ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСКОЇ СЕКЦИЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

Т. VII. — Випуск I.

ЧАСТЬ МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНА

ПІД РЕДАКЦИЄЮ

ІВАНА ВЕРХРАТСКОГО і ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦКОГО.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SECTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

B. VII. — Heft I.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHER THEIL

REDIGIRT VON

JOHANN VERCHRATSKYJ u. VLADIMIR LEVICKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1900.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка
під зарядом К. Беднарского.

ЗМІСТ.

Стор.

1. Володимир Левицкий: До теориї рядів степенних.. 1—10
2. Софрон Матвіяс: Дещо про лучі Бекереля.......... 1—8
3. Володимир Левицкий Короткий начерк теориї функций автоморфних 1—29
4. Стефан Рудницкий: Про плями сонічні (Часть перша) 1—27
5. Бібліоґрафія і хроніка математично-фізична 1—11

* * *

INHALT.

1. Vladimir Levickyj: Zur Theorie der Potenzreihen.... 1—10
2. Sofron Matwijas: Über die Becquerel'schen Strahlen.. 1—8
3. Vladimir Levickyj: Kurzer Abriss der Theorie der automorphen Functionen.................................. 1—29
4. Stefan Rudnickyj Über die Sonnenflecke (Erster Theil) 1—27
5. Mathematisch-physikalische Bibliographie u. Chronik 1—11

* * *

З ТЕОРИЇ РЯДІВ СТЕПЕННИХ*)

НАПИСАВ

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

В сїй розвідцї займаю ся такими рядами степенними, для яких *цїлий обвід засягу збіжности творить пантахию точок особливих* (*або є лїнїєю особливою замкненою*). Квестия того рода рядів степенних є дуже трудна; яке таке сьвітло кидають на ню роботи Pringsheim'a, Fabry та Borel'a 1); тож в нинїшній розвідцї я хочу лиш перевести доказ, що того рода ряди істнують, а опісля подати пару уваг, які можуть кинути деяке сьвітло на істоту таких функций.

В тій цїли послугуюсь способом, що творить точку вихідну теорему Mittag-Leffler'a 2).

1. Най $f(x)$ буде аналїтичною функциєю, збіжною в колї $|x| = r$ і най єї точками особливими будуть місця a_s $(s = 1, 2, \quad \infty)$, де:

$$|a_s| = r, \quad a_s = re^{\varphi_s i} \quad (\varphi_s \text{ яке-небудь}).$$

В окруженю кождої точки a_s істнує розвинене:

$$f(x) = G_s\left(\frac{1}{x - a_s}\right) + \mathfrak{P}_s(x - a_s) \qquad 1).$$

де G_s є функция цїла рациональна або переступна, т. є.:

---

*) Розвідка ся буде поміщена в одним з дальших випусків журнала „Monatshefte fur Mathematik u. Physik" Wien.

1) Пор. пр. Borel: Leçons sur la théorie des fonctions; також Annales de l'Ecole normale t. 16. Ту можна також зачислити дослїди Poincaré над функциями автоморфвими, які істнують лиш в колї головнім.

2) Пор. пр. Biermann: Theorie der analytischen Functionen ст. 344 et sqts.

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\frac{c_{s1}}{x-a_s}+\frac{c_{s2}}{(x-a_s)^2}+\quad\left\{\begin{array}{l}\text{скінчена}\\ \text{або}\\ \text{in inf.}\end{array}\right.$$

$$=-\frac{c_{s1}}{a_s\left(1\quad\frac{x}{a_s}\right)}+\frac{c_{s1}}{a_s^2\left(1-\frac{x}{a_s}\right)^2}-\quad=\sum_{\mu=o}^{\infty}A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu}$$

де:

$$(-1)^{-\mu}A_{s\mu}=-\binom{-\mu-1}{0}\frac{c_{s1}}{a_s}-\binom{-\mu-1}{1}\frac{c_{s2}}{a_s^2}-\qquad 2).$$

Проте можна написати:

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\sum_{0}^{m_s}A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu}+\sum_{m_s+1}^{\infty}A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu}\qquad 3).$$

де m_s є яке-небудь число, але скінчене, додатне і ціле.

Впровадьмо тепер вражене слїдуюче:

$$F_s(x)=\sum_{m_s+1}^{\infty}A_{s\mu}\left(\frac{x}{a_s}\right)^{\mu}\qquad 4).$$

то єго беззглядна вартість (з узгляднeнєм $|a_s|=r$) є:

$$\left|F_s(x)\right|\leqq\sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{\mu}$$

Збудуймо тепер безконечну суму $\sum\limits_{s=1}^{\infty}F_s(x)$, то:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left|F_s(x)\right|\leqq\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{\mu}\qquad 5).$$

Розслїдїм тепер сочинники $A_{s\mu}$, то на основі рівнаня 2). можна написати:

$$\left|A_{s\mu}\right|\leqq\sum_{v=1}^{\infty}\binom{-\mu-1}{v-1}\left|\frac{c_{sv}}{r^v}\right|\qquad |a_s|=r.$$

Наколи ряд:

$$G_s\left(\frac{1}{x-a_s}\right)=\sum\frac{c_{sv}}{(x-a_s)^v}$$

яко ряд безусловно збіжний має для окруженя точки a_s вартість:

$$\sum_{v=1}^{\infty}\frac{|c_{sv}|}{|x-a_s|^v}=g_s\,,\quad |x-a_s|=\zeta_s$$

то після звісного твердженя Веєрштрасса[1]:

$$\frac{|c_{sv}|}{|x-a_s|^v}\leqq g_s\,,\quad \text{або}\quad |c_{sv}|\leqq g_s\,\zeta_s^v$$

Наколи вставимо за $|c_{sv}|$ ту більшу вартість, дістанемо:

$$\left|A_{s\mu}\right|\leqq g_s\sum_{v=1}^{\infty}\binom{-\mu-1}{v-1}\left|\frac{\zeta_s}{r}\right|^v$$

або:

$$\left|A_{s\mu}\right|\leqq g_s\,\frac{|\zeta_s|}{r}\,\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta_s|}{r}\right)^{\mu+1}}\,.$$

Доберім ζ_s так, щоби:

$$\frac{|\zeta_s|}{r}<\beta<1\,,\quad \text{то:}$$

$$|A_{s\mu}|<g_s\,\beta\,(1-\beta)^{-\mu-1}$$

сума та є проте скінчена.

Возьмім тепер в засягу зб. $\left|\frac{x}{r}\right|=\varepsilon\leqq 1$ суму:

$$\sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{\mu},\ \text{то та сума:}$$

$$\sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{\mu}=\left|\frac{x}{r}\right|^{m_s}\sum_{v=1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{v}$$

---

[1] Biermann loc. cit. 142.

Але:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left| A_{s\mu} \right| \left| \frac{x}{r} \right|^{v} < \sum_{v=1}^{\infty} g_s \, \beta \left(1-\beta\right)^{-(m_s+v+1)} \left| \frac{x}{r} \right|^{v} =$$

$$= \frac{g_s \, \beta}{\left(1-\beta\right)^{m_s+1}} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1-\beta\right)^{v}} \left| \frac{x}{r} \right|^{v}$$

А що:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1-\beta\right)^{v}} \left| \frac{x}{r} \right|^{v} = \frac{\left| \frac{x}{r} \right|}{1-\beta} \quad \frac{1}{1-\frac{1}{1-\beta}\left| \frac{x}{r} \right|} = \frac{\varepsilon}{1-\beta-\varepsilon},$$

то:

$$\left| F_s(x) \right| \leqq \sum_{m_s+1}^{\infty} \left| A_{s\mu} \right| \left| \frac{x}{r} \right|^{\mu} \leqq \left| \frac{x}{r} \right|^{m_s} \frac{g_s \, \beta}{\left(1-\beta\right)^{m_s+1}} \cdot \frac{\varepsilon}{1-\beta-\varepsilon} =$$

$$= \varepsilon^{m_s+1} \frac{\beta g_s}{(1 \quad \beta)^{m_s+1} \, (1-\beta-\varepsilon)}.$$

Через вибір достаточно великого m_s можна зробити, що:

$$\left| F_s(x) \right| \angle \varepsilon_s \text{ (довільно мале)}$$

в засягу $\left| \frac{x}{r} \right| \angle 1.$

А що в тім засягу є і:

$$\left| F_{s+v}(x) \right| \angle \varepsilon_{s+v} \quad (s = 1, 2, 3, \cdots)$$

то можна вибрати так велике ν, щоби і $\sum\limits_{s=1}^{\infty} F_s(x)$ була одностайно збіжна, т. є., щоби:

$$\sum \left| F_{s+v}(x) \right| \angle \delta \text{ (довільно мале).}$$

Тодї $\sum\limits_{s=1}^{\infty} F_s(x)$ буде одностайно збіжна і дасть ся розвинути на ряд в окруженю кождої точки a_s. В такім засягу та сума яко сума безконечно много рядів дасть ся упорядкувати після степенів арґументу [1]), отже:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left|F_s(x)\right| \leqq \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{m_s+1}^{\infty}\left|A_{s\mu}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{\mu} = \sum_{s=1}^{\infty}\left\{\left|A_{s,m_s+1}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{m_s+1} + \right.$$

$$\left. + \left|A_{s,m_s+2}\right|\left|\frac{x}{r}\right|^{m_s+2} + \right\} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{x}{r}^{m_s+1}\left\{\left|A_{s,m_s+1}\right| + \left|A_{s,m_s+2}\right|\left|\frac{x}{r}\right| + \cdots\right\} =$$

$$= \left|\frac{x}{r}\right|^{m_s+1}\left\{\left|A_{1,m_s+1}\right| + \left|A_{1,m_s+2}\right|\left|\frac{x}{r}\right| + \cdots + \left|A_{2,m_s+1}\right| + \left|A_{2,m_s+2}\right|\left|\frac{x}{r}\right| + \cdots\right\} =$$

$$= \left|\frac{x}{r}\right|^{m_s+1}\left[\sum_{t=1}^{\infty}\left|A_{t,m_s+1}\right| + \left|\frac{x}{r}\right|\sum_{t=1}^{\infty}\left|A_{t,m_s+2}\right| + \left|\frac{x}{r}\right|^{2}\sum_{t=1}^{\infty}\left|A_{t,m_s+3}\right| + \cdots\right\}.$$

Отже можна написати:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left|F_s(x)\right| \leqq \left|\frac{x}{r}\right|^{m_s+1}\left[C_1 + C_2\left|\frac{x}{r}\right| + C_3\left|\frac{x}{r}\right|^{2} + \cdots\right] \qquad 6).$$

де кождий сочинник:

$$C_n = = \sum_{t}\left|A_{t,m_s+n}\right|$$

має скінчену і означену вартість [2]).

В засягу $|x| = r$ мусить бути:

$$f(x) - \sum_{s=1}^{\infty} F_s(x) = G(x),$$

де $G(x)$ є цїлковита переступна функция; отже:

---

[1]) Пор. Biermann loc. cit. ст. 146.

[2]) Пор. ibid. ст. 146.

$$f(x) = G(x) + \sum_{s=1}^{\infty} F_s(x) \qquad 7).$$

Можна проте всегда збудувати аналїтичну функцию, яка на цілім обводї засягу збіжности має самі точки особливі.

2. Що така функция має дїйсно такі власности, можна легко доказати.

Так як:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s(x) = h\left(\frac{x}{r}\right)^{m_s+1}\left[C_1 + C_2\frac{x}{r} + C_3\frac{x^2}{r^2} + \quad\right];$$

де h є числом зложеним $\left(|h| \leqq 1\right)$, то:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s\left(re^{\varphi i}\right) = h\left(e^{\varphi i}\right)^{m_s+1}\left[C_1 + C_2e^{\varphi i} + C_3e^{2\varphi i} + \quad\right] =$$

$$= h\left(e^{\varphi i}\right)^{m_s+1}\left[\sum_{\nu=0}^{n} C_{\nu+1}e^{\nu\varphi i} + R_n\right],$$

де перша сума є скінчена, а решта почавши від дуже далекого n:

$$R_n\, e^{n\varphi i}\left(C_{n+1} + C_{n+2}e^{\varphi i} + C_{n+3}e^{2\varphi i} + \quad\right)_{n=\infty}$$

може приняти яку-небуть вартість, бо $\left.e^{n\varphi i}\right\}_{n=\infty}$ приниmає всяку яку-небудь вартість.

Що було до доказаня. —

3. Погляньмо тепер, що дїє ся в серединї кола збіжности.

Возьмім $x = r'e^{\varphi i}$ де $r' \angle r$,
то дістанемо:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s\left(r'e^{\varphi i}\right) = h\left(e^{\varphi i}\right)^{m_s+1}\left[C_1 + C_2\frac{r'}{r}e^{\varphi i} + \cdots + C_z\left(\frac{r'}{r}\right)^{z-1} e^{z-1} \quad -\right.$$

отже-ж решта є ту:

$$R_n = \left(\frac{r'}{r}\right)^{n-1} e^{(n-1)\varphi i} \left[C_n + C_{n+1}\frac{r'}{r}e^{\varphi i} + \cdots\right]_{n=\infty}$$

$$\text{Так як } \frac{r'}{r} \angle 1, \text{ то: } \lim_{n=\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{n-1} = 0, \text{ т. є. } R_n = 0.$$

Всередині кола збіжности є проте функция f(x) скінчена і одновартостна.

Є ту однак виїмки. Для $n = \infty$ може $e^{(n-1)\varphi i}$ приняти всяку можливу вартість; наколи ті вартости є скінчені, то решта $R_n = 0$; є однак і безконечно великі вартости того $e^{(n-1)\varphi i}$, отже в тім случаю має решта форму $0.\infty$, який то символ може мати якесь значінє. Наколи він має вартість скінчену, то і цїла функция є на тім місци скінчена, але не все одновартостна. Наколи символ сей має вартість безконечно велику, то і функция на тім місци стаєсь безконечно великою.

Можем проте сказати: Функция, яка має на обводї збіжности пантахию особливостий, може мати в серединї кола збіжности ту і там порозкидані особливі місця, де тратить скінченість і одновартостність.

Які се є місця і як в окруженю тих місць представляє ся функция f(x), сего не можу ближше розбирати, вказую лиш на можливість, що такі місця істнують.

4. Возьмім тепер функцию f(x) по за колом збіжности і розслїдім там її поведенє.

Виберім на площи чисельній яку-небудь точку

$$x = Re^{\varphi i},$$

де $R > r$, то тодї дістанемо:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s\left(Re^{\varphi i}\right) = h\left(e^{\varphi i}\right)^{m_s+1}\left[C_1 + C_2\frac{R}{r}e^{\varphi i} + \cdots\right]$$

при чім решта:

$$R_n = \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} e^{(n-1)\varphi i} \left[C_n + C_n \frac{R}{r} e^{\varphi i} + \quad \right]_{n=\infty}$$

Так як $\left(\frac{R}{r}\right) > 1$, то $\lim\limits_{n=\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n-1} = \infty$, т. є. $R_n = \infty$;

поза колом збіжности функция f(x) в загалї не істнує (є безконечностию).

Але і ту є виїмки. Для $n = \infty$ може $e^{(n-1)\varphi i}$ приняти всяку можливу вартість; наколи ті вартости є скінчені або безконечно великі, то решта $R_n = \infty$; наколи однак якаєь з тих вартостий є 0, то решта дістане форму $\infty . 0$. Наколи сей символ має вартість скінчену, то решта R_n, а проте і f(x) є на тім місци скінчене.

Можна проте сказати, що функция f(x) поза колом збіжности ніде не істнує кромі деяких ізольованих місць, де приймає вартість скінчену.

І ту не беру ся розслїджувати ближше тих місць, а вказую лиш на можливість їх істнованя.

5. Возьмім тепер ряд видїлений mod. m[1]) т. є.:

$$\sum_{s=1}^{\infty} F_s(x, m) = h\left(\frac{x}{r}\right)^{m_s+1} \left[C_1 + C_{m+1}\left(\frac{x}{r}\right)^m + C_{2m+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{2m} + \cdots \right],$$

то ту решта R_n має вид:

$$R_n = C_{nm+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{nm} + C_{(n+1)m+1}\left(\frac{x}{r}\right)^{(n+1)m} +$$

або:

$$R_n = \left(\frac{x}{r}\right)^{nm} \left[C_{nm+1} + C_{(n+1)m+1}\left(\frac{x}{r}\right)^m + \cdots \right]_{n=\infty}$$

Для $x = re^{\varphi i}$ маємо:

---

[1]) Що до таких рядів пор. Puzyna: O wartościach funkcyi etc. (Roz. krak. Akad. mat umiej. Wyd. T. 26); єго: Ueber eine methodische Bildung der anal. Ausdrücke (Monatshefte für Math. u. Phys. Bd. V). Левицкий: Про симетричні вираженя (Записки Наук. Тов. ім. Шевченка т. IV.).

$$R_n = e^{nm\varphi i} \left[C_{nm+1} + C_{(n+1)m+1} \left(e^{\varphi i} \right)^m + \cdots \right]_{n=\infty},$$

а для $x = Re^{\varphi i}$ $R \lesseqgtr r$ дістанемо:

$$R_n = \left(\frac{R}{r} \right)^{nm} e^{nm\varphi i} \left[C_{nm+1} + C_{(n+1)m+1} \left(\frac{R}{r} \right)^m e^{m\varphi i} + \quad \right]_{n=\infty},$$

а се значить, що і функция виділена mod. d. з функциї f(x) є також функциєю о характері функциї f(x).

Возьмім тепер загальнїйший случай, а іменно виділену функцию:

$$\sum F_s(x, m) = h \left(\frac{x}{r} \right)^{m_s+1} \left[C_1 + C_{m+1} \left(\frac{x}{r} \right)^m + C_{m_1+1} \left(\frac{x}{r} \right)^{m_1} + \right.$$

$$\left. + C_{m_2+1} \left(\frac{x}{r} \right)^{m_2} + \cdots \right], \qquad 8).$$

де:

$$m < m_1 < m_2 < m_3 <$$

і де:

$$m = m$$

$$m_1 = m\, t_1$$

$$m_2 = m\, t_1\, t_2$$

$$m_3 = m\, t_1\, t_2\, t_3$$

$$m_n = m\, t_1\, t_2\, t_3 \qquad t_n,$$

де m_s і t_s є числа цїлї і додатні; то решта того ряду має вид:

$$Rn = C_{m_n+1} \left(\frac{x}{r} \right)^{m_n} + C_{m_{n+1}+1} \left(\frac{x}{r} \right)^{m_{n+1}} + \cdots$$

або:

$$Rn = \left(\frac{x}{r} \right) \left[C_{m_n+1} + C_{m_{n+1}+1} \left(\frac{x}{r} \right)^{(t_{n+1}-1)m_n} + \cdots \right],$$

а та решта для $n = \infty$ і для $x = Re^{\varphi i}$, $\left(R \gtreqless r \right)$ заховує ся як попередних случаях. Отже і така функция має вповні характер розслїдженої нами функциї f(x).

Очевидно то зістане і на случай, коли:

$$t_1 = t_2 = \qquad m,$$

т. є. коли: $$m_n = m^n$$

Зауважити вкінци треба, що ряд 8). на случай $r = 1$ був вже предметом дослїдів M. Lerch'a[1]).

Тернопіль, в червни 1900.

---

[1]) Acta matem. T. 10.

Дещо про лучі Бекереля (Becquerel)

написав

СОФРОН МАТВІЯС.

Не довго по відкритю лучів Рентґена (Röntgen) наука могла повеличатись новим здобутком. В роцї 1896 відкрив Бекерель, що уран і єго сполученя висилають лучі для ока вправдї неслїдні, котрі однак дїлають на плити фотоґрафічні замкнені в чорнім непрозрачнім для сьвітла папері рівно як сьвітло, хотяй значно слабше і розходять ся в лінїї простій. З початку була гадка, що уран сьвітить під впливом попередного, хотяйби короткого виставленя єго на лучі сьвітла через якийсь час, зовсім так як тїла фосфоризуючі, хотяй в тім случаю уран висилає лучі значно довше, бо навіть і цїлі місяцї. Длятого з початку названо явище то надфосфоресценцією. Однак докладнїйші дослїди виказали цїлком рішучо, що лучі ті не повстають під впливом сьвітла, бо уран і єго сполученя висилають лучі і тодї, коли умістимо їх в цїлковитій темнотї навіть через кілька лїт, а також не можна в жаден спосіб скріпити лучистости урану анї через сильне осьвітленє анї при помочи иньших внїшних впливів. Не має ся тут проте до дїла з фосфоресценцією, але з лучами нового рода, котрі в засадї ріжнять ся також цїлковито і від лучів сьвітла.

По тім відкритю Бекереля мимоволї насувалось питанє, чи крім урану є иньші тїла, що мали би ту саму власність висиланя лучів о тих самих свійствах. Розвязкою сего питаня заняв ся між першими Др. Ґ. Шмідт, котрому удалось по численних пробах з ріжними елементами відкрити, що тор заховуєсь подібно як уран. В дослїдах своїх над свійствами тих лучів спостеріг Шмідт, що металї вглитують лучі тору, а иньші тїла, як папір, желятина, шкло перепускають їх в тонких верствах. Бо коли покласти тор на фотоґрафічній плитї, завиненій в чорний непрозрачний папір, то по однім або двох днях плита та цїлковито счорнїє, коли однак помістити якийсь металь під тором, то фіґура єго відібє ся цїлковито. Лучі ті дальше роблять з воздуха, що є дієлектриком, слабий провідник електричности, в наслїдок чого розсївають ся набої тїл наелектризованих так додатно як відʼємно.

Силу лучів урану і тору або так званих лучів Бекереля можна розслїджувати в двоякий спосіб. Перша метода лежить в тім, що оцїняєсь дïлане фотоґрафічне лучів на закриту плиту, однак методою сею не можна дїйти до докладних результатів. Далеко докладнїйшою є метода електрична, полягаюча на тім, що лучі ті переміняють воздух-дієлектрик на добрий провідник, а вартість провідництва можна дуже докладно мірити.

Приряд той, якого уживала Curie-Склодовска, складає ся з конденсатора о двох плитках A і B. (фіґ. I.). Тїло лучисте спорошковане розсипує ся на плитцї B і творить з воздуха містячого між плитками добрий провідник. До міреня сего провідництва підносить ся плитку B до високого потенциялу, коли получимо єї з одним бігуном сильної батериї електричної, а другий бігун злучимо з землею. Другу плитку A за помочию дроту CD лучимо з землею. Творить ся проте ріжниця потенциялів межи плитками, а що воздух між плитками стає ся провідником, проте кружить ток електричний між плитками. Потенциял плитки A вказує електрометер E з нею злучений. Єсли прорвемо в C получене з землею, то плитка A отримує набій, котрий відхиляє електрометер. Скорість вихилу є пропорциональна до сили тока і може служити до єї зміреня. Лїпше є однак рівноважити набій плитки так, щоби електрометер зіставав на зеровій точцї. Набої ті суть натурально дуже слабі і можна їх зрівноважити за помочию кварцу пєзоелектричного Q, котрого одна окладка лучить ся з плиткою A, друга з землею. Ту бляшку кварцову обтяжає ся за помочию тягарку уміщеного на тарілцї завішеній до берегу долїшного кварцової бляшки. А уладжує ся то в той спосіб, що скількість електричности переходяча через конденсатор в кождій хвили рівнає ся скількости електричности, що достарчає кварц. Тим способом можна мірити безвзглядну вартість тої електричности, котра в протягу даного часу перепливає через конденсатор, або иньшими словами можна мірити силу тока. Чулість електрометру не має на помір жадного впливу.

Причина повставаня того тока до нинї не зовсім ясна. Анґлїйский учений Rutheford толкує, що лучі переходячі через воздух межи плитками конденсатора, причиняють ся до роздїлу частин ґазових на додатні і відʼємні йони, котрі перебігають в поли електричнім до плиток конденсатора і ту віддають їм свої набої. Наслїдком тої гіпотези було би, що ток є тим сильнїйший, чим більше творить ся тих йонів, а тих знова може тим більше творитись, чим сильнїйші лучі висилають ті тїла, а також коли би була однакова сила висиланя лучів, то сила тока залежить еще від ріжницї потенциялів між плитками конденсатора. Rutheford виказав відтак досьвідом правдивість своєї гіпотези а залежність між провідництвом електричним в наслїдок дїланя лучистих тїл а ріжницею потенциялів конденсатора представив ґрафічно кривою лінїєю. Коли з початку збільшаєсь ріжниця потенциялів, росте і відхилене електрометру але до певної границї. Дальше крива та нагло загинає ся і є дальше рівнобіжною до оси потенциялів. І так має бути. Бо єсли при якійсь ріжници потенциялів межи плитками скорість частин ґазових стає ся так велика, що всї йони, що творять ся в однїй секундї, в тім часї добігають до плиток конденсатора, то тодї натурально і ток мусить бути сталий, проте і електрометер не може дальше відхиляти ся. Тодї ток, котрого сила найбільша, є пропорциональний до числа йонів, що творять ся в одиници часу, а ті знова приймаємо яко міру сили лучистости тїл.

