ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛЇКАРСЬКОЇ СЕКЦИЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

Т. IV. — Випуск II.

ЧАСТЬ МАТЕМАТИЧНА

під редакциєю

ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦКОГО

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SECTION

DER ŠEWČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

B. IV. — Heft II.

MATHEMATISCHER THEIL

REDIGIRT VON

WLADIMIR LEWICKYJ

У ЛЬВОВІ, 1899.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка.
під зарядом К. Беднарского.

ЗМІСТ.

INHALT.

Причинок до теориї дробів тяглих і ґрупи модулової

написав

Володимир Левицкий

1. Як звісно підставленя ґрупи модулової[1]) мають вид:

$$Uz = T S^{a_n} T S^{a_{n-1}} T \qquad T S^{a_1} z \qquad 1)$$

або:

$$Uz = S^{a_n} T S^{a_{n-1}} T \qquad T S^{a_1} z \qquad 2)$$

Підставленя ті дадуть ся написати в виді дробів тяглих:

$$Uz = -\cfrac{1}{a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \qquad - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_1 + z}}}}} \qquad 1')$$

або:

$$Uz = a_n - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_{n-2} - \qquad - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_1 + z}}}} \qquad 2').$$

---

[1]) Пор. W. Lewicki. Wstęp do teoryi f. elip. mod. Prace mat. fiz. т. VIII. Warszawa.

2. З поміж всїх ріжних підставлень сеї ґрупи возьмем під увагу підставлене:

$$Uz = -\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cdots - \cfrac{1}{a+z}}}} = -\varphi_n(z) =$$

$$= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = TS^a\, TS^a \ldots TS^a\, z =$$

$$= (TS^a\, z)^n,$$

яке творить ся через n-кратну ітерацию тої самої субституциї та будемо старати ся представити єго в видї найпростійшім. Через се дістанемо з одної сторони спроможність обчисляти легко згаданї підставленя, а з другої дістанемо метод до обчислюваня дробів тяглих висше наведеного типу.

3. В тій цїли возьмім:

$$\frac{1}{\varphi_n\, \varphi_{n-1}\, \varphi_{n-2} \ldots \varphi_1} = F_n(z) \qquad 3)$$

отже:

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}\, \varphi_n\, \varphi_{n-1} \ldots \varphi_1} = F_{n+1}(z) = \frac{F_n(z)}{\varphi_{n+1}(z)}.$$

Но так як:

$$\varphi_{n+1}(z) = \frac{1}{a - \varphi_n(z)} \qquad \text{або:}$$

$$a\varphi_{n+1} - \varphi_{n+1}\varphi_n = 1, \qquad \text{а}$$

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}\, \varphi_n\, \varphi_{n-1} \ldots \varphi_1} = F_{n+1}(z),$$

то з помноженя двох послїдних рівностий вийде:

$$\frac{a}{\varphi_n\, \varphi_{n-1} \ldots \varphi_1} - \frac{1}{\varphi_{n-1} \ldots \varphi_1} = F_{n+1}(z) \qquad \text{або:}$$

$$a F_n(z) - F_{n-1}(z) = F_{n+1}(z). \qquad 4)$$

Впровадьмо субституцию:

$$F_n(z) = C\alpha^n \beta^z, \qquad 5)$$

де α і β є функциї зовсїм поки-що неозначені.

(Се апріористичне підставлене можна узасаднити довшим рахунком, наколи впровадимо за $F_n(z)$ добуток $\prod_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu z + \beta_\nu}{\gamma_\nu z + \delta_\nu}$ та розвинемо; того однак не переводжу ту близше).

В тойже спосіб:

$$F_{n-1}(z) = C\alpha^{n-1}\beta^z$$
$$F_{n+1}(z) = C\alpha^{n+1}\beta^z,$$

отже після 4)

$$a\alpha - 1 = \alpha^2$$

або:

$$\alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Як з сего видко наша субституция 5) для случая $a=2$ не є придатна, тому сей случай розберем окремо.

Можемо написати тепер загально:

$$F_n(z) = C\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n \beta^z + C'\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n \beta^z \qquad 6).$$

Ходить о означенє C, C', β.

Для $n=1$ $\quad F_1(z) = \frac{1}{\varphi_1} = a+z$

або після 6):

$$a+z = \frac{a}{2}\beta^z(C+C') + \frac{\beta^z}{2}\sqrt{a^2-4}\,(C-C') \qquad 7)$$

Для $n=2$ $\quad F_2(z) = \frac{1}{\varphi_2\varphi_1} = a(a+z) - 1$

або після 6:

$$a(a+z) - 1 = \left(\frac{a^2}{2} - 1\right)\beta^z(C+C') + \frac{a}{2}\sqrt{a^2-4}\,\beta^z(C-C') \quad 8).$$

З рівнань 7) і 8) слїдує:

$$C+C' = \frac{\frac{\beta^z}{2}\sqrt{a^2-4}\begin{vmatrix} a+z & 1 \\ a(a+z)-1 & a \end{vmatrix}}{\frac{\beta^z}{2}\sqrt{a^2-4}\,\beta^z\begin{vmatrix} \frac{a}{2} & 1 \\ \frac{a^2}{2}-1 & a \end{vmatrix}} = \beta^{-z} \qquad 9)$$

а так само:

$$C - C' = \frac{(a+2z)\,\beta^{-z}}{\sqrt{a^2-4}} \qquad 10).$$

З рівнань 9) і 10) слідує далї:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{\beta^{-z}}{2}\left(1 + \frac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right) \\ C' &= \frac{\beta^{-z}}{2}\left(1 - \frac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 11).$$

В виду того дістанемо тепер для $F_n(z)$:

$$F_n(z) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1-\frac{a+2z}{\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^n.$$

А що:

$$\varphi_n = \frac{F_{n-1}(z)}{F_n(z)},$$

то:

$$Uz = -\cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cdots - \cfrac{1}{a+z}}}} = -\varphi_n(z) =$$

$$= -2\,\frac{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^{n-1}+(\sqrt{a^2-4}-a-2z)(a-\sqrt{a^2-4})^{n-1}}{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^{n}+(\sqrt{a^2-4}-a-2z)(a-\sqrt{a^2-4})^{n}} \qquad 12)$$

Анальоґічно і підставлене:

$$Uz = S^a\,T\,S^a \cdots T\,S^a\,z = a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \cdots - \cfrac{1}{a+z}}}} = a - \varphi_{n-1}(z) =$$

$$= \frac{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^{n-2}(a^2+a\sqrt{a^2-4}-2)+(\sqrt{a^2-4}-a-2z)(a-\sqrt{a^2-4})^{n-2}(a^2-a\sqrt{a^2-4}-2)}{(\sqrt{a^2-4}+a+2z)(a+\sqrt{a^2-4})^{n-1}+(\sqrt{a^2-4}-a-2z)(a-\sqrt{a^2-4})^{n-1}}$$

В сей спосіб можемо від разу обчисляти ітерациї ґрупи модулової та дроби тяглї наведеного типу.

Для $\lim n = \infty$ зближають ся вартости всїх субституций обох типів (без огляду на вартість a та z) до границї -2, зглядно 1, що є ствердженем знаної прояви, що ґрупа модулова на оси перворяднїй тратить власність нетяглости.

4. Возьмім приміром

$x = \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3+z}}$, то вартість єго є, як легко обчислити:

$$x = \frac{3+z}{8+3z},$$

а після 12):

$$x = 2\,\frac{(\sqrt{5}+3+2z)(3+\sqrt{5}) + (\sqrt{5}-3-2z)(3-\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+3+2z)(3+\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5}-3-2z)(3-\sqrt{5})^2} =$$

(по обчисленю) $= 2\,\dfrac{4\sqrt{5}(3+z)}{8\sqrt{5}(8+3z)} = \dfrac{3+z}{8+3z}$,

так як в горі.

Пр.

$$x = \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4+z}} = \frac{4+z}{15+4z},$$

а після 12)

$$x = 2\,\frac{(\sqrt{12}+4+2z)(4+\sqrt{12}) + (\sqrt{12}-4-2z)(4-\sqrt{12})}{(\sqrt{12}+4+2z)(4+\sqrt{12})^2 + (\sqrt{12}-4-2z)(4-\sqrt{12})^2} =$$

$$= 2\,\frac{4\sqrt{12}(4+z)}{8\sqrt{12}(15+4z)} = \frac{4+z}{15+4z},$$

так як в горі.

Пр.

$$x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1+z}}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1+z}{z}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z}{z-1-z}} =$$

$$= \frac{1}{1+z},$$

а після 12)

$$x = 2\,\frac{(\sqrt{-3}+1+2z)(1+\sqrt{-3})^3 + (\sqrt{-3}-1-2z)(1-\sqrt{-3})^3}{(\sqrt{-3}+1+2z)(1+\sqrt{-3})^4 + (\sqrt{-3}-1-2z)(1-\sqrt{-3})^4} =$$

по обчисленю:

$$= \frac{-32\sqrt{-3}}{-32\sqrt{-3}(1+z)} = \frac{1}{1+z}.$$

5. Лишає ся еще случай $a=2$, де субституция 5) не дасть ся ужити.

Після рівнаня 4) можемо написати цілий ряд слідуючих рівнань:

$$2\,F_{n-1} - F_{n-2} = F_n$$

$$2\,F_{n-2} - F_{n-3} = F_{n-1}$$

$$2\,F_{n-3} - F_{n-4} = F_{n-2}$$

$$\ldots$$

$$2\,F_2 - F_1 = F_3$$

Наколи сї рівнаня почавши від другого помножимо через 2 і додамо до себе, дістанемо:

$$F_{n-2} + 2\,F_2 - 2\,F_1 = F_n$$

або, так як:

$$2\,(F_2-F_1) = 2\,(4+2z-1-2-z) =$$

$$= 2\,(1+z),$$

$$F_{n-2} + 2\,(1+z) = F_n$$ Так само:

$$F_{n-4} + 2\,(1+z) = F_{n-2}$$

$$F_{n-6} + 2\,(1+z) = F_{n-4}$$

$$F_2 + 2\,(1+z) = F_4$$

Додаймо ті рівнаня, то дістанемо:

$$F_2 + 2\,(1+z)\,\frac{n-2}{2} = F_n\,,$$

а що:

$$F_2 = \frac{1}{\varphi_2 \varphi_1} = 2z+3,$$

то:

$$2z + 3 + (n-2)\,(1+z) = F_n\,,$$

або:

$$F_n = (n+1) + n\,z,$$

а так само:

$$F_{n-1} = (n-1)\,z + n.$$

В виду того:

$$\varphi_n(z) = \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \\ \qquad - \cfrac{1}{2+z}}}} = \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{(n-1)\,z + n}{n\,z + (n-1)} \qquad 13)$$

Пр.

$$\cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1+z}}} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{2+z}{3+2z}} = \frac{3+2z}{4+3z}\,;$$

то само випаде і після 13).

Або:

$$\cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2+z}} = \frac{2+z}{3+2z}\,,$$

що і з 13) слїдно.

Для $\lim n = \infty$ маємо

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = 1,$$

значить ся, всї субституциї $(TS^2z)^n$ для великого *n* зміряють до тої самої границї, що є новим доказом на втрату нетяглости ґрупи модулової на оси перворядній.

