вони рішили причинювати справдішну хибу або удавати таку, якої зовсім не мають або знова зменчувати тоту хибу, яку мають. Проте мусить оглядающий лікар все тямити на се, що новобранець не піде ему на руку при огляданю очий, але противно він буде

*) Виклад виголошений 3. цвітня 1902 в науковім товаристві військових лікарів в Перемишли.

старати ся робити лікарєви всякі трудности. Тому треба й справді назвати користним і лехким такий случай, де огляданє і означенє очної хиби скінчить ся в протягу одной години, хотяй така робота у клінічних хорих може покінчити ся вигідно в 10—15—20 міну-тах. У новобранців мусить лікар провірювати найпростійші справи, щоби через контролю знайти подтвердженє раз найдених фактів. Коли два або три методи означуваня певних змін в оці дадуть лікарєви той самий вислід, то аж тоді він сьміє сам собі завірити. З тим усім нераз такой годі собі в повні довіряти та треба полишити остаточне порішенє на пізнійше; аж в той спосіб переконає ся лікар, на жаль, не один раз, що така осторожність не була злишна. Тоді хвалить ся пословиця: *ὁ χρόνος βέλτιστος ἰατρός*.

Огляданє клінічних пацієнтів відбуває ся звичайно в той спосіб, що найперше означає ся функция ока. При тім дізнає ся лікар, щб око видить і яка єго рефракция, на підставі особистих висказів огляданого. Опісля, дивимо ся до ока очним зеркалом і означаємо об'єктивно рефракцию і тоті можливі патологічні зміни, які суть причиною найденної обниженої бистроти зору. Така дорога у наших новобранців була би занадто довга! Бо новобранці мають звичайно собі властивий спосіб поведєня при допитах їх очий, от менче більше такий: коли емметроп має замір удавати, що не до-виджує, то каже, що не видить добре без окулярів, або ще радикальнійше, що „нічого“ не видить. Вгнутое скло або й вигнуте о силі 1·0 діоптриї ніби то не має впливу на єго око, єму „всьо одно“. Скло о силі +2·0 D або —2·0 D ніби-то збільшає де-що бистроту зору; через скло о силі +3·0 D або —3·0 D ніби-то ви-дить новобранець ще ліпше, але дивним дивом бистрота зору не є ніколи ліпша, чим $\frac{6}{24}$! Коли новобранець слабо приготував ся до кампанії дурєня, то лехко дає ся зловити і каже, що видить добре окулярами, коли ся зложить два скла противного діланя а однако-вої сили рефракційної, пр. +3·0 D і —3·0 D, так що їх діланє зносить ся взаємно і око дивить ся наче крізь віконне скло. За-гально держать ся оглядані тої засади, що скла малої вартости діоптричної ніби-то не ділають на їх око, а скла висшої вартости аж до певної границі, котрими очевидно гірше видять, ніби-то по-правляють їх бистроту зору. Коли подасть ся їм ще висші окуляри то вони не видять „нічогісїнько“. Майже все вистерігають ся они видіти більше, чим $\frac{6}{24}$, або сказавши ще простійше, вони старають ся своїм поведєнем вмовити в лікаря, що вони годні читати ли-шень три горішні рядки букв на таблицях Снеллена. Тут очевидно мусів їх хтось поучити, — ще заки вони прийшли до військового

шпиталю, — що такий новобранець неспосібний до військової служби, коли він в силі читати не більше, як три горішні рядки букв на таблицях, уживаних звичайно до означування швидкості зору. Коли такому новобранцеві кажеся читати букви Снеллена з різних віддалень, то покажеся, що його мудрість тут вже кінчить ся. Тоді дістає ся в протягу кількох мінут нераз вартості для швидкості зору, котрі різнять ся від себе в десятеро. Такі висліди досягаємо найчастійше тоді, коли оглядане повторяємо через кілька днів, слідуючих по собі. Ледви чи треба особно о тім згадувати, що такі досліди забирають дуже багато часу і вимагають від оглядаючого лікаря нераз надлюдської терпеливості. Деякі новобранці суть в силі витривати навіть десять неділей при своїм фанатичнім замірі!

Короткозорий приходить звичайно з показьними, грубими окулярами на носі о силі $10\cdot0 - 13\cdot0 - 14\cdot0 D$, навіть тоді, коли його короткозорість сягає ледви $1\cdot0 - 3\cdot0 D$. Можна подибати й еметропів з окулярами $-13\cdot0 D$, і то не так дуже рідко. Той род новобранців присягає ся, що без окулярів не видить „нічоґісїнько“, але зато видять ніби-то ліпше через скло о силі $+1\cdot0 D$, або $+2\cdot0 D$ а навіть $+3\cdot0 D$; кажуть, що вищими склами не видять „нічоґісїнько“. Так само не видять „нічоґісїнько“ або дуже слабо вгнутими склами о силі $1\cdot0$ до $8\cdot0$ або $10\cdot0$ діоптрій. Через того скло, до якого навикли через вправу, видять навіть $\frac{6}{6}$, а суть тому так неосторожні, бо вони очевидно тої гадки, що не спосібні до військової служби вже тим самим, що видять через „таке грубе“ скло. Бідні дурисьвіти ще не знають, що лікарі означують рефракцію незалежно від новобранця, без його помочи а навіть против його волі, між тим вони подали на „своє лихо“, що видять дуже добре або бодай на стільки, скільки потрібно до військово-адміністративних цілий. Однак такі случаї належать ще до добрих. Звичайно старають ся короткозорі не показувати ліпшої швидкості зору, чим непоколибимі $\frac{6}{24}$, а лікар мусить тоді взяти до помочи різні віддалення, щоби дійти до ціли, бо межі новобранцями ледви котрий розуміє ся ва численю дробами.

Надзорі поводять ся так само, як еметропи.

Астиґматики держать ся найчастійше недалеко правди; декотрі робять навіть бездоганні клінічні уваги і вискази, котрі годять ся з прикметами ока, які можна теоретично предвидіти. Всею то пояснює ся тим робом, що виші степені астиґматизму вже самі собою обнижають швидкості зору так сильно, що новобранці з нею не суть спосібні до оружно́ї служби. Малі степені астиґматизму не впливають на поведене новобранців, котрі поступають відповідно

до своєї рефракції. При означуванню астигматизму давала мені скієскопія так добрі результати, що вони зближалися найбільше до суб'єктивних але певних висказів огляданих новобранців.

Головні меридіани дають ся означити тим методом вже після кілька секундого оглядання і тому повторюю увагу, яку я зробив вже на иньшій місці¹⁾, що кождий військовий лікар повинен присвоїти собі той метод оглядання ока. Означення степеня астигматизму при помочі скієскопії вагає ся в тісних границях з причини мимовольної аккомодациі огляданого підчас скієскоповання; коли огляданий нарочно аккомодує, що впрочім також лучає ся, то границі вагають ся ще більше. Тому-то обходжу ся дуже нерадом без кератоскопу Javal'a і Schiötz'a, котрий дає результати функціонально вправді троха за високі але за те дуже точні. Але тим знаменитим інструментом не суть наразі випосажені навіть більші військові шпиталі, до яких безперечно належить і гарнізонний шпиталь в Перемишлі. Означування рефракції головних меридіанів в прямім образі дає при короткозорості де-що за високі вартости, а при надзорості за низкі в порівнянню з вартостями осягненими через функціональне означення, бо оглядаючий дає ся легко звести на манівці і аккомодує, приневолений до того в загальї не точним образом дна ока. Тим часом виключене аккомодациі є при огляданню в прямім образі беззглядним услівем.

При скаламученнях прозорки стрічаємо ся часто з такими висказами, котрі можна опрокинути лишень через велику терпеливість і часте огляданє ока. Особливо не треба вірити висказам новобранця, коли об'єктивне слідженє дна ока при помочі очного зеркала не находити поважніших перепон в заломлюючих частях ока а огляданий каже, що є цілком сльіпий. Лікар мусить научити ся оцінювати в приближенню бистроту зору після степеня точности, з якою видить дно сльідженого ока, а опісля нехай старає ся, піднести суб'єктивну бистроту зору новобранця до означеної висоти. Лехко зрозуміти, що засада „ $\frac{6}{24}$ “ бистроту зору має на скаламученій прозорці дуже широке поле до попису.

Недуги і зміни в соці, в склянім тілі, в нервівці, в судинниці і в зоровім нерві суть майже не знані у новобранців. Ту годить ся по найбільшій частині висльід об'єктивного сльідженя з суб'єктивними висказами огляданого, котрий звичайно і сам не знає, чому не видить добре. Новобранці з недугами тих частин ока жалують ся зовсім поважно та справедливо на свою долю.

¹⁾ Лікарський Збірник, 1899. Про скієскопію.

Новобранці, яких мені лучало ся оглядати, поводитись всіляко відповідно до того, чи належали до тутешного (галицького) сільського населення, чи до інтелігенції; дальше, чи се були Русини та Поляки або знова Жиди.

Коли Русин або Поляк удає якусь очну хибу, котрої не має, то поступає звичайно при тім так наївно, незручно і примітивно, що і без значнійшого труду можна вислідити правду і поділитись нею з новобранцем. Коли то зробить ся, то новобранець приходить звичайно вскорі до переконання, що ему проба не удала ся, що его приловили на удаваню і він перестає удавати. Але не так робить Жид-новобранець! Він попадає з одного противеньства в друге, твердить діаметрально противні річи, на пр., що ніби-то видить, хотяй емметроп, найліпше через окуляри о силі $+3.0 D$ або $-3.0 D$ підчас того самого сьлідження, він видить очевидно, що пізнали ся на нїм, а мимо те не відступає нераз цілими тижнями від свого твердження. Такого новобранця може поконати лиш такий лікар, котрий є так певний в об'єктивнім сьлідженю ока, що може сам собі завірити і котрий має на стільки терпеливості, що нею перемаже навіть найзавзятїшу упертість новобранця.

Сьлідуюча таблиця на стор. 6. і 7. дає перегляд загального числа огляданих, з неї видно якість очних хиб і їх класифікацію після урядового „припису для лікарських оглядин новобранців“.

Неправильности на зовнішних частинах ока суть дуже скупі заступлені (6 людей = 0.9%), бо їх можна лехко дозріти вже підчас бранки; як раз противно має ся річ з хибамі в рефракції, котрих не можна провїрити без очного зеркала, а на се нема часу підчас бранки. Хибі в рефракції становили проте більшу частину огляданих, числом 369 людей (56.3%). Найбільшу сьлідуючу позицію чисельно становлять скаламучення прозорки і вї скалки (115 людей, 17.5%), потому сьлідують внутрішні части ока: промінниця, нервівка, судинниця і зоровий нерв, разом 97 людей (14.8%), дальше сочка (35 людей, 5.3%). Зизоокість і дрозжанє очий (Nystagmus) мало 32 людей (4.8%), помежи зизуючими на вні було троє люда з надзорою рефракцією, коли противно ані оден короткозорий не зизував до середини. В кінці був оден анофтальмус.

Із загального числа 655 сьліджених новобранців мало найбільше з них (313 людей) короткозорість, що відповідає 47.7%; емметропію мало 247 людей (37.7%), а надзорість 95 людей (14.5%).

Зачаєне число	E	My	Ht	Часть ока	Род хиб	Способний до високої військово- вої служби
1	3	—	—	Внішні части ока 6	Ectropion	—
3	1	—	—		Blenorrhoe sacci lacr.	—
1	1	—	—		Ptosis oc. utr.	—
1	—	—	1		Symblepharon posterius	—
115	84	25	6	Прозорка 115	Maculae corneae et leu- coma adherens	29
4	3	1	—	Сочка 35	Membra pupillaris perse- verans	3
11	8	1	2		Cataracta traumatica	—
9	4	5	—		C. corticalis partialis	1
5	2	1	2		C. polaris anter., poster., fusiformis	—
1	1	—	—		Cataracta mollis	—
5	4	1	—		Luxatio lentis	—
14	11	1	2		Iridocyclitis	1
2	2	—	—		Arteria hyaloidea perse- verans	—
7	3	2	2		Retinitis pigmentosa	—
2	2	—	—		Retinitis proliferans	—
8	6	2	—	Промінниця, Нервівка, Судинниця і Зоровий Нерв 97	Ablatio retinae	—
4	2	—	2		Neuropapillitis	1
34	23	6	5		Atrophia Nervi optici	1
8	5	2	1		Retinochorio ditis	1
4	3	1	—		Ruptura chorioideae	—
1	—	1	—		Coloboma chorioideae	—
13	1	10	2		Coloboma при вступі N. opt.	3
63	63	—	—		Emmetropia	63
223	—	233	—		Myopia	51
49	—	—	49	Рефракція 369	Hypermetropia	21

Способний до запасової слу- жби помічної	Неспособний до оружанної служби	Неспособний до пиякої служби у вій- ську	У В А Г И
—	1	—	—
—	3	—	1 раз з фістурою (слизною)
—	1	—	—
—	1	—	—
18	64	4	—
1	—	—	1 раз також retino-chorioiditis
—	11	—	—
—	6	2	1 раз також Microcornea o. u. 1 „ „ Astigmatismus mixtus
—	5	—	1 раз також Strabismus convergens 1 „ „ „ „ divergens
—	1	—	—
—	5	—	1 раз також Nystagmus horizontalis
—	13	—	1 раз виконано enucleatio bulbi
—	2	—	1 раз також Cataracta polar. ant. et post. та й membrana pupil. persev.
—	6	1	1 раз також Cataracta polaris posterior
—	2	—	—
—	8	—	—
2	—	1*)	*) Abscessus cerebri
1	27	5	13 разів на однім оці 21 разів на обох очах; між тим було еще 1 раз Cataracta polaris anterior 1 раз поранене 3 прямих м'яків 2 рази Strabismus convergens 2 „ „ „ „ divergens
—	5	2	1 раз після уразу, з полишенням зеленавих слідів з кровотоку 1 раз також поранене всіх м'яків порушаючих очну галину, та й Atrophia N. optici
—	4	—	1 раз також Ablatio retinae
—	1	—	також Strabismus divergens
3	7	—	—
—	—	—	1 раз нервові волокна з товщом
19	148	15	1 раз Insufficiencia M. M. rect. ext.
7	20	1	19 разів до 5·0 D { 1 раз microcornea o. u. 1 раз нервові во- локна з товщом 26 разів до 10·0 D 4 рази до 12·0 D

Загальне число	Е	My	H ₁	Часть ока	Р о д х и б и	Споібний до військо- вої служби
9	—	9	—	Refraction 369	Astigmatismus myopicus simplex	3
5	—	5	—		Astigmatismus myopicus compositus	2
1	—	—	1		Astigm. hypermetropicus simplex	—
7	—	—	7		Astigm. hypermetropicus compositus	2
2	—	1	1		Astigmatismus mixtus	1
11	3	—	8	Хиби положення 32	Strabismus convergens	—
8	2	3	3		„ divergens	2
13	9	3	1		Nystagmus	—
1	1	—	—			
1	1	—	—	Брак ока 1	Anophthalmus	—
655	247	313	95	655	—	185

Дотично класифікації треба те піднести, що більшу частину всіх єльіджених треба було признати неспосібними до військової служби, а іменно було 385 новобранців (58.7%) неспосібних до оружної служби, а 31 (4.7%) неспосібних до ніякої служби, разом 416 новобранців (63.4%) неспосібних. Супротив того стоїть 185 людий (28.2%) зовсім спосібних до служби і 54 (8.2%) спосібних до запасової служби помічної (Ersatzreserve), разом проте було спосібних 239 огляданих новобранців (36.4%).

Про найбільшу частину єльіджених 63 емметропів, признаних спосібними, треба сказати, що вони позволили собі на зовсім злишне означене функції і рефракції ока в надії, що притім омануть лікаря і на тім дещо скористають. Велика частина сих новобранців належала до почитателів сакраментальної бистроти зору $\frac{6}{24}$. Ще певніше дасть ся то само сказати про тих „короткозорих“ (51 + 19 = 70), котрих признано спосібними до служби, бо вони

У В А Г И			
Способний до запасової слу- жби помічної	Неспособний до оружно́ї служби	Неспособний до лікво́ї служби у вій- ську	
1	5	—	1 раз також Strabismus divergens
—	3	—	1 раз також Coloboma при вступі N. optic.
—	1	—	—
1	4	—	1 раз також Strabismus convergens
—	1	—	1 " " Microcornea o. u.
—	11	—	—
1	5	—	1 раз paralyticus
—	13	—	—
			9 разів horizontalis
			1 раз verticalis
			1 раз rotatorius et horizontalis; притім було:
			1 раз також Atrophia N. optici
			1 " " Strabismus convergens
			1 " " " divergens
—	1	—	—
54	385	31	—

мали в малім степені своєї хибі неначе сказівку, як мають посту-
пати, щоби не мусіли познакомити ся ближше з військовою службою,
то є: наложити окуляри о силі —13·0 D замість —1·0 або —3·0 D
і того тримати ся постійно!

У короткозорих неспособних до військової служби (148+15=163,
т. є 69.9% всіх сліджених міопів) була міродайною при класифі-
кації головно високість короткозорости, котра переходила 5·0 D;
найбільша частина з них мала крім того ще ось які хибі: ви-
гнуте заднього бігуна ока (Staphyloma posticum Scarpae), зміни
в нервівці і судинниці задля запалення (retino-chorioiditis), скала-
мучення скляного тіла — і тоті-то хибі були власне причиною, що
15 сьліджених короткозорих (6.4%) мали так ниську бистроту зору,
що вона не досягала навіть $\frac{1}{6}$ на ліпшім оці, через що тих ново-
бранців треба було признати неспособними до ніякої служби
у війську.

В переділці „Увага“ є записані деякі значнійші хиби, знайдені на очах по-при других більших і міродайних до класифікації, ось деякі з них: 3 рази мігросорнеа, 2 рази волокна зорового нерву з товщом (markhaltig), 2 рази поранене м'яснів, порушуючих очну галину, 1 раз ослаблене (інеуффіцієнція) простих м'яснів внішних при короткозорости з подвійними образами лежачими по тім самім боці.



Переміна матерії при акромегалії.

Написав

Др. Вячеслав Морачевський.

Помимо дуже численних розправ¹⁾ про акромегалію находимо розмірно мало даних про переміну матерії при тій недужі. Праця А. Schiff'a²⁾ подає нам вправді найбільше що о тім звісно, однак не може мати значіння досліду над переміною матерії в стислім значіню того слова. Проте підняв ся я за принукою ВП. Пр. А. Глюдзінського випрацювати біляне найважнійших складових частин виділювання, аби подати причинок до пізнання тої інтересної недуги.

Досліджуване корму і виділювання переводив я в спосіб мною все примінюваний, що є описаний обширно в моїх попередних працях над переміною матерії.

Всі складники корму аналізовано наново, а введені в рахунок числа суть середні вартости з добре згоджуючих ся означень.

В першій ряді дослідів обсервувалисьмо недужого через 18 днів, потім наступила перерва на один місяць, а опісля ми почали другий ряд дослідів що тривав 24 дні.

З анамнези недужого треба піднести, що він походить з околиці, в якій панує воле (struma). Перед 4 роками почув він сильні болі голови, а рівночасно зауважав він значну пухлину кінчин, лица і язика. То побільшене мало тривати через 3 роки.

¹⁾ Pineles Fr. Sammlung klinischer Vorträge Nr. 242. — Sternberg M. Spezielle Pathol. u. Therapie von Nothnagel, Band VII 1897.

²⁾ A. Schiff. Wiener klin. Wochenschrift 1897 Nr. 12 pag. 279.

Коли хорий перестав працювати (він є сільський робітник), пухлинина уступила, але остало згрублене кінчин. В короткім часі по тім зауважав хорий, що его зір погіршив ся, здавало ся ему, що поле видження зменьшило ся. Спрага щораз більшала. Він пив 8 літрів води денно і їв дуже багато. Мимо того его сили ставали що раз менші а наклін половий зовсім зник.

Status praesens подає значне побільшене носа, уст і языка, а також ніг і рук. Також обобічна геміанопсія. Моч виказує 2—3% цукру, денна скількість его виносить 2—4 літри. Внутрішні органи кров і зміст жолудка не виказують нічого неправильного.

Дієта складала ся з:

	N	Cl	P	Ca
1 літра молока, що відповідає	5.050 gr	0.912 gr	1.286 gr	1.628 gr
450 gr булки	6.117	1.535	0.565	0.182
250 cm булйону	0.499	0.816	0.310	0.053
298 gr beafsteak-y	13.329	5.096	0.884	0.078
304 gr бульби	0.784	0.156	0.214	—
81 gr яець (2 шт.)	1.707	0.134	0.188	0.048
65 gr масла	0.142	0.012	0.051	0.021
800 gr содової води	—	0.028	—	0.025
4 gr кухонної соли	—	2.430	—	—
	27.635 gr	11.415 gr	3.478 gr	1.606 gr

Ми поставилисьмо собі за задачу в першім ряді дослідів зобразити відносини виділюваня. Тому узв'язднено в мочи побіч азоту, хльору, фосфору і вапу, котрих біляне обраховано, ще і найважнійші складники мочи. Означилисьмо проте мочник, кислоту мочову, ксантинові засади, амоняк, мінеральну сірчану кислоту, органічну сірку, сірчану кислоту естрів, органічний фосфор, зв'язаний з алькаліями, і з квасними фосфатами, вкінці соли потасові, содові і магнезіові.

З огляду, що денне означуване усіх складників вимагало багато часу, ми означали деякі з них лиш від часу до часу, так що на кожний період випадало що найменше одно означенє.

Крім того зволив ВП. студ. мед. Райхенстайн виконати під моїм проводом означенє амідового азоту, а також монамінового і діамінового в мочи методом впровадження Hausmann'ом¹⁾ а при-
міненим Pfandler'ом²⁾ до мочи.

¹⁾ Hausmann: Zeitschr. f. physiol. Chemie B 27 p. 95.

²⁾ Pfandler: Idem B. 30 p. 75.

Перший ряд дослідів поділив я на 6 періодів: Перший, що тривав 6 днів, служив до орієнтації і виказав виділюване 3.325 см³ мочи денно з 24.108 gr азоту.

Азот		{	22.442	мочник
в калі 0.532 gr gr. d.			0.4293	мочова кислота
			0.0978	ксантинові засади
			0.9275	амоняк
Розділ азоту після Pfandler'a (l. c.)	{	1.277	N. що дає ся тяжко відділити (осад	
		12.961	F. " " " " " (процід)	
		1.307	n. що дає ся легко відділити (осад)	
		7.589	f. " " " " " (процід)	
Хлѳораки в калі 0.006 gr	{	8.991	хлѳораки обчислені як Cl	
		1.434	мінеральна сірчана кислота як S	
		0.4656	органічна S	
		0.1094	сірчана естрова кислота як S	
Сульфати				
Фосфати	{	1.7037	мінеральний фосфор як P	
		0.8474	квасний " " P	
		1.3802	алькалічний " " P	
Металї	{	6.442	соли потасові як K	
		7.334	соли содові як Na	
		0.526	в калі	
		0.037	gr	
			0.3295	вап
			0.1941	магн

З того видно, що в мочи не знайдено сильно впадаючих в око змін. Органічна сірка виходить троха за високо 24.5% а так само і соли потасові значно побільшені. Порівняймо виділений азот, хлѳор, фосфор і вапно з тими в спожитім кормі, то помітимо дуже значне затримане в організмі усіх названих складників а іменно:

азот	2.947	11%	спожитого
хлѳораки	2.754	26%	
фосфор	2.530	45%	
вап	0.751	47%	

Відношене азоту до иньших складників в кормі представляло ся як:

$$N : Cl : P : Ca = 100 : 41.3 : 12.6 : 5.9$$

$$\text{в виділинах} = 100 : 36.5 : 7.9 : 3.5$$

Виділена в калі скількість виносила для фосфору 8%, для вапу 30%, підчас коли 50% фосфору з корму а 20% солий вапнових відійшло через нирки.

Подане відношенє остало незмінне підчас першого ряду обсервацій.

Подане таблет тироїдину не спровадило навіть збільшеня виділюваня азоту. Обсервоване А. Schiff'ом виділюванє фосфору в калі моглисьмо вправді констатувати, але лише в дуже малім ступни. Аж подаванє 9 таблет денно справдило збільшенє виділюваня азоту, так що тепер орґанізм затримував лиш 1.3 до 0.8 gr pro die, що виносить 5—3% спожитої скількості.

Зменьшенє задержаня фосфору можна було нотувати як при 3 таблетах денно так особливо при 9 таблетах, але зато росла через цілий час подаваня тироїдину скількість задержуваного вапна аж до 60% спожитої скількості. — При подаваню тироїдину занотовано зменьшенє тяжко відділяючого ся азоту і то даючого ся здрулити фосфоро-вольфрамовою кислотою і не даючого ся; значно збільшений був тоже легко відділяючий ся не даючий ся здрулити фосфоро-вольфрамовою кислотою азот (мочник etc.). Легко відділяючий ся даючий ся здрулити остав без зміни.

При подаваню таблет з гіпофізи моглисьмо вправді спровадити утрату азоту, що йшла рівнобіжно з збільшеним виділюванєм води і хльору, але фосфати і вапневі соли остали при тім незмінні. Збільшенє виділюванє азоту відносило ся до усіх сполук азоту рівномірно: так було виділюванє амоняку, мочної кислоти і т. д. без зміни в відношеню до азоту. Числа Pfandler'a показували те характерне, що тепер тяжко розкладаючий ся, не даючий ся здрулити РWг кислотою азот ішов в гору в противенстві до виділюваня фосфору, підчас коли прочі оставали без зміни. — Виділюванє цукру ішло рівнобіжно з скількостію мочи.

З першого проте ряду дослідів, довідалисьмо ся, що акромегалія побіч азоту і хльору затримує фосфор і вап; перші два дають ся виділити через таблетки тироїдину і гіпофізи, але фосфор а особливо вапневі соли упірно задержують ся.

По сконстатованю того звернулисьмо нашу увагу на вапневі соли і старалисьмо спровадити їх виділюваня. З наших попередних досвідчень¹⁾ пізналисьмо кисень і азотан срібла як середники, що побуджують виділюванє вапна і старалисьмо ся дослідити тут їх

¹⁾ W. Moraczewski: Virchow: Archiv f. all. Path. B 151 p. 22 u. 50 Zeitschrift f. klin. Med. $\frac{5}{6}$ B 33 p. 1.

вплив. Побіч тих середників досліджувалисьмо фосфор на єго діланє, що як звісно має значіне для зросту костий, і пробувалисьмо тоже недавно впровадженєго aphrodisiacum Yochinbin Дра Зінґера. Послїдного примінювалисьмо тому, що акромегалїя майже все провадить до імпотенції, а також і в нашім випадку половий наклін занизє зовсім.

Цікаво було видіти, який буде мати вплив та побуджуюча субстанція на переміну матерії. — А що головним предметом наших дослідів були вапневі соли, то ми переводилисьмо аналізу калу з найбільшою старанністю. Єго досліджувано зовсім сьвіжо, а в кождім періоді ряду дослідів роблено одну аналізу калу.

Означенє ограничилисьмо в мєчи і калї до 4 складників N, Cl, P і Ca.

В першім періоді сконстатувалисьмо ще раз, що хорий оказує сильне задержанє всіх названих складників: N 16% P 46% Ca 60%. Притім виділено 50% P через нирки, 7% з калом, Ca 8% через нирки, а 35% з калом.