Поміри тим прирядом виказали, що загальний характер лучів тору є той сам що урану, а сила тока взбуджена лучами тора є явищем атомовим, яке є звязане з материєю і не може зчезнути з зміною їх стану фізичного а навіть хемічного. Всї сполуки, що мають за складник тор або уран, посїдають тим самим власність висиланя лучів Бекереля і то тим сильнїйших, чим більша їх скількість в якій сполуцї. Після того не повинен жаден мінерал бути більше лучистий чим тор і уран. Однак досьвід показав що иньшого, а то що уранї чорний (пехбленда) є чотири рази чиннїйший нїж уран металїчний. Длятого то Марія і Петро Curie впали на гадку, що в пехблендї мусить бути матерія иньша, котра є більше лучиста нїж тор або уран і виказали навіть посредством звичайних метод хемії аналїтичної, що в пехблендї суть материї, котрих лучистість є 100.000 разів енерґічнїйша нїж урана. Аналїза хемічна виказала, що в пехблендї суть три ріжні елементи, які дістали назву польон, рад і актин.

Польон є все разом з бізмутом і під взглядом аналїтичним до него подібний. Рад є зближений до бару і є з ним в пехблендї, а актин є найбільше зближений до тору. Треба однак знати, що повисших тїл в пехблєндї надзвичайно мало. Щоби їх одержати в більшій скількости, треба переробити кілька тон відпадків фабрикациї урана з пехблєнди. Цїла та праця є дуже довга, і при тім получена з великими коштами, бо з тисячий kg материялу добуває ся ледви кілька dg сих лучистих матерій.

Вправдї жадного з тих тїл не одержано єще доси відосібненого, проте тїла ті поки що трудно звати елєментами. Мимо найбільших старань не знайдено доси хемічної реакциї, щоби можна було віддїлити рад від бару, польон від бізмута. Однак наука знає єще иньші средства, котрими можна виказати, що нові елєменти суть, а то аналїза спектральна і помір тягару атомового.

Demarçay виконав ряд помірів спектральних з новими тїлами, а радше тими тїлами, де они входять в їх склад. Фотоґрафуючи дуговину (спектр) хльорку барового лучистого, спостеріг він нову дуговину характеристичну, яка ставала що раз виразнїйша в міру, як росла лучистість. Дуговина раду містила в собі 15 добре схарактеризованих лїнїй не числячи слабших.

Подібні поміри роблені з польоном і актином не дали успішних результатів, чи то тому, що метода спектральна не є так корисна або концентрация не вистарчаюча.

Означено також тягар атомовий бару лучистого і знайдено, що тягар збільшає ся з концентрациєю. Послїдні поміри дали число 146 яко тягар атомовий бару лучистого, підчас коли тягар атомовий звичайного бару виносить 138.

Однак тепер насунулось друге питанє, чи уран не посїдає длятого власности висиланя лучів Бекереля, що може містить в собі одно з тих тїл. І справдї найновійші працї виказали, що уран нїколи не є вільний від актину і що видобуваючи актин можна лучистість урана значно обнижити. А невідомо тілько, чи можна одержати уран зовсім нечинний.

Послїдним питанєм, котре лишалось до розвязаня, було то, чи між лучами катодальними і Рентґена з одної, а лучами Бекереля з другої сторони нема що вспільного, а може навіть, чи ті послїдні лучі не суть нїчим иньшим як катодальними або иньшою відміною лучів Рентґена. Длятого зачато слїдити за свійствами нових лучів і порівнувати їх з лучами катодальними і Рентґена.

Відкрито, що лучі нових тїл лучистих можуть переходити через ріжні тїла, але лучі не всїх тїл переходять в однаковій мірі. Лучі польону мало проникають, бо в воздусї перебувають они ледви кількацентиметрову дорогу, а через тїла цїпкі пр. металї переходять лиш через дуже тонку верству.

Рад має два роди лучів, одні дуже мало проникливі як польону, але другі суть дуже проникливі, бо в воздусї переходять на метр і більше, а плита оловяна навіть кілька cm груба не в силї повздержати лучів другого рода. Актин заховуєсь в тім взглядї так як рад.

Дїланє фотоґрафічне раду і актину є дуже енерґічне. Лиш польон один не дїлає з віддаленя а дуже слабо тодї, коли плита фотоґрафічна є покрита чорним папером. Рад і актин дїлають з значного віддаленя а навіть тодї, коли плита є покрита чорним папером.

Лучі тих тїл викликують флюоресценцию в тїлах флюоризуючих а також причиняють ся до змін хемічних в тїлах виставлених на їх дїланє. Так пр. шкло і порцеляна виставлені на дїланя лучів раду, без взгляду на то чи з віддаленя чи безпосередно зіткнені, забарвляють ся на барву фіолєтову, брунатну або сїру, залежно від складу шкла або порцеляни.

Також послїдні досьвіди виказали, що тїла ті слабо озонїзують воздух. Рівно-ж єсли лучі раду падають на пару виходячу з кітла, то єї скрапляють; в тім случаю йони, що повстають в воздусї в наслїдок дїланя тих лучів суть тими дрібними тїльцями, що служать яко осередки до згущеня пари водної.

Дальше лучі ті улекшують повставанє іскри елєктричної через те, що обнижають ріжницю потенциялів на двох провідниках, набитих нерівноіменною елєктричностию.

Також заходить зміна в силї лучистости тих тїл. І так лучистість сполук раду росте від хвилї, коли одержано ті сполуки в станї цїпким і доходить до певної граничної вартости, що буває 4 або 5 разів більше як первісна. Противно лучистість сполук польону зменьшає ся поволи але стало і не вертає вже нїколи до первісної початкової вартости.

Лучі раду і актину мають дальше то свійство, що побуджають другі тїла, на котрі падають, до висиланя лучів Лучистість та так сказати-б, другорядна по усуненю раду і актину малїє а вкінци гасне цїлком.

Маючи на взглядї до тепер вичислені свійства лучів Бекереля можна їх так само добре заслити до лучів Рентґена як і катодальних, котрих істоту нинї толкує ся після W. Sutherland-a*) в спосіб дуже інтересний. То власне, що лучі катодальні не суть залежні

(Phil. Mag. 47, 269. 1899).

від рода ґазу, твердить Sutherland, каже приняти, що лучі ті не повстали з йонів ґазу але з „електронів“, де під „електроном“ треба розуміти можливо найменьшу скількість електричности, рід молекула електричного. Тих електронів є два роди, додатні і від'ємні; звичайно суть они сполучені в „neutron“, а тілько певні сили можуть его розділити. Всяке провідництво електричности є тілько вандрівкою електронів; длятого мусить кождий провідник ділити „neutron“ на електрони, підчас коли непровідники сего не можуть. Порожня є ізорятором; аж електрична сила розділить неутрони, тоді стає ся она провідником в роді електроліта. Опісля відємні електрони враз з декотрими йонами ґазовими є відкидувані від катоди і творять лучі катодальні. Ті суть проте найпростшою формою електричного току. А що електрони суть надзвичайно малі, бо Sutherland обчисляє їх на одну мілїонову молекула матеріяльного, то можуть проникнути в простор межимолекулярний. Многі з тих електронів відклонюють молекули з простолїнійної дороги, і ті творять по переході листка алюмінїового лучі Ленарда. А так само як молекули матеріяльні, мають після гадки Sutherlanda і електрони внутрішну будову. Єсли ударяють на атоми тїл, то віддають они їм часть своєї енерґії в виді тепла; друга часть енерґії з'уживаєсь до внутрішних заворушень кождого електрона, а ті внутрішні колибаня творять в етері лучі Рентґена. Лучі X були би проте филями етеру і то в тім самім відношеню меньші як филї сьвітла, як електрони суть меньші від молекулів матеріяльних. А що они просторонь межимолекулярну легко переходять, не можуть ся анї відбивати анї заломлювати. І иньші свійства лучів Рентґена і катодальних можна пояснити на підставі тої теориї.

Лучі Бекереля можна зачислити до лучів катодальних і Рентґена тому, бо так само лучі X як і катодальні дїлають фотоґрафічно, флюоризуючо, не підлягають правам відбитя, заломленя анї поляризациї. За подібностию лучів X а Бекереля промовляє єще й то, що одні і другі не суть однородні. Ріжнородність лучів Рентґена є добре знана, що доказує хочби то, що в технїцї відріжняє ся тверді і мягкі рурки Crookes'a, що служать до витвореня лучів Рентґена. Лучі виходячі з рурок твердих мають велику спосібність прониканя і задля тої причини дають на екранї не досить ясні образи пр. скелету, бо ту і кости суть для них прозрачні. Рівно-ж і дуже мягкі суть невідповідні, бо знова вглитані мясними частями не відграничають ся остро на загальнім тлї. У лучів Бекереля відповідають твердим руркам лучі раду, а мягким лучі польону.

Однак між лучами Рентґена а Бекереля є і основна ріжниця, а то та, що лучі Рентґена не дізнають відхиленя в поли маґнетнім, підчас коли лучі Бекереля як і катодальні улягають діланю поля маґнетного, бо так і повинно бути на підставі теориї Sutherlanda. Curie знайшов в своїх дуже численних дослїдах, що рад має два роди лучів і то одні відхиляють ся, другі не відхиляють ся в поли маґнетнім та підлягають тим самим правам, що і лучі катодальні. Ріжнородність та зовсїм не псує анальоґії. Знаною є річею, що в рурках Крукса (Crookes-a) лучі Рентґена творять ся всюди там, де лучі катодальні спотикають поверхність цїпкого тїла. З другої сторони дослїди Sugnaca виказали, що коли лучі X напотикають поверхність сталу, поверхність та стає ся жерелом лучів, котрі після найновійших результатів Curie і Sagnaca принайменьше в части суть катодальними. Поверхність проте, коли єї спотикають лучі катодальні, видає лучі X і на відворот, так що в безпосереднім сусїдстві сталої поверхности не можуть бути одні лучі без других.

Що до істоти лучів Бекереля ставлено також ріжнородні гіпотези.

Марія Склодовска-Curie подає в однїй з своїх розправ гіпотезу, що взагалї просторонь проникають лучі, подібні до лучів X, а ті падаючи на якісь тїла о високім тягарі атомовім, як тор, уран і т. д. улягають поглощеню; відтак висилають ті тїла лучі другорядні, котре власне суть лучами Бекереля. Однак дослї Elster-a і Geitla дають результати суперечні повисшій гіпотезї.

Вкінци лишаєсь питанє що до жерела енерґії тїл лучистих, котре доси поки що належить уважати за отверте. Відомо, що при висиланю тих лучів не заходить жадна в очи впадаючи зміна так в самих тїлах лучистих як і в оточеню. Длятого Марія Curie була тої гадки, що ті лучі суть винятком від права термодинамічного Карнота. Однак поки що нема причини анї рациї захитувати правом усталеним в науцї і добачувати в тих явищах незгоди з другою засадою термодинаміки, після котрої систем о температурі незмінній не може достарчити енерґії, єсли єї нї звідки не одержує, але радше треба припустити, що то освободжує ся енерґія в наслїдок змін хемічних, мимо що маса сама так мало тратить на тім, що треба би мілїонів лїт, щоби можна ту страту змірити нашими прирядами. Бо і висилана ту скількість енерґії є незначна в порівнаню з тими, які висилають дрібні навіть процеси хемічні.

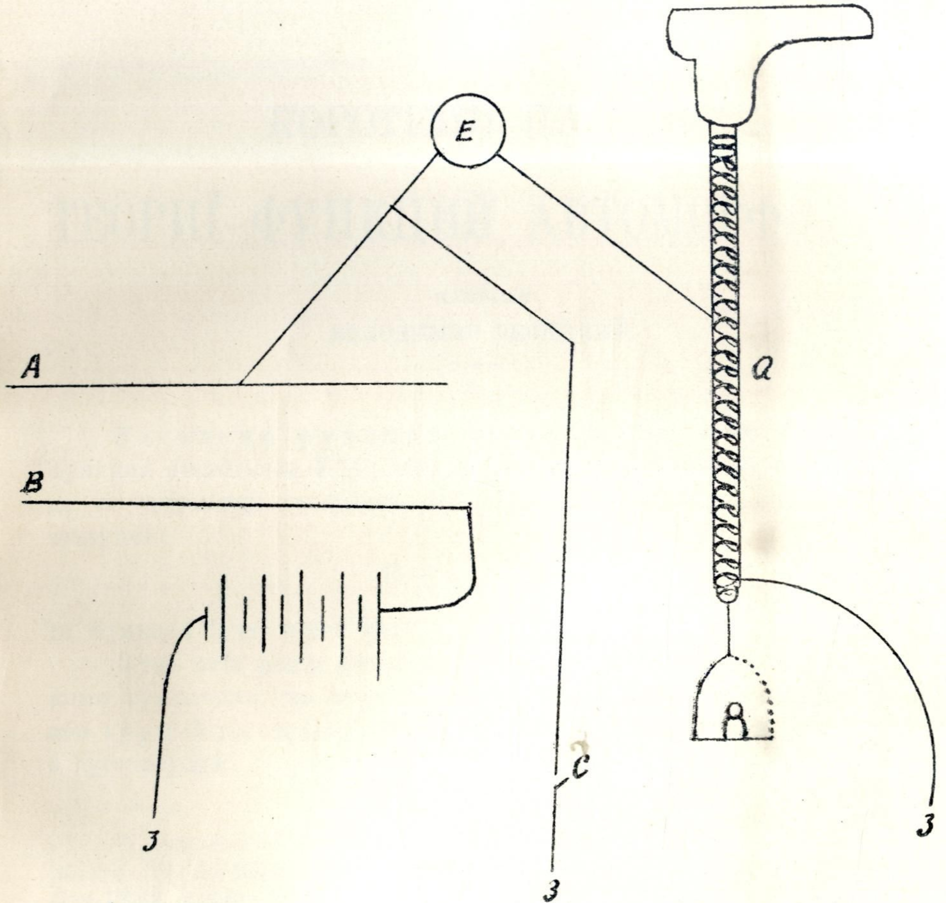
Теория матеріялїстична лучиста здає добре справу з тих явищ. Однак сли єї приняти, мусить ся приняти також, що матерія лучиста не є в звичайнім станї хемічнім. Атом в тім случаю не є неподільний, коли єго части суть висилані яко лучі. Матерія лучиста підлягає перемінї хемічній і та то переміна є жерелом енерґії лучистости, але не є то переміна хемічна звичайна, бо атом сам улягає змінї. Впрочім є ту ясним, що єсли лучистість є наслїдком переміни матерії, то перемінї підлягати мусить сам атом, наколи лучистість є явищем атомовим.

З короткого того зіставленя найновійших дослїдів над лучами Бекереля, видно, що як справа доси стоїть, трудно рішити ся за одною або другою теориєю тих нових лучів, бо аж дальше систематичне поглубленє власностий нових тих лучів буде становити справдїшний крок в перед: тілько тодї дасть ся пізнати залежність лучів катодальних з одної а лучів Бекереля і Рентґена з другої сторони в правдивім сьвітлї, а тим самим рішить ся питанє що до їх істоти і походженя.

Тернопіль в жовтни 1900.

Важнійша лїтература.

M. Curie (Comptes rendus de l' Academie, Paris CXXIX, 714, 1899).
Demarçay (C. R. CXXIX, 716, 1899).
Bequerel (C. R. CXXIX, 996, 1205, 1899).
M. Curie (C. R. CXXX, 73, 76, 1900).
W. Sutherland (Phil. Mag. 47, 269, 1899).



фіг 1.

КОРОТКИЙ НАЧЕРК
ТЕОРИЇ ФУНКЦИЙ АВТОМОРФНИХ*)

НАПИСАВ
ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

Загальна функция автоморфна є то однозначна функция аналїтична F (z), яка не зміняє своєї вартости, наколи ми до єї арґументу стосувати-мем якусь субституцию з ґрупи субституций:

$$G = \left(z,\ f_\alpha (z) \right),$$

де функция $f_\alpha (z)$ може мати ріжне значінє.

З тих всїх родів функций автоморфних ми займем ся лиш такими функциями, що не зміняють ся для т. зв. ґруп нетяглих або ґруп Фухса (як їх зове Poincaré), себ-то ґруп, утворених з субституций:

---

*) Важнїйша лїтература до сеї теориї містить ся в слїдуючих творах: Poincaré: Sur les fonctions uniformes qui ses reproduisent par les substitutions linéaires (Math. Annalen XIX); той-сам: Théorie des groupes fuchsiens Acta matem. I. pag. 1. i pag. 193. i т. III. (Mémoire sur les groupes kleinéens). Rausenberger: Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen. Biermann: Theorie der analyt. Functionen ст. 409 et sqts.; той-сам: Zur Theorie der Fuchs'schen Functionen (Sitz. Berichte der k. Akad. der Wissensch. Bd. XCII, Abth. II). Picard: Traité d'Analyse т. I. ст. 435 et sqts. i т. II. ст. 268 et sqts. Klein-Fricke: Elliptische Modulfunctionen. Fricke u. Klein: Vorlesungen ü. Theorie der automorphen Functionen Bd. I, дальше ріжні розвідки Кляйна в Mathem. Annalen; Forsyth: Theory of Functions. Пор. також Левицкий: Ґрупа модулова (Справозданє академічної ґимназиї у Львові 1895) i Wstęp do teoryi elipt. funkcyj modułowych (Prace mat. fiz. XIII. Варшава)·

$$S_n z = \left(z, \frac{\alpha_n z + \beta_n}{\gamma_n z + \delta_n}\right),$$

де сочинники є числа дїйсні або зложені.

Очевидна є річ, що ґрупа G може бути утворена з ітераций одної лише субституциї $Sz = \left(z, \frac{az + b}{cz + b}\right)$, отже $G = (1, Sz, S^2 z, S^3 z, \quad)$ і тодї маємо функцию з одною субституциєю основною, або ґрупа є утворена з двох субституций перемінних основних:

$$Sz = \frac{az + b}{cz + d}, \quad Tz = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1},$$

отже $$G = \left(S^\alpha T^\beta z, T^\alpha S^\beta z\right), \quad \alpha \gtreqless \beta,$$

або таких основних субституций може бути більше, а тодї функция називаєсь після Poincaré функциєю Фукса.[1]

Заки приступимо до ґруп і функций, які не зміняють ся при субституциях даної ґрупи, перейдім по коротцї важнїйші свойства субституциї Sz.

Субституция $Sz = \left(z, \frac{az + b}{cz + d}\right)$,

де $z = x + iy$, а сочинники є числа дїйсні або мнимі.

Так як свойства ті подав я в наведених мною розвідках, проте повторю їх тут лиш дуже коротко.

1. Наколи напишемо субституцию сю в видї:

$$t = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad 1)$$

отже рівнанєм тим звяжемо площу (t) і (z), то те підставленє відтворює одну площу в другу і то так, що обі ті площі є до себе подібні в елєментарних (безконечно малих) трикутниках, значить ся відтворенє є частинкове [conform] (доказ пор. в другій моїй розвідцї). Є оно далї ізоґональне, значить ся кут утворений між двома перетинаючими ся кривими на одній площі остає по відтвореню без зміни; є оно в кінци і колове, бо коло на одній площі переходить через сю субституцию на коло і на другій площі.

2. Наколи возьмем місто двох площий ту саму площу (z) і будем єї перетворювати в нїй самій, то кожда єї точка перейде в иньшу, лиш т. зв. точки подвійні, визначені рівнанєм:

---

[1] Докладнїйшу дефініцию функций Фукса і Кляйна опісля подамо.

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

спадуть на себе; є се точки:

$$\alpha,\ \beta, = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4\,bc}}{2\ c} \qquad 2)$$

Таких точок є дві; лиш на случай:

$$(a - d)^2 + 4\,bc = 0 \qquad 3)$$

обі ті точки спадають на себе і маєм лиш одну точку подвійну.

При помочи тих точок подвійних можемо субституциї нашій надати вид (пор. згадану мною роботу [1]):

$$\frac{t - \alpha}{t - \beta} = K\ \frac{z - \alpha}{z - \beta}, \qquad 4)$$

де K є т. зв. **множником** субституциї:

$$K = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4\,bc}}{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + 4\,bc}}, \qquad 5)$$

або:

$$\frac{t - \beta}{t - \alpha} = K'\ \frac{z - \beta}{z - \alpha},$$

де:

$$\left(\sqrt{K} + \sqrt{K'}\right)^2 = \frac{(a + d)^2}{ad - bc} \qquad 6)$$

Наколи возьмем точки безконечно близькі точки α, т. є:

$$t = \alpha + \tau, \quad z = \alpha + \zeta,$$

то по розвиненю в формі 4) дістанемо:

$$\frac{|\,\tau\,|}{|\,\zeta\,|} = \left|\ K\ \right|, \qquad 7)$$

в такім отже відношеню остають точки безконечно близькі до точки подвійної.

3. Наколи положимо:

$$Sz = t_1\,,\quad S^2 z = t_2\,, \qquad S^m z = t_m \qquad 8)$$

то **ітерация** послїдна має значінє:

---

[1] Пор. Lewicki: Wstęp do teoryi funkcyj eliptycznych modułowych loc. cit.

$$\frac{t_m - \alpha}{t_m - \beta} = K^m \frac{z - \alpha}{z - \beta} \tag{8)}$$

Відворотна субституция дасть нам:

$$\frac{z - \alpha}{z - \beta} = \frac{1}{K} \frac{t - \alpha}{t - \beta} \text{ і т. д.}$$

або коли напишемо t_{-1} місто z, а z місто t, то дістанемо:

$$\frac{t_{-m} - \alpha}{t_{-m} - \beta} = \frac{1}{K^m} \frac{z - \alpha}{z - \beta} \tag{9)}$$

Наколи вернем до первісної точки, т. є.:

$t_m \equiv z$, $K^m = 1$, то субстисуция має період m, т. є.:

$$K = e^{\frac{2s\pi i}{m}}$$

Наколи: $K=1$, $\alpha = \beta$, $(a-d)^2+4\,bc=0$, субст.: є параболїчна.

$K>1$, $\alpha \gtrless \beta$, $(a-d)^2+4\,bc>0$, „ є гіперболїчна.

$K=e^{\sigma i}$, $|K|=1$, $(a-d)^2+4\,bc\angle 0$, є елїптична.

$K=re^{\sigma i}$, $r > 0$, субст.: є льоксодромічна.

Субституция елїптична, де:

$$\sigma = \frac{m}{n} 2\pi \left(\frac{m}{n} \text{ дроб істий}\right)$$

має період n, бо:

$$\frac{t_n - \alpha}{t_n - \beta} = \frac{z - \alpha}{z - \beta}, \quad t_n \equiv z,$$

наколиж $\frac{\sigma}{2\pi} = e$ (невиміриме), то:

$t_m \equiv z$ доперва для $m = \infty$ т. є. по довершеню безконечно многого числа ітераций; субституция елїптична є тоді інфінітезімальна.

Субституция гіперболїчна і льоксодромічна — як легко ся можна пересьвідчити — не є анї періодичні, анї інфінітезімальні, а в субституциї параболїчній, якій можна дати вид:

$$\frac{1}{t - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + \frac{4\,c}{2\,(a + d)} \tag{10)}$$

$$t_m \equiv \alpha \Big\}_{m=\infty} \text{ і } t_{-m} \equiv \alpha \Big\}_{m=\infty}$$

т. є.: точки ті зміряють до точки подвійної α.

4. Ґрупа, де не входять субституциї еліптичні інфінітезімальні, є **нетягла**, т. є. наколи якусь точку $z = x + iy$ піддамо субституциї ґрупи, то ся точка перейде на иньшу, яка не лежить в окруженю даної точки. Точки, де ґрупа тратить нетяглість, є **точками особливими** ґрупи.

Наколи сочинники a, b, c, d є **дійсні**, то ґрупа **тратить нетяглість на цілій оси перворядній і еї безпосередно близькім окруженю** (пор. мою роботу про ґрупу модулову); всюди над осию xx є нетягла кромі ту і там порозкиданих точок, які належать до субституций еліптичних ґрупи.

5. В субституциї Sz можна все довести до того, щоби еї модул

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1; \text{ бо наколи:}$$

$$ad - bc = \mu', \ \mu' \lesseqgtr - 1, \text{ то положім:}$$

$$\mu'' = (\sqrt{\mu'})^2 = \mu^2; \text{ дістанем:}$$

$$\frac{a}{\mu}\,\frac{d}{\mu} - \frac{b}{\mu}\,\frac{c}{\mu} = 1 \text{ і ті вирази } \frac{a}{\mu}, \qquad \text{берем за сочинники.}$$

Наколи $\mu' = -1$, то берем:

$$bc - ad = +1, \text{ т. є. берем субституцию:}$$

$$t' = \frac{cz + d}{az + b}.$$

6. Щоби перевести ґеометрично відтворене точки z на точку t на тій самій площі, беремо:

$$z' = t - \frac{a}{c} = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} = \frac{bc - ad}{c^2\left(z + \frac{c}{d}\right)} = -\frac{1}{c^2\left(z + \frac{c}{d}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{c^2\,\zeta} = \frac{\mu^2}{\zeta}, \ \mu^2 = -\frac{1}{c^2}, \ \mu = k^2\,e^{2\gamma i}$$

Точкою зеровою площи ζ є 0; наколи маємо дану точку z (ζ), то дістанемо z′, наколи поведемо через 0 просту *PP* під кутом γ (фіґ. I), а з 0 лучем k зачеркнемо коло; точку z відбиваємо в простій *PP* яко точку z_1 а далї відвертаємо z_1 через коло (k) на точку z'; а то $t = z' + \frac{a}{c}$, то наколи на площи (xy) маємо точку $\frac{a}{c}$, то з z' провадимо відтинок $\# \frac{a}{c}$ і дістанемо t. (Узасаднене сего способу конструкцї гл. мою розвідку про ґрупу модулову, де є подана конструкция для субституциї $- \frac{1}{z}$.)