Тернопіль, 7 марта 1899 р.

Кілька уваг про форму інтерполяцийну Lagrange'a

написав

Володимир Левицкий.

1. Як звісно форма Lagrange'a служить до утвореня раціональної функциї $y = f(x)$ n-го степеня, яка має на $(n+1)$ місцях $(x_1\ x_2\ x_3 \ldots\ldots x_{n+1})$ принимати певні з гори означені вартости $(y_1\ y_2\ y_3 \ldots\ldots y_{n+1})$.

Наколи функция та має вид:

$$y = a_0 + a_1 + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n, \tag{1}$$

то мусить істнувати ряд реляций:

$$y_\nu = a_0 + a_1 x_\nu + a_2 x_\nu^2 + \ldots\ldots + a_n x_\nu^n, \quad (\nu = 1, 2, \ldots n+1). \tag{2}$$

З $(n+2)$ реляций (1) і (2) дістанемо слідуючу условину їх співчасности:[1])

$$\Delta(y_\nu y_\nu) = \begin{vmatrix} y & 1\ x & x^2 & \ldots x^n \\ y_1 & 1\ x_1 & x_1^2 & \ldots x_1^n \\ y_2 & 1\ x_2 & x_2^2 & \ldots x_2^n \\ & & & \ldots \\ y_{n+1} & 1\ x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots x_{n+1}^n \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

Визначник сей — наколи его розвинемо після першої колюмни — прийме вид:

$$y(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_{n+1})(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_{n+1})\ldots(x_n-x_{n+1}) -$$
$$- y_1(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n+1})\ldots(x_n-x_{n+1}) + \ldots = 0$$

---

[1]) Пор. Puzyna. Teorya funkcyj analitycznych t. I. st. 137.

або — наколи подїлимо через сочинник при y:

$$(4)\qquad y=\sum_{\nu>1}^{n+1}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{\nu-1})(x-x_{\nu+1})\cdots(x-x_{n+1})}{(x_\nu-x_1)(x_\nu-x_2)\cdots(x_\nu-x_{\nu-1})(x_\nu-x_{\nu+1})\cdots(x_\nu-x_{n+1})}y_\nu$$

Є то власне форма інтерполяцийна Lagrange'a. Форма ся — як се з неї відразу видко — сповняє жадані условини, дає отже жадану функцию. А так як функция ся має на $(n+1)$ місцях ті самі вартости, що функция

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n,$$

проте обі функциї є тотожні.[1])

Мінор, що належить до y, т. є.

$$A_0=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots x_2^n \\ \cdot & & & \cdots\cdot \\ \cdot & & & \cdots\cdot \\ \vdots & & & \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

є ріжний від зера, наколи коренї є ріжні. Для таких лиш коренів форма повисша має значінє.[2])

Наколи розвинемо праву сторону рівнаня (4), дістанемо через порівнанє з видом (1) вираженя на сочинники $a_0\, a_1 \cdots a_n$. Розвиненя сего можем однак уникнути дуже легко, наколи розвинемо визначник Δ після першого верша. Дістанемо тодї:

$$(5)\; A_0y-\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & \cdots x_1^n \\ y_2 & x_2 & \cdots x_2^n \\ \vdots & & \\ y_{n+1} & x_{n+1} & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix}+x\begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1^2 & \cdots x_1^n \\ y_2 & 1 & x_2^2 & \cdots x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n+1} & 1 & x_{n+1}^2 & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix}\cdots\pm x^n\begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 & \cdots x_1^{n-1} \\ y_2 & 1 & x_2 & \cdots x_2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \\ y_{n+1} & 1 & x_{n+1} & \cdots x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}=0.$$

Є се вже третий вид шуканої функциї. З розвиненя сего виходить, що:

$$a_\nu=\mp\frac{A_\nu}{A_0},$$

де A_ν є мінором, що належить до елементу x^ν визначника $\Delta=0$.

2. Послїдний вид дає нам спроможність подати критерию на се, чи і коли можна утворити функцию n-го степеня,

[1]) ibid. ст. 65.

[2]) случай коренів многократних, глянь Puzyna loc. cit. ст. 138.

яка має на місцях $(x_1\, x_2 \cdots x_{n+1})$ принимати подані вартости $(y_1\, y_2\, y_{n+1})$.

Возьмім на перед случай, що ті місця $(x_1\, x_2 \cdots x_{n+1})$ є звязані з $(y_1\, y_2 \quad y_{n+1})$ реляциями $y_\nu = x_\nu$. Тоді в рівнаню (5) всї мінори є зерами, кромі мінора при x, який дістає вартість A_0; тодї шукана функция має вид $y - x = 0$.

Но функция та не є функциєю n-го степеня. Не істнує проте функция n-го степеня, якаби на $(n+1)$ місцях $(x_1\, x_2 \cdots x_{n+1})$ прибирала вартости $(y_1 = x_1,\, y_2 = x_2, \cdots y_{n+1} = x_{n+1})$.

Очевидна є річ, що то само остає і в случаю $y_\nu = a\, x_\nu\, (\nu = 1, 2, \cdots n+1$, a стале).

3. Перейдім тепер до случаю загальнїйшого. Виберім іменно вартости $(y_1\, y_2 \quad y_{n+1})$ так, щоби були звязані з вартостиями $(x_1\, x_2 \cdots x_{n+1})$ рядом рівнань:

$$y_\nu + a_1\, x_\nu^{\lambda_1} + a_2\, x_\nu^{\lambda_2} + a_3\, x_\nu^{\lambda_3} + \cdots + a_\varrho\, x_\nu^{\lambda_\varrho} = 0 \qquad (6)$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots n+1).$$

Маємо ту $(n+1)$ реляций між y_ν а x_ν, причім закладаємо, що $\lambda_s \geqq \lambda_t$, але кожде $\lambda_s \angle\, n$.

Що до ϱ, то можуть зайти ту три случаї $\varrho < n, \varrho = n, \varrho > n$.

a. Возьмім случай $\varrho < n$; маємо тодї $(n+1)$ рівнань лїнїових що до $(\varrho + 1)$ незвісних $1, a_1, \cdots a_\varrho$. Тодї — як се виходить з теориї рівнань — є $(n - \varrho)$ рівнань злишних, а системів $(1\, a_1 \quad a_\varrho)$, які розвязують рівнаня (6), буде $\infty^{n-\varrho}$.

Відкиньмо з рівнань (6) $(n - \varrho)$ рівнань кінцевих, дістанемо:

$$y_\nu + a_1\, x_\nu^{\lambda_1} + a_2\, x_\nu^{\lambda_2} + \cdots + a_\varrho\, x_\nu^{\lambda_\varrho} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots \varrho + 1).$$

Условиною, щоби ті рівнаня дали ся розвязати, є:

$$D_1 = \begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} & \cdots & x_1^{\lambda_\varrho} \\ y_2 & x_2^{\lambda_2} & \cdots & x_2^{\lambda_\varrho} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{\varrho+1} & x_{\varrho+1}^{\lambda_1} & & x_{\varrho+1}^{\lambda_\varrho} \end{vmatrix} = 0$$

Таких визначників, як $D_1 = 0$, дістанемо певну скількість, відповідно до величини ϱ; бо ми можемо з (6) $(n - \varrho)$ рівнань довільним способом відкидати. Укладів $(1\, a_1\, a_2 \cdots a_\varrho)$ є $\infty^{n-\varrho}$, но їх треба вибрати так, щоби заходили условини $D_\nu = 0$.

Розслїдім тепер, яка буде функция n-го степеня, яка на місцях $(x_1\, x_2 \cdots x_{n+1})$ має принимати вартости означені рівнанями (6).

Визначник A_0 не улягає зміні, бо до него y не входить. Возьмім тепер під увагу котрийнебудь з дальших визначників:

$$A\lambda_s = \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 & \cdots x_1^{\lambda_{s-1}} & x_1^{\lambda_{s+1}} & \cdots x_1^n \\ y_2 & 1 & x_2 & \cdots x_2^{\lambda_{s-1}} & x_2^{\lambda_{s+1}} & \cdots x_2^n \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ y_{n+1} & 1 & x_{n+1} & \cdots x_{n+1}^{\lambda_{s-1}} & x_{n+1}^{\lambda_{s+1}} & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Наколи в ним підставимо за $(y_1\, y_2 \cdots y_{n+1})$ вартости з рівнань (6), то визначник сей замінить ся на суму $(\varrho + 1)$ визначників; всї ті визначники стануть ся зером, бо $\lambda_1\, \lambda_2 \cdots < n$, визначники ті будуть проте мали по дві колюмни ідентичні; остане лиш визначник:

$$a_s \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_s} & 1 & x_1^{\lambda_{s-1}} & x_1^{\lambda_{s+1}} & \cdots x_1^n \\ x_2^{\lambda_s} & 1 & x_2^{\lambda_{s-1}} & x_2^{\lambda_{s+1}} & \cdots x_2^n \\ \vdots & & \vdots & & \\ x_{n+1}^{\lambda_s} & 1 & x_{n+1}^{\lambda_{s-1}} & x_{n+1}^{\lambda_{s+1}} & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix} = D_s$$

Очевидна є однак річ, що $D_\beta = (-1)^\beta a_\beta A_0$, отже по скороченю жадана функция прийме вид:

$$y + a_1 x^{\lambda_1} + a_2 x^{\lambda_2} + \cdots + a_\varrho x^{\lambda_\varrho} = 0.$$

Функция та не є однак функциєю n-го степеня.

Не істнує проте функция n-го степеня, яка би на місцях $(x_1\, x_2 \cdots x_{n+1})$ принимала вартости $(y_1\, y_2 \cdots y_{n+1})$, назначені рівнанями (6) для $\varrho \angle n$.

б. Перейдім тепер до случаю $\varrho = n$.

Тодї істнує один лиш систем вартостий $(1\, a_1\, a_2 \cdots a_\varrho)$, який сповняє рівнаня (6). Для такого системи мусить заходити реляция:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} & \cdots x_1^{\lambda_n} \\ y_2 & x_2^{\lambda_2} & \cdots x_2^{\lambda_n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n+1} & x_{n+1}^{\lambda_1} & \cdots x_{n+1}^{\lambda_n} \end{vmatrix} = 0.$$

І ту зайде то само, що передше, що жадана функция прийме вид:

$$y + a_1 x^{\lambda_1} + a_2^{\lambda_2} + \cdots + a_\varrho x^{\lambda_\varrho} = 0,$$

т. є. що і ту **не істнує** функция n-го степеня, яка би відповідала жаданим условинам.

в. Остає єще случай $\varrho > n$.

Случай сей можна однак звести до случаїв попередних, як довго $\lambda_s \angle n$.

Бо тоді виложників $(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_\varrho)$ є ϱ; числа ті є меньші як n, мусять проте в певнім порядку представляти числа $1, 2, 3, \cdots n-1$, а так як $\varrho > n$, отже декотрі з тих чисел λ мусять ся повтаряти; в кождім отже разі y_ν дає ся звести до форми:

$$y_\nu + a_1' x_\nu^{\lambda_1} + a_2' x_\nu^{\lambda_2} + \cdots + a_u' x_\nu^{\lambda_u}, \qquad u \leqq n.$$

Отже і в тім случаю **функция n-го степеня** при даних условинах **не істнує**.

