ЗБІРНИК

СЕКЦИЇ
МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛЇКАРСКОЇ

НАУКОВОГО ТОВАРИСТВА ІМЕНИ ШЕВЧЕНКА.

Т. II.

ПІД РЕДАКЦИЄЮ

Івана Верхратского і Володимира Левицкого.

У ЛЬВОВІ, 1897.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З друкарнї Наукового Товариства імени Шевченка
під зарядом К. Беднарского.

Зміст.

INHALT.

Рівнане пятого степеня

написав

КЛИМ ГЛЇБОВИЦКИЙ.

ВСТУП.

Великі успіхи, якими повінчались розслїди італїйских математиків середних віків, як Ferro'а, Tartagli-и, Cardano'а, Ferrari'ого і и. в квестиї розвязки рівнань третого і четвертого степеня, навели їх на гадку, щоби сеї методи ужити і до розвязки висших рівнань, а передовсїм до розвязки рівнань пятого степеня. Та минуло яких сто лїт, а справа не посунулась анї троха вперед. Правда, в роцї 1683. подав Tschirnhaus в розвідцї „Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data equatione“ новий метод, який в спосіб незвичайно легкий веде до розвязки рівнаня другого та третого степеня, однак вже при рівнанях біквадратних жадає много роботи, а вже при рівнаню пятого степеня не дає ся пристосувати; тому-то Tschirnhaus не силував ся свого методу стосувати до сих рівнань, а лиш — як тодї було звичайом — індукцийно доказав правдивість свого твердженя. В XVIII. столїтю справа ся виринає на ново; підносять єї так знамениті мужі, як Euler, Bézout, Lagrange, Vandermonde та Malfatti, однак безуспішно. Закидувано твердженю Tschirnhaus'а лож, бо хоча резольвента 24. степеня, до якої провадив метод Tschirnhaus'а, дала ся заступити резольвентою 6. степеня, однак дальша редукция була вже неможлива, а проте ставалась неможлива розвязка рівнаня пятого степеня.

В виду того починає виринати гадка, що рівнане пятого степеня альґебраїчно розвязати ся не дасть, а перший, що підвіс сю гадку, був італїйский математик Ruffini. Однак його розвідка в сїй квестиї[1]) є так тяжка та скомплїкована, що тяжко сказати, чи ті конклюзиї є всї правдиві, чи нї. Квестию сю підняв на ново Abel, один з найбільших математиків усїх часів. Заложив він — що було одиноко рациональне — що всї рівнаня пятого степеня можна альґебраїчно розвязати, і як раз се заложенє довело його до внслїду, що **рівнаня загальні, яких степень є висший як четвертий, не мають розвязки альґебраїчної.** Однак доказ сей не видавав ся йому самому зовсїм простий, тому-то вже два роки пізнїйше 1826. р. подав[2]) він новий доказ, що є вже більше простий та ясний.

Та всеж таки довгий час еще тревала у деяких математиків віра, що рівнанє пятого степеня можна розвязати; навіть такий математик як Hamilton не хотїв признати доказу Abel'a. Та Abel'ови годї вже було доказ свій представити в видї зовсїм ясним та зрозумілим, бо вже в 27. роцї житя зійшов з того сьвіта; се зробили Wantzel та Kronecker.

Рівночасно з Abel'ом підняв квестию рівнаня пятого степеня 20. лїтний незвичайно остроумний Galois та доказав, що з поміж **рівнань неприводних дадуть ся альґебраїчно лиш ті розвязати, що мають таке свойство, що всї корені дадуть ся рационально представити через якінебудь два із тих коренів;** загальні же рівнаня альґебраїчно розвязати ся не дадуть, як се слїдно при помочи теориї ґруп. Та наколи докази Abel'a не є прозорі, то тим менше можна се сказати про докази Galois'a, бо він найтруднїйші дослїди подавав в формі дуже короткій, а часто і без доказу; та не стало йому і часу на близші поясненя, бо помер еще скорше як Abel в 21. роцї житя.

Колиж отже доказано, що рівнаня загальні альґебраїчно розвязати ся не дадуть, лишала ся квестия, як — хоча і неальґебраїчно — розвязати рівнанє пятого степеня. Зробив се Hermite 1858. р., та зовсїм независимо від него Kronecker, при помочи функций елїптичних.

В нинїшнїй розвідцї подано всї ті розслїди та змаганя, та іменно в першій части поданий є доказ Abel'a та доказ Galois'a, в другій части є представлені дослїди Hermite'a.

---

[1]) Teoria generale delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto. Bologna 1799.

[2]) Crelle's Journal т. I. p. 66.

ЧАСТЬ ПЕРША.

Досліди Abel'a.[1])

1. Возьмім скінчене число яких-небудь величин:

$$x_1\ x_2 \qquad x_n,$$

і най p', p'', будуть рациональними функциями тих величин, то:

$$p_1 = f(x_1\ x_2, \qquad \sqrt[n']{p'},\ \sqrt[n'']{p''},\ ---),$$

f функция рациональна, а n', n'', числа перві — то p_1 називати ся ме функциєю альґебраїчною першого ряду,

$$p_2 = f(x_1\ x_2, \qquad \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''}, \qquad \sqrt[n_1']{p_1'}, \sqrt[n_1'']{p_1''},\ ---)$$

є функция альґебраїчна другого ряду і т. д.

Загально функция альґебраїчна μ-того ряду має вид:

$$v = f(r'\ r'' \qquad \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''},\ ---),$$

де p' p''. є функциї ряду $(\mu-1)$, а r' r'', є функциї ряду $(\mu-1)$, або і нисшого.

Очевидно, що нїяка з величин $\sqrt[n']{p'}$, $\sqrt[n'']{p''}$, не дасть ся представити рационально через иньші того самого виду, як і через r', r'', бо тодї число тих $\sqrt[n]{p}$ в функциї f зменшилоби ся о одиницю, і в сей спосіб через редукцию дійшлибисьмо до вираженя:

$$v = f(r', r'', \qquad),$$

що є ряду $(\mu-1)$, наколи v мало бути ряду μ.

Функция ряду μ дасть ся також написати:

$$v = f(r', r'', \qquad \sqrt[n]{p}\ ),$$

де p є функция альґебраїчна ряду $(\mu-1)$, а r', r'', є функциями ряду μ, або і нисшого. А як кожда функция рациональна дає ся представити яко квот двох функций цїлковитих, то:

---

[1]) Пор. Crelle's Journal loc. cit. т. I., Abel: Oeuvres complètes т. II. та Maser: Abhdlgn. ü. algebraische Auflösung der Glgn von Abel u. Galois.

$$v = \frac{t_0 + t_1 p^{\frac{1}{n}} + \cdots + t_m p^{\frac{m}{n}}}{v_0 + v_1 p^{\frac{1}{n}} + \cdots + v_{m'} p^{\frac{m'}{n}}} = \frac{T}{V},$$

де T і V є рациональні цїлї функциї. Помножім чисельник і знаменник через V_1, V_2, V_{n-1}, де ті V_s представляють $(n-1)$ вартостий функциї V, наколи в нїй за $p^{\frac{1}{n}}$ положимо $\alpha^s p^{\frac{1}{n}}$ $(s=1 \cdots n-1)$, де α є первісний корень рівнаня $\alpha^n - 1 = 0$, то дістанемо:

$$v = \frac{T\, V_1\, V_2 \quad V_{n-1}}{V\, V_1\, V_2 \quad V_{n-1}}.$$

Знаменник є цїлковита рациональна функция величин r', r'' ⋯ і p, а чисельник функция цїлковита величин r', r'', $p^{\frac{1}{n}}$, проте:

$$v = \bar{q}_0 + \bar{q}_1 p^{\frac{1}{n}} + \bar{q}_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + \bar{q}_r p^{\frac{r}{n}},$$

де $\bar{q}_0$ $\bar{q}_1$, $\bar{q}_r$ є рациональні функциї величин p, r', r'', ⋯, що дасть ся єще через підставлене $\mu = an + \alpha$ (a і α числа цїлї) — чого не перепроваджуємо — привести до виду:

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \qquad 1)$$

де $p^{\frac{1}{n}}$ не дасть ся рационально представити через p, q_0, q_2 q_{n-1}.

2. Приймім, що виражене:

$$y = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \qquad 2)$$

сповняє рівнанє:

$$c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots + c_r y^r = 0, \qquad 3)$$

яке по вставленю y перейде на:

$$r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0, \qquad 4)$$

де r_s є рациональні функциї, утворені з p, q_0, q_1, q_2, q_{n-1}.

Рівнанє 4) сповняє ся однак лиш для

$$r_0 = r_1 = r_2 = \quad = r_{n-1} = 0,$$

бо наколиби так не було, то положивши $p^{\frac{1}{n}} = z$ дістанемо рівнанє:

$$z^n - p = 0, \qquad 5)$$

яке з рівнанем 4) має що найменше один корень спільний.

Наколи рівнаня 4) і 5) мають k коренів спільних, то можна утворити рівнанє степеня k, якого коренями є ті k коренів, а якого сочинники є рационально утворені з p, q_0, q_1, q_{n-1}; коли рівнанє се є:

$$s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \cdots + z^k = o, \qquad 6)$$

і оно є приводне, то наколи його розложимо на чинники неприводні, дістанемо один з них:

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \cdots + z^\mu = o, \qquad 7)$$

де t_s є такі самі функциї, як s або r. Кромі сего бачимо, що $\mu \geqq 2$, бо інакше $p^{\frac{1}{n}} = z$ далоби ся рационально представити через p, q_0, q_1, q_{n-1}, а се неможливо. Рівнане 7) має μ коренів спільних з 5), а що всї коренї рівнаня 5) мають вид:

$$p^{\frac{1}{n}},\ \alpha p^{\frac{1}{n}},\ \alpha^2 p^{\frac{1}{n}},\quad \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} \qquad (\alpha^n + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha + 1 = 0),$$

то 7) мусить ся сповнити для вартости αz, або:

$$t_0 + t_1 z\alpha + t_2 z^2 \alpha^2 + \cdots + z^\mu \alpha^\mu = 0 \qquad 8)$$

а з відси:

$$t_0(1-\alpha^\mu) + t_1(\alpha-\alpha^\mu) z + \cdots + t_{\mu-1}(\alpha^{\mu-1} - \alpha^\mu) z^{\mu-1} = 0. \qquad 9)$$

Се рівнанє має такий самий вид, як 7), а що 7) є неприводне, то 9) мусить бути ідентично зером, т. є.

$$t_0(1-\alpha^\mu) = 0;$$

$t_0 = o$, бо 7) є неприводне, отже мусїлоб $1 - \alpha^\mu = o$, а се неможливо, бо α є коренем первісним рівнаня $\alpha^n - 1 = 0$ ріжним від одиниці.

Мусить проте в рівнаню 4) бути:

$$r_0 = r_1 = r_2 = \cdots = r_{n-1} = o. \qquad 10)$$

3. На основі 10) сповняє ся рівнанє 4), наколи за $p^{\frac{1}{n}}$ будемо класти $\alpha^s p^{\frac{1}{n}}$ (s=0 n—1); дістанемо тоді ряд:

$$y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

$$y_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} \alpha^{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

а з відси:

$$q_0 = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n).$$

Наколи дальше помножимо y_2 через α^{n-1}, y_3 через α^{n-2}, y_n через α, а опісля y_2 через α^{n-2}, y_3 через α^{n-3}, дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} p^{\frac{1}{n}} &= \frac{1}{n}\left(y_1 + \alpha^{n-1} y_2 + \cdots + \alpha y_n\right) \\ q_2 p^{\frac{2}{n}} &= \frac{1}{n}\left(y_1 + \alpha^{n-2} y_2 + \cdots + \alpha^2 y_n\right) \end{aligned}\right\} \quad 10')$$

а з відси буде можна кожду з величин $p^{\frac{1}{n}}$ q_0 q_2 q_{n-1} виразити рационально через коренї рівнаня 3).

Н. пр:

$$q_\mu p^{\frac{\mu}{n}} = \frac{1}{n}\left(y_1 + \alpha^{n-\mu} y_2 + \alpha^{n-2\mu} y_3 + \cdots + \alpha^{n-(n-1)\mu} y_n\right),$$

а з відси:

$$q_\mu = \frac{n^{\mu-1}\left(y_1 + \alpha^{-\mu} y_2 + \alpha^{-2\mu} y_3 + \cdots + \alpha^{-(n-1)\mu} y_n\right)}{\left(y_1 + \alpha^{n-1} y_2 + \alpha^{n-2} y_3 + \cdots + \alpha y_n\right)^{\mu}}.$$

Бачимо проте, що *наколи рівнане якесь дає ся альґебраїчно розвязати, то на кождий корень рівнаня дістанемо вираженє таке, що кожда функция, яка входить в се вираженє, є рациональною функцнєю коренїв даного рівнаня* (I.)

4. Переходим тепер до другої части розслїдів Abel'a, себ-то до його розслїдів субституцийних.

Най v буде рациональна функция змінних независимих x_1 x_2 x_n. Число всїх можливих пермутаций тих велпчин є μ. Наколи A_1 A_2 A_μ є μ тих ріжних перемін, то всї можливі вартости функциї v представляє ряд:

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix},\quad v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},\quad v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_\mu \end{pmatrix}.$$

Може ся видарити, що функция v є менше чим μ — вартостева, т. є. що між повисшими підставленями є н. пр. m таких, що лишають вартість v без зміни, отже:

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \quad = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix} \qquad 11)$$

Наколи ту возьмемо підставлене $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_{m+1} \end{pmatrix}$, дістанемо:

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_{m+1} \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_{m+2} \end{pmatrix} = \quad = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_{2m} \end{pmatrix}.$$

Наколи підемо так дальше, доки не возьмемо всїх підставлень, дістанемо ρ ріжних рядів по m рівних вартостий, т. є. число всїх вартостий функциї v є $\mu = \rho m$.

Звідси слїдує твердженє (II.):

Число вартостий, які функция n величин через всї пермутациї тих величин може дістати, є подїльником добутка n'.

5. Наколи підставленє $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}$ дає через інтерацию ряд вартостий:

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^0, v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^1, v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^2, \quad v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{p-1} v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^0,$$

а p є найбільше число перве менше від n, то наколи число тих ріжних вартостий v є менше як p, то тоді між тими p вартостями якесь:

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^r = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{r'} \qquad \text{а з відси:}$$

$$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{r+p-r} = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{r'+p-r}$$

а як: $$v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^p = v, \qquad \text{то:}$$

$$v = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^s, \qquad s = r' + p - r;$$

позаяк p є число перве, то дасть ся утворити рівність:

$$s\alpha - p\beta = 1,$$

$$v = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}^{p\beta+1} \qquad \text{отже:}$$

$$v = v\begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix},$$

т. є. вартість функциї v не зміняє ся через наворотне (recurrent) підставленє ряду p, а проте не змінить ся, наколи пристосуємо два такі підставленя ряду p_1 утворені з тих самих букв н. пр.:

$$\begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta & \xi\,\eta \\ \beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon & \eta\,\alpha \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} \beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon & \eta\,\alpha \\ \gamma\,\alpha\,\beta\,\delta \text{---} & \xi\,\eta \end{pmatrix}$$

Ті оба підставленя можна заступити через підставленє $\begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \\ \gamma\,\alpha\,\beta \end{pmatrix}$, а що підставленє з трох букв дасть ся представити через дві переставки (транспозициї), проте v не змінить ся, наколи до него пристосуємо паристе число переставок; а наколи так, то знова всї вартости v, як півстали через ужитє непаристого числа переставок, є між собою рівні. Позаяк далї кожде підставленє дає ся заступити через певне число переставок, проте v є що найбільше двовартостеве, а проте вид його, як усїх функций двовартостевих, є:

$$\varphi = S + S_1 \sqrt{\Delta^2}$$

де S і S_1 є функциї симетричні, а Δ є дискріминантом величин $x_1\ x_2 \quad x_n$:

$$\Delta = (x_1 - x_2)\ (x_1 - x_3) \qquad (x_1 - x_n)\ (x_2 - x_3) \qquad (x_2 - x_n) \qquad (x_{n-1} - x_n).$$

Звідси слїдує:

Число ріжних вартостий, які функция n величин може принимати, не може бути менше, як найбільше число перве менше від n, так як в противнім разї зведе ся до 2, або до 1. (III.)

Не ма проте функциї 5 величин, яка би мала 3 або 4 вартости.

6. Пошукаймо тепер загального виду пятивартостевої функциї пятьох величин.

Найже v буде функция 5 величин x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, яка не зміняє вартости при переміні величин x_2, x_3, x_4, x_5. Яко функция симетрична тих величин дасть ся представити рационально через сочинники рівняня:

$$(x - x_2)\ (x - x_3)\ (x - x_4)\ (x - x_5) = x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s,$$

але:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e,$$

з відси:

$$a = p + x_1, \quad b = q + px_1, \quad c = r + qx_1, \quad d = s + rx_1, \quad e = sz_1,$$

отже:

$$\begin{aligned} p &= a - x_1 \\ q &= b - ax_1 + x_1^2 \\ r &= c - bx_1 + ax_1^2 - x_1^3 \\ s &= d - cx_1 + bx_1^2 - ax_1^3 + x_1^4; \end{aligned}$$

функция v дає ся проте представити рационально через x_1, a, b, c, d, e:

$$v = \frac{t}{\varphi(x_1)},$$

де t і $\varphi(x_1)$ є рациональні функциї x_1; утворім:

$$v = \frac{t\varphi(x_2)\ \varphi(x_3)\ \varphi(x_4)\ \varphi(x_5)}{\varphi(x_1)\ \varphi(x_2)\ \varphi(x_3)\ \varphi(x_4)\ \varphi(x_5)} = \bar{r}_0 + \bar{r}_1 x_1 + \cdots + r_m x_1^m \qquad 12)$$

де $\bar{r}_0\ \bar{r}_1 \ldots \bar{r}_m$ є рациональні функциї з огляду на a, b, c, d, e, бо знаменник є симетрична функция величин $x_1\ x_2 \ldots x_5$, а тим самим цілковита функция сочинників a, b, c, d, e, а чисельник яко цілковита функция p, q, r, s є функция цілковита величин x_1, a, b, c, d, e.

При помочи рівнаня:

$$x_1^5 = ax_1^4 - bx_1^3 + cx_1^2 - dx_1 + e \qquad 13)$$

можна привести v до виду:

$$v = r_0 + r_1x_1 + r_2x_1^2 + r_3x_1^3 + r_4x_1^4 \qquad 14)$$

бо наколи помножимо x_1^5 постепенно через $x_1, x_1^2, \ldots x_1^{m-5}$, дістанемо (m - 4) рівнань, з яких на $x_1^5, x_1^6, \ldots x_1^m$ дістанемо вираженя виду:

$$\alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 + \delta x_1^3 + \varepsilon x_1^4.$$

Сочинники $r_0\ r_1 \ldots$ в вираженю 14) є рациональні з огляду на a, b, c, d, e, а тим самим симетричні з огладу на $x_1\ x_2 \ldots x_5$. Само v є симетричне що до $x_2\ x_3\ x_4\ x_5$, а що яко функция пятьох величин не може мати трох або чотирох вартостий, і що далї не є двовартостева, тому v може бути лиш або пятивартостева або симетрична.

7. Приймім проте, що маємо якусь функцию v, що має пять вартостий: $v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5$, і возьмім функцию $x_1^m v$. Наколи в нїй поміняти між собою x_2, x_3, x_4, x_5 на всї способи, то ся функция мусить мати оден з видів:

$$x_1^m v_1, \quad x_1^m v_2, \quad x_1^m v_3, \quad x_1^m v_4, \quad x_1^m v_5.$$

Но ті 5 вартостий не можуть бути усї ріжні, бо тоді наколибисьмо переміняли постепенно x_1 з $x_1\ x_2\ x_5\ x_4\ x_5$, дісталибисьмо функцию 5 величин, що має 25 вартостий, а се неможливе на основі твердженя (I.).

Число вартостий, які може v приняти, коли в нїй поміняти x_2, x_3, x_4, x_5 на всї можливі способи, мусить бути:

$$\mu = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Для $\mu = 1$ є v симетричне що до x_2, x_3, x_4, x_5, має проте вид 14).

Для $\mu = 4$ є $v_1 + v_3 + v_3 + v_4$ функция виду 14), а з відси:

$$v_5 = \underbrace{(v_1+v_2+v_3+v_4+v_5)}_{\varphi \text{ симетр.}} \quad (v_1+v_2+v_3+v_4) \text{ має вид } 14)$$

Для $\mu = 2$ є:

$$v_1 + v_2 = r_0 + r_1x_1 + r_2x_1^2 + r_3x_1^3 + r_4x_1^4 = \varphi(x_1),$$

а коли поміняти x_1 з $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$, дістанемо:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 + v_2 = \varphi(x_1) \\ v_2 + v_3 = \varphi(x_2) \\ \\ v_{m-1} + v_m = \varphi(x_{m-1}) \\ v_m + v_1 = \varphi(x_m) \end{array}\right\} \quad m = 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Для $m = 5$ малибисьмо $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, а се неможливе, бо $\varphi(x_1)$ має мати пять вартостий:

Для $m = 3$ маємо:

$$v_1 + v_2 = \varphi(x_1),\quad v_2 + v_3 = \varphi(x_2),\quad v_3 + v_1 = \varphi(x_3),$$

а з відси:

$$2v_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \varphi(x_3).$$

Права сторона сього рівнаня має більше, чим 5 вартостий, проте $m = 3$ треба відкинути.

Для $m = 4$

$$v_1+v_2=\varphi(x_1),\quad v_2+v_3=\varphi(x_2),\quad v_3+v_4=\varphi(x_1),\quad v_4+v_1=\varphi(x_4),$$

а з відси:

$$2v_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \varphi(x_3) \quad \varphi(x_4);$$

се треба відкинути, бо права сторона має більше чим пять вартостий.

Для $m = 5$ маємо:

$$2v_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \varphi(x_3) - \varphi(x_4) + \varphi(x_5);$$

се є більше, чим пятивартостеве, проте $m = 5$ треба відкинути.

$\mu = 2$ треба проте відкинути.

Для $\mu = 3$ дістанемо $v_1+v_2+v_3$, а звідси і

$$v_4 + v_5 = (v_1+v_2+v_3+v_4+v_5) - (v_1+v_2+v_3),$$

а се є функция виду 14). Подібно як для $\mu = 2$ і ту показати можна, що $\mu = 3$ треба відкинути.

Звідси слїдує, що кожда функция пятивартостева пятьох величин має вид:

$$r_0 + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + r_4x^4 \qquad 15)$$

де $r_0\ r_1\ r_2\ r_3\ r_4$ є функциї симетричні, а x є одна з пятьох величин.

Наколи v є функция рациональна, що може принимати m ріжних вартостий $v_1\ v_2\ \ v_m$, то наколи утворимо добуток:

$$(v-v_1)(v-v_2)\quad(v-v_m) = q_0 + q_1v + q_2v^2 + \quad + q_m v^m = 0, \qquad 16)$$

то $q_0\ q_1\ \ q_m$ є симетричні функциї вартостий $v_1\ v_2\ v_m$

Наколибисьмо приняли, що v є коренем рівнаня висшого степеня, н. пр. рівнаня:

$$t_0 + t_1 v + t_2 v^2 + \cdots + v^\mu = o \qquad \mu < m \qquad 17)$$

де t є симетричні функциї, то наколи v_1 є одна з вартостий, що сповняє рівнанє 17), то дістанемо:

$$v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \cdots + t_0 = (v-v_1)P_1.$$

Поміняймо елемента функциї між собою, то дістанемо:

$$v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \cdots + t_0 = (v-v_2)P_2$$

$$v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + \cdots + t_0 = (v-v_m)P_m$$

$(v-v_1)$, $(v\ \ v_2)$, $\quad(v-v_m)$ є проте чинники рівнаня 17), або $m=\mu$; а з відси твердженє:

Наколи функция кількох величин має m ріжних вартостий, то можна найти рівнанє m-того степеня, що його сочинники є симетричними функциями, а коренями його є як раз ті вартости, но не найде ся рівнанє нисшого степеня, що моглоби мати за корені одну або більше з тих вартостий (IV.).

8. Тепер можемо уже приступити до доказу, що загальне рівнанє пятого степеня альґебраічно розвязати ся не дасть.

Наколи загальне рівнанє пятого степеня:

$$x^5 \quad ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = o$$

має мати розвязку альґебраічну, то в склад його кореня ввійдуть функциї виду $v = R^{\frac{1}{m}}$ де R є рациональна функция сочинників рівнаня, а *m* є число перве, так як кождий корень, що його виложник є числом зложеним, можна розділити на два або більше коренів, яких виложники є числами первими. v є на основі твердженя (I.) функция рациональна коренів. Маємо проте рівнанє:

$$v^{m} - R = o.$$

Степеня сього рівнаня знизити не можна, як се слїдує з попередних розслідів, проте v має на основі твер IV. m ріжних вартостий. А так як се є функция пятьох величин $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$, то m мусить бути подїльником добутку 5!, а що m є число перве, то оно мусить бути рівне 1, 2, 3, 5; но ми знаємо, що не ма функциї 5 величин, якаби мала три ріжні вартости, дальше m не може бути 1, бо корень рівнаня не може бути рациональною функциєю сочинників (як було висше сказано), тому лишає ся m = 5, або m = 2.

Возьмім $m = 5$.

Загальний вид функциї пятивартостевої пятьох величин є:

$$\sqrt[5]{R} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 \qquad 18)$$

Наколи се мемо степенувати, а рівночасно представимо кожде x^m, де $m > 4$, в виді (на основі 18):

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$$

то дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[5]{R} - r_0 &= r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 \\ \sqrt[5]{R} - r_0' &= r_1' x + r_2' x^2 + r_3' x^3 + r_4' x^4 \\ \\ \sqrt[5]{R} - r_0''' &= r_1''' x + r_2''' x^2 + r_3''' x^3 + r_4''' x^4 \end{aligned}\right\}$$

а з відси:

$$x = s_0 + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}}$$

$$s_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\,(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5), \qquad \alpha^5 = 1.$$

Права сторона має 120 вартостий, наколи $s_1 R^{\frac{1}{5}}$ є коренем рівнаня пятого степеня:

$$z^5 - s_1{}^5 R = o;$$

треба проте відкинути $m = 5$ і лишає ся $m = 2$.

Кожда функция двовартостева має вид:

$$v = \alpha + \beta \sqrt{s^2},$$

де α і β є функциї симетричні, а $s = \Delta$ є діскрімінант величин $x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5$.