Маємо ту отже три рухи: відбите в простій *PP*, відвернене образа в колї і пересунене, Poincaré доказав однак, що ті три рухи заступити можна двома відверненями в двох колах, але лиш для трох перших родів субституциї (для льоксодромічної нї).

7. Напишім субституцию $t = \frac{az + b}{cz + d}$ в формі:

$$ctz + dt - az - b = 0$$

і возьмім чотири пари відповідних точок t і z, то дістанем:

$$\begin{aligned} ct_1\, z_1 + dt_1 - az_1 - b &= 0 \\ ct_2\, z_2 + dt_2 - az_2 - b &= 0 \\ ct_3\, z_3 + dt_3 - az_3 - b &= 0 \\ ct_4\, z_4 + dt_4 - az_4 - b &= 0 \end{aligned}$$

а з відси через елімінацию сталих a b c d дістанем:

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_4} \cdot \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \quad \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} \qquad 11)$$

Виберім на площі z довільні точки $(\alpha\ \beta)$ і спряжені з ними $(\alpha'\ \beta')$, то на пл. t відповідять їм $(\gamma\ \delta)$ і спряжені $(\gamma'\ \delta')$. Наколи то вставимо в 11), дістанемо:

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'} \cdot \frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'} = \frac{\gamma - \gamma'}{\gamma - \delta'} \quad \frac{\delta - \delta'}{\delta - \gamma'},$$

а Poincaré значить се:

$$(\alpha\ \beta) = (\gamma\ \delta) \qquad 12)$$

Poincaré впроваджує еще одну реляцию. Наколи на пл. z возьмемо точки $(\alpha\ \beta)$ такі, що часть дїйсна

$$\Re\,(\alpha) \angle \Re\,(\beta)$$

і наколи через ті точки і спряжені з ними поведемо коло (Фіґ. II), яке вісь xx перетинає в точках h i k, то Poincaré творить вираженє:

$$\frac{\alpha - h}{\alpha - k} \quad \frac{\beta - k}{\beta - h} = \left[\alpha \ \beta\right].$$

Наколи на колї возьмем еще точку γ, то дістанемо:

$$\left[\alpha \ \gamma\right] = \frac{\alpha - h}{\alpha - k} \cdot \frac{\gamma - k}{\gamma - h}$$

$$\left[\gamma \ \beta\right] = \frac{\gamma - h}{\gamma - k} \cdot \frac{\beta - k}{\beta - h},$$

а з відси:

$$[\alpha \ \gamma] \ [\gamma \ \beta] = [\alpha \ \beta] \qquad 13)$$

При помочи тих реляций найдемо:

$$(\alpha \ \beta) = \frac{4 \ [\alpha \ \beta]}{\left[1 + [\alpha \ \beta]\right]^2}, \ (\gamma \ \delta) = \frac{4 \ [\gamma \ \delta]}{\left[1 + [\gamma \ \delta]\right]^2},$$

а що:

$$(\alpha \ \beta) = (\gamma \ \delta),$$

то дістанемо реляцию:

$$[\alpha \ \beta] = [\gamma \ \delta] \qquad 14)$$

8. Наколи $\alpha \equiv z$, $\beta \equiv z + dz$ (отже α і β безконечно близькі), то тодї:

$$\left[z, \ z + dz\right] = \frac{z - h}{z - k} \cdot \frac{z - k + dz}{z - h + dz} =$$

$$= \left(1 + \frac{dz}{z - k}\right) \left(1 - \frac{dz}{z - h} + \text{---}\right) = 1 + dz \left[\frac{1}{z - k} - \frac{1}{z - h}\right].$$

Наколи $\sphericalangle \ ho\alpha = \sphericalangle \ hoz = \varphi$, то:

$$dz = \left| dz \right| e^{\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)i} = - i \left| dz \right| e^{\varphi i},$$

а що:

$$\frac{1}{z - k} - \frac{1}{z - h} = - \frac{h - k}{(z - h)(z - k)} = - \frac{2 \ r}{(z - h)(z - k)},$$

то:

$$\left[z, \ z + dz\right] = 1 + \frac{| dz |}{y}$$

Poincaré називає інтеґрал $\int_k \frac{|dz|}{y}$ браний по луку k якоїсь кривої, L тої кривої, а $\iint \frac{dxdy}{y^2}$, браний з огляду на часть площи, замкненої якимсь контуром, S того поля.

Наколи $z = x + iy$, $t = \xi + i\eta$, а луки k і k′ кривих собі відповідають, то так як:

$$[z, z + dz] = [t, t + dt],$$

то також:

$$\int \frac{|dz|}{y} = \int \frac{|dt|}{\eta} \qquad 15)$$

і:

$$\iint \frac{dxdy}{y^2} = \iint \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} \qquad 16)$$

т. є.: *два відповідні луки відповідних кривих мають однаке L, а два відповідні поля однаке S.*

Наколи:

$$t = \xi + \eta i = \frac{az + b}{cz + d},$$

$$z = x + iy$$

то часть другорядна рівнає ся части другорядній, отже:

$$\frac{\eta}{y} = \frac{1}{(cx + d)^2 + c^2y^2}.$$

З другого боку:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{(cz + d)^2},$$ отже по виконаню:

$$\left|\frac{dt}{dz}\right| = \frac{1}{\left[\sqrt{(cx + d)^2 + c^2y^2}\right]^2} = \frac{1}{(cx + d)^2 + c^2y^2},$$

отже:

$$\left|\frac{dt}{dz}\right| = \frac{\eta}{y}. \qquad 17)$$

9. Наколи возьмем ґрупу субституций утворену з ітераций та добутків одної або більше основних субституций, і ті всї субституциї

пристосуєм до всїх точок площи z, то покаже ся, що на площі (z) найде ся поле замкнене т. зв. *фундаментальний (основний) район* такий, що яка-небудь субституция примінена до якої-небудь точки єго випроваджує ту точку поза сей район; всї місця того району по приміненю одної субституциї ґрупи найдуть ся також *всї* в иньшім рівнож замкненім районї; по приміненю другої субституциї ґрупи всї точки району основного найдуть ся знов в иньшім замкненім районї і т. д., цїла площа розпаде ся на ряд відповідаючих собі районів, так що основний район зовсїм вистарчає до пізнаня і схарактеризованя ґрупи. — При такім подїлї площи на райони бере ся тілько додатну півплощу (горішну), бо все, що ся дїє під осию xx, повстає через відбитє горішної півплощи в оси xx.

Такий поділ для ґрупи модулової о двох основних субституциях з дїйсними та цїлковитими сочинниками перевів я в розвідцї про ґрупу модулову[1]; подібний подїл можнаби перевести для ґрупи з одною субституциєю основною (площа розпаде ся тодї на 3 райони рівноважні). Подїл представить ся дуже гарно, наколи по довершеню подїлу на площи xx відібємо єго — як Кляйн робить — на площи $t = \frac{az + b}{cz + d}$; тодї пр. для ґрупи модулової вісь xx перейде на коло, а в колї тим відтворить ся цїла півплоща.

По тих загальних увагах про райони основні перейдім до районів основних ґрупи з кількома основними субституциями, с. є. *ґрупи Фухса* і їх власностий.

Райони сцецияльних ґруп Фухса.[2]

Специяльна ґрупа Фухса є утворена з кількох основних субституций типу $\left(z, \frac{a_s\, z + b_s}{c_s\, z + d_s}\right)$, де a_s, b_s, c_s, d_s є числа дїйсні які-небудь, такі що їх модул $\begin{vmatrix} a_s & b_s \\ c_s & d_s \end{vmatrix} = 1$.

До такої ґрупи мусить належати район фундаментальний (основний), т. є. такий якийсь район замкнений, що кожда єго точка z за приміненєм якої небудь субституциї сеї ґрупи виходить поза сей район. Сей район, а проте і всї райони, які з него вийдуть через

---

[1] Пор. Левицкий: ґрупа модулова loc. cit.

[2] Цїла та теория в нарисї містить ся у Poincaré: Théorie des groupes fuchsiens (Acta mat. m. I.).

ріжні підставленя, будуть творити continuum; площа цїла (очевидно берем — як висше сказано — лиш додатну півплощу) розпаде ся на райони R_s $(s = 0, 1, 2, ----)$ такі, що район R_s відповідає якійсь субстистуциї $f_s(z) = \frac{a_s z + b_s}{c_s z + d_s}$, $(a_s, b_s, c_s, d_s$ дійсні).

1. Приймім R_0 (Фіґ. III) за район основний, то всї лінїї, які его замикають, такі, що до них прибуває иньший район R_s, називають ся **боками** (пр. λ_p, λ_q, ----) і то **першої категориї** (рода, Poincaré), наколи они не є частями оси xx, а **другого рода** (категориї), наколи они є частями оси xx (пр. a b).

Наколи возьмемо якусь точку z на боцї λ_p, то она піддана субституциї $f_p(z)$ перейде на ограничене району R_p, отже $f_p(z)$ належить до обводу району R_p. Наколи тепер точку z (на боцї λ_p) зачислимо до району R_p і застосуємо до неї відворотну субституцию $\left[f_p(z) \right]^{-1} = f_{-p}(z)$, то дістанемо точку на боцї λ_{-p}; точка та буде належати і до R_0 і до району R_{-p}. Звідси слїдує, що до боку λ_p першого рода найде ся все в районї R_0 другий відповідний бік λ_{-p} такий, що $f_p(\lambda_{-p}) = \lambda_p$, а $f_{-p}(\lambda_p) = \lambda_{-p}$.

Такі два боки λ_p і λ_{-p} є після Poincaré **спряжені**.

Наколи $R_p \equiv R_{-p}$, т. є. $f_p(z) = f_{-p}(z)$, або $\left[f_p(z) \right]^2 = z$, або $\lambda_p \equiv \lambda_{-p}$, то субституция $f_p(z)$ є еліптична о періодї 2, а точка z на боцї λ_p через ту субституцию посуне ся лиш по тім самім боцї; з того слїдує, **що такий бік** (позаяк субституция є еліптична) **складає ся з двох боків, які творять лук кола** розділений точкою подвійною α; половина того боку з одної сторони точки α буде λ_p, половина з другої сторони точки α буде λ_{-p}; такий бік є проте лиш мнимо поєдинчий, бо точка α на ним є вершком району R_0. **Район R_0 має проте паристе число спряжених боків першого рода.**

Боки другого рода не є з собою спряжені; бік ab не може нїяким чином перейти в бік cd, бо колиб пр. точка z на ab відповідала точцї z' на cd, тоби і їх безпосередні окруженя δ і δ' відповідали собі (бо точки по над осию відповідають точкам по над осию), а се неможливо, бо в районї R_0 нема точок рівноважних.

Боки першого рода — а тих є число паристе λ_1 λ_2 λ_{2n} — можна подїлити на пари спряжені: λ_p і λ_{p+n} $(p = 1, 2, --- n)$; тодї:

$$f_{n+p}(\lambda_p) = \lambda_{n+p}, \; f_p(\lambda_{n+p}) = \lambda_p .$$

Субституциї f_p і f_{n+p} є проте відворотні. Вистане проте знати лиш половину субституций, які район R_0 перетворюють в райони сусїдні. Вистане знати:

$$f_1(z),\ f_2(z), \qquad f_n(z) \qquad (1)$$

то иньші субституциї є:

$$f_1^{-1}(z),\ f_2^{-1}(z), \qquad f_n^{-1}(z) \qquad (2)$$

При помочи субституций (1) можна район R_0 перемінити на якний-небудь сусїдний район.

Не тяжко доказати, що субституциї ряду (1) є субституциями основними ґрупи, а що ґрупа — як ми заложили — має скінчене число субституций основних, проте n є числом скінченим, значить ся район має скінчене число боків I. рода.

В однім вершку сходить ся певне скінчене число районів; пр. в вершку S (Фіґ. IV) сходить ся R_0, R_1, R_2, —; найже R_0 перейде через субституцию $f_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}(z)$ в R_1, R_1 через $f_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}(z)$ в R_2, — і т. д. в кінци вернемо до R_0, отже:

$$f_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\ f_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}\ f_{\alpha_3}^{\varepsilon_3} \qquad f_{\alpha_\mu}^{\varepsilon_\mu}(z) = z \qquad 18)$$

Подібні вираженя дістанемо для кождого вершка в районї R_0 і дістанемо певну скількість реляций між основними субституциями ґрупи (т. зв. основні реляциї ґрупи) під заложенем, що з R_0 безпосередно переходить ся до R_1, з R_1 до R_2 і т. д.

2. Наколи маємо район, якого боки є які-небудь лїнїї, то можна район сей замінити на район обмежений самими луками коловими і то так, що боки другого рода остануть боками другого рода, а боки першого рода будуть луками о середоточках на оси xx. Се легко зрозуміти, бо 1° можна з одної сторони кавалок района відкинути, а з другого боку додати кавалок рівноважний, а 2° через кінцї одного боку можна завсїгди повести лук кола о середочцї на оси xx, а так само через кінцї відповідного спряженого боку; через се повстануть між одним боком спряженим а луком кола і між другим боком спряженим а другим луком рівноважні поля, з яких одно можна відкинути; сим способом район дістане самі колові обмеженя. В той сам спосіб можна район, якого боки ся перетинають самі, замінити на район о боках неперетинаючих ся.

Район так уформований є зложений з самих кіл нормальних, зве ся проте після Pincaré районом нормальним.

3. Возьмім тепер в так унормованім районі два боки спряжені $\lambda_p = AB$ і $\lambda_{-p} = CD$, то:

$$f_{-p}(\lambda_p) = \lambda_{-p}.$$

Точції z на боку λ_p відповідає на λ_{-p} точка t так, що:

$$t = f_{-p}(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \text{ дїйсне})$$

або як в уст. 5 попередного роздїлу:

$$z' = t - \frac{a}{c} = - \frac{1}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} = - k^2 \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.$$

Наколи напишемо:

$$z + \frac{d}{c} = r_z e^{\varphi_z i} \quad z' = r_t e^{\varphi_t i}$$

то:

$$r_z e^{\varphi_z i} = - k^2 e^{-\varphi_t i}$$

а з відси — так як части другорядні мусять бути рівні — є:

$$\varphi_z = \pi - \varphi_t, \quad \pi = \varphi_t + \varphi_z.$$

З відси слїдує, що наколи z порушає ся від A до B, то на відворот t порушає ся від D до C, отже **два спряжені боки відповідають собі напрямами противними**; вершкови A відповість вершок D, вершкови B відповість вершок C.

4. Перейдім тепер до уґруповання вершків (очевидно будем узглядняти лиш райони нормальні).

Возьмім якийсь район R_0 (Фіґ. V), то вершки, які роздїляють два боки першого рода (пр. B, C, D) називаємо **вершками першого рода**; вершки на оси xx, де сходять ся два боки першого рода (пр. E) є **вершками другого рода**, а вершки, де сходять ся боки першого і другого рода (пр. F, G, H, A) є **вершками третого рода**.

Наколи ми вийдем від якогось вершка першого рода (пр. B) і зачнем іти по якімсь боцї в якімсь напрямі, то по спраженім боцї треба іти в напрямі противнім; відповідні вершки — як знаєм — відповідають собі в противнім порядку, тож переходячи так вершки першого рода вернем знов до початкового вершка. Ті вершки першого рода, які ми в тім окружаню району перейшли, утворять **цикль першого рода, все замкнений**.

Наколи вийдем від вершка другого рода (пр. E), то всї відповідаючі собі вершки є або другого або третого рода. Наколи вершків третого рода не ма зовсїм, то і ту цикль вершків — який буде зложений з самих вершків другого рода т. є. цикль другого рода буде замкнений. Наколиж є вершки третого рода, то процес окружаня района мусить десь задержати ся, бо боки другого рода собі не відповідають, до початкового вершка не вернемо і дістанемо отвертий цикль третого рода.

Наколи боків другого рода є l, то боки ті мають 2l вершків, на цикль іде по два вершки, отже циклїв третого рода є тілько, кілько район має боків другого рода.

5. Перейдім тепер до кутів району і то до кутів при вершках першого рода $\left(\text{бо кут при вершку другого рода є } 0, \text{ при вершку третого рода } \frac{\pi}{2}\right)$.

Ту докажемо важне твердженє, яке подав Poincaré, а іменно, що сума кутів циклю першого рода в районї основнім мусить рівнати ся 2π, подїленому через число цїле.

Наколи в районї R_0 (Фіґ. VI) вершки першого рода є A_1, A_2, A_3, A_4, , які творять цикль замкнений (A_1, A_2, A_3, A_4 —— A_1), то бокови λ_α, який виходить з A_1 відповідати-ме спряжений бік $\lambda_{-\alpha}$, що кінчить ся в a_2, так що $f_\alpha\,(\lambda_{-\alpha}) = \lambda_\alpha$[1]; λ_α належить рівночасно до сусїдного району R_α (до котрого і A_1 належить). Наколи другий бік, що виходить з A_2, є λ_r, то він через субституцию f_α перейде на бік виходячий також з A_1, а належачий до району R_α, так що $f_\alpha\,(R_0) = R_\alpha$, причім $\sphericalangle A_2$ відтворить ся в районї R_α при вершку A_1, бо субституция є — як знаєм — ізоґональна.

Подібно через субституцию f_β перейде район R_0 на сусїдний район R_β, а третий кут при третім вершку цикля A_3 відтворить ся при вершку A_1 і т. д., аж вкінци по довершеню ряду субституций і по вихіснованю цїлого циклю вернем назад до S_0, так що $f_\alpha\, f_\beta\, f_\gamma \cdots (R_0) = U\,(R_0) = R_0$.

Наколи перейшовши цїлий цикль (A_1, A_2, A_3 — A_1) не дістанем R_0, але $U\,(R_0) = R_\mu$, де R_μ має вершок A_1, то будем доконувати тілько оборотів, аж прийдем до R_0, так що:

$$U^p\,(R_0) = R_0\,. \tag{19)}$$

---

[1] Кляйн доказав, що субституция заміняюча λ_α на $\lambda_{-\alpha}$ мусить бути все параболїчна, а нїколи гіперболїчна.

Очевидно, що тепер — так як нїякі два кути не накривають ся — є:

$$(A_1 + A_2 + A_3 + \text{—} + A_n)\, p = 2\pi,$$

отже:

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu = \frac{2\pi}{p} \qquad 20)$$

і тверджене Poincaré є доказане.

6. З реляциї 19) виходить, що:

$$U^p = 1.$$

Є *се реляция основна ґрупи*; таких реляций є стілько, кілько циклїв першого рода є в основнім районї.

Субституция U є елїптична о періодї p, отже *ґрупа в окруженю вершків першого рода не тратить нетяглости.*

Для циклю другого рода є очевидно:

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu = 0 \quad \text{або:}$$

$$\sum A_\nu = \frac{2\pi}{p} \Big\}_{p=\infty},$$

с. з. що докола вершків другого рода маємо $pn = \infty$ районів, отже *в окруженю вершків другого рода ґрупа тратить нетяглість.*

Для циклю третого рода лиш кути скрайні є по $\frac{\pi}{2}$, кути середні (в вершках другого рода) є 0, отже для такого цикля

$$\sum A_\nu = \pi,$$

значить ся в кождім вершку є скінчене число районів, отже *в окруженю вершків третого рода ґрупа задержує характер нетяглий.*

7. Наколи зреасумуєм усе, то дістанемо ось-що:

Основний район специяльної ґрупи Фукса є обмежений луками кіл о середоточках на оси xx; декотрі з тих боків можуть бути відтінками оси xx або відтінками до неї прямовісними. Боки першого рода виступають в числї паристім і є парами спряжені (λ_p і λ'_{-p}), так що $f_p(\lambda_{-p}) = \lambda_p$. Така субституция зміняє R_0 на R_p, віддїлений від R_0 боком λ_p. Вершки дїлять ся на циклї трох родів: в циклю першого рода сума кутів є $\frac{2\pi}{p}$, в циклю другого рода 0, третого рода π. Районы одержані з R_0 не прикривають анї R_0 анї себе (навіть в части), між ними нема перерви, а ґрупа, що належить до R_0, є нетягла над осию xx, а лиш там, де R_0 має цикль другого рода, тратить на оси xx в вершках того циклю нетяглість. Субституцвї сеї ґрупи не нарушають оси xx, тож коли R_0 має вершки на оси xx, то і другі райони мусять мати вершки на оси xx; наколи R_0 не має вершків на оси xx, то і иньші райони не мають їх також.

Наколи будем мати якийсь район, котрого боки є луками кіл з середоточками на оси xx, а покаже ся, що хотяйби для одного циклю першого рода сума кутів була $\frac{2\pi}{p}$, але p не було би числом цїлим, то до такого району ґрупа не належить.

Загальні ґрупи Фухса.

Дотепер узглядняли ми ґрупи утворені з субституций основних: $S_\nu = \left(z, \frac{a_\nu z + b_\nu}{c_\nu z + d_\nu}\right)$, де $a_\nu b_\nu c_\nu d_\nu$ були числа дїйснї о модулї 1; (наколи числа ті були цїлї, ґрупа була модулова). Були се специяльні ґрупи Фухса. — Наколи тепер введемо посвоячене площ

21) $t = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, де α, β, γ, δ є числа зложені і в повисшій ґрупі вставимо субституцию 21) за z, то дістанемо загальну ґрупу Фухса і площа z відтворить ся на площи t.

Наколи возьмем ґрупу утворену з субституций S_ν (ν і ту скінчене число), але що до сочинників a_ν, b_ν, c_ν, d_ν не зробимо нїякого застереженя (отже є се в загалї числа зложені) і до сеї ґрупи застосуєм субституцию 21), то дістанем зовсїм загальну ґрупу, яку Poincaré зве ґрупою Кляйна. Студия тих загальних ґруп є дуже трудна; перевів еї по части Poincaré при помочи метод анальоґічних до метод ґеометриї неевклїдової о трох розмірах¹). В звязи з такими загальними ґрупами стоїть поділ півпросторони на райони

---

¹) Пор. Poincaré: Mémoire sur les groupes kleinéens (Acta matem. m. III).

о трох розмірах 1); но ми в се не входимо, а перейдем до загальних ґруп Фухса.

1. Очевидна є річ, що загальна ґрупа Фухса перетворює вісь xx на коло на площи t. Через добір α, β, γ, δ можна вісь xx заміннти на коло о лучу 1, а о середоточцї $t = 0$ так, щоби $t = 0$ відповідало якійсь точцї над осию xx на площи z. Тодї райони R_0, R_1,   пл. z перейдуть на райони R_0', R_1',   , що ся будуть містити в серединї кола; коло се називає Фухс колом граничним, а Кляйн головним.

Ґрупа кола того не нарушує, лиш в єго серединї переводить подїл на райони; поза колом дістанемо подїл, який повстане через відбите подїлу внутрішного в колї граничнім.

Кождий район R_0' R_1',   має боки колові, ортоґональні до кола головного; і тут R_0' має боки першого і другого рода і вершки першого, другого і третого рода; так само є ту циклї трох родів.

Після сих циклїв дїлить Poincaré ґрупи на 7 родин:

I.	родина:	R_0	має лиш циклї	$I^{ого}$	рода.
II.		R_0		$II^{ого}$	
III.		R_0		$III^{ого}$	
IV.		R_0	„	$II^{ого}$ і $III^{ого}$	
V.	„	R_0		$I^{ого}$ і $III^{ого}$	
VI.	„	R_0		$I^{ого}$ і $II^{ого}$	
VII.		R_0		всїх трох родів.	

Наколи в родинї, де є циклї першого рода, є в всїх циклях $p = 1$, то родина є після Poincaré першого степеня, наколи хоч би одно $p > 1$, то родина є другого степеня.

Родини, де не ма циклїв II рода, нїде не тратять нетяглости, противно родини, де такі циклї є, тратять в деяких точках кола головного (зглядно оси xx) характер нетяглости.

2. Возьмім тепер район R_0 з родини I, II або VI, то спряжений з ним район R_0' лежить під осию xx і не має з ним вспільного боку, — бо район R_0 не має боків другого роду — R_0 і R_0' не творять проте цїлости.

R_0 має лиш 2n боків першого рода і q циклїв замкнених (першого і другого рода). Наколи-мем уважати R_0 за поверхню

---

1) Пор. Picard: Traité d'Analyse I p. 461.

пластичну (Фіґ. VII), то можна єї позгинати і постягати так, щоби боки спряжені відповідними точками впали на себе (то два боки утворять одну лїнїю); дістанемо тодї поверхню, а на нїй n лїнїй, які утворять одно пасмо розгалужене незамкнене; точки, де сходять ся кілька лїнїй, є вершками, а є їх тілько, що циклїв. Лїнїя AB складаєсь з n гранок і q вершків, а що она є незамкнена, то поверхня, на яку перейшов район R_0, є поверхнею з одним ограниченєм (обмеженєм), а єї спійність (connexion) є:

$$N = 2p + 1$$ [1],

де p (число цїле) є рядом (клясою).

