ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛЇКАРСКОЇ СЕКЦИЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

Т. VII. — Випуск II.

ЧАСТЬ МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНА

ПІД РЕДАКЦИЄЮ

ІВАНА ВЕРХРАТСКОГО і Дра ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦКОГО.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SECTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

B. VII. — Heft II.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHER THEIL

REDIGIRT VON

JOHANN VERCHRATSKYJ u. Dr. VLADIMIR LEVYCKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1901.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка

З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка
під зарядом К. Беднарского.

ЗМІСТ.

Стор.

1. Володимир Левицкий: Теория перстеня Сатурна.. 1—46
2. Стефан Рудницкий: Про плями сонїчні (часть друга) 1—90
3. Федір Примак: Причинки до історії розвитку і інволюції желези thymus у риб кістноскелетних (Teleostei) 1—26
4. Володимир Левицкий: Найновійші праці з теорії функций аналїтичних..... 1—12
5. Володимир Левицкий: Додаток до теорії дробів тяглих і ґрупи модулової (друга нота)..... 1—8
6. Бібліоґрафія та хроніка математично-фізична..... 1-41

INHALT.

1. Vladimir Levyckyj: Theorie der Saturnringe..... 1—46
2. Stefan Rudnyckyj: Über die Sonnenflecke (zweiter Zheil) 1—90
3. Theodor Prymak: Beiträge zur Geschichte der Entwickelung und Involution der Thymusdrüse bei den Knochenfischen..... 1--26
4. Vladimir Levyckyj: Die neuesten Aufsätze in der Theorie der analytischen Functionen..... 1—12
5. Vladimir Levyckyj: Beitrag zur Theorie der Kettenbrüche und der Modulgruppe (zweiter Aufsatz)..... 1—8
6. Mathematisch-physikalische Bibliographie und Chronik ..... 1—41

ЛЬВІВСЬКА БІБЛІОТЕКА
АН УРСР
№ И-30371

ТЕОРИЯ ПЕРСТЕНЯ САТУРНА.

НАПИСАВ

Володимир Левицкий.

1. Одною з найцїкавійших прояв в нашій системі сонїчній є безперечно планета Сатурн. Величезна ся планета, віддалена від сонця в перігелїюм 1345 мілїонів, а в афелїюм 1504 мілїонів кільометрів, є по Юпітері найбільшим тїлом нашої системи; єї промір рівниковий виносить 119.300, а промір, що лучить оба бігуни 106.000 кільометрів. Поверхня Сатурна є проте яких 80, а обєм яких 730 разів більший, як відповідні елементи Землї. Єго маса є 92 рази більша від маси Землї, за се густота є ледви $\frac{1}{8}$-ою густоти земскої, або 0·7, наколи густоту води положимо = 1. Єго обіг сидеричний докола сонця тревав 29 лїт 166 днїв 23 годин 40 мінут, єго оборот докола оси тревав лиш $10^h\ 29^m\ 17^s$. — Докола него кружить аж вісїм місяцїв; з них найбільший Тітан, відкритий еще в р. 1655 через Huyghens'a, найменьший Гіперион, відкритий доперва в р. 1848 через Bond'a і Lassell'a.

Но найважнїйшою та найбільше інтересною прикметою Сатурна, якої нїяке друге зі знаних тїл небесних не мав, є великий перстень, а зглядно систем перстенів, який уносить ся зовсїм свобідно в площи рівниковій планети. Вже Galilei постеріг в р. 1612 через люнету, яку що йно винайдено, що Сатурн мав вид елїптичний або овальний і думав, що ся планета складав ся з трох злучених з собою тїл [1]); два з них після єго гадки були місяцями.

[1]) Пор. пр. Littrow: Wunder des Himmels, ст. 484.

Дальші обсервації Gassendi'го, Hevelius'a та Єзуіта Riccioli'ого над тим цїкавим видом Сатурна не принесли нїчо нового, аж доперва в р. 1659 розпізнав Huyghens, що докола Сатурна находить ся зовсїм свобідний перстень овального виду. Пізнїйше в р. 1675 постеріг Cassini, що сей перстень складає ся властиво з двох перстенів співосередних з Сатурном, віддїлених від себе темною просторонию; ту темну просторонь названо опісля дїлом Cassini'ого. В середині XIX столїтя відкрито ще між дїлом Cassini'ого а внїшним берегом перстеня ще один дїл, який названо дїлом Encke, а в пізнїйших часах бачили деякі астрономи, як Kater, Jakob, Bond, Struve і и. вузонькі, делїкатні співосередні лїнїйки, так що видає ся, мовби перстень не був одноцїльним, лиш системом більшого числа перстенів.

Кромі того відкрив в р. 1850 Bond ще один, темний перстень між внутрішним ясним перстеньом а планетою; сей темний перстень є о стільки цїкавий, що після обсервацій Dawes'a і Lassell'a є він прозрачний, так що через него видко кулю Сатурна. O. Struve бачив в р. 1851 в тім темнім перстеню слїди дїлу, який пізнїйше зникнув, так що здає ся, мовби в перстеню Bond'a заходили ще якісь великі зміни. Сам Dawes приймав, що перстень Bond'a находить ся ще в стані плинним. — В кінци треба примітити, що новійші обсерватори, як Schwabe, Harding, Herschel, South, Schiaparelli, Meyer і и. приймають, що ті перстені не лиш не є а Сатурном співосередні, але навіть самі з собою.