4. Визначім тепер близше условину, **що для систему рівнань** (6) **не істнує** функция n-го степеня о приписаних вартостях.

Щоби рівнаня (6) мали розвязаня скінчені всюди для укладу $(a_1 \cdots a_\varrho)$, мусить рівнати ся зеру визначник:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} \cdots x_1^{\lambda_\varrho} \\ y_2 & x_2^{\lambda_1} \cdots x_2^{\lambda_\varrho} \\ & \\ y_{\varrho+1} & x_{\varrho+1}^{\lambda_1} \cdots x_{\varrho+1}^{\lambda_\varrho} \end{vmatrix} = 0 \qquad \varrho \angle n.$$

Визначників таких є більше або меньше залежно від ϱ. $W = 0$ каже, що між $(y_1 y_2 \cdots y_{\varrho+1})$ а $(x_1 x_2 \cdots x_{\varrho+1})$ істнує певна звязь, всї отже визначнили кажуть, що між величинами $(y_1 y_2 \cdots y_{n+1})$ а $(x_1 x_2 \cdots x_{n+1})$ заходять певні реляциї.

Істноване рівнань $W = 0$ є **условиною конечною**, щоби не істнувала функция n-го степеня о $(n+1)$ приписаних вартостях; бо коли би $W \gtrless 0$, тоби було:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_\varrho = 0; \; y_1 = y_2 = \cdots = y_{n+1} = 0,$$

а звідси $f(x) \equiv 0$, що виключено.

Ся условина є однак і **достаточна**, бо тілько в случаю, коли $W = 0$,

$$y + a_1 x^{\lambda_1} + \cdots + a_\varrho x^{\lambda_\varrho} = 0,$$

т. є. функция n-го степеня не істнує.

Ми сказали, що условин $W = є$ більше залежно від ϱ. Наколи однак возьмем одну тілько з тих условин, то до неї буде належало ∞ много системів

$$(7) \qquad (1\, a_1\, a_2 \cdots a_\varrho),$$

що сповняють $(\varrho + 1)$ рівнань, бо коли (7) є укладом, то і $(C, C a_1, C a_2, \quad C a_\varrho)$ є рівнож системом.

Но сей уклад (7) сповняє так само всї рівнаня (6), а для такого укладу функция n-го степеня з $(n + 1)$ даними вартостями не істнує. Вистане проте одна лиш условина $W = 0$ і то найлїпше ужити условини:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} & \cdots x_1^{\lambda_\varrho} \\ y_2 & x_2^{\lambda_2} & \cdots x_2^{\lambda_\varrho} \\ \vdots & & \\ y_{\varrho+1} & x_{\varrho+1}^{\lambda_1} & \cdots x_{\varrho+1}^{\lambda_\varrho} \end{vmatrix} = 0.$$

Наколи отже між $(\varrho + 1)$ вартостями x_ν і $(\varrho + 1)$ вартостями y_ν $(\nu = 1, 2, 3, \cdots n + 1)$ заходить звязь $W = 0$, то тим самим заходять звязи між всїми $(n + 1)$ вартостями x_ν і $(n + 1)$ вартостями y_ν, а тодї форма інтерполяцийна Lagrange'а зводить ся до функциї степеня низшого як n.

5. Возьмім тепер случай, що в рівнанях (6) декотрі λ_s є рівні n.

Очевидна є тодї річ, що форма інтерполяцийна Lagrange'а зведе ся до форми:

$$A_0\, y + A_0\, x\, a_1 + A_0\, x^2\, a_2 + \cdots + A_0\, x^n\, a_n = 0,$$

або:

$$y + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n = 0,$$

отже тодї істнує вже функция n-го степеня, яка має $(n + 1)$ приписаних вартостий.

Наколи $\lambda_s > n$, то визначники при x^s не зводять ся зовсїм до A_0, але розібють ся на більше визначників, а тодї форма Lagrange'а має вже повне значінє.

6. Возьмім тепер під увагу рівнаня (6), але приймім, що сочинники є ріжні в усїх рівнанях; тодї:

$$(8)\qquad y_\nu + a_{\nu_1} x_1^{\lambda_1} + a_{\nu_2} x_1^{\lambda_2} + a_{\nu_3} x_1^{\lambda_3} + \cdots + a_{\nu\varrho} x_1^{\lambda_\varrho} = 0.$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots n+1),$$

при чім:

$$\lambda_s < n, \; a_{st} \gtrless a_{ts}.$$

Тоді визначник:

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} & \cdots x_1^{\lambda_\varrho} \\ y_2 & x_2^{\lambda_1} & \cdots x_2^{\lambda_\varrho} \\ & & \\ y_{n+1} & x_{n+1}^{\lambda_1} & \cdots x_{n+1}^{\lambda_\varrho} \end{vmatrix}$$

є ріжний від зера, отже між $(x_1\, x_2 \cdots x_{n+1})$ а $(y_1\, y_2 \cdots y_{n+1})$ не істнує нїяка звязь без вільного виразу. $(y_1\, y_2 \cdots y_{n+1})$, а так само і $(x_1\, x_2 \cdots x_{n+1})$ є від себе независимі. Для такого укладу x_ν і y_ν істнує всегда функция n-го степеня з $(n+1)$ приписаними вартостями.

Наколи місто $(y_1\, y_2 \quad y_{n+1})$ возьмем вартости $(C\, y_1, C\, y_2, C\, y_{n+1})$, то функция $f(x)$ степеня n перейде на $C f(x)$; можемо сказати, що до всїх вартостий $(\bar{y}_1\, \bar{y}_2 \cdots \bar{y}_{n+1})$ утворених з основного системy $(y_1\, y_2 \cdots y_{n+1})$ в сей спосіб, що $\bar{y}_\nu = C\, y_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots n+1)$, остає одна і та сама форма Lagrange'а.

Очевидно, що коли $\bar{y}_\nu = C_\nu y_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots n+1)$, або наколи $\bar{y}_\nu = F_\nu(y_s)$, то тодї дістанемо иньші форми Lagrange'а.

7. Розслїдім єще, що ся стане, наколи:

$$\bar{y}_\nu = c_{\nu_1} y_1 + c_{\nu_2} y_2 + \cdots + c_{\nu, n+1} y_{n+1} \quad (\nu = 1, 2, \cdots n+1).$$

Форма Lagrange'а має тодї вид:

$$\bar{y} = \frac{1}{A_0} \begin{vmatrix} \bar{y}_1 & x_1 & \cdots x_1 \\ \bar{y}_2 & x_2 & \cdots x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{y}_{n+1} & x_{n+1} & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix} - \frac{1}{A_0} x \begin{vmatrix} \bar{y}_1 & 1 & x_1^2 & \cdots x_1^n \\ \bar{y}_2 & 1 & x_2^2 & \cdots x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{y}_{n+1} & 1 & x_{n+1}^2 & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix} + \cdots = 0,$$

або наколи вставимо рівнаня (6) за $(\bar{y}_1\, \bar{y}_2 \cdots \bar{y}_{n+1})$ і розібємо кождий визначник на суму, дістанемо:

$$= \frac{1}{A_0} \begin{vmatrix} c_{11} & x_1 & \cdots x_1^n \\ c_{21} & x_2 & \cdots x_2^n \\ & \vdots & \\ c_{n+1,1} & x_{n+1} & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix} + \frac{y_2}{A_0} \begin{vmatrix} c_{12} & x_1 & \cdots x_1^n \\ c_{22} & x_2 & \cdots x_2^n \\ & & \\ c_{n+1,2} & x_{n+1} & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix} + \cdots + \frac{y_{n+1}}{A_0} \begin{vmatrix} c_{1,n+1} & x_1 & \cdots x_1^n \\ c_{2,n+1} & x_2 & \cdots x_2^n \\ \vdots & & \\ c_{n+1,n+1} & x_{n+1} & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{y_1}{A_0}x\begin{vmatrix} c_{11} & 1 & x_1^2 & \cdots x_1^n \\ c_{21} & 1 & x_2^2 & \cdots x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{n+1,1} & 1 & x_{n+1}^2 & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix} - - = 0,$$

або:

$$\bar{y} = y_1\, f(c_{11}\, c_{21} \cdots c_{n+1,1}) + y_2\, f(c_{12}\, c_{22} \cdots c_{n+1,2}) + \cdots + y_{n+1}\, f(c_{1,n+1}\, c_{2,n+1}, \cdots c_{n+1,n+1}).$$

Щоби отже з форми Lagrange'а для укладу основного перейти до форми, для укладу, утворено лїнїйно з укладу основного, вистане в данїй формі за систем основний класти по черзї уклади:

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{21} & \cdots c_{n+1,1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots c_{n+1,2} \\ & & \\ c_{1,n+1} & c_{2,n+1} & \cdots c_{n+1,n+1} \end{matrix}$$

так змінені форми помножити по черзї через $y_1\, y_2 \cdots y_{n+1}$ і зсумовати.

Тодї форма Lagrange'а має вид:

$$y = \sum_{\mu=1}^{n+1}\sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{\nu+1})(x-x_{\nu+1})\cdots(x-x_{\nu+1})}{(x_\nu - x_1)(x_\nu - x_2)\cdots(x_\nu - x_{\nu+1})(x_\nu - x_{\nu+1})\cdots(x_\nu - x_{n+1})}\, c_{\nu,\nu}\, y_\mu.$$

Тернопіль в марти 1899. р.

Клїматичні відносини Тернополя

(на основі праць **д. В. Саткого**)

представив

Володимир Левицкий.

Метеорольоґія є наука еще доволї молода; в більшій мірі є она наукою експериментальною, бо еї всї висліди опирають ся на досьвідах, ведених в стациях метеорольоґічних, що від кількох десятків літ цїлою сїтию покрили нашу землю. Но в міру як прибуває тих стаций, як множать ся спостереженя з року на рік, то і ся наука змагаєсь також з тих дат статистичних (на основі таблиць синоптичних) витягнути якісь заключеня, якісь права, що панують в висших районах нашої землї, с. є. в атмосфері. І метеорольоґія стає що раз більше та більше наукою в повнім значіню того слова; і она може — як кожда иньша наука — навести імена учених, що не лиш трудять ся в нїй методом досьвідним, але випроваджують закони та права теоретичні. Досить згадати право Buys-Ballot'a, теорию Espy-Köppen'a, імена Hann'a, Mohn'a, Reimann'a, Sprung'a та иньших, що їх працї в журналах фахових (як пр. Wetter, Meteorologische Zeitschrift та и.) що раз більше відкривають нам тайни атмосфери.