Зауважмо розширене твердженє Euler'а:

$$S + W = K + 2 - 2p$$ [2].

де S є число стін, K гранок, W вершків, то для R_0 $S = 1$, $K = n$ $W = q$, отже:

$$1 + q = n + 2 - 2p$$

$$p = \frac{n - q + 1}{2} \qquad 22)$$

Така є кляса родини I., II. і VI.

Для родини III., IV., V., VIII. район R_0 має боки другого рода, отже з районом спряженим R_0' творить одну цїлїсть; Poincaré бере тому R_0 і R_0' за один район і обчисляє єго клясу (ряд), анальоґічно як висше, з тою зміною, що ту лїнїя AB буде замкнена, отже $S = 2$, гранок K є $2n + m$ (n гранок з R_0, n з R_0', m боків другого рода), вершків W є ту $2q + m$ (q з R_0, q з R_0' і m циклїв третого рода); отже ту з твердженя Euler'а вийде:

$$p = \frac{2n - 2q}{2} \qquad 23)$$

і се є кляса (ряд) родин III., IV., V., VII.

3. Наколи возьмем район з родини I., який цїлий лежить над осию xx, то точки єго при помочи субституций ґрупи можна приближати без кінця до оси xx, так що в родинї I. райони дуже густо громадять ся над осию xx, але не на оси xx; вісь xx є проте цїла лїнїєю особливою тої родини. Те саме буде і для ро-

---

[1] Пор. Appell et Goursat: Théorie des fonctions algébriques, ст. 229.

[2] ibid. ст. 231.

дини II. і VI., які лиш вершками другого рода дотикають оси, бо довкола вершків другого рода громадить ся безконечне число районів, а в партиях вільних можна також безконечно приближати ся до оси xx.

В иньших родинах, де є боки другого рода, є на оси xx точки особливі, але ті є лиш ізольовані, бо на боках другого рода не ма точок особливих.

Функциї Фухса.

Є се функциї автоморфні, що не зміняють ся, наколи до їх арґументу застосуєм субституциї загальної ґрупи Фухса. Анальоґічно функциї автоморфні з огляду на ґрупу Кляйна будуть функциями Кляйна.

1. Возьмім коло головне о середоточці $z = 0$; в колї тім возьмім район R_0 і в нїм точку z, то наколи довкола того z зачеркнемо коло k_0 (в районї R_0), то єму в відповіднім районї R_s відповість k_s довкола відповідної точки z_s.

А що: $$z_s = \frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}, \text{ де } \begin{vmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ \gamma_s & \delta_s \end{vmatrix} = 1,$$

то: $$\frac{dz_s}{dz} = \frac{1}{(\gamma_s z + \delta_s)^2}, \text{ а:}$$

$$\frac{|dz_s|}{|dz|} = \frac{1}{|\gamma_s z + \delta_s|^2} = \mu_s \qquad 24)$$

де μ_s є лїнїове збільшенє елементарних лучків $|dz|$ і $|dz_s|$ через субституцию (z, z_s). Квадрати тих елементів є елементами поверхнї, начеркненої в z і z_s, отже μ_s^2 є збільшенєм елементів поверхний в відповідних точках. Наколи отжеж возьмем:

$$\min \mu_s = m_s,$$

то поверхнї колес:

$$\frac{k_s}{k_0} > m_s^2. \qquad 25)$$

$z_s = \frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s} = \infty$ для $z = -\frac{\delta_s}{\gamma_s}$, отже субституция $\left(z = -\frac{\delta_s}{\gamma_s}\right)$ переносить точку в безконечність, а що $z_s = \infty$ лежить поза колом головним, а нїяка субституция ґрупи не переносить точки поза коло головне, то точка $z = \infty$ і точка $z = -\frac{\delta_s}{\gamma_s} = P_s$ лежить поза колом головним; до кождої субсти- S_s належить така точка P_s.

2. Возьмім коло головне (K) і коло k_0 (Фіґ. VIII) довкола точки z, а поза колом точку P_s, то тодї збільшене для точки z є:

$$\mu_s = \frac{1}{|\gamma_s|^2 \left| z + \frac{\delta_s}{\gamma_s} \right|^2} = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (z P_s)^2}$$

Для иньшої точки z' в колї k_0 є збільшене:

$$\mu_s' = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (z' P_s)^2},$$

а що лїнїя PP_s з усїх подібних лїнїй є найбільша, то:

$$m_s = \min \mu_s = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (PP_s)^2},$$

а
$$M_s = \max \mu_s = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (RP_s)^2},$$

отже:
$$\frac{M_s}{m_s} = \frac{(PP_s)^2}{(RP_s)^2} \tag{26}$$

Но понеже — як се очевидно —

$$\frac{PP_s}{RP_s} < \frac{GH}{JH} = \sqrt{c} \text{ (стала)},$$

то:

$$\frac{M_s}{m_s} \leqq c, \quad M_s \leqq m_s c,$$

$$\mu_s < M_s \leqq cm_s,$$

а вставивши відповідні вартости дістанемо:

$$\frac{1}{|\gamma_s z + \delta_s|^2} \leqq cm_s, \text{ або:}$$

$$\frac{1}{|\gamma_s z + \delta_s|^4} < c^2 \frac{k_s}{k_0},$$

а звідси:

$$\sum{}' \left| \gamma_s z + \delta_s \right|^{-4} \angle \frac{c^2}{k_0} \sum{}' k_s \quad (\gamma_s = 0 \text{ опускаєм}), \qquad 27)$$

а що сума по правім боцї дає поверхню майже цїлого кола головного K, то сума по лївім боці, а тим більше сума $\sum{}' \left| \gamma_s z + \delta_s \right|^{-2m}$ $(m = 2, 3, 4, —)$ є беззглядно збіжна.

Цїле те розумоване можна розширити і на случай $\gamma_s = 0$, т. є. для $P_s = \infty$ (якому в колї головнім відповість $z = 0$), а тодї повна сума

$$\sum_s \left| \gamma_s z + \delta_s \right|^{-2m}$$

є беззглядно збіжна для всїх точок кола K.

По за колом сума та стаєсь рівна ∞ в точках P_s, а в иньших точках $z \gtrless P_s$ сума та має значіньє і є збіжна. Того доказувати не будем (се є майже очевидне, бо поодинокі вирази суми $\left| \gamma_s z + \delta_s \right|^{-2m}$ будуть для z по за колом k меньші як для z в колї).

На обводї кола K сума та єсть збіжна для родин III., IV., V., VII. кромі точок дїйсно особливих, де стає ся розбіжна, бо в їх безконечно близькім окруженю находять ся точки P_s. Що так є, легко можна доказати.

Най ξ буде вершком з циклю другого рода (на обводї кола K), то там збігає ся безконечно много районів; район R_0 переходить на R_s — як знаєм — через субституцию параболїчну (Кляйн) т. є.:

$$\frac{1}{t - \xi} = \frac{1}{z - \xi} + \alpha_\sigma \qquad \sigma = 1, 2, 3, — \qquad 28)$$

Наколи субституцию ту будемо ітерувати, дістанемо з R_0 цїлий ряд районів, які всї мають вершок ξ. Для $t = \infty$ є $z = P_s$, а тодї з 28) слїдує:

$$z = P_s = \xi - \frac{1}{\alpha_\sigma}.$$

Наколи субституцию ітеруєм без кінця, то α_σ росте in inf., отже довкола ξ громадить ся безконечне число тих P_s. Q. e. d.

3. Poincaré узагальняє[1]) сей ряд в сей спосіб, що бере довільну функцию рациональну $H(z)$ о місцях ∞-них $a_1\ a_2 — a_p$.

---

[1]) Пор.: Math. Annalen, т. XIX.

Возьмім функцию $H\left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}\right)$, де $\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \beta_s}$ є субституция ґрупи, то місця ∞-ні сеї функциї є:

$$a_\mu = \frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s} \quad \mu = 1, 2, \cdots p.$$

Наколи
$$\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s} = f(z),$$

то навідворот:

$$z = \Big[f_s(a_\mu) \Big]^{-1} = f_{-s}(a_\mu).$$

f_{-s} є також субституция ґрупи. Функция $H\left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}\right)$ — а є їх безконечне число — утворена з огляду на всї субституциї ґрупи має місця ∞-ні $f_s(a_\mu)$.

Poincaré творить тепер функцию:

$$\Theta(z) = \sum_s H\left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}\right) \left(\gamma_s z + \delta_s \right)^{-2m} \qquad 29)$$

яку називає функцию Θ — Фухса або Кляйна після того, чи ґрупа є ґрупою Фухса чи Кляйна.

На всїх місцях z і їх окруженях, таких що $z \gtrless a_\mu$, $z \gtrless f_s(a_\mu)$ і $z \lesseqgtr P_s$ функция ся є збіжна беззглядно і одностайно, бо все можна зробити, щоби решта від далекого s почавши була меньша як ε (довільно мале). Точки дїйсно особливі ґрупи (на обводї кола головного) є дїйсно особливими точками функциї $\Theta(z)$. — В деяких случаях можна точки a_μ і P_s так дібрати, щоби всї безконечности повідпадали, а тодї функция $\Theta(z)$ не має безконечностних місць анї в колї головнім анї по за ним.

Poincaré дїлить функциї Θ на родини після того, який район до них належить. Для функций Θ родини I., II., VI. є обвід кола головного лїнїю особливою — як каже Poincaré, для прочих родин находять ся на обводї кола головного лиш ізольовані місця особливі.

Возьмім функциї Θ родини I., II., VI.; функций тих по за коло перевести не можна, а що точці z по за колом відповідає точка $\frac{1}{z}$ в колї, то маєм властиво дві функциї в колї K: $\Theta(z)_K$ і $\Theta\left(\frac{1}{z}\right)_K$.

Противно функциї Θ прочих родин можна переводити по за коло, а функция $\Theta(z)_z$ дефініює одну функцию на площи z.

Наколи місце зерове функциї находить ся в районї R_0, то в R_0 не ма до него рівноважного місця зерового. Наколи місце зерове находить ся на боцї першого рода, то рівноважне місце лежить також на боці першого рода; з таких двох місць зачисляєм до району лиш одно. Так само, коли місцем зеровим є вершок першого рода, а в ним сходить ся r районів, а місце зерове є степеня n, то до одного района зачисляєм місце зерове степеня $\frac{n}{r}$.

В загалї Poincaré приймає звичайно вершки першого рода за місця зерові, вершки другого рода за місця зерові першого степеня.

4. Возьмім функцию $\Theta(z)_K$ і належачий до неї район R_0, який обводу кола головного дотикає лиш в декотрих точках. Повідти наймо на хвилю вершки R_0 маленькими лучками і приймім після Poincaré, що по боках району не ма місць зерових, то тодї остануть лиш ті місця зерові для функциї Θ, які лежать в самім районї. Тодї — як з теориї Cauchy звісно — є, наколи m_0 є слількість місць зерових, а m_∞ скількість місць безконечностних в контурі:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}\,dz = m_0 - m_\infty = E',$$

де за контур приймаєм R_0 з пообтинаними верщками. Наколиж в вершках району є ν місць зерових, то для функциї $\Theta(z)_K$ вийде ріжниця місць зерових і безконечностних:

$$E = E' + \nu,$$

що по обчисленю інтеґрала буде мало — після Poincaré — загальний вид:

$$E = m\left[n - 1 - \sum\frac{1}{p}\right] \tag{30}$$

де m є число, що характеризує функцию Θ (пор. 29), n скількість пар боків спряжених, p число, відносяче ся до поодиноких циклїв (порівнай рівн. 20); сума відносить ся до всїх циклїв.

Для функциї $\Theta(z)_z$ (родин III., IV., V., VII.) за район треба брати — як знаєм — R_0 і спряжений з ним R_0', то ту ріжниця:

$$E = 2m\left[n - 1 - \sum\frac{1}{p}\right] \tag{31}$$

5. Піддаймо функцию $\Theta\,(z)$ субституциї ґрупи:

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

то:

$$\frac{\alpha_s \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + \beta_s}{\gamma_s \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + \delta_s} = \frac{\alpha_\sigma z + \beta_\sigma}{\gamma_\sigma z + \delta_\sigma},$$

а тодї по підставленю в 29) випаде:

$$\Theta\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \left(\gamma z + \delta\right)^{2m} \Theta\,(z) \tag{32)}$$

значить ся функция Θ є лиш функциєю псевдоавтоморфною.

Возьмім однак дві функциї Θ_1 і Θ_2, що належать до тої самої ґрупи, то:

$$\Theta_1\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \left(\gamma z + \delta\right)^{2m} \Theta_1\,(z)$$

$$\Theta_2\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \left(\gamma z + \delta\right)^{2m} \Theta_2\,(z).$$

Їх квот:

$$\frac{\Theta_1\left(\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)}{\Theta_2\left(\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)} = \frac{\Theta_1\,(z)}{\Theta_2\,(z)} = F\,(z) \tag{33)}$$

Та функция $F(z)$ є проте функциєю автоморфною.

Очевидно що і функциї автоморфні ділити ся будуть на родини, залежно від родини функций Θ.

Наколи з тої самої ґрупи возьмем функциї

$$\Theta_1\ \Theta_2 \qquad \Theta_s \text{ з параметрами } m_1\ m_2 \qquad m_s$$

і функциї $\overline{\Theta}_1\ \overline{\Theta}_2 \qquad \overline{\Theta}_s$ з параметрами $\overline{m}_1\ \overline{m}_2 \cdots\cdots \overline{m}_s$ і утворимо квот їх добутків, то:

$$\frac{\Theta_1\,\Theta_2 \cdots\cdots \Theta_s}{\overline{\Theta}_1\,\overline{\Theta}_2 \qquad \overline{\Theta}_s}\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \left(\gamma z + \delta\right)^{2\left(\sum\limits_{\nu=1}^{s} m_\nu - \sum\limits_{\nu=1}^{s} \overline{m}_\nu\right)} \frac{\Theta_1\,\Theta_2 \qquad \Theta_s}{\overline{\Theta}_1\,\overline{\Theta}_2 \cdots\cdots \overline{\Theta}_s}\,(z)$$

Наколи доберемо $\Sigma\, m_\nu = \Sigma\, \overline{m}_\nu$, то сей квот станесь загальнїйшою функциєю автоморфною.

Місця зерові чисельника і безконечностні знаменника є місцями зеровими функциї автоморфної, а місця безконечностні чисельника та зерові знаменника є її місцями безконечностними.

До функциї Θ_ν належить E_ν, до $\overline{\Theta}_\nu$ $\overline{E}_\nu$,

де:

$$E_\nu = m_\nu \left[n - 1 - \sum \frac{1}{p} \right]$$

$$\overline{E}_\nu = \overline{m}_\nu \left[n - 1 - \sum \frac{1}{p} \right]$$

В чисельнику: $\Sigma E_\nu = M_0 - M_\infty$

В знаменнику: $\Sigma \overline{E}_\nu = \overline{M}_0 - \overline{M}_\infty$

де ті M мають значінє як повисше. Ріжниця:

$$\Sigma E_\nu - \Sigma \overline{E}_\nu = (M_0 + \overline{M}_\infty) - (\overline{M}_0 + M_\infty) =$$

= сума місць зерових — сума місць безконечностних =

$$= \left(n - 1 - \sum \frac{1}{p} \right) \left[\Sigma m_\nu - \Sigma \overline{m}_\nu \right] = 0.$$

Кожда функция має проте ту власність, що в районї R_0 сума місць зерових рівнає ся сумі місць безконечностних.

Кожда функция автоморфна приймає кожду якунебудь вартість в районї R_0 тілько разів, кілько вартість 0 або ∞.

Бо наколи $F(z)$ є функциєю автоморфною, то і $f(z) = F(z) - C$ є такою функциєю; $f(z)$ стаєсь тілько разів безконечностию що $F(z)$, пр. n разів, то і зером стає n разів, т. є. $F(z)$ приймає вартість C n разів.

6. Возьмім дві функциї автоморфні, що належать до тої самої ґрупи т. є. $F_1(z)$ і $F_2(z)$. Функция $F_1(z) = C$ на місцях $z_1\, z_2 \cdots z_m$ району R_0; на тих місцях приймає функция $F_2(z)$ вартости $C_1\, C_1 \quad C_m$, ріжні між собою. Видко отже що до одної вартости функциї $F_1(z)$ належить m вартостий функциї $F_2(z)$, отже $F_2(z) = y$ є m-вартостнею функциєю функциї $F_1(z) = x$. Наколи сю залежність представимо рівнанєм:

$$y^m + g_1(x)\, y^{m-1} + \quad + g_m(x) = 0.$$

то рівнане се буде альґебраїчне, а y *буде альґебраїчною функциєю* x. Відворотно до одної вартости y належить n вартостий функциї x, x *є проте альґебраїчною функциєю* y.[1])

Між двома функциями автоморфними з тої самої ґрупи заходить проте все неприводне рівнане альґебраїчне:

$$G\left(x^{(n)}\, y^{(m)}\right) = 0. \qquad 35)$$

Так як всї вартости функций x і y находять ся в районї R_0, а функциї ті є однозначними функциями кождої точки z, а район R_0 дасть ся — як знаєм — замінити на поверхню ряду p, то після теориї поверхний Riemann'а мусить бути рівнане 35) *ряду* p.

Наколи возьмем три функциї автоморфні тої самої ґрупи:

$$x = F_1(z),\ y = F_2(z),\ X = F_3(z),$$

то після попередного будуть істнувати реляциї:

$$G_1(Xx) = 0$$

$$G_2(Xy) = 0.$$

Рівнаня ті яко неприводні не мають повтаряючих ся коренів X; а коли так є, то сей корінь є рациональною функциєю сочинників обох рівнань, отже:

$$X = R(xy) \qquad 36)$$

Кожда автоморфна функция є проте рациональною функциєю яких-небудь двох функций автоморфних з тої самої ґрупи.

7. a. Возьмім тепер функцию явтоморфну:

$$F(t) = F\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = F(z),$$

то через ріжничковане дістанемо $(\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$

$$\frac{F'(t)}{(\gamma z + \delta)^2} = F'(z)$$

а з відси:

$$\Big[\,F'(t)\,\Big]^m = \Big(\gamma z + \delta\Big)^{2m} \Big[\,F'(z)\,\Big]^m,$$

---

[1]) Пор. Biermann: Zur Theorie der Fuchsschen Functionen (Sitz. Ber. der k. Akad. der Wiss. in Wien Bd. XCII, Abth. II).

а що:

$$\Theta(t) = \left(\gamma z + \delta\right)^{2m} \Theta(z),$$

то квот:

$$\frac{\Theta(t)}{\left[\ F'(t)\ \right]^m} = \frac{\Theta(z)}{\left[\ F'(z)\ \right]^m} =$$

$$= R\left(F(z)\ F_1(z)\right)$$

(після 36), бо сей добуток є функциєю автоморфною).

Отже функция псевдоавтоморфна виражає ся в сей спосіб через дві функциї автоморфні, що:

$$\Theta(z) = \left[\ F'(z)\ \right]^m R\,(F, F_1) \tag{37}$$

б. Знаєм, що $G\,(F_1\,F_2) = 0$.

Звідси через ріжничковане вийде:

$$\frac{\partial G}{\partial F_1}\,d\,F_1 + \frac{\partial G}{\partial F_2}\,d\,F_2 = 0,$$

або:

$$\frac{d\,F_2}{d\,F_1} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial F_1}}{\frac{\partial G}{\partial F_2}} = R_1\,(F_1\,F_2),$$

де R_1 є функциєю рациональною, отже між двома функциями автоморфними заходять звязь:

$$\frac{d\,F_2}{d\,F_1} = R_1\,(F_1\,F_2) \tag{38}$$

в. Для функциї автоморфної $F\,(z)$ маєм:

$$F'(t) = (\gamma z + \delta)^2\,F'(z)$$

Наколи збудуємо вираженє:

$$\frac{F'''(t)}{F'(t)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(t)}{F'(t)}\right)^2,$$

яке Cayley назвав **шварцияном**, а яке Кляйн значить: $\left[\,F(t)\,\right]_t$, а Forsyth (Theory of Functions) через $\left\{F\,(t),\ t\right\}$ то дістанемо:

$$\frac{F'''(t)}{F'(t)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(t)}{F'(t)}\right)^2 = \left(\gamma z + \delta\right)^4 \left[\frac{F'''(z)}{F'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)^2\right],$$

а що:

$$\left[F'(t)\right]^2 = \left(\gamma z + \delta\right)^4 \left[F'(z)\right]^2,$$

то через подїлене обох тих рівнань дістанемо:

$$\frac{\left[F(t)\right]_t}{\left[F'(t)\right]^2} = \frac{\left[F(z)\right]_z}{\left[F'(z)\right]^2} \qquad 39)$$

Шварциян функциї автоморфної, подїлений через квадрат походної сеї функциї, є функциєю автоморфною.

А що між двома функциями артоморфними все заходить звязь альґебраічна, тому кожда функция автоморфна сповняє рівнане ріжничкове третого ряду:

$$G\left(F(z), \frac{\left[F(z)\right]_z}{\left[F'(z)\right]^2}\right) = 0. \qquad 40)$$

8. Poincaré впроваджує далї[1]) так звані функциї Z — Фухса. Називає він іменно n функций:

$$Z_1(z), Z_2(z), \qquad Z_n(z)$$

тодї функциями Z Фухса, наколи сповняють реляцию:

$$Z_\lambda\left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}\right) = \overset{(s)}{A}_{1\lambda} Z_1(z) + \overset{(s)}{A}_{2\lambda} Z_2(z) + \qquad + \overset{(s)}{A}_{n\lambda} Z_n(z) \qquad 41)$$

де визначник сталих рівнає ся 1, а дана субституция є взята з ґрупи G Фухса. (Наколи ґрупа є ґрупою Кляйна, то ті функциї будуть функциями Z-Кляйна).

Ґрупа H субституций лїнїйних:

$$y'_\lambda = \overset{(s)}{A}_{1\lambda} y_1 + \overset{(s)}{A}_{2\lambda} y_2 + \cdots\cdots \overset{(s)}{A}_{n\lambda} y_n$$

є очевидно ізоморфна до ґрупи G Фухса.

---

[1]) Пор. Math. Annalen. т. XIX.

Возьмім тепер яке-небудь рівнанє ріжничкове лінїове:

$$\frac{d^n v}{dx^n} + P_{n-2} \frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + P_{n-3} \frac{d^{n-3} v}{dx^{n-3}} + \cdots + P_1 \frac{dv}{dx} + P_0 v = 0. \quad 42)$$

— де через відповідну трансформацию P_{n-1} ідентично стало ся 0 що всегда дасть ся зробити — і де сочинники P є функциї рациональні двох арґументів x і y, звязаних рівнанєм альґебраісним:

$$G(xy) = 0,$$

і приймім, що $a_1 \, a_2 \cdots a_n$ є точками особливими рівнаня $G(xy) = 0$, а безконечностними виражень P.

Наколи положим $x = F(z)$, де $F(z)$ є функциєю Фухса, істнуючою лиш в колї K — що як передше сказано можна зробити, — то тодї і y є такою самою функциєю Фухса, а n інтеґралами рівнаня 42) є функциї $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_n(z)$, які є однозначні і які істнують лиш в колї K. Інтеґрали ті — так як і $F(z)$ — можна розвинути на ряди збіжні після арґументу $(z - z_0)$, а їх сочинники способом зворотним (recurrent) обчислити. Інтеґрали ті — як легко пізнати — є однак функциями Z-Фухса, маєм отже твердженє:

Кожде рівнанє ріжничкове лїнїове з сочинниками альґебраічними дасть ся з'інтеґрувати через функциї Z-Фухса (подекуди через функциї автоморфні Фухса).

Результат сей очевидно не є одинокий. Ми могли місто x вставити безконечне число иньших функций Фухса, а навіть функций Кляйна і булибисьмо дістали на інтеґрали рівнаня 42) безконечне число системів функций Z-Фухса або Z-Кляйна. Скількість інтеґралів рівнаня 42) за ужитєм нових змінних перестуцних стаєсь проте безконечно велика.

9. Постараймо ся тепер о представленє тих функций Z, анальоґічно як функциї Фухса представили ми при помочи фувкций Θ.

Най $\qquad a^{(s)}_{1\lambda}, \; a^{(s)}_{2\lambda}, \qquad a^{(s)}_{n\lambda}$

будуть мінорами визначника, утвореного з величин $\overset{(s)}{A}$.