Коли ми опісля далисьмо хорому через три дні вдихати кисень, задержанє всіх складників зменьшило ся. Соли вапневі виділювали ся як через нирки (15% спожитої скількості) так і з калом обильнійше. Виділюване фосфору з калом зменьшило ся, але з мочию виділило ся кілька % більше так що біланс фосфору випав нийший.

О много скutoчнійшим оказав ся азотан срібла, подаваний в дозах 0.03 gr 6 разів денно, отже 0.18 gr pro die. При тім збільшило ся виділюване азоту і хльору (ретенція азоту виносила тепер 7%). Фосфати являли ся 60% в мочи а 8% в калї, вапневі соли 26% в мочи а 60% в калї. Через нирки виділювана скількість вапна досягла в тім періоді своє maximum.

Діланє фосфору було о стілько несподіванє, що можна було надїяти ся нагромадженя вапна і фосфору в орґанізмі. Тимчасом єго діланє оказало ся дещо подібним як азотану срібла а в деякім взглядї ще сильнійшим. Подаванє 0.005 gr фосфору денно споводувало збільшенє виділюване калу, що мало рішаюче значіне для білансу фосфору і вапна, а також страту азоту, що виносила 5% спожитої скількості, подібно і страта хльору виносила 24%. Ретенція фосфору спала до 20%, вапневі соли були в рівновазі, підчас коли досї жаден середник до того не допровадив. Так відходило в тім періоді 18% фосфору з калом, а 60% через нирки, а з вапневих солий 80% з калом, а 20% через нирки; отже при вапневих солях виходить виразне зменьшенє.

По кількох днях, в котрих виділюване вернуло до давного типу, подавано через два дні 5 пастильок Yochinbin'у. То справділо значне збільшене виділювання води а разом і хльору, азоту і фосфору з мочію, — а соли вапневі остали ненарушені.

Пересічні числа виділювання в часі названих 5 періодів пояснюють те що сказалисьмо:

	I.		II.		III.		VI.		V.	
	Моч	Кал	Моч	Кал	Моч	Кал	Моч	Кал	Моч	Кал
Азот	25.87	0.70	26.37	0.78	28.76	0.84	29.27	2.08	28.57	0.49
Хльор	9.79	0.01	10.76	—	10.72	—	11.76	0.01	11.43	—
Фосфор	2.02	0.287	2.167	0.209	2.39	0.311	2.56	0.70	2.39	0.58
Вап	0.178	0.710	0.321	0.776	0.57	1.24	0.45	1.72	0.38	1.54

З а д е р ж а н є

	+		+		+		—		—	
Азот	5.47	16%	4.89	15%	2.44	8%	1.74	—5%	0.64	—2%
Хльор	2.07	18%	1.11	9%	1.06	8%	2.68	—20%	2.38	—20%
Фосфор	1.98	46%	1.89	40%	1.59	39%	0.91	+20%	1.18	+30%
Вап	1.27	60%	1.07	50%	0.35	17%	0.0005	—	0.228	+11%

З того видно, що подаване кисеня а особливо азотану срібла має великий вплив на виділюване вапневих солей а особливо азотан срібла не дає ся ніякому середникови перевищити. Хотай навіть біляне вапна при подаваню фосфору випав майже негативний, то всеж таки учить погляд на табличку, що виділюване вапна через нирки при подаваню срібла дійшло до maximum.

Ті спостереження повинні давати причиннок до лічення акромегалії і ствердити факт, що через кисень, фосфор і азотан срібла в виділюваню настувають зміни, котрі повинно спровадити т. зв. специфічне ліченє але часом не спроваджує. В тім однак нічо нема сказано о клівічнім значіню ужиткованих нами середників.

Наші досліди тревали лиш що 4 дні і мали лиш оказати хемічне діланє. Про вплив на нервові zaburєня на субективне почуване, що може головно має за ціль подаване тироїдину і гіпофізи не можемо при уживаних нами середниках висказати ся.

Найважнійші висліди коротко зібрані суть ось які: 1⁰ при акромегалії затримує організм в собі азот, фосфор і вапневі соли; 2⁰ таблетки тироїдину побуджують збільшене виділюване азоту, хльору і фосфору; 3⁰ таблетки гіпофізи лиш — азоту і хльору; 4⁰ кисень і азотан срібла всіх названих складників.

Лічене трахоми і других запалень злучниці іхтарганом.

Написав

Др. Михайло Кос.

Від часів Еберсового папіруса, се є від 16. віку до Христа, шукають люди за ліком на трахому — все безуспішно, або бодай не з таким успіхом, як би того бажалось, так що ще й нині найліпшими суть ляпіс і синій камінь. Сей послідний згадує ся вже в папірусі, отже перетревав півчверта тисяча літ. Послідні десятки літ принесли нам лічене трахоми субліматом, витисканем зерен фоллікулів) пенсетою Кнапа або ніхтями, дальше витинанем переходової фалди злучниці тай йодовою тинктурою. Очевидно уживає ся також ляпіс, всяких вод з борною кислотою, з цинковими солями і багато дечого другого. До послідних проб треба зачислити лічене трахоми ляртіном, протарголем і іхтарганом. Всі ті три ліки суть солями срібла з білковиною і суть ніби-то покликані заступити ляпіс. Про іхтарган висказав ся дуже похвально Фальта¹⁾ і задля того поручило міністерство війни перевести пробне лічене трахоми сим ліком в військових шпиталях.

Іхтарган є злукою зрібла з іхтиолом, представляє брунатний порошок зі слабим запахом іхтиолу; в ній є 30% срібла, коли пр. в ляртіні срібла є всего 11%. Іхтарган розпускає ся легко в воді і дає брунатно-червонаву течу; по довшім часі (4—6 неділь) творить ся чорний осад в течі, се знак, що треба зробити на ново

¹⁾ Dr. Marczel Falta: Trachombehandlung mit Ichthargan; Knapp und Schweigger's Archiv für Augenheilkunde, XL:II Band 1901.

розчин іхтаргану. Після Авфрехта¹⁾ ділав іхтарган на тканину глибоше, чим ляпіс; також більша є спосібність іхтаргану забивати бактерії, чим ляпісу.

Від цвітня до кінця вересня 1902 р. переводив я проби з іхтарганом на очнім відділі гарнізонового шпиталю в Перемишли при слідуючих недугах:

1. при трахомі,
2. при запаленю злучниці з сильним розвитком кульочок (фоллікулів) (*conjunctivitis follicularis*),
3. при звичайнім нежиті злучниці (*conjunctivitis simplex*),
4. при своєроднім ostrім нежиті злучниці, при чім злучниця була сильно почервоніла, опухла і виділювала багато слизи. Цілий процес тривав звичайно лишень кілька днів і був властивий минувшому літови. В шпитальних записках ведено его окремо пі іменем *Ophthalmia catarrhalis*,
5. при запаленях злучниці з витворенем гузків (*conjunctivitis eczematosa, phlyctenulosa, scrophulosa*),
6. при *Blenorrhoea neonatorum*.

Я уживав 1% і 2% розчинів іхтаргану, ті розчини держали ся в темних фляшках і запускали ся до очей інстїлятором по одній капли на горішні повіки, обернені попередно злучницею на верх; надмір течі обсушувало ся ватою. При тім вистерігав ся я терти ватою по поверхни злучниці, щоби не зривати механічно поверховних верстов наболони, як се роблю також при стосованю ляпісу при очних недугах. З тої-то причини не уживано пензлів, лишень інстїлятора і сему маю завдячити, що злучниця не підпадає темному закрашеню (*argyrosis*) навіть по кількамісячнім ліченю ляпісом або іхтарганом. Розчин іхтаргану пече значно менше, чим одвітний розчин ляпісу і значно коротше. Можна сказати, що іхтарган пече шість разів коротше, чим розчин ляпісу. Межи 1% а 2% розчином іхтаргану нема в тім згляді значнійшої ріжницї. Однакож деякі хорі відчувають печене іхтаргану як раз міцнійше, чим ляпісу; сї виємки суть індивідуальні і рідкі.

Дїланє іхтаргану при одиноких формах запалєня злучниці було ось яке:

1. При трахомі з *rannus*'ом і сильно розвиненим виділюванєм слизи ділав іхтарган нераз дуже корисно і то в короткім часї, бо в протягу кількох днів. *Rannus* з численними і добре розвиненими

¹⁾ Dr. Aufrecht, Ueber Ichthargan; Deutsche med. Wochenschrift 1900, No 31.

кровними судинами блідів за 3—5 днів а виділюване слизи уставляло або бодай зменшувало ся дуже значно. Але таке корисне діланє не було постійне, ба навіть в однім случаю трахоми з *rannus*-ом обох прозорок був іхтаріан прямо шкідний, так що треба було по двох пробах перестати запускати іхтаріан. Іхтаріан показав взагалі слабший вплив в тих случаях трахоми, де ходило головно о погрубіду злучницю з бородавковатими наростями на ній, або знов, де були дуже розвинені кульочки (фоллікули). Коли кульочки дали ся витиснути (все пальцями), то вплив іхтаріану на дальший перебіг трахоми був значно енергічніший. Однак іхтаріан ніколи не вистарчав в тих случаях, щоби досягнути бажаний успіх, так що треба було перейти до других ліків, а іменно до ляпісу або синього каменя. Всіх лічених трахомів було 37, межи ними було 7 з *rannus*-ом одного або обох очий, при чім навіть цілі прозорки були заняті.

2. Нежит злучниці з сильно розвиненими кульочками (*conjunctivitis follicularis*), при чім однак кульочки були взагалі менше розвинені, чим при трахомі, підлягав корисному впливови іхтаріану лишень в тих случаях, де, так сказати-б, був наклін кульочок до уступлення, так що ціле ліченє не тревало довше, чим 2—3 неділі. Коли треба було довше уживати іхтаріану, то виступало розпульхненє і увяленє злучниці, так що цілий образ недуги виглядав досить некорисно, хотяй з початку під впливом іхтаріану відно було значний добрий успіх.

3. При звичайнім нежиті (*conjunctivitis simplex*) без кульочок в злучниці, де ходило головно о незначне виділюване слизи, о зачервленє і згрубіне злучниці, діяв іхтаріан корисно також лишень в тих случаях, де ціле ліченє не тревало довго, бо інакше тратила злучниця гладкість і напруженє, властиве здоровій тканині, пульхніла і червоніла, так що треба було перейти до ляпісу.

4. Численні случаї острого запалєня (*Ophthalmia catarrhalis*) злучниці, зі значним виділюванєм слизи, значним зачервленєм злучниці і вразливістю на сьвітло, які були властиві літови 1902-ого року, були дуже мало приступні для ліченя іхтаріаном, так що треба було майже все перейти до ляпісу, а сей діяв так корисно, що всі згадані прикрі прикмети уступали в протягу 3—5—7 днів.

5. *Conjunctivitis eczematosa, phlyctaenulosa, serophulosa* не давали ся з успіхом лічити іхтаріаном, з віємком одинокого случаю, де *rannus* обох прозорок виступав на ріжних частях прозорок, часто уступав і знов повертав, нераз займав цілі обі прозорки і уступав лише під впливом іхтаріану, коли противно всі иньші ліки,

як кальомель, ляпіс, *zincum sulfuricum*, *acidum boricum* і т. д., ді-
ляли некорисно.

Число всіх случаїв належачих до точки 2, 3, 4 і 5 вино-
сило 316.

6. В одім случаю *blenorhoea neonatorum* показав ся іхтарган
без впливу.

В загалї можна сказати, що іхтарган є корисним приростом
серед ліків в очних недугах, однакo він не в силі зробити злиш-
ними иньші ліки, уживані до тепер при трахомі і при инших за-
паленях злучниці. Особливо треба піднести, що діланє ляпісу є
енергічнійше, певнійше і значно ширше, чим діланє іхтаргану.

Начерк термінології хемічної

зладив

Др. Володимир Левицкий.



В твореню термінів хемічних треба узгляднити не лиш сторону языкову, але також і сторону мериторичну, се є треба звернути увагу на будову даної сполуки. Через се творять ся усякі трудности; запобігти їм не така легка справа, бо через се або одна або друга сторона термінології хемічної може понести шкоду. З огляду однак на істоту даних сполук і на одноцільність самої термінології треба мериторичну сторону висунути на перший план і послуговуватись подекуди термінами штучно утвореними. В тім начерку подаєм пробу термінології хемічної і то головно в части хемії, що зовесь неорганічною; в хемії органічній термінологія не представляє великих трудностей раз з огляду на більшу систематичність, а друге, що терміни є ту з малими винятками чужі і можна їх лишити без зміни (пр. метан, кетони, естри, етери, глюкози, алькалоїди і т. п., а навіть і терміни зложені, як пр. трихлорометан, трифенільокарбіноль і т. д. можна оставити без зміни). Деякі знов терміни сеї хемії, що дадуть ся перевласти на руску мову (пр. углеводень, хлороуглеводень і т. д.), можна кожної хвилі утворити на основі термінів хемії неорганічної. Важнійші з тих термінів зазначені при відповідних елементах.

Для одноцільності термінології подаєм тут кілька основ, на яких треба її оперти; основи ті приняла і затвердила секція мат. природ. лік. Наук. Тов. ім. Шевченка.

Досить часто уживане слово „кислота“ заступити треба словом **квас**; аналогічно сполуки окисів металічних з водою назвати треба

засадами (нім. Base). Соли ділити треба на **повні**, де вже Н нема, **квасні і засадові**.

Групу ОН, що характеризує засаду, рішила секція назвати „**водне-кисень**“; аналогічні групи, як NH_4 (амон), CH_3 (метиль), C_2H_5 (етиль) і т. п. називати ся муть **роднями** (sing. родень).

Як звісно, деякі елементи творять цілий ряд квасів і солей; кваси ті рішено означати так: кваси найвищі, де і О і Н приходять в найбільшій кількості, означити треба прикметником, окінченим на **овий** (згл. евий), кваси нижші прикметником, окінченим на **авий**¹⁾. Аналогічно до того соли тих квасів дістануть окінчене **ан**, згл. ин.

Пр. HClO —квас підхльоровий; его соли MClO —підхльорини²⁾.

HClO_2 —квас хльоровий; его соли MClO_2 —хльорини.

HClO_3 —квас хльоровий; его соли MClO_3 —хльорани.

HClO_4 —квас надхльоровий; его соли MClO_4 —надхльорани.

Лиш квас H_2SO_4 можна назвати сірковим або сірчанним, а гіпотетичний квас H_2CO_3 квасом углевим або угляним.

Кваси без кисня означено через додаток **водень**; пр. HCl хльороводень, H_2S сірководень. Соли тих квасів дістають окінчене **ак**; пр. FeS сірчак желізовий, AgCl хльорак срібловий.

Сполуку металю з киснем називати треба **окисом** (дву=, три=, над=) або **кисняком**; сполуку окису з елементом, що за доданем води стаєсь квасом, можна назвати або окисом або **безводником**. Де нема потреби робити поділу на сполуки **ові** (еві) та **аві**, можна місто прикметника лишити genitivus відповідного елементу.

Пр. BaO окис бару або баровий, CO окис угля, але NO окис азотовий (а не азоту), Hg_2O окис ртутавий, HgO окис ртуговий (ртутний); PbO окис оловавий, PbO_2 окис олововий (олований); N_2O_3 безводник азотавий, CO_2 безводник угля або двоокис угля (углевий).

Квас N_3H назвем квасом **азотоводевим**; его соли є **азотак**и пр. N_3Na азотак соду або содовий.

Елемент Са назвати треба **вап**, Na **сод**, Al **глин**, Si **крем**.

Родень CN або Cy назвати треба **цианом**; его сполуки є пр. CNH циановодень (квас пруский), соли того квасу є **цианяки** (пр. KCN = цианяк потасовий).

¹⁾ Такий сам поділ на сполуки „аві“ відноситься до елементів, що творять два ряди солей і окисів.

²⁾ М означає тут і дальше металі.

Елементи ділимо на групи: хлорники (F, Cl, Br, J), кисневі (O, S, Se, Te), азотники (N, P, As, Sb, Bi), угольніки (C, Si, Ti, Zr, Ce, Th), хромники (Cr, Mo, W, Ur), ванадіки (V, Nb, Ta), оловники (Ge, Sn, Pb), глиники (B, Al, Ga, In, Tl) скандники (Sc, Y, La, Yb), берильники (Be, Mg, Zn, Cd, Hg), вапники (Ca, Sr, Ba), мідники (Cu, Ag, Au), потасники (Si, Na, K, Rb, Cs), желізники (Mn, Fe, Co, Ni) і платинники (Ru, Rh, Pd, Os, Ir, Pt).

По тих загальних увагах перейдім до поазбучного перегляду усіх елементів та їх важнійших сполук.

Азот (*Nitrogenium*) N.

амоніак NH_3 .

амон (родень) NH_4 .

хлорак амонівий (сальмяк)

NH_4Cl ; аналітично сірчан,

азотан і т. д. амонівий.

сірководень амонівий NH_4SH .

трихлорак азотівий NCl_3 .

безводник підазотівий N_2O ; соли підазотини MNO .

окис азотівий NO .

двуокис азотівий NO_2 .

безводник азотівий N_2O_3 ; він дає

квас азотівий HNO_2 , якого

соли є азотини MNO_2 .

безводник азотівий N_2O_4 .

квас азотівий HNO_3 ; його соли

азотани MNO_3 .

квас азотоводевий N_3H ; його соли

азотакси MN_3 .

гідроксиамін H_3NO .

киснехлорак азотівий NOCl .

киснехлорак азотівий NO_2Cl .

вода королівська (aqua regis)

$\text{HNO}_3 + 3\text{HCl}$.

гідразін (двуамід) N_2H_4 .

сірчак азотівий N_2S_2 .

ціан CN (Cy).

ціановодень (квас пруский) HCN ;

его соли є ціаніак MCN , пр.

KCN ціаніак потасовий.

сірководень HCNS ; его соли

є сірководіаніак MCNS , пр.

KCNS сірководіаніак потасовий.

квас ціанівий CONH ; его соли

ціаніани MNCN .

квас ціанурівий $\text{C}_3\text{N}_3\text{O}_3\text{H}_3$; его

соли ціанурані пр. $\text{C}_3\text{N}_3\text{O}_3\text{M}_3$.

квас желізоціанівий H_4FeCy_6 .

ціаніак желізовопотасовий

K_4FeCy_6 .

ціаніак желізавопотасовий

K_3FeCy_6 .

хлорак ціанівий CNCl ; аналі-

тично бромак і йодак.

ціаніак органічні (нітрилі

$\text{C}_n\text{H}_{2n+1}\text{C}\equiv\text{N}$).

хлорак ціанівий $(\text{CNCl})_3$; ана-

літично бромак.

сполуки нітрові (з групою NO_2 ; пр.

нітрометан $\text{CH}_3(\text{NO}_2)$, нітроу-

глеводень, нітроальдегід і т. п.).

сполуки нітрозові (сполуки ор-

ганічні з групою NO).

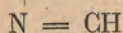
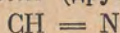
аміни (перворядні, другорядні,

треторядні, многократні, "гі-

дроаміни (з групою OH і NH)),
іміни, амідн, амідокваси, амід-
дини і т. п.

мочник (карбамід) NH_2CONH_2 .
аніліна $\text{C}_6\text{H}_5\text{NH}_2$.

аніліди; пр. $\text{C}_6\text{H}_5\text{NH}(\text{COCH}_3)$.
сполуки азові, пр. дваазові, ги-
дроазові (з групою N_2H_2),
оксизазові (з групою N_2O) і т. п.
азолі (друзолі, триазолі); пр.



піридина $\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$ і вї походні
алькальйоиди.

білок (альбумін), протеїни, про-
теїди.

Антимон (*Stibium*) Sb.

триводень антимоновий SbH_3 .
безводник антимонавий Sb_2O_3 .
соли антимонаві (пр. хльорак
антимонавий SbCl_3).

безводник антимоновий Sb_2O_5 ;
до него належить kwas анти-
моновий (метаантимоновий
 HSbO_3 і пироантимоновий
 $\text{H}_4\text{Sb}_2\text{O}_7$); его соли антимон-
нани.

антимоніль (родень) SbO .

соли антимонільові (з групою
 SbO); пр. хлорак антимоні-
льовий SbOCl .

трисірчак антимоновий Sb_2S_3 .
пятисірчак антимоновий Sb_2S_5 .
сіркоантимонани M_3SbS_4 .

Аргон A.

Арсен (*Arsenum*) As.

триводень арсеновий AsH_3 .
трихльорак арсеновий AsCl_3 .
безводник арсенавий (аршеник)
 As_2O_3 ; до него належить kwas

арсенавий H_3AsO_3 , а его соли
є арсенини M_3AsO_3 .

безводник арсеновий As_2O_5 ; его
кwas арсеновий H_3AsO_4 (кwas
ортоарсеновий; kwas метаар-
сеновий є HAsO_3 , пироарсе-
новий $\text{H}_4\text{As}_2\text{O}_7$). Соли тих
кwasів є орто-, мета-, пиро-
арсенани (M_3AsO_4 , MAsO_3 ,
 $\text{M}_4\text{As}_2\text{O}_7$).

два-, три-, пяти-сірчак арсено-
вий (As_2S_2 , As_2S_3 , As_2S_5).

сіркоарсенини M_3AsS_3 .

сіркоарсенани M_3AsS_4 .

Бар (*Barium*) Ba.

окис бару (баровий) BaO .

надокис бару (баровий) BaO_2 .

воднекисень баровий $\text{Ba}(\text{OH})_2$.

хльорак бару (баровий) BaCl_2 .

сірчак бару (баровий) BaS .

сірчан бару (баровий) BaSO_4 .

углян бару (баровий) BaCO_3 .

азотан бару (баровий) $\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$

Бариль (*Beryllium*) Be.

окис берильовий (берилу) BeO .

хльорак, сірчан берильовий і т. п.

Бор (*Borium*) B.

триводень боровий BH_3 .

трифлюорак боровий BF_3 .

кwas флюороборовий HBF_4 ; его
соли флюороборани MBF_4 .

трихльорак боровий BCl_3 .

безводник боровий B_2O_3 ; тут
належить kwas боровий H_3BO_3
і его соли борани, далі kwas
метаборовий HBO_2 (соли мета-
борани) і пироборовий $\text{H}_2\text{B}_4\text{O}_7$
(соли пироборани, пр. $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$
= пироборан содовий або
бораке).

азотак боровий BN .

сірчак боровий B_2S_3 .

трихлорак боровий BCl_3 .

Бром (*Bromum*) Br.

бромоводень HBr ; его соли бро-
маки MBr .

квас підбромавий $HBrO$; его со-
ли підбромини $MBrO$.

квас бромовий $HBrO_3$; его соли
бромани $MBrO_3$.

бромини $MBrO_2$.

бромоформ $CHBr_3$.

бромометан CH_3Br .

бромак метилену CH_2Br_2 .

Ванад (*Vanadium*) V.

квас ванадовий H_3VO_4 ; его соли
ванадани.

Вап (*Calcium*) Ca.

окис ваповий CaO .

воднекисень ваповий $Ca(OH_2)$.

флюорак ваповий CaF_2 .

хлорак, сірчан і т. п. ваповий
($CaCl_2$ $CaSO_4$ і т. п.).

фосфоран триваповий $Ca_3(PO_4)_2$.

фосфоран двуваповий $CaHPO_4$.

углян ваповий $CaCO_3$.

Візмут (*Bismuthum*) Bi.

окис візмутавий Bi_2O_3 .

соли візмутаві (пр. хлорак
візмутавий $BiCl_3$).

воднекисень метавізмутавий
 $HBiO_2$.

безводник візмутотавий Bi_2O_5 .

квас візмутотавий (мета-, орто-)
 $HBiO_3$ і $H_4Bi_2O_7$.

сірчак, трисірчак візмутотавий
 Bi_2S_3 , Bi_2S_5 .

засадові соли візмутотаві, пр. за-
садотавий азотан візмутотавий
 $Bi(NO_3)(OH_2)$.

Водень (*Hydrogenium*) H.

вода H_2O ; вода окиснена (на-
докис водневий) H_2O_2 .

Вольфрам (*Wolframium*) W.

безводник вольфрамотавий WO_3 ;

его квас вольфрамотавий

H_2WO_4 , соли вольфрамани

M_2WO_4 .

Гель (*Helium*) He.

Глин (*Aluminium*) Al.

флюорак глину (глиновий)

AlF_3 .

хлорак глину (глиновий) $AlCl_3$.

окис глину (глиновий) Al_2O_3 .

воднекисень глину (глиновий)

$Al(OH_3)$.

сірчан, сірчак і т. д. глиновий
($Al_2(SO_4)_3$, Al_2S_3 і т. д.).

алуни, пр. звичайний (сірчан
глинопотасотавий) $K_2SO_4 +$
 $Al_2(SO_4)_3 + 24H_2O$.

амонотавий, содовий і т. п.

кремани глину (глинові), пр.

ортотавий, каолін і н.

глинани пр. $KAlO_2$, $NaAlO_2$.

Гадолін (*Gadolinium*) Gd.

Галь (*Gallium*) Ga.

хлорак галотавий (галю) $GaCl_3$.

Герман (*Germanium*) Ge.

окис герману (германотавий) GeO

надокис герману (германотавий)
 GeO_2 .

сірчак герману (германотавий)
 GeS .

двуірчак герману (германотавий)
 GeS_2 .

чотироххлорак герману (герма-
нотавий) $GeCl_4$.

Ерб (*Erbium*) Er.

Желізо (Зелізо) (*Ferrum*) Fe.

окис желізотавий FeO .

окис желізотавий Fe_2O_3 .

безводник желізовий FeO_3 .
 надокис желізовий Fe_3O_4 .
 сірчан желізавий FeSO_4 .
 сірчан желізовий $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$.
 воднекисень желізавий $\text{Fe}(\text{OH})_2$.
 воднекисень желізовий $\text{Fe}(\text{OH})_3$.
 хльорак желізавий FeCl_2 .
 хльорак желізовий FeCl_3 .
 сірчак желізавий FeS .
 двусірчак желізовий FeS_2 .

Золото (*Aurum*) Au.

окис золотавий Au_2O .
 окис золотовий Au_2O_3 .
 хльорак золотавий AuCl .
 хльорак золотовий AuCl_3 .
 сірчак золотовий Au_2S_3 .
 воднекисень золотовий $\text{Au}(\text{OH})_3$.
 золотани; пр. золотан потасо-
 вий KAuO_2 , сіркозолотан со-
 довий NaAuS_2 .

Йод (*Jodum*) J.

йодоводень HJ; его соли йо-
 даки (пр. йодак потасовий
 KJ.).

безводник йодовий J_2O_5 ; его
 kwas йодовий HJO_3 , соли
 йодани MJO_3 .

kwas підйодавий HJO; его
 соли підйодни MJO.

kwas надйодовий HJO_4 ; его
 соли надйодани MJO_4 .

йодометан (йодак метило)
 CH_3J .

двуйодометан CH_2J_2 .

трийодометан (йодоформ) CHJ_3 .

чотирйодометан CJ_4 .

Інд (*Indium*) In.

хльорак інду (індовий) InCl_3 .

Ірид (*Irydium*) Ir.

Ітерб (*Ytterbium*) Yb.

Ітр (*Yttrium*) Y.

Кадм (*Cadmium*) Cd.

окис кадмовий (кадму) CdO .

воднекисень кадмовий $\text{Cd}(\text{OH})_2$.

сірчак, хльорак, йодак, сірчан
 кадмовий і т. д.

Кисень (*Oxygenium*) O.

озон O_3 .