Але кореня не буде можна представити через таку функцию, так як він є пятивартостевий, проте мусить бути:

$$\sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}} = v,$$

де $\alpha, \beta \neq o$, а v є рациональна функция коренів.

$$v_1 = \sqrt[m]{\alpha + \beta s}, \qquad v_2 = \sqrt[m]{\alpha - \beta s},$$

$$v_1 v_2 = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2},$$

де вираженє під коренем є функция симетрична. Наколи $\sqrt[m]{\alpha^2-\beta^2 s^2}$ не є симетричний, то на основі попередно сказаного $m = 2$, але тоді: $v = \sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}}$ має чотири вартости, що не може бути, бо функция 5 величин не може бути 4-вартостева. Мусить проте бути $\gamma = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}$ функция симетрична, отже:

$$v_1 v_2 = \gamma, \quad \text{а з віди:}$$

$$v_1 + v_2 = \sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}}} = p$$

$$v_1 + v_2 = \sqrt[m]{R} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{R}} = p.$$

Найже $p_1, p_2, \quad p_m$ є вартости, які дістанемо з p, наколи за $R^{\frac{1}{m}}$ положимо $R^{\frac{1}{m}}, \alpha R^{\frac{1}{m}}, \alpha^2 R^{\frac{1}{m}}, \quad \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}$, $(\alpha = \sqrt[n]{1})$, то наколи утворимо рівнанє:

$$(p-p_1)(p-p_2) \quad (p \quad p^m) = p^m - A_1 p^{m-1} + \cdots \pm A^m = o,$$

то в сочинники $A_1, A_2, \quad A_m$ увійдуть самі цїлковиті степені R, бо в сочинниках при дробових степенях вийде яко чинник сума коренїв одиниці, а та сума є зером. А коли так, то $A_1 A_2$ є симетричні функциї коренїв $x_1 x_2 \quad x_5$, а так як функция 5 величин не може бути 3-, або 4-вартостева, а не є 2-вартостева, то не може мати виду $\alpha + \beta\sqrt{s^2}$ і не є симетрична, а може бути лиш 5-вартостева, т. є. має вид:

$$\sqrt[5]{R} + \frac{\gamma}{\sqrt[5]{R}} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 = p,$$

а з віди:

$$x = s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + s_3 p^3 + s_4 p^4$$

А що $\quad p = R^{\frac{1}{5}} + \frac{\gamma}{R} R^{\frac{4}{5}},$ то дістанемо:

$$x = t_0 + t_1 R^{\frac{1}{5}} + t_2 R^{\frac{2}{5}} + t_3 R^{\frac{3}{5}} + t_4 R^{\frac{4}{5}},$$

де $t_0, t_1, \quad$ є рациональні функциї R і сочинників рівнаня.

Звіди:

$$t_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) = p',$$

$$t'^5 R = p'^5 = u + u'\sqrt{s^2}$$

$$(p'^5 - u)^2 = u'^2 s^2.$$

Як бачимо рівнане се є 10. степеня що до p', сочинники є симетричні, отже p' малоби 120 вартостий, т. є. дісталнбисьмо суперечність.

Функций, що входять в склад кореня, не можна представити проте рационально через корені тогож рівнаня, що все дасть ся зробити в рівнаню, яке має розвязане альґебраічне; з відси отже слїдує, що рівнанє пятого степеня, а тим самим і висших степенів, з загальними сочинниками не мають розвязки альґебраічної.

В сей спосіб маємо переведений доказ Abela о рівнанях висших степенів.

Дослїди Galois.[1])

Galois перевів свої глубокі дослїди на основі ґрупи рівнаня. Ті його розслїди представимо ту в скороченю.

Возьмім рівнанє степеня n:

$$f(x, R', R'', \cdots) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c^n = o \qquad 1)$$

та заложім, що сочинники c_1 c_2 c_n належать до обсягу чисел рациональних $(R'\ R'', \cdots)$ та що $f(x)$ є неприводне.

Знаємо, що рівнанє дає ся розвязати альґебраічно тодї, коли сповняє ся тотожно, наколи за x вставити виражене, утворене з елементів обсягу рациональности, при помочи слїдуючих операций альґебраічних: додаваня, відниманя, множеня, дїленя, цїлковитого степенованя і витяганя кореня з виложником, що є числом первим. Ряд дїлань потрібних до утвореня такого вираженя альґебраічного зводить ся до:

1°. утвореня функций рациональних з елементів обсягу:

$$F_r\ (R'\ R''\quad).$$

2°. витяганя кореня v_r, що його виложник є числом первим, з тої функциї, при чім закладаємо, що F_r не є точна степень ряду p_r ніякої функциї з нашого обсягу, бо тодї v_r само вже належалоби до того обсягу. Проте мусить бути:

$$v_r^{p_r} = F_r\ (R'\ R''\ \cdots).$$

---

[1]) Пор. Maser op. cit. Netto: Substitutionentheorie; Vogt: Leçons sur la résolution algébrique des équations.

3⁰. долученя v_r до обсягу рациональности та утвореня функциї рациональної $F_{r-1}(v_r R' R'' \ldots)$ і витягненя з неї кореня v_{r-1} о виложнику p_{r-1}; F_{r-1} не може бути точною степенею ряду p_{r-1} ніякої функциї з нового обсягу $(v, R' R'' \ldots)$, отже:

$$v_{r-1}^{p_{r-1}} = F_{r-1}(v_r R' R'' \ldots)$$

4⁰. долученя v_{r-1} до попередного обсягу рациональности, утвореня функциї $F_{r-2}(v_{r-1} v_r R' R'' \ldots)$, рациональної в новім обсягу, і т. д.

Можна проте представити утворенє функциї альґебраїчної, про яку бесїда, т. є. такої, що сповняє тотожно рівнанє 1), при помочи ряду рівнань:

$$\left.\begin{aligned}
v_r^{p_r} &= F_r(R' R'' \ldots) \\
v_{r-1}^{p_{r-1}} &= F_{r-1}(v_r R' R'' \ldots) \\
v_{r-2}^{p_{r-2}} &= F_{r-2}(v_{r-1} v_r R' R'' \ldots) \\
&\ldots \\
v_1^{p_1} &= F_1(v_2 v_3 \ldots v_r R' R'' \ldots) \\
x_1 &= F_0(v_1 v_2 v_3 \ldots v_r R' R'' \ldots)
\end{aligned}\right\} \quad 2)$$

де F є функциї рациональні, а p числа беззглядно перві.[1])

Наколи G є ґрупа рівнаня 1) і має ряд зложеня:

$$G, G_1, G_2, \ldots G_\mu, 1,$$

а $e_1\ e_2 \ldots e_\mu\ e_{\mu+1}$ є відповідні чинники зложеня, то дане рівнанє дасть ся розвязати при помочи постепенного розвязаня рівнань степенів $e_1\ e_2 \ldots e_{\mu+1}$; рівнаня ті мають се свойство, що кожде є неприводне в обсягу рациональности, розширенім через долученє до него коренів попередних рівнань і що в тім новім обсягу коренї виражають ся рационально через один із них; ґрупа рівнаня зводить ся через постепенне долучанє одного кореня кождого із тих рівнань на ґрупи:

$$G_1\ G_2 \ldots G_\mu,\ 1.\ ^{2})$$

Як бачимо істнує повна анальоґія між тими рівнанями а рівнанями 2). Очевидна проте річ, що постепенне долучанє нерациональностий v зводить ґрупу рівнаня G на ряд ґруп $G, G_1, G_2, \ldots G_\mu, 1$, які творять ряд зложеня ґрупи G; їх чинники зложеня є точно рівні степеням повисших біноміяльних рівнань. Ґрупа G мусить

---

[1]) Пор. Netto loc. cit. ст. 236, Vogt: loc. cit. ст. 107.
[2]) Netto ibid. ст. 274 і 275, Vogt ibid. ст. 191.

проте бути зложена і мати чинники зложена, що б числами первими, наколи рівнане має ся дати розвязати альґебраічно.

Ся умова є необходима, але і достаточна. Бо приймім, що она ся сповнила, що йроте чинники зложеня ґрупи рівняня б числа перві. Приймім дальше, що ґрупу рівняня в звелисьмо через долучене **Функциї** рациональної коренів, що е означені через одну або більше резольвент, на ґрупу , яка належить до ряду зложеня. Наколи в ^ і е дальша ґрупа в ряді, а рк є число перве, що означає відношене Груп і , то[1]) можна утворити **Функцию** коренів, яка ся відносить до їругш і яка має для підставлень їрупи $p_к$ варгостий коренів рівняня біноміяльного, що його сочинники належать до ґрупи Наколи долучимо одну з тих вартостий т. є. один корень рівняня біноміяльного о виложнику рк , то їрупа зведе ся на ґрупу Наколи в сей спосіб будемо поступати почавиш від то будемо могли утворити ряд рівнань біноміяльних, які ведуть постепенно до розвязаня рівняня.

Можна проте сказати, що необходимою та достаточною умовою, щоби рівнане мало розвязкуальґебраічну, є, щоби чинники зложеня ґрупи рівняня були числами первими.

Рівняня загальні 3. та 4. степеня сповняють сю умову, так як ґрупа першого має чинники зложеня 2 і 3, їрупа другого 2, 3, 2, 2. Ґрупа симетрична — а такою є їрупа загального рівняня[2]) — п елементів на случай п > 4 має чинники зложеня 2 і > а ию сей другий не є числом первим, проте:

Рівнане загальне степеня п > 4 не має розвязки альґебраічно ї.

[1]) на основі тверджeня : Наколи ґрупа G ряду г е ґрупою частною ґрупи G' ряду шг (m число беззглядно перве), то істнують функциї, що ся відносять до ґрупи G, такі, що їх m вартостий для підставлень ґрупи G' є коренями рівняня біноміяльного степеня m. (Vogt loc. cit. ст. 40).

[2]) Vogt loc. cit. ст. 79.

ЧАСТЬ ДРУГА.

Дослїди Hermite'a.

Розслїди Abel'a, Ruffini'ого та Galois'a показали, що годї на дорозї альґебраічній шукати розвязки рівнаня пятого степеня; тому то Hermite[1]) почав шукати, чи би не дало ся представити коренів рівнаня пятого степеня при помочи якихсь функций, щоби відносили ся до нових помічних змінних. Тим помічним елементом показали ся як раз функциї елїптичні. Hermite розвязку свою пристосував до рівнаня пятого степеня в виді Bring-Jerrarda:

$$x^5 + x + b = o,$$

бо до такого виду дає ся звести загальне рівнанє пятого степеня на основі трансформациї Tschirnhaus'a.

1. Заким приступимо до перетвореня загального рівнаня пятого степеня, мусимо ввести помічне твердженє. **Функцию цїлковиту однородну другого степеня о n змінних можна все представити яко суму ν функций першого степеня,** де $\nu \leqq n$.[3])

Наколи функция v є цїлковита однородна другого степеня о n змінних $(x_1\, x_2 \quad x_n)$ і має в собі квадрат одної з тих змінних н. пр. $x_1{}^2$, то можна єї представити в виді:

$$v = \alpha x_1{}^2 + 2Qx_1 + R,$$

де α є стала, ріжна від зера, Q функция першого, а R другого степеня що до $(n-1)$ змінних $(x_2 \quad x_n)$.

Положім:

$$x_1 + \frac{Q}{\alpha} = X_1, \qquad R - \frac{Q_1{}^2}{\alpha} = v_1, \quad \text{то:}$$

$$v = (X_1 \sqrt{\alpha})^2 + v_1,$$

де V_1 є функция цїлковита однородна другого степеня $(n-1)$ арґументів.

Наколи v не має в собі квадратів, а лиш добутки, то:

$$v = \beta x_1 x_2 + Qx_1 + Rx_2 + S,$$

---

[1]) Comptes rendus том 46 рік 1858.

[2]) Пор. Weber: Lehrbuch der Algebra т. I. ст. 175; також Klein: Vorlesungen über das Ikosaëder ст. 143.

[3]) Пор. Zajączkowski: Zasady algebry wyższej ст. 101.

де значінє β, Q, R, S є очевидне.

$$v = \beta\left(x_1 + \frac{R}{\beta}\right)\left(x_2 + \frac{Q}{\beta}\right) + S - \frac{QR}{\beta},$$

а наколи: $X_1 = \frac{1}{2}\left(x_1+x_2+\frac{Q+R}{\beta}\right)$, $X_2 = \frac{1}{2}\left(x_1-x_2-\frac{Q-R}{\beta}\right)$,

$$v_2 = S - \frac{QR}{\beta},$$

то:
$$v = (x_1 \sqrt{\beta})^2 + (x_2 \sqrt{\beta})^2 + v_2,$$

де v_2 є функция цїлковита однородна другого степеня $(n-2)$ змінних, а $x_1\, x_3$ є функциї степеня 1 о n змінних $(x_1\, x_2 \quad x_n)$.

Наколи так дальше будемо поступати з $v_1\, v_2$, представимо вкінци v яко суму квадратів, яких число не може бути більше як n.

Тверджене є проте доказане.

2. Возьмім тепер рівнане пятого степеня:

$$x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = o \qquad 1)$$

та ужиймо підставленя:

$$u = a_0 + a_1x + \cdots + a_4x^4 \qquad 2)$$

де $a_0\, a_1$ є числа сталї на разї незвісні. Піднесім 2) до степенї 2, 3, 4, та обнижім рівночасно при помочи рівнаня 1) виложники змінної так, щоби нїде не були висші як 4; дістанемо:

$$\left.\begin{array}{ll} u^2 = b_0 + b_1x + \cdots + b_4x^4, & u^5 = e_0 + e_1x + \cdots + e_4x^4 \\ u^3 = c_0 + c_1x + \cdots + c_4x^4 & \\ u^4 = d_0 + d_1x + \cdots + d_4x^4 & \end{array}\right\} \quad 3)$$

де $b_0\, b_1 \quad c_0\, c_1 \quad d_0\, d_1 \quad e_0\, e_1$ є функциї цїлковиті однородні степеня 2, 3, 4 що до сталих $a_0\, a_1 \quad a_4$.

Означім через $s_1\, s_2 \quad s_5$ суми перших, других, пятих степений коренїв рівнаня 1), а через $S_1\, S_2 \quad S_5$ суми перших, пятих степений коренїв рівнаня з арґументом u, то тодї рівнаня 2) і 3) дадуть:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = 5a_0 + a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + a_4s_4 \\ S_2 = 5b_0 + b_1s_1 + b_2s_2 + b_3s_3 + b_4s_4 \\ \\ S_5 = 5e_0 + e_1s_1 + e_2s_2 + e_3s_3 + e_4s_4 \end{array}\right\} \quad 3')$$

Возьмім походну рівнаня:

$$f(x) = x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx + e \equiv (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5),$$

то дістанемо:

$$5x^4 - 4ax^3 + 3bx^2 - 2cx + d = \frac{f(x)}{x-x_1} + \frac{(f)x}{x-x_2} + \cdots + \frac{f(x)}{x-x_5} \qquad 4)$$

Але:

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = x^4 + (x_1 - a)x^3 + (x_1^2 - ax_1 + b)x^2 + (x_1^3 - ax_1^2 + bx_1 - c)x +$$
$$+ (x_1^4 - ax_1^3 + bx_1^2 - cx_1 + d)$$

$$\frac{f(x)}{x-x_5} = x^4 + (x_5 - a)x^3 + (x_5^2 - ax_5 + b)x^2 + (x_5^3 - ax_5^2 + bx_5 - c)x +$$
$$+ (x_5^4 - ax_5^3 + bx_5^2 - cx_5 + d);$$

Наколи се вставимо в 4), дістанемо:

$$5x^4 - 4ax^3 + 3bx^2 - 2cx + d = 5x^4 - (s_1 + 5a)x^3 + (s_2 - as_1 + 5b)x^2 + \cdots$$
$$\cdots + (s_4 - as_3 + bs_2 - cs_1 + 5d),$$

а з відси:

$$\left.\begin{aligned} 4a &= s_1 + 5a \\ 3b &= s_2 - as_1 + 5b \\ 2c &= s_3 - as_2 + bs_1 - 5c \\ d &= s_4 - as_3 + bs_2 - cs_1 + 5d \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

З відси обчислимо $s_1\ s_2 \cdots$, дальше з 3') $S_1\ S_2 \cdots$, а тодї дістанемо на основі взорів анальоґічних до 5) сочинники рівнаня арґументу *u*.

Найже се нове рівнанє має вид:

$$u^5 + q_1u^4 + q_2u^3 + q_3u^2 + q_4u + q_5 = o. \qquad 6)$$

Щоби усунути з того рівнаня u^4, u^3, u^2, треба визначити сталї a_0, a_1 в рівнаню 2) так, щоби:

$$q_1 = o, \quad q_2 = o, \quad q_3 = o.$$

Перше з тих рівнань є першого степеня що до тих сталих, друге другого, а трете третого степеня.

В тій цїли виражім з рівнаня $q_1 = o$ сталу a_0 через $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$, і одержану вартість вставмо в рівнаня $q_2 = o$, $q_3 = o$. Ті два рівнаня перейдуть тодї на $q'_2 = o$ і $q'_0 = o$.

$q'_2 = o$ є тепер функция цїлковита однородна степеня другого що до a_1, a_2, a_3, a_4, можна єї проте після в горі поданого твердженя представити в виді:

$$f^2 + g^2 + h^2 + k^2 = o,$$

де f, g, h, k є функциї першого степеня.

То рівнане сповнить ся, наколи положимо $f=gi$, $h=ki$. Виражім з тих двох послїдних рівнань, які є степеня 1, сталї a_1 і a_2 через a_3 і a_4 і вставмо ті вартости в $q'_3=o$, то дістанемо рівнане $q_3''=o$, що є однородне і третого степеня що до a_3 і a_4. Наколи одно з тих чисел возьму після вподоби, дістанемо друге через розвязане рівнаня 3. степеня. А тодї рівнане 1) перейде на:

$$u^5 + pu + q = o \qquad 7)$$

а наколи положу $u = \rho t$, $p = -\rho^4$, то:

$$t^5 - t - A = o. \qquad 7')$$

Се є форма Bring-Jerrard'a. — Наколи так, то приступимо тепер до розвязаня того рівнаня при помочи функций елїптичних.

3. Між модулами функций елїптичних k і k', де:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{k} &= 2\sqrt[9]{q}\prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}}\right)^2 = \prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1-p^{2m-1}}{1+p^{2m-1}}\right)^2,\\ \sqrt{k'} &= \prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}}\right)^2 = 2\sqrt[4]{p}\prod_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1+p^{2m}}{1+p^{2m-1}}\right)^2\end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

і де:

$$q = e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi i} = e^{\varrho\pi i}, \quad p = e^{\frac{-\pi i}{\varrho}}$$

і де k відносить ся до періодів (ω, ω'), k' до періодів $\left(\frac{\omega}{n}, \omega\right)$, істнує звязь:[1])

$$\sqrt{k'} = \sqrt{k^n}\prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{cn^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}{dn^2\left(p\frac{\omega}{n}\right)}.$$

Наколи означимо через ε одну з $(n+1)$ величин $\frac{2\omega}{n}$, $\frac{\omega'+16t\omega}{n}$ для $t = 0, 1, 2, \quad \overline{n-1}$, то та звязь для модулїв буде:

$$\sqrt{k\varepsilon} = \sqrt{k^n}\prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{cn^2(p\varepsilon)}{dn^2(p\varepsilon)}$$

Положім: $\sqrt{k} = u^2$, $\sqrt{k\varepsilon} = v^2$, то $(n+1)$ вартостий v дістанемо з рівнаня:

$$v = u^n\prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{cn(p\varepsilon)}{dn(p\varepsilon)} \qquad 9)$$

---

[1]) Пор. Briot-Bouquet: Théorie des fonctions elliptiques ст. 318, 542, 624.

а що:[1])

$$\mathrm{cn}(z) = \frac{\Theta(o)}{\Theta_2(o)} \frac{\Theta_2(z)}{\Theta(z)}, \qquad \mathrm{dn}(z) = \frac{\Theta(o)}{\Theta_3(o)} \frac{\Theta_3(z)}{\Theta(z)},$$

а:[2])

$$\frac{\Theta_3(o)}{\Theta_2(o)} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

то дістанемо:

$$v = u^{\frac{n-1}{n}} \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{n}} \frac{\mathrm{cn}(p\varepsilon)}{\mathrm{dn}(p\varepsilon)} = u \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{n}} \frac{\Theta_2(p\varepsilon)}{\Theta_3(p\varepsilon)} =$$

$$= u \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(2mp\varepsilon + m^2\omega')}}{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left((2m+1)p\varepsilon + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 \omega'\right)}} \;{}^{3)} \qquad 10)$$

а з відси:

$$\xi = \frac{v}{u^n} = \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathrm{cn}(p\varepsilon)}{\mathrm{dn}(p\varepsilon)}. \qquad 11)$$

Наколи в вираженю:[4])

$$\frac{\mathrm{cn}(nz)}{\mathrm{dn}(nz)} = \frac{\mathrm{cn}(z) \,\Pi \left[1 - \frac{\mathrm{dn}^2(o)}{\mathrm{cn}^2(o)} \mathrm{sn}^2(z)\right]}{\mathrm{dn}(z) \,\Pi \left[1 - k^2 \frac{\mathrm{cn}^2(o)}{\mathrm{dn}^2(o)} \mathrm{sn}^2(z)\right]}$$

положимо: $\frac{\mathrm{cn}(nz)}{\mathrm{dn}(nz)} = 1$ дістанемо на $\frac{\mathrm{cn}(z)}{\mathrm{dn}(z)}$ функцию дробову рациональну що до k^2 і $\mathrm{sn}^2(z)$. А наколи положимо $z = p\varepsilon$ дістанемо ξ яко функцию симетричну $\frac{n-1}{2}$ величин:

$$\mathrm{sn}^2(\varepsilon), \ \mathrm{sn}^2(2\varepsilon), \qquad \mathrm{sn}^2\left(\frac{n-1}{2}\varepsilon\right) \qquad 12)$$

ті величини відтваряють ся в певнім порядку, наколи заступимо через $a\varepsilon$, де a є число перве менше від n, а наколи кожду з тих величин 12) виразити рационально через $\mathrm{sn}^2(\varepsilon)$ і k^2, то дістанемо ξ яко функцию рациональну що до $\mathrm{sn}^2(\varepsilon)$ і k^2:

$$\xi = F\left(\mathrm{sn}^2(\varepsilon), k^2\right).$$

---

[1]) Briot-Bouquet loc. cit. ст. 356.
[2]) ibidem ст. 319.
[3]) ibidem ст. 115.
[4]) ibidem ст. 519, 520.

Позаяк ξ є симетричне що до вартостий 12), а тї вартости відтваряють ся в певнім порядку, наколи за ε положу $a\varepsilon$, то:

$$F\left(\mathrm{sn}^2(a\varepsilon),\ k^2\right) = F\left(\mathrm{sn}^2(\varepsilon),\ k^2\right),$$

а наколи заступимо постепенно ε через ε, 2ε, $\frac{n-1}{2}\varepsilon$, то дістанемо:

$$\xi = \frac{2}{n-1}\sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} F\left(\mathrm{sn}^2(p\varepsilon),\ k^2\right);$$

а як ε має $(n+1)$ ріжних вартостий, то і ξ буде мало $(n+1)$ вартостий ріжних, буде проте коренем рівнаня $(n+1)$ степеня що до ξ, а в сочинники того рівнаня увійде k^2. Наколи ξ заступити через $\frac{v}{u^n}$, дістанемо рівнанє між u і v степеня $(n+1)$ що до v, а се рівнанє назве ся модуловим рівнанем. — Наколи заступимо u через $ue^{\frac{2h\pi i}{8}}$, то вартости на ξ не змінять ся, отже v відтворює ся з чинником $e^{\frac{2h\pi ni}{8}}$.

З взорів 8) слїдно, що $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, а також $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ є однозначні функциї величини ρ, наколи s в виражeню:

$$\rho = r + si$$

є додатне і ріжне від зера; можна проте положити:

$$\sqrt[4]{k} = \varphi(\rho), \qquad \sqrt[4]{k'} = \psi(\rho),$$

де φ і ψ є функциї однозначні. Функциї тї мають слїдуючий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\psi\left(-\frac{1}{\rho}\right) &= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-e^{-\frac{2m-1}{\varrho}\pi i}}{1+e^{-\frac{2m-1}{\varrho}\pi i}} = \varphi(\rho)\\
\varphi\left(-\frac{1}{\rho}\right) &= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-e^{(2m-1)\varrho\pi i}}{1+e^{(2m-1)\varrho\pi i}} = \psi(\rho)\\
\psi(\rho+1) &= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-e^{(2m-1)(\varrho+1)\pi i}}{1+e^{(2m-1)(\varrho+1)\pi i}} =\\
&= \prod\frac{1+e^{(2m+1)\varrho\pi i}}{1-e^{(2m-1)\varrho\pi i}} = \frac{1}{\psi(\rho)}
\end{aligned}\right\} \quad 13)$$

$$\left.\begin{aligned}
\psi(\rho+2) &= \frac{1}{\psi(\rho+1)} = \psi(\rho)\\
\varphi(\rho+1) &= \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi\rho i}{8}} e^{\frac{\pi i}{8}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1+e^{2m\pi\rho i}}{1-e^{(2m-1)\pi\rho i}} = e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)}\\
\varphi(\rho+2) &= e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\varphi(\rho+1)}{\psi(\rho+1)} = e^{\frac{2\pi i}{8}} \varphi(\rho)\\
\varphi(\rho+2h) &= e^{\frac{2h\pi i}{8}} \varphi(\rho)
\end{aligned}\right\} \quad 13)$$

4. З $(n+1)$ вартостий на v, які дістанемо з взору 9), най вартість V відносить ся до періодів $\left(\frac{\omega}{n}\ \omega'\right)$, а v_t до періодів $\left(\omega'\ \frac{\omega'+16t\omega}{n}\right)$.

Вартости ті виразять ся взорами:

$$V = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi(n\rho), \qquad v_t = \varphi\, \frac{\rho+16t}{n}. \qquad 14)$$

Покажемо, що так дїйсно є.

Рівнанє 10) дає всї вартости v яко однозначні функциї арґументу ρ і наколи приймемо $\rho = si$, то на основі розвинень:[1])

$$\Theta_3(p\varepsilon) = \varphi(q) \prod_{m=1}^{\infty} \left[1 + q^{2m-1} \cos\frac{2\pi p\varepsilon}{\omega} + q^{2(2m-1)}\right]$$

$$\Theta_2(p\varepsilon) = 2\sqrt[4]{q}\, \varphi(q) \cos\frac{\pi p\varepsilon}{\omega} \prod_{m=1}^{\infty} \left[1 + q^{2m} \cos\frac{2\pi p\varepsilon}{\omega} + q^{4m}\right]$$

бачимо, що в обох вираженях маємо під знаком добутка величину додатну та дїйсну, отже квот $\frac{\Theta_2}{\Theta_3}$ буде також дїйсний, а знак його буде такий, який має $\cos\frac{\pi p\varepsilon}{\omega}$; а що до V належить $\varepsilon = \frac{2\omega}{n}$, то знак буде такий, як у $\cos\frac{2\pi p}{n}$, де $p = \left(1 \quad \frac{n-1}{2}\right)$. Наколи $\frac{n-1}{2}$ є паристе і рівне $2n'$, то наколи n' перших чинників є додатні, а n' слїдуючих відʼємні, то V буде мало знак $(-1)^{n'}$; наколи

[1]) ibidem ст. 315.

$\frac{n-1}{2}$ є непаристе, рівне $2n'-1$, то наколи $n'-1$ чинників є додатних, а n' від'ємних, то V має знак $(\quad 1)^{n'}$; се значить, що V має все знак $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ а так як $\varphi(n\rho)$ є додатне і дійсне, то:

$$V = \sqrt{2}\, e^{n\pi\frac{\omega'}{\omega}i} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-e^{2mn\frac{\omega'}{\omega}\pi i}}{1+e^{2mn\frac{\omega'}{\omega}\pi i}} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \varphi(n\rho);$$

отже перший з взорів 14) є правдивий.