Приймім тепер, що обі ґрупи G і H є дані і возьмім n функций рациональних $H_1(z)$, $H_2(z)$, $\cdots H_n(z)$ — як в уступі 3. сего роздїлу. Збудуймо після Poincaré n рядїв:

$$\Phi_\lambda(z) = \sum_s \sum_{t=1}^{n} a^{(s)}_{\lambda t} \, H_t\left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}\right)\left(\gamma_s z + \delta_s\right)^{-2m} (\lambda = 1, 2, \cdots n), \quad 34)$$

то ті ряди для достаточно великого m є збіжні і мають очевидне свойство:

$$\Phi_{\lambda}\left(\frac{\alpha_s z+\beta_s}{\gamma_s z+\delta_s}\right)=\sum_{t=1}^{n}\overset{(s)}{A}_{t\lambda}\,\Phi_t(z)\left(\gamma_s z+\delta_s\right)^{2m} \qquad 44)$$

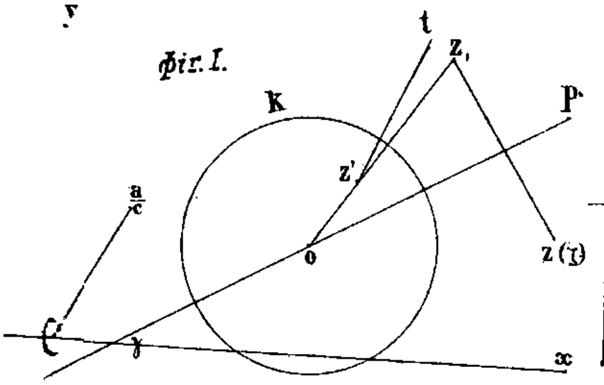
Наколи утворимо тепер n функций: $\frac{\Phi\lambda(z)}{\Theta(z)}$, де Θ є функциєю Θ-Фухса, то ті функциї будуть функциями Z-Фухса, так що:

$$Z\lambda(z)=\frac{\Phi\lambda(z)}{\Theta(z)} \qquad 45)$$

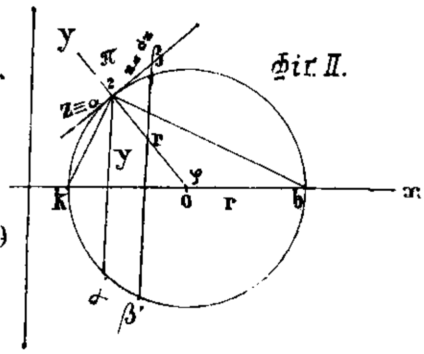
Наколи возьмем який-небудь систем функций Z, то можна доказати, що функциї ті дадуть ся всегда виразити раціонально через певне число рядів анальоґічних до $\Theta(z)$ і рядів форми 43).

На тім кінчимо короткий перегляд сеї інтересної теориї; очевидно сей начерк далекий є від точного та повного представленя теориї функций автоморфних, а має лиш на цїли запізнати та впровадити читачів в самі ессенциональні єї моменти.

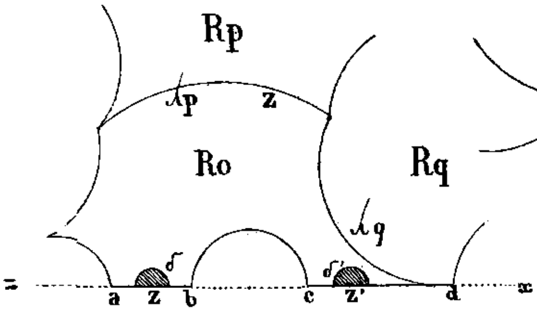
Тернопіль, в липню 1900.



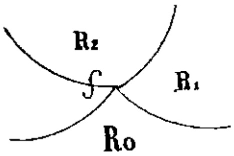
Фiг. I.



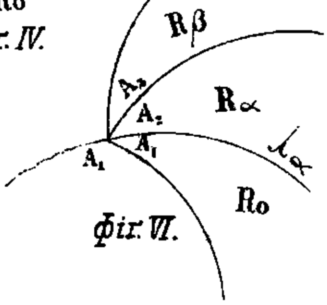
Фiг. II.



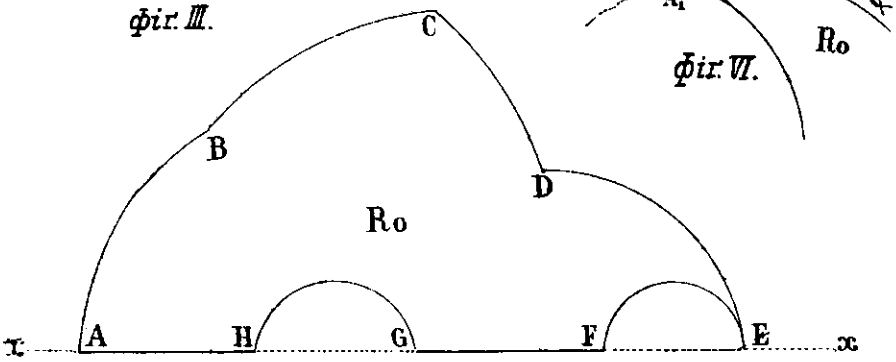
Фiг. III.



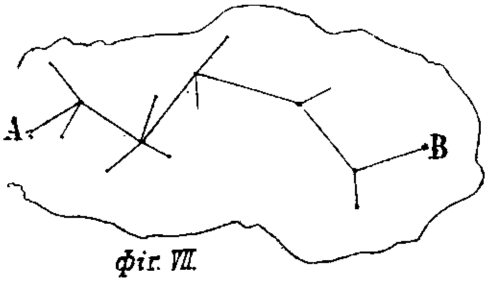
Фiг. IV.



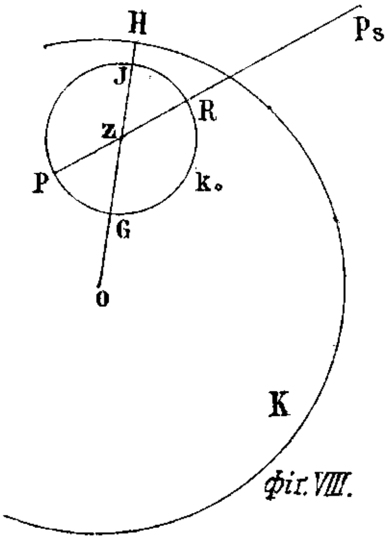
Фiг. VI.



Фiг. V.



Фiг. VII.



Фiг. VIII.

ПРО ПЛЯМИ СОНЇЧНІ

написав

Стефан Рудницкий*).

ЧАСТЬ ПЕРША.

ВСТУП.

Найраньше зі всїх небесних тїл звернуло сонце на себе увагу людий — сьвітлом і теплом. Що дуже вже давно пізнано єго велике значінє для житя, сьвідчить найлучше роля, яку має сонце в натуральних релїґіях. Озіріс у Єгиптян, Ваал у Семитів, Мітра у Іранцїв і Індів, Геліос і Апольльон у Греків, Хорс Дажбог у Словян були богами сонця і єго персоніфікациями. Дотепер находим сю божу честь для сонця у первісних народів.

Що такі релїґійні понятя суть певно більше оправдані чим многі иньші, не можем сумнїватись дивлячись на сю річ зі становища нинїшної науки. Сьміло можем нинї за старими Перуанами повторити, щосьмо дїти сонця.

Не можем тут розводитись над загальним значінєм сонця для нашої планети, помістимо в кількох тільки словах те, що наука тисячами лїт збирала: Сонце є материю землї, пхнуло єї в сьвітову просторонь, дало рух поступовий та оборотовий і від того часу силою ґравітациї водить єї довкола себе, осьвітляє і огріває. Сонце є пражерелом всїх чотирох жерел енерґії, що від часу повстаня

---

*) Почин до написаня сеї розвідки вийшов від Д-ра Антона Ремана, професора ґеоґрафії на львівскім унїверситетї. За сьвітлі ради і цїнні вказівки складаю тут Вп. професору щиру подяку.

землї впливають на образованє єї поверхнї. Ґравітация викликує приплив і відплив моря, воздуха і маґми. Оборот землї викликує зміни в напрямі течий атмосфери і моря. Внутрішне тепло землї є причиною вульканїзма, землетрясень, дісльокаций, підношеня і опаданя земскої кори. Наконець четверте жерело енерґії: самеж тепло, сьвітло і хемічне дїланє сонця своїм впливом на мінерали, воду і воздух викликує найбільші наслїдки. Під впливом сонця витворилось зі згаданих трох чинників житє ростинне і звіринне на земли, а в неорґанїчнім сьвітї панують вічні переміни. З нерівного розкладу тепла повстають вітри і морскі течи, безпосередне дїланє теплоти викликує вічний обіг води і переміни єї видів. Всї ті прояви житя землї постоянно зміняють єї поверхню.

Сонце впливаючи на воду і воздух є посередною причиною дефляциї, денудациї і ерозиї, котрі поруч вітріня скал з теплоти сонїчної суть найважнїйшими причинами морфольоґічних змін на поверхнї земскої кори.

Пригадалисьмо велике значінє сонця для землї головно з тої причини, щоби тим лекше доказати важність того відділу астрофізики, що занимаєсь особливо головним тїлом нашої планетарної системи.

Наукові дослїди про сонце сягають глубоко в старинні віки. Они взагалї дали початок астрономічній науцї, бо обсервациї сонця нерівно були лекші чим обсервациї якого небудь другого небесного тїла. Але згадані дослїди обмежувались на бігу сонця. Єгож фізичний устрій аж до найновійших часів позістав родови людскому глубокою тайною. Се що ми тепер про будову сонїчної кулї знаєм, можем вважати лишь вступом і підставою до дальших праць в тім напрямі і мусим признатись за Секкім, що в борбі з природою о тайни сонїчного устрою не дісталась ще побіда в наші руки.

Хоть не похваляєм історичного способу трактованя природописних тем, подамо на вступі історию сонїчної фізики.

Клясична старинність, хоть під певними зглядами поставила астрономію досить високо, майже жадних відомостий про устрій сонця не мала. Єсли Анаксаґорас твердив, що сонце є розпаленою до білости кулею, то се виходило більш з причин телеольоґічних чим з переконаня потвердженого дослїдами. І в середних віках не знали европейські народи нїчого про сонце. Дивна се може річ, але тепер вже на певно сконстатовано, що сучасно иньші народи в части навіть еґзотичні знали, що на сонци появляють ся часто плями. Арабскі астрономи нераз їх помічали, але й они не попали на добру дорогу — думали, що се Меркур або Венера, що переходять власне перед сонішним кружком. Натомість добре понимали справу китайскі учені. В енцикльопедиї Ма-Тван-Лїн находим численні згадки про плями на сонїчнім кружку в видах дактелїв, сливок, качок, яєць і т. д. Ті згадки простирають ся на лїта 301—1205 нашої ери. (Williams Ma-Twan-Lin. Monthly Notices of Royal Astronomical Society vol. V. XXIII. пор. також Nature V. XX.)

Також Перуани замічали на поверхнї сонця плями. Huyana-Сарас, Інка перуаньский († 1525) сумнївавсь навіть о божестві сонця з тої причини, що має нечисте обличє. (R. Wolf. Geschichte der Astronomie ст. 178. Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur т. I. ст. 565, Sirius, Zeitschrift für populäre Astronomie р. I. ст. 98. Про старинну астрономію в загалї мож много найти також в Mädler Geschichte der Himmelskunde т. I.)

Доперва в початках XVII віка, коли нововинайдені далековиди звернено на сонце, зараз завважали учені на єго поверхнї темні плями.

З помежи трох астрономів, що боролись о первеньство наукового відкритя сонїчних плям, належить I. Фабриция після найновійших дослїдів вважати властивим відкрителем (Berthold: der Magister Johann Fabricius. Leipzig. 1894.) пор. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik hrg. v. H. Klein т. V. ст. 1. Sirius т. I. ст. 94. пор. також Newcomb. Engelmann. Populäre Astronomie II вид. ст. 285.) Він перший оголосив друком своє відкритє в 1611 р. і пізнав що плями находять ся на самій поверхнї сонця. Ґалілеї мав єще вчаснїйше чим Фабриций помітити сонїчні плями, але відомість про них подав дещо пізнїйше. Протягом довгого часу вважано також єзуіта Хр. Шейнера відкрителем сонїчних плям, головно мабуть тому, що він перший обсервував їх докладнїйше і описав обширнїйше. (Rosa Ursina sive Sol. ch. Bracciano 1630.)

В перших роках по відкритю викликали сонїчні плями, як звичайно наукова новинка велике і загальне заінтересованє. Началась зараз полєміка, чи се суть дійсні плями, чи тілько якісь нові інтрамеркуріяльні планети. Але коли ся переконано, що се дійсні плями, цїкавість уступила місця рівнодушности і ледви деякий любитель астрономії вважав плями сонїчні гідними докладнїйшого розслїджуваня.

Доперва при кінци XVIII. віка начали знов деякі учені заниматись ними а то пр. Горребов і Уільзен (Wilson). На початок XIX. віка припадають епохальні дослїди старшого Гершля. По них знов наступає деякий застій в обсервациї сонця. Аж при кінци першої половини XIX. віка, коли Швабе в 1843 р. замітив періодичність плями, коли в р. 1851 перший раз більшу увагу звернено на сонїчні протуберанциї, коли в 1852 р. Вольф, Сабін (Sabine) і Ґотє (Gautier) науково потвердили постереженє Швабого, началось будити між астрономами на ново зацїкавленє для фізичного устрою сонця.

Великаньскі поступи оптики доставили астрономам досконалих телєскопів, а потім спектроскопів, фотоґрафічних апаратів і иньших потрібних до розслїджуваня знарядів. На початок другої половини XIX. віка й належить покласти родини сонїчної фізики, инакше гелїоґрафії чи гелїольоґії.

Та нова наука находить ся дотепер ще в дитинячім віку. Хотяй цїла плеяда великих учених безнастанно працює над єї розвойом, збирає обсервацийний материял і ставляє научні теориї, то дотеперішних вислїдів не мож назвати великими. Однак величезні поступи фізики сонїчної в послїдних лїтах, осягнені іменно при помочи спектроскопа і фотоґрафічної камери дають нам право робити собі на будучність великі надії. Кождий рік приносить множество нових відкрить, дослїдів, теорий, причинків і поправок до давнїйших понять.

Задачею нашої розвідки є: коротко зібрати дослїди наукові над сонїчними плямами. Займемось тою частию гелїоґрафії головно з тої причини, що плями сонїчні є найбільш в очи впадаючою і найважнїйшою проявою внутрішної дїяльности сонця. Крім того суть сонїчні плями найцїкавійшим а заразом найменьше пізнаним явищем на поверхнї середоточного тїла нашої системи. Сонїчні походнї, протуберанциї, що далеко пізнїйше звернули на себе увагу астрономів, суть вже тепер достаточно вияснені, коли тимчасом плями сонїчні якраз хиба по те приходять на стіл, щоб астронома повстидати.

Лїтература про сонїчні плями є величезна. На доказ вичислимо імена головнїйших учених, що про них писали. Зі старших авторів найважнїйші: Wilson, Herschel, Schwabe, Arago, Humboldt. З новійших: Wolf, Carrington, Warren de la Rue, Secchi, Faye, Spörer, Peters, Tacchini, Respighi, Zöllner, Vogel, Lohse, Lockyer, Huggins, Janssen, Young, Konkoly, Langley, Ricco і много иньших.

Межи творами згаданих учених без сумнїву chef d'oeuvre'ом є книжка патра А. Secchi'ого п. т. Le Soleil видана в 1871 р. а переведена на нїмецке і доповнена Schellen'ом. (Die Sonne. Braunschweig 1872.) Але сей твір, хоч в своїм часї знаменитий, є вже перестарілий з огляду на зміст і може лишень служити яко підстава, на котрій треба будувати річ оперту на новійшихъ дослїдах.

Другий загальнїщого змісту твір про сонце C. A. Young: die Sonne. Leipzig 1883. є більше популярний і вимагає при користованю ся ним певної дози критики. Крім того Young за мало узглядняє новійші дослїди іменнож европейских учених та всетаки хрональоґічно остає о кільканацять лїт поза наукою. Те, що від сього часу в обсягу гелїоґрафії зроблено, є порозкидане по астрономічних і загально-природописних публїкациях або, що гірше, виходило осібними розвідками. Длятого не цїла лїтература була менї доступна. Однак я старавсь тільки тодї відступати від користованя ся ориґіналами, коли під рукою були достовірні витяги або змісти, поміщувані в чисто-наукових часописях чи в розвідках визначнїйших учених.

Для лекшої ориєнтациї і перегляду подїлимо річ на сім роздїлів. Перший роздїл буде заниматись структурою поверхнї сонця, другий структурою самих плям, в третім опишемо їх „житє", в четвертім подамо результати дослїдів над їх дуговиною (спектром) і теплотою. Пятий і шестий роздїли обіймуть їх власний рух і періодичність, послїдний же роздїл подасть учені теориї про істоту сонїчних плям.

Про будову сонїчної поверхнї.

Коли дивимось на сонце крізь люнету, оно представить ся нам яко правильний кружок храпавий на поверхнї. В ріжних місцях того кружка видимо звичайно більші або меньші, звичайно круглаві, часто получені в ґрупи темні плями. Не збуває сонїчному кружкови також на місцях яснїйших чим безпосередна їх околиця. Є се тз. сонїчні походнї. В разї цїлковитого затьміня сонця моглибисьмо тоюж люнетою видїти ще два цїкаві явища а то: протуберанциї т. є. огневі язики, що вистрілюють в гору довкола края сонїчного кружка і корону, що в видї сьвітлої авреолї окружає затемнене сонце і висилає далеко свої лучі.

[Само собою розуміє ся, що люнета, щоби була придатною до розслїджуваня сонця мусить бути осмотрена відповідним окуляром. В опис тих тз. гелїоскопічних окулярів, як також і в опис самих люнет, що їх уживає ся при обсервациях сонця, рівнож і в опис спектроскопів, полярископів, мікрометрів, фотометрів, фотогелїоґрафів не можемо ту входити і відсилаєм необзнакомленого з ними читача до творів Secchi'ого і Young'а, іменнож до дїла N. v. Konkoly: Praktische Anleitung zur Austellung Astronomischer Beobachtungen mit besonderer Rücksicht auf Astrophysik. Braunschweig 1883., котре дуже добре представляє стан інструментальної технїки в 80-их роках. Про поступи від того часу мож поінформуватись в пізнійших річниках чатописий Carls Repertorium für Experimentalphysik i Zeitschrift für Instrumentenkunde].

Всї ті згадані явища лучать ся межи собою звязями тоїж самої сили, що звязи, котрі лучать ріжні фізіольоґічні функциї пр. тїла людского. Однак ми, маючи на оці тільки сонічні плями, не можем звертати рівної уваги на цїлу решту споріднених явищ і будем мусїли заниматись ними тільки принагідно, де завважимо близьку їх стичність з явищем плям.

Щобисьмо могли основно запізнатись з видом і істотою тих таємничих творів, мусим на перед розслїдити терен, де они являють ся.

Поверхня сонця, або як часто, а не цїлком науково говорять, фотосфера, представляєсь нам, як вже висше згадано, храпавою, навіть тодї, коли інструмент є малий а побільшенє незначне. Наколи ужиєм більшого інструмента і побільшеня, стане поверхня сонця ще більше храпавою, неправильною ба навіть филястою. Secchi порівнує єї з висохлим молоком, коли на него дивим ся крізь мікроскоп, Young з храпавим рисунковим папером або з зсїлим молоком. Коли наш інструмент є великий, а побільшенє дуже сильне, то здаєсь нам, що цїла поверхня сонця складаєсь з незміримої скількости ясних зеренець, що розсїяні по дещо темнїйшим тлї. Се явище звесь в астрофізицї ґрануляцією поверхнї сонця. (Пор. Secchi Die Sonne ст. 50 сл. Young Die Sonne ст. 99 сл.)

Щоб ґрануляцию обсервувати, треба не тільки доброго інструмента, але заразом чистого воздуха та вправного обсерватора. Коли крім тих вимогів узглянимо ще велику „делїкатність“ самогож явища, перестанем ся дивувати тому, що ґрануляция на ріжних учених ріжне зробила вражінє. Herschel порівнує зернята ґрануляциї з морщинами (wrinkles), Langley'еви видались они подібними до снїгових платків, що їх розсїяно густо по сїрім полотнї. Nasmyth знов виніс зі своїх постережень сонця в р. 1861 вражінє, що частинки ґрануляциї є подібні до довгих і вузких вербових листків. На єго розповсюднених рисунках поверхня сонічного кружка представляєсь як сїтка сплетена зі сьвітячих ниточок. Але сей погляд Nasmyth'а не удержавсь. Перший виступив против него Dawes і запоречив рішучо їх істнованя. Stone і Secchi також не потвердили дослїду Nasmyth'а, бо мимо великої старанности в обсервациї, ліпшими інструментами та (іменно у Secchi'ого) чистїйшого воздуха не могли найти і слїду „вербових листків“. Huggins (On a cyclonic arrangement of Solar granules. Monthly Notices of Roy. Astr. Society vol. XXVIII. ст. 101 сл.) і Secchi впровадили натомість порівнанє з зернятами рижу. На рисунках Huggins'а та й иньших учених дійсно можна сю подібність замітити.

При виємково прихильних обставинах удалось ще деяким ученим сконстатувати, що навіть самі зернятка ґрануляциї складають ся з певного числа ясних точок, котрі разом роблять вражінє цїлости. Так одже маєм на поверхнї сонця три формациї: 1) темнїйші маси під сподом, 2) зерна ґрануляциї, 3) сьвітлі точки, що складають ся на витворенє згаданих зерен. (S. Newcomb. Populäre Astronomie üb. v. Engelmann Leipzig II. вид. 1892 ст. 282).

Величина зернят ґрануляциї є трудна до виміреня, головно задля їх дуже малого проміру. Secchi порівнує помір їх проміра з помірами мнимого проміра звізд сталих і находить порівнуванєм проміру зернят ґрануляциї з грубостию ниточок мікрометра, що він виносить ледви ${}^1/_4$, ${}^1/_3$ а дуже рідко ${}^1/_2$ секунди луку.

Розложенє зерен ґрануляциї на темнім тлї є дуже ріжне і змінне, а іменно в сусїдстві похідень і плям. В тих іменно околицях панує вічна рухливість та що хвиля лучають ся великі зміни. Безпосередна обсервация рухів фотосфери є при величезнім віддаленю сонця дуже трудна, але фотоґрафія наглядно нам їх показує. Janssen умістив в Annuaire de Bureau des Longitudes за рік 1879 дві фотоґрафії тої самої околицї сонця. Они були зняті в астрофізичній обсерваториї в Meudon 1878 р. 1. червня. В промежутку 50 мінут наступили тут, як вже на перший погляд мож завважати, великі переміни. Зеренця ясні, що перед 50 мінутами були зібрані в однїй околицї, пересунулись протягом того незначного часу громадно в цїлком иньшу околицю, лишаючи по собі темнїйше місце. І на відворот: місця перед тим темнїйші, появились громадою ясних точок. Взагалї полягає змінність ґрануляциї на тім, що єї зернята збивають ся в громадки і скоро ся потім розходять.

Місцями укладають ся зерна фотосфери в той спосіб, що між ними творить ся меньш або більш виразний, округлий і темний отвір. Такі отвори називаєм порами. Зерна ґрануляциї принимають наоколо пори вид повздовжний і підлягають так виразним рухам, що їх не тільки при помочи фотоґрафії але і уважною обсервацією мож замітити.

Вияснити ґрануляцию сонічну перший силкувавсь W. Herschel. Дотична єго розвідка находить ся в Philosophical Transactions з р. 1802. Він твердить, що зернята ґрануляциї суть стіжковими кінчиками фотосферних хмар. Темнїйше тло складаєсь — на думку

Herschel'а — з „планетарних" хмар, а через них переглядає темне внутро сонця.

Перша часть тої теориї є правдива і принимають єї дотепер майже всї учені. Дуже сильно промовляє за тою теориєю вигляд хмар земскої атмосфери, коли на них дивитись будем з високої гори. Однак друга часть теориї Herschel'а про планетарні хмари та земне внутро сонця упала разом з йогож теориєю про сонїчні плями.

Американьский учений Langley, один з найвизначнїйших гелїоґрафів, дальше розвів те, що в гершлївскій теориї було доброго. Фотосфера складаєсь на єго думку з хмаристих стовпиків, що уложені прямовісно до поверхнї сонця. Їх горішні кінцї творять зернятка ґрануляциї. Фильованє сонїчної поверхнї в наслїдок місцевих заколотів є причиною вічних змін в положеню згаданих стовпиків, а нам здаєсь, що се зернята ґрануляциї порушають ся, віддаляють і приближають ся. (The American Journal of Science т. XV. ст. 297 сл.)

Подібний є також погляд славного француского гелїоґрафа Janssen'а. (Comptes rendus de l'Academie des Sciences т. LXXXV. ст. 1249.) По єго думцї струї в атмосфері сонця поривають зі собою в гору части сьвітлих хмар фотосфери. Ті частинки збивають ся в хмарки ґльобулярного вида, що й представляють ся нам яко зернятка ґрануляциї, Чим сильнїйші струї в сонїчній атмосфері, тим виразнїйша ґрануляция. Темне тло об'яснює Janssen тим, що сьвітло висших верств фотосфери є меньше ослаблене абсорпциєю сонїчної атмосфери чим сьвітло низших верств.