Одним з найвизначнїйших метеорольоґів австрійских є безперечно д. Володислав Сатке, бувший директор школи видїлової, а тепер професор семінара учительского в Тернополи. Обнявши стацию метеорольоґічну, що від р. 1861 находилась в колеґії єзуицкій в Тернополи, провадить} вже кільканайцять літ спостереженя, а результатом сего є цїлий ряд праць фахових, які являють ся в журналах метерольоґічних та справозданях ріжних академій, та які принесли та приносять авторови признаня зі сторони компетентної. — Я не буду розбирати всїх праць автора, що ся відносять до ріжних квестий метерольоґічних, але обмежу ся до єго праць про клїматольоґію міста Тернополя. Є се слїдуючі працї:*)

1. Klimatyczne stosunki Tarnopola (opad i stan zachmurzenia) Kraków 1887.

2. Wyniki pięcioletnich zapisków anemografu w Tarnopolu. Lwów 1887.

3. Ciepłota w Tarnopolu. Kraków 1888.

4. Die Drehung der Winde in der jährlichen Periode (журнал Wetter, Braunschweig 1887).

5. Über den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit und der Windrichtung in Tarnopol. (Sitz. Ber. d. kais. Akad. der Wissen. in Wien B. XCV. 1887).

6. Klimat Tarnopola. Tarnopol 1892.

7. O zawisłości ciepłoty w następujących po sobie miesiącach i porach roku w Tarnopolu. Kraków 1893.

8. Roczny i dzienny przebieg wiatrów w Tarnopolu. Kraków 1893.

9. Badania nad szybkością i kierunkiem chmur w Tarnopolu. Kraków 1895.

10. Ciepłota śniegu w zimie 1893/4 w Tarnopolu. Kraków 1896.

11. Badania nad pokrywą śniegową w Tarnopolu. Lwów 1899.

Обсервациї метеорольоґічні в Тернополи мають велику вагу, раз тому, що се одинока стация на височині галицкого Поділя, а в друге з причини положеня тогож міста. Тернопіль положений під 49° 33′ півн. ширини ґеоґр., а 43° 16′ всхід. довжини ґеоґр. від Ферро лежить 318 m. над поверхнею моря на височині з усїх сторін вітвореній в околицї безлїсній, окружений з усїх боків орною землею; лиш зі сторони NW тягне ся досить обширний став, але сей може лиш дуже немного впливати на вохкість воздуха, або часом в лїті викликати слабі вітри. Так отжеж до Тернополя мають з усїх

*) Иньші замітні працї тогож автора є: Über die Ursachen der Eiszeit (Humboldt, B. IX. 1890); Über den Zusammenhang der Temperatur aufeinanderfolgender Monate und Jahreszeiten (Halle 1897); Roczny przebieg stanu zachmurzenia Galicyi (Kraków 1893), на цїлий ряд меньших робіт в „Meteorologische Zeitschrift“, Rocznik'ах fizyologicznej Komisyi Akad. Krakowsk.“ и. и. Далї: Powiat tarnopolski pod względem geograficzno-statystycznym, Tarnopol 1895 (рецензия Зап. Наук. Тов. ім. Шевченка т. XVIII). Ориґінальною є також єго повість „Goście z Marsa“ під псевдомином „Abul“ (Львів 1897), утопія на взір Жюля Верна або Белями, де автор висказує свій доволї пессимістичний погляд про дальшу судьбу землї і являє ся приклонником погляду деяких англїйских економістів, що рася жовта залле колись цїлу Европу.

боків доступ вітри, впливів льокальних є дуже мало, тож спостереженя метеорольоґічні в тім місті можуть мати вартість загальнійшу та кинути сьвітло на відносини кліматичні галицкого Поділя.

Тому-то я і наміряю зреасумовати тут виґліди, до яких автор дійшов протягом кільканайцять-літної праці (р. 1861—1898).

Як звісна клімат якоїсь місцевости залежить головно від чотирох чинників а се від теплоти, вітрів, вохкости та захмареня; тож і я представлю за автором, як ті чинники представляють ся в Тернополи.

1. Середна температура річна є для Тернополя + 6·65° С.; а іменно найвисшу середну температуру річну виказує рік 1863, с. є. + 8·18° С., найнизшу рік 1871 с. є. + 5·30° С. Що до розділеня тепла на місяці, то найтеплійшим місяцьом є липень, найзимнійшим січень; ріжниця між ними доходить до 24° С. Пересїчна температура (в степенях Цельзия) поодиноких місяців представляє ся ось так:

січень .	—5·44°	цьвітень	6·76°	липень .	18·47°
лютий .	—4·58°	май .	12·81°	серпень	17·11°
март	—0·28°	червень	17·05°	вересень	13·14°
		жовтень	7·11°		
		падолист	1·16°		
		грудень .	—4·12°		

Довголїтне спостережене веде до конклюзиї, що наколи цьвітень був теплий, то імовірність, що слїдуючий вересень буде теплий, є три рази більша, як імовірність, що вересень буде зимний; по зимнім червни слїдувати буде імовірно теплий падолист, а по теплім червни зимний падолист.

Що до ріжниць температури в поодиноких місяцях, то найбільші ріжниці (зміни) температури виказує місяць лютий; се відразу видко, коли зіставимо ріжниці між найвисшою (пересїчною) а найнижшою температурою поодиноких місяців. Ріжниці ті є:

січень .	16·3°	цьвітень .	16.5°	липень	15·4°
лютий	21·9°	май	18·4°	серпень	15·5°
март .	17·5°	червень	16·1°	вересень	17·0°
		жовтень .	15·6°		
		падолист	14·4°		
		грудень	15·5°		

Середна температура зими є — 4·54° С, весни 6·68° С., лїта 17·81° С., осени 7·34° С. Що клїмат є ту дуже острий, то доказом сего є ся проява, що в тягу року є лиш оден липень вільний від приморозків.

Пересїчне maximum (найвисша температура) є в роцї 10·9° C., minimum 2·6° C.; звичайно maximum maximorum випадає коло 15. липня, minimum minimorum коло 17. сїчня. Але і ту правильности нема; найвисша температура була в маю 1869. р. (+ 35·4° C.), найнижша в лютім 1870 р. (— 33·8° C.). Як се легко поняти, найнижша температура є все рано, найвисша зараз з полудня.

Не всї місяцї заховують ся однако що до змін температури; найбільше змін в температурі має сїчень, найменьше вересень; наколи уложимо місяцї в ряд що до змінчивости температур, дістанемо ряд: сїчень, грудень, март, май, лютий, цьвітень, падолист, липень, серпень, жовтень, червень, вересень, отже найбільше змін є в зимі, найменьше в лїтї. Мимо загального пересьвідченя є цьвітень місяцьом доволї сталим що до змін температури.

2. Переходжу тепер до другого чинника, с. є. до вітрів. Ту мушу вказати на ріжницї вислїдів,[1] які автор в ріжних часах одержав; походять они з того, що автор перші лїта робив обсервациї без анемоґрафа; доперва послїдними роками прийшов в посїданє анемоґрафа, тому-то, хоч тих обсерваций є меньше, то однак они є далеко певнійші і їх будемо ся придержувати.

Анемоґраф показує, що протягом року найчастійший є вітер SE, далї NW, W, N; дуже рідко віє SW і NE. Що до пір року, то в лїтї найчастійшим вітром є NW, а в зимі SE, а аж опісля NW і W. Від сего, чи в зимі дує SE чи NW, залежить в Тернополи і жорстокість зим, бо у нас вітри зі всходу обнижають дуже температуру. Сей напрям вітрів в зимі залежить від обставин в Росиї. Наколи в Росиї середній вчасно впаде снїг, повстає велике обниженє температури та висока звижка (антіцикльона), а ся спроваджує нам морозний вітер SE, рідше E і NE; наколи однак снїг впаде в Росиї пізно, звижка іде аж на Сибір, а до нас доходить NW і W; є тодї хмарно, дощ, але тепло. Противно дїє ся в лїтї, бо в той час є в Росиї майже стало знижка (цикльона); тодї у нас дує NW, а сей спроваджує дощ та бурі.

Що до поодиноких місяців, то роздїл вітрів є слїдуючий. Найчастійше дує:

в сїчню SE
в марти та цьвітню E
в маю та червни NE
в червни та в липню N
в липню та серпню NW
в серпню W
в падолисти та грудню SW.

[1]) порівн. лиш его розвідку 6., а розвідку 8

Найсильнійше дують вітри в зимі, а то головно в сїчню SE, найслабше в осени, а то в падолисті SW та S.

3. Третим чинником клїматичним є вохкість. Атмосфера Тернополя є дуже вохка, бо пересїчна вохкість в роцї виносить 82·4%, а іменно в зимі 92·7%, на весну 78·8%, в лїті 73·4%, в осени 84·1%. З того слїдує, що наколи зима є дуже мокра, то лїто є сорозмірно сухе. З місяців найсухший є май, найбільше вохкий є сїчень.

Річний опа́д виносить 573 mm; найменьше опаду мав рік 1862, найбільше рік 1876. З цїлого опаду річного випадає на зиму 13%, на весну 24%, лїто 46%, осінь 23%.

Minimum опаду має сїчень, далї скількість опаду зрастає, доходить в липню до maximum, а опісля знов меньшає до грудня.

Цїкава є проява, що maximum опаду, яке було в давнїйших лїтах в червни, пересунуло ся з часом на липень, а в части на серпень в протягу 14 лїт; опади лїтні збільшили ся, зимові зменьшили ся.

Пересїчно є в роцї 105 днїв з опадом.

Найбільше снїгу має лютий, далї сїчень і грудень, але єще в маю імовірність, що впаде снїг, є 0·7. Перший снїг падає пересїчно 26. жовтня, послїдний 29. цьвітня; снїг є найтеплїйший в падолисті, найзимнїйший в сїчню і то рано, бо в полудне температура єго зрастає. Днїв без снїгу випадає пересїчно 185 на рік.

Днїв, в яких зривають ся бурі, є середно в роцї 13·7 (maximum мав рік 1872, minimum рік 1881); найбільше їх випадає на червень (3·74 днїв) і липень (3·44 днїв), в грудню та сїчню нема їх нїколи. Що до пори дня, то від півночи до полудня випаде їх 11·8%, від полудня до півночи 88·2%. Бурі повстають у нас головно з вітром W, NW i S.

З иньших опадів повстає град найчастїйше в червни (в роцї 1878 не був анї разу), мраки повстають найчастїйше в жовтни та падолисті, найрідше в червни та липни.

4. Переходжу до послїдної точки, с. є. до захмареня. Стан захмареня (в скалї від 0 до 10) є середно 5·7 (maximum в р. 1864, minimum 1878); що до місяців, найбільше хмар має грудень, падолист та сїчень, minimum має вересень, серпень та липень; що до часу, то хмар є найбільше рано, найменьше вечером.

Інтересна є висота хмар в Тернополи; ту автор придержує ся (розправа 9.) помірок Hildebrandssona, Köppena, Neumayera та Singera;[1]) є іменно:

[1]) При нагоді помірок скорости хмар дійшов автор до погляду, що висота звижки виносить maximum 4000—5000 m, а часом є лиш 1000 m, а далї що висше 4000 m. напрям вітрів не залежить від причин льокальних, які є при поверхні землї.

cirrus . . .	8700 m
cirrocumulus	6200 „
altostratus	4700 „
altocumulus	3700 „
stratocumulus	2100 „
nimbus . .	1200 „
cumulonimbus i cumulus	1100 „

Наколи все зреасумуєм, то представить ся нам клїмат Тернополя після автора ось-так:

1. Зима є морозна, а тревае через грудень, січень, лютий та март, а часто і падолист. Мимо великої вохкости опад є рідкий та невеликий; вітри є переважно SE.