Щоби дістати v_t, треба покласти: $\quad = \frac{\omega'+16t\omega}{n}$, або $\frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{\rho+16t}{n}$

$$v = u \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}\left(2mp\varepsilon + m^2\omega'\right)}}{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(2m+1)p\varepsilon + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\omega'}};$$

а наколи положимо $\rho+16t=\rho'$, дістанемо на основі 13):

$$u = \varphi(\rho'-16t) = \varphi(\rho').$$

Оно є дійсно додатне для $\rho'=s'i$, а також і:

$$v'_t = \varphi(\rho') \prod_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\pi\rho' i\left[\frac{2m+1}{n}p + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\right]}}{\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\pi\rho' i\left[\frac{2mp}{n} + m^2\right]}}$$

буде дійсне і додатне для $\rho'=s'i$; так само $\varphi\left(\frac{\rho'}{n}\right)$, як і v_t буде дійсне та додатне:

$$v_t = \sqrt{2}\, e^{\frac{\omega'+16t\omega}{8n\omega}\pi i} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1+e^{2m\frac{\omega'+16t\omega}{n\omega}\pi i}}{1+e^{(2m-1)\frac{\omega'+16t\omega}{n\omega}\pi i}} = \varphi\left(\frac{\rho+16t}{n}\right);$$

отже і другий з взорів 14) є правдивий.

5. В склад v входить ω та ω', означені рівнанями:[1])

$$\omega = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad \omega' = 2i\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}}$$

Їх точки особливі є $u=o$ та $u=e^{\frac{2h\pi i}{8}}$.

Треба розслїдити проте, як ся поводить v в окруженю тих точок.

Возьмім точку $u = o$.

ω та ω' сповняють рівнанє:[2])

$$\omega \frac{d\omega'}{dk} - \omega' \frac{d\omega}{dk} = - \frac{2\pi i}{k'k^2};$$

з відси:

$$\frac{d\rho}{dk} = - \frac{2\pi i}{\omega^2 k(1-k^2)},$$

а так як:

$$\omega = \pi \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \cdots\right)^{3)}$$

то:

$$\frac{d\rho}{dk} = \frac{2}{\pi i}\left(\frac{1}{k} + Ak + \frac{Bk^3}{2} + \cdots\right) \quad \text{а з відси } (k^2=u^8):$$

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{\pi i}\left(8 \log \frac{u}{u_0} + A(k^2 - k_0^2) + \frac{B}{2}(k^4 - k_0^4) + \cdots\right).$$

Наколи $u=u_0$ описує коло довкола точки зерової, то:

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{\pi i}\, 8 . 2\pi i \log \frac{u_0 e}{u_0}, \qquad \text{або:}$$

$$\rho = \rho_0 + 16.$$

V остає проте і дальше однозначне і представляє ся яко ряд степенний аргументу u: $\left(\alpha = \frac{n^2-1}{8}\right)$.

$$V = (-1)^\alpha \varphi(n\rho) = (-1)^\alpha \sqrt{2}\, e^{\frac{n\rho\pi i}{8}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1+e^{2mn\rho\pi i}}{1+e^{(2m-1)n\rho\pi i}} =$$
$$= (-1)^\alpha \sqrt{2}\, u^n \Pi \qquad 15)$$

---

[1]) ibidem ст. 363, 364.
[2]) ibidem ст. 450.
[3]) Пор. н. пр. Schwarz: Formeln u. Lehrsätze z. Gebr. der ellipt. Funct. ст. 53.

а $v_t = \varphi\left(\frac{\rho + 16t}{n}\right)$ переходить на $\varphi\left(\frac{\rho_0 + 16(t+1)}{n}\right) = v_{t+1}$;

проте n иньших вартостий v творить довкола точки зерового систем циклїчний ($v_0\ v_1\ \quad v_{n-1}$), а її розвинене є:

$$v = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi\rho i}{8n}} \prod \frac{1 + e^{\frac{2m\rho\pi i}{n}}}{1 + e^{\frac{(2m-1)\rho\pi i}{n}}} = \sqrt{2}\, u^{\frac{1}{n}} \Pi. \qquad 16)$$

Возьмім другу точку особливу:

$$u = e^{2\pi i} = 1.$$

Функция елїптична, що ся відносить до модулу k', має періоди:

$$\omega_1 = -\omega' i, \quad \omega_1' = \omega i, \quad \text{з відси} \quad \rho' = -\frac{1}{\rho}.$$

ρ' заховує ся так як ρ і має розвинене:

$$\frac{d\rho'}{dk'} = \frac{2}{\pi i}\left(\frac{1}{k'} + Ak' + \frac{B}{2}k'^3 + \quad\right),$$

а з відси:

$$\rho' - \rho'_0 = \frac{1}{\pi i}\left[\log\left(\frac{k'}{k_0'}\right)^2 + A(k'^2 - k_0'^2) + \frac{B}{2}(k'^4 - k_0'^4) + \cdots\right].$$

Наколи змінна u зробить коло довкола точки $e^{2\pi i}$, очевидно в напрямі додатнім, та не обійме нїякої иньшої точки особливої, то $\left[\psi(\rho)\right]^8 = k'^2$ змінить арґумент о 2π, а:

$$\rho' - \rho'_0 = \frac{2\pi i}{\pi i} \log \frac{k_0'^2 e}{k_0'^2} = 2,$$

отжеж: $\rho' = \rho'_0 + 2$, а що $\rho_0 = -\frac{1}{\rho'_0}$, то:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - 2\rho_0}.$$

$v_0 = \varphi\left(\frac{\rho}{n}\right) = \psi\left(-\frac{n}{\rho}\right) = \psi(n\rho')$ дїйсне та додатне на відтінку (o — 1) остає однозначне, наколи змінна зробить коло довкола точки 1 на основі взорів 14).

V перейде по однім обороті докола точки 1) перейде на $(-1)^\alpha \varphi\left(\frac{n\rho_0}{1 - 2\rho_0}\right)$, а по γ оборотах на $(-1)^\alpha \varphi\left(\frac{n\rho_0}{1 - 2\gamma\rho_0}\right)$,

а так як $\varphi(\rho') = \pm\varphi(\rho)$, наколи зайде умова:[1])

[1]) Пор. Briot-Bouquet loc. cit. ст. 629.

$$\left.\begin{aligned} \rho' &= \frac{8a'+(4b'+1)\rho}{(4a+1)+2b\rho} \quad \text{та:} \\ (4a+1)&(4b'+1) - 16\,ba' = 1 \end{aligned}\right\} \quad 17)$$

то у нас буде:

$$\frac{\rho_0+16t}{n} = \frac{8a'(1-2\gamma\rho_0)+(4b'+1)n\rho_0}{(4a+1)(1-2\gamma\rho_0)+2bn\rho_0} = \frac{[8a'+(4b'+1)n-16a'\gamma]\rho_0}{4a+1+2[bn-(4a+1)\gamma]\rho_0}$$

при чім:

$$4(a+1)\ (4b'+1) - 16\,b\,a' = 1.$$

Щоби сповнити ті умови, положім:

$$bn - (4a+1)\,\gamma = o,$$

$$\frac{b}{4a+1} = \frac{\gamma}{n}.$$

Позаяк після умови *b* є перве зглядом $(4a+1)$, то $b = \pm\gamma$, $4a+1 = \pm n$, при чім беру або оба знаки горішні або долїшнї; *n* є число перве і непаристе, може проте мати вид:

$$n = 4n' + 1, \qquad \text{або} \qquad n = 4n' - 1.$$

Наколи $n = 4n' + 1$, то беру $n' = a$, $b = \gamma$ і дістану умову:

$$\rho_0 + 16t = 8a' + \left[(4b'+1)\,n - 16a'\gamma\right]\rho_0;$$

наколи положимо $a' = 2t$, дістанемо вартости на $(4b'+1)$ і на t з взору:

$$n(4b'+1) - 32\gamma t = 1 \qquad 18)$$

а так як між $\varphi\left(\frac{n\rho_0}{1-2\gamma\rho_0}\right)$ і $\varphi\left(\frac{\rho_0+16t}{n}\right)$ є звязь $(-1)^\alpha$, то V перейде на v_t. Взір 18) показує, яке t належить до певної вартости γ. Наколи $\gamma = (1, 2, \quad n-1)$, то на t дістанемо тих самих $(n-1)$ вартостий в певнім порядку.

Дістанемо проте докола точки $u = e^{2\pi i} = 1$ систем коловий вартостий $(V, v_1, v_2, \quad v_{n-1})$, а v_0 остає однозначне.

Возьмім дальше точку $u = e^{\frac{2\pi i}{8}}$

Наколи арґумент u перейде осьму часть обводу, тодї:

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{\pi i}\,8\log\frac{u_0 e^{\frac{2\pi i}{8}}}{u_0}, \qquad \text{або:}$$

$$\rho = \rho_0 + 2,$$

отже V перейде на:

$$(-1)^{\alpha}\varphi(n\rho_0+2n)=e^{\frac{2n\pi i}{8}}V,$$

а v_t на:

$$\varphi\left(\frac{\rho_0+16t+2}{n}\right)=\varphi\left(\frac{\rho_0+16(t-\alpha)+2n}{n}\right)=e^{\frac{2n\pi i}{8}}V_{t-\alpha}.$$

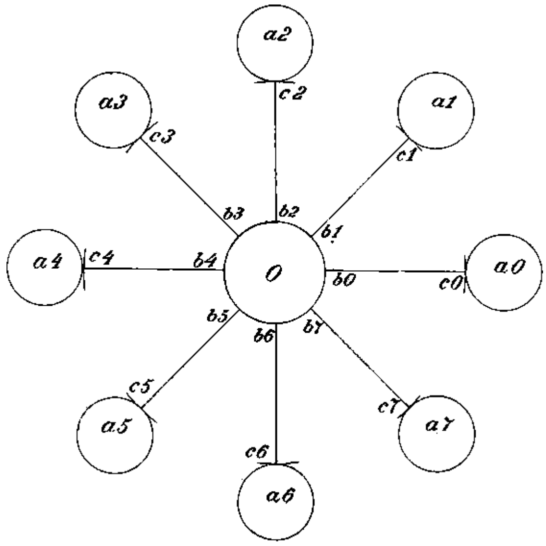
Наколи вийдемо з b_0 з вартостию v, то зачеркнувши осьму часть обводу в напрямі додатнім дістанемо в точцї b_1 вартість $e^{\frac{2n\pi i}{8}}V$, отже на лїнїї $b_1\,a_1$ V буде мало вартости такі, як в відповідних точках на оси xx, помножені через $e^{\frac{2n\pi i}{8}}$ Звідси наколи перейдемо b_1a_1 γ разів та дістанемо в точцї b_1 якесь v_{t_γ}, то наколи вернемо до b_0 (т. є. окружимо точку $e^{\frac{2n\pi i}{8}}$), дістанемо $v_{t\gamma+\alpha}$; наколи хочемо звідси дістати v, яке відповідає γ окруженям точки $e^{\frac{2n\pi i}{8}}$, треба найти індекс, який відносить ся до γ окружень точки 1 та додати до нього α.

Коли возьмемо загально точку $e^{\frac{2h\pi i}{8}}$ то будемо її окружали по луку $b_0\,b_1 \quad b_h=\frac{h}{8}$ части обвода, простій $b_h\,c_h$, колї, що є окруженем тої точки, з поворотом по $c_h\,b_h$ і $b_{h-1} \quad b_0$ (гл. фіґ.).

Наколи арґумент зачеркне $\frac{h}{8}$ частий обводу, то ρ перейде на ρ_0+2h, а V на $e^{\frac{2hn\pi i}{8}}V$, а v_t на $e^{\frac{2nh\pi i}{8}}v_{t-h\alpha}$. Наколи вийдемо з точки b_0 з вартостию V, перейдемо γ разів $b_h\,a_h$, дістанемо в b_h $e^{\frac{2hn\pi i}{8}}v_{t\gamma}$, а коли повернемо до b_0, дістанемо $v_{t\gamma+\alpha h}$. Вистане проте найти індекс, що ся відносить до γ окружень точки $e^{2\pi i}$ і додати до нього $h\alpha$, а дістанемо індекс v, що ся відносить до γ окружень точки $e^{\frac{2h\pi i}{8}}$

6. Функция елїптична о модулї відворотнім має періоди $\omega_1=\omega-\omega'$, $\omega_1'=\omega'$, а звідси звязь, яка є між ρ та ρ_1, представить ся:

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\rho}-1,\qquad u_1=\varphi(\rho_1)=\psi\left(-\frac{1}{\rho_1}\right)=\frac{1}{\psi\left(-\frac{1}{\rho}\right)}=\frac{1}{u}.$$


a2
c2
a3
c3
a1
c1
b3
b2
b1
a4
c4
b4
0
b0
c0
a0
b5
b6
b7
c5
c7
a5
a7
c6
a6

Наколи в рівнаню модуловім заступимо *u* через $\frac{1}{u}$, то корені нового рівнаня (v) будуть відворотні до коренів рівнаня першого в якимсь порядку.

Зауважім:

$$(v) = (-1)^\alpha \psi\left(-\frac{1}{n\rho_1}\right) = \frac{(-1)^\alpha}{\psi\left(-\frac{1}{n\rho_1} - 1\right)} = \frac{(-1)^\alpha}{\psi\left(-\frac{1+(n-1)\rho}{n\rho}\right)} =$$

$$= \frac{(-1)^\alpha}{\varphi\left(\frac{n\rho}{1+(n-1)\rho}\right)};$$

він буде відворотний до якогось кореня $v\delta$, наколи:

$$\frac{\rho + 16\delta}{n} = \frac{8a' + [(4b'+1)n + 8a'(n-1)]\rho}{(4a+1) + [2bn + (4a+1)(n-1)]\rho}$$

під умовою:

$$(4b'+1)(4a+1) - 16\,ba' = 1.$$

Положім: $\quad 2bn + (4a+1)(n-1) = 0, \quad$ або:

$$\frac{2b}{4a+1} = -\frac{n-1}{2n}, \text{ де } 2b \text{ є перве до } (4a+1).$$

Наколи $n=4n'+1$, положу $a=n'$, $b=-2n'$, $a'=2\delta$, а тоді дістанемо b' і δ з умови:

$$16(n-1)\,\delta + n(4b'+1) = 1 \qquad \text{або:}$$

$$16\delta + 5\,b' = -1, \qquad \text{отже } \delta = 4, \qquad \text{або:}$$

$$(V) = \frac{1}{v_4}.$$

Возьмім иньше (v) н. пр. $(v_{t'})$, то:

$$(v_{t'}) = \psi\left(-\frac{n}{\rho_1+16t'}\right) = \frac{1}{\psi\left(-\frac{n}{\rho_1+16t'} - 1\right)} =$$

$$= \frac{1}{\psi\left(-\frac{n(1-\rho)}{\rho+16t'-16t'\rho} - 1\right)} = \frac{1}{\psi\left(-\frac{16t'+n-(16t'-1)\rho}{16t'-(16t'-1)\rho}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\psi\left(\frac{16t' \ (16t'-1)\rho}{16t'+n-(16t'-1)\rho}\right)}.$$

Корень сей буде відворотний до v_t, наколи: 19)

$$\frac{\rho+16t}{n}=\frac{8(16t'+n)a'+16t'(4b'+1)-[(16t'-1)(4b'+1)+8(16t'+n-1)a]\rho}{(16t'+n)(4a+1)+32t'b-[(16t'+n-1)(4a+1)+2(16t'-1)b]\rho}$$

з умовою:

$$(16t'-1)(4b'+1)+8(16t'+n-1)a'=-1.$$

$$(16t'+n-1)(4a+1)+2b(16t'-1)=o.$$

$$\frac{4a+1}{2b}=-\frac{16t'-1}{16t'+n-1},$$ де $(4a+1)$ є перве до 26.

В рівнаню 19) знаменник правої сторони зведе ся до n, наколи положу $a=4t'$, $b=8t'+\frac{n-1}{2}$; тодї:

$$t=(16t'+n)\frac{a'}{2}+t'(4b'+1)=\frac{2a'+b'}{4};$$

a' має бути просте паристе, b' многократию 4; кладу тому:

$$a'=2a'', \qquad b'=4b'', \qquad \text{то:}$$

$$(16t'+n)a''+t'(16b''+1)=a''+b''$$

$$(16t'+n-1)a''+t(16t'-1)b''=-t' \qquad a''+b''=t$$

$$(16t'-1)t+na''=-t'.$$

Для $t'=o$ $\quad -t=-5a''$; наколи $a''=1$, то $t=5$, або:

$$(v_0)=\frac{1}{v_0}.$$

Для $t'=2$ $\quad 31t+5a''=-2$; звідси $t=3$, а:

$$(v_2)=\frac{1}{v_3}.$$

Для $t'=3$ $\quad 47t+5a''=-3$; звідси $t=1$, а:

$$(v_3)=\frac{1}{v_1}.$$

Для $t'=4$ $\quad 63t+5a''=-4$, $t=2$, а:

$$(v_4)=\frac{1}{v_2}.$$

Остає (v_1), яке в тім случаю рівнає ся $\frac{1}{V}$.

Для $n=5$ дістанемо 5 вартостий на v, іменно:

$$V,\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4.$$

7. Утворім функцию півсиметричну $(v_\alpha v_\beta)$ двох з тих величин, дальше таку функцию двох других та двох послїдних з тих величин

та возьмім функцию симетричну U тих трох функций півсиметричних:

$$U = (V-v_0)(v_1-v_4)(v_2-v_3).$$

Докола особливої точки u=o дістає та функция 5 вартостий:

$$\begin{aligned} U_0 &= (V-v_0)(v_1-v_4)(v_2-v_3) \\ U_1 &= (V-v_1)(v_2-v_0)(v_3-v_4) \\ U_2 &= (V-v_2)(v_3-v_1)(v_4-v_0) \\ U_3 &= (V-v_3)(v_4-v_2)(v_0-v_1) \\ U_4 &= (V-v_4)(v_0-v_3)(v_1-v_2) \end{aligned}$$

так як докола тої точки V' остає без зміни, а v_t переходить на v_{t+1} та маємо систем коловий $(v_0\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4)$.

Докола точки $u=e^{2\pi i}v_0$ остає однозначне, а пять прочих величин творить систем коловий. Порядок індексів дістаєм з взору:

$$32\gamma t - n(4b'+1) = -1, \qquad \gamma = 1, 2, 3, 4.$$

Для $\gamma = 1$	$8t - 5b' = 1,$	звідси: $t = 2.$
Для $\gamma = 2$	$16t - 5b' = 1,$	звідси: $t = 1.$
Для $\gamma = 3$	$24t - 5b' = 1,$	$t = 4.$
Для $\gamma = 4$	$32t - 5b' = 1,$	$t = 3;$

дістанемо проте систем коловий (V, v_2, v_1, v_4, v_3), а вартости на U є:

$$\begin{aligned} (v_2-v_0)(v_4-v_3)(v_1-V) &= U_1 \\ (v_1-v_0)(v_3-V)(v_4-v_2) &= U_3 \\ (v_4-v_0)(V-v_2)(v_3-v_1) &= U_2 \\ (v_3-v_0)(v_2-v_1)(V-v_4) &= U_4 \\ (V-v_0)(v_1-v_4)(v_2-v_3) &= U_0. \end{aligned}$$

U принимає проте в окруженю точки особливої $u=e^{2\pi i}$ ті самі вартости, що докола точки зерової, а що вартости v докола всїх иньших точок особливих зводять ся до вартостий докола точки u=o і $u=e^{2\pi i}$, тому U має лише 5 вартостий на цїлій площи чисельній, отже сповняє рівнанє альґебраічне між u і U пятого степеня що до U.

8. Утворім се рівнанє, а вперед розслїдім його свойства.

v є скінчене для усїх скінчених вартостий u, звідси і U є для всїх скінчених вартостий u скінчене. Для $u=\infty$ має V таку саму вартість, як $\frac{1}{v}$ для $u = \frac{1}{\infty}$.

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{u^5} \Pi \frac{1+u^{16(m-1)}}{1+u^{16m}}$$

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{\sqrt{2}\,u^5} + \cdots, \quad V = \sqrt{2}\,u^5 + \cdots$$

отже V є безконечностию 5. степеня, а 5 прочих v є безконечностями степеня $\frac{1}{5}$. Звідси U_0 (наколи пропустимо висші степені) є:

$$U_0 = \left(a_0 u^5 - a_1 u^{\frac{1}{5}}\right)\left(a_2 u^5 - a_3 u^{\frac{1}{5}}\right)\left(a_4 u^{\frac{1}{5}} - a_5 u^{\frac{1}{5}}\right) =$$

$$= \left(b_0 u^{\frac{26}{5}} - b_1 u^{\frac{2}{5}}\right)\left(a_4 u^5 - a_5 u^{\frac{1}{5}}\right) = c_0 u^{\frac{27}{5}} + c_1 u^{\frac{3}{5}} + \cdots$$

U є проте безконечностию $\frac{27}{5}$ степеня Сума рядів від'ємних функциї U є 27.[1])

З того побачимо, якого степеня що до *u* є наше рівнане. Найже рівнане $f(zu) = o$ буде степеня m що до z_1 а степеня m' що до *u*. Сума рядів u — яке є функциєю z на цїлїй площи чисельній — є зером, або сума рядів додатних рівнає ся сумі рядів від'ємних. Наколи в рівнаню місто *u* возьмемо $u_0 + u'$, де u_0 є стала якабудь, то так як сума рядів від'ємних є та сама для функций u і u', то і сума рядів додатних остане та сама, т. є. не зависить від сталої u_0. Можна проте u_0 так дібрати, що не буде ся відносило до нїякого систему (u z) або $\left(u\ \frac{1}{z}\right)$, який сповняє рівняня $f(zu) = o$ та $\frac{\partial f}{\partial u} = o$, і що для $u = u_0$ сочинник при $z^{m'}$ не стає ся зером. В кождій з точок корінних рівняня m'-того степеня $f(zu_0) = o$ ряд функциї u' що до z рівнає ся степеневи рівняня що до z (очевидно при рівняня незведенім). Звідси наше рівнане буде степеня 27. що до u.

---

[1]) Наколи возьму якусь функцию f(z) в точцї t на площи, то все істнує таке число цїле n, (додатне або від'ємне), що квот $\frac{f(z)}{(z-t)^n}$ не є в точцї t анї о анї ∞. То n називає ся **р я д о м** функциї (Lagnerre). Наколи f(z) не стає ся в точцї t анї о анї ∞, то ряд функциї є о, наколи стає ся о, ряд є додатний, наколи стає ся ∞, ряд є відємний.

Малисьмо $\xi = \frac{v}{u^5}$; положім тепер:

$$\Phi = \frac{U}{u'^5} = (\xi - \xi_0)\ (\xi_1 - \xi_4)\ (\xi_2 - \xi_3).$$

Сочинники рівнаня арґументу ξ були функциями цїлковитими що до k^2 або u^8, отже такі будуть і сочинники рівнаня Φ, а що Φ стає ся ∞ лише для $u=o$, то рівнанє буде мало вид:

$$u^{8\beta_0}\Phi^5 + \sum_{p=1}^{4} u^{8\beta_p}(a_p + b_p u^8 + c_p u^{16} + \cdots)\ \Phi^{5-p} + (a_5 + b_5 u^8 + c_5 u^{16} + \cdots) = o.$$

Наколи положимо $\Phi = \frac{U}{u'^5}$ та помножимо через u^3, дістанемо:

$$u^{8(\beta_0 - 9)}U^5 + \sum_{p=1}^{4} u^{8(\beta_p - 9) + 15p}(a_p + b_p u^8 + \cdots) U^{5-p} + u^3(a_5 + b_5 u^8 + \cdots) = o.$$

Для вартостий *u* дуже малих є всї вартости U дуже малї степеня $\frac{3}{5}$.

Сочинник при U^5 положім $= 1$, то $\beta_0 = 9$. Позаяк дальше сочинники є функциї цїлковиті що до u^8, проте $\beta_0\ \beta_1\ \beta_2$ мусять бути додатні, а $8(\beta_p - 9) + 15p > 3$, або:

$$\beta_p \gtreqless 10 - 2p.$$

Рівнанє має бути дальше степеня 27. що до u, проте в виражених в скобках підемо до такої степенї u^8, що повний степень сочинника не буде більший як 27. Наколи возьмемо $\beta_p = 10 - 2p$, дістанемо рівнанє:

20)
$$U^5 + \sum_{p=1}^{4} u^{e-p}(a_p + b_p u^8 + c_p u^{16})\, U^{5-p} + u^3(a_5 + b_5 u^8 + c_5 u^{16} + d_5 u^{24}) = o.$$

Се буде рівнанє жадане, в якім треба еще визначити сочинники.

9. В тій цїли возьмім функцию:

$$(U) = \left[(V) - (v_0)\right]\ \left[(v_1) - (v_4)\right]\ \left[(v_2) - (v_3)\right],$$

де арґумент є $\frac{1}{u}$.

$$(U) = \frac{-1}{V\, v_0\, v_1\, v_2\, v_3\, v_4} (V-v_2)\,(v_3-v_1)\,(v_4-v_0) = \frac{U}{u^6}$$

на основі 15) і 16); отже наше рівнане не змінить ся, наколи в нїм положу $\frac{1}{u}$ за u, і $\frac{U}{u^6}$ за U; дістанемо тодї:

$$\frac{U^5}{u^{30}} + \sum_{p=1}^{4} u^{p-8} (a_p + b_p u^{-8} + c_p u^{-16}) \frac{U^{5-p}}{u^{6(5-p)}} +$$
$$+ u^{-3} (a_5 + b_5 u^{-8} + c_5 u^{-16} + d_5 u^{-24}) = 0.$$

або:

$$U^5 + \sum_{p=1}^{4} (a_p + b_p u^{-8} + c_p u^{-16})\, U^{5-p} + u^3(d_5 + c_5 u^{-8} + b_5 u^{-16} + a_5 u^{-24}) = 0. \qquad 21)$$

Наколи порівнаєм 20) і 21), дістанемо для $p=1$:

$u^{-1}(a_1 + b_1 u^{-8} + c_1 u^{-16}) = u^7(a_1 + b_1 u^8 + c_1 u^{16})$; се не може бути, тому сочинник при U^4 є зером.

Для $p=2$: $u^6(a_2 + b_2 u^{-8} + c_2 u^{-16}) = u^6(a_2 + b_2 u^8 + c_2 u^{16})$, т. є. $b_2 = c_2 = 0$.

Для $p=3$: $a_1 u^{13} + b_3 u^{15} + c_3 u^{-3} = a_3 u^5 + b_3 u^{13} + c_3 u^{21}$, т. є. $a_3 = b_3$, $c_3 = 0$.

Для $p=4$: $a_4 u^{20} + b_4 u^{12} + c_4 u^4 = a_1 u^4 + b_4 u^{15} + c_4 u^{20}$, т. є. $c_4 = a_4$;

а так само $d_5 = a_5 = c_5 = b_5$. Рівнане перейде проте на:

$$U^5 + a_2 u^6 U^3 + a_3 u^5 (1 + u^8) U^2 + u^4 (a_4 + b_4 u^8 + a_4 u^{16}) U +$$
$$+ u^3 (a_5 + b_5 u^8 + b_5 u^{16} + a_5 u^{24}) = 0.$$

Для $u=1$, $v_0=1$, а пять иньших вартостий v дасть -1, а всї вартости U є рівні зеру, проте і сочинники при степенях U мусять бути зером для $u=1$; т. є. $a_2 = o$, $a_3 = o$, $b_4 = -2a_4$, $b_5 = -a_5$, а рівнане перейде на:

$$U^5 + a_4 u^4 (1 - u^8) U + a_5 u^3 (1 - u^8)^2 (1 + u^8) = 0.$$

Треба проте визначити єще тільки a_4 і a_5.