Позірно відмінна є теория Scheiner'а, хоч і она на тій самій підставі почиває. (Astronomische Nachrichten т. 137. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik Jg. VI. ст. 7 сл.) Scheiner признає також, що зерна ґрануляциї суть частями сьвітляної материї сонця, що винесені в висші реґіони. Але причини сего винесеня шукає Scheiner не в дійснім піднесеню хмаринок фотосфери в гору, а в певнім роді ундуляцийного руху частинок сонїчної атмосфери. Славний фізик Helmholtz виказав (для земскої атмосфери), що коли дві верстви воздуха о ріжній температурі пересувають ся понад собою — тодї повстають воздушні филї. В вершках тих филь зменьшаєсь в наслїдок їх висшого положеня тисненє воздуха, наступає кондензация і творять ся хмарки. В долинках же филь, де тисненє буде сильнїйше, до кондензациї не приходить. Наколи вітер віє постоянно в ту саму сторону, повстануть при згаданих даних ряди білих хмаринок. Наколиж дві воздушні струї стрінуть ся віючи під

кутом, то хмарки скрестять ся і змішають принимаючи характеристичний вигляд означений в метеорольоґії назвою cirrus.

Анальоґічних відносин шукає Scheiner і в сонїчній атмосфері. Ведений головно великою схожостию будови фотосфери і згаданих хмарок сей учений твердить, що ясні зерна фотосфери суть вершками филь сонїчного воздуха, котрі повстали в наслїдок інтерференциї та скрещуваня ся ріжних филястих системів.

Тільки одна з новійших теорий супротивляєсь висше поданим науковим виясненям істоти ґрануляциї. Поставив єї в 1886 р. сербский учений Становєвич. (Comptes rendus т. CII. ст. 813 сл.) Він вважає ціле явище ґрануляциї маною оптичною. Она походить з неправильного заломаня лучів сьвітла в вічнорухливій ґазовій атмосфері сонця. Головно звернувсь Становєвич проти результатів сонїчної фотоґрафії в тім напрямі. Але ся теория Становєвича не найшла нїгде відгомону і признаня, бо не була поперта научними виводами. (Порівняй думку про ню Janssen'а в Comptes Rendus т. CII. ст. 857.)

Про будову сонїчних плям.

Кожда нормально розвинена пляма складаєсь з двох частий. Вже на перший погляд можем у кождої такої плями замітити темнїйший осередок і яснїйшу пенумбру або притїнок, що єї концентрично окружає. В цїлости представляєсь сонїчна пляма звичайно яко лїйковате, на днї темне заглубленє в ясній поверхнї сонця. Є се головно тому, що пенумбра складаєсь звичайно з вузеньких пасків сьвітляної материї, що суть всї звернені концентрично до осередка плями. Те вражінє, що сонїчна пляма є заглубленєм, відносимо навіть тодї, коли паски притїнка мають неправильний вид. Коли на пр. придивлятись мемо образови сонїчної плями, що нарисував Langley, безпохибно віднесемо вражінє, що осередок плями є заглубленєм, а над ним звисають пасочки пенумбри, закриваючи отвір — як корчі закривають вхід до печери. (Вислів Younga o. c. ст. 110. Рисунок Langley'а находить ся на вступі книжки Young'а, також в многих популярних астрономічних виданях пр. E. Weiss Bilderatlas der Sternenwelt і т. д.)

Той вигляд сонїчних плям викликав у многих учених думку, що они суть дїйсно лїйковатими заглубленями. Перший виступив з тою теориєю A. Wilson, (Observations on the solar spots. Philosophical Transactions. Vol. LXIV. (1774) ч. I. ст. 6—13. Пор. також Secchi о. с. ст. 67.) бо завважав зміну вида плям в міру як они змінювали місце в наслїдок обороту сонця. Wilson постеріг іменно, що в міру, як пляма зближалась до краю сонїчного кружка, пенумбра зі сторони, що блисша єго середини, почала ся щораз звужувати а в кінци цїлком з тої сторони плями зникла. Підчас того по другій сторонї плями, себто тій, що звернена до сонїчного края, ширина пенумбри майже незмінилась і доперва тодї зменьшилась і зникла, коли пляму щораз більше заслонювала кривина сонїчної поверхнї. Потім пляма цїлковито зникла за краєм, а коли по 14 днах указалась знов, вже по другій сторонї кружка, повторились згадані явища але в відворотнім порядку. Наперед видно було лиш ту часть притїнка, що звернена була до края сонця, потім показавсь постепенно осередок, пізнїйше і друга часть притїнка. Она була з початку дуже вузенька, потім щораз ширшала і аж в серединї сонїчного кружка прийняла симетричний вид.

Те спостереженє Wilson’a є підставою теориї сонїчних плям, що єї виставив W. Herschel. Понеже тая теория більш чим пів столїтя неподїльно панувала в науцї, нїхто не перечив правди спостереженя Wilson’a. Крім того нераз лучалось астрономам помічати, що коли яка велика пляма станула як раз на краю сонїчного кружка, повстала в тім місци щербина; замітив се вже в 1719 р. Rost (Wolf. Handbuch der Astronomie т. II. ст. 406.) Помічали се часто також Herschel, Warren de la Rue, Secchi і Tacchini. (Велика пляма з р. 1865. VII. 30). Розумієся вибирали они плями значної величини. (Secchi о. с. ст. 72.) Lohse найшов підчас такого переходу плями через край дорогою фотоґрафічною щербину велику на 2" луку.

Але небракло також учених, що скептично задивлювались на сей тз. „феномен Wilson’a“. Ті сумнїви принесла мож сказати зі собою теория плям сонїчних Kirchhoff’a. Єї головний приклонник межи практичними гелїоґрафами Spörer виступив остро против Wilson’a і тих, що єго обсервациї потвердили. (Monatsberichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften J. 1865. ст. 350 сл. 589 сл.) Після власних обсерваций доказує Spörer, що положенє пенумбри зависить від відносин в околицї плями. Пенумбра від тоншої сторони є звичайно порозривана і змінює що хвиля свій вид. В околицях края сонїчного була абсорпция звичайно так сильна, що Spörer майже нїколи не міг розріжнити осередка від притїнка, хотяй єго інструмент нерівно висше стояв чим інструмент Wilson’a. Противно, Spörer замітив, що на пр. у двох плям, що лежать близько себе, притїнки суть ширші по обох внїшних сторонах і заховують постоянно свій симетричний вигляд. З тих причин думає Spörer, що плями сонїчні не суть в дїйсности заглубленями, а лишь видають ся бути. В виду обсервациї Lohse’ого заявляє Spörer, що і та щербина в краю сонїчнім є позірна. Одинокою причиною тої позірної щербини є те, що сьвітло фотосфери в околицях плями є так сильно ослаблене в наслїдок ґазів, котрі з неї добувають ся, що для ока а навіть для фотоґрафічної камери видаєсь тая околиця зовсїм темною. (Зри: Comptes Rendus т. CIX. ст. 363.) Не удалось однак Spörer’ови подати в сумнїв явища, що вже тілько разів було обсервоване. В послїдних часах піднявсь регабілїтациї Wilson’a італїйский астроном Riccо на підставі одинадцятьлїтних обсерваций плям (р. 1880—1890 в Палєрмо, р. 1892 в Катанїї). Число помічаних плям рахувалось на тисячі (17.456, з чого самостійних 3.224). З них вибрав Riccо тілько плями правильного округлого виду. Було їх всїх тілько 185. Межи тими плямами 131 т. є. величезна більшість поводились так, як се завважав Wilson, 36 заховувалось зовсїм індіферентно а тілько 18 прямо противно. Крім того находимо в обсервациях Riccо многі случаї, коли пляма сонїчна, переходячи через край сонїчного кружка, творила в нїй щербину. (Rendiconti della reale Accademia dei Lincei р. 1897 з. 6. ст. 202 сл.) Тим способом доказав Riccо, що „феномен Wilson’a“ є оправданий. Заки перестанем займатись сею справою, мусим єще згадати про оден цїкавий дослїд. Warren de la Rue вложив в стереоскоп дві фотоґрафії сонця, що були взяті сучасно в двох місцях землї, віддалених від себе о 15 степенів луку. Коли вже на кождій фотоґрафії з осібна плями подобали на заглубленя, то вже в стереоскопі подібність кидалась в очи. (Secchi о. с. ст. 71 сл.)

До того, що сонїчна пляма представляєсь як заглубленє, причиняєсь в дуже значній мірі також обставина, що околиця кождої майже плями є винесена понад нормальний уровень фотосфери в наслїдок великого числа сонїчних походень. (Що вражінє заглубленя походить або бодай зміцнюєсь видом походень, що окружають пляму, завважав перший Howlett, Monthly Notices of R. A. S. v. 23. ст. 108.)

Походнї сонїчні представляють ся яко ясні плями, значно сьвітлїйші чим безпосередна їх околиця; видом неправильні. Young порівнує їх до купочок піни, що плавають по рiцї понизше водопада. (о. с. ст. 106.) Що до істоти сонїчних походень згоджують ся днесь всї учені на те, що они творять ся через піднесенє в гору значнїйших частий фотосфери. (E. Liais в Memoires de la societé scientifique de Cherbourg р. 1867. ст. 337. Hale в Himmel und Erde т. VI. р. 1894 ст. 381. пор. Secchi o. c. ст. 104.) Найдокладнїйше зайнявсь сею справою Zöllner. Вiн твердить, що походнї суть части фотосфери винесенi в гору воздушними струями. Они сьвiтять сильнїйше вiд свого окруженя, бо мають 1) висшу температуру, 2) в наслїдок значнїйшої грубости сьвiтляної верстви, 3) в наслїдок зменьшеної абсорпциї. Вершки походень находять ся дуже високо понад уровенем фотосфери, над ними находить ся отже значно тонша верства атмосфери чим над їх окруженєм — абсорпция є отже дуже зменьшена. (Zöllner über das Rotationsgesetz der Sonne und der grossen Planeten. Berichte der königlichen sächsischen Gesellschaft des Wissenschaften p. 1871. т. XXIII. ст. 89.)

Сонїчнi походнї суть розсипанi звичайно по цїлiй поверхнї сонця i не тримають ся певних стреф, як се роблять сонїчнi плями. Але все таки найбiльше число походень збираєсь в околицях пятен. Найсильнїйше розвиненi суть походнї звичайно по лївiй (берем рiч ґеоцентрично) сторонї плями. Завважали се вперве анґлiйскi астрономи з Kew: Warren de la Rue, Balfour Stewart i Benjamin Loewy. Перша серия дотичних обсервацiй виказала, що з числа 185 обсервованих плям, мало 158 походнї значнїйше розвиненi по лївiй сторонї, 21 по обох сторонах однаково розвиненi, а тiльки 6 виказувало нагромадженє походень по правiй сторонї. (Comptes Rendus т. LX. ст. 140.) Друга серия обсервацiй ще виразнїйше доказала, що спостереженє згаданих астрономiв було правдиве. На 584 плям, що мали походнї по лївiй сторонї, припали тiльки 45, що мали їх по правiй. (Ibidem т. LX. ст. 470.)

Походнї трудно замiтити, сли они занимають мiсце недалеко вiд центра сонїчного кружка, бо тодї рiжниця абсорпциї лучiв висланих через походнї i лучiв висланих їх окруженєм є за мала, щоб викликала значну рiжницю в ясности. Походнї сьвiтять тут майже таксамо ясно як фотосфера, що їх окружає, суть отже ледви замiтнi. Коли натомiсть походня находить ся недалеко края сонїчного кружка, рiжниця абсорпций стає значно бiльшою а разом з нею рiжниця ясности походень i їх окруженя. Тодї походнї виступають дуже виразно i можем докладно замiтити, що з внї кожда пляма є окружена вiнцем походень. Вiд него виходять в рiжнi сторони яснi розвiтвленя, що сягають дуже далеко i занимають просторонь 3—4 рази так велику як сама пляма. Все те суть утвори дуже змiннi а їх вигляд є що пару мiнут инакший. Загалом беручи образують походнї наоколо заглубленя плями видатну набренїлiсть. Іррадiяция єще ту видатнiсть збiльшає, так що пляма разом з походнями, що

єї окружають, робить ся подiбна до мiсячного кратера. (Secchi o. c. ст. 103).

Будова походень є в подробицях така сама як будова околичної фотосфери. Тiльки що зерна ґрануляциї стоять ту далеко густiйше.

Колисьмо так вже розслїдили беспосередну околицю плями, перейдїм до опису єї самої.

Як се вже висше згадано, є осередок кождої плями в засадї окружений притїнком або пенумброю. Назву свою одержала та часть плями вiд того, що є значно яснїйша вiд самого осередка а дещо темнїйша вiд самої фотосфери. Будова притїнка є лише у плям цiлком круглих т. є. досить рiдко, правильна в видї перстеня. Звичайно є пенумбра неодностайно вi всїх мiсцях широка та дуже часто цундрава. Загальний вид дуже рiжнородний, найчастiйше круглавий, рiдше гранчастий. Дуже часто трапляють ся плями з загальним видом шестикутника. (Peters в Astronomische Nachrichten Nr. 1868. пор. Sirius IV. ст. 44).

Що ся тичить подробної структури, складає ся пенумбра також з зерен ґрануляциї. Але они суть тут рiдкi i мають наклiн лучитись в ниточки, котрi суть у правильної плями звернені концентрично до осередка. (Janssen в Comptes Rendus etc. т. CII. ст. 80.) Длятого то ниточки притїнка суть при єї внїшнiй границї в бiльших вiдступах уложенi, а при внутрiшнїй згущують ся так, що наоколо темного осередка творить ся ясний перстень рiвнобiжний до перстеня походень, котрi як знаєм окружають притїнок у внї.

Лучаєсь часто, що ниточки притїнка суть на тiм кiнци, де зближають ся до осередка плями, згрубiлi i мають вид булавочок або струй ляви. Те явище, що природно дуже помагає витворови сьвiтляного перстеня наоколо властивого осередка плями, було помiчене в перве Dawes'ом. Secchi (o. c. ст. 84.) мiрив грубiсть тих ниточок пенумбри i найшов єї на грубшiм кiнци рiвною $^1/_4$—$^2/_4$ секунди луку т. є. майже 200—400 km. На тоншiм кiнци грубiсть доходить тiльки до половини того: $^1/_8$ - $^1/_4$ секунди, 100—200 km. (Примiчаєм, що на пiдставi новiйших дослїдiв над параляксою сонця вiдповiдає однiй секундї луку на сонци довжина 720 km.) Грубiсть сих ниточок є на тоншiм кiнци нераз так мала, що тодї видим тiльки грубшi кiнцї ниточок наоколо осередка. Вiд внїшного краю складаєсь тодї пенумбра з темної, мрачної маси.

Ниточки пенумбри не все мають той сам концентричний напрям. Часто они приймають поодиноко або i громадно найбiльш рiжнороднi напрями. Часом цiлї партиї ниточок займають зглядом иньших партий таке положенє, що їх напрями творять кути прямi.

(Secchi o. c. ст. 87.) Нераз певні партиї притїнка вигнуть ся спірально в ту саму сторону і пляма тодї представляєсь як вир на водї. Той спіральний напрям обнимає або цїлу пляму або тільки поодинокі єї части. Нераз маєм в однїй плямі кілька центрів обороту та що дивнїйше напрям єї є в ріжних центрах часто ріжний. (Young o. c. ст. 121, 171. Langley в Comptes Rendus etc. т. LXXIX. ст. 75. пор. також Comptes Rendus т. XCV. ст. 1310. Після обсервацний Carrington'a і Secchi'ого виносить число плям з спірально уложеною пенумброю 2 - 3% всїх.)

Заким перейдем до описаня дальших частий плями не можем позабути про цїкаві явища ґрануляциї на ниточках пенумбри. Зеренця суть ту так виразні, що ниточка пенумбри представляєсь часто якби нитка жемчугів. Нераз є ниточка в ріжні сторони розгалужена так, що тодї виглядає она на вітку опунциї. (Secchi o. c. 79.)

Другою головною складовою частию сонїчної плями є осередок або центр. (Secchi o. c. ст. 88, Young o. c. ст. 113 сл.) Через контраст з сьвітячим окруженєм видаєсь нам осередок плями цїлком чорний. Приглядаючись їм з близка крізь тз. поляризацийні гелїоскопи (Є се окуляри осібної конструкциї, де не треба між око а сочку збираючу вставлювати зеленого шкла, бо в наслїдок кількократного відбитя від кількох рівнобіжних плоских зеркал сьвітло сонїчне так ослаблюєсь, що людске око може єго вигідно знести.) постерегли деякі учені, що осередки плям мають барву темно-порфирову, багрову. Чи ся краска є дїйсна, трудно сказати, бо она може походити з другорядної дуговини у предметової сочки телескопа. Обсервовано іменно, що таку саму порфирову краску мав кружок планети Меркурия, коли переходила перед кружком сонїчним в 1878. роцї. Konkoly замітив також, що деколи осередки плям суть закрашені на темнофіолєтову барву. І она також сумнївна, бо може також походити з другорядної дуговини. (Beobachtungen angestellt am astrophysikalischen Observatorium in O'Gyalla. т. VI. ст. 129).

Хотяй в наслїдок контраста здають ся нам плями сонїчні дуже темними, то однак беззглядна їх ясність є значно більша чим прим. планетних кружків, коли їх видим перед сонцем і взагалї досить значна. Galilei справедливо завважав, що одна пляма сонїчна, єслиб сама сьвітила на небосклонї, видалаб сильнїйше сьвітло чим всї иньші тїла небесні разом. Нові досліди фотометричні Langley'a виказали, що сьвітло плям є 500 разів сильнїйше місячного. (Newcomb.-Engelmann o. c. ст. 287.) Треба пригадати, що навіть дуже ясне сьвітло Drummond'a видаєсь темним, наколи єго держимо до сонїчного сьвітла. (Schellen. Die Spectralanalyse. вид. III. том II. ст. 75.)

Осередок плями не є ві всїх своїх частях однаково темний. Dawes замітив у многих плям в їх осередках округлі, дуже темні плямки. Їх ясність стоїть до ясности самого осередка в таким відношеню, як ясність осередка до ясности притїнка. В однім осередку мож найти нераз і кілька таких темних плямок. Они виглядають як отвори рур, що сягають ві внутро сонця і виглядають часто так, якби були спірально скручені. Названо їх центрами Dawes'a.

Крім тих темнїйших місць находимо частенько в осередках плям також місця яснїйші. Згадуючи про них не маєм на думцї тих частин фотосфери, що при повставаню або заниканю плями єї осередок залягають, але говорим про иньші, цїкаві явища. Виглядають они як мраки білявої або часто рожевої краски. Замітили їх в перве Herschel і Dawes, а Secchi таки й часто обсервував. Secchi ідентифікує їх з протуберанциями задля рожевої краски і великої змінности — думає отже, що се вибухи розпаленого водня.

Займаюче явище внутр осередка сонїчної плями бачив Spörer 1884 р. VIII. 24. (Tageblatt der 57. Versammlung deutscher Naturforscher zu Magdeburg 1884. s. 145.) Він замітив в поранній годинї одно сильно сьвітяче місце на серединї центра значної плями. О першій годинї пополудни поверхня сьвітячого місця взагалї зменьшилась, але зате з головної маси вибігли дві ясні ниточки, що направились до західного берега плями. Вже о третій годинї сї ниточки майже цїлком зникли, а на слїдуючий день вже навіть і по самім головнім центрі ясного феномена не було слїду. Spörer думає, що розігріті маси сонїчного внутра, котрі находились під плямою, нагло піднеслись в гору та зараз потім опали. Подібні явища не так то дуже рідкі — видимо їх також на рисунках Secchi'ого (пр. o. c. ст. 77.).

Про повставане та заникане сонїчних плям.

Щоби пізнати істоту сонїчних плям, мусимо добре придивитись часови і способови їх повставаня і заниканя.

Щоби сонїчна пляма витворила ся і розвила, потреба дуже ріжного часу. Нераз і кілька днїв уплине, заки пляма на стільки відокремить ся від свого окруженя, щоби єї виразно мож відріжнити. Часом же треба на се лишень кількох годин. Нїколи однак не лучить ся, щоби сонїчна пляма повстала нагло в тім щоденнім значіню сего слова т. є. в кількох мінутах.

Так само способи повставаня плям є дуже відмінні. Можна сьміло сказати, що майже кожда пляма йнакше повстає. Пару століть обсерваций сонїчної поверхнї доставило в тім напрямі чималого числа подробиць. Про сам спосіб повставаня сонїчних плям можнаб много паперу записати. Ми мусимо ся тут ограничити лиш на кілька висказів, нарисовуючи ними типічний спосіб повставаня плям.

Звичайно вже на кілька день перед повстанєм плями можем на поверхнї сонця замітити великий рух. Численні пори являють ся нагло і нагло зникають, цїла околиця звичайно покрита походнями. (Не можна однакож думати, що походнї правильно завсїгди перед повстанєм плями на єї місци ся являють. Думали се давнїйші учені але недавно виказав Perry в Monthly Notices of the Royal Astronomical Society vol. LII. (1891) ст. 104. що так не є. Пор. також Secchi o. c. 58. Young o. c. 117.) Серед тих пор і походень можем завважати часом дуже інтересні явища. Се сїраві плями, що роблять вражінє як справдешні сонїчні плями, але прикриті тонкою і ясною верствою фотосфери. Першим, що звернув увагу на сї явища був Trouvelot, (American Journal of Science. 1876. Marth ст. 82 сл. Young o. c. 129. Пор. Bulletin astronomique т. II. р. 1885. ст. 263, 364. 413. Sirius т. XIX. ст. 51. сл.) він і назвав їх замраченими плямами. Trouvelot постеріг, що ґрануляция над тими замраченими плямами є рідша і слабша що до сьвітла, але за те більше рухлива чим в иньших околицях фотосфери. В наслїдок тої великої рухливости зеренець ґрануляциї зміняєсь вигляд таких замрачених плям дуже часто, нераз в однїй або двох мінутах і то до непізнаня. Trouvelot думає, що згадані явища – се такі самі плями як звичайні, лиш сили, що їх витворили, є за слабі, щоби цїлком продерти зверхну верству фотосфери. Завважати однак належить, що ся думка не є надто оправдана, бо такі „замрачені“ плями можна подибати навіть в околицях сонїчного бігуна, куди звичайні плями нїколи не трафляють ся.

Сам акт повставаня плям є нам дотепер неясний і таємничий, позаяк нїхто єго виразно на власні очи не видїв. Підчас своїх 40-лїтних обсерваций був R. Wolf кілька разів в тім щасливім положеню, що міг видїти дещо похоже на нагле повставанє сонїчних плям. Кілька разів в часї єго практики здавалось Wolf'ови, що на поверхнї сонця щось якби нагло пукло і повстала пляма сонїчна. Але навіть сам Вольф не посьмів з сих фактів робити якихнебудь заключень — тим меньше можем се ми робити. (Пор. Wolf Handbuch der Astronomie т. II. ст. 407. Було се в р. 1848.) Таксамо або

і ще меньше маємо право вірити постереженю Brautner'а, хоч оно після єго оповіданя було дуже докладне. (Sirius XI. 1878. ст. 287) 1815 р. 26. вересня побачив він в однїй околицї сонїчного кружка щось в родї хмари. По трох чи чотирох мінутах помітив Brautner серед сеї хмари сильне замішанє. Оно тревало може 50 секунд, а коли устало, виразно побачив Brautner велике число дрібних плямок, іменно в сусїдстві краю хмари. Серед сих маленьких плям тревали дальше великі перевороти. Центри плямок то никли — заливала їх брунатна мрака — то знов показувались. В ківци рух устав, а місце згаданої хмари заняла ґрупа плям значного розміру.

Є се як видим обсервация дуже цікава, але годї єї без'оглядно признати правдивою з двох причин: 1) Обсерватор не був фаховим астрономом, лиш дїлєтантом, 2) Єго інструмент був так слабий в порівнаню з інструментами нинїшних обсерваторий, що не можем мати до него довіря, коли новійші астрономи нинїшними средствами не вспіли потвердити за такий довгий час обсервациї Brautner'а.

Взагалї треба завважати, що в місци яснім і чистім на сонїчнім кружку нїколи відразу не повстає ізольована пляма, а завсїгди цїла ґрупа. Дуже лиш рідко лучаєсь, що витворить ся відразу одинока пляма. Такий случай бачив в 1877 р. в цьвітни Janssen (Sirius X. 1877. ст. 157.) 14. того місяця була поверхня цїлого сонїчного кружка цїлком чиста, ґрануляция виступала дуже виразно. На другий день же явилась нагло ґрупа плям 2' проміру. Ту ненормальну прояву толкує Janssen тою обставиною, що тодї власне припадало періодичне minimum сонїчних плям. Плямотворча сила була отже дуже слаба, натомість наклін плям до заниканя дуже сильний.

Звичайно витворюєсь наперед цїла ґрупа плям. Она зложена звичайно лише з самих осередків Притїнок розвинений дуже слабо. Ті осередки є часто небільші як звичайні пори. Число їх що хвиля ся збільшає, бо прибувають щораз нові і зачинаєсь творити коло них притїнок зразу невиразний, неправильний, замазаний. Потім починає ся розвиток поодиноких центрів, они індивідуалїзують ся і повстає ґрупа самостійних плям. Подамо кілька примірів.