Кобальт (*Cobaltum*) Co.

окис кобальтавий CoO .

надокис кобальтавий Co_3O_4 .

сірчан кобальтавий CoSO_4 .

воднекисень кобальтавий
 $\text{Co}(\text{OH})_2$.

арсецан кобальтавий

$\text{Co}_3(\text{AsO}_4)_2$.

окис кобальтовий Co_2O_3 .

Крем (*Silicium*) Si.

кремоводень (кремометан)

SiH_4 .

флюорак крему (кремовий)

SiFl_4 .

kwas флюорокремовий H_2SiFl_6 ;

его соли флюорокремани

M_2SiFl_6 .

хльорак кремовий SiCl_4 .

двусірчак кремовий SiS_2 .

безводник (надокис) кремовий
 SiO_2 .

kwasи кремові: ортокремовий

H_4SiO_4 (соли ортокремани

M_4SiO_4), метакремовий

H_2SiO_3 (соли метакремани

M_2SiO_3).

много-кремани, пр. $\text{Mg}_3\text{Si}_2\text{O}_7$,

$\text{Al}_2\text{Be}_2\text{Si}_2\text{O}_9$ і т. д.; тут

належить і скло (ваповопо-

тасове, ваповосодове, олово-

потасове, вапоглинопотасове

і т. д.).

Криптон Kr.

Ксенон Ks.

Лянтан (*Lanthanum*) La.

Літ (*Lithium*) Li.

окис літу (літовий) Li_2O .

воднекисень літу (літовий)

$\text{Li}(\text{OH})$.

углян літу (літовий) Li_2CO_3 .

фосфоран літу (літовий) Li_3PO_4 .

Магн (*Magnesium*) Mg.

окис магновий (магну) MgO

(магнезия).

воднекисень магновий $\text{Mg}(\text{OH})_2$.

хльорак магновий MgCl_2 .

сірчан магновий MgSO_4 .

фосфоран магновий $\text{Mg}_3(\text{PO}_4)_2$.

фосфоран амонімагновий

$(\text{NH}_4)\text{MgPO}_4$.

углян магновий MgCO_3 ; углян

магновий засадовий

$(\text{MgCO}_3)_n(\text{Mg}(\text{OH})_2)_m$.

кремани магнові $(\text{Mg}_2\text{SiO}_4$,

$\text{Mg}_3\text{Si}_2\text{O}_7$ і т. п.).

фосфора магновий Mg_3P_2 .

Манган (*Manganum*) Mn.

окис манганавий MnO .

сірчан манганавий MnSO_4 .

углян манганавий MnCO_3 .

воднекисень манганавий

$\text{Mn}(\text{OH})_2$.

окис мангановий Mn_2O_3 .

воднекисень мангановий

$\text{Mn}(\text{OH})_3$.

надокис мангановий Mn_3O_4 .

двоокис мангановий (пиролу-

зит) MnO_2

безводник мангановий MnO_3 .

безводник надмангановий Mn_2O_7 .

хльорак манганавий MnCl_2 .

хльорак мангановий MnCl_4 .

манганіни M_3MnO_3 .

манганани M_2MnO_4 (пр. ман-

ганан потасовий K_2MnO_4).

квас надмангановий HMnO_4 ;

его соли надманганани (пр.

надманганан потасовий

KMnO_4).

сірчак манганавий MnS .

сірчак мангановий MnS_2 .

соли манганові MnX_4 .

Мідь (*Cuprum*) Cu.

окис мідавий CuO .

воднекисень мідавий $\text{Cu}(\text{OH})_2$.

хльорак мідавий CuCl_2 .

сірчан мідавий CuSO_4 .

азотан, креман і т. д. мідавий

окис мідавий Cu_2O .

хльорак мідевий Cu_2Cl_2 .

воднекисень мідевий $\text{Cu}_2(\text{OH})_2$.

Молібден (*Molybdaenum*) Mo.

хльорак (дву-, три-, чотиро-,

пяти-) молібденовий MoCl_3 ,

MoCl_3 , MoCl_4 , MoCl_5 .

безводник молібденовий MoO_3 .

квас молібденовий H_2MoO_4 ;

его соли молібденани

M_2MoO_4 .

Неодим (*Neodymium*) Nd.

Неон Ne.

Нікель (*Niccolum*) Ni.

окис ніклявий NiO .

воднекисень ніклявий

$\text{Ni}(\text{OH})_2$.

сірчан ніклявий NiSO_4 .

хльорак ніклявий NiCl_2 .

окис ніклевий Ni_2O_3 .

Ніоб (*Niobium*) Nb.

Олово (*Plumbum*) Pb.

хльорак олований PbCl_2 .

сірчак олований PbSO_4 .

окис олований (глейта) PbO .

воднекисень олований

$\text{Pb}_2\text{O}(\text{OH})_2$.

сірчак олований PbS .

воднекисень олововий (оловяний) $\text{Pb}(\text{OH})_2$.

хльорак олововий (оловяний) PbCl_4 .

углян олововий (оловяний) PbCO_3 .

хроман олововий (оловяний) PbCrO_4 .

окис олововий (оловяний) PbO_2 .

оловани M_2PbO_3 (пр. олован потасовий K_2PbO_3).

чоти роокис олововий (мінїя) Pb_3O_4 .

триокис олововий (оловяний) Pb_2O_3 .

Осм (*Osmium*) Os.

чоти роокис осмовий (осму) OsO_4 .

османи M_2OsO_4 .

Паляд (*Palladium*) Pd.

хльорак палядавий PdCl_2 .

йодак палядавий PdJ_2 .

хльорак палядовий PdCl_4 .

хльоропалядани M_2PdCl_6
(пр. хльоропалядан потасовий K_2PdCl_6).

Плятина (*Platinum*) Pt.

хльорак плятиनावий PtCl_2 .

хльорак плятиновий PtCl_4 .

квас хльороплятиновий H_2PtCl_6 ;
соли хльороплятинани M_2PtCl_6 .

воднекисень плятиновий $\text{Pt}(\text{OH})_4$.

окис плятиनावий PtO .

окис плятиновий PtO_2 .

Потас (*Kalium*) K.

воднекисень потасу (потасовий)
їдей потаж KOH .

хльорак, бромак, йодак потасу
(потасовий) KCl , KBr , KJ .

підхльорин потасу (потасовий)
 KClO .

хльоран потасовий KClO_3 .

надхльоран потасовий KClO_4 .

сїрчан потасовий K_2SO_4 .

азотин потасовий KNO_2 .

азотан потасовий (салїтра індійска) KNO_3 .

углян потасовий (потаж) KCO_3 .

метаарсенин потасовий KAsO_2 .

Празеодим (*Praseodymium*) Pr.

Рад (*Radium*) Rd.

Род (*Rodium*) Rh.

окис родавий RhO .

окис родовий RhO_2 .

Ртуть (*Hydrargyrum*) Hg.

окис ртутавий Hg_2O .

хльорак ртутавий (кальомель)
 Hg_2Cl_2 .

йодак ртутавий Hg_2J_2 .

окис ртутовий (ртутний) HgO .

хльорак ртутовий (ртутний)
 HgCl_2 (сублімат)

йодак, сїрчак, сїрчан і т. д.

ртутовий (ртутний) HgJ_2 ,
 HgS , HgSO_4 .

Рубід (*Rubidium*) Rb.

Рутен (*Ruthenium*) Ru.

чоти роокис рутеновий RuO_4 .

рутенани M_2RuO_4 .

Самар (*Samarium*) Sa.

Селен (*Selenium*) Se.

селеноводень SeH_2 ; его соли
селенаки M_2Se (пр. селенак
потасовий K_2Se).

безводник селенавий SeO_2 ; его
квас селенавий H_2SeO_3 ,
соли селенини M_2SeO_3 .

квас селеновий H_2SeO_4 ; соли
селенани M_2SeO_4 .

Сїрка (*Sulphur*) S.

сїрководень H_2S , его соли сїр-
чаки M_2S .

многосірчак водня H_2S_n .
 хльорак сірки S_2Cl_2 .
 двухльорак сірки SCl_2 .
 чотирохльорак сірки SCl_4 .
 безводник сірковий (сірчаний)
 SO_3 .
 триокис сірки S_2O_3 .
 kwas підсірковий H_2SO_3 ; его
 соли підсірчини M_2SO_3 (повні
 і kwasні; пр. підсірчин содо-
 вий Na_2SO_3).
 kwas сірковий H_2SO_3 ; его соли
 сірчини M_2SO_3 (повні і kwasні).
 kwas сірковий або сірчаний
 H_2SO_4 ; его соли сірчани
 M_2SO_4 (повні і kwasні).
 kwas надсірковий або надсірча-
 ний HSO_4 ; его соли надсір-
 чани MSO_4 .
 kwas нітрозильосірковий (сір-
 чаний) SO_5NH .
 kwas пиросірковий (сірчаний)
 $H_2S_2O_7$; его соли пиросірчани
 $M_2S_2O_7$.
 kwas тіосірковий (сірчаний)
 $H_2S_2O_3$; его соли тіосірчани
 $M_2S_2O_3$.
 kwas дву-, три-, чотиро-, пя-
 ти-тіосірковий (сірчаний)
 $H_2S_2O_6$, $H_2S_3O_6$, $H_2S_4O_6$,
 $H_2S_5O_6$; їх соли дву-, три-,
 чотиро-,пяти-тіосірчани
 $M_2S_2O_6$, $M_2S_3O_6$, $M_2S_4O_6$,
 $M_2S_5O_6$.
 меркаптани (сіркоалькоголі)
 пр. $C_nH_{2n+1}SH$.
 сіркоальдегиди і сіркетони.
 сульфи пр. $(C_nH_{2n+1})_2SO$.
 воднекисень сулфіновий пр.
 $(C_nH_{2n+1})_3S(OH)$.
 сульфональ $(CH_3)_2C(SO_2C_2H_5)_2$.

сірковкваси товщені, пр. kwas
 сіркооцтовий CH_3COSH .
 kwas трисіркоуглевий (угляний)
 H_2CS_3 .
 сіркофенолі пр. C_6H_5SH .
Сканд (*Scandium*) Sc.
Сод (*Natrium*) Na.
 воднекисень соду (содовий,
 їдка сода) NaOH.
 хльорак, бромак, йодак содовий
 $NaCl$, $NaBr$, NaJ .
 підхльорин содовий $NaClO$.
 сірчан содовий $NaSO_4$.
 азотан содовий (салітра чілій-
 ска) $NaNO_3$.
 фосфоран одно-, дву-, три-со-
 довий NaH_2PO_4 , Na_2HPO_4 ,
 Na_3PO_4 .
 пироборан содовий (бораке)
 $Na_2B_4O_7$.
 углян содовий (повний, сода)
 Na_2CO_3 .
 углян содовий (кwasний)
 $NaHCO_3$.
 кремани содові і т. д.
Срібло (*Argentum*) Ag.
 окис, хльорак, сірчак, сірчан,
 азотан (ляпіс) срібла (срі-
 бловий) Ag_2O , $AgCl$, Ag_2S ,
 Ag_2SO_4 , $AgNO_3$.
Стронт (*Strontium*) Sr.
 окис стронту (стронтовий)
 SrO .
 двоокис стронту (стронтовий)
 SrO_2 .
 воднекисень стронту (стронто-
 вий) $Sr(OH)_2$.
 хльорак стронту (стронтовий)
 $SrCl_2$.
Таль (*Thallium*) Tl.
 хльорак талаявий $TlCl_3$.

окис талявий Tl_2O_3 .

хльорак талевий $TlCl$.

окис талевий Tl_2O .

Танталь (*Tantalium*) Ta.

Телюр (*Tellurium*) Te.

телюроводень TeH_2 ; его соли
телюраки TeM_2 .

безводняк телюравий TeO_2 .

квас телюравий H_2TeO_3 ; его

соли телюрини M_2TeO_3 .

безводник телюровий TeO_3 .

квас телюровий H_2TeO_4 ; его

соли телюрани M_2TeO_4 .

Терб (*Terbium*) Tb.

Тітан (*Titanium*) Ti.

чотирихльорак титановий $TiCl_4$.

двуокис титановий TiO_2 .

квас ортотитановий H_4TiO_4 ; его

соли титанани M_4TiO_4 .

Тор (*Thorium*) Th.

Туль (*Thulium*) Tu.

Уголь (*Carbonium*) C.

ацетилен C_2H_2 .

метан (газ болотний) CH_4 .

окис угля (углевий) CO.

безводник (двуокис, двукисняк)

угля (углевий) CO_2 .

квас угляний або углевий

H_2CO_3 ; его соли угляни повні

M_2CO_3 і квасні $MHCO_3$.

двусірчак угля (углевий, угля-
ний) CS_2 .

киснесірчак угля (углевий,
угляний) COS.

сполуки товщеві (ланцові,
аліфатичні) і ароматичні (ци-
клічні, перстeneві).

углеводень (plur. углеводні); пр.
насичені C_nH_{2n+2} (метан,
етан і т. д.), ненасичені
(етени або етилени) C_nH_{2n} ,

ацетилен (етіни) C_nH_{2n-2} ,
ароматичні (бензол C_6H_6 ,
і т. д.).

родні: метиль CH_3 , етиль C_2H_5 ,
пропиль C_3H_7 і т. д.

алькоголі; одноатомові, двуато-
мові (гліколі), триатомові
(гліцерини), чотириатомові
і т. д., насичені, ненасичені,
ароматичні, фенолі і т. д.
етери (прості і мішані); пр.
етер етильовий (сірчанний)
(C_2H_5) $_2O$.

альдегиди (пр. муравельний
 HCN , оцтовий CH_3COH
і т. д.).

кетони; пр. ацетон $(CH_3)_2CO$.

кваси товщеві і ароматичні
(характеристична група кар-
бокись $COOH$), одно-, дву-,
засадові, насичені, ненаси-
чені. пр.

квас муравельний
 HCN ; соли муравляни
 $MSOON$.

квас оцтовий CH_3COON ; соли
оцтани (повні і квасні) пр.
 $MC_2H_3O_2$.

квас масловий $C_4H_8O_2$; соли
масляни.

квас олійний $C_{18}H_{34}O_2$; соли
оліяни.

квас молочний; соли молочани.

квас щавовий $(COOH)_2$; соли
щавани.

квас бурштиновий; соли бур-
штинани.

квас яблочний $C_4H_6O_5$; соли
яблочки.

квас винний $C_4H_6O_6$; соли ви-
нани.

квас бензоєсовий C_6H_5COOH ;
соли бензоєсани.

квас саліцильовий; соли салі-
циляни.

квас мочеви $C_5H_4N_4O_3$; соли
мочани.

квас фталевий і т. д. і т. д.

фенольокваси, двуфенольокваси,
альдегольокваси, кваси кето-
нові, сірчєкваси, оксисірко-
кваси, кваси сульфонові

(соли сульфонати) і т. д. і т. д.

естри; неорганічні (повні і ква-
сні), пр. хлєраки, бромаки,
йодаки, сірчани (метильовий,
етильовий і т. д.), азотани
пр. азотан гліцерини або нї-
трогліцерина $C_3H_5(ONO_2)_3$
і т. д.; органічні (пр. мур-
вян етильовий, оцтан ети-
льовий і т. д.).

хінони (оксєхінони, антрахінони
пр. алїзарина).

углеводани; ту належать глі-
кози $C_6H_{12}O_6$ (пр. цукор гро-
зновий, галактоза, сорбіноза),
тростинники або сахарози
 $C_{12}H_{22}O_{11}$ (пр. цукор трости-
новий, молочний і мучки
 $(C_6H_{10}O_5)_n$ (мучка, крохмаль,
целюльоза, декстрина)¹⁾.

Уран (*Uranium*) Ur .

окис уранавий UrO_2 .

окис урановий UrO_3 .

ураніль (родень) UrO_2 .

соли уранаві, уранові і уранї-
леві (пр. хлєрак уранїлевий
 UrO_2Cl_2).

уранани, пр. двууранани
 $M_2Ur_2O_7$.

живиця уранова (пехблєнда).

Флюор (*Fluorum*) Fl .

флюороводень HFl ; єго соли
флюораки NFl (пр. флюорак
ваповий $CaFl_2$).

Фосфор (*Phosphorus*) P .

триводень фосфоровий (фосфору)
 PH_3 .

фосфон (родень) PH_4 .

фосфазин P_2H_4 .

пятихлєрак фосфоровий PCl_5 .

трихлєрак фосфоровий PCl_3 .

киснехлєрак фосфоровий $POCl_3$.

безводник фосфоровий P_2O_5 .

квас (орто) фосфоровий H_3PO_4 ;

єго соли фосфорани M_3PO_4 .

квас пирофосфоровий H_4PO_7 ;

єго соли пирофосфорани

(повні і квасні).

квас метафосфоровий HPO_3 ;

єго соли метафосфорани

MPO_3 .

безводник фосфоровий P_4O_6 .

квас фосфоровий H_3PO_3 ; єго

соли фосфорини (одномета-

леві MH_2PO_3 і двуметалеві

M_2HPO_3).

безводник фосфорово фосфоро-
вий P_2O_4 .

квас підфосфоровий $H_4P_2O_6$; єго

соли підфосфорани $M_4P_2O_5$

і $M_3H_3P_2O_6$.

Хлєр (*Chlorum*) Cl .

хлєроводень HCl (з водою квас

сільний); єго соли хлєраки

MCl (пр. хлєрак глиновий

$AlCl_3$, баровий $BaCl_2$, маїно-

¹⁾ Інші сполуки органічні творити можна аналогічно (після правил термі-
нології неорганічної); всіх неможливо тут виписувати.

вий MgCl_2 , срібловий AgCl
і т. д.).
безводник підхлоровий Cl_2O .
квас підхлоровий HClO ; його
соли пілхлорини MClO .
безводник хлораво-хлоровий
 Cl_2O_4 .
квас хлоравий HClO_2 ; соли
хлорини MClO_2 .
квас хлоровий HClO_3 ; його соли
хлорани MClO_3 (пр. хлоран
потасовий KClO_3).
квас надхлоровий HClO_4 ; його
соли надхлорани MClO_4 .
хлороуглеводні пр.
 $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}\text{Cl}$.
трихлорометан (хлороформ)
 CHCl_3 .
хлорак етилену $(\text{CH}_2\text{Cl})_2$.
квас хлоромуравельний
 ClCOOH .
квас трихлорооцтовий
 CCl_3COOH .
хлорак оцтовий CH_3COCl .
Хром (*Chromium*) Cr .
безводник хромовий CrO_3 .
квас хромовий H_2CrO_4 ; соли
хромани M_2CrO_4 і много-
хромани $\text{M}_2\text{CrO}_4 + x\text{CrO}_3$.
квас двухромовий $\text{H}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$; його
соли двухромани M_2CrO_7
(пр. двухроман потасовий
 $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$).
окис хромовий Cr_2O_3 .
хлорак хромовий CrCl_3 .
сірчан хромовий $\text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3$.

воднекисень хромовий $\text{Cr}(\text{OH})_3$.
окис хромавий CrO .
воднекисень хромавий $\text{Cr}(\text{OH})_2$.
хлорак хромавий CrCl_2 .
Цез (*Caesium*) Cs .
Цер (*Cerium*) Ce .
Цина (*Stannum*) Sn .
окис цинавий SnO .
воднекисень цинавий $\text{Sn}(\text{OH})_2$.
соли цинаві, пр. хлорак цина-
вий SnCl_2 .
окис циновий SnO_2 .
квас циновий H_2SnO_3 ; соли ци-
нани M_2SnO_3 (пр. цинан со-
довий Na_2SnO_3).
соли цинові, пр. хлорак цино-
вий SnCl_4 , флюорак циновий
 SnFl_4 .
сірчак цинавий SnS .
сірчак циновий SnS_2 .
Цинк (*Zincum*) Zn .
воднекисень цинковий $\text{Zn}(\text{OH})_2$.
хлорак цинковий ZnCl_2 .
сірчан цинковий ZnSO_4 .
углян цинковий ZnCO_3 .
креман цинковий Zn_2SiO_4 .
Циркон (*Zirconium*) Zr .
чотирифлюорак цирконовий
(циркону) ZrFl_4 .
двуокис цирконовий ZrO_2 .
воднекисень цирконовий
 ZrH_2O_3 .
сірчан цирконовий $\text{Zr}(\text{SO}_4)_2$.
циркони, пр. цирконан пота-
совий K_2ZrO_3 .
креман цирконовий ZrSiO_4 .

Бібліографія і хроніка математично-фізична.



А. Кнесер: Lehrbuch der Variationsrechnung (Braunschweig, Vieweg u. Sohn 1900. ст. XIV.+311).

Від часу видання книжки Moigno-Lindelöf'a не вийшов протягом 30 літ анї в Німеччині анї у Франції ніякий підручник рахунку варіаційного. Та за сей час теорія сего рахунку, завдяки Вейерштрасови і єго ученикам (в першій мірі Zermelo), значно поступила в перед і тому то автор прислужив ся дуже публіці математичній через виданє сего підручника. В книжці тій, що обіймає вісім розділів і численний спис літератури, автор стоїть вповні на становищу Вейерштрасса.

1. Шуканє максімів та мінімів (або — як автор каже — екстремів) інтегралів зводиться до шукання екстремів інтегралу:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x \ y \ x' \ y') dt \quad (x = \varphi(t), y = \psi(t)).$$

де F є однородною функцією першого степеня що до x' і y' , а єї характеристична власність є:

$$F(x, y, \alpha x', \alpha y') = \alpha F(x \ y \ x' \ y').$$

Конечною умовою, щоби існував екстрем, є:

$$\delta J = 0.$$

Ся умова є рівноважна з рівняннями:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

Криву, що сповняє ті умови, називає автор „Extremale“ інтеграла J.

Дальші істновання екстрему дає друга варіяція інтегралу: $\delta^2 J$, яку можна написати в виді (після Вейерштрасса):

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[F_1 \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 + F_2 \omega^2 \right],$$

або:

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} F_1 \left[\frac{d\omega}{dt} + \frac{u\omega}{F_1} \right]^2 dt,$$

де:

$$\left(F_2 + \frac{du}{dt} \right) F_1 - u^2 = 0.$$

Звідси слідує, що про знак другої варіяції $\delta^2 J$, отже про се, чи буде інтеграл мав максимум або мінімум, рішає знак на F_1 .

Щоби однак всі ті умови були і конечні і достаточні, треба, щоби в інтервалі $(t_0 \dots t_1)$ не було точок спряжених, т. є. таких точок, де в їх оточенню криві сусідні перетинають первісну криву (умова Якобі та Вейерштрасса). Умовою на се, в щоби певне рівняне:

$$D(t_0, t) = 0$$

в інтервалі $(t_0 \dots t_1)$ не мало інших корінїв, як лиш $t = t_0$.

2. Того рода досліди (досліди про беззглядні екстремуми) обнимають ст. 1.—116. книжки. Дальшу її часть часть посвятив автор т. зв. зглядним екстремумам, т. є. найденню умов, коли інтеграл:

$$J = \int F(x, y, x', y') dt$$

має максимум або мінімум, коли другий інтеграл:

$$K = \int G(x, y, x', y') dt$$

має приписану вартість (загальніша задача ізопериметрична). Ту конечними умовами являють ся: 1) умова Якобі, щоби рівняне $D(t_0, t) = 0$ не мало в інтервалі $(t_0 \dots t_1)$ інших корінїв, як лиш $t = t_0$, при чім:

$$\left. \frac{\partial D(t_0, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} \leq 0$$

2) постійність знаку вираження :

$$E \left(x y x' y' \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \right),$$

де :

$$E \left(x y x' y' \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy}{dt} - F \left(x y \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \right)$$

($x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, t параметр, що належить до дороги, по якій ся інтегрує).

3) можливість т. зв. конструкції Вейерштрасса кривих екстремальних (ст. 132 sqts).

3. В дальшій тягу розбирає автор нетяглі розв'язки, т. є. розбирає можливість, коли можна інтеграл J привести до абсолютного екстрему при помочи кривої, що складаєсь зі скінченного числа кусників (ліній ломана), з яких кождий має свойства приписувані давнійше цілій кривій; т. є. x і y є вздовж кожного кусника тяглі функції параметру t , а так само їх перші і другі похідні. Показує ся, що і ту остають виследи виведені для безглядних екстремів.

Розсліди розширає автор дальше на случаї, коли в інтеграл входять і висші похідні, т. є. коли інтеграл має форму:

$$J = \int F(x x' x'' \dots x^{(n)}, y y' y'' \dots y^{(n)}) dt.$$

В тім случаю криву екстремальну дають рівняня $P = 0$, $Q = 0$, де в загалі:

$$P_m = \sum_{\alpha}^{0, n-m} (-1)^{\alpha} \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} \frac{\partial F}{\partial x^{(m+\alpha)}}$$

$$Q_m = \sum_{\alpha}^{0, n-m} (-1)^{\alpha} \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} \frac{\partial F}{\partial y^{(m+\alpha)}}$$

при чім: $P = P_0$, $Q = Q_0$. Сі умови можна заступити в случаю, коли положимо:

$$x = t, \quad F dt = f[x y y' \dots y^{(n)}] dx$$

рівнанєм:

$$Q(f) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0,$$

яке екстремальні криві також сповняти мусять.

Другу умову для екстрему дає знак функції E (анальогічно, як в горі).

І ту можна ввести загальну ізопериметричну задачу, т. є. шукане згладного екстрему інтегралу J , наколи другий інтеграл:

$$K = \int G(x, x', \dots, x^{(n)}, y, y', \dots, y^{(n)}) dt$$

має приписану вартість.

4. Опісля переходить автор до зовсім загальної задачі. Най $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ є незвісні функції x , які сповняють $(r+1)$ рівнянь:

$$\Psi_\alpha(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{dy_0}{dx}, \frac{dx_1}{dx}, \dots, \frac{dy_{n-1}}{dx}) = 0 \quad (\alpha = 0, 1, \dots, r)$$

Вартости величин $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ є дані для $x = x_0$, а деякі з них є дані і для $x = x_1$. Визначити незвісні функції так, щоби вартість y_0 для $x = x_1$ була екстремом. — Очевидно, що kwestія визначення екстремів є ту о много більше скомплікована і вимагає більше умовних рівнянь, як передше. Рівняня ті є типу:

$$\Omega = \sum_{\alpha}^{0,r} \varphi_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 0$$

і:

$$\Omega_{\gamma} \Big|_{t_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_{\beta}} - \frac{d\Omega_{\beta}}{dt} = 0,$$

де:

$$\Omega_{\beta} = \frac{\partial \Omega}{\partial y'_{\beta}};$$

$\varphi_{\alpha}(y_0, y_1, \dots, y_n, y'_0, y'_1, \dots, y'_n) = 0$ є то рівняня Ψ_{α} , де місто x написано y_n , наколи $x, y_0, y_1, \dots, y_n$ є тяглі функції параметру t здовж даного n -розмірового твору.

5. Послїдна часть книжки обнимає максіма і мініма двократних інтегралів:

$$J = \int_{\sigma} \int \Phi(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v) du dv$$

здовж поверхні σ , де x, y, z є функції двох параметрів u, v і де:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = x_v.$$

Конечною умовою істновання екстремів є істнованє трох рівнянь :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_u} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_v} \right) = 0.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_u} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_v} \right) = 0.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_u} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_v} \right) = 0.$$

Очевидно, що і ту крім беззглядних екстремів істнувати можуть і екстрєми зглядні, наколи інтеграл J є звязаний з анальогічним інтегралом :

$$K = \int_{\sigma} \int \Phi(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v) du dv.$$

Про достаточні умови рішає друга варіяція; умови ті подав Brunacci. Ту виступає анальогічна функція E , як в горі, якої знак рішає.