Вартости *u* дїйснїй додатній та дуже малій відповідає $\rho = si$, де s є додатне, дуже мале; звідси $e^{\varrho\pi i} = q$ є додатне, дїйсне та дуже мале:

$$u = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + q^{2m}}{1 + q^{2m-1}} = \sqrt{2}\, q^{8} (1 - q^{2m-1} + \cdots).$$

Для $m=1$ (наколи пропустимо дальші вирази) дістанемо:

$$u = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} (1-9)$$

$$v_0 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{5\cdot 8}}\, \Pi \left(\frac{1+q^{\frac{2m}{5}}}{1+q^{\frac{2m-1}{5}}} \right) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right)$$

$$v_1 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left(e^{\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{\pi i}{5}\cdot 18} \right); \quad e^{\frac{\pi i}{5}\cdot 18} = e^{\frac{\pi i}{5}\cdot 20}\, e^{-\frac{2\pi i}{5}}$$

$$v_1 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left(e^{\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{-\frac{2\pi i}{5}} \right);$$

так само дістанемо:

$$v_2 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left(e^{\frac{4\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{-\frac{4\pi i}{5}} \right).$$

$$v_3 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left(e^{-\frac{4\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{4\pi i}{5}} \right).$$

$$v_4 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{40}} \left(e^{-\frac{2\pi i}{5}} - q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{2\pi i}{5}} \right).$$

$$v_1 - v_4 = i\, 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{2\pi}{5}\, q^{\frac{1}{40}} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right).$$

$$v_2 - v_3 = i\, 2^{\frac{3}{2}} \sin \frac{4\pi}{5}\, q^{\frac{1}{40}} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right).$$

Звідси:

$$U_0 = 2^{\frac{3}{2}}\, 5^{\frac{1}{2}}\, q^{\frac{3}{40}} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right).$$

Підставмо се в рівнанє:

$$2^{\frac{15}{2}}\, 5^{\frac{5}{2}} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right) + a_4 \left(2^2 q^{\frac{1}{8}} (1-q^8)^2\, 2^{\frac{3}{2}}\, 5^{\frac{1}{2}}\, q^{\frac{3}{40}} \left(1+q^{\frac{1}{5}} \right) \right) +$$

$$+ a_5 2^{\frac{3}{2}} (1-q^3)(1-u^8)^2 (1+u^8) = o.$$

Вільний вираз:

$$2^{\frac{15}{2}}\, 5^{\frac{5}{2}} + a_5\, 2^{\frac{3}{2}} = o, \qquad a_5 = -\, 2^6\, 5^{\frac{5}{2}}.$$

Сочинник при $q^{\frac{1}{5}}$ $5 \,.\, 2^{\frac{15}{2}}\, 5^{\frac{5}{2}} + a_4 \,.\, 2^2 \,.\, 2^{\frac{3}{2}}\, 5^{\frac{1}{2}} = 0$, т. є. $a_4 = -\, 2^4\, 5^3$, а наше рівнанє буде:

$$U^5 - 2^4 5^3 u^4 (1-u^8)^2\, U - 2^6 5^{\frac{5}{2}} u^3 (1-u^8)^2 (1+u^8) = 0.$$

А се є форма Bring-Jerrard'а, треба лиш положити:

$$U = 2 \sqrt[4]{5^3}\, u \sqrt{1-8^8}\, t, \qquad \text{дістанемо:}$$

$$t^5 - t - \frac{2}{\sqrt[4]{5^3}} \frac{1+u^8}{u^2 \left(1-u^8 \right)^{\frac{1}{2}}} = 0;$$

проте:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{5^3}}\ \frac{1+u^8}{u^2\left(1-u^8\right)^{\frac{1}{2}}}=A.$$

Положім:

$$\frac{\sqrt[4]{5^5}\ A}{2}=a,\qquad \text{то дістанемо:}$$

$$1+2u^8+u^{16}=a^2u^4-a^2u^{15},\qquad \text{а що } u^4=k, \text{ то:}$$

$$k^4+a^2k^3+2k^2-a^2k+1=0.$$

Рівнанє се дає ся альґебраїчно розвязати; знаєм k, то можемо найти відповідну йому якусь вартість q з взору:

$$q=\frac{1}{16}k^2+\frac{1}{32}k^4+\frac{21}{1024}k^6+\frac{31}{2048}k^8+\cdots$$

а звідси ρ (бо $q=e^{\rho\pi i}$). Наколи маємо ρ, дістанемо 5 вартостий v, а дальше належачі до них 5 вартостий U; а наколи кожду з тих вартостий подїлимо через $2\sqrt[4]{5^3}u\sqrt[2]{1-u^8}$, дістанемо розвязку загального рівнаня пятого степеня.

Тернопіль в маю 1897. р.

Причинок до поділу рівнань другого степеня

написав

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

Математика знає цїлу ґрупу інтересних квестий, які ведуть до зовсім противних, подекуди і противорічних вислїдів, після того, з якої точки розбирати мем таку квестию. Тут зачислити треба много інтересних квестий з рахунку імовірности,[1]) які ведуть до ріжних результатів, а се можна би витолкувати в той спосіб, що відповідно до точки виходу зміняють ся і самі заложеня.

Дальше треба зачислити тут розслїди, які відносять ся до безконечности; показують они, що не все одно, на якій дорозї переходимо з конечности до безконечности; ш не все одно, чи ми уважати будемо ту безконечніcть за границю тої або иньшої фіґури плоскої.

Вже англїйский математик Cayley подав примір на се, що спосіб переходу з конечности до безконечности має вплив на вислїд.

Наколи именно возьмемо інтеґрал:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin (x^2 + y^2)\, dx dy = \pi,$$

то інтеґрал сей є границею квадрату о середоточцї в початку системи сорядних; коли перетворимо сей інтеґрал на сорядні біґунові (полярні):

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\} \text{ якобіян } = r,$$

[1]) Пор. Poincaré: Calcul des probabilités ст. 94 et sqts.

а через се станемо уважати безконечність яко границю кола, дістанемо на вартість інтеґралу:

$$I = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r \sin(r^2)\, dr d\varphi = \pi \Big/_0^\infty \cos(r^2),$$

отже результат зовсїм неозначений.

І нинїшна квестия, яку будемо розбирати, веде до ріжних вислідів, наколи єї розбирати-мемо на дорозї чисто-ґеометричній; тому-то вкінци переводимо єще аналїзу на дорозї альґебраічній, а через се входимо подекуди і в царину чисел надскінчених (transfinit) G. Cantora.

---

1. Річ, що є предметом нинїшньої розвідки, розбирає слїдуюче питанє:

В и н а й т и в і д н о ш е н є в с ї х р і в н а н ь 2. ст., я к і в г р а н и ц я х $(z_0 — z_1)$ н е з в і с н о ї м а ю т ь 0, 1, 2 к о р е н ї в д ї й с н и х, д о ч и с л а в с ї х р і в н а н ь 2. ст.[1])

Маємо рівнанє 2-го степеня виду:

$$f(z) = z^2 - 2az + b = o \qquad (a, b \text{ дїйсні}).$$

Діскрімінант того рівнаня зведений до зера дає нам параболю

$$a^2 - b = o$$

в сорядних (a b) о вершку (o, o). Рівнанє $f(z) = o$ представляє при змінним параметрі z цїлу множінь (Mannigfaltigkeit) стичних, що їх обводня (Enveloppe) є пapaболя $a^2 - b = o$.

Возьмім дві вартости параметру z т. є. z_0 і z_1, то до них належати-муть стичні (фіґ. I.):

$$z_0^2 - 2az_0 + b = o.$$
$$z_1^2 - 2az_1 + b = o.$$

Они перетинають ся в точцї M $\left(a = \frac{z_0 + z_1}{2}, \quad b = z_0 z_1\right)$, а кут, під яким перетинають ся, є:

$$\delta = \operatorname{arc\,tg} \frac{2(z_1 \backsim z_0)}{1 + 4z_0 z_1},$$

де знак $\backsim$ показує, що величину меншу треба від більшої відняти.

---

1) Гадку заняти ся тим питанєм подав менї Др. Жоравский, проф. універс. краківского.

Ті стичні стикають ся з параболею в точках:

$$A\,(a = z_0,\quad b = z_0^2),\qquad B\,(a = z_1,\quad b = z_1^2).$$

Площа розпала ся тепер на слїдуючі части:

I.) $(A+A')$ представляє таку множінь вартостий змінних a і b, що для них рівнане $f(z)=o$ в границях $(z_0 \cdots z_1)$ не має анї одного дїйсного кореня.

II.) $(C+C')$ представляє такі рівнаня, що в границях $(z_0 \cdots z_1)$ мають один корень дїйсний.

III.) B характеризує рівнаня, що в границях $(z_0 \cdots z_1)$ мають оба коренї дїйсні.

Так як площа (ab) представляє при зміняючих ся a і b цїлу безконечну множінь рівнань 2. ст., проте є річ очевидна, що згадані відношеня, що їх означимо через S_0, S_1, S_2, будуть:

$$S_0 = \frac{A + A'}{\text{Цїла пл.}},\quad S_1 = \frac{C + C'}{\text{Цїла пл.}},\quad S_2 = \frac{B}{\text{Цїла пл.}}.$$

Ті відношеня дадуть нам рівночасно імовірність, що в даних границях якесь рівнане буде мати 0, 1, 2 дїйсних коренїв.

Вже з гори бачимо, що при скінчених z_0 і z_1 S_2 буде величина безконечно мала, бо B є дуже мала часть площі (ab):

$$B = \frac{1}{4}\, z_0 z_1 (z_0 + z_1) + \frac{1}{12}\,(z_1^3 + z_0^3),$$

як не тяжко обчислити.

Наші відношеня обчислимо наперед при скінчених A, A′, C, C′, а опісля розширимо їх до безконечности.

Переходити до безконечности можна в ріжний спосіб. Спосіб переходу, який ту відразу насуває ся, є перехід при помочи кола.

Наколи зачеркнемо сорозмірно великим лучем коло з точки M (Фіґ. I.), так щоби в собі заключало обі точки стичности, дістанемо — як се очевидно — при скінчених A, A′, C, C′:

$$s_0 = \frac{2r^2\delta - B}{r^2\pi},\quad s_1 = \frac{2r^2(\pi - \delta)}{r^2\pi},\quad s_2 = \frac{B}{r^2\pi};$$

а коли возьмемо: $\lim r = \infty$,

отже так, що в порівнаню з r^2 B можна пропустити, дістанемо:

$$S_0 = \frac{\delta}{\pi},\quad S_1 = \frac{\pi - \delta}{\pi},\quad S_2 = o.$$

Відношеня ті при великім r не є від r з а л е ж н і. Наколи проте r розширимо до безконечности, то дістанемо при узглядненю вартости δ відношеня:

$$S_0 = \frac{\operatorname{arc\,tg} \dfrac{2\,(z_1 \backsim z_0)}{1 + 4 z_0 z_1}}{\pi},\quad S_1 = \frac{\pi - \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2\,(z_1 \backsim z_0)}{1 + 4 z_0 z_1}}{\pi},\quad S_2 = o.$$

2. Иньший вислїд дістанемо, наколи перейдемо до безконечности при помочи простокутника.

Нарисуймо простокутник так великий, щоби заключав в собі точки A, B, M (фіґ. II.). Обчислїм тут части A', A, C, C' (при чім берім лиш беззглядні вартости сорядних).

Отже:

$$A = \frac{1}{2}(a + a')(b + z_0 z_1) - B$$

Щоби обчислити A', мусимо знати сорядні точок N і P; они випадуть з перетинаня лїнїї $z_0{}^2 \; 2az_0 + b = o$ з лїнїєю $b = -b$, отже:

$$N \equiv \left(-b,\ a = \frac{z_0{}^2 - b}{2z_0}\right), \quad P \equiv \left(-b,\ a = \frac{z_1{}^2 - b}{2z_1}\right).$$

Проте:

$$\overline{NP} = \frac{z_1{}^2 - b}{2z_1} - \frac{z_0{}^2 - b}{2z_0} = \frac{(z_1 - z_0)(b + z_0 z_1)}{2z_0 z_1},$$

а часть A':

$$A' = \frac{(b^2 - z_0 z_1)(z_1 - z_0)}{4z_0 z_1}.$$

Цїлий простокутник є:

$$2b(a + a'),$$

отже при скінчених A, A', C, C' наші відношеня є:

$$s_0 = \frac{\frac{1}{2}(a+a')(b+z_0 z_1) + \frac{1}{4z_0 z_1}(b^2 - z_0{}^2 z_1{}^2)(z_1 - z_0) - B}{2b(a+a')},$$

$$s_1 = \frac{2b(a+a') - \frac{1}{2}(a+a')(b+z_0 z_1) + \frac{1}{4z_0 z_1}(b^2 - z_0{}^2 z_1{}^2)(z_1 - z_0)}{2b(a+a')},$$

$$s_2 = \frac{B}{2b(a+a')}.$$

Перейдїм до безконечности:

$$\lim a = \lim a' = \lim b = \infty,$$

то дістанемо по переведеню відповідних скорочень:

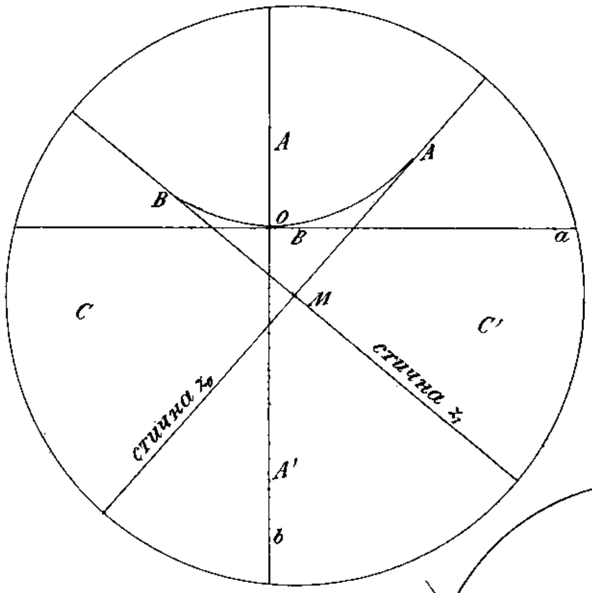
$$S_0 = \frac{z_1 + 4z_0 z_1 - z_0}{16 z_0 z_1},$$

$$S_1 = \frac{z_0 + 12 z_0 z_1 - z_1}{16 z_0 z_1},$$

$$S_2 = o.$$

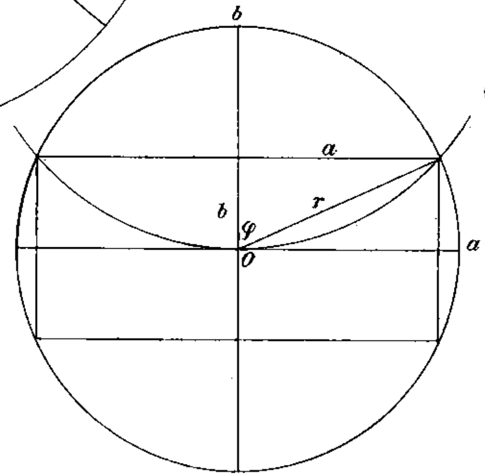
Маємо проте вислїд зовсім иньший, як при переходї до безконечности при помочи кола.

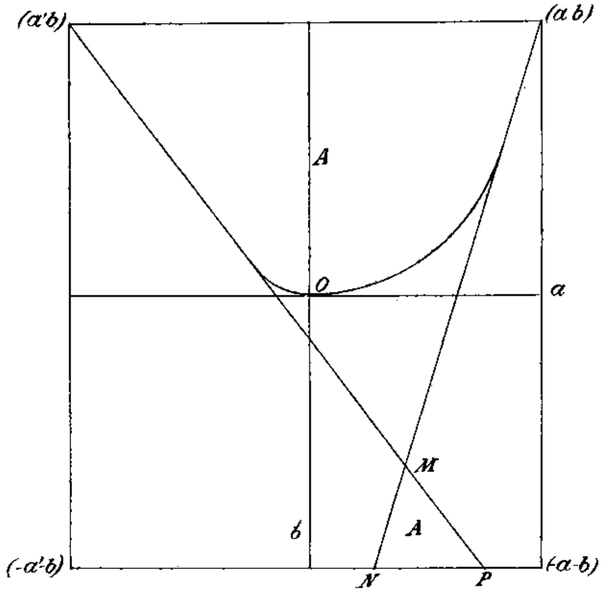
Котрий з тих вислїдів є імовірнїйший?



Фіг I

Фіг III





Фіг II

Ми випроваджували наші відношеня для яких-небудь скінчених вартостий арґументу z. Мусять они проте остати і для $z_1 = z_0$. Для тих вартостий маємо, наколи возьмем коло:

$$S_0 = o, \quad S_1 = 1,$$

а наколи возьмемо простокутник:

$$S_0 = \frac{1}{4}, \quad S_1 = \frac{3}{4}.$$

В першім разї значить се, що в точцї $z_0 = z_1$ (яка лежить на параболї) не ма зовсїм рівнань о коренях спряжених, а всї рівнаня мають один (отже і оба) корінь дїйсний; в другім случаю, що в сїй точцї є і такі і такі рівнаня, а се є неможливе, бо в границях (z_0 z_0) є лиш рівнаня 2 ст., які власне мають корінь z_0, і то корінь дїйсний (бо z_0 є дїйсне). Перший вислїд є проте імовірнїйший, так як він каже, що імовірність, що рівнане 2. ст. для дїйсної вартости z_0 має один корінь дїйсний, рівнає ся певности, а се є і без того очевидне.

3. Однак тих відношень не можна розширити для z_0 і z_1 безконечно великих, бо наколи $z_0 = z_1 = \infty$, то средоточка кола M посуне ся в безконечність; обі стичні стануть асимптотами, а так як пapaболя має лиш одну асимптоту, цїлу в безконечности, то дістанемо місто двох стичних одну асимптоту в безконечности і наша основна фіґура не має значіня.

Наколи однак іде нам о відношенє всїх рівнань 2 степеня з 0, 2 коренями дїйсними до всїх рівнань (в границях $-\infty$ $+\infty$), то возьмем за Кляйном (Klein) фіґуру III., де парабoля відповідає рівнаням о 0 коренях, а проча часть площі рівнаням о двох дїйсних коренях.

Возьмім тут коло, яке опісля розширимо до безконечности.

Часть параболї, замкнена луком кола, має поле — як легко обчислити —:

$$\frac{1}{3} a^3 + (a^2+a^4) \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a},$$

отже відношенє:

$$s_0 = \frac{\frac{1}{3} a^3 + (a^2+a^4) \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a}}{(a^2+a^4)\pi},$$

яке для $\lim a = \infty$ дає:

$$S_0 = o,$$

що є очевидно абсурдом.

Колиж до безконечности перейдем при помочи простокутника, дістанемо:

$$S_0 = \frac{\frac{4}{3}a^3}{4a^3} = \frac{1}{3},$$

а се відношенє не залежить від a і є сталою величиною.

Очевидно: $$S_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

4. Зовсім инакше представляє ся річ з точки аналїзи альґебраїчної.

Маємо рівнанє:

$$x^2 - 2ax + b = o,$$

то: $$x = a \pm \sqrt{a^2 - b}.$$

Рівнаня мають розвязки дїйсні для всїх від'ємних вартостий b, та для $a^2 > b$, наколи b є додатне, отже:

$$\text{корені дїйсні є для: } \begin{cases} b = (o & -\infty) = (1) \\ b = (o & a^2) = (2), \end{cases}$$

$$\text{спряжені для: } b = (a^2 \quad +\infty) = (3).$$

Вартостий (1) є безконечно много, так само (2) і (3), но очевидно, що множінь (1) є:

$$(1) \equiv (2) + (3),$$

а позаяк:

$$(3) = (a^2 \quad +\infty) = (a^2 \quad 2a^2) + (2a^2 \quad 3a^2) + \cdots \text{ in inf.}$$

а: $$(2) = (o \quad a^2) \backsim (a^2 \quad 2a^2),$$

то (3) є безконечно рази більше, чим (2), отже:

$$(3) \equiv \infty\,(2),$$

а проте:

$$(1) \equiv (2) + \infty\,(2) = (\infty + 1)\,(2).$$

Бачимо проте, що рівнань з розвязкою дїйсною є безконечне число, так само рівнань з розвязками спряженими, но наколи множінь рівнань з розвязками спряженими є першим числом надскінченим,[1] то множінь рівнань з розвязками дїйсними є другим числом надскінченим, проте є більше рівнань з розвязками дїйсними.

Тернопіль 20. жовтня 1897. р.

[1] Пор. н. пр. Dickstein: Pojęcia i metody matematyki I. ст. 37.

Електро-маґнетна теория сьвітла і филї електричні

написав

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

(Посьвячую памяти мого бл. п. брата Маріяна).

ВСТУП.

В розвою теоретичної оптики відріжняємо три головні фази: теорию виплиrу (еманациї), теорию фильованя (ундуляциї) та теорию електромаґнетну. Дві перші повстали майже рівночасно, а сотворили їх два найбільші корифеї фізики XVII. віку, Newton і Huyghens. В критичний розбір обох тих теорий не будемо входити, так як наука про них давно вже висказала свою гадку; пригадуємо лише, що перша з них т. є. теория випливу, завдяки великому авторитетови женїяльного Newton'a серед сучасних, остоялась єще й в перших десятках нашого столїтя, а прихильниками єї були навіть так критичні уми, як Laplace та Poisson. Змаганя Eulera, щоби теориї фильованя виборотн побіду, прогомонїли без слїду і доперва глубокі розслїди Fresnel'a, Young'a, Foucault'a, F. Neumann'a та других рішили цїлу квестию в користь теориї ундуляциї. Теория ся розвинулась дуже успішно, а завдяки теоретичним роботам Hamilton'a над стіжковим заломанєм (конічна рефракция), яке опісля дорогою досьвіду викрив Lloyd, набралась що раз більшої імовірности.

В теориї фильованя є однак деякі сумнїви, що їх досьвід чисто оптичного характеру не був в силї рішити. Такою сумнївною квестиєю була н. пр. квестия площі поляризациї. Як звісно Fresnel принимав, що площа дрогань є прямова (нормальна) до площі поляризациї а що через се густота етеру є змінна; противнож F. Neumann принимав, що обі ті площі є тотожні, що отже ґустота етеру є стала, а змінна є за те єго пруживість в ріжних напрямах. Обі ті гіпотези зовсїм добре виясняють прояви, які виступають в середовищах однородних, проте квестия, чи гіпотеза Fresnel'a чи Neumann'a є імовірнїйша, лишалась поки-що непорішена.

Та в половинї нашого столїтя настала зміна в толкованю проявів фізичних. Завдяки епоховим роботам R. Mayer'a та Joule'a видерла наука природї найважнїйший закон, точно висказаний Clausius'ом та Helmholtz'ом, закон, під який можна підтягнути усї прояви природи; є се засада захованя енерґії. Се епохальне відкрите мусїло навести на здогад, що всї роди енерґії, які доси відріжняла наука серед явищ природи, є остаточно формою одної і тої самої енерґії. За правдивостию того погляду промовляти почала ся обставина, що одну форму енерґії можна перетворити в другу; і дійсно побачено, що істнує звязь між працею механїчною а теплом. Звернено ся тепер до звязи між сьвітлом та електричностию, а сї змагання видали вскорі великі овочі.

Гадка, що між проявами оптичної та електричної натури єствує звязь, проявлялась вже по части в умі Gauss'a, Weber'a, Riemann'a а головно L. Lorenz'a та Faraday'a, що викрив навіть скручене площі поляризациї під впливом току. Однак першим, що потрафив вивести звязь поміж тими обома з виду ріжними ґрупами явищ, був James Clerk Maxwell (1865). Сей, ведений критичним та глубоким умом, дав при помочи математичної аналїзи засновок до нової будівлї, що її назвав електромаґнетною теориєю сьвітла. Права, що їх теоретично випровадив Maxwell, потвердили та стверджають дорогою досьвіду його численні наслїдники. Роботи ті дали доказ, що сьвітло є проявою електромаґнетною.

Чи через се стратила що теория фильованя? Зовсїм нї; наука дістала лиш один доказ більше, що енерґія є лиш одна, а проявляти ся може під ріжними а ріжними видами. Сама теория сьвітла віднесла лиш через се хосен, бо прояснилось у нїй много квестий сумнївних.

Теория Maxwella глядить причину явищ електричних та маґнетних в дроганях поперечних; правдивість сього погляду виказав дорогою досьвіду померший перед часом фізик з Bonn, Гейнріх Hertz, а його роботи над филями електричними творять, як каже V. Lang, епоху в сучаснїй фізицї.

Завданєм нашим буде подати вислїди електромаґнетної теориї сьвітла, а також показати шляхи, на які повела фізику згадана теория. Заким однак перейдемо до самої електромаґнетної теориї сьвітла, мусимо бодай коротко розібрати права піль маґнетних, так як на них основуєсь цїла теория Maxwell'a. Та хоча вислїди теориї піль маґнетних Maxwell'a згоджують ся вповнї з вислїдами, до яких дійшли Helmholtz, Weber, Neumann та Thomson, однак точка, з якої вийшов Maxwell, є зовсїм иньша, як у тамтих вчених. Тому-то в наших розслїдах будемо майже виключно узглядняти гіпотези та теориї Maxwell'a, так як ті до зрозуміня теориї сьвітла є необходимо потрібні.

ЧАСТЬ ПЕРША.

Теория піль маґнетних.

Значінє діелектриків в теориї Maxwell'а.

1. В давнїйших теориях електричних мале лишень або і жадного не приписувано значіня ізоляторам, або як їх назвав Faraday, дїелектрикам. Весь процес, що виступав в прояві електричнім, відбував ся в самім провіднику, а сам ізолятор поводив ся зовсїм пассивно. Явище індукциї приписувано просто дїланю на віддаль (actio in distans). Були правда уми, що нїяк не могли погодити ся з гадкою, що можливе є якесь дїланє на віддаль. Такими були Poisson та Mosotti, що бодай в части признали діелектрикам значінє в проявах електричних.[1]) Рівнож і Faraday відкидав „actio in distans“, а введене ним понятє піль маґнетних (зглядно електричних) та лінїй сил, хоч не толкує істоти явищ електричних, то однак бодай кидає сьвітло на дїланя, які виступають в тих явищах. Доперва Maxwell виступив з поглядом, що не провідники, але як раз діелектрики є місцем збірним для енерґії електричної, що проте їм треба приписати первоврядне значінє; се твердженє було основою, на якій Maxwell опер свою теорию. Після Maxwella цїлий діелектрик є наповнений материєю легкою, нетяжкою, що поводить ся так як сьвітляний етер; сю течь після Poincaré називати мем течию індукцийною (хоча Maxwell називає її просто електричностию). Наколи всї провідники, розміщені в діелектрику однороднім, находять ся в станї нормальнім, то течь індукцийна находить ся в рівновазї нормальній; наколиж провідники будуть наелектризовані, но з причини індукциї електростатичної маси електричні

[1]) Глянь н. пр. Poincaré: Electricité et l'optique т. I. розд. II.

розміщені на них найдуть ся в рівновазї, то течь індукцийна перейде після Maxwell'а в стан, званий рівновагою напруги, або як говорять нїмецкі фізики, в стан поляризациї дієлєктричної.

Наколи дробина течи індукцийної зістане вихилена з положеня нормальної рівноваги, то після Maxwell'а зайде ту т. зв. елєктричне пересунене. Складові того пересуненя f, g, h є після Maxwell'а:

$$1)\quad f = -\frac{K\frac{\partial\psi}{\partial x}}{4\pi},\qquad g = -\frac{K\frac{\partial\psi}{\partial y}}{4\pi},\qquad h = -\frac{K\frac{\partial\psi}{\partial z}}{4\pi},$$

де ψ є потенциял електричний в уважаній точцї (xyz) дієлєктрика, а K є т. зв. сочинником дієлєктричним (питома спроможність індукцийна (Vermögen).[1]) Рівнаня ті подає Maxwell a priori, правдивість їх показує деинде.