1865 р. в липни 29. побачив Secchi на сонїчній поверхнї три невеличкі, темні пори, котрих в попереднім дни не було на тім місци. 30. липня показалась на місци згаданих пор темна маса з чотирма осередками і дуже неправильним замазаним притїнком. Притїнок був в кількох місцях перерваний ясними огневими язиками. Межи згаданими чотирма центрами нагромадила ся сьвітляна материя. Она була в безперивнім руху, так що по кількох годинах всї подробицї, які мож було добачити, цїлковито ся зміняли. Тілько загальні черти полишились незмінними. 31. липня згадана сьвітляна маса розтягнулась повздовжно, та подїлила цїлу пляму на дві вузкі а довгі части. Они продовжували ся так наглядно, що за добу їх довгість подвоювалась. Середуща маса змінилась потім поволеньки в невиразьний обсипаний ясними зернами притїнок. Розвинулися поволи також центри і віддалились від себе. Але недовге було житє тій ґрупі. 17. вересня полишилось по нїй лише кілька пор і походень. (Secchi o. c. 60 сл.)

Подібні випадки зареєстрував Konkoly. 1873. 15. лютого показали ся при всхіднім краю сонїчного кружка три пори. Слїдуючого дня була вже на тім місци велика і досить добре виобразувана ґрупа з 9 осередками. Такий сам случай лучивсь межи 19. а 22. грудня 1873 р. (Konkoly. Beobachtungen angestellt am astrophysikalischen Observatorium in O'Gyalla. т. I. ст. 87.)

Від згаданих висше явищ не дуже ріжнить ся також явище обсервоване Spörer'ом в 1876 р. IX. 30. На дуже яснім полї витворили ся нагло в значній скількости невеличкі плями і окружили середну часть сего поля вінцем. В короткім часї зайшли в тій околицї великаньскі переміни, бо 2. жовтня згадану ясну середину занимала виобразована ґрупа плям, плями-ж що єї вінцем окружали, зникли. (Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Postdam т. I. Beobachtungen der Sonne von G. Spörer ст. 71.)

Ґрупа сонїчних плям або лишаєсь до кінця свого істнованя ґрупою, або зміняєся по певнім часї в одну більшу пляму. Звичайно творить ся правильна пляма з притїнком в западній части ґрупи (що при руху оборотовім сонця іде наперед). (Ibidem ст. 77.) Иньші осередки ґрупи в такім разї звичайно або никнуть цїлком або лишають ся ще якийсь час яко пори. (Ibidem ст. 69.) Сей процес заниканя поодиноких центрів в ґрупі, причім витворює ся на їх місци одна пляма, відбуває ся нераз дуже скоро і напрасно. Konkoly бачив 1873 р. 9. червня у певної ґрупи 9 осередків. До 13. червня всї они уступили місця однїй правильній плямї. (Beobachtungen angestellt am. Astr. Obs. in N'Gyalla I. ст. 83.)

Такі перевороти відбувають ся в дуже ріжний спосіб, однакож Peters, Schwabe і Spörer вспіли в часї своїх довголїтних обсерваций дослїдити певні правила розміщеня, повставаня і заниканя плям в ґрупах. Дослїджено, що ґрупи розширюють ся через повстанє нових плям майже завсїгди в напрямі всхіднім. Всї більші плями повстають майже завсїгди в западній части ґрупи. Spörer помітив, що на 68 ґруп, які були обсервовані, заховувались 48 т. є. подавляюча більшість в висше згаданий спосіб. (Publicationen des astr. Obs. zu Potsdam т. I. ст. 77.) Позісталі плями в ґрупі уставляють ся тодї по всхідній стороні головної плями і то дуже часто в напрямі сонїчних рівнобіжників. (Завважав се вже Schröter пор. Comptes Rendus etc. т. LXIV. ст. 375.) Наслїдком того мають деякі більші плями по своїй всхідній стороні щось в родї хвоста. Сей „хвіст“ складаєсь з безчисленних малих плямок, що розсїяні по відповідно видовженім притїнку. За таким хвостом тягнуть ся звичайно в рядї поменьші плями ґрупи. Се явище бачив кілька разів Secchi (o. c. ст. 85). Коли така ґрупа начинає заникати, никнуть наперед звичайно западні плями, хибань що має витворитись в ґрупі яка більша пляма. Тодї бо западні плями полишають ся і беруть визначну участь в витвореню великої плями. Характерне є також виступованє плям парами.

В часї істнованя всякої сонїчної плями можем розріжнити три періоди: 1) період повставаня — про него власне скінчилисьмо говорити, 2) період супокійного побуту, 3) період заниканя.

Про період супокійного побуту, котрий випадає нам з порядку описати, не мож много сказати. Многі учені прямо заперечують, щоби він у всїх плям істнував, лиш деякі плями мають такий період. Що правда треває він у тих плям нераз дуже довго, бо кільканацять день і більше. Подибуєм сей період супокійного побуту звичайно лиш у плям, що мають вид округлий, а пенумбру дуже правильну.

Період заниканя начинає ся з тою хвилиною, коли сила, що витворила пляму, так ослабне, що вже не пляма на фотосферу, але фотосфера на пляму начинає мати рішучий вплив. Повстають в плямі нові види і від того часу начинають ся в нїдрі єго такі самі перевороти як в періодї повставаня, лишень в відворотнім напрямі.

Заникненє плями може послїдувати в двоякий спосіб: 1) коли огневі язики вдершись до середини, подїлять пляму на кілька частий, 2) коли сьвітляна материя начинає зі всїх боків поступати ідь серединї плями і в кінци єї заллє. Звичайно однак обі ті причини складають ся разом на погибель плями і суть зі собою в видній звязи. (Spörer Publicationen d. Astr. Obs. zu Potsdam т. I ст 79 Tageblatt der 57. Versammlung deutscher Naturforscher in Magdeburg 1884. ст. 184.)

Secchi замітив, що коли сонїчні плями дійдуть до певної стадиї свого розвою, начинає окружаюча їх фотосфера посувати ся до-середини плями і висилає огневі язики т. з. мости, що ділять пляму на дві або більше частий.

Творенє таких мостів належить до найінтереснїйших явищ, які можем бачити на сонїчній поверхнї. Peters пробуваючи в Неаполи в роках 1845 і 1846 звернув увагу на тую фазу сонїчних плям і описує єї в такий спосіб: Коли наближаєсь період заниканя плям, можна завважати серед притїнка вузенькі струйки сьвітла, котрі щораз то зближають ся до осередка плями а вкінци втискають ся таки в єго нїдро. Таких сьвітляних струй є звичайно кілька або й більше.

Коли дві такі струї йдучи з противних сторін зближуть ся достаточно до себе, витрискають нечаянно із кінцїв обох струй огневі язики. Зі скоростию блискавки они спотикають ся з собою, остають в злуцї якийсь час, але потім знов ся розділяють. Таке повтаряє ся кілька разів в протягу кількох хвилин. Вкінци огневі язики лучать ся постоянно і творить ся міст. Описане явище є о стілько цікавійше, що одного разу огневий кінчик струї наперед зіткнув ся з противлежним собі кінчиком а потім скрутив нагло в бік і зіткнув ся з другим. Всї ті рухи виглядають так, якби їх викликувала електрична сила і є надзвичайно скорі. Peters обчисляє їх скорість на 200.000 km. на секунду (minimum). (Proceedings of the American Association for the advancement of science т. IX. Відповідний уступ наведений в переводї з ориґінала у Young'a o. c. ст. 118.)

За витворенєм моста не конче мусить зараз йти заникненє плями. Дуже часто наступає лишень т. н. сеґментация — поділ плями на дві або кілька частий. Міст може іменно мати трояку натуру. Або се є розпалена струя фотосферних хмарин понад плямою, або се є струя розжарених ґазів в самім уровени плями, або вкінци поступуюча ерупция серед походень, що окружають пляму. Коли міст є першого або другого рода, тодї пляма звичайно заникає, колиж він належить до третої катеґориї, тодї наступає сеґментация. Міст продїлює пляму на дві части, що мають зразу спільну пенумбру. Але вже в короткім часї обі ті части віддїлють ся цїлком від себе, кожда з них виробляє собі осібний притїнок і стає самостійною плямою. (Spörer. Tageblatt der 57 Versammlung deutscher Naturforscher zu Magdeburg 1884. ст. 145 сл. і в Publicationen des astr. Obs. zu Potsdam т. I ст. 78.)

Є се взагалї дуже трудна річ, побачивши на плямі міст осудити, чи она заникне, чи тілько ся подїлить. Нераз лучить ся, що цїла пляма покрита мостами, а прецїнь не заникає, лишень ся дїлить.

Такий случай обсервував Secchi (o. c. ст. 64) 1865 р. 29. мая. Пляма, котру він обсервував, була досить правильна на вид, але мала в серединї ясну масу. Від неї розходило ся кілька мостів як сприхи при колесї. Були отже услівя, що моглиб довести до цїлковитого заникненя плями; тимчасом сталось инакше. Мости поволи позникали, середна маса також, потім начавсь в притїнку оживлений рух і по кількох днях слїдувала сеґментация.

Звичайно однак можем ся сподївати, що пляма невдовзї щезне, коли замітимо, що численні мости єї середину залягають. Они стають іменно щораз виразнїйші, число їх збільшає ся, береги плями посувають ся ідь єго осередкови, аж в кінци сьвітляна маса покриває єго цїлком.

При описї повставаня і заниканя плям видїли ми на кождім місци, що найвизначнїйшою може признакою сонїчних плям є їх велика змінність. Найлїпше пізнаємо єї в той спосіб, що придивимось величинї плям сонїчних і єї змінам.

Величина плям є так само ріжна, як і їх внїшний вигляд. Бо не тільки ріжні плями сонїчні мають ріжний розмір, але розміри тої самої плями в ріжних стадиях єї розвитку заєдно ся змінюють. Найменьші між сонїчними плямами є пори, бо їх величина не доходить нераз до одної секунди луку. Хоч ся величина здаєсь нам дуже малою (позірний промір сонїчного кружка виносить 32'), бо секунда луку є для нашого зору майже невидима, то прецїнь она репрезентує на поверхнї сонця середно 725 km. Плямка сонїчна того проміру представляє ся навіть крізь сильний телєскоп яко дрібненька точка, а прецїнь єї поверхня виносить 412.388 km^2 т. є. майже $^2/_3$ поверхнї Австро-Угорщини.

Але пори суть надзвичайно малі в порівнаню з нормальними плямами, котрих середна величина виносить що найменьше кільканацять секунд в промірі. (Примічаєм, що наша земля, коли на єї дивимо ся з поверхнї сонця, виглядає як малий кружок 17.6" пересїчного проміру). Деякіж плями доходять до великаньских розмірів. Дуже інтересні дати подав в тім напрямі Schwabe, що мав в часї своїх довголїтних обсервацийй велику нагоду видїти плями незвичайної величини. 1848 р. IX. 22. була на поверхнї сонця пляма проміру 147" отже 9 рази більшою чим земский. Поверхня сеї плями була 18 разів більша від поверхнї землї. 1842 р. VI. 30. бачив Швабе ще більшу пляму. Она мала 168" проміру. Найбільшаж з плям, які колинебудь бачено, явилась на сонїчній поверхнї 1870. IX. 5. Она мала промір 302" т. є. 21.400 km. а поверхню 35.100,000.000 km^2. Ті розміри перевисшають відповідні розміри нашої земскої кулї 17 і 69 разів. (Обсервациї Schwabe'ого поміщені в Astronomische Nachrichten від р. 1843 починаючи. Про великі плями пор. Himmel und Erde т. IV. (1892) ст. 484. і т. VI. (1894) ст. 38.)

Єще більші розумієся розміри мають ґрупи сонїчних плям. Schwabe видів в червни 1845 р. ґрупу 668" т. є. 468.000 km. проміру. Ґрупи такої величини не належать впрочім до рідкостий. Знаєм прецїнь про численні случаї в старинности, коли сонїчні плями оглядано голим оком. (Wolf. Handbuch der Astronomie т. I. ст. 564 сл.) Правда що сонїчна пляма потребує після Schwabe'ого мати лиш 50" проміру, щоби єї було мож видїти голим оком (після Tissot'а навіть тільки 30"), але мусим признати, що иньша се річ видїти пляму, коли знаєм, що она є на поверхнї сонця, а иньша, коли про се не знаєм. Мусїли отже згадані плями бути дуже значної величини, коли простодушні і неупереджені люди старинности могли їх добачити.

Тілько позитивного про величину плям. Їх змінність найлучше пізнаєм на змінах їх величини. Щоби довго не розводитись, возьмем собі клясичний примір та придивимось ґрупі, що була послїдною між згаданими. 1845 р. VI. 14. довжина єї від всходу на захід виносила 668". По двох днях т. є. 16. червня она зменьшилась до 474" т. є. о 194" = 140.650 km. На оден день випадає отже для сего руху дорога 70.325 km. Є се скорість, супроти котрої скорість найстрашнїйшого оркану є марна. Єще більшу скорість руху можна було завважати у плями, що показалась в вересни 1850 р. 5. вересня єї промір виносив 302" луку, коли попередного дня т. є. 4. вересня лиш 93". В однім дни розширилась отже пляма лїнеарно о 209" т. є. о 151.525 km.

Під конець уступу про повставанє і заниканє сонїчних плям скажем кілька слів в справі їх тревалости. Про ню скажем хиба се, що як і иньші прикмети плям, так і она є дуже змінна. Взагалї завважано, що плями, котрі скоро повстали і розвинулись, також в короткім часї зникали. (Secchi o. c. 91. Young o. c. 114.) Лучало ся нераз, що плями вже в кількох днях по своїм повстаню зникали. Середна тревалість плями сонїчної виносить 2—3 місяцї, але трафляють са плями, що далеко довше перебувають на поверхнї сонця. В р. 1779. одна пляма через 6 місяцїв позіставала на сонїчнім кружку. Schwabe обсервував в р. 1840 одну пляму протягом 6½ місяця, а в лїтах 1861/2 навіть через 18 місяцїв.

Належить однак замітити, що протягом сего часу плями звичайно і кілька разів навіть відновлюють ся. Частенько в хвилинї, коли пляма здає ся туй-туй счезне, родить ся в нїй нова сила і пляма замість счезнути єще розширяє ся. Secchi обсервував 1866 р. кілька плям середно тревалих, котрі находились вже в стадиї заниканя, але потім знов „ожили“. Часто відродженє приходить за пізно, коли пляма вже зникне. Тодї повстає нова пляма в тім місци сонїчної поверхнї, деби находила ся давнїйша пляма, єслиб ще істнувала.

Дослїди над теплотою і спектральним виглядом плям.

Дослїди над зглядною теплотою сонїчних плям не дуже далеко поступили, бо сконструованє відповідних знарядів натрафило на великі трудности. Перші учені, що заняли ся тою правою Henry і Alexander найшли з 12 помірів, що плями дають тільки 0·8 тої теплоти, що єї дає їх ясне окруженє. (Fritz. Die Sonne ст. 9.) Але ті поміри були тільки першою пробою.

S. P. Langley, славний гелїольоґ, про котрого ми вже нераз згадували, перший винайшов докладні інструменти до таких помірів. При їх помочи одержав він в осени 1874 та на весну 1875 р. дуже важні результати. Протягом згаданого часу довершив Langley 36 помірів температури осередків плям а 32 поміри теплоти притїнків. Поверхню плям потрібну до обчисленя брав Langley з Researches of Solar Physics. (Є се розвідки Warren'а de la Rue, Balfour Stewart'а і Венїямина Loewy'ого, астрономів обсерваториї в Kew. Они поміщені в річниках Philosophical Transactions.) Положивши проміньованє фотосфери рівним одиниці найшов Langley, що осередки плям дають в порівнаню з нею тільки 0·54±0·05 сьвітла і тепла; притїнки тільки 0·80±0·01. (Sirius т. V. ст. 59—62.

Хотяй се може до нашої теми не дуже належить, подамо єще в коротких словах дальші виводи Langley'а, що тикають ся впливу плям на загальне проміньованє сонця і єго зміни, котрі знов відбивають ся на огріваню за осьвітлюваню землї. Середний розмір сонїчних плям є на підставі Kew'ских обсерваций слїдуючий: Підчас періодичного maximum занимають осередки сонїчних плям 0·000376 поверхнї одної сонїчної гемісфери, притїнкиж 0·001016. Підчас minimum ті числа виносять 0·000021, зглядно 0·000056. Наколи помножимо ті вартости, що означають обсяг плям через висше подану, зглядну їх теплоту, одержим числа, що виражають вплив плям на загальне проміньованє сонця. Ті числа будуть дуже скромні: для maximum 0·001016, для minimum 0·000055. Загальна отже зміна, яку могуть протягом свого періоду викликати сонїчні плями в проміньованю сонця, не буде більша як ріжниця обох тих чисел т. є. 0·000961.

Щоби означити вплив сонїчних плям на земску температуру, треба знати всї єї позасонїчні жерела. Понеже їх докладно не знаєм, старає ся Langley означити тільки границї, межи котрими лежить сей вплив сонїчних плям. Він находить яко найбільше імовірну на се вартість 0.063 ^{0}C. (Sirius т. V. ст. 62.)

Langley робив свої дослїди термоелєктричним звеном. В новійших часах винайдено новий і докладнїйший інструмент до того рода помірів тз. радіомікрометер Boys'a. Тим інструментом довершив в 1893 р. дуже важних помірів Wilson. Він мірив наперед зглядну теплоту осередка, потім теплоту точки в околицї плями, (причім вважав, щоби він був рівно як осередок віддалений від середини сонїчного кружка) а вкінци теплоту самогож центра сонїчного кружка.

Результати дослїдів Wilson'a суть дещо відмінні від дослїдів Langley'a. 1893 р. 7. серпня найшов пр. Wilson, що єсли проміньованє осередка плями представим числом 1·31, то околиця плями дасть 4.49, а середина сонїчного кружка 4·57. Відношенє проміньованя осередка плями до проміньованя околичних частий фотосфери буде отже виносити: 0·292 respective 0·287.

Є се однак лишень мінїмальна вартість найдена Wilson'ом. Середна вартість з 20 обсерваций виносить 0·356 — є отже значне меньша від одержаної Langley'ом вартости 0·54. Wilson не скриває однак, що та ріжниця могла бути викликана не тільки уліпшенєм інструменту, але також дійсною ріжницею проміньованя плям в ріжних часах. Proceedings of the Royal Society 1894. LV. Nr. 333. ст. 246. пор. Naturwissenschaftliche Rundschau 1894. Nr. 14. і Jahrbuch für Astronomie und Geophysik V. Jhrg. ст. 5 сл.)

В найновійших часах кількох иньших визначних учених заняло ся пильно сею справою, але їх дослїди до тепер не оголошені. Проте згадаєм тут єще лиш про відкритє Савелієва Він найшов, що в тій самій мірі як росте число плям, росте також і температура околичної фотосфери. (Comptes Rendus. T. CXVIII. ст. 62.)

Спектроскопію плям не будемо ся обширно занимали, бо є се річ дуже специяльна і так сильно з загальною спектроскопією сонця злучена, що мусїлибисьмо і ту послїдну обширно трактувати. Подамо тільки найважнїйші результати учених дослїдів над тим предметом. Huggins, Lockyer, Secchi і Young найбільше ся на тім поли заслужили. (Secchi o. c. 539 сл. Young o. c. 125 сл. Schellen. Die Spectralanalyse т. II. ст. 63 сл.)

Коли направимо щілину спектроскопа на якусь пляму сонїчну, побачимо, що ясна стяжка дуговини буде в напрямі повздовжнім перервана темним поясом. Сей пояс — се дуговина осередка плями. Она є ширша або вузша після того, чи сам осередок ширший чи вузший. По обох сторонах сего пояса тягне ся дуговина притїнка. Она є лишень троха темнїйша від дуговини сонїчної поверхнї.

Дуговина осередка є на цїлій своїй просторони в наслїдок абсорпциї сорозмірно дуже темна. Крім того можем завважати в нїй ріжні зміни на фраунгоферівских лїніях. В горішній (прифіолетній) части дуговини межи лїніями F а H є ті зміни дуже незначні. За те долїшна часть дуговини виказує значнї зміни.

В околици плям а іменнож над походнями суть лїнії водня завсїгди слабші, часто никнуть або підлягають відверненю — особливо лїнія C. Навіть лїнія F, що лежить як згадалисьмо на граници горішної части дуговини, підлягає часто тій судьбі. Нераз трафляє ся, завважав се Lockyer, що замість неї являє ся ясна лїнія. (Schellen die Spektralanalyse т. II. ст. 65.) Все те походить з того, що в околицях плями звичайно повно є протуберанций розпаленого водня, котрі компензують абсорпцию а нераз, коли суть дуже сильнї, викликують навіть відверненє. В околицях сонїчного края ясні лїнії викликані протуберанциями зискують на силї і продовжують ся нераз в глуб темного пояса осередкової дуговини плям, іменнож великих.

Коли міст перериває пляму, або коли внутр єї находять ся яснїйші місця, тодї лїнія C дуже ся ослабляє, ба навіть зникає. Се все сьвідчить про присутність водня.

Взагалї дуговина осередка плям підлягає дуже сильним змінам. Они не дадуть ся витолкувати загальним догадом, що ті всї зміни походять з недостачи сьвітла. Бо не тільки лїнії нормальної сонїчної дуговини в обсягу плями підлягають розширеню. Трафляє ся, що лїнії в звичайній дуговинї сильні суть в дуговинї плями дуже тонкі і майже зникають, а відворотно деякі лїнії, що ледви замітні в звичайній дуговинї, суть в дуговинї плям дуже виразні. Толкує ся се тим, що хмари розпалених металїчних ґазів, находячі ся в єї нутрі, дїлають на єї сьвітло абсорпцийно і то селєктивно. В сей спосіб та абсорпция, що вже істнує, дуже ся зміцнює. Кілька металїчних лїній підлягають в дуговинї плями дуже сильному розширеню. Кілька лїній в зеленій части дуговини, іменно лїнії вапня, желїза, тітану а особливож соду, розширюють ся 3—4 рази. Завважано, що діє ся се, коли пляма є округла і здаєсь глубока. Лінії соду заховують ся дещо відмінно від иньших, бо тратять точність границь і стають замазаними. Secchi припускає, що се вплив атмосферичних, земских відносин. (о. с. 545.)

З дальших властностий дуговини плям належить піднести, що абсорпцийні лінії стають при обох кінцях щораз то тонші і заострені. Зглядна ясність дуговини плям є цілком відмінна від ясности дуговини самогож сонця. Кривина дуговини плям має цілком иньший перебіг, як кривина властивої сонічної дуговини. Та послідна має перебіг дуже правильний — поволи ся підносить і десь від $^2/_3$ своєї довжини начинаючи, досить нагло опадає. Кривинаж дуговини плям має дуже неправильний перебіг. Має она чотири горбки. Три перші постепенно підносять ся і вершками своїми сягають до кривини властивої дуговини сонця. Від вершка третого горбка спадає кривина дуговини плям дуже напрасно, підносить ся єще раз але вже слабо і потім опадає досить скоро, так що єї зглядна довжина (мірена на оси X-ів) є о $^1/_4$ коротша як кривини головної дуговини.

Є в сонічній дуговині кілька лінїй, що і в дуговині плям позістають незмінні. Суть они тим інтересні, що суть розміщені по дуговині в майже рівних віддаленях. Інтересно, що ті самі лінії указують ся в дуговині червоних звізд. Можемо отже припустити, що єслиб такі абсорбуючі верстви як над осередком плями находились на цілій поверхні сонця, то оно булоб цілком червоне.

На увагу заслугує також відкрите лінії водяної пари в дуговині плям Секкім. Заперечив єму що правда Angström, але Janssen рішив, що поки що ані оден ані другий учений не може мати претенсиї до цілковитої певности. За Secchi'м є імовірність.

До дуже звичайних явищ в дуговині плям належить також відвернене двох лінїй соду т. є. D_1 і D_2. Дуже виразне явище того рода обсервував Young 1870 р. 22. вересня. Лінії ті дуже виразні в дуговині фотосфери і притїнка уступили в дуговині осередка місця ясним лініям.

Коли в самій плямі або в єї околиці трафляють ся вибухи або иньші заколоти, видимо се зараз в дуговині плями. При тім деякі властиві дуговині плям лінії підлягають великим змінам — а иньші цілком ся не зміняють. З сего видим, що абсорбуючі ґази занимають ріжні положеня зі згляду на висоту. В наслідок того їх рухи не могуть на себе безпосередно впливати. (Young o. c. 128.)

Розуміє ся, що спектральний вигляд плям є дуже ріжний після елементів, котрі переважають в ґазових хмарах, що суть причиною абсорпциї. Часто трафляють ся плями анормальні під тим зглядом пр. пляма обсервована в Greenwich 1877 р. в жовтни. (Schellen die Spectralanalyse т. II. ст. 69.)