2. Весна є дуже коротка, бо тревае лиш через цьвітень та половину мая; в другій половинї мая є вже лїтна спека. В тім часї зрастае теплота та опади дуже скоро, а за се що раз більше зменьшае ся стан захмареня.

3. Лїто є горяче, опади і бурі часті. Теплота доходить до maximum; стан захмареня та вохкість переходять в minimum. Вітри є переважно W та NW.

4. Осінь в першім місяцю є погідна, суха та тепла, опади є дуже рідкі. В жовтни та падолисті стан захмареня доходить до maximum, опади меньшають, а температура малїє.

В порівнаню зі Львовом є Тернопіль в зимі зимнійший, в лїті теплїйший, а що до опаду далеко сухший.

Тернопіль в вересню 1899 р.

Бібліоґрафія математично-фізична

(за рік 1896—1898).[1]

Emile Picard. Traité d' analyse. (Paris Gauthiers-Villars; том I (ст. XII+457 р. 1891), том II (ст. XIV+512 р. 1893), том III (ст. XIV+568 р. 1896; том IV печатає ся).

В томі I займає ся автор інтеґралами простими та многократними, рівнанєм Laplacc'a і єго застосованєм, розвиванєм в ряди та застосованєм ґеометричним рахунку інфінітезімального. Сей том складає ся з трох частий і 15 розділів; в першій части (5 розділїв) займає ся автор інтеґралами означеними, ріжними методами інтеґрованя, інтеґрованєм функций з арґументом зложеним, далї інтеґралами неозначеними, гипереліптичними та інтеґралами Abel'a, інтеґралами по овалях, інтеґралами подвійними, формою Stokes'a, та інтеґралами многократними (головно розбирає автор інтеґрали трикратні). В части другій (5 розділїв) розбирає автор рівнанє Laplace'a, теорию притяганя та потенциялу, теорем Bertrand'a, інтеґрованє рядів, інтеґрали Dirichlet'a, ряди триґонометричні Fourier'a, теорем M. Cantor'a, інтеґрали Poisson'a, ряди многократні, теорем Cauchy та і приміри до нього. В части третій (5 розділїв) розбирає автор теорию енвельоп, поверхнї простолінїйні, конґруенциї та комплекси, теорию стиканя ся кривих плоских, просторонних та поверхний, форми Cayley'a, кривину, криві сферичні, теореми Euler'a, Dupin'a, перетворенє частинкове (conform), підставленя лїнїові та карти ґеоґрафічні.

---

[1]) Подав я ту очевидно згадку лиш про твори, які були менї доступні. В. Л.

В томі II займає ся автор функциями гармонічними і аналітичними, вступом до теориї рівнань ріжничкових, інтеґралами Abel'а та поверхнями Riemann'а. Том сей складає ся з 17 розділів а зміст єго слідуючий: дефініция функциї з арґументом зложеним, походна її та інтеґрал, доказ, що функциї гармонічні є аналітичними, проблєм Dirichlet'а, розвинене на ряд та переведене функциї гармонічної, метод альтернуючий Schwarz'а, потенциял льоґаритмічний і метод Poincaré; теореми Cauchy, точки особливі функциї однозначної, функциї елєментарні аналітичні, добутки збіжні, розклад функций однозначних на чинники, скількість коренів рівнаня в данім контурі, теория індексів; інтеґрали гиперелїптичні та елїптичні, ряд гиперґеометричний; функциї о кількох зложених арґументах, розклад її на чинники, інтеґрали многократні таких функций; частинкове перетворене; загальні теореми про рівнаня ріжничкові, докази істнованя інтеґралів, рівнане Riccati, відвернене інтеґралів елїптичних; дефініция функциї альґебраїчної, теорем Nöther'а, поверхнї Riemann'а, теорем Cauchy в стосованю до функций на тих поверхнях; інтеґрали Abel'а трох родів та їх періодичність; функциї однозначні на поверхні Riemann'а, теорем Riemann'a-Roch'а, криві альґебраїчні і о роді 2; істноване функций гармонічних та з арґументом зложеним на поверхні Riemann'а, рівнане Beltrami, криві о роді 0 і 1; узагальнене функций двоперіодичних.

Том III (17 розділів) займає ся переважно рівнанями ріжничковими звичайними. Зміст єго слідуючий: інтеґрали рівнань ріжничкових часткових та звичайних яко ряди степенні в окруженю систему місць особливих, рівнаня звичайні першого ряду о двох змінних, особливі розвязки рівнань ріжничкових звичайних, рівнаня Briot-Bouquet і їх узагальненя, рівнаня ріжничкові альґебраїчні першого ряду о сталих точках особливих, рівнаня другого ряду лїнїові, деякі рівнаня нелїнїові; розвязки періодичні і асимптотичні, метод Poincaré, проблєм трох тіл; точки особливі інтеґралів дійсних рівнань першого ряду; криві інтеґральні рівнань першого ряду і першого степеня; точки особливі рівнань лїнїових з інтеґралами правильними і неправильними, ґрупа рівнаня лїнїового; функциї гиперґеометричні і частинкове перетворене, функциї Schwarz'а, функциї модулові; рівнаня ріжничкові лїнїові неправильні в безконечности, деякі кляси рівнань лїнїових, які мож інтеґровати; теория субституций та рівнань альґебраїчних; ґрупи тяглї, ґрупи перетворень рівнаня ріжничкового лїнїового, редукция такої ґрупи, теорем Vessiot.

Вже з того видко, що за кольосальний та поважний материял зібраний в тім трактаті; а коли додати єще елєґантну форму та легкість і ясність представленя, звичайну Французам, получену з прецізностию, яка цїхує всї твори Picard'а, то трактат сей набирає тим більшої стійности та вартости.

F. Kohlrausch. Leitfaden der praktischen Physik (Leipzig, Teubner, 1896; видане осьме ст. XXIV+492) з додатком „das absolute Maass-System“.

Є се книжка необходимо потрібна для кождого, хто наміряє вправити ся будь в роботах практичних та помірах фізикальних, будь то в веденях таких робіт. Вартість книжки підносять єще численні табелї та додаток про теорию вирівнаня блудів обсервациї і про систем безглядних мір.

Lie Sophus u. G. Scheffers. Geometrie der Berührungstransformationen (Leipzig, Teubner, 2 томи, р. 1896 і 1897).

Про сю працю пор. згадка посмертна про Lie.

Otto Stolz. Grundzüge der Differential- und Integralrechnung (Leipzig, Teubner, часть I, ст. X+460 р. 1893, часть II, ст. IX+338 р. 1896; часть III, 1898).

Часть перша дає в 5 розділах теорию рахунку ріжничкового; теорию maxim'ів та minim'ів функций кількох змінних після Lagrange'а та Scheeffer'а; в слїдуючих чотирох розділах є теория неозначеного інтеґрованя, в розд. X інтеґрали означені.

Часть друга обнимає теорию змінних зложених, походні функций зі зложеними арґументами, функциї кола, інтеґроване рациональної функциї арґументу x і кореня квадратового, під яким стоїть многочлен 2. степеня, означені інтеґрали функций з арґументом зложеним, теорем Cauchy та єго застосованя.

Часть третя займає ся двократними інтеґралами та їх застосованєм ґеометричним (після праць Harnack'а, Du Bois-Reymond'а, E. Picard'а, Pringsheim'а і и.).

Karl Elbs. Die Akkumulatoren. (Leipzig J. A. Barth, 1896 р. ст. 46).

В сїй маленькій книжочцї подано способом елєментарним ділане аккумуляторів, їх приладжене та ужиток, а на кінци найважнїйші одиницї електротехнїчні. З огляду на велике застосоване технїчне аккумуляторів книжочка ся може бути дуже інструктивна.

H. Ebert. Magnetische Kraftfelder (Leipzig, J. A. Barth 1896—1897 дві части).

Прояви маґнетизма, електромаґнетизма та індукциї представлено ту на основі теориї ліній сили. Автор стосував ту методи ґрафічні та зобразив ту погляди Maxwell'a, Helmholtz'a та Hertz'a, мужів, що сотворили науку електричности в еї новім, загальнім виді.

A. Föppl. Die Geometrie der Wirbelfelder (Teubner, Leipzig, ст. 8+108, р. 1897).

Праця та доповняє попередну працю тогож автора: „Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Electricität“ (р. 1894). Автор займає ся ту теориєю т. зв. функциї векторової та чисто ґеометричними свойствами піль фізикальних без уживаня гіпотез фізикальних.

P. Appell et E. Lacour. Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications (Paris Gauthiers-Villars ст. XIII—421, р. 1897).

Виложена ту теория функций еліптичних після Jacobi'ого, Hermite'a та Weierstrass'a та ріжні застосованя сеї теориї в ґеометриї та фізиці.

Oeuvres mathématiques d' Évariste Galois avec une introduction par Émile Picard (Paris Gauthiers-Villars р. 1897, ст. X+61).

Є се твори великого математика француского, що помер в дуже молодім віцї; твори ті видало товариство математичне у Франциї, а вступне слово, повне пієтизму для ґенія померлого ґеометра, зладив талановитий Picard.

В сїй книжочцї поміщені твори Galois, що відносять ся до рівнань альґебраічних, та єго твори посмертні, видані вперше р. 1846 через Liouville'a. — До книжочки долучений портрет Galois.

Kronecker Leopold, Werke (Herausgegeben auf Veranlassung der k. preuss. Akademie der Wissenschaften von Kurt Hensel. In 4 Bändern; т. I (ст. IX+484) р. 1895; т. II (ст. VIII+541) р. 1897).

Після пляну буде ту поміщених 146 праць Kronecker'a. Перший і другий том містить праці, що ся відносять до аритметичної теориї функций альґебраічних (є то праці, поміщені первісно в журналю Crelle'a, Liouville'a та в Monatsberichte der k. preuss. Akad. d. Wissensch.), третий том має обнимати праці Kronecker'a про теорию рівнань альґебраічних та теорию чисел, четвертий том має обнимати праці про рахунок інтеґральний, про функциї еліптичні, про теорию потенцияла, та деякі розвідки з фізики математичної. В обох виданих томах розвідки Kr. подані є в порядку хронольоґічнім.

Felix Klein u. A. Sommerfeld. Über die Theorie des Kreisels (Leipzig, Teubner ст. IV+196 р. 1897, зошит I; ст. 512, зошит II, р. 1898).

По вступних увагах кінематичних представляють автори в I розділї першого зошита кінематику кружка, так що впроваджують чотири сорядні α, β, γ, δ з теориї функций та уживають поверхні Riemann'a. Є ту також трактат про кватерніони. Оба автори впроваджують ту понятє „імпульса“ т. є. такої сили обертаючої, яка зможе зі стану супокою викликати хвилево якійсь рух. Другий розділ першого зошита представляє рух тяжкого симетричного кружала при помочи функций еліптичних, розділ третий стосує теорию до питань астрономічних і фізичних (системи циклічні, ґіростати і т. д.).