З рівнань 1) можна вивести просто величину складових сили, що дїлає на елємент dxdydz течи індукцийної, яка находить ся в станї поляризациї. Позаяк, як звісно, походні потенциялу дають величину повисших складових, то, коли ті складові є ξ, η, ζ:

$$2)\quad \xi = -\frac{4\pi}{K}f,\qquad \eta = -\frac{4\pi}{K}g,\qquad \zeta = -\frac{4\pi}{K}h,$$

з відки слїдує, що складові тої сили є пропорциональні до складових елєктричного пересуненя.

Позаяк зі зміною набою якогось провідника, що находить ся в дієлєктрику, зміняє ся потенциял ψ, проте зміняють ся і складові f, g, h пересуненя; наколи проте елєктричність на провідниках находить ся в руху, то течь індукцийна не може оставати в супокою. Maxwell доказує,[2]) що елєктричність та течь індукцийна поводять

---

[1]) Так як в теориї єлєктромаґн. сьвітла стала K має дуже велике значінє, тому подаємо точну єї дефініцию після Faraday'а: Стала K дієлєктрика в огляду на воздух, уважаний за одиницю, є рівна відношеню (Verhältniss) поємности (Capacität) конденсатора, що має в собі сей дієлєктрик, до поємности другого конденсатора, що має ту саму величину та той сам вид, а є наповнений воздухом. Пор. н. пр. Tumlirz: Elektromagnetische Theorie des Lichtes ст. 15.

[2]) Maxwell доходить іменно до рівнаня: $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=0$, яке є характеристичне після правил гідромеханїки для течий нестисних, Глянь н. пр. Thomson u. Tait: Theoretische Physik т. I. ч. I. ст. 141. 3 і ст. 256, 6.

ся як дві течі нестисні, т. є. що скількість течи індукцийної, яка в данім моменті вийшла через поверхню, є рівна скількости електричности, яка в тім самім часі там увійшла. Течь індукцийна визначуєсь проте великою пруживостию.

Обчислимо тепер енерґію потенцияльну, яку представляє систем провідників, набитих електричностию та розміщених в діелектрику. Виражене на ту енерґію можна одержати, або наколи зведемо енерґію на працю, яку виконують маси з причини взаїмного відпихаꙗ та притяганя тих мас електричних, або просто з пруживости течи індукцийної, яку виведено зі стану нормальної рівноваги.

Елемент праці, що є виконана при пересуненю електричности в елементі просторони dxdydz, яке то пересунене має складові δx, δy, δz, є очевидно:

$$-\rho\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\psi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\psi}{\partial z}\delta z\right]dxdydz,$$

де ρ є густота електричности, а $\rho dxdydz$ маса елементу dxdydz. Цїлковита праця зі знаком противним рівнає ся очевидно зростови енерґії потенциялької W; проте:

$$\delta W=\int\int\int\rho\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\psi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\psi}{\partial z}\delta z\right]dxdydz.$$

Звідси при помочи цїлого ряду перетворень, які основують ся на звіснім твердженю Gauss'a[1]):

$$\int\int F\cos(Y,N)\,dx\,dz=\int\int\int\frac{\partial F}{\partial y}dxdydz,$$

та розширенім твердженю Poisson'a:

$$\Sigma\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=-4\pi\rho,$$

дійдемо до вираженя:

$$\delta W=\delta\int\int\int\frac{K}{8\pi}\,\Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2dxdydz,$$

отже:

$$W=\int\int\int\frac{K}{8\pi}\,\Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2dxdydz.^{2)}\qquad 3)$$

---

[1]) Пор. н. пр. Lang: Einleitung in die theoretische Physik ст. 163.
[2]) Пор. Maxwell: Lehrbuch der Electricität u. Magnetismus (перев. Weinstein) т. I. стор. 132.

Стала інтеґрованя є зером, бо енерґія потенцияльна для стану нормального є зером.

При помочи рівнань 1) можна послїдне вираженє представити в формі:

$$W = \int\int\int \frac{2\pi}{K} (f^2 + g^2 + h^2)\, dxdydz. \qquad 3')$$

2. Будова діелєктриків однородних мусїла навести Maxwell'a на здогад, що в загалї в укладї електричнім, який є зложений з провідників та діелєктриків, істнують виключно токи замкнені.

В звичайній теориї електричности відріжняємо іменно токи замкнені і отверті, які устають тодї, коли ріжниця потенциялів стане рівна силї електромоторичній жерела електричного (н. пр. коли бігуни елєменту електричного сполучимо з обома обкладками конденсатора або з двома ізольованими кондукторами); Maxwell противно принимає лиш токи замкнені. Бо возьмім т. зв. ток отвертий, який повстає тодї, коли бігуни елєменту ґальванічного получимо з двома ізольованими кондукторами. Кондуктор, що електризує ся додатно, мусить після теориї унітарної приняти більше течи електричної, як тодї, коли був в станї нормальнім, на другім кондукторі, що електризує ся від'ємно, мусить зменшити ся скількість плину електричного. Позаяк однак в теориї Maxwell'a електричність є теч нестисна, проте еї густота мусить остати стала; не може проте в однїй точцї наступати згущенє, а в другій розрідзенє. Тому-то сей надмір електричности на однім кондукторі випихає з него часть течи індукцийної, яка виповняє усю просторонь; ся знова теч потручає дальші дробини течи індукцийної, що виповняє діелектрик, а що та теч є нестисна, то на другий кондуктор мусить ввійти така сама скількість течи індукцийної, яка з першого уступила. З тої причини одержуєм ток замкнений через діелєктрик, а так як дробини течи індукцийної пересувають ся подовж лїній сил, як показують рівнаня 1), проте можна сказати, що токи отверті замикають ся в теориї Maxwell'a подовж лїній сил.

В теориї Maxwell'a істнують проте виключно токи замкнені.

3. Токи замкнені дїлить Maxwell на токи двох катеґорий: токи проводу та токи пересуненя. Токи проводу є то токи замкнені, що перебігають провідник (злучник), токи пересуненя повстають через пересуненє дробин течи індукцийної. Наколи маємо до дїла з т. зв. током отвертим звичайної теориї, то очевидно ток сей складає ся з току проводу та току пересуненя. Очевидна є також річ,

що в теориї Maxwell'a могуть істнувати також замкнені токи, які є виключно токами пересуненя; токи сї мають велике значінє в електромаґнетній теориї сьвітла.

Є річ природна, що в теориї Maxwell'a токи проводу мусять підчинятись законам, опертим на досьвідах, себ то законам Ohm'a,[1]) Joule'a, Ampère'a та законам індукциї. Що до токів пересуненя, то

---

[1]) З огляду на се, що законом Ohm'a прийдесь нам нераз в дальшім тягу покористуватись, подаємо той закон в виді троха иньшім, як ся звичайно подає. Наколи провідник є лінійний та однородний, а сила електромоторична є чинна лиш поміж його кіньцями, дальше наколи опір його є R, натуга току є i, ріжниця потенциялів є $\psi_1 - \psi_2$, то дістанемо звичайне вираженє на закон Ohm'a: $Ri = \psi_1 - \psi_2$.

Позаяк de facto і в самім провіднику в ріжних місцях виступає сила електромоторична (з причин термічних, хемічних etc.), тому наколи сума тих сил електромоторичних є ΣE, дістанемо закон Ohm'a:

$$Ri = \psi_1 - \psi_2 + \Sigma E.$$

Але опір $R = \frac{l}{Cdw}$, де l є довжина злучника, dw перекрій, а C т. з. сочинник проводу питомого; прото:

$$\frac{li}{Cdw} = \psi_1 - \psi_2 + \Sigma E.$$

Наколи возьмемо безконечно малий елемент злучника о довготї dx та назначимо ріжницю потенциялів на його кінцях через $-d\psi$, а через Xdx зміну сили електромоторичної кождого иньшого походженя в тім елементї, дістанемо:

$\frac{i}{Cdw} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + X$; $\frac{i}{dw} = u$ (скорість перепливу електричности), проте:

$\frac{u}{C} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + X$ і се є закон Ohm'a. Для провідників о трох розмірах є очевидно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u}{C} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} + X \\ \frac{v}{C} &= -\frac{\partial\psi}{\partial y} + Y \\ \frac{w}{C} &= -\frac{\partial\psi}{\partial z} + Z \end{aligned}\right\}$$

де u, v, w є складові скорости, а X, Y, Z складові сили електромоторичної довільного походженя в елементї об'єму $dxdydz$.

Очевидно, що:

$$u = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t},$$

де t є час.

Maxwell принимає, що і они підчиняють ся законови Amperè'a та законам індукциї, за те не мож однак відносити до них законів Joule'a і Ohm'a, вже із за того, що токи ті мусять при своїм повставаню поборювати опір, який є вислїдом пруживости течи індукцийної, а опір сей є очевидно иньший, чим опір провідника.

Істнують єще і дальші ріжниці між токами проводу а токами пересуненя. Після Maxwell'a має течь індукцийна, що виповняє дієлєктрик, наклін порушати ся під впливом сил електричних, подібно як електричність, що виповняє провідник, так як обі ті течи яко нестисні взаїмно ся випихають. Рух дробин течи індукцийної устає дуже скоро з причини противділаючої сили пруживости, якою ся теч в високій мірі визначуєсь, а в другім разї рух не устає, бо — як Maxwell доказує — теч, що находить ся в внутрі проводячого середовища не має зовсїм сил пруживости. Звідси походить, що токи пересуненя могуть тревати лиш короткий час, якого треба, щоби рівновагу назад спровадити; токи проводу могуть тревати так довго, як довго з причини ділань внішних істнує на обох кіньцях провідника ріжниця потенциялів (сила електромоторична).

Для токів проводу істнують на основі розширеного закону Ohm'a рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= X - \frac{u}{C} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= Y - \frac{v}{C} \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} &= Z - \frac{w}{C} \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Для складових сил, які ділають на елемент дієлєктрика, малисьмо рівнаня 2); наколи крім сили електромоторичної о складових $\xi = \frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\eta = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\zeta = \frac{\partial\psi}{\partial z}$, яка дає ся звести до ділань електростатичних, виступлять єще иньші сили електромоторичні, які ділають індукцийно на дієлєктрик, а які назвалисьмо ΣE о складових X, Y, Z, то рівнаня 2) приймуть тепер для токів пересуненя вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= X - \frac{4\pi}{K} f \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= Y - \frac{4\pi}{K} g \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} &= Z - \frac{4\pi}{K} h \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Бачимо проте, що токи пересуненя залежать від великости пересуненя (т. є. від f, g, h), а токи проводу від $u = \frac{\partial f}{\partial t}$ $v = \frac{\partial g}{\partial t}$, $w = \frac{\partial h}{\partial t}$ т. є. від скоростий пересуненя.

Токи проводу підлягають кромі сього еще звісному законови Kirchhoff'a, після якого в точцї, де сходить ся більше провідників (лїнійних або о трох вимірах) сума натуг всїх токів є зером. Виразом сього закона є рівнанє:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,^{1)}$$

бо натуги токів є пропорціональні до скоростий u, v, w.

Закон сей є доказом, що електричність є теч нестисна без огляду на се, чи ся находить в станї статичнім чи нї.

В сей отже спосіб навели ми коротко головні свойства діелектриків після теориї Maxwell'a. Тепер перейдемо до головних прав явищ маґнетних, електромаґнетних та електромаґнетної індукциї, або в загалї до прав піль маґнетичних, о скілько они остають в ґенетичній звязи з теориєю сьвітла.

Правила піль маґнетних (в тїснїйшім значіню).

1. Коли натуга або степень намаґнесованя магнета є I, а єї складові в напрямах осий x y z є A, B, C $\left(I = (A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}\right)$, то величина потенциялу в якійсь точцї P поза маґнетом представляє ся взором:

$$\Omega = \int \frac{lA + mB + nC}{r} d\omega - \iiint \frac{\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}}{r} dxdydz \quad 1)$$

де l, m, n є напрямні cosinus'u кутів, що їх творить елемент поверхневий $d\omega$ маґнета з віcьми x, y, z.[2])

---

[1]) Рівнанє се можна легко вивести з 4). Коли рівнаня сї зріжничкуємо та додамо, то з огляду на се, що X, Y, Z, C є сталї, та в огляду на рівнанє Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

дістанемо се рівнанє Kirchhoff'a.

[2]) Гл. н. пр. Poincaré loc. cit., також Maxwell loc. cit. т. II, ст. 13.

2. Складові сили маґнетної, яка дїлає на одиничний додатний бігун маґнетний, що лежить п о з а маґнетом, є очевидно походними потенциялу зі знаком відʼємним, тому то складові ті є:

$$\alpha = -\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial\Omega}{\partial z}. \qquad 2)$$

3. Щоби винайти величину сили, що дїлає на одиничний бігун маґнетний, який находить ся в н у т р і маґнета, мусимо зробити в маґнеті малу заглубину і там вложити пробний маґнет. Тодї маґнет роздїлить ся на дві части, одну часть внїшну зглядом бігуна P, до якої відносять ся рівнаня (2), та часть, в якій містить ся бігун P (фіґ. I.); дїланє вислїдне сеї части на бігун P най буде R. Через се однак зміняє ся дїланє маґнета, а зміна та залежить від форми заглубини. Щоби отже обчислити силу в якійсь точцї заглубини, треба знати єї вид.

Maxwell бере один лиш случай,[1]) що заглубина має вид валця; на случай коли довгість валця в порівнаню з грубостию тогож є дуже велика, дістанемо $R=o$, на случай що довгість валця є в порівнаню з грубостию тогож дуже мала, дістанемо після Maxwell'а:[2])

$$R = 4\pi I.$$

I має складові A, B, C, R буде мало проте складові $4\pi A$, $4\pi B$, $4\pi C$, отже в тім случаю цїлковите дїланє маси маґнетної на одиничний бігун маґнетний, що ся находить в внутрі маґнета, має складові:

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{\partial\Omega}{\partial x} + 4\pi A = \alpha + 4\pi A \\ b &= \quad\frac{\partial\Omega}{\partial y} + 4\pi B = \beta + 4\pi B \\ c &= -\frac{\partial\Omega}{\partial z} + 4\pi C = \gamma + 4\pi C \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Складові a, b, c, називає Maxwell с л а д о в и м и м а ґ н е т н о ї і н д у к ц и ї в в н у т р і м а ґ н е т а.

4. Між індукциєю маґнетною а силою маґнетною істнує проте ріжниця; се вже слїдно й з того, що так як α, β, γ, є походними потенциялу, то:

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = - d\Omega \text{ (цїлковита ріжничка)};$$

---

1) Maxwell loc. cit. II. ст. 28.
2) Maxwell loc. cit. II. ст. 29.

а тим часом для складових маґнетної індукциї ся звязь не істнує зовсїм.[1])

Декотрі тїла, як пр. желїзо, коли найдуть ся в поли маґнетнім, дістають свойства маґнетні з причини індукциї маґнетної; після Poisson'а складові маґнетизму, індукованого в якійсь точцї такого тїла, є пропорциональні до складових сили маґнетної в тій точцї, отже складові ті є:

$$A = k\alpha, \quad B = k\beta, \quad C = k\gamma,$$

де k є натуга бігуна маґнетного, який творить довкола себе згадане поле маґнетне. Після сказаного складові індукциї в указаній точцї будуть:

$$\begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi A = (1 + 4\pi k)\,\alpha \\ b &= \beta + 4\pi B = (1 + 4\pi k)\,\beta \\ c &= \gamma + 4\pi C = (1 + 4\pi k)\,\gamma, \end{aligned}$$

де — як се з елементарного курсу про маґнетизм звісно — $4\pi k$ представляє скількість лїній сили маґнетної, що виходять з бігуна маґнетного о натузі k.[2])

Наколи положимо $\mu = 1 + 4\pi k$, дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} a &= \mu\alpha \\ b &= \mu\beta \\ c &= \mu\gamma \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

μ називає Maxwell маґнетною спроможностию індукцийною.[3])

Так як стала діелєктрична K була характеристична для діелєктриків, так μ характеризує тїла, що ся находять в поли маґнетнім. Для тїл парамаґнетних є $\mu > 1$, для порожнї $\mu = 1$, для тїл діямаґнетних є $\mu < 1$.

В повисше наведених розслїдах принимали ми, що маємо до дїла з маґнетами сталими, у яких є сила відпорна $= \infty$, та з маґнетами індукованими, у яких та сила є $= o$; в дійсности (коли

---

[1]) Для складових індукциї маґнетної істнує звязь:

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = o.$$

Гл. н. пр. Poincaré ut supra.

[2]) Neumann називає k сочинником намаґнесованя через індукцию.

[3]) μ називають також сочинником проникання (Permeabilitätsconstante).

н. пр. взяти сталь) сила та не може бути анї о, анї ∞. Дальше k і μ також не є сталї, но в загалї:

$$k = \varphi(I) = \varphi\left[(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}\right];$$

а μ є стале лиш для слабих сил, а для сильних меншає після помірок Ewing'a.

Правила піль електромаґнетних.

1. Перейдем тепер до прав піль електромаґнетних.

Після дослїдів Faraday'a та Colladon'a сила, з якою дїлає ток на бігун маґнетний (чи то природний чи індукований) є прямо пропорцияльна до натуги току т. є. скількости електричности, що в одиницї часу перепливає через перекрій злучника.

Коли потенциял провідника, через який переходить ток, назначимо через Ω, то складові сили, яка дїлає на одиничний бігун маґнетний, находячий ся в поли електричнім, є:

$$\alpha = -\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial\Omega}{\partial z}. \quad 1)$$

В теориї електромаґнетизму найбільше значінє мають т. зв. токи колові; як звісно поводять ся они зовсїм так само, як маґнет о розмірах рівних поверхнї, замкненої током коловим, а о дуже малій грубости, т. є. так як т. зв. бляшка маґнетна. Потенциял бляшки маґнетної є $\Omega = \Phi\varphi$,[1]) де Φ є сила бляшки (добуток з степеня намаґнесованя бляшки та грубости), а φ є кут, під яким з уважаної точки видно бляшку; добуток Ω треба брати додатно або від'ємно після того, чи уважана поверхня бляшки є додатна, чи від'ємна. З причини сеї рівноважности току колового та бляшки є електромаґнетний потенциял току колового:

$$\Omega = \varphi i, \quad 2)$$

де i є натуга току, мірена в таких одиницях, що чинник пропорциональности є 1; ту одиницю називаємо електромаґнетною одиницею натуги. Знак φi залежить від напряму току; додатна сторона току колового є та, яка находить ся по лївій руцї пливака, що пливе в тоцї та споглядає в внутр тока колового.

[1]) Гл. Poincaré loc. cit. т. I.

2. Так як:

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = d\Omega,$$

де в α, β, γ знак уже узглядненйй, проте зміна потенциялу тока при переходї з одної точки до другої по довільній дорозї буде:

$$\int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz),$$

де інтеґрал відносить ся до цїлої відбутої дороги. На основі рівнаня 2) та зміна буде:

$$\int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = \pm 4\pi i.^{1)}$$

Інтеґрал відносить ся до дороги, яку відбуде бігун під впливом току.

Наколи маємо до дїла з кількома токами, то праця електромаґнетна є тодї:

$$\int (\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = 4\pi\Sigma \pm i. \qquad 3)$$

Наколи складові скорости електричности є u, v, w, перекрій злучника є $d\omega$, напрямні consinus'u пряму до того елементу є l, m, n, то дістанемо на скількість електричности, що перепливає через поверхню S:

$$\Sigma i = \Sigma\,(lu+mv+nw)d\omega = \int_S (lu+mv+nw)d\omega.$$

Наколи порівнаємо се рівнанє з рівнанєм 3), дістанемо:

$$\int_C (\alpha dx+\beta dy+\gamma dz) = 4\pi \int_S (lu+mv+nw)d\omega,$$

де перший інтеґрал відносить ся до кривиції, по якій порушає ся бігун, другий до поверхні, через яку ток переходить.

Перший інтеґрал перетворює Maxwell в інтеґрал поверхневий — в що близше годї тут входити — так що в кінци дістанемо:

$$\int_S \left[l\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) + m\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + n\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\right] d\omega =$$

$$4\pi \int_S (lu+mv+nw)d\omega;$$

---

1) Гл. Maxwell loc. cit. II. 344. Сей інтеґрал — як з теориї потенциялу слїдно — дає міру роботи, яку зроблять сили електромаґнетні при пересуненю бігуна одиничного.

оба інтеґрали є ідентичні, тому:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) \\ v &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) \\ w &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Рівнаня ті дають нам звязь межи скоростями (u v w) електричности а складовими ($\alpha\ \beta\ \gamma$) сили електромаґнетної. Відносять ся они так до токів проводу, як і до токів пересуненя, так як ті послїдні підлягають також законови Ampère'a.

Права явищ електродинамічних.

1. Подібно як ток коловий і маґнет заховують ся два токи колові; права дїланя двох токів колових на себе є загально звісні.— Наколи маємо систем токів сталих, що дїлають на рухомий ток коловий о натузї i, то електродинамічний потенциял того току буде:

$$T = i \int (\alpha l + \beta m + \gamma n) d\omega,^{1)} \qquad 1)$$

де інтеґрал відносить ся до цїлої поверхні, яка є замкнена током коловим; α, β, γ, l, m, n мають анальоґічне значінє як в попереднім уступі. Наколи T представимо в виді анальоґічнім як рівнанє 3) попередного уступу, то дістанемо в загалї:

$$T = i \int (F dx + G dy + H dz),$$

де F, G, H не є поки що близше означені; а наколи сей інтеґрал замінимо на поверхневий, дістанемо в кінци (як попередно):

$$T = i \int \left[l\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) + m\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) + n\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) \right] d\omega.$$

Наколи се порівнаємо з 1) дістанемо на складові α, β, γ сили, з якою дїлає систем сталих токів на одиницю тока:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \\ \beta &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \\ \gamma &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

1) Гл. Poincaré loc. cit. т. I.

Maxwell називає величини F, G, H складовими електромаґнетного момента або складовими потенциялу векторового після теориї кватерніонів і векторів, яких уживає в своїх розслїдах.

Наколи ріжничкувати мем рівняня 2) що до x, y, z і додамо ті рівняня дістанемо:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

Анальоґічне рівнане істнує для складових a, b, c індукциї маґнетної (ut supra), але не істнує для складових сили маґнетної.

Наколи проте хочемо рівняня 2) віднести до явищ маґнетних, то треба в них місто складових сили ввести складові індукциї маґнетної і дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \\ b &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \\ c &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

2. Обчислїм складові F, G, H момента електромаґнетного. Очевидна є річ, що рівняня 2) до визначеня F, G, H не вистануть, бо найзагальнїйшим розвязанем тих рівнань є функциї $F + \frac{\partial \chi}{\partial x}$, $G + \frac{\partial \chi}{\partial y}$, $H + \frac{\partial \chi}{\partial z}$, де χ є яканебудь функция змінних x, y, z. Тому то Maxwell бере еще додаткову умову:

$$I = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \equiv 0. \qquad 4)$$

та на основі рівнань 4) попередного уступу доходить до рівняня:

$$4\pi u = \frac{\partial I}{\partial x} - \Delta F, \qquad \text{де:}$$

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2},$$

а що: $\frac{\partial I}{\partial x} = 0$, то:

$$\Delta F + 4\pi u = 0.$$

Є се рівнанє такого типу, як рівнанє Poisson'a, тому-то його найзагальнійший інтеґрал буде функция, що має вид потенциялу; отже:

$$F = \int\int\int \frac{u}{r} dxdydz,$$

де *u* є складова скорости тока в напрямі оси x в точці тяжести елєменту dxdydz, а r є відступ тогож елементу від уважаної точки (xyz) просторони.

Анальоґічно

$$G = \int\int\int \frac{v}{r} dxdydz, \qquad H = \int\int\int \frac{w}{r} dxdydz.$$

Як легко ся пересьвідчити, інтеґрали ті сповняють рівнаня 2) та 3); інтеґрованє відносить ся до всїх елєментів просторони.

Наколи маємо до дїла з середовищем маґнетним, в якім ток дізнає пересуненя, то рівнаня 3) сповнять ся, як легко мож побачити, для слїдуючих вартостий на F, G, H:

$$\left.\begin{aligned} F &= \mu \int\int\int \frac{u}{r} dxdydz \\ G &= \mu \int\int\int \frac{v}{r} dxdydz \\ H &= \mu \int\int\int \frac{w}{r} dxdydz \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

де μ має значінє вже згадане.

3. Подамо єще вираженє на величину електродинамічних потенциялів. На електродинамічний потенциял малисьмо слїдуюче вираженє:

$$T = i \int (Fdx + Gdy + Hdz).$$

Вираженє се перетворює Maxwell в спосіб, якого тут не подаємо блисше, на вираженє:

$$T = \int\int\int (Fu + Gv + Hw)dxdydz.$$

Перейдім до вираженя на т. зв. с а м о п о т е н ц и я л тока. Можемо собі уявити, що ток коловий складаєсь з безконечного множества токів колових о безконечно малих перекроях. Кождий з тих токів має електродинамічний потенциял з огляду на иньші елєментарні токи; сума тих елєментарних потенциялів творить т. зв. самопотенциял тока. — Наколи возьмемо два елементи тока колового dxdydz і dx'dy'dz' о скоростях (uvw) і (u'v'w'), то як Maxwell доказує, самопотенциял тока буде:

$$T = \frac{1}{2} \int\int\int (Fu+Gv+Hw)\, dxdydz.$$

Наколи возьмемо рівнанє 4) попередного, а 2) і 3) теперішного уступу, дійдемо в кінци до слїдуючих виражень на самопотенциял:

a) наколи систем токів находить ся в середовищи немаґнетнім, то самопотенциял є:

$$T = \frac{1}{8\pi} \mu \int\int\int (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\, dxdydz. \qquad 6)$$

b) наколи же систем токів находить ся в середовищи маґнетнім, то самопотенциял є:

$$T = \frac{1}{8\pi} \int\int\int (\alpha a+\beta b+\gamma c)\, dxdydz. \qquad 7)$$

Наколи возьмемо два токи колові лїнійні (отжеж не о трох вимірах) о натугах i_1 і i_2, то електродинамічний потенциял того систему токів буде[1]) лїнійна однородна функция другого ряду величин i_1 і i_2, отже після Maxwell'а має вид:

$$T = \frac{1}{2} (Li_1^2+2Mi_1i_2+Ni_2^2), \text{ }^{2})$$

де L, M, N залежні є від виду та взаімного положеня обох токів.

Можна доказати, що L є самопотенциялом першого тока на случай, що другого нема, N самопотенциялом другого тока, коли першого нема, а M потенциялом одного тока на другий.

4. Всї ті взори вивели ми в заложеню, що натуга тока є стала. Однак при руху токів колових, або токів колових та маґнетів, виступають еще додаткові токи, що їх відкрив Faraday, а які називаємо **токами індукованими**; токи ті повстають хвилево в провідниках, а їх натуга додає ся до натуг поодиноких токів. Повставанє тих токів відносимо до **електромоторичних сил індукциї**.

З дослїдів над індукциєю виходить, що коли натуги i_1 і i_2 двох нерухомих токів колових C_1 і C_2 збільшать ся в елементї часу dt о величини di_1 і di_2, то сила електромоторична індукциї, що повстане в C_1, має вартість:

$$A \frac{di}{dt_1} + B \frac{di_2}{dt},$$

[1]) Maxwell loc. cit. II. 271 і 274.