Для нас цікаве, що плями інакше виглядають в спектроскопі підчас періодичного maximum а інакше підчас minimum. Perry і Cortie найшли, що скількість розширених металїчних лінїй єсть далеко більша в minimum як в maximum. Се відношенє представляє ся для лінії желїза як 27 : 8. Підчас maximum лучає ся часто, що кілька лінїй виказує значне розширенє навіть в пенумбрі. (Monthly Notices of Royal Astronomical Society т. 49. 1899 ст. 410. пор. Jahrbuch für Astronomie und Geophysik. т. I. ст. 5.) Потвердились сї відкритя дослїдами слїдуючого року. (Monthly Notices etc. т. LI. ст. 1890. ст. 76.)

Подібні явища як в дуговині поодинокої сонічної плями можем також обсервувати в дуговині цілих ґруп. (Monthly Notices etc. т. LII. 1892. ст. 424.)

Результати спектральних дослїдів над сонїчними плямами мають дуже велику вагу для пізнаня їх істоти. Над тим предметом будем ся обширно застановляти в кінцевім уступі нашої розвідки. Тепер згадаєм лиш, що плями є районами поверхні сонця, де специяльно абсорпция виступає з великою силою.

* * *

Бібліоґрафіа і хронїка математично-фізична.

J. Puzyna. Teorya funkcyj analitycznych. (Lwów, Altenberg р. 1900. том II. ст. XVI+693).[1]

Наколи перший том сего твору був дуже інтересний і змістом і способом представленя, то другий том робить єще приємнїйше вражінє і є єще інтереснїйший для тих, що розслїджують теорию функций способом, вказаним через незабутний ґенїй Веєрштрасса.

Том сей складає ся з вісьмох частий в 23 роздїлах.

Часть перша (про функциї елєментарні та функцию цїлковиту переступну без місць зерових) займає ся функциєю виложною, та функциями триґонометричними, які з неї виходять, далї єї періодами, функциями рационально утвореними $R(e^{cx})$ і їх теоремом додаваня (се є вступ до теориї функций еліптичних), далї походними безконечно високого ряду; маємо ту дальше відверненя функций виложної і триґонометричних, отже льоґаритм і луки, моноґенічність льоґаритму, функцию виложну яко добуток та загальну форму функциї одної та много змінних без місць зерових.

Часть друга занимає ся функциями однозначними зі скінченим або безконечним числом місць особливих. Маємо ту зібрану цїлу теорию Веєрштрасса таких функций, теореми Mittag-Leffler'a, ріжні функциї та вираженя аналїтичні. В части третій маємо проблєм однозначного та многозначного відверненя рядів одної змінної, з чим ся лучить загальна теория т. зв. образу альґебраічного, теория окружаня всїляких точок особливих того образа, характер та дефініциї функций альґебраічних. Розслїди ґеометричні про криві долучені та рід (дефект) кривих — уступ в великій мірі ориґінальний — кінчать сю часть.

Часть четверта про функциї рациональні R(xy) місця (xy) образу альґебраічного представляє нам незвичайно важний уступ

---

[1] Пор. Збірник мат. природ. Т. IV. з. II.

з теориї Веєрштрасса, будучий вступом до теориї інтеґралів Абелевих, тим важнійший, що сеї теориї покійний німецкий ґеометр ніде не публікував (була она лиш звісна з єго викладів). Тож за сю часть автору специяльна належить ся подяка. Є ту ціла теория функциї R(xy), є ту схарактеризовані функциї $H(xy)_{\alpha}$, $H'(xy)_{\alpha}$, H(xyx’y’), є подана метода твореня функциї R(xy) при помочи функций H, дефініция трох родів інтеґралів Абелевих; в кінци подані способи обчисленя роду ϱ — деякі способи знов зовсім оригінальні автора — теория кривих о роді 0, 1, 2 та кривих гипереліптичних.

Часть пята подає деякі уступи з т. зв. „Analysis vitus“ та теорию поверхний Riemanna. Ся часть творить перехід до части шестої, де методи Веєрштрасса чисто аналітичні повязав автор дуже уміло з теориями більше ґеометричними Cauchy та Riemann’a. В сій части маємо теорию полишок (residua) Cauchy, значінє інтеґралів по замкнених лініях, лінії перерви для функций з одним та більше зложеними арґументами та епохальне тверджевя Cousin’a про функциї однозначні много змінних. Далї маємо в тій части теорию інтеґралів Абелевих та еліптичних, теорию їх періодів, теореми додаваня, функциї E Веєрштрасса та представленє функциї рациональної R(xy) добутком функций E. З відверненя інтеґралів еліптичних приходить автор до теориї функций еліптичних Jacobi, які є ідентичні з функциями σ Веєрштрасса та функциєю p. Ту рівнобіжність обох теорий, які виходять з иньшої точки, а остаточно сходять ся з собою в вислїдах, представив автор дуже наглядно. Уступи з загальної теориї функций еліптичних (розклад на елементи прості, представленє їх через квоти функций σ і т. п.) кінчать сю інтересну часть.

Часть сема подає теорию функций гармонїчних і їх застосованя. Є ту схарактеризований теорем Green’a, засада Dirichlet’a, теория функций гармонїчних для обшарів замкнених (інтеґраґи Poisson’a), на поверхні Riemann’a, теория відтвореня многокутників в півплощи, а врешті метода вирівняна (alternierend) Schwarz’a та застосованє функций гармонїчних до обчисленя періодів інтеґралів Абелевих, їх відверненя тя ріжних відтворень. Як бачимо, ся часть книжки підходить вже більше до метод ґеометричних сучасної аналїзи.

На ґрунті чисто-ґеометричнім стоїть послїдна частина сеї книжки про функциї Schwarz’a та трикутника Маємо ту теорию походних Schwarz’a, рівнанє ріжничкове Gauss’a, та відтвореня ґеометричні при помочи функций трикутника та многостїнників правильних, які входять до теорий аналїтично-ґеометричних Кляйна. Теория ґрупи модулової, незмінника $J(\tau)$ та поділ півплощи при помочи ґрупи модулової — що вже належить до теориї функций автоморфних — кіньчить частину осьму, а разом і послїдну сеї книжки.

Коли звернемо увагу на величезний материял, зібраний автором в сій книжцї, на систематичний та сорозмірно легкий — о скілько се в загалї можливе — спосіб представленя, використанє всїх найважнїйших, найновійших здобутків сучасної аналїзи математичної, то можемо автору висказати щиру подяку в імени всїх, що занимають ся і слїдять розвій наук математичних.

Wiadomości matematyczne (видає Dickstein, Варшава). Том IV. 1900.

До тепер вийшло 4 зошити сего тому в двох випусках. Перший випуск містить в собі ось-ті працї: M. Feldblum: Конструкциї ґеометричні. G. Loria: Уваги про сорядні бігунові. B. Левицкий: З теориї дробів тяглих. B. Danielewicz: В квестиї обчисленя резерви премійної від обезпечень на житє. R. Merecki: Обсерватория астрономічна ім. А. Ендржейевича в Варшаві. Спростованє до артикулу M. Hubera: Про сумованє чисел варияций. Перегляд лїтератури. Бібліоґрафія. Хронїка etc.

Зошит IV. містить в собі: W. Gosiewski: З царини рахунку імовірности. M. Ernst: Обчисленє дороги метеора, обсервованого дня 6. червня 1899 р.

H. A. Lorentz. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und der Anfangsgründe der analyt. Geometrie (übersetzt von Dr. C. C. Schmidt) Leipzig 1900, Verl. Johann Ambrosius Barth; 10 M. — ст. VIII+476.

Є се німецкий перевід з голендерского первовзору (додано лиш в німецкім переводі уступ про функциї триґонометричні); поміщено ту елементарний виклад в 14 розділах про рахунок ріжничковий зі вступом про ґеометрию аналїтичну просторони, далї слїдує виклад про поєдинчі та многократні інтеґрали та вступ до рівнань ріжничкових.

Ch. Sturm. Lehrbuch der Analysis (übersetzt von Dr. T. Gross). Berlin, Verl: Fischer; 2 томи (зі вступом про житє і дїла Sturma).

Є се перевід знаменитого твору Sturm’a: „Cours d’Analyse. Перший том (36 лекций) подає виклад рахунку ріжничкового з теориєю maxim’ів та minim’ів, застосованє рахунку ріжничкового до ґеометриї (теория стичних, луків, еволюти, кривина, криві подвійно криві, криві поверхнї, гелїсса, точки особливі кривих); від лекциї 27. до 32. є загальні взори рахунку інтеґрального (інтеґрали рациональних функций, інтеґрали означені); лекция 33. до 36. подає ґеометричне застосованє рахунку інтеґрального (отже квадратури, кубатури, многократні інтеґрали).

Том II. подає в лекциях 37. до 58. докінченє рахунку інтеґрального, отже ріжничкованє під знаком інтеґральним, інтеґрали Euler’a, далї теорию рівнань ріжничкових повних і часткових і їх ґеометричне застосованє та рахунок ріжниць; в лекциях 59. до 62. є поданий рахунок варияцийний. — В кінци подана збірка важнїйших формул з цїлої книжки.

Извѣстія физико-математическаго общества при императорскомъ казанскомъ университетѣ.

Вторая серія томъ IX. містить в собі: Випуск третий (Казань 1899): I. А. А. Марковъ: Отвѣтъ. Д. М. Синцовъ: Объ аналитическомъ параллелограммѣ Лагранжа-Ньютона. М. А. Грачевъ: О способѣ M. G. Bigourdan'a опредѣленія широты. II. Лѣтопись физ.-мат. Общества і научная хроныка. — Приложенія: 1) Памяти Софуса Ли. (Ту поміщений через Синцова спис усіх праць Ли.). 2) А. Котельниковъ: Проэктивная теорія векторовъ (вступ).

Випуск четвертий (Казань 1900): I. Д. Селивановъ: Объ уравненіяхъ, имѣющихъ всѣ корни вещественными. II. Лѣтопись физ.-мат. Общества і научная хроника. — Приложеніе: Д. Синцовъ: Bibliographia mathematica rossica (1898). Объявленія.

Вторая серія томъ X. містить в собі: Випуск перший (Казань 1900): I. W. H. L. Janssen van Raay: Opinions de quelques géométres hollandais sur la théorie des parallèles et sur la géometrie non-euclidienne. И. И. Аристовъ: Объ итераціи функцій. P. S. Poretzky: Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques. II. Лѣтопись физ.-мат. Общества. М. Леви: О трудахъ Евгенія Бельтрами. Объявленія.

Записки императорскаго харьковскаго университета подають слідуючі статії:

Рік 1900 книга 2. Результаты наблюденій метеорологической станціи за 1899 г. В. Я. Данилевский: Изслѣдованія надъ физіологическомъ дѣйствіемъ электричества на разстояніи (ст. 97 - 208).

Книга 3. Результаты наблюденій метеорол: за 1899 г. В. Я. Данилевский: як висше (ст. 209—280).

Университетскія извѣстія (Кіевъ) подають між иньшими:

Nr. 3.: Наблюденія метеорологической обсерваторіи (юль-декабрь 1897). (ст. 1—44). Г. Сусловъ: Основы аналитической механики (ст. 145—176). Н. Бунге: Курсъ химической технологіи 1173—1210).

Nr. 4. (апрѣль): Г. Сусловъ: Основы аналитической механики (177 — 240). Н. Бунге: Курсъ химической технологіи (1211—1242).

Физико-математическія науки въ ходѣ ихъ развитія (журналъ исторіи, философіи і библіографіи физико-математическихъ наукъ) издаваемый В. В. Бобынинымъ. Том первий — Nro. 1.

Основнія задачи теоріи дифференціяльныхъ уравненій. А. П. Пшеборскаго. Є то габілітацийний виклад автора, в котрім подає розвій науки о функциях, як також деякі теореми.

Баронъ Плана. Очеркъ єго профессорской и учено-литературной дѣятельности; критика і бібліоґрафія.

Nr. 2. Второй международный съѣздъ математиковъ в Парижѣ в 1900 году. Первий русскій математическій журналъ. Критика і бібліоґрафія.

Nr. 3. Баронъ Плана. Очеркъ єго профессорской и учено-литературной дѣятельности (окончаніє). Первый русскій математическій журналъ (продолженіє). Юбилей г. дра Морица Кантора. Критика і бібліоґрафія.

Nr. 4. Второй международный съѣздъ математиковъ въ Парижѣ въ 1900 году. Матеріялы для Исторіи математической журналистики въ Россіи. Первый математическій журналъ научнаго характера. Критика і библіографія.

Sbornik Jednoty Českych Mathematiků v Praze. Čislo I. Projektivná geometrie základných útvarů prvniho řádu. Napsal Eduard Weyr. v Praze 1898. ст. VIII+189.

Книжка ся складаєсь з 12 розділів. Містить она в собі виклад ґеометриї проєктивної або, як єї також називають, синтетичної, яку розвинули Staudt, Reye, Poncelet, Chasles, Steiner та пок. Омелян Weyr. З теориї жмутів простих та пунктів, з теориї ангармонічного поділу та інволюциї, проєктивних та перспективних метів виведені є ту усі важнійші твердженя нової ґеометриї. Теория бігунових, теория кривих другого степеня (взглядно другої кляси), твердженя Pascal'a, Brianchon'a, Desargues'a, теория гіпербольоіди та гіперболічної парабольоіди та їх построєнє при помочи жмутів точок та простих, є ту представлена дуже наглядно та елеґантно. А коли додамо до сего гарний вигляд зверхний та красні фіґури, то можем сказати, що книжка ся вповні відповідає цїли яко дуже добрий підручник до пізнаня метод синтетичної ґеометриї.

Вийшли з друку:

Rudolf Mewes. Licht-, Elektrizitäts- und X-Strahlen (2. Aufl. Berlin, Fischers technologischer Verlag, M. 1·50).

Rudolf Mewes. Die elementare Physik des Äthers (Kraft und Masse). 2 Theile. (Berlin ibidem). M. 5.

A. Righi. Die Optik der elektrischen Schwingungen (übers. von B. Dessau). Leipzig M. 6.

W. Weiler. Wörterbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Leipzig. M. 12.

H. Burkhardt. Funktionentheoretische Vorlesungen. 2 Theil. (Elliptische Functionen), Leipzig, Veit u. Co. 10 M.

L. Fuchs. Bemerkungen zur Theorie der associierten Differentialgleichungen. Berlin, Reimer.

M. Hamburger. Über die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung. Berlin, Reimer.

H. Dörrie. Das quadratische Resiprocitätsgesetz im quadratischen Zahlkörper mit der Klassenzahl 1. Göttingen. M. 2·40.

F. Schilling. Über neue kinematische Modelle sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyklischen Kurven. Halle M. 1·20.

Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Photographische Himmelskarte. Zone $+31^0$ bis $+40^0$ Deklination. 1. Bd. Leipzig Engelmann. M. 25.

L. Boltzmann. Vorlesungen über Gastheorie. 2 Theil. Leipzig. J. A. Barth. M. 7.

F. Richarz. Neuere Fortschritte auf dem Gebiet der Elektrizität. Leipzig. B. G. Teubner. M. 1·15.

C. Schultz. Die Ursachen der Wettervorgänge. Wien. Hartleben. M. 2.

Виходить в зошитах Handwörterbuch der Astronomie. Breslau, Trewendt (зошит à M. 3·60; дотепер 20 зошитів).

В книгарні Gauthier-Villars (Paris, Quai des Grands-Augustins 55) вийшли послїдними часами слїдуючі книжки:

J. J. Thomson: Les décharges électriques dans le gaz (traduit par L. Barbillon), Paris 1900 . . . . 5 fr.

E. Rouché et Ch. de Comberousse: Traité de Géométrie (I. partie — Géométrie plane, II. partie — Géométrie dans l'espace), Paris 1900 . . . . 17 „

E. Spée: Région b-f du spectre solaire . . . . 40 „

F. Tisserand: Traité de Mécanique céleste (4 volumes) Tome I. 1889, Tome II. 1891, Tome III. 1894, Tome IV. 1896 . 103 „

P. Appell: Traité de mécanique rationnelle:
  Tome I. — Statique, dynamique du point, 1893 . . . . 16 „
  Tome II. — Dynamique des systèmes, Mécanique analytique 1896 . . . . 16 „
  Tome III. — Équilibre et mouvement des milieux continus 1900 . . . . 15 „

E. Gérard: Leçons sur l'electricité:
  Tome I. 1899 . . . . 12 „
  Tome II. 1900 . . . . 12 „

E. Gérard: Traction électrique. 1900 . . . . 3·50 fr.

E. Rouché et L. Lévy: Analyse infinitésimale a l'usage des ingénieurs:
  Tome I. 1900 (VIII+557) . . . . 15·— „
  Tome II. (sous presse)

L. Lévy: Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques, 1898 . . . . 7·50 „

F. Michel: Recueil de problèmes de géométrie analytique. 1900 6·— „

M. d'Ocagne: Traité de Nomographie; théorie des Abaques. 1899 (8^0, 480 pp.) . . . . 14·— „

M. Servant: Essai sur les séries divergentes (4^0, 59 pp.)

A. Witz: Thermodynamique, à l'usage des ingénieurs . . . 2·50 „

H. Fehr. Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la géometrie infinitésimale. (Paris. Carré et Naud). 1899, 8^0, 94 pp.

H. Poincaré: Cinématique et mécanismes. (Paris. Carré et Naud) 1889, 8^0, 385 pp. 15 fr.

A. Turpain: Recherchés expérimentales sur les oscillations électriques. (Paris. Hermann). 6 fr.

Вийшли з друку:

В. И. Курдюмовъ. Курсъ начертательной геометріи. Отд. I. II. Спб. 8^0 404 ст. Ц. 3 р. 50 к.

П. П. Граве. О построеніи кривыхъ третьей степени. Казань. 8^0. 400 ст. Ц. 4 р.

А. П. Котельниковъ. Проэктивная теория векторовъ. Казань. 8^0. ст. 112.

В. Шиффъ. Сборникъ упражненій и задачъ по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ. Ч. I. Спб. 8^0 ст. 326. Ц. 2 р.

П. К. Соколовъ. Метода аритметики. Спб. 8^0 IV+136. Ц. 60 к.

В. Арбузовъ. Сборникъ аритм. задачъ для учениковъ средн. учебн. зав. Москва. 8^0 ст. 85. Ц. 50 к.

Г. Лоренцъ. Элементы высшей математики (перев. В. И Шереметевскаго). Т. I. Москва. 12^0 ст. 747. Ц. 3 р.

(Записано в „Bibliographia mathematica rossica“ за рік 1898., видаваної казаньским „Физико-математическим обществом; сей випуск вийшов в р. 1899. під редакциєю Д. Синцова).

А. Ивановъ. Теорія прецессіи. Спб. 1899. 8° ст. 123.

І. Косоноговъ. Атмосферное электричество и земной магнетизмъ. Кіевъ, 1899. 8°, 180 ст.+6 таблиць.

О. Д. Хвольсонъ. Курсъ физики. Т. III. Ученіе о теплотѣ. Спб. 1899. 8°, 682 ст. Ц. 5 р.

П. Л. Чебышевъ. Сочиненія, изданныя подъ ред А. А. Маркова и Н. Я. Сонина. Т. I. 8°, ст. 720. Спб. Ц. 7 р.

Г. Шульгинъ. Мореходная астрономія. 8°, ст. 520+2 карты. Спб.

Е. Пржевальскій. Аналитическая геометрія и собраніе задачъ изъ анал. геометріи Изд. 4. 8°, ст. 340. Ц. 2 р.

Н. И. Лобачевскій. Біографическій очеркъ. Спб. ст. 56. Ц. 15 к.

С. Гуржеевъ. Прикладная механика. Изд. 3. Спб. 8°. X+446 ст.

А. Л. Корольковъ. Лекціи по электротехникѣ. Спб. ст. 365. Ц. 2 р. 50 к.

Вийшов VIII. том, часть II. звісного журнала бібліоґрафічного „Revue semestrielle des publications mathématiques“ (Amsterdam, Delsman en Nolthenius 1900).

---

23. серпня 1899 р. обходив знаний історик математики Д-р. **Мориц Кантор**, б. професор гейдельберского унїверзитета, 70. лїтну річницю своїх уродин. Єго приклонники відсьвяткували се торжество виданєм великого тома „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik“ яко додаток до журнала „Zeitschrift für Mathematik u. Physik“, видаваного під редакциєю Кантора. В виданю сего тома взяли між иньшими участь: московский професор Бобинин, Дікштайн, Eneström, Curtze, Loria, F. Meyer, Rudio, Tannery, Wertheim і и. — Найбільша заслуга Кантора почиває в виданю (побіч множества дрібнїйших праць) величавої працї „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“, виданої в Липску фірмою B. G. Teubner; праця ся вийшла в трох томах та обнимає історию математики від найдавнїйших часів до р. 1759.

В перших днях червня 1899 р. обходив 50-лїтний ювілей славний математик і фізик англїйский Жорж Стокс (Stokes) в Кембрідж (Cambridge).

Звізда першої величини α **Aurigae** (Capella), як ствердив W. Campbell в обсерваториї Licka і Newall в Cambridge (Анґлія) при помочи обсерваций спектроскопійних, є **звіздою подвійною**. Як ствердили далї обсервациї ріжних обсерваторів від цьвітня до червня сего року, час обігу сего системи виносить 104 днів, отже $3^1/_2$ оборотів в протягу нашого року; є се обіг найскорший з обігів пізнаних до тепер звізд подвійних. Віддаленє обох складових звізд є меньше більше таке, як Землї і Сонця, а маса цїлого системи майже сїм разів більша як маса Сонця.

(Comptes Rendus de l'académie Paris 1900)

Дня 23. червня 1900. відкрив Borelly в обсерваториї в Марсилїї нову комету; комета та представляла ся яко звізда 6—7 величини, єї ядро величини 9·5—10.

Основну розвідку про систем звізди Сірюс на основі найновійших обсервацuй Burnhama, Aitkena і Keelera в обсерваториї Lick'a подає H. I. Zwiers в „Proceedings of the section of sciences“ амстердамскої академії наук (том II. 1900 ст. 6—19).

Обсервуючи при помочи гелїометра три планетоіди Вікторию, Іріс і Сапфо на розї Доброї Надії, одержав Gill слїдуючі дати для паралякси сонця:

Вікторія:	8·8013″ ± 0·0061″
Іріс:	8·7981″ ± 0·0114″
Сапфо:	8·8120″ ± 0·0091″

отже пересічно: 8·8038″ ± 0·046″. Яко послїдний вислїд приймає Gill: 8·802″ ± 0·005.

Абсолютна міра часу. Секунда, акої уживає ся до міреня одиницї часу, є $\frac{1}{86400}$ частию часу між одною а другою кульмінациєю сонця; не є се отже абсолютна незмінна одиниця часу. Тому то G. **Lippmann** радить ужити ґравітациї до визначеня абсолютної одиницї часу. А іменно наколи за одиницю маси возьмем масу о обємі рівнім шестистінникови з гранкою = 1, а о густотї = 1 (густота води при 4° C), то одиницею часу буде час, якого та маса потребує, щоби тїлу в віддаленю = 1 надати прискоренє рівне одиницї. Наколи за одиницю маси возьмем ґрам, за одиницю довгости центіметер, то після сказаного одиниця часу буде рівнати ся 3862 секунд або $1^h\,4^m\,22^s$. Така одиниця не залежить від вибраної одиниці довгости.

(Zeitschrift f. physik. u. chem. Unterricht 1900).

Berthelot аналїзував вироби золоті, що походять з гробів староегипских; з аналїзи випало;

проби з часїв VI. династиї мають:

Au	92·3	92·2
Ag	3·2	3·9
материй орґанічних	4·5	3·9

Pb, Cu, Fe анї слїду.

проби з часїв XII. династиї мають:

Au	90·5
Ag	4·5
материй орґанічних	5·0

проби з часїв перских мають золота 99·8.

Значить ся Египтияне експлюатували до виробів давнїйше просте золото питоме, яке все має примішки срібла, а доперва в часах перских навчили ся відділяти золото від срібла.

(C. rendus 1900).

D. Berthelot означив на ново точку кипіня для цинку і кадму; з пять обсерваций випало для цинку 920°, для кадму (трох обсерваций) 778°C. Після нових обчислень нїмецкого хемічного товариства тягар атомовий кадму є 112·4.

G. Hinrichs обчисляє (Comptes rendus de l'acad. Paris 1900) склад атмосфери до її границь; в тій цїли приймає він, що кождий складник воздуха творить для себе атмосферу независиму від иньших складників, а тодї на основі форми Ляпляса:

$$\log\frac{P}{p}=\frac{H}{K}$$

де p є тисненєм для кождого ґазу, H висота в міряметрах, K (стала) $=\frac{1\cdot8400}{D}$, (де D є густота ґазу) дістає слїдуючий склад воздуха в напрямі прямовіснім:

Високість в 10^4 m	в % на 100				
	CO_2	O	A (арґон)	N	H
0.	0·03	21·00	1·20	77·75	0·02
1.	0·02	18·43	0·75	80·74	0·06
2.	0·01	16·07	0·46	83·26	0·20
3.	0·00	13·90	0·28	85·18	0·64
4.	—	11·86	0·16	85·94	2·04
5.	—	9·83	0·12	83·94	6·11
6.	—	7·52	0·00	75·54	16·94
7.	—	4·7	—	56·20	39·1
8.	—	2·2	—	31·00	66·8
9.	—	0·7	—	12·9	86·4
10.	—	0·3	—	4·6	95·1