Так отже коротко подали ми зміст сеї книжки і дорогу, якої придержував ся автор. Для доповнення треба додати, що автор цілий виклад ілюстрував численними примірами; з них опрацював він дуже обширно 15 задач, які представляють будь-то історичний, будь теоретичний інтерес. Згадаю приміром теорію найкоротшої лнії, чи то на площі, чи на поверхнях (лінії геодезичні). задачі ізопериметричні, брахістохрону, лінєю ланцову, фігуру рівноваги пружини, вид каплі etc. Автор узгляднив численну літературу (аж до хвилі видання книжки); новіших дослідів Гільберта і Osgood'a книжка ся не узглядняє, так само, як не згадає між численною літературою роботи Остроградского з р. 1834.

Книжка представляє ся під кожним зглядом дуже хорошо і надає ся дуже добре яко підручник, тим більше, що заповнює велику люку, яка істнувала в літературі математичній на поли рахунку варіаційного через кілька десятків літ. Люку ту в части заповнив твір Pascal'a з 1899, а побіч него сьміло стати може твір Кнезера (професора університету в Юреві); за сей твір авторови належить ся зі сторони публіки математичної велика подяка. *В. Л.*

K. Hensel u. G. Landsberg. Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen (Leipzig, B. G. Teubner 1902. ст. XVI.+707).

До значного числа підручників про функції алгебраїчні прилучуєсь новий підручник; при оцінці его рішає в першій мірі ста-

новиско, на яким стоять автори та яке зазначають самі у вступі. В останніх літах, завдяки працям Вейерштрасса, Кронекера т. н. взяв гору погляд, що теорію функцій алгебраїчних найлегше розсліджувати при помочі арифметичних розважань та при помочі результатів з теорії функцій, яку Вейерштрасс і так заритметизував; через сей погляд теорія функцій алгебраїчних стала посвоячена з загальною теорією алгебраїчних чисел і поверхний. На такім функційно-чисельнім становиску станули в тій книжці обидва автори, беручи під увагу всі функції алгебраїчні одної Рімановської кляси або тіла, а рівночасно уживаючи до помочі аналітичних метод переведення функцій. Велику ролю має ту понятє подільности, якого розширене позволяє в повні опанувати збір всіх функцій алгебраїчних одного тіла.

Книжка складає ся з шістьох частин: 1. розпросторене функцій алгебраїчних на поверхні Ріманна (8 викладів). 2. тіла алгебраїчних функцій (5 викладів). 3. алгебраїчні подільники і теорем Ріманна-Роха (9 викладів). 4. алгебраїчні криві і твори (5 викладів). 5. кляси алгебраїчних творів (4 виклади). 6. алгебраїчні реляції між інтегралами Абеля (6 викладів). На кінці книжки доданий коротенький начерк теорії функцій алгебраїчних від часів Абеля і Якобі до арифметичних метод Дедекінда і Вебера. В середині представлення теорії функцій алгебраїчних, довкола якої цілий виклад ся обертає, стоїть теорія подільників; з неї випливає чисто арифметичне узаasadнене теорему Ріманна-Роха і пливуче з сего узаasadнене теорему Абеля, теорії інтегралів Абеля і їх періодів, уступи, що вповняють третю часть підручника; теорем Ріманна-Роха випроваджений раз на основі розслідів тіла алгебраїчного $K(u)$ і его родини, другий раз яко вислід реляцій, що існують між інтегралами Абеля. Теорем Абеля і теорія інтегралів ведуть до проблемів відвернення тих інтегралів т. є. до функцій Абелевих, що — як легко ся догадати — творять послідний уступ сеї дуже інструктивної книжки. Книжка ся не лишає ані одної kwestії і єї вислідів, бо як самі автори зазначають, змаганем їх було представити цілу теорію без ніяких т. зв. улешень і подати такі методи, які би надавали ся і до случаїв загальних і до спеціальних так, щоби в данім разі дійсно можна було і рахунки перевести. Через се книжка стала обемиста, але і позжиточна, особливо до т. зв. „Selbststudium“.

В. Л.

P. Barbarin. La géométrie non euclidienne. (Paris, C. Naud, 1902. ст. 79).

Книжка ся належить до видань т. зв. видавництва „Scientia“, про яке була згадка в Збірнику мат. прир. VIII. 2. — Великий розвиток та значіне геометрії неевклідової, яке завдячує она ученим тої міри, що Лобачевський, Bolyai, Riemann, Beltrami, Helmholtz, Tilly, Klein, Cayley, Lie, Poincaré т. н., та значіне, яке геометрія та має для нас під зглядом теорії пізнання, вимагає, щоби бодай в загальних начерках її вислїди стали власністю цілої суспільности; подекуди, пр. в Швайцарві, є она предметом науки шкіл середних. Найбільше значіне її в тім, що она показує, що догматичне поняття простору, яке до нині усяди панує, не є одиноким, та хто знає, чи оно є дійсно правдиве. Та подати в начерку погляд на метажеометрію є дуже тяжко, а найбільша трудність є як раз у в тім, що чоловік так привик до нинішнього погляду просторного, до теорії ліній рівнобіжних, що не так легко дасть ся переконати, що і иньші погляди є можливі. В невеличкій своїй книжочці автор щасливо поборов сю трудність, показавши історично, яку судьбу переходила справа рівнобіжності ліній від часів гевія старинного світа Евкліда до великанів нинішнього математичного світа, як Лобачевський та Riemann.

Сей трактат не є вправді так основний, як пр. великий трактат Кляйна, але яко елементарний трактат можна його ставити на рівні з трактатом Mansiona. Виклад дуже інструктивний, украшений відбиткою з „елементів“ Евкліда та деякими портретами; одна лиш є хиба, а се, що автор підніс високо заслуги Tilly'ого (Француза), а промовчав імена такі, як Beltrami, Helmholtz та Lie, що немало причинили ся до поступу метажеометрії. Місто тяжких термінів „géométrie lobatschewskienne“ та „riemannienne“ ліпше уживати термінів Кляйна „геометрія гіперболічна“ та „еліптична“ (геом. евклідова = геом. параболічна).

B. Л.

G. Loria. Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. (Leipzig, B. G. Teubner 1902. XXI+744 ст.+17 таблиць); übers. von F. Schütte.

В прекрасній сій книжці подав знаменитий італійський учений перегляд всіх кривих плоских, алгебраїчних та переступних, які в протягу віків увійшли в геометрію. Книжка ся обіймає сім великих розділів, з яких кождий розпадаєсь на кілька або й кільканацять уступів. Найкоротший є розділ перший, що в трох уступах обіймає просту, коло та криві стіжкові, та і то більше з історич-

ного становища; очевидно автор не думав тих творів розбирати ближше, тому, що до тих творів маємо нині множество усяких підручників. За се тим основніше представив всі інші криві, що звичайно в підручниках геометрії лиш принагідно є трактовані. Я не маю ціли розбирати основно цілого змісту сеї книжки, згадаю лиш коротко, що розділ другий обнімає криві третього порядку (в 14 уступах), розділ третій криві четвертого порядку (16 уступів), розділ четвертий спеціальні криві вишого порядку (6 уступів), пятий спеціальні алгебраїчні криві якого небудь порядку (19 уступів), шестий криві переступні (25 уступів), розділ сьмий криві виведені (12 уступів). Кожний розділ починаєсь загальною теорією і поділом відповідних кривих, а опісля слідуєть описи поодиноких кривих даної групи та їх власности. Нема дословно кривої, яка-б не найшла в тій книжці своєї монографії, без огляду на се, чи крива та представляє математичний інтерес, чи лиш може фізикальний; тому то по при криві, що мають інтерес математичний, як пр. конхоїди (що виступають в квестії поділу кута на три части), находимо ту криві Lissajous, герпольгодиї, криві електромагнетні etc. Книжку кінчить короткий погляд на історичний розвиток теорії кривих плоских, шкїц справді прекрасний, як в загалі всі історично математичні начерки заслуженого автора, та погляд на т. зв. криві паналгебраїчні; так називає автор криві інтегральні незведимого рівняня ріжничкового першого порядку:

$$F(x, y) \equiv \sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y) y^{n-r} = 0.$$

Автор показує, що ті криві мають ряд свойств аналогічних до свойств кривих алгебраїчних.

Книжку кінчить спис імен та річий і збірка 17 таблиць з 174 хорошо викінченими фігурами (з показчиком). Зверхна її форма (з німецьким переводі увійшла она в збірку підручників математичних, видаваних звісною фірмою В. G. Teubner в Липску) дуже гарна. Взагалі книжка ся робить незвичайно миле і додатне вражінє і подивляти треба працю автора, що підняв ся опрацьованя так обширного материялу і що так красно свою ціль осягнув. В. Л.

E. Borel. Leçons sur les séries à termes positifs. (Paris, Gauthier-Villars 1902. VI+91).

Се з черги четверта книжка французского математика, що відносить ся до теорії функцій (згадки про три попередні порівнай

Збірник мат. пр. том VI. 2 et sqts); обіймає она в шістьох розділах виклади, що їх автор читав в р. 1900/01 в „Collège de France“.

Розділ перший говорить про збіжність рядів, зложених зі сталих членів (мова ту, як взагалі в цілій книжочці, виключно про ряди з членами додатними); автор розбирає ту критерія збіжності першого і другого виду (першого, де виступає лиш один член, пр. $\sqrt[n]{u_n}$ (Cauchy), другого, де виступають два члени $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (d' Alembert)) Cauchy, d' Alembert'a, Bertrand'a і теореми P. du Bois-Reymond'a та Hadamard'a; теореми ті показують, що наколи маєм ряд дуже слабо збіжний (розбіжний), то можна его все зробити дуже добре збіжним (розбіжним), наколи ся помножить его через величини, які необмежено ростуть (маліють). Щоби в случаю збіжності було:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(n) u_n] = 0,$$

де $\varphi(n)$ є величина необмежено ростуча, вистане (і се є необхідна вимога збіжності), щоби було:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Розділ другий займаєсь збіжністю інтегралів. Ту виступають слідуочі критерія збіжності. Наколи маєм функцію маліуючу

$f(x)$ (все додатну), то щоби інтеграл $\int_a^\infty f(x) dx$ був збіжний, є конечно, щоби:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = 0.$$

Дальші критерія подав Єрмаков. Інтеграл $\int_a^\infty f(x) dx$ є збіж-

ний, наколи для дуже великого x є постійно:

$$e^x f(e^x) < k f(x), \quad k < 1;$$

на случай $e^x f(e^x) > k f(x), \quad k > 1$

інтеграл сей є розбіжний. З сего виходить далі теорем, який подав еще Cauchy, а котрий звучить:

Після сего, чи є збіжний чи ні інтеграл:

$$\int_a^\infty f(x) dx,$$

є збіжний, або ні, ряд:

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$$

В розділі третім розбирає автор теорію росту функцій (croissance). Ту творить автор вперед функцію $g(x)$, що для безконечно много вартостей змінної дуже мало ся ріжнить від e^x , а для безконечно много иньших вартостей x дуже мало ся ріжнить від e^{e^x} . Функція така росте — як кажемо — дуже неправильно. Противно функція росте правильно, наколи її вартости ростучі дадуть ся порівнати з функціями простими (прим. коли $e^{x^q} > \varphi(x) > e^{x^{q'}}$, $q > q'$, то $\varphi(x)$ росте правильно).

Розділ четвертий подає критерія збіжності рядів подвійних і інтегралів многократних. І так ряд

$$\sum \sum v_{\alpha\beta}$$

є збіжний, наколи:

$$v_{\alpha\beta} < \frac{1}{(\alpha + \beta)^2 + q} \quad q > 0$$

а розбіжний, наколи:

$$v_{\alpha\beta} > \frac{1}{(\alpha + \beta)^2}.$$

Критерію сю можна узагальнити в сей спосіб, що згаданий ряд буде збіжний для:

$$v_{\alpha\beta} < \frac{1}{\alpha^\sigma + \beta^{1/\sigma}} \quad \sigma > 3.$$

Для інтегралів існують такі критерія: інтеграл

$$J = \int \int \frac{dx dy}{x^\alpha + y^\beta}$$

є збіжний тоді, коли:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1.$$

Для інтегралу многократного:

$$K = \int \int \dots \int \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{x_1^{\alpha_1} + x_2^{\alpha_2} + \dots + x_n^{\alpha_n}}$$

звучить ся критерия (конечна і достаточна):

$$\sum_1^n \frac{1}{\alpha_i} < 1.$$

Пятый розділ обіймає теорію збіжності рядів степенних з одною змінною.

Наколи маємо ряд:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \quad (0 < x < 1)$$

та назначимо:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \varphi(n) = n^p \quad (p \text{ додатне, вимірне або нї})$$

де p називає ся степенем сочинників, то степен функції $f(x)$ є $\omega\left(\frac{1}{p}\right)_x$ (де ω є степен функції e^x ; степен $\log x$ є ω^{-1}), символ $\left(\frac{1}{p}\right)$ значить число зближене до $\frac{1}{p}$, $\omega\left(\frac{1}{p}\right)$ є степен функції $e^{x^{\frac{1}{p}}}$.

Відворотну квестію, зі званого $\frac{p}{\omega}$ степеня функції $f(x)$ найти степен її сочинників розвязали Poincaré і Hadamard; показує ся, що ріст сочинників функції може бути дуже неправильний, хотия сама функція росте правильно.

Наколи маєм ряд:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \quad (a \text{ додатне, } 0 < x < 1)$$

а ряд: $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ є розбіжний, так що точка $+1$ є особлива для функції $f(x)$, а возьмем (після Cesàro та Apell'a) для порівняня другий такий ряд:

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots \quad 0 < x < 1,$$

де $b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$ є рядом розбіжним, то всегда буде в окруженю точки особливої:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha,$$

де:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

¹⁾ Прим. степен функції $y = x^p$ є p , функції $y = x^p \cdot x^q$ є $(p + q)$, функції $e^{x^p} \cdot x^n$ є $(\omega + p)$.

Теорем сей узагальняє ся так, що берем ряди $\frac{f(x)}{1-x}$ і $\frac{g(x)}{1-x}$ і тоді:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta, \text{ де } \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{b_0 + b_1 + \dots + b_n}.$$

Hadamard творить далі слідуєчі операції:

$$f(x) = D^0 f(x)$$

$$\int_a^x f(x) dx = D^{-1} f(x)$$

$$\int_a^x [D^{-1} f(x)] dx = D^{-2} f(x)$$

а через інтегруванє випаде:

$$D^{-m} f(x) = \int_a^x \frac{(x-z)^{m-1}}{(m-1)!} f(z) dz$$

Друга операція є D ; єї значінє є:

$$D^\alpha x^m = m^\alpha x^m$$

$$D^\alpha f(x) = \sum a_m m^\alpha x^m.$$

При їх помочи доходимо до твердження: Наколи функція $f(x)$ є скінчена і тягла, то ряд утворений з єї сочинників є або беззглядно зглядний, або (наколи би ряд не був збіжний) можна єго звести до збіжности, наколи місто $f(x)$ положимо $D^{-\varepsilon} f(x)$ (ε достатчно мале).

В розділі шестім розбирає автор ряди о більшій кількості змінних. Тут заслуговує на увагу слідуєчі теорем: Порядком функції цілковитої $F(z)$ є число ρ таке, що

$$|F(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

де ε достатчно мале, а $|r| = z$ достатчно велике. Порядком цілковитим функції

$$f(xy) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty A_{mn} x^m y^n$$

є порядок функції $f(zz)$ в z ; наколи сей порядок в x є для $f(xu_0)$ (u_0 дана вартість додатна) ϱ , то він остає і для $f(xu_1)$, де u_1 є також число цілковите яке-небудь.

Наколи $f(xu_0)$ має порядок ϱ , а $f(x_0 u)$ порядок ϱ' , то цілковитий порядок для $f(xu)$ є що найбільше $\varrho + \varrho'$.

Розділ сей кінчать деякі уваги про спряжені лучі збіжності (лучі Γ і Γ' є спряжені, наколи ряд $f(xu)$ є абсолютно збіжний для всіх вартостей (xu) таких, що x є взяті з кола Γ , y з кола Γ') і про ряди синтагматичні (Cauchy). Щоби дати понятє про

того рода ряди, возьмім ряд: $\frac{1}{1-x-y}$; він дасть ся упорядкувати в три способи:

$$a) \quad 1 + \dots + \frac{n!}{p! q!} x^p y^q + \dots \quad (p+q=n)$$

$$б) \quad 1 + (x+y) + \dots + (x+y)^n + \dots$$

$$в) \quad \frac{1}{1-x} + \frac{y}{(1-x)^2} + \dots$$

$$a) \quad \text{є збіжне для } |x| + |y| < 1, \quad б) \quad \text{для } |x+y| < 1,$$

$$в) \quad \text{для: } \left| \frac{y}{1-x} \right| < 1, \quad |x| < 1.$$

Ряди того рода є синтагматичні; в обсягах, де они є збіжні в разі угрупованя в), є они розбіжні на случай угрупованя а) або б). Ся увага Cauchy має незвичайну вагу в найновіших розслідах Mittag-Leffler'a.

В. Л.

Е. Borel. Leçons sur les fonctions méromorphes. (Paris, Gauthier-Villars, 1903. VI. + 122).

В пятій з черги книжці, що належить до циклю „Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions“, подає автор виклад теорії функцій аналітичних мероморфних, с. є. функцій аналітичних, що мають бігуни (точки особливі) не лиш в безконечности, яє т. зв. функції цїковиті, але і в скінченім віддаленю. Книжка складає ся з чотирох розділів і чотирох нот.

Перший уступ подає загальні уваги про функції аналітичні змінної зложеної, про точки особливі і про спосіб представлення тих функцій в окруженю точок особливих; головну часть сего уступу обнимає звісний теорем Mittag-Leffler'a про представлення функції аналітичної з скінченим або безконечним числом точок особливих, т. є. форму:

$$f(z) = \varphi(z) + \sum R_i(z) \quad (z = x + iy)$$

де:

$$R_i(z) = P_i\left(\frac{1}{z - a_i}\right) + Q_i(z)$$

наколи a_i є бігуни функції $f(z)$. Наколи $G(z)$ є функція ціла з місцями зеровими a_k , то представити її можна після теореми Вейерштрасса добутком функцій первих:

$$G(z) = G(0) e^{\Gamma(z)} \prod \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k} + \dots + \frac{z^p}{pa_k^p}}$$

наколи функція є порядку p , т. є. коли сума $\sum \frac{1}{|a_k^{p+1}|}$ є збіжна.

Звідси слідує важне твердження, що кождоу функцію мероморфну можна представити яко квот двох функцій цілих:

$$f(z) = \frac{F(z)}{G(z)}.$$

Другий розділ займає ся рядом Taylor'a. Подавши коротко теорію збіжності ряду:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

отже теорію Cauchy, Pringsheim'a, Lescornu (після якого відворотність границі $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ для $n = \infty$ дає луч збіжності) та Hadamard'a

(луч збіжності є $\frac{1}{l}$, де l є горішня границя вираження $u_n = \left| \sqrt[n]{a_n} \right|$

для $n = \infty$, отже для функцій цілковитих є $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$), перехо-

дить автор до студіювання функції на самім колі збіжності. Наколи функція мероморфна, представлена рядом Taylor'a, має на своїм колі лиш один бігун α , то існує тоді границя така, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\alpha};$$

наколи би існували два бігуни $\frac{1}{\alpha}$ і $\frac{1}{\beta}$, то тоді границя:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha\beta.$$

Наколи функція має бігуни $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_p}$, то тоді виражене $\sqrt[n]{\Delta_n^p}$ стремить до границі $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$, де:

$$\Delta_n^p = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \dots & a_{n+p-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{n+p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+p-1} & a_{n+p} & \dots & a_{n+2p-2} \end{vmatrix}$$

Аналогічно границя $\sqrt[n]{\Delta_n^{p+q}}$ є рівна $\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_p \varrho^q$, де:

$$\Delta_n^{p+q} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \dots & a_{n+p+q-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+p+q-1} & \dots & \dots & a_{n+2p+2q-2} \end{vmatrix}$$

$\frac{1}{\varrho}$ луч кола, в якім функція має лише бігуни прості $\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_p}$,

а $\varrho_1 = |\alpha_1|$, при чім:

$$\varrho_1 \geq \varrho_2 \geq \varrho_3 \geq \dots > \varrho_p > \varrho.$$

Горішня границя:

$$\overline{\lim}^n \sqrt[n]{\Delta_n^r} = R$$

де:

$$\Delta_n^r = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \dots & a_{n+r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+r-1} & \dots & \dots & a_{n+2r-2} \end{vmatrix}$$

а: $R = \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_{p-h} \varrho_p^{r-p-h}$, $p-h+1 \leq r < p$.

Ті твердження що до границь бігунів подав Hadamard. Теорему ті стосує автор до функцій мероморфних з цілковитими сочинниками, при чім розсліджує по при функцію:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

функцію:

$$F(z) = E(a_0) + \frac{E(10a_1)}{10} z + \dots + \frac{E(10^{n^2} a^n)}{10^{n^2}} z^n + \dots,$$

де $E(a)$ є число цілкове, що містить ся в a . Наколи $f(z)$ напишемо в формі:

$$f(z) = \sum \frac{b_n}{c_n} z^n,$$

то показує ся, що:

$$\sum \frac{b_n}{c_n} z^n \text{ і } \sum \frac{E(b_n)}{c_n} z^n$$

мають ті самі особливости.

Дальшим незвичайно важним застосованем вислідів Hadamard'a є шукане місць зєрових функцій цілих. Метода та опирає ся на звиснім твердженю Cauchy: „Наколи маєм многочлен і відворотність его розв'яжемо на ряд Taylor'a (або возьмем похідну лєогаритмічну), то луч збіжності сего ряду дає беззглядну вартість найменшого з корінїв даного многочлена“. Методу ту застосували Runge і Hadamard до функції цілої:

$$G(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad (c_0 \neq 0)$$

через розслїджуванє відвортної функції:

$$\frac{1}{G(z)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

яка є мероморфна і якої бігуни є зєрами функції $G(z)$.

Уступ третій присвятив автор теоремови Picard'a, який — як звисно — звучить:

„Наколи маєм функцію цілу $G(z)$ і дві сталі a, b ($a \neq b$), то, наколи рівнянє:

$$G(z) = a \text{ і } G(z) = b$$

не мають корінїв, $G(z)$ зводить ся до сталої“.

Теорем сей розширює Borel на функції мероморфні. Наколи $G(z)$ є функція мероморфна, а три рівнянє:

$$G(z) = a, \quad G(z) = b, \quad G(z) = c \quad (a \neq b \neq c)$$

мають обмежену скількість корінїв, то $G(z)$ зводить ся до вимірного дроба. Рівнянє, що мають обмежену скількість зер, називає автор винятковими (exceptionel); показуєсь, що функція ціла має що найбільше одно, мероморфна два рівнянє винятковї. Далі доказує автор, що функція ціла має лишь одно рівнянє виняткове, наколи єї порядок є числом цілим, наколиж порядок не є числом цілим, нема рівнянє виняткового.

Наколи маєм функцію мероморфну:

$$f(z) = \frac{G(z)}{F(z)}$$

порядку ρ , і яку небудь иньшу функцію мероморфну $\varphi(z)$ порядку низшого і возьмем рівнянє:

$$f(z) = \varphi(z),$$

то взагалі не будемо мати ніяких рівнянь виняткових, а наколи вони будуть, то не може бути їх більше, як два.

Розділ п'ятий займає ряди дробів вимірних. Автор розбирає вперед ряд дробів, розложених на елементи прості, форми:

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n};$$

ряд сей представляє функцію мероморфну тоді, если a_n росте неозначено (т. в. не стремить до означеної границі) і если ряд $\sum \left| \frac{A_n}{a_n} \right|$ є збіжний. Наколи ряд $\sum \frac{A_n}{z - a_n}$ не є збіжний, то можна зробити его збіжним через долученє певного многочлену до кожного его члена. Через долученє многочлена, що повстає з перших виразів розвинення функції $f(z)$ після степенний z , дістанемо ряд канонічний (кожний его поодинокий елемент буде функцією вимірною одного бігуна); в случаю бігунів однократних буде ряд канонічний мати форму:

$$f(z) = \sum \left[\frac{A_n}{z - a_n} - \left(\frac{A_n}{z - a_n} \right)_{\lambda_n} \right],$$

де $\left(\frac{A_n}{z - a_n} \right)_{\lambda_n}$ значить перших λ_n членів розвинення $\frac{A_n}{z - a_n}$;

або:

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{\lambda_n}.$$

Як звісно, ряди такі мають перворядну роль в теорію Mittag-Leffler'a. Ряд такий є збіжний для всіх вартостей z , ріжних від a_n .

Наколи маєм функцію мероморфну:

$$f(z) = \frac{G(z)}{F(z)},$$

де F і G є порядку ρ , то кажем, що розміщенє зер функції $F(z)$ є звичайне, наколи:

$$|F'(a_n)| > e^{-n^{1+\varepsilon}},$$

а надзвичайне, наколи:

$$|F'(a_n)| < e^{n^{1+\varepsilon}}.$$

Автор доказує, що на случай звичайного розміщення, коли бігуни є a_n , а резидуа $A_n = \frac{G(a_n)}{F'(a_n)}$, можна представити функцію мероморфну $f(z)$ в виді:

$$f(z) = f_1(z) + H(z),$$

де $f_1(z)$ є ряд канонічний:

$$f_1(z) = \sum \frac{A_n z^{\lambda_n}}{(z - a_n) a_n^{\lambda_n}},$$

а $H(z)$ функція ціла порядку ρ .

Методи, якої автор уживає, можна ужити і тоді, коли ряд дробів вимірних не представляє функції мероморфної (отже slučaj загальніший).

Автор вводить далі понятє т. зв. кривих збіжності. Наколи маєм функцію мероморфну:

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}$$

з однократними бігунами і зложимо $|a_n| = r_n$, то все буде можна утворити контур многокутний з ограниченою скількістю вершків, який по черзі перетинає скінчене число колес r_n , та якого всі точки є віддалені від певної кривої C о віддаленє меньше, як дане число ϵ . Такий контур є кривою збіжності. Функція $f(z)$ є на такім контурі рівномірно збіжна і дає ся інтегрувати член за членом.

Дальше переходить автор до дробів нерозложених на елементи прости пр.

$$\sum \frac{A_n}{(z - a_n)(z - b_n)}.$$

Наколи маєм ряд таких дробів:

$$f(z) = \sum \frac{P_n(z)}{Q_n(z)},$$

де степєнь P є менший, як Q , і наколи ряд є збіжний для $z = \alpha$, і положимо:

$$z = \alpha + \frac{1}{Z},$$

то все буде можна написати:

$$f(z) = \sum \left[\frac{P_n\left(\alpha + \frac{1}{Z}\right)}{Q_n\left(\alpha + \frac{1}{Z}\right)} - \frac{P_n(\alpha)}{Q_n(\alpha)} \right] + f(\alpha)$$

і покаже ся, що ряд дробів вимірних буде рівномірно збіжний.