[2]) Гл. н. пр. Lang: Einleitung in die theoretische Physik ст. 422.

а сила електромоторична індукциї, що повстала в C_2, має вартість:

$$B \frac{di_1}{dt} + C \frac{di_2}{dt}.$$

Звичайна теория електричности, що її розвинули Helmholtz та Thomson, обчисляє сочинники A, B, C на основі засади захованя енерґії[1]) та доходить до звязи:

$$A = - L, \quad B = - M, \quad C = - N,$$

де L, M, N мають значінє, як в горі.

Maxwell же виводить права індукциї просто з рівнань Lagrange'a, так що сї рівнаня відносить до руху дробин нетяжкої течи індукцийної. В тій цїли ставить Maxwell дві гіпотези:

a) Сорядні дробин неважкої течи залежать від сорядних материяльних дробин тїла, які беруть участь в проявах електричних, а разом від сорядних гіпотетичної течи, яка зве ся електричностию; но права сеї зависимости не знаємо.

b) Електродинамічний потенциял систему токів представляє разом енерґію кінетичну течи індукцийної.

На сих гіпотезах доходить Maxwell при помочи рівнань Lagrange'a з одної сторони до взорів Helmholtz'a, а з другої до слїдуючих вислїдів.

5. Праця сил електродинамічних, яка є потрібна до пересуненя тока колового рухомого рівнає ся зміні функциї:

$$\frac{1}{2} (Li_1{}^2 + 2Mi_1i_2 + Ni_2{}^2)$$

т. є. зміні потенциялу електродинамічного T (рівнанє 1), або рівнає ся:

$$i_1\delta \int (la + mb + nc)\, dw,$$

де a, b, c, l, m, n мають значінє, ut supra. — Наколи Xdxdydz, Ydxdydz, Zdxdydz є складові сили електродинамічної, що дїлає на елемент dxdydz, а походить з дїланя тока C_1 на ток C_2, а елемент тока C_2 пересунув ся під впливом тої сили о $\delta x, \delta y, \delta z$, то елементарна праця, яка зістала виконана при тім пересуненю, виносить:

$$(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dxdydz.$$

Цїла проте праця сил електродинамічних, що дїлають на C_2, через яку ток коловий пересуне ся або змінить вид, буде:

$$\int\int\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dxdydz.$$

[1]) Гл. н. пр. Poincaré loc. cit. том I.

Наколи порівнаємо се вираженє з попередним вираженєм на працю, дійдемо по перетворенях до загальних рівнань на складові сили електродинамічної:[1])

$$\left.\begin{aligned} X &= cv - bw \\ Y &= aw - cu \\ Z &= bu - av \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

Рівнаня 8) остають і тоді, коли маємо якунебудь скількість токів; але тоді величини a, b, c є складовими вислідної індукциї маґнетної всїх токів.

6. На основі взорів Helmholtz'a, що сила електромоторична індукциї, яка вивязуєсь в току C_1 при дїланю на ток коловий C_2, є:

$$E = -\frac{d}{dt}(Li_1 + Mi_2),$$

наколи означимо складові тої електромоторичної сили індукциї через P, Q, R, дійдемо при помочи перетворень до взорів:[2])

$$\left.\begin{aligned} P &= c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ Q &= a\frac{dz}{dt} - c\frac{dx}{dt} - \frac{dG}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ R &= b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad 9)$$

де ψ є яканебудь однородна функция арґументів xyz.

Рівнаня 9) остають також і для якогонебудь числа токів.

Що до сеї функциї ψ, котра може бути яканебудь, то Maxwell принимає, що функция та представляє електростатичний потенциял, який походить від якихсь мас, що істнують в поли. — Таке заложенє все можна зробити. Бо величини F, G, H визначили ми лиш під тою умовою, що они сповняють рівнанє ріжничкове:

$$I = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \equiv o.$$

Наколи однак сю умову відкинемо, то після того, що ми в горі сказали, дістанемо на F, G, H слїдуючі загальні вираженя:

$$\begin{aligned} F &= \int\int\int \frac{u}{r}\, dxdydz + \frac{\partial\chi}{\partial x} \\ G &= \int\int\int \frac{v}{r}\, dxdydz + \frac{\partial\chi}{\partial y} \\ H &= \int\int\int \frac{w}{r}\, dxdydz + \frac{\partial\chi}{\partial z} \end{aligned}$$

де χ є якабудь функция сорядних.

[1]) Maxwell loc. cit. II. 297.

[2]) Пор. н. пр. Poincaré loc. cit. т. I.; також Lang loc. cit. ст. 462.

Найзагальнїйші проте рівнаня на вираженє складових P, Q, R будуть:

$$\left.\begin{aligned}
P &= c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \iiint \frac{du}{dt}\frac{1}{r}dxdydz - \frac{d}{dt}\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \\
Q &= a\frac{dz}{dt} - c\frac{dx}{dt} - \iiint \frac{dv}{dt}\frac{1}{r}dxdydz - \frac{d}{dt}\frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \\
R &= b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} - \iiint \frac{dw}{dt}\frac{1}{r}dxdydz - \frac{d}{dt}\frac{\partial\chi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad 10)$$

Всегда можна проте через відповідний вибір сеї функциї χ зробити се, що функцвя ψ, яка входить в ті рівнаня, отже і b рівнаня 9) представляє електростатичний потенциял.

Зреасумуймо єще раз всї висліди, якісьмо розібрали в усїх попередних роздїлах.

Загальні рівнаня поля маґнетного.

1. Рівнаня поля маґнетного.

Дісталисьмо рівнаня:

$$\left.\begin{aligned}
a &= \mu\alpha \\
b &= \mu\beta \\
c &= \mu\gamma
\end{aligned}\right\} \quad \mathrm{I)}$$

де α, β, γ є складові сили маґнетної в точцї середовища маґнетного, a, b, c є складові маґнетної індукциї в тій точцї.

Наколи u, v, w є складові скорости електричности, то:

$$\left.\begin{aligned}
4\pi u &= \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} \\
4\pi v &= \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x} \\
4\pi w &= \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \quad \mathrm{II)}$$

Дальше мали ми для складових маґнетного момента рівнаня:

$$\left.\begin{aligned}
a &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \\
b &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \\
c &= \frac{\partial G}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \quad \mathrm{III)}$$

та:

$$\left.\begin{aligned} F &= \mu \int\int\int \frac{u}{r}\, dxdydz + \frac{\partial\chi}{\partial x} \\ G &= \mu \int\int\int \frac{v}{r}\, dxdydz + \frac{\partial\chi}{\partial y} \\ H &= \mu \int\int\int \frac{w}{r}\, dxdydz + \frac{\partial\chi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \text{IV)}$$

Складові сили електромоторичної, що походить від електромаґнетної індукциї та мас електричних, що ся находять в стані статичнім, були:

$$\left.\begin{aligned} P &= c\frac{dy}{dt} - b\frac{dz}{dt} - \frac{dF}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ Q &= a\frac{dz}{dt} - c\frac{dx}{dt} - \frac{dG}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ R &= b\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} - \frac{dH}{dt} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \text{V)}$$

2. Рівнаня токів проводу.

В рівнанях II) є u, v, w складові скорости електричности без огляду на рід руху: провід або пересунене. Наколи йде о токи проводу, то складові (u, v, w) мусять кромі сего сповняти рівнанє Ohm'а т. є.

$$\frac{u}{C} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + X \qquad \text{і т. д.,}$$

де C є електрична спроможність проводу середовища, а X складова всїх сил електромоторичних на одиницю довготи. — Наколи приймем, що ті електромоторичні сили є тілько силами індукциї, що їх викликала зміна натуги або пересунене токів, або маґнетних і електричних мас, то права сторона того рівнаня рівнає ся P.

Складові скорости електричности в тоцї проводу є проте:

$$\left.\begin{aligned} u &= CP \\ v &= CQ \\ w &= CR \end{aligned}\right\} \quad \text{VI)}$$

3. Рівнаня токів пересуненя.

Токи сї — як знаємо — не підчиняють ся праву Ohm'а, за те підчиняють ся законам електродинамічним та електромаґнетним Ampère'а сповняють проте рівнаня III). Однак кромі тих рівнань істнують для токів пересуненя єще три рівнаня характеристичні.

Величина складової електричного пересуненя є після наших попередних розслїдів:

$$f = -\frac{K}{4\pi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - X\right),$$

де X має то само значінє, що при токах проводу. Наколи отже приймем, що сили електромоторичні походять виключно з ріжниці електростатичного потенциялу, як також з індукциї маґнетів та токів, які находять ся в поли, то:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} - X = -P,$$

а тоді:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{K}{4\pi} P, \\ g &= \frac{K}{4\pi} Q, \\ h &= \frac{K}{4\pi} R \end{aligned}\right\} \quad \text{VII)}$$

А так як походні f, g, h зглядом часу є складові скорости, проте через зріжничковане послїдних рівнань зглядом часу дістанемо на складові скорости електричного пересуненя рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{K}{4\pi}\frac{dP}{dt} \\ v &= \frac{K}{4\pi}\frac{dQ}{dt} \\ w &= \frac{K}{4\pi}\frac{dR}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \text{VIII)}$$

4. Рівнаня для токів в середовищи лиш в части дієлектричнім.

Рівнаня VI) відносять ся до середовищ, що добре проводять, н. пр. металї, рівнаня VIII) до повних ізоляторів. — Наколи тїла не є вповні ізольовані, то Maxwell[1]) принимає для них рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} u &= CP + \frac{K}{4\pi}\frac{dP}{dt} \\ v &= CQ + \frac{K}{4\pi}\frac{dQ}{dt} \\ w &= CR + \frac{K}{4\pi}\frac{dR}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \text{IX)}$$

---

[1]) Maxwell loc. cit. II. ст. 306.

після яких u, v, w складають ся з суми складових току проводу і пересуненя.

Но ся гіпотеза Maxwell'а представляє на погляд Poincaré'ого[1]) деякі слабі сторони. Так як середовище має свойства посередні між провідниками а ізоляторами, то на погляд Poincaré'ого сила електромоторична, що викликує ток, мусить побороти опір двоякого рода, один анальоґічний до опору металїв ($\frac{1}{C}$, бо C є спроможність проводу), другий опір ізоляторів. Звідси мусїлоб слїдувати, що як раз против рівнань Maxwell'а натуга тока,[1]) а звідси і величини u, v, w повинні були менші, як в провіднику або в повнім ізоляторі. Тому-то більше рациональною є гіпотеза, що єї поставив Potier. Принимає він, що сила електромоторична в якійсь точцї згаданого середовища рівнає ся сумі тої сили, що єї викликує ток проводу, і тої, що єї викликує пересуненє. Після Potier'а дістанемо проте на вираженє складових сили електромоторичної в півізоляторах рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{u}{C} + \frac{4\pi}{K} f, \\ Q &= \frac{v}{C} + \frac{4\pi}{K} g, \\ R &= \frac{w}{C} - \frac{4\pi}{K} h, \end{aligned}\right\} \quad X)$$

Рівнаня IX) та X) зводять ся до рівнань токів провода, наколи K = o, зглядно K = ∞. Провідник має проте після Maxwell'а спроможність індукцийну зеро, після Potier'а безконечно велику.

В сей спосіб подав я коротко закони явищ електричних та маґнетних, так як они слїдують з заложеня Maxwell'а, і то подав я такі лишень права, які будуть необходимо потрібні, щоб зрозуміти маґнетну теорию сьвітла. — Права ті можна в головній мірі найти в звичайних теориях явищ електричних. І инакше не може бути, бо в виводі прав якихсь явищ що найбільше відмінна може бути метода, но нїяк вислїди, наколи ті права мають згоджуватись з дїйсностию.

[1]) Poincaré loc. cit. том I.

Бактериольоґічні вислїдки посмертні а дияґноза клїнічна недуг інфекцийних.

(Тимчасове донесене).

Заслуги бактериольоґів взагалї а специяльно в медицинї — безперечно не аби-які. Они своїми просто ґеніяльними слїдженями відкрили і унаочнили нам цїлий незнаний перед тим чудесний, новий сьвіт животин, нове царство дрібоньких творів природи, що займають все і всюди ся находять. Тайну їх житя, розродженя і прочих функций фізиольоґічних старають ся учені бактериольоґи не від нинї видерти природї. Призирають ся їх формі, величинї, рухам під мікроскопом, культурі мікроорганїзмів на ріжнородних підложах (сировать крови, аґар, булїон, желятина, картофлї і т. д.), дають в приближеню образ, як скоро і в якій скількости розвивають ся они, а цїлий арсенал найрозмаїтших фарб підпомагає слїдителїв там, де иньшими методами або не можливо, або не так точно виказати мож присутність бактерий (прутень туберкулїчний Коха, ґонококи Найсера). Розслїдам бактериольоґічним завдячуємо в значній мірі об'яснене процесів ферментацийних, гнитя і всякого розкладу тїл орґанїчних. Бактериольоґия научила нас винайти навіть між мікробами-галапасами твори пожиточні, ба нераз конечні до житя висших створів — чоловіка передовсїм — а фізиольоґія тїла людского від бактериольоґів переняла іпотезу: що тепер уважаєсь майже вже за аксіом — бактериї беруть визначну коли не перемагаючу участь в травленю побраного корму і присвоєню єго через орґанїзм людский. Мало того, на науцї бактериольоґії почивають головні засади новїйшої іґієни, а доказана невидержимість мікробів на висшу теплоту або зимно, брак або надмір кисня і сьвітла, їх слаба відпорність на ділане квасів, алькалїй і всякого рода жручих сполук хемічних — поклала тверді підвалини під нову зовсїм науку дезінфекциї, антисептики, асептики, що таку вагу мають в нинїшній хирурґії, положнярстві. Дальше подали бактериольоґи правила профиляктики на підставі пороблених досвідчень, відки і якими дорогами дістають ся заразнї хоробові до орґанїзму людского.

Они вконець підняли за сьмілу задачу, довести, що причиною таки всїх недуг є не що иньше, як бактериї найрозличнїйші. Годї не признати їм навіть успіху в тім напрямі. При теперішних улїпшених способах слїдженя, оден учений поперед другого стараєсь викрити і сьвіту показати того виновника хороби. Єсли ще в якій хоробі не найшли бактериольоґи доси одвітного заразня, то єго ся там догадують і надїють ся з часом при ще точнїйшім улучшеню теперішних метод, взглядно через винайденє нових — викрити властивого споводника хороби і заздалегідь диктують від себе передовсїм інтернїстам поділ недуг після етиольоґії на основі бактериольоґічній. Не дасть ся заперечити, що велику поміч і підпору при розпізнаню многих недуг мають клїнїцисти в дослїдах бактериольоґічних. Нераз прим. довго не мож на певне розпізнати туберкульози легких, фізикальні обяви невиразні лишають лїкаря в сумнїві; винайденє прутнїв (бацилїв) Коха справу від разу рішає. А що єсть певнїйшим доказом закаженя зимохою, як присутність амеб в тїльцях сьвіжої крови під дрібновидом? Всї ті однак розслїди бактериольоґічні вимагають великого заходу працї, вправи, терпеливости, а при конечности многих приладів і відчинників хемічних, якими упосажуєсь лябораторию хемічно-бактериольоґічну, майже не можливі до переведеня кождому поодинокому, практичному лїкареви. Тай мимо того всего не все удають ся они, як прим. в тифі кишковім за житя хорого. В тій недузї заатаковані суть межи иньшими орґани витворюючі кров, селезїнка, железы, сама кров хоробово змішана а мимо того майже нїколи не удало ся викрити прутня Еберта в крови за житя недужого.

Рівнож велике значінє приписують бактериольоґи розслїдам бактериольоґічним посмертним. Вигодують з якогось то орґану мертвого тїла чоловічого (з кишок, селезїнки, печінки і т. д.) певні мікроби, хотьби прим. тифові, ропні, bacterium colli чи які другі от і мають готову диаґнозу недуги, на яку відносний чоловік помер. Тут і попадають бактериольоґи часто в конфлїкт з клїнїцистами що до властивого розпізнаня і осудженя хороби. Після них не може орґанїзм людский занемочи без удїлу бактерий. Нїчим для них клїнїчний пробіг недуги, ріжні важні і дрібнійші обяви, що таку вартість мають для клїнїциста, без значіня для них стан сил відносної одиницї і услове, серед яких хорий проживав — они stricte віддїлюють хоробу взглядно мікробів-споводників єї від орґанїзму недужого, для них міродайною єсть присутність зараднїв, після котрих недугу іменують. Що за житя недужого не все приходять до таких самих результатів, приписують в головній мірі недостаточним поки що способам слїдженя. Дальше свої твердженя скріпляють єще тим, що вприсненем годівлї викритих при автопсиї заразнїв, викликують занедужане або бодай відповідну реакцию на експериментальних зьвірятах.

Тай не тілько в дияґнозї хороб зуміли придбати собі бактериольоґи таку важну участь; они взялись і за друге дїло, не менше важний дїл медицини, т. є. терапію. Початок добрий зробив Пастер, а тепер попри сьвітлї результати єго методи лїчної, хиба не мож замовчати про успіхи терапиї антітоксиною Берінґа-Ру-а, щоб о иньших пробах в тім напрямі не згадувати. Тож нема чому дивуватись, що бактериольоґи піднеслись до такого значіня на полї наук природи, що заволодїли медициною, патольоґією експериментальною і з гордостю певноти заповідають, що до них належить в будучности розвязане многих ще проблемів науки лїкарско-природописної. Тепер вже годї не то лїкарева обходитись без науки бактериольоґії, не слїдити дальшого єї розвою і не користуватись єї винаходками, відкритями — нинї вже стало модою, може навіть потребою, кождому чоловікови з інтелїґенциї, бодай дещо знати про ті невидимі а часто так страшні бактериї, і дбати про заведене обовязкової науки іґієни в школах публичних. Насупроти наведених тверджень бактериольоґів в деяких случаях досьвідченя випадають инакше. І так, коли бактериольоґи удержують, що ропіня викликати могуть лише специяльні бактериї іменно сукровичники (цїплинок, streptococcus і грестинок, staphylococcus), доведено (Grawitz, Kreibom і Rosenbach, Christmas, Steinhaus, Kaufmann, Roger і Bonnet), що може оно повстати і без удїлу тих мікробів, чисто впливами лише хемічними. Годї рівнож вдоволитись, чому повстає досить часто у людей запалене ропне колїна, лїктя по ударі механїчнім, мимо того, що нема найменшої ранки поверхної — таким обясненем: В тїлї людскім, особливо в проводі кормовім проживає множество ролличних мікробів. Як лише найдесь в орґанїзмі якесь місце менше опірне, не зовсїм здорове (locus minoris resistentiae), зараз мандрують туди бактериї з лїмфою чи кровю і осїдають там. Через удар отже взглядно ушкоджене механїчне має повстати locus minoris resistentiae, а се вже дає добру нагоду розвиватись мікроорґанїзмам. Дальше переконали ся патольоґи, що запаленє легких спроваджують не лише специфічні пневмококи Fränkla, Weichselbauma, Friedländera, але і иньші бактериї могуть викликати такі самі зміни патольоґічні в ткани легких. Отже після таких досьвідчень не оправдувалоби ся тверджене бактериольоґів, що кожда хороба орґанїзму людского має свого окремого, специфічного заразня. Дальше ще більше захитує тоє їх правило виказувана часто присутність мікроорґанізмів ропних на мікдаликах недужих на гарицю (scarlatina), дифтерию, що прецїнь мають свої окремі бацилї. В острім ревматизмі суставнім (дна) нераз приходить до ропіня, а прецїнь цїлий пробіг сеї недуги такий характеристичний, такий відмінний від pyaemi-ї чи sepsis, що хиба мусить бути якийсь иньший галапас мікроб, споводник ревматизму а не strepto- і staphylococcus. Хоч суть знов патольоґи, що за причину ревматизму уважають коки ропні, лише змодифіковані, менше розвинені, не маючі такої сили жизненної (viruleur) коли знов у дифтерий, гарицї, тифі кишковім (де приходить нераз до зропіня желез зачеревних, або ропного запаленя уха) видять мішану інфекцию лише, чим покривають тверджене бактериольоґів.

Цїлком відмінної є гадки Міллєр а за ним Хвостек. Іменно з натиском висказує Міллєр свій погляд, що тоті самі бактериї могуть викликати ріжні зміни патольоґічні, ріжні хороби залежно від рода орґанїзму зьвіриного, дальше від ріжних тканей того самого зьвіряти. Приписують отже тканям орґанїзму даного зьвіряти сей головний „специфічний“ вплив на повстанє недуги. В доказ того наводить Хвостек примір, де бактериї ропні спроваджують ропне запаленє шпіку кістного — osteomyelitis — а тоті самі мікроорґанїзми перенесені на окістницю, витворюють лише запаленє окістницї сироватне (periostitis serosa). В той сам спосіб толкують процеси ропні в пробігу тифу черевного, рожі, чим сильно оспорюють правдивість твердженя о специфічнім дїланю бактерий. Деякі інтернїсти (Тельґ) ідуть ще дальше і не вагають ся висказати, що тоті самі бактериї через ріжні впливи орґанїзму зьвіриного, взглядно людского, підлягають ріжним перемінам і викликати могуть справи патольоґічні, що виступають під образом ріжних недуг. Ба — суть навіть учені (Бухнер), що прямо заперечують участи бактерий, прим. в ферментациї, приписуючи їх чисто процесам хемічним, тай відмовляють (Тельґ) мікроорґанїзмам

[1]) Chvostek Wiener klinische Wochenschrift Nr. 49, 1896.

виключне викликане якоїсь хороби уважаючи їх присутність в орґанїзмі лише за річ побічну, припадкову, а за властиву правдоподібну причину недуги уважають ушкоджене, некрозу певного числа клїтин в тканях орґанїзму наслїдком якихсь незнаних процесів хемічних, забурень в правильній переміні материї, цїлковито без участи мікробів.

Huеppe[1]) бачить рішучо причину повставаня недуг в самих тканях і соках орґанїзму зьвіриного без участи бактерий під впливом ріжних шкідливих моментів. Се вже давнїйше експериментами старавсь довести Rossbach,[2]) що за вприсненем папайотини зьвіряти знаходив в єго крови мікроорґанїзми. Wyssokowitsch[3]) виказав, що вприсненем ферментів під скіру, або в жилу так ослабляє відпорність орґанїзму на бактериї, що они місто вигинути і не бути шкідливими — як то є звичайно — розмножались що раз численнїйше. Gottstein[4]) убивав морскі свинки (морщаки) курячою холєрою, коли їм рівночасно вприснув отруї в маленьких дозах, не дуже шкідливих, коли вприснене самої культури холєри курячої в нїчім зьвіряткам не зашкодило. Загально знане також досьвідчене з карміном, котрого вприснене кріликови спровадило у него туберкульозу. Взагалї всяке занедужане, слабшу відпорність на інфекцию орґанїзму зьвіриного, взглядно людского спроваджує гірший стан відживленя, голод, утрата крови, утрата води, надмірна праця, зимно.

Пастер а опісля Ваґнер потрафили кури заразити карбункулом лише простим остуджуванем. До тих самих результатів дійшов Савченко, Лїпарі. В найновійшім часї займав ся тим питанем Lade[5]) і вповнї потверджує погляди наведених авторів, кажучи, що охолоджене орґанїзму чи то тревале чи хвилеве прискорює і улекшує інфекцию.

Вконець і впливи психічні не без значіня на стан відпорности тїла чоловіка. Кілько то разів особи по стратї дорогих членів родини попадають з жалю і смутку в тиф кишковий, запалене мозку. Так само страх і ґризота бувають нераз причиною тяжкої інфекцийної хороби (холєра).

---

[1]) Hueppe: Naturwissenschaftliche Einführung in die Bacteriologie. Wiesbaden 1896.

[2]) Rossbach: Centrallblatt für die Medicin. Wissenschaft. 1882.

[3]) Wyssohowitsch: Deutsche medicinische Wochenschrift. 1890, Nr. 24.

[4]) Gottstein: Deutsche medicinische Wochenschrift. 1890, Nr. 24.

[5]) Lode: Archiv für Hygiene. 1897.

В послїдних місяцях захитана досить сильно етиольоґія тифу черевного досьвідченями Val de Gras'a, що найшов прутнї Еберта-Ґафкого в левкемії — дальше Remlinger і Schneider,[1]) подибали тоті самі бацилї тифові в febris intermittens, gastroenteritis, а що найважнїйше, пили воду занечищену мікробами тифу і не заразили ся. Супроти тих фактів ставлять приклонники бактериольоґії іпотезу, що не всї люде мають диспозицию улячи інвазиї заразнїв і занедужати серед відповідних об'явів властивих якомусь родови мікробів. Взагалї справа тота цїла дуже тепер неясна, погляди ріжних учених pro і contra такі ріжнородні і противорічні а мимо того, що число досвідчень в обох напрямах чим раз то більше, що раз то новими доказами, годї осудити на разї, який буде конець тої борби межи бактериольоґією а хемією.

Згадано вже було, що бактериольоґи на підставі вислїдків посмертних, виводять етиольоґію даної хороби. Противлять ся тому клїнїцисти; так межи иньшими каже Ляйбе[2]): „Знайдене мікробів на мерцї залежить від процесу розкладового самого трупа, правдоподібним видаєсь, що мікроорґанїзми, котрі подибуємо на многих частях тїла людского за житя, по смерти чоловіка без упину роспросторонюють ся по цїлім орґанїзмі. Тому відповідні вислїдки на мощах мають лише малу вартість, хотьби виконати їх скоро після смерти, значить перед виступленєм гнитя і при захованю всїх мір осторожности".

Розенбах[3]) думає, що великої ваги до посмертних розслїдів крови не мож привязувати.

Beck[4]) знаходив в трупах мікроорґанїзми в ріжнім часї по смерти а походженє їх відносить до кишок.

Baumgarten[5]) з нагоди правильного знахдженя грестинків (staphylococcus) в ямах ропних по смерти каже, що з великою резервою належить приняти твердженє, будьто би образ розросту крупликок (коків) по смерти відповідав дїйстному станови за житя. Те саме удержує він і о прутнях тифових.

Рівнож і Trombetta[6]) не дуже радить довіряти вислїдкам бактериольоґічним по смерти, а то з причини, що під впливом бакте-

---

[1]) Annal de l'Instit. Pasteur N. 1. 1897.

[2]) Leube: Zeitschrift für klinisch. Medicin III. pag. 233.

[3]) Rosenbach: Mikroorganismen bei Wundinfectionem після Chvostek'a.

[4]) Beck: Arbeiten aus dem patalogisch-anatomischen Institut. Tübingen 1891, після Chvostek'a.

[5]) Baumgarten: Lehrbuch der Mykologie. Braunschweig 1890, після Chvostek'a.

[6]) Trombetta: Centralblatt für Bacteriologie, 1891, II. pag. 664.

рий гнильних, виступають зміни в мертвім орґанізмі і в наслідок того мож викрити в крови і ріжних частях тїла мікроорґанїзми, що з властивою хоробою не мають жадної звязи. Він стараєсь тому означити час і границю, коли починаєсь процес гниття, взглядно, як довго вільна кров і иньші орґани від бактерий гнильних. Після него, зависить сесе від теплоти і величини зьвіряти. При звичайній теплоті комнатній виступає гните у миши по 19 годинах, у кріликів в 16 годин. Чим висша (до певної міри) теплота і чим більше зьвіря, тим скорше виступає процес гнитя. Впрочім залежить се також від стану проводу кормового. Кров звичайно довше опираєсь гнитю.