В зошитї першім виклад є чисто ґеометричний, виклад аналїтичний є поміщений в зошиті II, який що іно вийшов з друку.

В тім другім зошиті розбирають автори рух симетричного кружала під впливом сили тяжести при сталій точцї підпертя в усїх детайлях. Авторам іде ту не лиш о формальне трактоване проблєма, але о повне ґеометричне та механічне зображенє руху.

Розділ четвертий подає проте не лиш опис дороги, яку зачеркує конець кружала, але подає рівночасно спосіб обчисленя нумеричного інтеґралів при помочи таблиць Legendre'a, як також спосіб до виведеня формул приближених. Розділ пятий займає ся т. зв. псевдоправильною (pseudoregulär) прецессиєю і прямовим рухом кружала. Розділ шестий представляє рух кружала через функциї еліптичні при помочи параметрів α, β, γ, δ; параметри ті улекшають інтеґрованє, бо через них рівнаня Lagrange'a переходять в т. зв. рівнаня Hermite-Lamé, які відразу інтеґрують ся через функциї еліптичні. При помочи тих параметрів виходить цікава проява, що рух кружала дасть ся з'ідентифікувати з рухом сферичного маятника в просторони о чотирох розмірах. І в тім розділї переводять автори нумеричні обчисленя при помочи функций ϑ.

Зошит третий та послїдний єще не вийшов з друку.

Ся книжка опирає ся на викладах, які Klein мав на університетї в Ґетинґзї в р. 1893/4.

Gustav Holzmüller. Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung (I Theil, Leipzig, Teubner, 1897, ст. VIII+326).

Том сей складає ся з 10 розділів; зміст єго є слідуючій: означенє середоточки тяжести для площий (реґула Guldin'а), момент безвладности площий (трикутник, четверокутник, еліпса, маятник балїстичний), застосованє теориї безвладности до гидростатики, наука про видержність, моменти безвладности для важнійших форм, які приходять в будівлї та при машинах, моменти безвладности та моменти відосередні для яких-небудь осий, еліпса центральна, еліпса безвладности, лємніската моменту відосередного; далї іде уступ про деякі твердженя математики елєментарної (правило Simpson'а, ріжні лінії криві, maxima, minima); застосованє перетвореня лємніскатового до визначеня бігунових моментів безвладности, ґрафостатичні методи до визначеня моментів безвладности і моментів відосередних; точки тяжести і статичні моменти тїл однородних, моменти найважнїйших тїл (стіжок, параболоїда, еліпсоїда etc.), а врештї яко примір теория кола розгонного.

Як з відси видко книжка се є дуже хосенна для ужитку практичного, де розходить ся — як каже сам автор — о впровадженє відразу „in medias res".

Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichtes von H. v. Helmholtz. Herausgegeben von Arthur König u. Carl Runge. 1897. L. Voss. Hamburg u. Leipzig (ст. XII+370).

Є се пятий том викладів фізики теоретичної покійного Helmholtz'а. Том сей складає ся з шістьох частий та вступу. У вступі є короткий начерк історичний теориї еманацийної та ундуляцийної, о одиницях електро-статичних і маґнетних, теориї Maxwell'а та досьвідів Hertz'а. Часть I подає короткий рис властностий филь подовжних та поперечних в осередках пружистих, часть II подає теорию филь електромаґнетних, часть III теорию филь кулистих, часть IV представляє угинанє сьвітла, часть V займаєсь катоптрикою та діоптрикою, а врештї часть VI дає теорию електромаґнетну поляризациї та скрученя маґнетного площі поляризацийної (теорию скрученя опер H. на взаїмнім дїланю між атомами материї грубшої та етеру).

A. Witkowski. Zasady fizyki. (Варшава, том I 1892 ст. IV+469, тому II зошит перший р. 1897 ст. 301).

Рідко коли може попасти в руки книжка так знаменито написана, як ся. Писана способом елєментарним не є она однак популярна; єї ясність, прозорість, точність та ґрунтовність представленя мимо сего, що не виходить по за границї елєментарного представленя, ілюстрованє викладу численними та добірними примірами, все то ставить ту книжку дуже високо та надає їй велику стійність.

Том перший складає ся зі вступу, фізики загальної та динамічних властностий материї. У вступі подана є задача фізики, єї метод, міри основні та поділ фізики. Часть перша себ то фізика загальна (8 розділів) подає в першім роздїлї (про рух) понятє скорости, єї міру, напрям, складанє і розкладанє скоростий, роди рухів, понятє прискореня, складанє і розкладанє рухів, рух планет, рух дрогаючий, рух поступаючий та оборотовий; в другім роздїлї (про сили) понятє сили, засади динамічні Newton'а, роди сил, силу до- і відосередну, середоточку маси, в роздїлї третім поясню́є тяжінє, в четвертім дає теорию та значінє моментів руху та безвладности, теорию рухів прецессийних, теорию осий свобідних; в роздїлї пятім подає загальні права статики, в шестім мірєнє мас, просторони, сил та часу; найкрасший є роздїл семий, де говорить ся про енерґію, єї роди, звязь між працею а теплом; засада захованя енерґії представлена ту дуже гарно та інтересно; роздїл осьмий пояснює ґравітацию; є ту подана способом елєментарним дефініция потенцияла.

Часть друга (про динамічні властности материї) складаєсь з 7 роздїлів; подає она наперед загальне значінє деформаций, далї свойства тїл сталих (їх пруживість, видержність etc.), далї свойства течий (розд. XI), свойства ґазів (розд. XII), рух филястий в тїлах пружистих (роди филь, їх енерґія, інтерференция, засада Huyghens'а, відбиванє ся та заломанє филь), акустику (розд. XIV) та рух дрогаючий тїл пружистих (теория музики).

Том другий, якого дотепер вийшов лиш зошит перший, складає ся з двох частий, з части про тепло та части про фізику дробинну. Часть про тепло подає вперед засади термометриї; отже понятє температури, скалї, термоскопа, термометра; далї подає засади кальориметриї (розд. II), отже описи кальориметрів, понятє кальориї (яку автор зве ґрамстепенем – grst), далї трактат про тепло питоме ріжних тїл, прояви адіябатичні, право Poisson'а та обчисленє Laplace'а скорости голосу; далї є ту роздїл про вплив температури на пруживість тїл сталих, про понятє розтворів, про понятє рівноваги термодинамічної, про парованє, кипінє, роди та свійства пар, гиґрометрию і т. и. В сїй части подає автор права конвекциї, проміньованя, емісиї, абсорбциї, переходу тепла, отже права Newtona та Fourier'а. Часть та кінчить ся нарисом термодинаміки.

Часть друга того зошита (про фізику дробинну) подає теорию атомістичну та кінетичну (розд. IX), отже понятє фізичне та хемічне атомів, право Avogadro'а, кінетичну теорию ґазів; в дальших розділах подана теория дифузиї та осмози (ту подано нарис теориї розтворів), а в послїднім роздїлї подано права спїйности та причіпности.

Так в загальнім нарисї виглядає ся інтересна книжка; в інтересї науки можна собі лиш бажати, щоби як найскорше появились дальші части сего поважного виданя.

E. Picard et G. Simart. Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes (Paris, Gauthier-Villars 1897, т. I, ст. VIII+246).

Теорию функций альґебраічних о двох змінних розвинули Nöther, Picard, Castelnuovo та Enriques. Теорию ту викладав Picard в роцї 1896/7 в Сорбоннї і она є ту зібрана в сїй книжцї. Отже книжка та подає теорию інтеґралів многократних, теориї Poincaré що до полишок (residuum) інтеґралів двократних, важнїйші понятя з т. зв. „analysis situs", теорию лучности поверхнї альґебраічних лїнїових та о двох розмірах, далї теорию Picard'а інтеґралів повних ріжничок першої, другої та третої кляси.

Далї є ту теория Noether'а інтеґралів двократних, теория незмінників ґеометричного та кривої, теория системів лїнїових кривих на поверхнях альґебраічних, далї теория кривих альґебраічних скісних.

Silvanus Thompson. Elementare Vorlesungen über Electricität und Magnetismus (übers. von A. Himstedt. 2 Aufl. Tübingen, H. Laupp, 1897).

Є се перевід з найновійшого виданя анґлїйского сеї дуже інструктивної книжки. Давнїйші виданя діждали ся ту нового доповненя, і т. пр. доповнено теорию машин інфлюенцийних (Töpler, Holtz, Wimshurst), згадано про теорию Eving'а; елєменти ґальванічні подїлено на елєменти з механїчною, хемічною і електрохемічною деполяризациєю, доповнено також науку про ґальванометри, теорию полишок маґнетичних та циклїв маґнетизованя. Новий є уступ про филї електричні та про дослїди Poynting'а.

Föppl. Vorlesungen über technische Mechanik. (Leipzig, Teubner, том I, 1897, ст. XV+412).

Том перший має заголовок: Einführung in die Mechanik. Титул сей показує заразом зміст сего твору.

E. Pascal. Rachunek nieskończonościowy (перек. S. Dickstein). Сей твір італїйского математика вийшов в польскім переводї в Варшаві в трох частях.

Т. I (рахунок ріжничковий) р. 1896 ст. 265.

Т. II (рахунок інтеґральний) р. 1896 ст. 240.

Т. III (рахунок варияцийний та рахунок скінчених ріжниць) р. 1897 ст 247.

Сам титул показує на зміст сего твору.

G. Peano. Zarys rachunku geometrycznego (з італїйского пер. S. Dickstein, Варшава р. 1897 ст. 28).

Є се коротке представленє рахунку ґеометричного після теорий Grassmann'а.

J. Puzyna. Teorya funkcyj analitycznych (Lwów, Altenberg, р. 1898, т. I, ст. XVIII+549).

Книжка ся складає ся з 6 частий, з яких чотири перші є властиво лиш вступом до теориї функций аналїтичних.

Часть перша (про числа, величини змінні та множїні) подає наперед дефінїцию чисел рациональних та нерациональних, переходить дїланя числами нерациональними, подає понятє рядів, критерия збіжности, понятє рядів осциляцийних, подає значінє і збіжність добутків безконечних та свойства дробів тяглих; далї впроваджує понятє чисел зложених, подає дїланя такими числами, ґеометричне значінє тих чисел, взори Moivre'а та Euler'а, рівнанє $\omega^n = 1$, понятє рядів і добутків чисел зложених, далї подає понятє обшарів, окружень змінних, понятє точки в безконечности, точки скупленя, впроваджує походну множінь, множінь першої сили і сил висших, числа надскінчені, continua, понятє границї долїшної та горішної, а в решті проєкцию стереоґрафічну площі чисельної на кулю.

Часть друга (про функциї рациональні) подає дефініцию функциї рациональної цїлковитої одної змінної, твердженя про єї коренї, форму інтерполяцийну Lagrange'а та Gauss'а, дїленє двох функций, їх результанту та діскрімінант; далї подає понятє функциї рациональної дробової, єї тяглість та походну, розклад на дроби часткові, теорию середних вартостий mod. m; далї дає теорию функций рациональних з многими змінними, понятє походної часткової, твердженє Euler'а про функциї однородні, представляє дїленє функций з многими змінними та теорию середних вартостий modd$(m_1 m_2 \cdots)$.