В решті переходить автор до случая надзвичайного розміщення бігунів функції мероморфної:

$$\frac{G(z)}{F(z)} \text{ порядку } \rho.$$

Наколи a є бігуном сеї функції, отже $F(a) = 0$, то існує твердження слідує:

„Если маєм рівняне форми:

$$\varphi(x) + \psi(x) = 0,$$

де:

$$\varphi(x) = F'(a) + \frac{x}{2} F''(a)$$

$$\psi(x) = \frac{x^2}{3!} F'''(a) + \frac{x^3}{4!} F^{IV}(a) + \dots$$

і контур C , де є постійно:

$$|\psi(x)| < |\varphi(x)|,$$

то се рівняне має в контурі C такуж саму кількість зер, що і рівняне $\varphi = 0$.

Книжку кінчать чотири ноти:

1) про зера функцій цілих, де автор подає теорем Lindelöf'a: Наколи сочинники ряду цілковитого:

$$\sum c_n z^n$$

сповняють нерівність:

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{[A_n (\log n)^{\alpha_1} \dots (\log_p n)^{\alpha_p}]^{\frac{1}{\rho}}} \quad (\log_p n = \log \log \log \dots \log n \text{ (} p \text{ рази)})$$

то почавши від певного індексу n , будемо мати (якнебудь буде ε):

$$M(r) < e^{\frac{1+\varepsilon}{A \varepsilon \rho^{\alpha_1+1}}} r^{\rho(\log r)^{-\alpha_1} \dots (\log_p r)^{-\alpha_p}}$$

наколи r (луч збіжності) перейде певну границю.

2) про порядок суми двох функцій цілковитих (теорем P. Bouteroux).

3) про суму резидуів функції мероморфної; ту маєм теорем Helge von Koch'a: „Функцію мероморфну можна представити рядом многочленів, збіжним на цілій площі (крім точок особливих).“

4) про функції quasi-цілі і quasi-мероморфні (після Maillet'a).

Наколи $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_n(t)$ є функції цілі t , то функція

$$f(z) = \psi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + \psi_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \dots + \psi_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$$

називає ся (після Maillet'a) quasi-ціла з сущно особливими точками a_1 , a_2 , a_n ; наколи ψ_1 , ψ_2 , ψ_n є мероморфні, то $f(z)$ є функція quasi-мероморфна.

До тих функцій, як показав Maillet, можна віднести багато своїх функцій цілих і мероморфних, спеціально теорем Picard'a і його узагальнення.

Так отже в скороченню подали ми перегляд тверджень і теорій, що ся містять в тій книжці; не уступає она що до змісту і легкого та ясного представлення, властивого Borel'ови, попереднім чотиром частям викладів автора; тож з нетерпеливостію очікуємо заповіданої вже шостої часті, що містити буде виклади про ряди многочленів.

В. Л.

Dr. Pl. Dziwiński. Wykład matematyki. Kurs I. Zasady geometryi analitycznej i analizy wyższej. Tom I. (Lwów 1902. XIX + 928).

Книжка ся є одним з томів видавництва п. заг. „Biblioteka politechniczna“, що виходить у Львові заходом збору учительського школи політехнічної. Подає она в 61 викладах, ілюстрованих численними примірами та вправами, материял математики вищої в тім обсягу, як его потребує молодіж технічна. Тому-то книжка ся не подає одної якоїсь спеціальної партії аналізи математичної, всесторонно обробленої, але подає головню ті уступи математики, які технікові є потрібні в дальших его студиях чисто технічних. Нинішній том подає в головнім начерку теорії і методи геометрії аналітичної в площі та просторі, початки аналізи вищої, рахунок ріжничковий та теорію визначників; велику часть книжки обнімає теорія кривих стіжкових та їх спеціальні своїства. Виклад є незвичайно прозорий, ясний, попертий численними примірами, так що можна справді винести з сеї книжки велику користь. Про вартість сеї книжки промавляє найбільше сей факт, що автор оголосив сю книжку яко вислід кільканацятилітних викладів в львівській політехніці, отже з досвіду знав, які уступи і який спосіб викладу є для технічної молодіжи найвідповіднійші. Під зглядом зверхнім видана є книжка бездоганно.

В. Л.

K. Weierstrass. Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten. (Mathem. Werke von Weierstrass. Bd. IV. bearbeitet von G. Hettner u. J. Knoblauch, Berlin, Mayer u. Müller 1902) ст. XIV. + 631.

Величезний сей том обіймає виклади покійного математика німецького про функції Абеля і їх основи (отже теорію образу алгебраїчного, функції вимірної пари (x, y) , теорію інтегралів

і функцій Абеля, теорію функцій Θ і ϑ). Цілий виклад опирає ся на зовсім оригінальних основах, як впроваджене і застосоване функцій $H(xy)_\alpha$, $H'(xy)_\alpha$, $H(xy'x'y')$, функцій періодів $E(xy)$ і $E(xy_1y_1x_0y_0)$, що при їх помочи дасть ся представити кожда вимірима функція $F(xy)$ та інтеграли абелеві трох родів. Ідеї ті великого геометра німецького до тепер звісні були лиш ученикам покійного і їх ученикам, а не були нігде оголошені друком. Дещо свого часу оголосив був О. Biermann, а в останніх часах опер проф. львівського університету Др. Пузіна свій виклад двотомовий функцій аналітичних (особливо том другий) на теорії Weierstrass'a. Тому-то оба впорядники сего тому (оба професори університету берлінського) через видане сего тому прислужили ся дуже для науки, бо присвоїли загальови математичному ідеї вітця новійшої аналізи. Великий in 4^o виданий том подає цілу теорію в 34 розділах; зазначити треба, що том сей почав ся друкувати ще за життя покійного, але зараз з розпочатем друку (1897.) Weierstrass помер. — Книжка видана, як і попередні томи, бездоганно.

В. Л.

B. Riemann: Gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausg. von M. Noether u. W. Wirtinger. (Leipzig. B. G. Teubner 1902. ст. VIII. + 116).

Від часу, коли перед 10 роками вийшло друге видане творів великого математика німецького, найшло ся ще дещо нового матеріялу в виді додатків до его викладів. Сі матеріяли вийшли тепер друком; они обнимають виклади про загальну теорію інтегралів алгебраїчних рівнянь різнищових (р. 1861/2), інтеграли лінійних рівнянь різнищових другого порядку в точці розгалуження (нота з р. 1856/7), додатки до викладу про ряд гіпергеометричний (р. 1858/9) і усякі математичні ноти (про форми тета, про періоди гіпереліптичних інтегралів etc.)

В. Л.

Dr. Siegmund Günther, Astronomische Geographie, Leipzig, Göschen 1902. 170, 16^o.

Дуже добра книжочка зі званої збірки маленьких компендіїв Göschen'a. Подає в коротці всі важніші дані з астрономічної географії, всюди беручи згляд на історичний розвиток науки. Важніші тригонометричні формули подані. На увагу заслуговує коротке, але повне, зібране метод означування географічної ширини і довжини, та паралакс тїл небесних. Песлїдні уступи посв'ячені сьвітовим системам та праву гравітації. Книжочка грішить, подібно як і більші

книжки Günther'a тим, що представлене проблемів не є ані елементарне ані *par excellence* наукове, а таке посереднє становище, як у Günther'a звичайно, обнижає вартість матеріялу так совістно зібраного.

C. P.

H. Andoyer, *Théorie de la lune*. Paris, Naud, 1902. (*Scientia*, *Phys.-Math.* 17.) 86, 8^o.

Заключає она коротке представлення уступів небесної механіки, що відносять ся до місяця. Особливу увагу посв'ячує автор т. зв. сонячній теорії руху місяця, де виходять ся з założення, що світ складаєсь лиш з сонця, землі і місяця, а інші тіла небесні мають лиш другостепенне значінє. Вивівши рівняня сего problemu трох тіл автор обчисляє геометрично головні неправильности довжини, ширини і паралакси місяця методом неозначених сочинників, подаючи коротко істоту рівняня осередка, рівняня річного, варіацій, евекцій і рівняня паралактичного. В IV., V. і VI. уступі автор обговорює другостепенні нерівности руху місяця, его нерівности періодичні і нерівности вікові. Книжочка мабуть призначена лиш для орієнтації математикам, бо не подає нових теорій ані способів обчислення, опираючись головню на працях Hansen'a, Newcomb'a, Delaunay'a, Brown'a, Hill'a, Tisserand'a, Poincaré і т. д.

C. P.

Dr. Wacław Laska. *Astronomia sferyczna*. Lwów, 1901. 87 вел. 8^o.

Є се підручник уложений для слухачів політехніки. На увагу заслуговує елементарне, але прозоре, представлення трансформації сорядних і велике число практичних вказівок до обчислювання обсервацій та уживання ефемеридів. Уступ про час і его означенє також ясний, лиш прим. на стор. 20. на жаль зовсім зле переведений, бо через недогляд введено одну злу вартість. Взагалі в книжці дещо більше похибок друкарських і недрукарських, як пристало на академічний підручник. Теорія інструментів звязла і ясна, річ дуже добре представляєсь. Натомість автор не зібрав разом способів означення довжини і ширини географічної, що дужеб ся придало. Разить дещо виписуване примірів зі старших підручників (прим. стор. 80), та хочби таке твердженє, що призматове колесо тепер майже виключно уживаєсь вмiсто секстанта. Славний Jordan, великий практик, не дуже одушевляєсь прикметами сего колеса, а моряки по старому й до тепер в переважній більшості живляють секстанта.

C. P.

A. Gleichen. Lehrbuch der geometrischen Optik. (B. G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern, Leipzig u. Berlin 1902). ст. XIV. + 511.

Книжка ся подає виклад геометричної оптики в 20 обширних розділах і то виклад не лиш теоретичний, але ілюстрований примірами практичними, як описом люпи, люнет, мікроскопів і знарядів фотографічних. Становиско автора найлекше пізнати з вступних его слів, де каже між иньшим ось-що: „я старав ся тримати правила, якого правдивість яко учитель стократно пізнав, а се, що погляд — то мати усякого знання; і тому-то я старав ся виходити все від простого конкретного случаю, а аж опісля навіязував до сего загальну теорію“. Через се виправді книжка стала більше обємиста, але знекала на вартости яко підручник науковий. Перейдїм коротко зміст сеї книжки.

В перших чотирох розділах (ст. 1.—44.) виводить автор на основі теорії філювання права відбиття і заломання світла на случай, коли гранична поверхня є плоска (під заложенем, що жмуток лучів світла є астигматичний¹⁾), та теорію призмату і системів призматів на случай, коли світло є однорodne (отже найменше збочене, положене образу — теоретично і на примірах)

Слідуючі чотири розділи (ст. 46.—109.) обнимають теорію та права відбиття на случай поверхний кулистих (одної або систему сконцентрованих поверхний) і теорію сочок (автор відріжняє сочки додатні і відємні); всі ті розділи опрацьовані дуже гарно і інструктивно.

Розділ девятий подає теорію абераций першого порядку (аберація поверхні кулистої, тонької сочки, теорію Euler'a і Abbe, найменша аберація), розділ десятый займає ся астигматизмом і комою при заломаню на поверхнях кулистих, одинацятий штучним розширенем царини відтворення (Abbildungsgebiet), дванадцятий ортоскопиею (ідеальний і правдивий біг лучів), тринадцятий розщипленем світла, чотирнадцятий кривиною образів, п'ятнадцятий правами фотометрії, а шіснадцятий оком людским.

Слідуючі три розділи, що обнимають другу половину книжки (ст. 270.—511.) подають теорію і практику найважнїйших знарядів оптичних, а се теорію і практику люнет і люп, мікроскопів, об'єктивів фотографічних (сей розділ залюбки через автора трактований), спектроскопів і фотометрів. В тих уступах подані уваги історичні

¹⁾ Астигматизмом називаєм власність світляної філі неконцентрованя ся в одній точці (така концентрация має пр. місце в філі кулистій).

та численні рахункові приміри, так що автора можна подивляти за величезний наклад праці, яку вложив в ту частку книжки; видно се особливо в розділі про об'єктивні фотографічні, де автор розібрав велике число усяких знаних та уживаних системів.

Коли в кінці додамо, що до розуміння теоретичних висновків сеї книжки вистарчають початки рахунку вищого, що виклад усяди прозорий і педагогічно ведений, то можемо сміло сказати, що сею книжку можна поставити на рівні з знаменитими підручниками Чапекського, Heath'a т. п. -- Зверхний вигляд книжки хороший. *В. Л.*

C. Arldt. Die Funkentelegraphie. (Leipzig, T. Thomas 1903. ст. 72).

В виду поступів, які зробила телеграфія без дроту від часу перших проб Марконі'ого, книжочка Арльдта є дуже актуальна. Її се властиво виклад, що його автор читав в німецькій „Flotten-Verein“ в Берліні, а попереджає його (на 6 сторонах друку) вступ професора політехніки берлінської Flamm'a про значіння сеї телеграфії для новітньої моринарні. Сам автор подає вперед теорію іскри електричної і її дробань, теорію кондензатора, індуктора, проривачів (проривач молотковий, ртутний, турбіновий, Wehnelt'a), резонатора Герца та рурки Branly'го, теорію математичну дробань в дроті, далі описує перші проби Марконі'ого і складові частини його апарату, систем Braun'a та актуальний нині систем Slaby-Arco, телеграфію многократну та переносну, а врешті урядження різних стацій німецьких (Берлін, Cuxhaven, Bremerhaven і т. п.) та кораблів. Цікаву книжочку кінчить погляд на теперішній стан телеграфії бездротної; її вартість підносить 75 хорошо виконаних ілюстрацій. *В. Л.*

A. Voller. Elektrische Wellentelegraphie. (Hamburg, L. Voss 1903. ст. 52, 17 ілюстрацій).

Її се популярний виклад про ту саму квестію, яку розбирає попередня брошура; автор виголосив його на 72. з'їзді лікарів і природосписців німецьких в Гамбурзі. Виклад украшений 17 ілюстраціями. *В. Л.*

H. Kayser. Die Elektronentheorie. (Bonn, Röhrscheid u. Ebbecke 1903. ст. 32).

Її се виклад, що його автор читав в авлі університету в Бонні в день іменини цесаря Вільгельма (27. I. 1903.). В ній подає короткий начерк теорії електронів і поглядів, що ся з сею новою теорією фізичною в'яжуть. *В. Л.*

Dr. Karl Hofmann: Die radioactiven Stoffe nach dem gegenwärtigen Stande der wissenschaftlichen Erkenntniss. (Leipzig 1903. Verl. J. A. Barth стр. 1—54).

Сю невелику книжочку видав автор в тій цілі, щоби познакомити ширші круги з лучистими тілами і їх діланями. Вправді до тепер не бракло в тім згляді праць, що мали рівнож то само на цілі, однак були то праці, що займали ся тільки декотрими тілами або доказували декотрі їх свійства. Длятого автор уважає за потрібне подати цілість здобутків на тім поли і то тим більше, що ся наука в останніх часах надзвичайно скоро поступила вперед. Відкрите лучів Х дало спонуку дослідникам до шукання за лучами, що не лишень суть впливом розбросня електричного, але що їх висилають якісь сталі тіла. Автор зіставляє коротко старання дослідників і їх здобутки на тім поли. Відтак переходить по черзі відкриті лучисті тіла і описує їх свійства стверджені многими ученими. І так описує насамперед свійства урану, відтак вісмуту, раду, олова і тору. Відтак застановляє ся над лучистостію індукованою в загальї, а вкінці над лучистостію в воздуху атмосферичнім. Вкінці зіставляє всі дотеперішні гіпотези про причину діланя лучистих тіл, а не заявляючи ся за жадною з них стверджує лишень то, що відкриті лучистих тіл становить важний крок на цілком передтим незнанім поли фізики і хемії.

C. M.

Jan Biłyk: Soczewki jako podwójne zwierciadła. (Sprawozdanie c. k. gimnazjum w Kołomyi 1902 ст. 1—30).

В сій розвідці старає ся автор доказати, що погляд, який подекуди стрічає ся, якости в просторі за сочкою лежачім з противної сторони предмету повставали виключно образи дійсні, а по сторонї, де находить ся предмет, лишень образи мнимі, є неправдивий. Рівночасно виказує, що в першім і другім просторі можуть повставати так образи дійсні, як і мнимі. Ся розвідка складає ся з трох частий; в першій розбирає автор теоретично залучаючи відповідні фігури повставане образів в зеркалах двуплоских, вгнутаплоских і випуклоплоских, в другій части є мова о зеркалах вгнутих, а в третій о зеркалах випуклих. Розвідка та доволі ясно написана; немило лишень вражає брак спису літератури, котрою покористував ся автор. Додати треба, що если ся розвідка вийшла накладом автора, то ліпше був би зробив автор, наколи-б був видав єї перевівши на язык руский, бо тим збогатив би до нинї на жаль дуже убогу руску літературу.

C. M.

Д-р Іван Пулюй: Непропаща сила. (У Львові, літер. наукової бібліотеки ч. 5. ст. 53. р. 1901).

Є се передрук викладу звісного нашого вченого, проф. політехніки праскої, викладу, що давнійше вийшов накладом тов. „Прогресвіта“. Змінена лиш правопись, а подекуди язик (змінила се здаєсь редакция літ. наук. бібліотеки). Про зміст не беру ся судити, раз тому, що се передрук, друге, що імя шановного автора само говорить про стійність сеї популярної книжочки. Завважу лиш се, що лінше місто терміну „непропаща сила“, що колись за причиною Гельмгольца був в моді, ужити було загально прийнятого терміну „непропаща енергія“. Говорячи про „непропащу силу“ автор повинен був може також згадати про її „тінь“, енергію страчену (ентропію); та се очевидно ні троха не обнижає вартости сеї книжочки. Редакция літер. наукової бібліотеки видаючи в друге сю книжочку та змінючи її язик повинна була в першій мірі звернути увагу на наукову термінологію; такі терміни, як „електрика“, „углерід“ (місто вуголь), „квасорід“ (місто кисень), „вугляний квас“, „пластинка“, „шпилька“, „ключовий дріт“, „електрико-магнетичний“, „роздає гук“ і н. не повинні являтись в другім виданю книжочки. На ст. 12. пояснює редакция слово „еквівалент“ словом „рівнобіжник“, що очевидно є зовсім хибне (рівнобіжник = Parallelogramm, еквівалент = рівноважник).

В. Л.

Михайло Рибачек. „Льогічна будова математичних доказів“. (Коломня 1902. стор. 26).

В звіті рускої гімназії в Коломні за 1901/2 р. шк. подає п. Р. по кількох замітках загальніших про науку математики, а особливо про геометрію Евкліда, подрібніші замітки про прикмети і роди доказів, а опісля основно поясняє будову доказів синтетичних і аналітичних. При першій групі наведено і пояснено докази невпрост, а при другій докази зі схожости і через унаочнене, а закінчено розвідку поясненнями про формальну сторону математичних тверджень. Розвідка визначаєсь ясним викладом предмету і чистотою мови.

Я. М.

Ю. Гірняк. Ненастанна деградація енергії — конечна проява і причина всякого руху і життя в природі. (Літер. Наук. Вістник, том XXI. р. 1903. ст. 73.—83).

В короткім начерку говорить ту автор про переміни та деградацію енергії, сего „spiritus movens“ усього руху та життя в при-

роді. Деградація енергії відбуваєсь без перерви, а єї вислід, то перехід в тепло одностайно розміщене в просторі, т. зв. ентропію, що стало стремить до „maximum“. Та хотя автор в двох місцях говорить про ентропію, но не пояснює сего понятя як слід; очевидно для фахового фізика справа ся вповні ясна, але чи нефаховий профан — а для таких статя ся писана — зрозуміє пр. уступ третій з долини ст. 82., річ бодай для мене сумнівна. Згадуючи на ст. 77. імена великих фізиків, що завдяки їм засада захованя енергії приняла ся загально і прибрала виразну фбрму в цілій фізиці, пропустив автор імя одного з найбільших, льорда Кельвіна. Автор опирає ся на ст. 80 et sqts. на перестарілих обчисленях Ремайса з р. 1881, де температура сонця подана на 50000° C.; та новішій поміри показують, що температура та, хоть і як висока, не досягає повисшого числа (пор. пр. J. Scheiner: Strahlung u. Temperatur der Sonne 1899. ст. 58. sqts). — Та по при сї хвиби артикул написаний дуже живо і читаєсь єго з заінтересованєм; а що він збільшає у нас так мало єще розвинену популярну природописну літературу, то авторови за єго труд належить ся щире признание. В. Л.

„Деякі практичні правила подільности чисел“ подав: Др. Володимир Левицкий. В 3. числі „Учителя“ з 1903. р. подав др. Вол. Лев. правила подільности чисел через 7, 13, 17, 19, розумієсь не вдаючись в їх математичне виведенє і узасадненє, бо ходило о поданє лиш тих правил, які можуть віддати в практиці користні прислуги. — Для пізнаня, чи число подільне через 7, наведено три правила, два перші з них, хотяй можуть бути примінені до більшециферних чисел, оказують ся найнаручнійшими при трициферних, — третє, поданє за італ. математиком G. Loria, примінити мож до чисел більших. — Для пізнаня подільности через 13, 17 і 19 подано по одному правилу. Я. М.

„Проба девяткова“. Подає др. Володимир Левицкий. В сєм числі тої самої часописи з 1903. р. подає др. Л. простий спосіб, як можна провирити, чи вислід додаваня, відниманя, множеня або ділення звичайними числами єсть вірний. Проба ся основує на факті, що кожде число поділене через 9 дає таку саму решту, як єго поперечна сума, а в практиці надаєсь сєся проба особливо до провирюваня сум в касових книгах. — На тій самій засаді сказати можна, яку цифру счеркнув хтось з ріжниці двох чисел уложених з таких самих цифр, Я. М.

Перегляд важніших журналів математичних¹⁾.

Archiv der Mathematik und Physik. Серія третя, том II. зшит 1.—4. (1901. і 1902). Зміст: R. Schüssler: Про кола подвійно стичні до перерізів стіжкових. M. Hamburger: Новий вивід функцій кулі. G. Mittag-Leffler: Про обсяг збіжності ряду Bernouilli. E. Phragmén: Про останки ряду Taylor'a в формі Cauchy та Lagrange'a. H. Heun: Значінє засади d'Alembert'a для системів ціпких та для механізмів вязевих. R. Funck: Конфігурація $(15_6, 20_3)$, її аналітичне представлення та відношенє до певних альгебраїчних поверхнй. L. Matthiessen: Розвязка гоніометрична альгебраїчних рівнянь перших чотирох степенів. E. Czuber: Про обводню кривих і площй. P. Mansion: Доказ теорему Legendre'a. R. Lehman-Filhés: Аналітичний вивід твердження про рівнобіжник сил. L. Müller: Про твердження Steiner'a і его відношенє до конфігурації двох вписаних і описаних чотиростійників. K. Zindler: Про скрут лній геодетичних в точці поверхні. W. F. Meyer: Доповнення до тв. Fermat'a і Wilson'a. C. Stephanos: Уваги до теорії сил осередних. E. Janisch: Увага до теорему п. Цвойдзінського. O. Lummer: Нота до розвідки про важність права Дрепера. O. Lummer: Права чорного промінювання і їх практичне значінє. W. Nernst: Значінє метод і теорій електричних для хемії. P. Stäckel: Про збіжність рядів тригонометричних. H. Hertzer: Період дроба десятичного для $\frac{1}{p}$, де p є число перве. E. Lampe: Два листи C. G. J. Jacobi. G. Loria: Про деякі елементарні проблеми геометрії начеркової о 3 і 4 розмірах. A. Kneser: Додаток до питання про найвлучнійший вид кінців кулі. H. Schubert: Умови рівноваги для чотирох сил, що ділають прямо-вісно до ціпкої простої. K. Schwering: Скорочена розвязка задачі Ейлєревої: $x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = 0$. K. Schwering: Застосованє теорему Абеля до розвязки рівнянь діофантових: $x^3 + Ay^3 = z^3$ і $x^3 + y^3 = z^3$. G. Majcen: Про конструкційне випровадженє циклічних площ для стіжка і вальця. K. Hensel: Аритметичні свойства факториялів. T. J. I. Bromwich: Потенциял простої поверхні. S. Jolles: Синтетична теория моментів відосередних і безвладности плоского кусника поверхні. R. Müller: Історичні і критичні уваги про понятє подібних і подібно положених перерізів стіжкових. Рецензії, примітки.

¹⁾ Пор. Збірн. мат. прир. т. VIII. 2.

Яко додаток долучені до того тому звіти матем. берлінського товариства. Їх зміст: J. Weingarten: Одно твердження гідродинаміки. A. Kneser: Нове узагальнення науки про пропорції та подібність незалежно від аксіому Архімеда і поняття неспівмірності. E. Lampe: Про одно питання з теорії середніх вартостей геометричних. F. Kötter: Доказ теореми Jacobi про зложені руху кружала з інверсій двох рухів Poinso't'a. K. Heun: Про механіку Гертца.

Серія третя, том III, зошит 1.—4. (1902). Зміст: V. Kommerell: Рівняння і свойства поверхонь рухових. L. Grossmann: Нові зв'язи в царині двочленних сочинників. Fr. J. Studnička: Додаток до науки про відворотні рівняння. C. Koehler: Про класифікацію кривих і поверхонь другого степеня. A. Roth: Фізикальні проблеми машини з одностайним током. L. Ripert: Конструкція геометрографічна осей еліпси, наколи є зв'язні що до величини і положення два проміри спряжені. J. Neuberg: Посвоєння між простою а її метом в віднесенню до трикутника. C. Koehler: Про класифікацію кривих і поверхонь другого степеня (кінець). K. Vahlen: Про кубічні конструкції. G. Hessenberg: Про докази тверджень о точці перерізу. L. Heffter: До теорії вислідників двох лінійних однородних рівнянь різнищових. F. G. Teixeira: Про криву виложничу. F. Fitting: Дальший додаток до узагальненої задачі коникової (в шахах). G. Landsberg: Одна задача пермутаційна. M. Hamburger: Промова в пам'ять І. Л. Фухса. P. Stäckel: До геометрії неевклідової. A. Massfeller: Проста розвязка проблеми Аполонія в площі. R. Güntsche: Додаток до геометрографії. R. Sterneek: Про скільки розкладів цілого числа на шість додатників. W. Ludwig: Про $\mathfrak{S}$ -криві гіперболоїда з одною поволокою і гіперболічного параболоїда. P. Kokott: Теорем додавання функцій еліптичних в формі геометричній. E. Lemoine: Перетворення тягле в трикутнику. E. Lemoine: Перетворення тягле в чотиростіннику. C. Isenkrahe: Нові твердження про коріні рівнянь алгебраїчних. O. Lummer: Правила чорного промінювання і їх застосування. Рецензії, примітки.

Звіти мат. берлінського товариства, долучені до сего тому, містять: F. Müller: Про значіння часописий для математичної літератури і для математично-історичних розслідувань. M. Hamburger: Представлене двоперіодичних функцій яко квоти функцій тета. E. Budde: Коротка увага до теорії вирів Helmholtz'a. M. Korpe: Рух кружала. A. Adler: До теорії знарядів рисункових. Письмо привітне мат. тов. при ювілейнім обході докторскім Дедекінда. K. Hensel: Про аналітичні функції і алгебраїчні числа. G. Hauck: Про невласливі мети. H. Reissner: Механічна аналогія до пруживости. E. Budde: Про

групу звичайних рівнянь різничкових другого порядку між двома змінними. R. Rothe: Уваги про спеціальний криволінійний систем сорядних. H. Opitz: Питаня про огнищеві лінії дуже тонкого астигматичного жмутку лучів. G. Hessenberg: Про рівняне ліній геодезичних. R. Skutsch: Графічний розклад сили на шість складових з приписаними лініями ділення. J. Knoblauch: Доказ співзміності Christoffel'a.