Переважна часть авторів нїмецких (Rindfleisch, Zahn, Meissner, Hauser і др.) за правило почитує, що в здоровім орґанізмі чоловічім жадних патоґенічних мікробів за житя нема. Єслиж отже найдуть ся они по смерти в ткanях орґанїзму, головно в крови, то заключують з сего, що були они вже там за житя, значить, що орґанїзм був хорий, а на потверджене того приводять досьвідченя, будьто цїлї, здорові стїни судин кровоносних, навіть кишок, не пропускають бактерий. Що найбільше скількість їх може по смерти збільшитись, але льокалїзация остає тота сама, або иньшими словами, мікроби держать ся лише хорих орґанів тїла і нїкуди відси не розходять ся.

У відповідь тому навести годить ся численні розвідки других авторів, котрим за житя хорих не удавалось, або лише дуже рідко викрити певні заразнї, а по смерти тих мали результати позитивні. Petruszky[1]) на 14 случаїв туберкульози легких найшов по смерти хорих в крови 8 разів ціплинки (streptococci), а за житя в иньших знов 8 случаях сухот легких бачив лише оден раз. Frosch[2]) на 14 випадків дифтериї найшов при автопсиї прутнї Лєфлєра 10 разів, а за житя анї разу. Так само Смирнов[3]) і много иньших. Отже слїдителї сесї висказують гадку, що годї собі витолкувати присутність бактерий в орґанїзмі по смерти самим лише розмноженєм їх, мусять тут в гру входити і иньші причини, передовсїм припускають, що з хорих орґанів тїла post mortem роспросторонюють ся заразнї ріжними дорогами по орґанїзмі. Більшої ще стїйности набирають їх погляди розвідами над bacterium colli. Галапас (парасит) сей викритий Escherich-ом[4])

---

[1]) Petruschky: Deutsche medicinische Wochenschrift, 1893, Nr. 14.

[2]) Frosch: Zeitschrift für Hygiene XIII. після Chvostek'a.

[3]) Smirnow: Diss. Petersburg 1889. Ref. Baumgartens Jahresb. 1889, після Chvostek'a.

[4]) Escherich: Fortschr. des Medicin 1885, Nr. 16 і 17.

(1855) в кишках новородка, подибуєсь стало в кишцї грубій чоловіка як здорового так і в недузї. Єму взагалї приписували з початку дуже малу pathogenitas; доперва Laruelle[1]) (1889) бачив в двох случаях peritonitis perforativa bacterium colli в exudat-ї. Єму також удалось вщіпленєм культури сего галапаса викликати на зьвірятах peritonitis. Дальші розслїди патольоґів виказали, що мікроб сей може стати причиною острого запаленя кишок, ропнїв в печінцї, а навіть послїдними часами підозрівають єго о викликанє тифу кишкового, а бодай о значну співучасть при тій недузї. При здоровім станї проводу кормового має бути цїлковито не шкідливий, а набирає сили хороботворчої доперва серед якихсь ушкоджень стїн кишок.

Отже сей то мікрооргаиїзм знаходять патольоґи дуже часто в коротцї по смерти в многих орґанах, як в печінцї, селезінцї, почках, в случаях де не було і гадки о жадній інфекциї, тим самим о евентуальній присутности їх вже за житя хорих серед тих орґанів. За условє переходу bacterium colli через стїну кишок подають Marfan,[2]) Nanu,[3]) Marot,[4]) Lesage,[5]) стан хоробовий проводу кормового прим. сильні розвільненя, ulcera в наслїдок дисентериї. Boenecken[6]) удержує, що до переходу мікроорґанїзмів не потреба навіть таких великих змін патольоґічних в структурі стїн кишок, вистарчить сильнїйша іперемія (hyparemia, перекровленє), застій жильний, а Levin і Posner[7]) знаходили bacterium colli на очеревній по осторожнім перевязаню кишки відходової, в наслїдок чого кажуть, що і стїни цїлковито здорового проводу кормового пропускають мікроорґанїзми. Тото само твердять о стїнах суднн кровопроводних Pernice-Scagliosi,[8]) Biedl-Kraus,[9]) а передовсїм Chvostek,[10]) що по вприсненю культури галапасів (паразитів) до доріг кровоносних вже в 16 годин знаходив їх в течи суставів.

Взагалї випадалоби з тих досвідчень, що мікроорґанїзми подибувані по смерти в розличних тканях тїла, в крови — виходять

---

1) Laruelle: Cf. Baumgarten's Bakt. Jahresbericht 1889.
2) Marfan: Rev. mens. des metod. de l'enfance, 1892, після Chvostek'a.
3) Nann: „ „ „ „ „ „ „ „ „
4) Marot: Arch. de méd experim. 1895, Nr. 7 pag. 25 „ „
5) Lesage i Macaique „ „ 1892, pag. 350 „ „
6) Boenecken: Virchows Archiv. Nr. 120 pag. 7.
7) Levin i Posner: Berliner klinische Wochenschrift 1894 Nr. 32.
8) Pernice Scagliosi: Deutsche medicinische Wochensch. 1892.
9) Biedl. Kraus: Centralblatt für innere Med. 1896, Nr. 29
10) Chvostek: Wiener klinische Wochenschrift 1896 Nr. 49.

головно з проводу кормового, правдоподібно також з міхурця жовчного. Розходилоб ся тепер ще о рішене питаня, коли іменно мікроби ткани ті займають, коли опускають своє звичайне місце пробуваня. Після авторів нїмецких не буває сесе навіть по смерти, бож они удержують, що бактериї ті по части були вже в тих тканях за житя, а по смерти лише їх скількість збільшилась. Інакше твердять француські автори, они розслїдами своїми силують ся доказати, що мікроби дістають ся до сусїдних орґанів і до крови ще за житя, в аґонії. В тім напрямі працювали Wurtz і Hermann, Lesage і Mecaique, Lion, Marfaud, Letienne, Gilbert і довели, що прим. bacterium colli найти мож зараз по смерти в селезени, печінцї, почках і міхурцї жовчнім, куди дісталось оно з проводу кормового. Malvor викривав вже в кілька годин після смерти бактериї в селезени і печінцї мертвих тїл. Приняти таке, що бактериї дістались туди доперва по смерти, можна би що найвисше для присутности на очеревній, печінцї, але цїлковито оправдати не дасть ся, що так само і в тім самім часї дістануть ся до сележінки, до осердя (pericardium) і т. д.

Більше ще переконуючими суть розслїди Bouchard'a,[1]) котрий заморожував кріпики і вже підчас аґонії находив мікроорґанїзми в їх крови. Так само випали досьвідченя Wurtz'a, що по замороженю кріликів так однако, що серце зьвірят ще било, сподибував на чотири случаї оден раз мікроорґанїзми; у морских свинок на 14 проб вісім разів, а на 15 случаях у мишей дванайцять разів. Він находив попри иньші мікроби проводу кормового bacterium colli, proteus vulgaris і streptococc-і в крови серця. Такіж самі результати одержав він, коли душив зьвірята. Коли убивав зьвірята голодом — проби випадали єму уємно. Він заключає, що зимно уможливляє і прискорює вандрівку бактерий проводу кормового до очеревної і судин кровопроводних в послїдних хвилях житя і бачить причину того з'явища в конґестийних змінах стін кишок, без уділу тяжких ушкоджень, ульцераций і т. д.

Charrin[3]) потверджує перехід мікробів з кишок до печінки, почок, крови, підчас коли він певні, означені бактериї впроваджує до проводу кормового і відтак тотї самі при розслїдах виказати може. Дезінфекция проводу кормового спиняє вихід мікроорґанїзмів, а при вилученю кишки грубої одержував результати уємні.

---

[1]) і [2]) Bouchard і Wurtz цитовані у Chvostek'a.

[3]) Charrin цитовані з Chvostek'a

Wurtz[1]) затроював зьвірята аршеніком, що сам через себе єсть тїлом убиваючим бактериї — і викривав мікрооргані́зм вже в передсмертю в exudat-ї очеревної, в крови в осердю (pericardium) і на олегочній (pleura). Після него, чим довше тревало конанє, тим обильнїйше було число бактерий. При тім виносила температура тїла зьвірят лише 33°, 34°. При температурі ще 35° мав результати лихі. Beco[2]) уживав до затроюваня зьвірят аршенїку, кантеридини і tartarus stibiatus і мав такі самі наслїдки. Констатує тілько, що коли задавав зьвірятам великі данки отруї, так що зьвірята сейчас гинули, не находив бактерий навіть в 24 годин, ба і по 9 днях зовсїм, і каже, що коли мікроби не дістануть ся ще за житя зьвіряти в агонії до дороги кровної, то по єго смерти або цїлковито вже бактериї не дістають ся або дуже поволи і в малій скількости.

На велику скалю перевів свої досвідченя Chvostek[3]) з кріликами, білими мишами. Поперед уживав він методи заморожуваня головно з тої причини, що зьвіря довго конає а по друге, що представляє найменше можливости ушкодженя слизницї кишок. Він саджав зьвірята до відповідних судин скляних і морозив їх при температурі 10—12 C. Коли запримітив агонїю зьвіряти, отвирав сейчас зьвіря і брав кров з серця, коли ще оно товкло ся, серед всїх можливих осторожностей і щепив нею рурки з агаром. Рівночасно убивав він зьвірятка того самого рода через прорванє стрижа продовженого (medulla oblongata) і з них нащіплював кров в той самий спосіб на агарі, а кромі того для контролї брав рурки з чистим лише агаром і всї три роди рурок вставляв тепер до термостату. Проби єго випали так: на 13 заморожених кріликів найшов бактериї чотири рази. В крови зьвірят ужитих для контролї не найшов мікробів анї разу. Культури єго на агарі представлялись переважно яко круплинки (cocci) всякого рода (staphylococcus albus et aureus, bacterium colli). Відтак до дальших розвідок брав білі миши. Кормив їх перед тим молоком а відтак уживав нараз до досьвідчаня по троє зьвіряток. Одно з них убивав через знищенє стрижа продовженого (medulla oblongata), другі двоє заморожував на смерть. Відтак брав з них кров з серця, з воротницї (vena portae) і нащіплював на відповіднім підложу. З одної миши замореної брав кров в часї агонії, а другу полишав по смерти в комнатній теплотї через кілька-кілька-

---

[1]) Wurtz цитовані є Chvostek'a.

[2]) Beco Anual. de l'Institut Paster 1895 Nr. 3.

[3]) Chvostek: Wiener klinische Wochenschrift 1897 Nr. 3.

найцять годин, щоби переконатись, чи дїйстно дістають ся мікроорґанїзми до тканей тїла зьвіриного по єго смерти. Ужив до того взагалї 150 мишей. Він найшов у мишей морожених, і зараз в аґонії секціонованих на 50 случаїв 22 разів бактериї, у зьвірят заморожених а отворених доперва по кількох годинах найшов на таке саме число лише 8 разів а у зьвірят убиваних іно для контролї подибав мікроби всего 3 рази. У Хвостка кольонії бактерий видні були вже по 24 годинах, рідше виступали они на вид по 48—60 годинах. Після него великий вплив на результати досвідчень має спосіб живленя зьвірят. Зьвірята кормлені молоком надавали ся найлїпше до тих розслїдів, коли лихе їх відживлюванє прим. сухим хлїбом давало менший процент результатів добрих. На 14 случаїв зьвірят голоджених а відтак убитих через замороженє, найшов лише оден раз бактериї. Замітити при тім належить, замороженє у мишей тревало около 40 мінут.

Кромі того ужив ще Хвостек до своїх дальших досьвідчень 31 мишей убитих через удушенє. Всї проби ті виконав серед аґонії зьвірят при бючім ще серци. Бактериї найшов у 6 мишей. При тім підносить сам автор, що результат мав тим певнїйший, чим довше зьвіря конало.

На підставі тих дослїдів доходить Хвостек згідно з Француськими ученими до переконаня, що, на перекір загально узнаним дотеперішним поглядам бактериольоґів і патольоґів, мікроорґанїзми могуть дістатись серед певних обставин з проводу кормового головно до обігу крови і до тканей ріжних орґанів тїла зьвіриного, що отже вислїдки посмертні не відповідають патольоґічній льокалїзациї бактерий за житя, котрих будьто лише на числї прибуває.

Варто тепер застановитись над питанєм, в який спосіб впливає зимно, удушенє, голод і т. д. на вихід мікробів в ткани орґанїзму зьвіриного. Зимно, як відомо, спроваджує зміни в судинах кровоносних, отже єсть причиною забурень в круженю. І Wurtz виходячи з того заложеня каже, що зимно спроваджує іперемію в кишках, котра улекшує переступ мікроорґанїзмів через стїни кишок до сусїдних тканей і до обігу крови. Відтак розвіди Uschinsk-ого виказали, що під впливом сильного зимна виступають зміни в істольоґічній будові тканей, що потягає за собою ослабленє, коли не цїлковите знесенє функций фізіольоґічних відповідних тканей. В кождім разї жизненність клїтин даної ткани значно терпить, тратить на силї, а тим самим не мають вже анї клїтини самі, анї їх соки, анї відтак кров тої могучости опиратись дїланю бактерий. І Хвостек є гадки, що інвазию мікроорґанїзмів до тканей тїла споводовують два моменти, іменно перше: в наслїдок зимна виступає анемія верхнї тїла, а іперемія орґанів внутрішних, межи ними і кишок, а друге: через зимно тратять ткани орґанїзму силу відпорну супроти мікробів.

Дальше старається автор сей вияснити, чому скорше, частїйше знаходив бактериї в крови при секциї зьвірят зараз безпосередно по смерти їх, нїж у зьвірят розбираних доперва в кілька годин. Толкує то так: мікроорґанїзми вже в аґонії, значить перед смертю, входять до обігу крови, до серця. Тож кров взята з серця — ще серед того як оно ся товче — буде мати більше бактерий і скорше культура удасть ся, як кров з серця, що вже давно застигло. Бо в першім случаю круженє крови ще в части удержане, отже з новою Филею крови настигають вже сьвіжі маси бактерий, коли кров в серци в спочинку безупинно дїлає на ті самі мікроби своєю ще лишившою ся силою антибактериольоґічною і убиває їх, а нові вже дальші ряди мікроорґанїзмів не прибувають. Противне відношенє заходить в иньших тканях орґанїзму пр. на очеревній, в печінцї, в міхурцї жовчнім. А то знов тому, що відпорність клїтин і їх соків в наслїдок шкідливих впливів (зимна) слабне в аґонії ще більше, а в якийсь час по смерти устає, отже бактериї без опору жадного переходять до них і щораз більше розмножують ся.

Щоби ще більше упевнитись що до осудженя вартости вислїдків бактериольоґічних посмертних, виконав Хвостек ще 28 досвідчень на мишах, котрі убивав через мороженє і знищенє стрижа продовженого (medulla oblongata), так само, як в попередних пробах і лишав їх по смерти через 12 годин в температурі комнатній. А було се лїтом. У мишей заморожених найшов лише в 8 случаях бактериї, а у звіряток убиваних прорванєм medulla oblongata мав в 14 припадках позитивні результати.

Відмінний сей від попередних вислїдок своїх досьвідчень не об'яснює після него погляд Trombett-и, що гнитє не рівночасно виступає ві всїх орґанах тїла, а радше за правдоподібне уважає, що зимно, котре ушкоджує орґанїзм зьвіриний, спиняє також розвиток тояжків (бактерий). До того причиняє ся в части сесе, чи кишки порожні чи наповнені екскрементами, що приспішують гнитє. В наслїдок зимна при мороженю віддають зьвірята много калу і мочі, — чого нема у зьвірят убиваних прорванєм стрижа продовженого (medulla oblongata), — а що в послїднім случаю через скорше виступаючу гнилизну улекшує розмножене розроднїв мікробових.

Рівночасно з пробами крови виконані проби на очеревній дали Хвостекови майже однакові результати. Лише у зьвірят убиваних через знищене стрижа продовженого (medulla oblongata) досьвідченя зроблені зараз post mortem, а в 12 годин пізнїйше, ріжнять ся процентово $18\%-70{\cdot}4\%$. Дальше за інвазією мікробів за житя зьвіряти до ріжних тканей промовляють розводи Ribbert-a і Bizzozer-a,[2]) що находили в фолїкулах нормальної стїни кишок у кріликів мікроорґанїзми і то лише в верствах кишки поверховних. В глубших верствах стїни знаходив Ribbert образ, що після него сьвідчив о смерти многих бактерий, котрі улягли тут дїланю антибактеріольоґічному тканей зьвіряти. За правдоподібне почитуєсь також, що мікроби ресорбовані бувають підчас травленя корму через стїни кишок разом з соками кормовими.

Що до того, як і куди дістають ся бактериї з проводу кормового, то перемагає між ученими гадка, що дїєсь сесе на підставі правил фізикальних осмози і трансфузиї і в сей спосіб займають они найблизші сусїдні тенеса, а в дальші части орґанїзму заносить їх лїмфа і кров.

Результати всїх тих ріжнородних а так численних розслїдів виконаних через визначних учених в сьвітї лїкарскім мож меньше-більше в коротцї так представити:

1. На перекір дотеперішним загально узнаним правилам головно школи нїмецкої — можлива єсть інвазия бактерий до тканей орґанїзму зьвіриного вже за житя іменно в аґонії.

2. Посмертні вислїдки бактериольоґічні не відповідають лише льокалїзациї мікробів за житя зьвіряти, анї мнимому їх тілько розмноженю.

3. Інвазию мікроорґанїзмів в аґонії уможливляє і прискорює зимно, отруї і иньші шкідливі впливи на орґанїзм зьвіриний.

4. Бактериї переходять навіть через здорові і неушкоджені стїни проводу кормового і судин кровопроводних.

5. Головним місцем пробуваня і виходу мікробів єсть провід кормовий.

6. Зменшена відпорність тканей орґанїзму зьвіриного підпомагає і улекшує вихід мікроорґанїзмів.

---

[1]) Ribbert: Deutsche medicinische Wochenschrift 1885, pag. 197.
[2]) Bizzozero: Centralblatt für med. Wissenschaften 1885 pag. 801.

7. На підставі вислїдків бактериольоґічних посмертних не все мож заключати дияґнозу клїнїчну недужого.

8. На відворот культури бактерий по смерти могуть тілько потвердити поставлену дияґнозу клїнїчну у хорого за житя.

Результати з моїх власних досвідчень в тім напрямі подам в своїм часї.

У Відни 6. IV. 1897. р.

Др Осип Дакура.

Заклад лїчебний для сухотників в Аллянд.

Хиба нема чому довго розводитись і доказувати, яку вагу має для недужого добре, належите відживлюванє і сьвіжий воздух. Чинники тоті оба становлять бодай чи не важнїйшу часть теперішної, рациональної терапії і кождий лїкар практичний по при лїки аптичні, цїлковито слушно поручає дбати головно про сили хорого і старатись для него о чистий, добрий воздух. Річ на сповид така проста, природна, лїк такий таний (?), а однак як тяжко перевести се в практицї, про се може мати належите виображенє лише той, хто знає житє наших бідних людей по містах, місточках, не вагаюсь сказати і по селах. Потреба таних, здорових мешкань для люду робучого, для бідного населеня, стає з дня на день щораз більше пекучою головно зі взглядів ігієнічних і нинї вже за взорами великих фабричних міст анґлїйских, американьских, по части нїмецких починають і у нас на разї по більших містах роздумувати над рішенєм сего вельми важного питаня. Як доси воно є, то тяжко і чудуватись сумним відносинам що до стану здоровля тих найнизших верств нужденної суспільности людскої, сїй великій смертельности у них, коли зважить ся, серед яких то обставин нуждарі сесї вік свій коротають. В недостатку найперших і найважнїйших потреб житя вже від самого уродженя, серед журб, клопотів вічних і терпінь моральних, заселяють они сутерени і піддашя по містах, а курні, холодні хати без помосту по селах — гуртом в купі мале з великим, без ріжницї пола, одна родина з другою або і більше разом, оттак, щоби було всїх кілька-кільканайцять люда, та щоби місця стало на кухню, балїю, колиску, машину „панни швабки“, якийсь варстат шевский або кравецкий, а дуже частенько найде приміщенє курка або яке иньше пожиточне сотворінє. Не дай Боже тепер немочи в такій хатї! Деж тут може бути бесїда о потрібнім для хорого супокою, вигодї і доглядї належитім. Як тут ізолювати недужого від здорових, та відки взяти для него сьвіжого, чистого воздуха?! До шпиталю всїх хорих не приймуть, раз тому, що за мале число шпиталів, щоби всїх помістити, а по друге є певне число недуг, що вимагають постояного леженя в ліжку і заживаня ріжних ліків медициньских, а радше зміни способу житя, місця пробуваня на якийсь час, доброго відживлюваня, свободи ума і богато-богато сонця, тепла воздуха. Межи ті недуги в першій лїнії належать скрофули у дїтей і туберкули особливо в самих початках. Лїкарі висилають таких хорих в околицї зі шпильковими лїсами, в гірскі сторони на жентицю, до місць купельних, над море, в теплїйші сторони о лагіднім клїматї; кажуть шукати веселого товариства і не жалувати собі нїчого, але все те вимагає великих видатків, так лїчитись могуть лише люде заможні, що з бідаками зробити? Краківский шпиталь дитячий св. Людвика висилає рік річно партиями по кількадесять дїтей шкрофулїчних на кілька тижней до Рабки чи Риманова і успіхи того лїченя суть часто дуже вдоволяючі; але про якийсь сталий лїчебний заклад для хорих на груди не було доси чути не то в Галичинї, але і в цїлїй Австро-Угорщинї і то не тілько для убогих, але навіть для людей богатих, щоби готові були оплачуватись.

Заклади такі суть що іно в Анґлїї, має їх кілька публичних Німеччина іменно Рупертсгайн (Rupertshain) в Тавнусї заходами Детвайлєра, дальше в Альбертсберґ в Саксонії і Андреасберґ в Гарци будуть імовірно сего року віддані на ужиток публичний. Кромі того є кілька приватних закладів для недужих на груди як пр. Вольфа в Райбольдсґрін, Вайкера в Ґерберсдорф, Лядендорфа в Ст. Андреасберґ, дальше берлїньскі заклади в Малькові і Бляккенфельд, дальше заклад червоного хреста в лїсистій околицї при Ґрабовзе біля Ораніенбурґа.[1]) Кромі того проєктованих є ще богато иньших закладів, котрі з часом війдуть в житє.

Росия має до тепер всего оден рядовий заклад в Галіля в Фінляндиї. Найвисше під тим взглядом стоїть Швайцария, де майже кождий кантон будує для себе такий заклад. Базилєя має їх два. З посеред них визначують ся особливо два знаменитим добором місця, будовою і урядженєм після найновійших приписів і требуваний

---

[1]) Dr. Alexander Ritter v. Weismayr: Wiener klinische Wochenschrift, 1897, Nr. 2.

іґієнїчних і терапії взагалї і суть упосажені всякими вигодами для терплячих, недужих. Оден з них є в Гайлїґеншвендї коло Тунерза в кантонї берненьскім, а другий має Базилєя в місцевости Давос-Дорф. Перший з них має на разї 120 хорих другий приняти може до 80 недужих. Всїх місць для хорих по викінченю всїх закладів Швайцариї буде тисяч кілька сот, число поважне, однак після обчисленя Ляйдена, котрий каже, що на 1000 мешканцїв повинно бути бодай 1 ліжко для туберкулїчних — навіть на Швайцарию за мале (2,909.000). Вконець здобула ся і Австрия низша на оден такий заклад в Аллянд, підчас коли гадка ще перед лїтами побудувати подібну санаторию в Угорщинї по нинї не осущилась.

В цїли доконаня сего філянтропійного дїла завязало ся у Віднї свого часу товариство з людей переважно найвисших верств інтелїґенциї, аристократиї і плютократиї. Першим протектором сего товариства був бл. п. архикнязь Кароль Людвик. Тепер числить оно 941 членів звичайних а 101 членів основателїв. Протекторат обняв Єго Величество цїсар Франц Йосиф I. а заступником своїм іменував архикнязя Оттона. Головою союза є тепер ґр. Юрий Штокав. Товариство поставило собі за задачу не іно вибудуванє і удержанє одного закладу в Аллянд, але заєдно старатись збирати що раз то більше грошей і будувати такі заклади в як найбільшім числї. Збиранєм складок грошевих займаєсь головно окремий дамский комітет під протекторатом архикнягинї Мариї Йосифи. Послїднї загальні збори товариства відбули ся дня 28. марта сего року і зі справозданя скарбника Ернеста Перайфера довідуємо ся, що розпоряджає оно тепер маєтком 539.641 зр. 41 кр. Заразом учули зібрані члени і гостї тоту радісну вість, що вже сего року під осїнь Аллянд принимати буде в своі мури перших недужих. Директором управителем цїлого закладу лїчебного іменовано Дра Олександра Вайсмайр клїнїчного асистента проф. Шретера.

Товариство згадане, котрого душею є проф. Шретер, містопредсїдатель союза, мало з початку до побореня великі трудности, раз з причини браку потрібного капіталу, а відтак годї було де набути потрібного в відповіднїй скількости ґрунту. З часом поволи найшли ся і гроші головно в дорозї складок публичних, датків ріжних високопоставлених осіб (при чім гідно уваги жертволюбивість шляхти німецкої, і так: баронова Райнельт офірувала на сю цїль 5000 зр., Ад. Бідерман 1000 зр., Ог. Кубіньскі 1000 зр. і цїлий ряд імен більше або менше знаних родин шляхоцких фіґурує зі значними сумами), концертів, фестинів, представлень аматорских і т. д. Як се дїє ся звичайно, ходило вже лише о се, де би вишукати відповідне місце під заклад лїчебний, де би хорі пробували через цїлий рік, а відтак також оречи після якого взору має ся его ставити. Шретер знав з особистих подорожей подібні заклади в Анґлії, иньші члени видїлу товариства їздили до Нїмеччини до Ґерберсдорф, Фалькенштайн, Штернберґ, щоби придивитись будові і урядженям тамошних закладів. Др. Вайсмайр відбув прогульку наукову в тій цїли до швайцарских санаторій.

Рівночасно допитувано за ґрунтом під шпиталь. Звернено ся поперед до державних дібр, монастирских посїлостей, ріжних товариств наукових, до ґеоґрафічного інститута, закладу метеорольоґічного — на дармо, не було відповідного кусня землї. Відтак нав'язано зносини з товариством туристів, розличними властителями дібр, аґентіями купна і продажи, відбувано мандрівки по цїлій Австриї низшій аж до границї стирийскої, але нїгде якось не удалось нїчого властивого найти. На добавку всего стрічено всюди неохоту і страх людей перед таким закладом. Жадна майже оселя не хотїла згодитись на сусїдство шпиталя сухотників В конець по великих трудах і пересправах найшли члени сего добродїйного товариства спорий кусень землї біля Аллянд, але і тут ледви по великих вговорюванях і представленях згодилась людність сеї місцевости на виставлене закладу для недужих на груди.

Аллянд лежить у підніжа північного Альп в околиці горбоватій всего 16 кільометрів від міста Баден. З Баден веде до Аллянд дорога долиною Швехату. З Медлїнґом получена ся місцевість битим гостинцем що веде через Бріль, а від Рекавінкель, стациї западної желїзницї віденьскої, віддалений Аллянд всего 26 кільометрів. Впрочім удержує ся проект получити Баден з західною желїзницею через Аллянд, в такім случаю було би безпосереднє получене желїзницею сего закладу з Віднем. До того желїзниця полуднева обіцяла товариству всякі знижки і полекші в перевезеню як недужих, так і всяких тягарів. Иньший знов добродїй подарив товариству відповідно уряджений віз до перевезеня недужих.