Часть третя (про функциї симетричні, про обороти правильних многостїнників та їх функциї) подає наперед дефініцию функциї симетричної та єї ґрупи, теорию функций елементарних симетричних, теорию ґруп підставлень, теорию функций півсиметричних і їх ґрупи, теорию функций многовидних, теорию підґруп, теорию роду Galois; далї представляє ґрупи оборотів двостїнника, четверостїнника, осьмистїнника та двайцятистїнника, ізоморфізм тих ґруп, їх ряди зложеня, понятє ґрупи розширеної та лїнїових підставлень одно- та неодно-родних, далї значінє основних функций Z для тїл правильних, подає загальні методи твореня форм F_3 і F_1, а в кінци подає спосіб представленя якої-небудь функциї многостїнника через функцию Z.

Часть четверта (про елїмінациї та форми двійкові) подає методи Sylvester'а твореня результант для рівнань з одною та двома незвісними, далї творить діскрімінант для функциї $f(xy) = o$, займає ся галузями такої альґебраїчної функциї, точками особливими та громадою кривих; далї займає ся елїмінациями з n рівнань (для $n > 2$), результантами таких рівнань та інтерполяцийною формою Laurent'а; дає теорию визначників Hesse та Jacobi, теорию форм однородних, теорию незмінника форм двійкових, теорию півзмінника та співзмінника, далї подає теорию незмінника співзмінників, а в решті характеризує систем форм основних для кубічної та біквадратної форми двійкової.

По тих чотирох вступних частях переходить автор до властивої теми т. є. до функций аналїтичних. Ту з'являє ся він приклонником теориї Weierstrass'а, що свойства функциї аналїтичної виправаджує з т. зв. елементу, себ то ряду степенного. Теорию ту представляє автор в двох послїдних частях своєї книжки. Наведу коротко їх зміст.

В части пятій (про ряди степенні) характеризує автор ряд степенний $\mathfrak{P}(x)$ в єго засягу збіжности та на обводі тогож, характеризує ряд $P(x)$, подає критерия одностайної збіжности та тяглости рядів одної та много змінних, твердженя про сочинники та корені рядів (одної та много змінних) в засягу збіжности; далї подає автор теорию операций аритметичних (сумованє і т. д.) скінченого або безконечного числа рядів степенних, подає критерия збіжности для вислїду такої операциї, далї подає свойства ряду Newton'а та критерия збіжности Gauss'а та Raabe; дальше розвиває функциї рациональні дробові на ряди зворотні (récourrante), особливо важну функцию $\frac{f'(x)}{f(x)}$, подає теорию функций алеф Вроньского та представляє функцию дробову рациональну в ріжних засягах єї арґумента.

В части шестій та послїдній (переведенє рядів, поділ функций аналїтичних) подає автор теорию переведеня ряду $\mathfrak{P}(x)$ в єго засягу збіжности, характеризує ряд степенний та єго ряд походний в засягу збіжности, розбирає ряд степенний на обводі єго засягу, характеризує точки особливі, а в решті перепроваджує ряд $\mathfrak{P}(x, y, ---)$; дальше перепроваджує автор ряд $y = \mathfrak{P}(x)$ по за засяг збіжности, дефінїює функцию аналїтичну моноґенічну, визначує сочинники в переведенях функциї при помочи походних або середних вартостий, розслїджує безконечну суму $S(x) = \Sigma P(x)$ в ріжних засягах єї одностайної збіжности, ріжничкує єї та інтеґрує, подає методом André загальні ряди зворотні, а в решті розслїджує безконечну суму $S(x, y, ---)$; далї подає автор твердженє Laurent'а, подає характеристику точок особливих та поведенє функциї в тих точках, характеризує з загальнійшого погляду функцию рациональну та переступну, а в кінци розбирає точки особливо функций рациональних та аналїтичних много змінних.

До сего тому долучив автор спис авторів цитованих та реґістр річий.

Задержав ся я над тою книжкою довше; а зробив я се раз з великого піетизма для особи шановного автора, а в друге за для великої вартости самої книжки. В книжці сїй майже елементарним способом представлено такий великий материял та так необходимо потрібний до зрозуміня усїх нинїшних теорий аналїзи математичної, а представлено єго способом свобідним з одної сторони від пересадної педантериї нїмецької, а з другої від побіжности француської, що можна авторови висказати лиш велику подяку за єго прегарну роботу.

E m a n u e l C z u b e r. V o r l e s u n g e n ü b e r D i f f e r e n t i a l- u n d I n t e g r a l r e c h n u n g (т. I ст. 526, т. II ст. 428, Leipzig, Teubner, 1898).

Є се підручник призначений головно для висших шкіл технїчних.

E n c y k l o p ä d i e d e r m a t h e m a t i s c h e n W i s s e n s c h a f t e n, m i t E i n s c h l u s s i h r e r A n w e n d u n g e n (herausg. von H. Burkhardt u. F. Meyer, Leipzig, Teubner).

Енциклопедия ся виходить заходом академій наук у Відни, Мюнхен та товариства наук в Göttingen; кромі редакторів бере в виданю єї участь комісиа, зложена з W. Dyck'a, G. Escherich'a, F. Klein'a, L. Boltzmann'a та H. Webera. Після проґрами має она вийти в двох частях (6 томів по 4—5 зошитів). Досетї вийшло:

Першої части (чиста математика) тому I (аритметика і альґебра) під редакциєю W. F. Meyera зошит перший (ст. 112 р. 1898) та зошит другий (ст. 113 р. 1899). Зміст є такий:

Зошит перший: Основи аритметики (чотири основні ділання; вступ до чисел відємних та дробів; операциї третого степеня з огляду формального) через H. Schubert'a в Гамбурґу. — Комбінаторика. Через E. Netto в Ґіссен. — Числа ірраціональні і збіжність безконечних процесів. Через A. Pringsheim'a в Мюнхен. Часть перша: Числа ірраціональні і понятє границї. Часть друга: Безконечні ряди, добутки, дроби тяглі та визначники.

Зошит другий: Конець части другої чисел ірраціональних (зошит перший). — Теория звичайних та висших чисел зложених. Через E. Study в Greifswald — Наука про множині. Через A. Schönfliess'a в Göttingen. — Скінчені нетяглі ґрупи. Через H. Burghardt'a в Цюріху.

В. Л.

ЗГАДКИ ПОСМЕРТНІ

злaдив

Володимир Левицкий.

Послїдні лїта записались тяжко в хронїках наук математичних; найвизначнїйші представителї тих наук, мужі, що посунули їх вперед, що розширили горизонт відомостий наук стислих, померли. Померли в р. 1896 астрономи Tisserand, Gyldén, Gould, померли в р. 1897 великі математики Weierstrass, Sylvester та Brioschi, а в решті 20 лютого б. р. один з найбільших сучасних учених Sophus Lie. А кождий з них лишив по собі величезну працю, на кождого з них буде все та все наука споглядати з подивом, бо кождий з них „exegit monumentum aere perennius". Память такого Weierstrassa та Lie остане так довго в науцї, як довго людскість буде шукати правди, та як довго буде вважала за потрібне старатись про розвій наук математичних, наук найбільше стислих, наук, що є чистою льоґікою та правдою непохитною.

Франц Щасний Tisserand[1]), рожд. в р. 1845, астроном француский, ученик славного Delaunaya, вже в р. 1866 став асистентом обсерваториї париской. За працї над заколотами (пертурбациями) Юпітера та Сатурна та над планетоідами (116) і (117) остав вже в р. 1873 директором обсерваториї в Тулюзї та яко такий взяв участь в експедициї, що єї вислала академія париска до Японії в цїли обсервациї переходу Венери перед сонцем. В р. 1878 по смерти Le Verrier'a перенїс ся до Парижа яко професор унїверзитета; в р. 1882 був провідником

[1]) Згадки ті подано переважно за варшавскими „Wiadomościami matemat.".

другої експедициї, висланої до Сан-Домінґо в цїли обсервациї переходу Венери. Іменований 1892 директором обсерваториї париской оставав там до смерти († 20 жовтня 1896 р.).

Найважнїйші єго працї відносять ся до механїки неба, найтяжшої — як звісно — галузи астрономії. Єго найважнїйшим твором, що єму запевнити мусить віковічну память, є власне „Traité de mécanique céleste", що вийшла в чотирох томах кілька місяцїв перед єго смертию.

Гуґо Gyldén, рожд. в р. 1841 в Гельсінґфорс (в Финляндиї) відбув студия астрономічнї в Гельсінґфорсї, а опісля в Ґотї під Hansen'ом, одним з найлїпших тодїшних теоретиків. Опісля був астрономом в Пулкові (під СПетербурґом); за працї теоретичнї над місяцьом та працю про теорем трох тїл (поміщену в „Acta mathematica" т. I, що сталась опісля товчком для Poincaré до славної єго працї в томі XIII того журнала) завізвано єго на директора обсерваториї в Штокгольмі в р. 1871, де і оставав до смерти († 9 падолиста 1896 р.).

Найважнїйші єго працї відносять ся до теориї заколотів; місто еліпс, які лиш в приближеню є дорогами планет, впроваджує він криві о змінним напрямі осий, що їх називає „кривими періплеґматичними". Метод єго надає ся дуже добре там, де иньші методи ведуть до розбіжних розвинень функциї пертурбацийної, як пр. при обчисленях пертурбаций Юпітера в теориї планетоїд. Єго головний твір се „Traité analytique des orbites absolues" в 3 томах; з них до хвилї єго смерти вийшов лиш том перший.

Наколи два попереднї астрономи розширили овид астрономії теоретичної, то Венямин Gould в великій мірі збогатив своїми вислїдами астрономію досьвідну. Роджений в р. 1824 в Бостонї відбував там свої студия, а докінчив їх в Европї в Ґетиндзї та Берлинї під проводом славного Gauss'а та Encke, а опісля в Парижи під Араґом. По повороті до Америки (1849) зістав астрономом в Cambridge; ту положив великі заслуги, бо довершив поміру довжини ґеоґрафічної важних стаций ґеодезийних новим, ориґінальним методом при помочи телеґрафа. Пізнїйше тим самим методом (1866) під проводом Gould'а вимірено ріжницю довжини між Greenwich а Washington'ом.

В лїтах 1855—1859 був він начальником обсерваториї Dudley'а в Albany і ту засновав перший американьский журнал астрономічний. В р. 1868 заложив він обсерваторию в Кордові в Арґентинї (на завізванє ряду) і ту довершив величавого дїла. Видав він іменно в р. 1874 атляс „Uranometria Argentina", де подав сорядні і силу сьвітла кілька-

сот тисячів звізд полудневого неба (подібно як се зробили передше Argelander та Bessel для неба північного) від бігуна полудневого до рівника, при чім ужив подїлу неба на правильні стрефи; працю ту докінчив він вже по своїм повороті до Cambridge.

З обсервациї роздїлу звізд на зводї небеснім вивів він конклюзию, що сонце та яких 400 найближших звізд творять одну плоску громаду звізд, а иньші звізди, що до сеї громади не входять, находять ся в віддаленях далеко більших.