Mathematische Annalen. Том 55, зошит 3. і 4. р. 1902. містить: M. Noether: Ch. Hermite. E. Weber: Теорія систему рівнянь Pfaff'a. H. Koch: Про Ріманна функцію чисел первих. M. Dehn: Про обем. E. Wendt: Про спеціальну класу груп. N. Nielsen: Нота про збіжність ряду Neumann'a функцій вальцевих. E. Christoffel: Теорія перерізів. F. Dalwigk: Уваги про тверджене о подвійних рядах Вейерштрасса і про теорію рівномірно збіжних рядів. L. E. Dickson: Групи надортогональні. D. Francesco: Рух тіла ціпкого в просторі з постійною кривиною. K. T. Vahlen: Про рухи і числа зложені. P. Muth: До геометричного значіння незмінників плоских посвоячень. J. Kürschák: Відмірюване довжин. M. Brendel: Увага до артикулу про інтегроване частне.

Том 56, зошит 1. 2. 3. р. 1902. містить: P. Gordan: Співчасний систем двох квадратних чвіркових форм. E. Neumann: До інтегрованя рівняня потенцяльного при помочи методи C. Neumann'a середної аритметичної. D. Mirimanoff: Корині кубичні чисел первих і множене зложене в функциях еліптичних. W. Jacobsthal: Асимптотичне представлене розвязок лінійних рівнянь різничкових. J. Kürschák: Про перетворенне частних рівнянь різничкових в рахунок варіаційним. S. Epstein: Групи, що спадають з їх групами долученими. A. Kneser: Додатки до теорії і приміненя рахунку варіаційного (II. часть). A. Markoff: Про неозначені форми квадратів трійкові. W. Dyck: Промова C. G. J. Jacobi, найдена в паперах F. Neumann'a. H. Kühne: Співчасні незмінники двох до себе протизмінних системів і їх примінене до згинання множиний. G. Kolossoff: Про певне свійство рівнянь різничкових обороту тяжкого тіла довкола сталої точки в случаю C. Ковалевської. W. Anisimoff: Нота про інтегроване рівнянь різничкових при помочи зложених змінних. J. Mollerup: Наука про геометричні пропорції. D. Hilbert: Про основи геометрії. J. H. Graf: Додаток до розвязки рівнянь різничкових другого порядку. L. Lachin: Розвязник різничковий альгебраїчного рівняня 6. степеня. E. Netto: Про зложене субституцій з транспозицій. P. Stäckel: Лінійні громади ліній геодезичних. K. T. Vahlen: Про скінченорівні многостінники. Примітки, література.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Том 46. зошит 4. (1901.) містить: А. Francke: Сила двигання стовпів при зміннім перерізі. W. Kutta: Додаток до приближного інтегрування цілковитих рівнянь різничкових. S. Jolles: До геометричної теорії параболічних двигарів. А. Grusinzew: Теорія волосности і гидростатики. А. Denizot: Про певний проблем маятниковий Ейлера. R. Mehmke: До обчислення корінїв рівнянь квадратних і кубічних при помочи звичайних абаків.

Том 47. зошит 1.—4. містить: V. Fischer: Аналогії до термодинаміки. А. Francke: Лук з пруживо звязаними підпорами. А. Francke: Двигарі з острыми луками з пруживо звязаними підпорами. E. Doležal: Проблем пятох і трох лучів в фотограметрії. R. Skutsch: Про ваги рівнянь. K. Neun: Заховане віріялу і моменту постійного систему сил при руху ціпкого тіла. F. Rudio: До кубатури оборотового парабольоїду. L. Burmester: Кінематично-геометрична теорія руху посвоячено-змінних системів. L. Krüger: До вирівняння многокутників і вязки трикутників. C. Rodenberg: Про криву пересічи двох пристайних поверхнь перстенових і розпад її на кола. C. Rodenberg: Про точки пересічи еліпси з еліпсою або гіперболою з нею співосевою. E. Zermelo: Гидродинамічні розсліди про рухи вирові в поверхні кулистій. F. Klein: До теорії шруби R. Ball'a. H. Timerding: Теорія вартостей Bernouilli. D. Bobylew і T. Friesendorff: Про периметричне точене ся кружала. J. Kübler: Ще раз правдива форма згібання. F. Schuh: Крива горонтеру. J. Horn: До теорії малих скінчених дргань системів зі степенем свободи. O. Fischer: Про зведені системи і головні точки членів механізму вязевого. O. Unger: Про конструкційний принцип і его застосоване при означеню тїни на поверхнях оборотових. R. Maup: Про тіла з кінетичною симетрією. R. Mehmke: „Rechenschieber“ в Німеччині.

Том 48. зошит 1. містить: R. Gans: Про індукції в обертаючих ся провідниках. M. Radaković: Про рух мотору з узглядненем пруживости его фундаменту. L. Matthiessen: Про безконечні множини місць діоптричних основних точок в сочках і в системах точок. А. Grünwald: Лінійні царини шрубові R. S. Ball'a. F. Jung: До геометричного розсліду вирівняня маси в машинах корабельних з чотирьма корбами. H. Heimann: Видержність плоских плит при нормальнім сталім обтяженю. R. Mehmke: Давний примір анаморфози. Прямітки, літератури.

Acta mathematica, том 25. зошит 1. 2. за р. 1901. і 3. 4. за р. 1902. містить: P. Painlevé: Про рівняня різничкові другого порядку і висших, яких інтеграл загальний є правильний. E. Picard:

Діяльність наукова Ch. Hermite'a. S. Kantor: Найбільший ряд кривих алгебраїчних в R_r . E. Picard: Рівняння лінійні з частинними похідними і узагальнене проблему Dirichlet'a. Hj. Mellin: Зв'яз між лінійними рівняннями різничковими а різницевиими. Hj. Mellin: Формула на логаритми переступних функцій скінченного ряду. U. Dini: Метода наступаючих по собі приближень в рівняннях з похідними частинними другого порядку. J. Hurwitz: Редукція двійкових квадратних форм зі зложеними сочинниками і змінними. W. S. Burnside: Про чотири обороти, що змінюють систем ортогональний осей в инший. Ch. Riquier: Про степеня якогонебудь систему різничкового. I. O. Bendixson: Про коріні рівняня основного. A. Hirsch: Про коріні рівняня основного. P. Stäckel: Аритметичні свойства функцій аналітичних.

Journal für reine und angewandte Mathematik (тепер під редак. Hensel'a) том 124, зошит 2. 3. 4. містить: S. Gundelfinger: Про віроятне повстанє тверджень Аронгольда про незмінник S. S. Gundelfinger: До обчислення логаритмів Гаусса для малих вартостей B. V. Fischer: Примінене теорії кватерніонів до рівнянь термодинамічних. P. Noyer: Про дефініцію і розсліди груп перехідних. E. Landau: Твердження про розклад лінійних виражень різничкових на незведимі чинники. H. Kühne: Відношене між функціями більше незвісних, що ведуть до прав відворотности. F. Grünfeld: Додатки до теорії рівнянь різничкових, долучених до рівняня різничкового n -ого порядку. H. Lemke: Про рівновагу космічних мас газових. L. W. Thomé: Про асимптотичне представлене функцій. J. B. Goebel: Розділ електричності на двох проводячих кулях. P. Kokott: Досліди над перетворенем Ляндена. J. C. Fields: Теорем Ріманна-Роха і єго незалежність від долучених умов на случай певних кривих. L. Koenigsberger: Основи механіки для більшого числа независимих змінних. L. Fuchs: Про границі, в яких певні означені інтеграли задержують приписаний знак. L. Schlesinger: До теорії лінійних рівнянь різничкових в звязи з проблемом Ріманна (друга нота).

Monatshefte für Mathematik und Physik, том XIII. квартал 1. 2. 3. 4. (р. 1902) містять: C. Lorenz: Властиві трикратні інтеграли. J. Plemelj: Про лінійні рівняня різничкові з перемінною основою групи монодромічної. E. Janisch: Геометричні уваги. E. Kohl: Про розширене розвинення Стефана рівнянь Maxwell'a для різнородних середовищ. A. Schwarz: Розсліди кривини стіжкових перерізів. E. Oekinghaus: Математична статистика в узагальненім розвитку і розширеню на формальну теорію населеня. O. Biermann: Про

умови, в яких ціла вимірна функція має многократні місця зєрові. L. Klug: Деякі твердження про посвоячені і подібні поля. — Перегляд бібліографічний математичної літератури.

Annales de l'école normale supérieure, серія 3, том 18, зошит 10.—12. (1901) містить: W. Anisimoff: О теорії кривих геодетичних. E. Picard: Про інтеграл цілковитих різницьок третього рода в теорії поверхний альгебраїчних. Ch. Riquier: Про системи різницьові, яких інтегроване розтягає ся на інтегроване рівнянь різницьових цілковитих. Яко додаток: H. Hancock: Системи модулові Кронекера.

Том 19, зош. 1.—9 (1902) містить: P. Cousin: Про функції періодичні. W. Anisimoff: Додаток до мемуара про криві геодетичні. E. Picard: Про періоди двократних інтегралів в теорії функцій альгебраїчних двох змінних. E. Picard: Про періоди двократного інтегралу функцій вимірної. E. Picard: Про число умов, що виражають, що деякі двократні інтеграли є другого рода. M. Stauff: Уваги про деякі заложення Hermite'a. E. Delassus: Про системи скісні. H. Padé: Нові дослідни над розділом вимірних дробів приближених функцій. W. A. Stekloff: Про основні проблеми математичної фізики. R. Alezais: Про певну класу функцій гіпер-Фухса і певні субституції лівійні, що ся до них відносять. L. Bianchi: Про системи циклічні, яких площі обводять кулю. R. le Vavasseur: Групи ряду p^2q^2 , де p є число перве, більше як число перве q .

Journal de l'école polytechnique, серія 2, зошит 7. (1902). L. Lecornu: Про пруживі волянти. O. Callandreau: Про рахунок чисельний сочинників в розвиненню функцій пертурбаційної. F. Combebiac: Рахунок трикватерніонів. Честь віддана через школу політехнічну кольонельови Мангеймови.

Journal de Liouville, серія 5, том VII. (1901), зошит 2. і 3. Jouguet: Теорем вирів в механіці. E. O. Lovett: Про геометрию n -розмірову. G. Brunel: Про два системи трійок трийцятых елементів. P. Duhem: Про сталість рівноваги зглядної плинної маси, вправленої в рух оборотовий. L. Autonne: Групи чвіркові правильні скінченного порядку. G. Humbert: Про звичайну трансформацію функцій абелевих. E. Maillet: Про коріні рівнянь переступних з вимірними сочинниками.

Том VIII. (1902). зошит 1.—3. P. Duhem: Про рівновагу систему, що ся находит в руху оборотовім, на случай яких-небудь заколотів. E. Maillet: Про катеґорию функцій переступних і рівнянь різницьових вимірних. S. Zaremba: Про інтегроване рівняня $\Delta u + \xi u = 0$. P. J. Suchar: Про рівняня різницьові лівійові другого

порядку з сочинниками альгебраїчними. A. Zoukis: Про повний гексакориф. H. Poincaré: Про циклі альгебраїчних поверхнй. P. Duham: Про сталість рівноваги зглядної. G. Pirondini: Симетрия стичних з огляду на поверхню оборотову. J. de Séguier: Про рівняня певних груп. H. Laurent: Про ряди многочленів.

Bulletin de la Société mathématique de France. Том 29. зошит 4. (1901) обнимає праці: E. Cartan: Про інтегрованє певних системів Pfaff'a другого рода. M. Petrovitch: Уваги про зєра рядів Taylor'a. J. de Séguier: Крива заповняюча шестистїтїник о п розмірах. G. Combebiac: Про живу силу корпену. L. Rispet: Три свойства шістьох точок стїжкової кривої. A. Pellet: Метода приближень Ньютона.

Том 30. зошит 1. і 2. (1902) містить: G. Combebiac: Про систем чисельний зложенй, що представляє групу перетворень частинкових простору. E. Goursat: Про проблем, що ся відносить до ліній асимптотичних. M. Servant: Про деформацію квадратик. G. Humbert: Визначенє кривих альгебраїчних даного степеня, які можна повести на поверхні філястїй. R. de Montessus: Про дробї тяглі альгебраїчні. J. Clairin: Про певні рівняня з частиними похідними другого порядку. J. Hadamard: Про похідні функций ліній. E. Delassus: Про уклади з точковим стиканєм ся. H. Poincaré: Про певні поверхні альгебраїчні. L. Lescornu: Про малі рухи тяжкого тіла. M. d'Osagne: Про барицентра циклічні в кривих альгебраїчних. M. Servant: Про розширенє формул Гаусса. J. Clairin: Про певну класу перетворень рівнянь з частинними похідними другого порядку. L. Raffy: Про деформацію поверхнй і певні перетвореня рівнянь з частинними похідними другого порядку. G. Combebiac: Про загальні рівняня пруживости. J. Hadamard: Про умову, яку можна приписати поверхні.

American Journal of Mathematics. XXIV. зошит 1.—4. (р. 1902). L. E. Dickson: Циклічні підгрупи простої трійкової лінійної дробової групи в тілі Galois. J. G. Hardy: Криві з потріійною кривою. H. Hancock: Перві функции більше змінних і узагальненє важного теорему Дедекінда. R. A. Roberts: Певні свойства плоскої кубїчної кривої в звязи з коловими точками в безконечности. H. E. Hawkes: Оцїнка ассоціативної лінійної альгебри Peirce'a. G. A. Miller: Групи здефініювані через ряд двох генераторів і ряд їх добутків. L. E. Dickson: Канонїчна форма лінійного однородного перетвореня в довільнім обсягу вимірности. H. B. Newson: Нова теорія посвоячень і їх групи Lie. L. P. Eisenhart: Безконечна мала деформація поверхнй. S. Kantor: Типи лінійних комплексів кривих еліптичних

в R_r . R. E. Moritz: Узагальнене процесу ріжничкового. H. D. Thompson: Прості пари рівнобіжних поверхнь. W. M. Bôcher: Системи лінійних рівнянь ріжничкових першого порядку. T. M. Putnam: Чвіркові лінійні дробові групи. A. N. Whitehead: Числа головні. G. A. Miller: Метода конструкції груп порядку p^m . H. E. Stecker: Неевклідові свойства плоских кубічних і їх перша і друга бірунова.

Transactions of the American Mathematical Society. II. зом. 4. (1901). E. J. Wilczynski: Геометрия сучасних системів двох лінійних однородних ріжничкових рівнянь другого порядку. L. E. Dickson: Теория лінійних груп в довільнім тілі. W. H. Metzler: Певні агрегати підвизначників. A. Pringsheim: Примінене правила множення Cauchy до рядів умовно збіжних або розбіжних. A. Pringsheim: Про доказ Goursat'a твердження інтегрального Cauchy. O. Bolza: Новий доказ теореми Osgood'a в рахунку варіаційнім. M. Bôcher: Певні пари переступних функцій, яких коріні можна відділити. J. H. Mc Donald: Систем двійкових, кубічних і квадратних і редукция гіпереліптичних інтегралів ряду другого на еліптичні інтеграли через перетворенє четвертого степеня. E. H. Moore: Теоря невластивих означених інтегралів. E. B. van Vleck: Збіжність і характер тяглого дроба $\frac{a_1 z}{1 + a_2 z}$
 $\frac{1 + \dots}{1 + \dots}$

Том III. зошит 1.—3. (1902) містить: J. I. Hutchinson: Класа автоморфних функцій. H. F. Stecker: Істнованє поверхнь, що надають ся до частинкового відтвореня на площі того рода, де лівії геодетичні відтворюють ся на з гори означених систем кривих. O. Stolz: До виясненя довготи луку і обєму кривої поверхні. L. E. Dickson: Групи Steiner'a в проблемі контакту. A. S. Hathaway: Простор кватерніоновий. E. J. Wilczyński: Відворотний систем лінійних рівнянь ріжничкових. C. N. Haskins: Незмінники квадратних ріжничкових форм. E. Mc Clintock: Натура і приміненє функцій ужитих в розпізнанню квадратних полишок. E. B. van Vleck: Означенє числа дійсних і мнимих корінів ряду гіпергеометричного. G. A. Bliss: Друга варіяция означеного інтегралу, де одна границя є змінна. E. H. Moore: Метові аксіоми геометрії. E. W. Brown: Малі дільники в теорії місяця. J. W. Young: Гольоморфізм груп. F. R. Moulton: Проста не-desargues'ова плоска геометрия. M. Bôcher: Дійсні розвязки системів двох однородних лінійних ріжничкових рівнянь першого порядку. Ch. A. Scott: Нова метода поступованя при перерізах кривих плоских. E. V. Huntington: Повна збірка постулатів для

теорії додатних цілих і додатних вимірних чисел. L. E. Dickson: Група означена для кожного даного тіла. O. Stolz: Додаток до артикулу „До вияснення довготи etc.“ O. Bolza: Доказ достаточности умов Jacobі для незмінности знаку другої варіяції в проблемах ізопериметричних. H. E. Hawkes: Надзложений систем чисел. W. B. Fite: Групи метаабелеві. L. P. Eisenhart: Спряжені простолнійні контрруенції. D. N. Lehmer: Конструкційна теорія однобіжної кубічної методами синтетичними. L. E. Dickson: Група Steiner'a в проблемах контакту (друга нота).

Annals of Mathematics (Harvard University), серія 2, том 3. число 1.—4. (1901. і 1902) обнимає слідуєчі праці: E. B. van Vleck: Збіжність тяглого дробу Гаусса і інших тяглих дробів. M. B. Porter: Різничковане безконечних рядів вираз за виразом. J. H. Whitemore: Нота про кола геодетичні. W. F. Osgood: Нота про функції здефініювані через ряди безконечні, що їх вирази в аналітичними функціями змінної зложеної. Ch. L. Bouton: Певна гра і її математична теорія. G. A. Miller: Групи з двома операторами ряду третього, яких добуток є також третього ряду. W. A. Granville: Незмінники чотирикутника з найбільшою підгрупою, маючою точки сталі, загальної групи метової на площі. M. Bôcher: Деякі приміненія методи скороченого знакованя. M. B. Porter: Коріні функцій, що є злучені лінійними зворотними зв'язями другого порядку. F. S. Woods: Простор зі сталою кривиною (дві часті). W. H. Roever: Ясні точки і їх місця. W. F. Osgood: Проблеми безконечних рядів і означених інтегралів. H. B. Newson: Нота про добуток лінійних субституцій. H. S. White: Нота про криві оборотові піддані інволюції пар точок на площі. R. E. Allardice: Деякі криві зв'язані з системою подібних стіжкових. J. Westlund: Нота про многократні совершенні числа. W. R. Ransom: Механічна конструкція стіжкових співогнищевих. P. F. Smith: Представлене S. Lie мнимих в плоскій геометрії. G. A. Miller: Нота про групи ізоморфні з групою ряду r^m . L. D. Ames: Визначенє вартостий рядів дуже слабо збіжних.

Annali di matematica, серія 3. том VI. (1901.) містить: A. dall' Acqua: Теорія контрруенцій кривих в якійбудь трирозмірній множині. N. Nielsen: Нове обчисленє неозначених інтегралів і рядів безконечних, що обнимають функцію вальцеву. L. Bianchi: Деформація контрруенцій якоїнебудь класи поверхний розвивних. G. Castelnuovo e F. Enriques: Про певну основну квестию з теорії альгебраїчних поверхний. C. A. dell' Agnola: Ряд многочленів, що представляє галузь моногенічної функції аналітичної. A. Pensa: По-

верхня вимірює 5. степеня. G. Lauricella: Деформація кулі пруживої рівнозворотної. N. Nielsen: Про класу безконечних рядів, аналогічних до рядів Schlömilch'a, ідучих після функцій вальцевих.

Том VII. (1902.) містить: E. Pascal: Вступ до теорії незмінників рівняння різничкового цілкового загального типу другого порядку. E. O. Lovett: Перетворення стичні основних елементів простору. R. Marcolongo: Теорія важкого симетричного гіроскопа. C. Somigliana: Про пруживий потенціал. M. Gebia: Типова деформація цїпкого пруживого тіла. H. Lebesgue: Інтеграл, довгота, поле.

Том VIII. зошит 1. (1902.): E. Ciani: Скінчені групи чвіркових посвоячень, ізоморфних з групами правильних многостінників. G. Fubini: Про простор, що допускає групу тяглу рухів.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Том XVI. зошит 1.—5. (1902.) містить: U. Amaldi: Типи потенціалів, що поділені через певну сталу функцію, стають залежні лиш від двох змінних. G. Loria: „Радіалі“ кривих плоских. G. Vitali: Про рівняння різничкові лїнійні однородні з альгебраїчними сочинниками. U. Barbieri: Визначенє всіх поверхний розвивних на дану поверхню. G. Torelli: Про певні теореми Poincaré про ідеали перві. L. Autonne: Про „гермітіян“. F. Gerbaldi: Про групи 360 посвоячень плоских. Th. de Donder: Студія про інтегральні незмінники. F. Giudice: Істнованє, обчисленє і різниця корінїв рівнянь чисельних. C. Burali-Forti: Про „радїалі“. P. Raci: Узагальненє певного теорему Гаусса. V. Martinetti: Уваги про конфїгурацію Куммера. G. B. Guccia: Про криву альгебраїчну плоску. E. Veneroni: Про певні системи кубїчних скїсних. R. Marcolongo: Про функцію Green'a степеня n на кулі. G. Ferretti: Про зведене найменшого порядку лївійного систему кривих плоских невидимих ряду p . D. Gigli: Про суму n різних додатників. G. B. Guccia: Про поверхню альгебраїчну.

Prace matematyczno-fizyczne. Том XIII. 1902. обнимає розправи: A. Denizot: Про певний проблем Ейлера що до маятника. J. Zawidzki: Досвїди над пруживостію і складом подвійних мішання течій. K. Żorawski: Про свойства певного інтегралу многократного, що є узагальненєм двох тверджень з теорії вирїв. G. A. Miller: Про ізоморфізм груп абелевих (по англійски). A. Przeboriski: Деякі приміненя теорії контрївенцій лївійних. S. Dickstein: Переписка Коханського і Лейбніца (докінчене). R. Merecki: Обсервації мікрометричні мраковин (ч. I). M. P. Rudzki: Право розкладу температур в внутрі тіла небесного газового. L. E. Böttcher: Засади рахунку ітераційного (ч. III). Справоздана бібліографїчні з польської літератури матем. фіз. за рік 1899 (конець).

Wiadomości matematyczne. Том. VI. зшит 6. (1902):
 L. Sylow: Бесіда проголошена на обході роковин Абеля в Християнії
 (5. IX. 1902). M. T. Huber: З теорії визначників. W. F. Osgood:
 Функції означені через безконечні ряди. — Перегляд літератури,
 хроніка.

Журнала бібліографічного *Revue semestrielle des publications mathématiques* (під ред. P. H. Schoute, Korteweg etc. Amsterdam) вийшов том X. часть I. і II. р. 1902. і том XI. часть I. 1903. Крім сего вийшов показчик до п'ятих томів сего журналу (отже до томів за час 1898.—1902. р.).

Помер знаменитий математик англійський George G. Stokes 1. лютого 1903. в 84. році життя. Їго праці математичні та теоретично-фізикальні зробили його ім'я голосним в сферах математичних; епохальні є його роботи над флюорисценцією, гідродинамікою і пруживністю.

Нове унґрунтованє геометрії Bolyai-Лобачевского.

Д. Гільберт виказав свого часу (в писемі „Grundlagen der Geometrie“, Leipzig 1899.), що геометрію евклідову можна оперти виключно на аксіомах, що ся відносять до площі, без помочи аксіомів тяглости (Архімеда). В найновішій розправі п. з. *Neue Begründung der Bolyai-Lobatschewskyschen Geometrie* (Math. Annal. 57. том, зощ. 2. 1903.) виказує знаменитий геометр гетінґенський, що можна і геометрію Bolyai-Лобачевского на площі оперти виключно на основі плоских аксіомів без помочи аксіомів тяглости, наколи лиш аксіом рівнобіжності заступимо через відповідні заложеня геометрії Лобачевского. Метода автора є зовсім иньша, як у Bolyai і Лобачевского, що послуговувались граничною кулею, та як у Кляйна, що уживає метод метових.

Ідеї Д. Гільберта хоч у тій ноті коротко представити.

1. Вперед збирає автор разом чотири аксіоми, що ними послугував ся в писемі „Grundlagen der Geometrie“. Є они слідуючі:

I. Аксіоми злученя. (Axiome der Verknüpfung).

I. 1. Дві ріжні точки A і B визначають всегда одну просту.

I. 2. Дві якінебудь ріжні від себе точки простої визначають ту просту.

I. 3. На кожній простій знаходяться що найменше дві точки. Є що найменше три точки, що не лежать на простій.

II. Аксіоми уложення (Axiome der Anordnung).

II. 1. Наколи A, B, C є точки простої, а B лежить між A і C , то B лежить також між C і A .

II. 2. Наколи A і B є дві точки одної простої, що існує бодай одна точка C , що лежить між A і B , і бодай одна точка D така, що B лежить також між A і D .

II. 3. Між трома точками простої існує все одна і лиш одна точка, що лежить між двома осталими.

Дефініція: Точки, що лежать між двома точками A і B , називаєм точками довжини AB або BA .

II. 4. Най A, B, C є три точки, що не лежать на простій, а a проста, що не іде через ніяку з точок A, B, C ; наколи та проста переходить через одну точку довжини AB , то она переходить певно і через одну точку довжини BC або довжини AC .

III. Аксіоми пристайности (Axiome der Congruenz).

Дефініція: Кожду просту ділить яканебудь з її точок на дві півпрості або половини.

III. 1. Наколи A, B є дві точки простої a , а A' є точка простої a' , то можна на даній половині простої a' від A' все найти одну і лиш одну точку B' таку, що довжін AB (або BA) є пристайна або рівна довжині $A'B'$:

$$AB \equiv A'B'.$$

Кожда довжін є пристайна до себе, отже $AB \equiv AB$ і $BA \equiv AB$.

III. 2. Наколи $AB \equiv A'B'$, і $AB \equiv A''B''$, то є $A'B' \equiv A''B''$.

III. 3. Наколи AB і BC є дві довжини без спільних точок на a , а далі $A'B'$ і $B'C'$ дві довжини без спільних точок на a' , то если $AB \equiv A'B'$, а $BC \equiv B'C'$, то і $AC \equiv A'C'$.

Дефініція: Дві півпрості h і k , що ідуть з тої самої точки A і не творять разом одної простої, називаєм кутом; знак на се є $\sphericalangle(hk)$ або $\sphericalangle(kh)$.

Точки площі, що з огляду на h лежать по тій самій стороні, що k , а з огляду на k лежать по тій самій стороні що h , називаєм полем кута $\sphericalangle(hk)$ (Winkelraum).

III. 4. Маємо кут (hk) , просту a і означену сторону простої a' . Най h' означає півпросту простої a' , що іде з точки O ; тоді існує одна і лиш одна півпроста k' , така що:

$$\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h'k') \text{ (пристайні)}$$

і що рівночасно всі точки поля кута $\sphericalangle(h'k')$ лежать по даній стороні a' .

Очевидно кут кожний є до себе пристайний ($\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(hk)$) і $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(kh)$.

III. 5. Наколи $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h'k')$, і $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h''k'')$, то і $\sphericalangle(h'k') \equiv \sphericalangle(h''k'')$.