Заклад властивий побудовано 2 кільометри від Аллянд в малій місцевости Ґройсбах. Місце сесе представляє ся невеличкою кітлиною, що отверта на полудне, а від півночи, заходу і всходу окружають єї невисокі горбки. Від північного всходу замикають єї горби звані Гехерберґе високі 680 м. Ґрунт цїлий, що належить до закладу обіймає 150 морґів по части залїсений, в части представляє ся яко орна ріля, сїножати. Через згадані горби заслонена ся кітлина на вітри північні, а навіть має сесе вплив і на цїлу температуру. Мірено іменно теплоту в Аллянд зимою і порівнувано з теплотою

ВіднЯ і Ґріс коло Баден в полудневім Тиролю і показалось, що в Аллянд майже так само тепло як в Ґріс, а без порівнаня лагіднїйший там клїмат нїж у Віднї.

Нема в поближю жадних більших фабрик, нема отже диму, не заносить углем камінним, воздух чистий, здоровий. Нема і пороху, бо гостинець мало уживаний, та й лежить оподалїк від закладу, а до того посїдає тая цїла посїлість таку скількість власної води, що не лише заосмотритись може обильно цїлий заклад, господарство, але і вистарчить на точне, кількаразове на день скропленє доріг і доріжок. З разу був клопіт власне з водою. Всї більші жерела витрискують по північній сторонї хребта Гехерберґу і спливають в північнім напрямі, мала лише скількість і то дрібнїйших жерел зрошує полудневі стоки горбів і кітлину, так що справдї заходила обава, що бракне води для закладу. Зараджено сему в сей спосіб, що по одержаню даром від барона Шель-Вітінґгофа північних жерел, заложено великий резервоар і водопроводи — рури подарив бл. п. архикнязь Альбрехт — коштом зверх 17.000 зр., так що цїлий заклад з господарством заосмотрено знаменитою жерельною водою.

До удержаня чистого воздуха причиняють ся дальше роскинені по горбках невеличкі лїси шпилькові мішані з иньшою деревиною. Кромі того належить до закладу хороший сад і великий огород яринний, що разом з луками і полями становить красну посїлість, котра сама собою богато причинить ся до удержаня санаториї.

Що до будинків закладу самого, то кромі хорошої вілї, призначеної на мешканє для лїкаря управителя, канцелярию закладову і аптику, дальше кількох будинків господарских, сам заклад лїчебний ще не вповнї готов. Принято систем будованя павильоновий — бо сей показав ся найпрактичнїйший — і рішено побудувати то менші то більші домики так на 20—25 лїжок в ріжних місцях сеї посїлости в міру, як буде прибувати засобів грошевих. Головний будинок закладовий має обіймати просторонь, деб ся містило 300 хорих. Виставлений є на три поверхи і має становити осередок, докола котрого поґрупують ся пізнїйше приставлені домики. Сего року буде мож умістити около 108 хорих. Цїлий будинок звернений фронтом на полудне обіймає в самій серединї величезну салю 11 метрів широку, 8·70 м. глубоку, де хорі мають пробувати за дня серед непогоди. Дальше ідуть комнати до спаня подїлені передїлами, так що в кождім передїлї містить ся 8 лїжок. Кромі того дві сепаратки по 2 ліжка, так що на кождім поверсї містить ся всего 36 ліжок, а в цілїм домку 108 ліжок. Цїлковито ізольованих комнат для поодиноких осіб нема, бо знана річ з досьвідченя по клїнїках, де хорі замкнені осібно в „лїпших сепаратках“ нудять ся звичайно, не могуть вилежати і просять, щоби їх умістити на салї загальній разом з другими хорими.

Заклад сей не буде місцем притулку для немочних старців, хорих і здоровіючих, не буде також шпиталем для поміщеня тяжко хорих, а буде лише закладом доглядана домашного, закладом лїченя недужих. Тому будуть лише принимати до закладу таких хорих, у котрих можливе буде або вилїчене, або бодай значна поправа цілого стану здоровля. Отже передовсїм знайдуть поміщене люде з початками туберкулїв, котрих недуга через плекане належите або дасть ся застановити, або бодай дасть ся піднести їх стан сил, їх загальне відживлене і скріплене орґанїзму. З сеї то причини поки що не буде в тім закладі цїлковито комнат хорих. Недужі за дня будуть пробувати в згаданій великій сали, або в хороших отвертих галях уміщених по обох сторонах комнат спальних на кождім поверсї, або в великій сали на долинї, що представляти буде рід огорода зимового (оранжериї). Розуміє ся, що найбільше звертати увагу будуть на се, щоби хорі як найбільше пробували на отвертім воздусї, уживали богато руху, а навіть будуть призначували їм на взір швайцарских закладів якесь занятє, якусь роботу фізичну, оттак для приятности хорого, після єго змоги, щоби виробляти поволи єго сили, гартувати єго легкі, та приспішувати в єго орґанїзмі переміну материї, заострювати апетит до їди, будити охоту до житя. Зараз по принятю недужого має взяти він купіль для очищеня. Комната тая купельна — уміщена від сторони північної будинку — буде служити до ріжних процедур ідротерапевтичних. До щоденного ужитку призначено покоїки купельні біля спальнї. При брамі буде окрема саля, де хорі мають здіймати чоботи чи черевики, а убирати рід пантофлїв, щоби комнат мешкальних не занечищати і порохів не робити.

На долинї в партері знаходить ся велика комната де будуть робити ся всякі інгаляциї (взїваня), а на двох поверхах по однім мешканю для лїкарів-секундарів. При сали хорих має свою комнатку послугачка для недужих. Спосіб огріваня цїлого будинку центральний, осьвітлене електричне, телефон в місцї.

Кухня побудована окремо припирає до будинку. Кромі мешкань для всякої служби, має велику салю їдальну, де нараз може обідати 100 недужих. Віддалене кухнї від санаториї а не поміщане єї в сутеренах, як то дуже часто по шпиталях буває, має тую добру сторону, що не буде заносити так до саль хорих димом, спалениною з кухнї а в додатку через споживанє страв в салях, де недужі лежать, набирає цїлий воздух того властивого, шпитального, неприємного запаху, перед чим пре́цїнь хорих на груди стеречи належить. Подальше від головного будинку, а не далеко дороги буде поміщена пральня, саля секцийна а над нею відповідні лябораториї для лїкарів.

Хорих відповідних буде ся принимати у Віднї за порозумінєм з більшими шпиталями на разї зі шпиталем загальним при Альзерштрасе і зі шпиталем на Віденю. Пацієнти мають наперед відбути трехтижневу пробу, і коли окажесь в їх здоровлю якась поправа, то лишать ся дальше на цїлї три місяцї, а єсли нї, то вислані будуть знов до відповідного шпиталю, або випущені домів.

Сей час пробуваня хорого в закладї ужиє ся на приноровленє всяких можливих способів лїченя, найновійших метод і заходів лїкарских, щоби лише хоробу усунути, єї перемочи як також єї студиєвати. Будуть виконані на недужих всякі проби, примінювані по иньших заграничних закладах, як приміром: чи вплине на стан здоровля хорого, полишенє єго на вільнім воздусї навіть серед зимна 15—20° хотьби і до ночи, праця, спацери. В тій цїли суть в Аллянд пороблені числені доріжки і стежки, по цїлій посїлости, а всї сходять ся в самім закладї, дальше для охочих до роботи будуть до вибору хідники до чищеня, сад, огород, поле, на годину, дві або довше, скілько котрий схоче і зможе.

Догляд лїкарский сповняти буде на разї оден лїкар-управитель і двох секундарів. Они будуть мали за задачу не то занятись лїченєм властивим, але також подавати недужим докладні указки що до веденя способу житя, їди, занятя, видавати їм відповідні розпоряди, а відтак наглядати і допильнувати їх виконаня.

Особливша увага звернена буде на приучуванє хорих до чистоти, особливо, як обходитись мають з плювиною. Заведені будуть фляшочки до плютя Детвайлєра. Тоту фляшочку має хорий з собою носити замість хустки до носа, до неї плювати і щільно затикати. Лише в спальни будуть сплювачки шкляннї. Анї на підлогу, анї до хусток плюти не буде вільно.

Заклад сей буде дальше місцем науки, студий над туберкульозою. Будуть відповідно уряджені ляборатори́ї істольоґічні, бактериольоґічні, хемічні на услуги лїкарів, що схотять працювати для науки.

За дозорницї хорих ужиті будуть сестри милосерднї, котрі знов мати будуть своє мешканє окремо.

Вигляди сего закладу суть як найліпші, всюди стрічає ся він у публики з великою симпатиєю, а як потрібний він, сьвідчать о тім вже цїлї стоси листів писаних вже від довшого часу через ріжних пацнєнтів до проф. Шретера[1]) з запитанєм, коли заклад отворить ся і з прошенєм о принятє до него. Розвиватись має він куди, місця досить, коли іно добросердні люде більше гроша зложать. Він має станути дальше взором, для санаторий в иньших краях Австро-Угорщини, щоби як найбільше людей могло з сего користати, своєї недуги позбутись, або полекші дізнати, щоби ті заклади стали дїйстно добром, спасенєм бідного люду, так як голосить напись на санаторії в Аллянд: „Armen Kranken zum Heile".

[1]) Prof. Schrötter: Wiener klinische Wochenschrift, 1896, Nr. 3.

Др Осип Дакура.

VII. Інтернаціональний ґеольоґічний з'їзд у Петербурзї.

У серпнї 1897 р. відбув ся в Петербурзї VII. інтернаціональний конґрес; 17/29 серпня в салях нового зоольоґічного музея академії наук відкрито конґрес. Послї сего члени конґреса обзирали ґеольоґічну виставу, уряжену віце-головою проф. Іностранцевим, що містила у собі ріжні карти, фотоґрафії, роди скал і т. и. Особливу увагу звернула на себе Японія, котра представила прегарними штуфами свої мінерали, а теж карти, що сьвідчать про енерґічне вивчення сеї сторони, ще до недавних часів terra incognita. Теж добре представлена ґеольоґія Фінляндиї і Скандинавії, тут звертали на себе увагу штучні мінерали, здобуті гельсінфорським проф. Шультеном. Нїмецькі фабриканти виставили ріжні інструменти ґеольоґічні.

На другий день був зроблений спробунок улаштувати стратіґрафічну номенклятуру і клясифікацию, але після деяких дебатів виявилось, що питаня се тепер не має змоги бути розвязаним, але хоч для усієї землї клясифікация не була встановлена, проте така клясифікация повинна бути заснована на історичних і палеонтольоґічних ознаках, а для утвореня принципів такої клясифікациї постановлено улаштовать особливу комісию.

З рефератів вкажемо на реферат Менє про свої досьвіди, аби з'ясувати деякі ороґрафічні питаня. Він з початку намалював історию розвою ороґрафії верхнї земної і далї показав власні апарати. Вони складають ся з товстого кавчука, що єго натягнено на сферичну фіґуру, кавчук помазано товстим шаром ґіпсу; коли кавчук скорочуєть ся, то ґіпс зморщуєть ся і на сферичній верхнї утворюють ся штучні гори, які роблять ся усе вищі, чим далї од полюсів (бігунів). Далї Санко виступив з рефератом про орографію землї. Згожуючись з іпотезою про огнево-рідку магматичну первітню натуру землї, треба визнати при охоложеню зменшеня обсяга. Найхолоднїйша частина верхнї землї, не може слїдувати за скороченням решти обсяга землї, і мусить утворити складки. Вивченя остатнїх показує, що з архейскої ери, обсяг землї дуже зменшив ся. Скороченя землї утворило первітні континенти, які суть тільки скелетами сучасних. Сусїдні міста дали початок океанїчним ямам. Массіви сї утворились в два періоди: каледоньский, що відповідає переважно архейскій ері; сї утвореня дужче зруйновані слїдуючим другорядними процесами, і герциньский, більш захований, єго відкладеня періферично прилягають до відкладень каледоньского періода. Первітними массівами після термінольоґії референта будуть: массіви африканьский, арабский, мадаґаскарский, індийский, каледоньский, сибірский, австралїйский, антарктичний, бразильский, ґвіанский, північно-американьско-гренляндский.

Скороченя обсягу землї буде істнувати, поки земля цїлком не охолоне, даючи початок сучасним орогенїчним зонам, напр.: альпейскі, апенїнскі, океанїчні. Далї був демонстрований глобус, який мусїв ілюстровати ідеї референта.

Реферат Прінца стосував ся до орогенеза. Він звернув увагу на те, що фіґури континентів умовляють ся пересїченням двох систем майже перпендикулярних лїний і почав говорити про свої досьвіди над ріжними пластичними матеріями, які він разом скручував і здушував. Наслїдком сего були фіґури, зовсїм схожі з фіґурами континентів. Форель говорив про періодичні варіяциї ледняків; запрошуючи членів конґреса реґіструвати усї переміни в становищі ледняків усего сьвіта. Тодї можливо буде визнати, чи залежать сї переміни од астрономічних причин, коли переміна в становищі одної півкулї землї буде відповідати переміні у другій півкулї, колиж такої відповідности нема, значить переміни залежать од причин атмосферичних. Рід говорив про напрямок течиї ледняків і про походження деяких морен. При вивченю руху ледняків звертали увагу тільки на горізонтальну складаючу руху, референт звернув увагу теж і на вертікальну, сеж робив і Аґассіц, але він не зробив справедливих конклюзій, бо, милячись, думає, що поверховий шар леду рушає швидче нїж нижній. Вивченя лїнїй течиї з'ясовує походження деяких морен і ясно вказує, що фронт ледняка має невстійну рівновагу, що з'ясовує деякі неретельности постережені в переміні довжини ледняка.

В засїданю 20. серпня було покладено обрати спеціяльну комисію до вивченя принципів хронольоґічної клясифікациї осадових утворень. Було обрано місцем VIII. інтернаціонального конґреса р. 1890 Париж; теж було розглядано питанє про заведеня нових стратіґрафічних термінів і запроваженя інтернаціональної номенклятури. Далї проф. Вальтер виклав принципи клясифікациї скаловин Мёне ресумував свої досьвіди, що дозволили єму виявити в загальних рисах мінеральоґічну натуру а теж структуру грунтовного рода плятини з Нижнего Тагіля на Уралї. Усї мінерали породи можна дістати при нагріваню до червоного кольору відповідної пари в фарфоровій дудочцї. Реакція в даному випадку мабуть подобна до тої, яка маєть ся при утвореню метеорітів і утворюєть ся мабуть тепер в фотосфері сонця. Виводи сеї роботи дозваляють порівняти об'єкти ґеольоґічного вивченя з об'єктами астрофізичними. Тілло говорив про видатну барометричну депресію в середній Азиї, винайдену братами Грум-Гржімайло, потім Півцовим, Обручовим, Роборовским, Козловим. На стациї в Люкшунї середнє річнє давленє барометра 766.$_5$, а maximum 796.$_6$. Референт каже, що для цїлковитого вивченя сего з'явища потрібна ґеометрична нївелїровка починаючи з Семіпалатиньска. Другий реферат стосував ся до маґнетної аномалїї, дуже інтензивно виявленої в центральній Росиї. Лебедінцев говорив про наслїдки експедициї в Карабугазску затоку Каспійского моря. Перш думали, що дно затоки вкрито сіллю, а тепер виявилось, що ґіпсом разом з иньшими сульфатами. З'ясовуєть ся се тим, що відносини сульфатів до хлорідів в водї Каспійского моря 2.$_5$: 1.$_0$, а в океанї 11 : 1. Відкритя сульфатів опріч практичного значіня має значне теоретичне, як одинокий приклад сучасного відкладаня ґіпсу. Ердман ресумував свою працю про істнованє азота в первітних горних породах (скаловинах). Відкритє азота і гелія в скандинавских породах примусило референта дослїдити спектроскопно ряд горних пород. Азот тут істнує в хемічній сполуцї і єго можна перевести в аміяк (амоняк). Азот тут не має орґанїчного походженя. 22. серпня Андрусов говорив про потребу мати особливого корабля, що на єго удержанє постачалиб кошти усї европейскі уряди; метою такого удержаня має бути дослїдженя відкладень моря, ознаємитись з якими як і з сучасною дїяльностю моря при сучасних обставинах дослїду дуже трудно. Колиж буде такий інтернаціональний корабель, ґеольоґи легко можуть ознаємитись з морем що до сеї справи. Форель прочитав відчит інтернаціональної леднякової комисиї. Нікітин про інтернациональну бібліоґрафічну комисию. Мурлов представив перші випуски ґеольоґічної бібліографії. Марфері представив французский переклад розправи Зюса „Обличчя землї“. Маковский зробив відчит про істнованє людини разом з великими дилювіяльними ссавцями (mammalia пр. носорогач, мамонт) на підставі матеріялів зібраних в льоссї (в суглинку) Брюна (Моравія). Зелей говорив про викопуваних рептілій Пермскої і Володарскої ґуберній. Вони стоять близько до знайдених в Африцї, Індиї, Шотляндиї, Сполучених державах. Відкритя Амалїцкого в Вологодскій губ. рептілій разом з ростинами (glossopteris) і пявушниками (раковинами) має особливу вагу, бо вказує на великий розвиток озер в Пермску епоху. Рептілиї сї відносять ся до Anomodontia, близьких до Labyrinthodonta (Перевойникозубі) і Monotremata (Стекуни). Далї була розмова про петроґрафічну номенклятуру і систематику і нарештї було поставлено скласти розвязаня сього питаня на комісию обрану в Цюриху. Засїданя 23. серпня було присвячене стратіґрафічним і палеонтольоґічним працям. Фрех говорив про контінентні моря палеозойскої ери і демонстрував карти. Стефанеску говорив про dinotherium gigantissimum Steph., знайденого в Румунії. Майор Еймор казав про історию середземного моря, почнаючи з найдавнїйших часів.

З'їзд британської асоцияциї наук.

Британські натуралїсти і лїкарі складають з себе свою наукову асоцияцию і вона сего року зробила свій з'їзд в серпнї од 5/17—12/24 дати в містї Торонто (Канада). Головою товариства обрано Джона Сванса, специялїста по вивченю доісторичної археольоґії. Більшість анґлїйских вчених виїхала з Лївериуля на одному пароходї; на єму увесь час функціонувала антропометрична лябораторія, а позаду єго тяглась увесь час сїтка, що ловила усяких маленьких тварей, що пливають на верхнї океана.

Усїх членїв з'їзда було 1.362. В засїданню 5/17 серпня виявило ся, що британський уряд, відповідно бажанню асоцияциї, визначив комісию для утворення проєкта заснования національної фізичної лябораториї, а уряд британського музея визначив потребу заснования при музеї етнольоґічного бюра для британської імпериї. Грошеві справи ассоціяциї добрі, вона визначила багато стипендій за ріжні дослїди: напр. 100 фунт. за вивчення перемін звязаних з дїяльностию клїтин первних; 125 ф. за антропольоґічні і натурально історичні дослїди коло Торресової протоки, 75 ф. за вивчення біольоґії озера Онтаріо, 50 ф. метеорольоґічні обсерваториї в Монреалї і т. и. 7/19 серпня празникове зібрання Торонтського унїверситета, в якому був піднесений почесний диплъом льорду Кельвіну, льорду Лїстеру, серу Дж. Свансу і ин. В вечері проф. Роберт Остен зробив доклад про металї Канади з ріжними цїкавими досьвідами. 8/20 Форбе прочитав популярну лекцию для ремесників: „Британська Нова Ґвінея, сторона і народ", а 10/22 проф. Мільн про вулькани.

З'їзд був сполучений з ріжними гулянками, обідами і т. и.

Містом будучого з'їзда визначено Брістоль.

Вступна промова сера Джона Свансa була присьвячена новим здобуткам палеонтольоґії і доісторичної археольоґії. Референт думає, що містом з'явлення першої людини було на тропічному півдні, де знайдено найбільш близьку до людини форму (Pithecanthropos erectus) і де: в Індиї, на Евфратї, в Сомалї, в Египтї стрітили камінні орудя палеолїтичної епохи, дуже схожі з найденими в Західній Европі. Ся найдавнїйша палеолїтична епоха повинна була тягти ся безлїч часу, за який людина розселилась на далеку просторінь, пристосувалась до помірного і навіть холодного клїмата леднякового періода в Західній Европї і значно перемінила ся, що до свого фізичного типа і перших стадій культури. Палеолїтичний період змінив ся на неолїтичний, але досї ще нема досить доказів, що ся переміна стала ся помалу через культурний розвій тих самих мешканцїв. Певнїйше, що ся нова культура занесена новими народами з півдня, де напр. в Египтї було знайдено слїд сеї епохи в період за 3500—4000 років до нашої ери. Далї референт вказав на вагу вивчення доісторичної культури і антропольоґічного вивчення рас і настоював на заснованню етнолоґічного бюра в Великобританїї на взірець такого же закладу в Сполучених Державах. Форсайт говорив про потребу заснования національної фізичної ляборатори̂ї і ваги теоретичних праць. Рамзай присьвятив свою промову ще „незнайденому ґазу", який повинен зайняти місце між арґоном і гелієм. Атомна вага сего елемента на 16 одиниць вища гелія і на 20 нижча арґона теж 20, густота рівна половинї атомної ваги і він, як арґон і гелій повинен бути індіферентним (неімавим) що до сполучення з другими елементами. Рамзай зробив довгу серію досьвідів з діффузією гелія (нї гелій, нї арґон не можливо злучити з иньшими елементами, то діффузія є єдиним засобом ізолювати новий ґаз), але референт знайшов поки що тільки примішаний арґон, хоч не стратив надії одрізнити новий ґаз, коли тільки знайде матерію де его буде чимало. Даусон говорив про найдавнїйші гарні породи Північної Америки. Проф. Мейяль говорив про потребу вивчення живих тварей при їх натуральних условинах життя, вказавши на Дарвіна, багато користних ідей якого виникло од дослїження живої натури, од подорожей і т. и. Особливе значіння має у сему виглядї заснования біольоґічних станцій. Зоольоґія в сучасній формі не тільки знаємить нас з розличностию форм тварей, а і взагалї дослїджує багато найважнїйших біольоґічних питань. Вона значно розширює краєвид фізіолоґа, даючи більш широкий і ясний погляд на варіації і стадії розвою ріжних орґанів і їх функциї. Вивчення тварей показує, що єсть форми, крови ток яких міняєть ся у різні періоди життя або

в визначені моменти, єсть твари з очами ззаду, з очами на раковинї, на ногах, в серединї мозка, єсть багато очей без кристалика і у видї простих пігментних плям; що орґан чуття — ухо може розвивати ся на ногах, хвості або глибоко в серединї тїла і не має навіть дірки, щоби провести хитаня звука. Єсть твари з двома хвостами, з двома тулубами, що зрослись; деякі несуть 2 або 3 роди яєць, несуть яйця, які дають початок 2 зародкам і навіть 8. У деяких творів самцї живуть, як галапаси (паразити) на самках і навіть в горлї самім міняють свою форму до 18 раз. Самцї деяких тварей уявляють з себе тільки мішки з сперматозоїдами (заплїнками), а самки других форм тільки мішки яєць. Усї такі факти значно міняють наші погляди про ролю орґанів і відносини між собою мужеских і женьских осібняків. Референт особливо спинив ся на з'явищи перемежного розпложення, коли снастне розпложенє дає місце пупкованню в звязку з приміненнєм до околишнього сьвіту і натуральним вибором. Дїкон в секциї механїки говорив про здобутки в сфері будованя кораблїв. Турнер в секциї антропольоґії говорив про деякі особистості будови людского тїла. Референт спинив ся особливо на ріжницї в будові хребта спинного, ніг і рук, черепа, мозку людини, рівняючи до висших тварей. Характерна для людини форма хребта спинного, схожа на римське *S* стрічаєть ся в більш або меньш розвиненому становищі і у антропоморфних малп; з другого бока і у людей суть переходні форми хребта. В секциї фізіольоґічній говорив Фостер, який вказав на поспіх фізіольоґії за 10—13 років; на поспіх фізіольоґічної хемії, на поспіх в вивченю нижчих форм жптя і фізіольоґічних функций клїтини, на поліпшення метода дослїдженя укладу нервного (метод. Гольджі).

Осафат Петрик.

(Некрольоґ).

І знов зменшилось число труженників на полї наук математично-фізичних; і знов громада наша стратила чоловіка, що міг станути окрасою науки та занятн колись непослїдне місце між невеликою у нас єще горсткою людий, що старають ся посунути вперед науки математично-природописні, які є так важним нинї чинником культурним...

Осафат Петрик уродив ся в Криницї в р. 1867. Син бідного селянина-Лемка перебивавсь від дитинячого віку о власних силах через сьвіт. А кілько стоїть та борба з судьбою, кілько она вимагає накладу сили та волї, знають добре ті, що з судьбою боротись мусїли та мусять так, як він. Та мимо сього він все виходив з сеї борби з побідою; один з перших учеників ґімназиї в Новім Санчи зложив іспит зрілости з відзначенєм та перенїс ся на унїверзитет у Львові, де вкоротцї став одним з найлїпших учеників професора Пузини. Ум тверезий, критичний, знав він, що ми лиш наукою зможем дійти до тої уровени, на якій стоять другі народи Европи. Тож з правдивим пожертвованєм віддавав ся науцї через увесь час своїх студиїв, а в головній мірі посьвячував цїлий свій час улюбленій своїй науцї, фізицї. Вже яко студент дав ся пізнати ширшим кругам, коли на з'їздї математиків у Львові в р. 1894 виступив з роботою про филї електричні, яка удостоїлась признаня ученого тої міри, як варшавский математик Дікштайн. Роботу ту оголосив він пізнїйше друком під заголовком: „Krytyczny przegląd prac dokonanych dotychczas nad falami elektrycznemi. Kosmos, том XX“. (Пор. також Записки тов. Шевченка том IX).

По укінченю унїверзитета обняв місце заступника учителя в ґімназиї Франц-Йосифа у Львові, а опісля в Перемишлї та Станиславові. В рік по укінченю студиїв зложив іспит на учителя математики та фізики з поступом знаменитим (1894 р.). В Станиславові належав до дїяльнїйших членів громади руской, став секретарем филїї Просьвіти, та попри тяжку роботу в ґімназиї і в громадї не залишав працї фахової. Доказом сего його популярні статтї в Зорі р. 1896. про відкритє Рентґена; в своїй статтї вказав він на заслуги професора Пулюя, славнозвісного нашого ученого. Іменований в р. 1896 дійсним учителем математики та фізики в руській ґімназиї в Коломиї охотно приняв ся сього нового труду; а труд се був тим більший, що перший професор нової нашої ґімназиї мусїв занятись утворенєм музея фізикального, якого досель і не було. Щиро взяв ся за ту роботу, переписував ся в тій справі навіть з зарядом музею фізикального на унїверзитетї у Львові; та судьба не дозволила йому довести сего дїла до кінця. Набавившись на вправах військових яко лейтнант артилєриї тяжкої недуги мусїв вже в груднї 1896. р. виїхати до Мерану, а опісля до рідного села — Криницї, де й помер на чахотку 19. н. ст. падолиста 1897.

З ним пішов у могилу чоловік талановитий, щирий, сердечний товариш, великий приклонник нашого народа, один з найлїпших синів України-Руси. Чоловік тихий, не рвав ся нїколи вперед, але і по задї не оставав; а хоч не много здїлав, бо коротке було єго житє, однак те, що здїлав, не вмре, не поляже!

В. Левицкий.