Він то подав гадку, щоби планетоїди, яких число з року на рік зрастає, значити числами порядковими в скобках пр. (160); є то числа Gould'а. Він обчисляв дороги та ефемериди ріжних планет та комет, він перший почав стосувати фотоґрафію до астрономії, бо вже в р. 1866 зняв фотоґрафічно ґрупу Плеядів. В самій Кордові зняв він яких 1400 фотоґрафій астрономічних.

Помер в Cambridge 26 падолиста 1896 р.

Карль Теодор Weierstrass, сей математичний ґеній, що сотворив новий напрям сучасної аналїзи математичної, уродив ся р. 1815 в Вестфалії. В л. 1834—1839 віддавав ся студиям правничим в Бонн, но опісля покинув сї студия та посьвятив ся математицї, яку студиював в Мюнстері під Gudermann'ом. Пізнїйше яко учитель ґімназияльний в Deutsch-Krone та Braunsberg звернув на себе увагу працями з аналїзи висшої в сїй мірі, що в р. 1856 покликано єго до Берлина до інститута промислового; в р. 1857 вже є професором надзвичайним унїверзитета та членом академії, а в р. 1864 зістає професором звичайним математики в Берлинї, де остає аж до смерти († 19 лютого 1897 р.).

Weierstrass сам немного писав, но за се своїми викладами посунув цїлу науку математики далеко в перед, так що єго глубокі гадки та ідеї стались нинї необходимою частию викладів теориї функций.

Перші єго працї відносять ся до теориї функций Abel'а, що повстають через відвернене інтеґралів гиперелїптичних. В противположеню до попередників своїх Göpel'а та Rosenhain'а, яких методи що найбільше мож було віднести до случаю, де під коренем в інтеґралї:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

стояла функция цїлковита 5-ого або 6-ого степеня, ставить Weierstrass задачу зовсїм загальну, так що у него R(x) є функциєю $(2\rho+1)$ степеня, і при помочи твердженя Abel'а про сумоване інтеґралів дістає вираженя на функциї Abel'а в загальних функциях Θ Jacobi'ого.

В теориї функций аналітичних відкрив він науці нові горизонти через введене понятя „елементів" (т. зв. рядів степенних) функциї та її „переведеня". З відси вийшло понятє точок сущно- і несущно-особливих, розклад функциї одновидної на скінчений або нескінчений добуток „функций перших", далї будова функций аналітичних, з чим звязані імена Laurent'а та Mittag-Lefflera. Weierstrass іде ту дорогою виключно альґебраічною противно як великий його попередник Riemann, що уживав метода ґеометричного; а наколи Cauchy будував функциї в сей спосіб, що виходив з інтеґралів, то Weierstrass вийшов від „елементу" т. є. від ряда степенного і цїлу теорию функций аналітичних опер — як сам каже — лиш на фундаменті правд альґебраічних.

Теория функций еліптичних в новім видї, що він її опер на функциях $\sigma(u)$ та $p(u)$,[1]) доказ про переступ числа e і π, теория чисел зложених з n одиниць, нові погляди в теориї форм квадратових та біквадратових, в теориї рівнань ріжничкових та рахунку варияцийного, застосоване функций еліптичних до фізики, теория поверхнї мінімальних, се все є праці епохальні, що піднесли імя Weierstrassa незвичайно високо.

Кромі сего заслужив ся він через редаґоване разом з Kronecker'ом та Borchardt'ом журнала: „Journal für die reine und angewandte Mathematik" та через видане творів Jacobi'ого.

З його школи вийшло много великих учених, як H. A. Schwarz, С. Ковалевская, O. Biermann і и. Єго всї твори та виклади видає тепер академія наук в Берлинї.

Яков Йосиф Sylvester, математик анґлійский, родж. в Льондонї в р. 1814. Кінчив школи в Льондонї, Liverpool та Cambridge. В. р. 1838 зістав професором фізики в University College в Льондонї, но вже в р. 1841 переніс ся до Америки; по повороті до Анґлїї обняв місце в товаристві обезпечень та займав ся адвокатурою, а в л. 1855—1870 був професором академії військової в Woolwich. В л. 1876—1883 вчив математики в унїверзитетї в Baltimore (в Америцї), а опісля в Oxford в Анґлїї до р. 1892. Вмер 15 марта 1897 р.

З початку занимав ся фізикою математичною і поміщав свої праці в „Philosophical Magazine" (пр. працю про оптичну теорию кришталів Fresnel'а), но опісля звернув ся до альґебри та вскорі (в р. 1841) розширив своїми працями теорию рівнань та елімінациї. В л. 1851—1854 збудував разом з другим математиком анґлійским, Cayley'ом, теорию незмінників, що нинї має так важне значінє в усїх теориях математичних.

[1]) На тім опертий трактат Halphen'а: „Traité des fonctions elliptiques".

Та теория вскорі дістала ся на континент та ту завдяки працям Hermite'а, Aronhold'а, Clebsch'а, Gordan'а, Hilbert'а та иньших дійшла вскорі до великого значіня.

Не менше важні є праці Sylvester'а в теориї чисел, а іменно праці про розділ чисел, про числа перші і иньші. Всїх артикулів, що він написав, є кількасот; він то також засновав в Америцї великий журнал: „American Journal of Mathematics" та якийсь час був його редактором.

Кромі математики писав він поезиї латиньскі та англійскі, переводив поетів старинних, а навіть видав розвідку про поезию.

Francesco Brioschi, математик італійский, рожд. 1824 р., був директором та професором інститута політехнічного в Медиолянї, сенатором, від р. 1884 президентом академії dei Lincei в Римі, членом академії наук в Парижи і т. д. В серпни 1897 р. був президентом міжнародного з'їзда математиків в Цюриху. Помер 13 грудня 1897 р.

Brioschi лишив по собі епохальні праці в царинї ґеометриї та альґебри. Єго праці ґеометричні відносять ся до ліній кривинових, до поверхний, до інтеґрованя рівнань ґеодезийних, до кривих четвертого степеня, до maxim'ів та minim'ів в рахунку варияцийним, до рівнань ріжничкових часткових і т. п.

В альґебрі важні є праці Brioschi'ого про визначники скісні, про елімінацию, про інтерполяцию, про функциї Sturm'а, а врештї про форми о кількох неозначених. Важні є його досліди над розвязкою рівнаня 5-ого та 6-ого степеня, що показують свойства рівнаня Jacobi'ого, яке дефінює множник через модул трансформациї 5-ого ряду. — Найкрасше відкритє Brioschi'ого се розвязка рівнаня 6-ого степеня; при помочи функций двох змінних, анальоґічних до функциї Θ Jacobi'ого дістає він величини, що через них представляють ся корені рівнаня 6-ого степеня.

Brioschi був редактором важного журнала: „Annali di matematica pura ed applicata".

---

20 лютого 1899 р. помер славний математик норвежский Sophus Lie. Родж. р. 1842 вчив ся математики в Християнії і був опісля довший час учителем. Доперва в р. 1869 і 1870 докінчив свої студия в Берлинї та Парижи і був по повороті професором унїверситета в Християнії; звідси завізвано його р. 1886 на катедру ґеометриї до Липска,

де пробував майже до кінця свого житя. В послїдних часах вернув знов до Христіянії, де і помер.

Працї Lie відносять ся до ґеометриї, до теориї рівнань ріжничкових та до теориї тяглих ґруп.

В ґеометриї важні є его працї про криві, що через перетворене безконечно мале переходять самі в себе, про поверхню Kummer'a, про поверхнї мінімальні альґебраїчні, про поверхнї скісні, про поверхнї о сталїй кривині, про лінії ґеодезийні, про поверхнї, що через безконечно мале перетворене переходять самі в себе, про криві подвійно криві, про звязь між ґеометриєю кулї а ґеометриєю простої, про ґеометрию о n розмірах, про теорию укладів куль і т. и. Всї ті працї, поміщувані переважно в „Mathematische Annalen“ сьвідчать про величезну силу інвенциї та комбінациї помершого математика.

Але єще більша є его заслуга в теориї рівнань ріжничкових. Перед ним інтеґроване тих рівнань стояло на ґрунтї чисто емпіричнім; до кождого рівнаня треба було стосувати відповідну методу. Доперва Lie викрив, що всї катеґориї рівнань ріжничкових, яких інтеґроване можна в якийсь спосіб улекшити, не зміняють ся при т. зв. безконечно малих перетворенях, і що, наколи ті перетвореня є дані, то всї ті улекшеня можна дістати методично. В дальшім поступі розвинув Lie теорию т. зв. перетворень, що посунула вперед справу інтеґрованя рівнань ріжничкових.

Теорию ту зібрав він в слїдуючих творах:

Theorie der Transformationsgruppen (опр. F. Engel). Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen (опр. G. Scheffers). Vorlesungen über continuerliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen (опр. G. Scheffers). Geometrie der Berührungstransformationen (опр. G. Scheffers).

Всї ті твори видані в лїтах 1888—1897.

В них занимає ся Lie ґрупами тяглими (в противположеню до нетяглих ґруп Klein'a та Poincaré), далї впроваджує понятє ґрупи розширеної, понятє перетвореня безконечно малого та понятє незмінника ріжничкового. Далї впроваджує він понятє ґрупи p-частної, ґрупи в просторони о n розмірах і т. и.

Не ту місце входити ближше в розбір тих теорий; теориї ті розвивав сам Lie аж до своєї смерти, розвивали і розвивають Picard, Poincaré, Vessiot, Darboux, Appell, Painlevé і и., а також численні ученики Lie, як Engel, Killing, Schur, Scheffers, Study, Page та Журавский (в Кракові).

В ґеометриї стичних перетворень займає ся Lie громадою кривих ґеодетичних, рівнанєм Pfaff'a, Monge'a, комплексами тетраедральними, рівнанями ріжничковими частними 1 і 2 ряду, перетворенями в просторони простих в кулї а кривих стичних в лїнії кривинові і т. и. В усїх его розслїдах понятє ґрупи тяглої відгриває первостепенну ролю.

Про інтересні его методи розвязки рівнань ріжничкових звичайних та частних при помочи перетворень безконечно малих ґрупи тяглої можем тут лиш згадати. Так само можем тут лиш згадати про его способи зведеня рівнань частних якогонебудь ряду до рівнань ряду першого при помочи понятя ґрупи (ту послїдну теорию розвинув він в часї своїх викладів в Липску в р. 1893/4).

Так ріжнородна дїяльність того великого ученого, ті его щасливі подвиги в частях математики, якими він занимав ся, ті его женіяльні ідеї, які посунули цїлу науку на нові шляхи та відкрили тілько красних, ріжних царин математики, суть запорукою, що імя его та твори жити-муть вічно, як і твори Weierstrass'a.

А коли до того згадаєм, що на тім не кінчила ся его дїяльність научна, що він пр. видав твори иньшого, неменше великого, земляка свого Abel'a, то мусимо жалувати, що сей великий дух зійшов вже з того сьвіта. Та однак не пропало то, що він зробив; его ідеї жиють в его учениках та жити-муть доти, доки не зникне в людскости інтерес для науки.