III. 6. Наколи в двох трикутниках ABC і $A'B'C'$ є:

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C' \text{ і } \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C',$$

то всегда є: $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$ і $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$.

З аксіомів I.—III. слідує твердження про пристайність трикутників, про трикутник рівнораменний і можливість конструкцій, як побудоване прямокутної, поділ простої та кута на дві половини: а далі слідує твердження, що сума двох кутів в трикутнику є більша, як кут третій.

IV. Аксіом про прості, що перетинають ся і не перетинають ся (аксіом, що заступає в геометрії Bolyai-Лобачевського аксіом рівнобіжності).

Наколи b є дана проста, а A точка, що на ній не лежить, то через A ідуть все дві півпрості a_1 і a_2 , що не творять одної і тої самої простої і простої b не перетинають, наколи кожда півпроста, що іде через поле кута ($a_1 a_2$) з точки A , просту b перетинає.

Дефініція: Най проста b (Фіг. 1.) розпадає ся (від точки B) на дві півпрості b_1 і b_2 , і най прості $a_1 b_1$ лежать з одної, $a_2 b_2$ з другої сторони простої AB ; тоді кажем, що півпроста a_1 є рівнобіжна до півпрості b_1 , a_2 до b_2 , а далі кажем, що півпрості a_1 і a_2 є рівнобіжні до простої b , як також і прості, яких половинами є a_1 і a_2 .

З відси слідує, що дві півпрості, рівнобіжні до третьої, є до себе рівнобіжні.

Дефініція: Кожда півпроста визначає кінець (Ende); всі півпрості, що до себе є рівнобіжні, визначають один кінець. Проста має проте два кінці; наколи они є α і β , то просту значимо знаком $(\alpha \beta)$.

Дефініція: Наколи з одної точки поведемо прям на просту і продовжимо єго по за єго основу о таку саму довжину, то кінець сего продовження називає ся образом первісної точки (Spiegelbild des ursprünglichen Punktes) в даній простій.

Образи точок простої лежать знов на простій, яка є образом первісної простої.

2. По тих засадничих аксіомах випроваджує Гільберт п'ять помічних тверджень (подамо їх ту без доказу):

Твер. 1. Наколи дві прості перетинають третю під рівними кутами, то они певно не є до себе рівнобіжні.

Твер. 2. Наколи маємо дві прості a і b , що ся анї не перетинають, анї не є до себе рівнобіжні, то існує все трета проста, що до обох є рівночасно прямовісна.

Твер. 3. Наколи маємо які-небудь дві півпрості, то існує все проста, що має два приписані кінці α і β .

Твер. 4. Наколи маємо дві рівнобіжні прості a і b і точку O в часті площі між ними (Фіг. II); наколи O_a є образ точки O в a , а O_b образ точки O в b , а M є середина довжини $O_a O_b$, тоді півпроста побудована в M , що є рівнобіжна і до a і до b , є прямовісна в M до простої $O_a O_b$.

Твер. 5. Наколи a, b, c є три прості, що мають той самий кінець ω , а їх образи в тій самій простій є S_a, S_b, S_c , то все існує проста d з тим самим кінцем ω така, що поступенне застосоване відбиття (образів) в простих a, b, c є рівнозначне з відбиттям в простій d , що значимо:

$$S_c S_b S_a = S_d.$$

3. З черги переходить Гільберт до додавання кінців (Addition der Enden). В тій цілі бере просту $(0, \infty)$, отже з кінцями 0 і ∞ , (Фіг. III) вибирає на ній точку O і побудовує в O прям, якого кінці називає $+1$ і -1 ; опісля дефініює суму двох кінців в слідуєчий спосіб:

Наколи α, β є два кінці, O_α є образ точки O в простій $(\alpha \infty)$, O_β образ точки O в простій $(\beta \infty)$, то наколи середину довжини $O_\alpha O_\beta$ получимо з кінцем ∞ , то другий кінець так побудованої простої буде сумою обох кінців α і β (знак на ту суму є: $\alpha + \beta$).

Наколи півпросту з кінцем α відібем в простій (0∞) , то постане півпроста з кінцем $-\alpha$.

Дістаєм ту рівняня:

$$\begin{aligned}\alpha + 0 &= \alpha \\ 1 + (-1) &= 0 \\ \alpha + (-\alpha) &= 0 \\ \alpha + \beta &= \beta + \alpha\end{aligned}$$

Посліднє рівнянє є виразом правила переміни додавання двох кінців.

Наколи S_0, S_α, S_β є відбиття в простих $(0 \infty), (\alpha \infty), (\beta \infty)$, то на основі помічних тверджень випаде:

$$S_{\alpha+\beta} = S_\beta S_0 S_\alpha$$

Наколи γ є також якийсь кінець, то дістанем:

$$S_{\alpha+(\beta+\gamma)} = S_{\beta+\gamma} S_0 S_\alpha = S_\gamma S_0 S_\beta S_0 S_\alpha,$$

$$S_{(\alpha+\beta)+\gamma} = S_\gamma S_0 S_{\alpha+\beta} = S_\gamma S_0 S_\beta S_0 S_\alpha,$$

або:

$$S_{(\alpha+\beta)+\gamma} = S_{\alpha+(\beta+\gamma)}$$

або:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

т. є. право сполучування додавання кінців.

Наколи просту (α, ∞) відібем в простій (β, ∞) , то — як Гільберт виказує — дістанем просту $(2\beta - \alpha, \infty)$.

4. Перейдім тепер до добутку кінців. Ту вперед подає Гільберт дефініцію: Наколи кінець лежить з тої сторони простої $(0, \infty)$, що кінець $+1$, то сей кінець назвем додатним, наколиж лежить з тої сторони простої $(0, \infty)$, що кінець -1 , то сей кінець назвем відємним.

Возьмім тепер два кінці α, β , різні від 0 і ∞ (Fig. IV.). Обі прості $(\alpha, -\alpha)$ і $(\beta, -\beta)$ стоять прямовісно на простій $(0, \infty)$ і перетинають її в А і В. Відтінім довжінь ОА від точки В до С на простій $(0, \infty)$ так, щоби на $(0, \infty)$ напрям від О до А був той сам, що від В до С: опісля построймо в С на простій $(0, \infty)$ прямовісну і назвім додатний або відємний кінець сеї простої добутком $\alpha\beta$ обох кінців α, β , після сего, чи оба кінці є додатні або оба відємні, або один додатний, а другий відємний. — Рівночасно закладаєм, що:

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0.$$

На основі аксіомів III. випадуть правила переміни і сполучування множення кінців:

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

Також найдем формули:

$$1. \alpha = \alpha, (-1)\alpha = -\alpha,$$

а коли α і β є кінці простої, що іде через 0, то:

$$\alpha\beta = -1.$$

Ту можливе є і ділене; до кожного додатного кінця π належить додатний (до відємного відємний) кінець такий, що его квадрат є рівний π ; він сам є $\sqrt{\pi}$.

Врешті, як не тяжко доказати, існує ту і третє право множення (розлучування), а іменно:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma).$$

5. В останньому уступі розбирає Гільберт рівняння точки; при тім робить увагу, що наколи для рахунку кінцями випали нам такі самі правила, як для рахунку числами, то дальше побудову геометрії не представить ніяких труднощів.

Коли ξ і η є кінці якоїсь простої, то кінці:

$$u = \xi\eta, \quad v = \frac{\xi + \eta}{2}$$

називає Гільберт сорядними тої простої. Тут існує основне твердження. Наколи α, β, γ є три кінці такі, що кінець $4\alpha\gamma - \beta^2$ є додатний, то всі прості, що їх сорядні u, v сповняють рівняння:

$$\alpha u + \beta v + \gamma = 0$$

ідуть через одну точку.

Доказ сего твердження переводить Гільберт в сей спосіб, що побудовує кінці:

$$\kappa = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}, \quad \lambda = \frac{\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}$$

і тим способом спроваджує повисше лінійове рівняння до форми:

$$(k\xi + \lambda)(k\eta + \lambda) = -1.$$

Опісля доказує, що форми:

$$\begin{aligned} \xi' &= k\xi + \lambda \\ \eta' &= k\eta + \lambda \end{aligned}$$

представляють кінці такої простої, яка повстає з простої о кінцях $\xi\eta$ через оборот площі, залежний лиш від k і λ . А що рівняння $(k\xi + \lambda)(k\eta + \lambda) = -1$ дає $\xi'\eta' = -1$, то на основі правила, яке подали ми при множеню, мусять дотичні прості переходити через точку O , отже твердження є доказане.

Бачимо отже, що рівняння точки в сорядних лінії є лінійне; звідси легко можна вивести тв. Pascal'a для пари простих і тв. Desargues'a для трикутників, положених перспективічно, як також всі інші твердження геометрії Bolyai-Лобачевського — а через се дійсно можна оперти ту геометрію на чотирох групах аксіомів, що їх Гільберт впровадив.

В. Л.

В новонайденому творі старинного математика єгипетського Агмеса знаходять ся цікаві висліди: 1) знаходить ся таблиця, де дробі

$$\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{2}{99}$$

виражені в яко сума дробів з чисельником 1, пр.

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$$

2) поверхня кола рівнає ся поверхні квадрату, якого бік є рівний $\frac{8}{9}$ проміру; звідси слідує:

$$\pi = 3.1605 \dots\dots\dots$$

(Nouvel. Annal. de Mathémat. tome III. April 1903).

Поступи фізики і хемії в р. 1902. Хотяй р. 1902. не приніс ніяких нових епохальних відкрить, то однак опрацьоване материялу з літ попередних починає кидати деяке нове світло на основи науки. Головний імпульс дало до сего відкритє т. зв. лучів тілесних (Körperstrahlen), які виходять від т. зв. лучистих тіл, лучів відкритих перед пару роками, а які все еще є предметом точних дослідів. І так славний хемік Berthelot, що в останніх часах посвятив особливу увагу лучистим тілам, а головнє радови, постеріг, що лучі раду, подібно як лучі світла, розкладають навіть в темноті (хотяй помалу) сполуки йоду і кисня та квас азотовий; дальше сконстатував факт, що хемічне діланє тих лучів є нинше, як току електричного. Німецький учений Giesel постеріг знов, що від впливом раду звичайна вода та воздух на якийсь час стають лучивочинні, щоби промовляло за сим, що лучі раду не є лиш виключно частинками матерії.

Велике вражінє зробив реферат Vignon'a, предложений парискій академії, про славне простиранє туринське, в яке мало бути завинене тіло Ісуса Христа, та на яким виступав образ Спасителя; Berthelot фантом сей вважав містифікацією, но Vignon пригадав звисний впрочім факт, що деякі тяжші олії (а такими могло бути тіло Христа набальсамоване) мають власність висиланя лучів.

Пізнанє ближше лучистих власностей деяких тіл в части за-колибало теорию атомістичну, бо показує, що атоми в загалі не є найменшими частинками тіл; після погляду деяких фізиків ті лучі є проявою якихсь „субатомістичних“ хемічних ділань в матерії. Rutherford іде еще дальше і висказує погляд, що лучистість, яка виступає у різних тіл, походить в дійсности від одного, покищо незвісного первня, та сей погляд не має много приклонників. Більшість фізиків приймає істнованє електронів, що є підставою згаданих лучів, а уліпшенє метод досвїду доходить до сего, що позволяє мірити величину тих електронів (в приближеню електрон є що до величини $\frac{1}{700}$ частиною атому водня).

По при праці над тілами лучистими заслугують на увагу праці над низькими температурами; ту важні є головні роботи J. Dewara, що в своїх дослідках над плинним воднем дійшов до температури 13° абсолютної скалі. Покищо один гелі не дав ся привести до стану плинного, так що після погляду Ольшевського і Dewara його точка критична лежить понизше 9° абсолютної скалі. І ті досліді виказали цікаву прояву, що наколи в температурі плинного воздуха і водня хемічні ділання слабнуть, то вплив так низьких температур на бактерії та різні зародники є дуже невеликий, отже як раз противно, як можна ся було надіяти. На жалі J. Dewar не має надії досягнути абсолютне зеро, хотяй досягнене його мало-би для науки первостепенне значінє. Досягнене що-раз то низших температур є так тяжке і коштовне, що погляд Dewar'a здаєсь вповні оправданий. До того приймає Dewar, що хотя би навіть вдало ся гелі замінити в плин, то найдуть ся еще лекші гази, що їх еще тяжше буде замінити в стан плинний.

Важні є далі роботи над хемічними елементами, яких скількість в останніх роках так значно зросла через відкрите арґону, гелію, криптону etc.; та ті роботи мають більше вже спеціальний характер. За се з другого боку виринає kwestія, чи много тіл, які ми до тепер вважали елементами, є ними, чи ні. Вже в р. 1900. висказав N. Lockyer на основі обсервацій спектральних збїзд сталих сумнів, чи желізо є елементом, чи ні, а тепер такий сам сумнів підніс T. Gross що до другого, дуже в природі розповсюдженного елемента, кремю (Si).

З інших робіт р. 1902. заслугоє на увагу праця американського фізика Niphera, що на основі обсервацій в часі вибухів вулканічних на Антилях стараєсь дошукати звязи між сильними потрясеннями воздуха а філами етеру.

(Central-Zeitung für Optik u. Mech. XXIV. 2).

Moissan і Dewar замінили флюор в р. 1897. при температурі -187° в теч; тепер удало ся його в температурі -252.5° замінити в тіло цїрке. Наколи в тім стані зіткнув ся він з плинним воднем, то оба они лучили ся з собою серед сильної експльо́зії, при чім цїла маса сильно ся розгрівала, так що водень ся запалював.

(Compt. rendus 136. 1903. ст. 641—643).

J. Traube заняв ся звїсним законом van der Waals'a:

$$RT = (v-b) \left(p + \frac{v^2}{a} \right),$$

обчислив сталі a і b для великого числа елементів і найшов, що се рівняне задержує своє значінє і для цїпкого стану. Дальші обчислення автора показують, що наколи цїпкому чистому металю допроваджує ся тепло, то $\frac{1}{3}$ -часть того тепла зуживає ся на поборене внутрішнього тиску, а $\frac{2}{3}$ підвищає молекулярну енергію атомів. Далі показуєсь, що для одноатомових металів (отже для всіх) і для багатоатомових металюїдів (кромі гальогенів) сочинник $(v-b)$ має в приближеню вартість $\frac{1}{273}$. Обчислені зі сталих a і b рівняня van der Waals'a середні довготи доріг атомів згоджують ся що до порядку величини з цифрами Meyer'a (т. є. 10^{-9}), які він обчислив при помочи дифузії. А вкінці: внутрішнє молекулярне тепло улетученя є у всіх елементів пропорціональне до сочинника розширення.

(Zeitschr. für Elektrochemie, IX. Jahrg. 1903. ч. 21).

Н. Т. Baanes обчисляє найімовірнійшу вартість на механічний рівноважник тепла [відносно до 16^0 -кальорії ($15,5-16,5^0$)] і находить єго вартість $= 4,1832 \times 10^7$ ерїв.

(Canada Transact. 8, sect. III. 1902. p. 141).

Поляризація лучів X. До тепер не можна було лучів X споляризувати; доперва R. Blondlot завдав собі питанє, чи лучі X не є вже відразу в хвилі, коли опускають рурку, споляризовані. Здогад сей опер Blondlot на факті, що луч X поветає з луча катодального, так що оба они творять одну площу; а через кождий луч X, що виходить з рурки, іде площа, в якій луч може мати спеціальні свойства (була би отже дисиметрія, будуча умовою поляризації). І дійсно Blondlot'ови вдало ся виказати сю поляризацію, наколи ужив невелику іскру за аналізатор. Знаряд ним ужитий був слїдуочий (Fig. V.):

Р рурка Рентгена, до якої провадять дроти 1 і 2, обложєні гутаперхою, від індуктора; друга пара дротів, рівнож обложєних гутаперхою, має перерву в α , яку можна збільшати або зменьшати — дроти ті заложєні в C і D на 1 і 2, відділені від них валочками шкляними. АВ є плита з Al на се, щоби перерву α охоронити від впливу лучів Рентгена.

Берем уклад 3 осей: ОУ спадає з довготою рурки, отже з напрямом лучів катодальних, ОХ спадає з напрямом луча X, ОZ до них прямовісна. В часі виладованя індуктора (отже повстаня лучів X) поветає через індукцію іскра в α ; наколи напрям сеї іскри є рівнобіжний до ОХ, то іскра під впливом лучів X збільшає ся, на-

коли прямовісний до ОУ, вплив лучів Х гине. Отже лучі Х мають чинну площу, що іде через кожний луч Х і луч катодальний, що его витворює. Наколи перерву α обертаємо довкола осі ОХ (отже рівнобіжно до пл. YOZ), то маємо одно максимум в поземім, одно в прямовіснім положенню (анальотично, як коли обсервуєм споляризований жмуток лучів через ніколь і ніколь обертаєм). Іскра в α відгріває проте ролю аналізатора, но она мусить бути коротка і слаба.

Кварц, цукор і н. скручують площу поляризації лучів Х в тім самім змислі, що у світла (Blondlot діставав скручення до 40°); також і вторичні лучі S є споляризовані — цукор і н. скручують їх площу поляризації в противнім змислі, як у світла (Blondlot діставав скручення до 18°).

(Comptes rendus 136, 284. 1903. p.).

Угинане лучів Рентгена. Н. Haga і С. Н. Wind (Амстердам) сконстатували, що лучі Р. підлягають угинанню так, як лучі світла. Лучі Р. переходили через дві шпари, першу широкую на $15\ \mu$, і другу (віддалену від першої о $75\ \text{cm}$), широкую в горі на $25\ \text{mm}$ до долини вузшу; за другою шпарою в віддаленю $75\ \text{cm}$ находилась плита фотографічна. Фотографії, довершені при помочи лучів Р., що мусіли переходити через ті дві шпари, мали на долішнім краю, що відповідав звуженій часті другої шпари, розширене в формі пензля — проява, яку можна толкувати лиш угинанем лучів Р.

(Elektrotechnische Zeitschr. 1903. № 25).

В останніх часах розвинулась ширша дискусія на тему, чи тіла лучивочинні абсорбують в часті енергію гравітаційну чи ні. Приклонником погляду абсорбції є R. Geigel, що оголосив в „Annalen der Physik“ в лютім 1903. р. розвідку експериментальну, де доказує, що мала куля з олова стає через освітлене лучивочинними тілами лекша, і доказує, що причиною сего є абсорбція енергії гравітаційної через тіла лучисті. Погляд сей викликав досить живу дискусію зі сторони інших фізиків, як Forch і Куґера, що старають ся заперечити поглядом Geigel'a; дискусія та на разі ще не замкнена, отже і квестія піднесена Geigel'ом покищо не рішена.

(Physik. Zeitsch. 4. № 11. sqts¹).

А. Heydweiller розсліджував зміни тягару лучистих матерій. В тій цілі замкнув 5 g такої матерії в рурці шкляній і порівнював цілими тижнями тягар сеї рурки з руркою наповненою кусниками шкла, яка мала такий сам тягар і обем. Показала ся постійно зростаюча різниця тягару, менше більше 0.02 mg в 24 годинах. Так як після Becquerel'a 1 cm^2 поверхні лучистої матерії виділяє під видом лучів, які магнет відклонює, 5 ергів на секунду, то 5 g, які мав Heydweiller, о поверхні 20 cm^2 виділяти повинні 100 ергів на секунду або 10^7 ергів на добу (в таких лучах); сконстатована зміна тягару 0.02 mg відповідає 1.2×10^7 ергів потенціальної енергії гравітаційної в поли земскім, отже число того порядку, що число Becquerel'a. Звіден насувала би ся гадка, що при лучистости наступає безпосередна переміна потенціальної енергії гравітаційної в енергію лучисту. (Що до сеї послідньої гадки пор. више дискусію між Geigel'om, Forch'om а Kučer'ом).

(Physik. Zeitschr. Jahrg. IV. 1902. ст. 81).

S. J. Allen виказав, що сьвіжо впалий сніг є — так як і дощ — лучивочинний; но та лучистість дуже скоро уступає. Вже по 30 мінутах лучистість снігу стає о половину менша. Наколи такий сніг стопимо та воду відпаруємо, то остає полишка, то є лучивочинна. Рівночасно постеріг Mc Lennan, що дріт наряджений відємно по впаденю снігу є менше чинний, як перед впаденем; здаєсь, що сніг в части усуває чинний складник атмосфери.

(Naturwiss. Rundschau. XVIII. 1903. № 16).

Між лучами, що виходять з тіл лучистих, вирізнявано т. зв. лучі α , що не підлягають магнетному відклоненю та що мають велику спроможність прониканя. В послідних часах розсліджував ті лучі Rutherford і сконстатував, що і они підлягають відклоненю магнетному та електричному і то в сей спосіб, що можна їх вважати (аналогічно як лучі ситові — Kanalstrahlen) скорими двигарами додатних електричних нарядів. Н. Becquerel потвердив своїми досьвідами над радом погляд Rutherford'a та порівнує лучі α раду з лучами ситовими, що уносять з собою додатні наряди з більшими масами, а меншими скоростями, як лучі катодальні.

(Comp. rendus 1903. т. 146. ст. 199).

Дальші досліди Н. Becquerel'a над польоном виказали, що его лучі є імовірно ідентичні з лучами α раду, так що різні лучі, ви-

силані лучистими тілами, можна поділити в сей спосіб: 1. уран висилає дуже сильні відемно наряджені і сильно проникаючі лучі. 2. польон висилає лиш лучі з додатною електричністю, які легко підлягають абсорбції. 3. тор і рад висилають оба роди лучів. Крім сего висилає рад еще лучі сильно проникаючі та не підлягаючі відклоненню, що доперва по довгій експозиції лишають слід на плиті фотографічній; в они так слабкі, що здавсь через се не можна їх було викрити у иньших тіл.

Крім сего зробив Becquerel еще иньші постереження на лучах раду. Вже давнійше постеріг він, що через плиту Al грубу 0.1 mm переходять лучі раду, що мало підлягають відклоненню, без зміни (без огляду на кут паданя), лучі, що троха більше підлягають відклоненню, переходять вправді через плиту, але опускаючи єї витворюють лучі вторичні; у лучів, що можуть еще більше відкланятись, вступає на їх місце жмуток лучів вторичних; а врешті лучі, що відклоненню найсильніше підлягають, плита задержує, а на їх місце повстають від сторони впаданя дуже сильні вторичні лучі. То само виступає, коли місто плити Al возьмем плиту парафіну, грубу 2--8 mm.

(Comptes rendus 1903. т. 146 ст. 431).

Еманация фосфору. В послідних часах висказав G. C. Schmidt гадку, що при повільній оксидациї фосфору не можна вказати присутности йонів в воздуху, бо хотай він в часі оксидациї фосфору стаєсь добрим провідником, то се дїє ся завдяки продуктам оксидациї, подібним до мраки. Погляд сей попер автор дослідом над кусником фосфору, замкненим в начиню склянім; наколи введено силу електромоторичну, то хмари, окружаючі фосфор, підносили ся до гори і укладали ся здовж лїнії сили. Се дїє ся тому, що продукти оксидациї фосфору наряджують ся на дні начиня і звідси на основі прав електростатичних підносять ся до гори. Досвід сей толкує ся дуже просто, наколи приймем гіпотезу Schmidt'a, толковане его на основі теорії електронів справляє велику трудність.

(Naturwissensch. Wochenschrift, том XVIII. ч. 33).

Давніші розеліди показали, що с е л е н (Se) зменьшає свій опір електричний під впливом лучів Рентгена і лучів раду (аналогічно, як під впливом лучів світла). Нові розеліди E. van Aubel'a показують, що клітинка Se в темноті в присутности начиня з надокисом водня (H_2O_2), а також в присутности оліїку терпентинового зменьшає свій

опір електричний. Діє ся то тому, що обі ті субстанції є також лучивочинні, аналогічно як рад; вистане між клітинкою Se а начинем з одним з тих тіл вставити плиту металеву, щоби Se знов вернув до попередного стану, т. є. щоби его опір електричний зріс до попередної величини.

(Compt. rend. 1903. CXXXVI. p. 929).

Ogden N. Rood мірив при помочи спеціально збудованого електрометру опори електричні деяких дуже сильних діелектриків, і то окремо опір внутрішній, а окремо зверхний. Ось его вислїди (числа відносять ся до одиниці о перерізі 1 cm^2 , а густоти 1 mm):

опір внутрішній:		опір зверхний (на 1 cm^2):	
кварц	$86.10^4\Omega$	звичайне скло (шиба в вікні)	$159.10^4\Omega$
гутаперха	$60.5.10^5\Omega$	скло кобальтове	$22.10^6\Omega$
ебоніт	$55.10^6\Omega$	міка	$5076.10^4\Omega$
міка	$133.10^6\Omega$	гутаперха	$432.10^6\Omega$
		кварц	$521.10^6\Omega$
		ебоніт	$2.10^9\Omega$

(Americ. Journal of Science 1902. ser. 4. vol. XIV. 161).

Поміри електричного опору в діаманті робив А. Arton на 30 екземплярах при температурі 15^0 ; питомий електричний опір випав між $0.183177.10^{12}$ а $1.280370.10^{12}\Omega$, отже є того самого ряду, що опір скла ($0.76.19^{12}\Omega$), а перевищав 10^{15} разів опір графіту. Опір сей меньшав під впливом лучів Рентгена о половину, по усуненню тих лучів зрастав до первісної висоти.

(Atti della R. Academia di Torino 1902. XXXVII. 667).

Ртутьна лампа Hewitt'a. В новій тій лампі електричний жарить ся пара ртуті; світло сеї лампи є дуже оригінальне, бо нема в нїм червоних лучів. Уряджене сеї лампи є слїдуюче: є се шкляна рура, довга пересїчно на 1.2 m , проміру 25 mm , з якої усунено воздух; катодою є кулька, наповнена Hg, втоплена в один конець рури, анодою є острий сталевий дрїт на другім кінци рури. Лампа ся є дуже тревала, бо ще по 2000 годинах не видко великої зміни в натузі світла. Відповідно до розмірів лампи (75 mm — 4 m) треба уживати і відповідної ріжниці потенціалів і відповідної сили току; звичайно на свїчку іде 0.3 — 0.5 ватів (при середній натузі світла). Щоби лампу розсвітити, треба з початку

ужити більшої різниці потенціалів; в тій цілі залучує ся апарат індукційний, а через перерване току наступає так сильна різниця потенціалів, що між електродами перескакує іскра. Hewitt найшов, що в его лампі ток все іде від кінця сталевого до ртуті, а ніколи протилежно; з сеї причини можна лампи сеї уживати при токах перемінних, наколи хочем, щоби ток ішов опісля в однім і тим самим напрямі. — Як здавсь, буде можна лампи сеї уживати з добримими результатами в фотографії та при ліченню хоріб шкірних.

(Central-Zeitung f. Optik u. Mechanik. Jahrg. XXIV. Heft 7. 1903).

Ніягара яко мотор. Сила води водопаду Ніягари є майже необмежена, бо скількість спадаючої води виносить 300000 стіп³ на секунду; а коли возьмем під увагу висоту спадання 165 стіп, то дістанем яких 10 мільонів HP. Щоби той величезний запас енергії використати, заложено вже перед 11 роками величаві машини, що енергію сего водопаду перетворюють в енергію електричну. Тоді побудовано там динамомашини з двофазовим током перемінним, кожда о силі 5000 HP, 150 оборотів на мінуту, о різниці потенціалів 2200 Volt; зміна току наступала що 25 оборотів на секунду. Ті машини получено з прямовісними турбінами, осадженими на осях 136 стіп довгих, які поміщено в воді водопаду. Тепер приступлено до побільшення тих закладів. На березі канадйським мають утворити централю з силою до 100000 HP; в централі тій мають помістити три динамомашини, кожда о силі 10000 HP, отже два рази так сильні, як дотеперішні. Машини ті мають бути трифазові з різницею потенціалів 12000 Volt; ток електричний буде ся переносити з величезною напругою 60000 Volt (напруга та перевищує о 10000 Volt найбільшу дотепер уживану напругу в Каліфорнії).

(Elektrochemische Zeitschr. Jahrg. X. 1903. ч. 2).

Вплив бурей на систем нервовий. Як відомо ділає буря вже на великі віддалення на систем нервовий вражливих осіб; ся обставина навела F. Larroque'a на думку, що се діланє походить імовірно від филь Гертца, які повстають в місци розряджень електричних (отже там, де є буря) і розходять ся на всі сторони. Larroque сконстатував сей здогад при помочи урядження, анальоїчного до відбирача при бездротнім телеграфі; в відбирачу виступали дійсно іскорки, які можна було впрост обсервувати оком. Се явище промавлялоб на користь здогаду Larroque'a.

(Meteorol. Zeitschr. 1903. Heft 5).

Кататипія. Звісний хемік Ostwald (в Липську) і его асистент Dr. Gross винайшли спосіб репродукції фотографій на дорозі чисто хемічний без помочи сьвітла; спосіб сей назвали они „фотографованем без сьвітла“ або „кататипією“. Сей спосіб оперли автори на знаній в хемії каталізі, яка полягає на тім, що деякі реакції хемічні відбувають ся далеко скорше в присутности певних тіл т. зв. каталізаторів, які самі однак не улягають ніякій зміні. І так пр. надокис водня (H_2O_2) в присутности делікатного порошку срібного (каталізатора) розкладає ся на водень і кисень. Наколи отже клішу, покриту бромаком срібла і желатиною, на якій вже образ вхоплено, потягне ся 3%-овим розтвором етеру і надокису водня, то при улетученю ся етеру осяде H_2O_2 в рівномірній верстві на кліші і розложить ся на місцях насьвітлених, де отже виділив ся делікатний порошок срібний, а на місцях ненасьвітлених остане без зміни. Сим способом дістанемо невидний „додатний“ образ H_2O_2 . Наколи тепер приложимо до кліші папір потягнений желатиною, то H_2O_2 всякає в него протягом кількох секунд, а образ так перенесений на папір можна в розтворі сіркану заліза викликати. Сей образ залізний, що є слабо жовтавий, можна фарбувати на ріжний спосіб (в ріжних нюансах) в відповідних розчинах; пр. в квасі галюсовім на фіолетно, в бренцкатехіні на темнозелено, в зелянистім цианку потасовім на синьо і т. и. Сей новий кататипічний спосіб репродукції має крім великої вигоди, дешевости і зиску на часі ще сю добру сторону, що копії так одержані є далеко більше тревалі, як копії отримувані давним способом. Всі подробиці оригіналу віддає копія дуже виразно, як се можна розпізнати при помочи лупи. Авторам вдало ся також тою дорогою одержати і иньші висліди, як пр. фотографію в трох красках (т. зв. Dreifarbendruck) і т. д., але близьших подробиць про ті методи поки-що автори не оголосили.

(Himmel u. Erde, Jahrg. XV. 1903. зом. 8).

Скорість поступу гравітації означив теоретично Р. Gerber; при тім вийшов він з założеня С. Neumann'a при означеню потенцияла двох частин будучих в руху, що потенциял на одну масу мусить вийти від другої маси скорше о час $\frac{r}{c}$, т. є. час потрібний до перебутя віддаленя обох мас. В виду сего виходить з обчисленя автора величина потенциялу рівна:

$$\frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{2}{c} \frac{dr}{dt} + \frac{3}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right\},$$

а ділаюча сила випаде:

$$\frac{1}{r^2} \left\{ 1 - \frac{3}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{6r}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} \right\}.$$

З порівняння з заколотом, якого дізнає Меркур в перігелю, а який виносить 41" (на 100 літ), випадає з повисших формул на скорість гравітації:

$$c = 3.10^{10} \frac{c}{s},$$

отже величина того самого ряду, що скорість світла, вислід тим більше цікавий, що — як звісно — з обчислень Ляпласа виходило би c безконечно велике.

(Physik. Zeitschr. 4. № 12).

Про спосіб, в який повстають мітли комет, оголосив цікавий артиккул П. Лебедев з Москви; в коротці подаємо його зміст. Вже Кеплер висказав в р. 1608. погляд, що мітли комет завдячують своє походжене частинкам, що відривають ся від її ядра під впливом відпихаючої сили сонця; но погляд сей пішов скоро в забуте особливо завдяки теорії Нютона загального притягання. Та в останніх часах завдяки електромагнетній теорії світла Maxwell'a справа ся стала знов актуальна; теория Maxwell'a і Bartoli обчисляє, що лучі світла сонічного тиснуть з силою, яка в віддаленю землі виносить 0.5 mg на 1 m². Теоретичні ті висліди ствердили в нових часах експериментально Лебедев, Nichols і Hull. Лебедев доказав, що наколи силу притягання приймем за одиницю, то для тіла кулистого о лучу r cm, а густоті δ (густина води = 1), якого розміри є дуже великі в порівнянню до филь сонічного промінювання, випаде вислідна притягання і відпихання:

$$F = 1 - \frac{1}{10000} \frac{1}{r\delta}$$

Для тіла о розмірах більших як 1 m є збочене (останній дроб) від права Нютона зникаючо мале; але для ядра комет, зложеного з метеоритів, що є менші як 1 cm, се збочене є вже досить велике і дасть ся виказати. Наколи єї метеорити є маленькі, але нерівні, то у кожного з них збочене є инше; така громада що раз більше ся деформує і комета ся розсипує (пр. Беліди). — Після дослідів Schwarzschild'a та відпихаюча сила осягає для певних розмірів тіла своє maximum, для розмірів менших, пр. менших як 0.001 mm, отже раду того, що довгота филь, сила та що раз то більше меншає.

(Physikal. Zeitschr. 4. Jahrg. № 1).

Що повстане мітли у комет дійсно вяже ся з тиском лучів світла, ілюструє дослід E. F. Nichols'a і G. H. Hull'a. Оба ті автори взяли рурку, де воздух розріджено до можливих границь; рурка мала вид клеписдри (годинника пісового). Рурку наповнено порошком (мішанина шмірлію і ростиинних спорів); наколи порошок пересипує ся з одної части рурки до другої і на сей луч порошок пущено жмуток світла лукового, то легонькі частинки порошку заховувались так, як би їх світло відтручало; повстало явище зовсім подібне до мітли комет, а ділане було такої величини, як се, що теоретично з обчисленого тиску світла випадало.

(Science, vol. XVII. p. 181. 1903).

Нову зьвізду відкрив фотографічно Turner в Оксфордї дня 25. III. в Близнятах ($\alpha = 6^h 37^m 8$, $\delta = +30^\circ 2' 6$); єї дуговина показує ясні лінії, головнo H.

(Naturwissensch. Wochenschr. № 29. 1903).

В послідних часах відкрито слідуючі подвійні зьвізди при помочи методи спектроскопічної:

o Persei (Adams 1902) o періодї 4.29 днів після Vogel'a; єї скорість з огляду на сонце колибаєсь між $+110$ а -110 km.

η Orionis o періодї 8 днів (Adams); скорість зглядом сонця між $+180$ а -110 km.

ϵ Aurigae (H. C. Vogel); скорість між 30 а 40 km.

Θ Aquilae (Deslandres) o періодї 16.7 днів.

ϕ Persei (Campbell).

δ Ceti 10 km

ν Eridani 24 km

π^5 Orionis 108 km

π^4 Orionis 15 km

ζ Tauri 32 km

η Virginis 10 km

Числа km означають найбільші обсервовані ріжниці скорости в лінії видження.

(Naturwiss. Wochenschr. № 30. 1903).

Часу обороту внїшних планет не можна було до тепер в ніякий спосіб означити, бо на поверхні Урана та Нептуна не можна було винайти точок, яких рух давав би якусь вказівку що до обороту самої планети. Тепер подав Deslandres в Meudon нову методу означеня часу обороту сих планет. Він обсервує ріжницю пересуень, які в спектроскопі показують противні кінці рівника;

они пересувають напрям рівника троха зглядом нормального положення, так що щит планети не виступає в дуговині яко коло, але яко троха наклонена еліпса. Величина сего наклонення є залежна від шкороности обороту. Автор провірав сю метолу вперед на Юпітері, а коли она оказалась вірна, застосував її до Урана. Показало ся, що ся планета має рух вспятний, так як і її місяці, факт що стоїть в суперечности з теорією Канта-Ляпласа.

(Himmel u. Erde XV. 1903. Heft 7).

Зв'ізда 85 Pegasi є 6. величини і має в віддаленю 1" товариша 11. величин; сю пару відкрив Burnham в р. 1878. і найшов час її обігу 25.7 літ. Тепер найшов G. C. Comstock на маси обох тих зв'ізд стосунок 2 : 3, так що темніша зв'ізда має більшу масу, хотяй її світло рівнає ся всего $\frac{1}{100}$ світла яснішої зв'ізди. Сей вислід стоїть в суперечности з загальним поглядом, що темніший складник зв'ізди подвійної є ближший загаснення, як его товариш, бо він з причини меншої маси скорше перейшов розвиток, що провадить до загаснення.

(Naturwiss. Rundschau XVIII. 1903. № 17).

B. Weinberg, доцент фізики в університеті в Одесі, зіставляє всі дотеперішні обчислення паралаксис сонічної і випроваджує з них на основі теорії найменших квадратів найімовірнішу вартість сєї величини. З обчислень его випадає величина паралаксис:

$$p = 8''8004 \pm 0''00243.$$

(Astronom. Nachrichten т. 162. № 3866).

H. Liebmann оголосив розвідку п. заг. Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raume (Berichte der kön. Gesel. der Wiss. zu Leipzig Bd. 54. 1902). З розслідув его виходить, що наколи-б простор наш був гіперболічний (Лобачевского), то:

- 1) Закон притягання Ньютона треба би заступити через:

$$\frac{1}{\sinh^2 r}, \quad (\sinh = \sinus hyperbolicus)$$

но різниця від закону $\frac{1}{r^2}$ була-б лиш величиною другого порядку.

- 2) перший закон Кеплера, що планети порушають ся по перерізах еліптичних, де в огнищу находить ся сила осередна, остає без зміни.

3) Закон збереження поверхні піль не остаєсь тут, а місто него є:

$$\frac{d\varphi}{dt} \sinh^2 r = \text{const.}$$

но різниця є ту лиш другого порядку і то тим менша, чим більше дорога зближаєсь ся до кола.

4) третє право Кеплера також змінює свій вид на:

$$T = 2\pi \cosh a (\sinh a)^{\frac{3}{2}}$$

(Т час обігу, а половина великої осі); але і та зміна є лиш зміною другого порядку.

Геліоцентричні сорядні (довгота і ширина) планет в р. 1903.
(що 30 днів).

1903	Меркур	Венера	Земля	Марс	Юпітер	Сатурн
5. січня	336°2 —6°6	305°2 —2°6	104°0	150°9 +1°8	325°8 —0°9	299°7 —0°3
4. лютого	142°9 +7°0	352°7 —3°4	134°5	164°0 +1°7	328°5 —1°0	
6. марта	248°6 —2°6	40°5 —2°0	164°7	177°2 +1°4	331°2 —1°0	
5. цвітня	334°8 —6°2	88°8 +0°8	194°5	190°7 +1°1	333°9 —1°1	302°4 —0°4
5. мая	153°0 +6°7	137°5 +3°0	223°8	204°5 +0°8	336°6 —1°1	
4. червня	254°2 —3°2	186°2 +3°2	252°7	218°9 +0°3	339°3 —1°1	
4. липня	353°9 —5°6	234°3 +1°2	281°3	233°9 —0°2	342°0 —1°2	305°2 —0°5
3. серпня	162°5 +6°3	281°9 —1°5	310°0	249°7 —0°7	344°7 —1°2	
2. вересня	259°8 —3°8	329°4 —3°3	338°8	266°3 —1°1	347°4 —1°2	
2. жовтня	3°6 —4°8	17°1 —2°9	8°1	283°8 —1°5	350°1 —1°2	308°0 —0°6
1. падолиста	171°3 +5°8	65°1 —0°6	37°9	302°1 —1°8	352°9 —1°3	
1. грудня	265°4 —4°3	113°6 +2°1	68°1	320°8 —1°8	355°6 —1°3	
31. грудня	13°9 —3°9	162°3 +3°4	98°6	339°9 —1°7	358°4 —1°3	310°7 —0°8

Середнє наклоненє екліптики на рік 1903,0 є: 23°27'6"60.

Перехід сонця (час середноєвропейский) через:

точку рівноденну весняну

21. марта 20^h 15^m

точку пересилєня літну

22. червня 16^h 5^m

точку рівноденну осінню

24. вересня 6^h 44^m

точку пересилєня зимову

23. грудня 1^h 20^m

(0^h = північ, 12^h = полудне).

(Zeitschr. für physik. u. chem. Unterricht XVI. Heft 1).

Мраковини в оточенні Нової Persei. В р. 1901. (в вересні) відкрив Ritchey (обсерваторія Yerkes'a) фотографічно перстенові мраковини в оточенні цієї зорки. Опісля постеріг Perrine (обсерваторія Lick'a) в падолісті 1901. такі зміни в тих мраковинах що до розмірів, положення і вигляду, що з огляду на величезне віддалення цієї зорки (паралакса $0''.1$) треба було прийняти швидкість тих має рівну швидкості світла. В виді сього Kapteyn поставив гіпотезу, що Nova при своїм розсвіщенні вислала філії світляні, які відбиваються поступово від щораз то далше положених частин оточуючих мраковин; мали би ми отже т. зв. ехо світляне. Гіпотезу сю попер математично Seeliger, а спосіб її переведення є так інтересний, що в короткій його ту подамо.

Після заложення Seeliger'a розсвічення нових зорки походять звідси, що великі маси передарюють ся через космічні хмари, через що їх рух трапляє на перепони і наступає аналогічне явище, як тоді, коли метеор передирає ся через земську атмосферу; ріжниця та, що при розсвіщенні зорки відбуває ся усе в величезних розмірах і кольосальних віддаленнях. Наколи час розсвічення зорки є короткий (пару день, як у новій Persei), тоді місцем геометричним тих частинок оточуючої мраковини, від яких відбите світло до нас рівночасно доходить, мусить бути параболоїд оборотний (Fig. VI.); його огнищем є нова зорка S, а напрям його осі є звернений до нас. Зі зв'язних своїх властивостей параболі слідує, що дороги світла SP_1Q_1 , SP_2Q_2 , SP_3Q_3 і т. д. є всі рівні дорожці $SP = PR$. Наколи на луку начеркненої параболі знаходять ся частинки маси, від яких світло може ся відбити, то обсерватори, що ся безконечно далеко знаходять, буде видавати ся, що всі ті частинки рівночасно ся розсвітили, бо світло відбите від точок цієї параболі рівночасно дістає ся до лінії PP' , а звідси іде як плоска філія до нас. Через оборот цієї параболі довкола лінії SE повстане згаданий параболоїд; для різних часів дістанем громаду співогнищевих параболоїдів, яких параметри є пропорціональні до часів, що минули від хвилі розсвітлення зорки.

Возьмим під увагу плоску веретву мраковинну, то она лиш тоді розсвітить ся (в очі обсерватора), наколи перетинає параболоїд, що даній хвилі відповідає; тим робом легко витолкувати собі повстане перстенових яєних ліній з пересуненням відосередним, як се фотографія виказує. З розслідування найдалше від осередка положених мраковинних перстенів заключає Seeliger, що найясніше місце нової лежить по стороні відвернення від сонця, наколи противно мраковина зближає ся до нас. — Наколи приймемо в масі

мраковинній утвори подібні до поясів о переважно лінійній розтягlosti, то поверхні перерізи тих поясів з ріжними (відповідно до часу) парабольоїдами мусіли б виступити яко ясні ізольовані плями, що не змінiali би свого виду, а за се від нової зьвізди віддаляли ся та показували скручене кута положення (позиційного). Такі плями дійсно найдемо в фотографіях нової. Теорію свою розвинув Seeliger в *Astrophysical Journal* Nov. 1902.

Рівночасно зібрав Perrine в тім самім зошиті *Astrophysic. Journ.* явища, які фотографія нової показує; ось его попередження:

В лютім 1902. р. істнували дві виразні області мраковинні, а се перстень о промірі $15'$, і перстень слабший вишній о промірі $30'$. Луч внутрішнього перстенья ріс що дия о $1''4$, вишнього о $2''8$, з чого слідує, що оба они мусіли зачати розвивати ся в хвилі розсв'ічення нової т. е. в лютім 1901. р.

Найвиразніші місця в тих перстеньях показують кромі сего рух оборотовий в части згідно, в части незгідно з рухом вказівки годинника; як раз ся обставина промавляє за правдивостію гіпотези Kapteyn'a-Seeliger'a. Внутрішній перстень взагалі стає менше, вишній більше ясний.

В світлі мраковини не викрив Perrine поляризації; се в трудність, з якою гіпотеза Kapteyn'a-Seeliger'a зустрічає ся, но се можна приписати дуже слабому світлу, так що трудно викрити в відбитім світлі поляризацию.

(*Zeitschr. für physik. u. chem. Unterricht* XVI. Heft 2).

Інтересний планетоїд. З поміж планетоїдів, відкритих в р. 1902., найінтересніший є планетоїд 1902. KX, відкритий через Вольфа в Гейдельберзі. Час его обігу триває майже вісім літ, найбільше віддалене від сонця $4,84$ лучів орбіти земскої, відосередність майже четверту часть его середного віддалення. В найбільшій віддаленю від сонця зближає ся сей планетоїд на 60 мільонів km до Юпітера; сонце представляє ся тоді на тім планетоїді під кутом $400''$, а за се Юпітер під кутом $480''$. Така позиція триває більше як два роки, і в тім часі переходить Юпітер о півночі через полуденник і є 100 рази яснійший, як у нас; по тім періоді він що раз більше меншає і слабне. Чотири давні місяці Юпітера видають ся на планеті KX першої, п'ятий (Барнарда з р. 1892.) восьмої величини. Що таке зближене до Юпітера потягне і потягає за собою великі зміни в дорозі сего планетоїда, то річ очевидна, яка має велике теоретичне значіння.

(*Das Weltall*, 3. Jahrg. 16. Heft).

Величезний метеорит відкрив проф. Н. А. Ward в Мехіку недалеко міста Bokubirito; він є довгий на 4·23 m, широкий 1·85 m, грубий 1·60 m, вага его 50800 kg. Его внутрішня будова показує структуру кристалічну і дуже гарні фігури Widmannstätt'a. Питомий тягар 7·69, склад хемічний 88% Fe з примішкою Ni і Co. Метеорит сей находить ся тепер в прародописнім музею в Нью-Йорку.

(Die Umschau VII. 1903. № 8).

Періодичні прояви в неорганічній матерії. Періодичні прояви, що є дуже розповсюднені в світі органічній (сон, віддихане, рух серця etc.), виступають дуже рідко у матерії неорганічній. В своїм часі зробило велике вражінє постережене Ostwald'a, що хром металічний розпускає ся в квасах з перемінною (періодичною) скоростію; через пару хвиль витворюють ся численні баньки газу, опісля витворюване газу уставало на пару хвиль, знову виступало сильно і т. д. Сеї власности не має кожний кусник металічного хрому. — Аналогічне поведєнє викрили недавно Bredig і Weinmayr у ртуті. Наколи на чисте годинникове скло (о промірі 1·3—2 cm) наляти пару cm^3 Hg, а на Hg до 10 cm^3 10%-ового розтвору чистого двоокису двоводня (H_2O_2), то ртуть покриває ся в температурі звичайній дуже скорє болонкою барви бронзово-золотої, а H_2O_2 виділяє баньочки кисня; по 5—40 мінутах устає нараз виділюване газу, а опісля по пару секунд зачинає ся на ново. Такі періодичні прояви виступають раз у раз нераз через цілу годину. Явище те стоїть імовірно в звязи зі зміною напруги поверхневої, але покищо не є ще точно вяснене.

(Zeitschr. f. physik. Chemie 1903. XLII. 5).

В газах, що видобувають ся з вулкану Mont Pelée, викрив славнозвісний париский хемік Moissan H , CO_2 , CO , H_2S , CS , CH_4 , C_2H_2 , N , NH_3 , A і He . Тепер же виказав Gautier, що наколи скалу в просторі безвоздушнім розігріти до червоного жару, то з неї видістають ся величезні маси повисших газів. Пр. шестистінник гранітовий о грани 1 km в тих обставинах дасть тільки газів, що через їх спалєнє-повстає 31 мілйонів тон води. З сего слідує, що до вибухів вулканічних не конче є потрібний приступ морської води до розпаленого внутра землі.

(Compt. rendus 136. 16).

Фірма F. Schmidt і Haensch в Берліні побудувала дуже простий апарат проєкційний, що не лиш служить до кидання на екран образів прозорих предметів (діапозитивів), як се роблять до тепер уживані скіоптикони і апарати проєкційні, але дозволяє також діставати на екрані образи непрозорих предметів, як книжок, рисунків, металів, анатомічних препаратів в начиннях, кристалізаційних прояв, лній сил, фігур Chladni'ого (положених поземо) etc. Близший опис сего нового та пожиточного знаряду знаходиться в

Deutsche Mechaniker Zeitung 1903. № 5.

Проф. Newcomb (Washington) оголосив недавно в книжці: *The Stars. A Study of the Universe*. (London 1901, 8^o ст. 320 + 6 таблиць) свої погляди про вселенну; погляди ті, поперті і математичною аналізою і філософічними спекуляціями, можна зібрати ось-так: Наколи приймем за одиницю просторну кулю, що її промір рівнаєся 200000 віддаленням землі від сонця, то пересічно випадає на 8 таких одиниць одна зьвізда. Наша вселенна є цариною, просторно обмеженою, але з сего ще не слідує, щоби далеко за нею не існували ще інші „острови всесвітні“, про які ми нічо не знаєм, бо там вже сила наших телескопів та фотографічних плит не сягає. Внїшня границя нашої вселенної є доволі неправильна; на нїй зьвізди є рідше розміщені, як у вселенній самій. Віддаленє сеї границі від нас є більше, як 3000 літ світла; її розміри в площі, визначеній через дорогу чумацку, є більші, як в напрямі до тої площі прямовісім. Число зьвізд, що належить до нашої вселенної, виносить сотки мільонів. — Ті погляди автора в істоті ріжняться де в чім від поглядів Seeliger'a, Kapteyn'a та Schiaparelli.

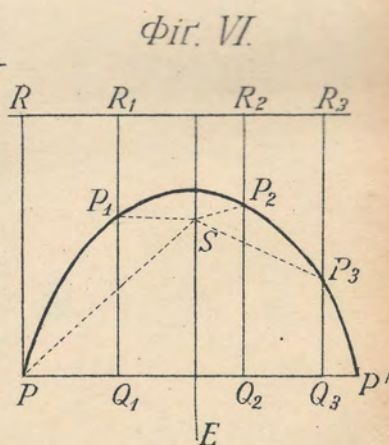
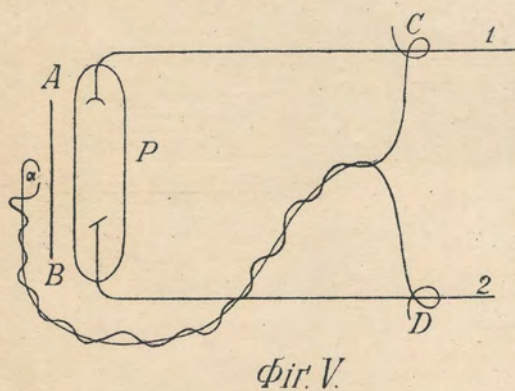
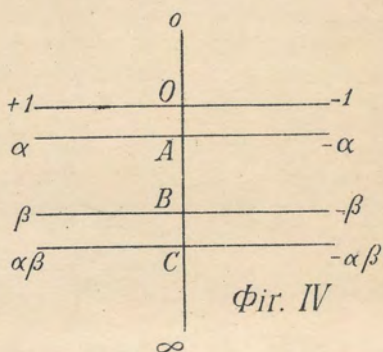
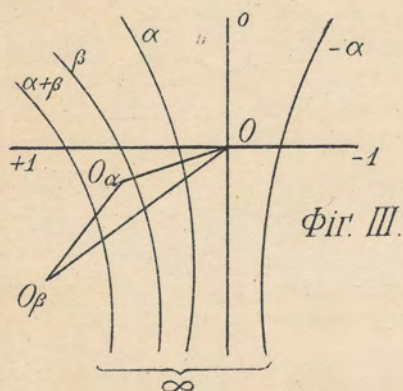
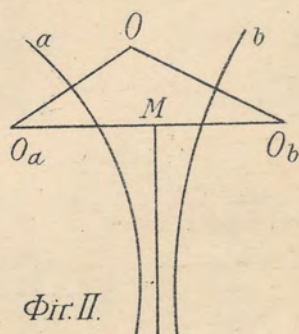
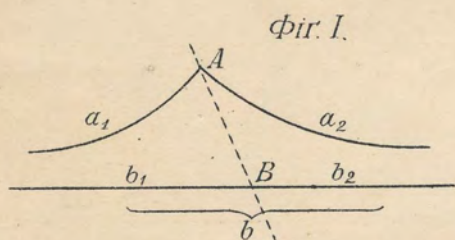
(Himmel u. Erde, Jahrg. XV. 1903. зом. 8).

Звідки взяв ся термометр Фаренгайта? Скаля сего термометру походить від Ньютона, що в р. 1701. прийняв температуру крові за точку вихідну своєї скалі; его термометр був руркою скляною, наповненою олійом льняним, найнижшою его точкою була точка замерзання. Точка, відповідаюча температурі крові, мала число 12 після тоді уживаного систему; відступ між точкою замерзання а точкою температури крові був поділений на 12 частин, так що точка кипіння води випадала при 30 степенях. Опісля Fahrenheit пересвідчив ся, що степені Ньютона за далеко від себе стоять, і тому з початку поділив кожний з них на дві часті, так що температура крові виносила 24^o. Пізнійше взяв він озаябляючу міша-

нину соли і леду, якої температура лежала після єго скалі 8° під точкою замерзання. Від сеї точки до точки температури крови поділив скалю на 24 частий, так що точка замерзання мала 8° , точка кипіння води 53° . А коли зайшла потреба мірити ще низші температури, поділив кожний степень на чотири части, так що точка замерзання випала $4 \times 8 = 32^{\circ}$, точка температури крови $4 \times 24 = 96^{\circ}$, а точка кипіння води $4 \times 53 = 212^{\circ}$.

(Prometheus 4. 1903. ст. 16).





ЛЕНИНСКА БИБЛИОТЕКА
АН УРСР
№ И

47.373

9.1

1975

З БІБЛІОТЕКИ
НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА

ІМЕНІ

ШЕВЧЕНКА

У ЛЬВОВІ.

Ч. 1975

ЗБІРНИК
МАТЕМ.-ПРИРОД.
ЛІКАРСЬКОЇ
СЕКЦІЇ

IX