Розміри поодиноких перстенів є в приближеню ось такі[1]) (пор. фіґ. I; на тій фіґурі є лиш ясний перстень внїшний і внутрішний та дїл Cassini'ого ED):

AF	внїшний луч внїшного перстеня	138.400 Km.
AE	внутрішний луч внїшного перстеня	121.900
AD	внїшний луч внутрішного перстеня	119.800
AC	внутрішний луч внутрішн. перстеня	89.800
AB	луч рівниковий Сатурна	62.100
EF	ширина внїшного перстеня	16.600
CD	ширина внутрішного перстеня	29.700
ED	ширина дїлу Cassini'ого	3.100
FC	ширина обох ясних перстенів	46.000
CB	ширина відступу між темним перстенем а Сатурном	27.700
	ширина темного перстеня	13.000

[1]) Пор. Weinek u. Schweiger-Lerchenfeld: Atlas der Himmelskunde, ст. 194.

Після точних помірів [1]), наколи назначимо луч Сатурна AB = r, дістанемо:

$$AF = 2{\cdot}23\ r, \qquad AC = 1{\cdot}48\ r.$$

Грубість перстеня є невелика, бо ледви 300 кільометрів, а маса его ледви виносить $\frac{1}{118}$ маси Сатурна. — Цїлий сей систем обертає ся докола Сатурна — як вказують обсервациї деяких замітних точок перстеня, роблені через Herschel'a, протягом $10^2/_5$ годин, отже около 0·44 дня земского. Після обсервацій Hall'a і Holden'a нахилене перстеня до екліптики виносить 28°, а довгість вступаючого узла в екліптицї є тепер 167°.

Перстень з причини вище наведеного нахиленя не все однако ся нам представляє; в певних положенях планети в его дорозї переходить площа перстеня через сонце і майже через землю; вид еліптичний зникає, а перстень представляє ся лиш в найлїпших телескопах яко дуже тонька лїнїя. В иньших положеннях видко раз північну, раз полудневу площу перстенів; а ще дальше перстень вітворює ся для ока так широко, що покриває цїлком відповідну бігунову околицю планети. Систем перстенїв зникає для ока зовсїм, наколи сонце находячи ся в площи перстеня осьвічує лиш вузонький его берег, або наколи сонце осьвічує північну (полудневу) площу перстеня, а наше око дивить ся на полудневу (північну) площу перстеня.

Давнїйші постереженя Schröter'a, мовби перстень мав атмосферу та гори високі на 1.500 Km., показались невірними. А наколи додамо ще, що після дослїдів Huggins'a дуговина перстеня ані на волос не ріжнить ся від дуговини Сатурна, яка знова після астрофізичних обсервацій в Почдамі є така сама як дуговина сонця, то будемо мали в загальних начерках все, що нам дає безпосередна обсервация перстенїв.

2. Остає тепер квестия і с т о т и перстенїв. Поминаючи сучасну Huyghens'ови гіпотезу Roberval'a, що перстень повстав через пари, які з поверхні Сатурна виходять, гіпотезу Maupertuis, що перстень є останком хвоста якоїсь комети, далї гіпотезу, що се є атмосфера Сатурна, та иньші, які основують ся на більше або меньше фантастичних здогадах, перейдем до висліїдів чисто математичних, які принесли своїм творцям велику славу та подив наукового сьвіта. Ті висліїди Laplace'a, Maxwell'a, Poincaré та Софії Ковалевскої буду старав ся представити в моїй моноґрафії; лучать ся они з собою в безперервній звязи, так що одних без других годї трактувати.

[1]) Пор. F. Tisserand: Traité de mécanique céleste II. ст. 116.

Своєю елеґанцією, прозорим та ясним способом розслїджування найтяжших проблемів механїки неба стали ті дослїди вповнї клясичними; докинути до них по Poincaré'м ще щось нового майже неможливо, так що нинї теорию перстенїв Сатурна можем уважати за викінчену. Тому то я приняв ся дуже вдячного завдання получити ті докази в одну цїлїсть, щоби дати читачам спроможність пізнати їх і подивляти ті глубокі методи, які позволили без обсерваций вглянути і розслїдити природу одного з найтемнїйших феноменів вселенної.

З розслідів тих виходить, що перстень будучий в руху оборотовім не може остояти ся в рівновазї, если приймем, що він є цїпкий, плинний або ґазовий, а до того однородний. В виду того ставсь дуже імовірна гіпотеза Maxwell'a, що перстень складає ся з самих дрібних сателїтів (місяцїв), які кружать густою масою докола Сатурна так, що в нашім оцї творить ся вражінє тяглости; Maxwell перевів доказ, що такий систем може находити ся в тревалій рівновазї. Новійші обсерваций потверджують гіпотезу Maxwell'a.

Важнїйша лїтература про рівновагу тїл оборотових загально, а перстеня Сатурна спеціяльно, є ось така:

Laplace. Traité de mécanique céleste. II. 155. et sqts. (видане з р. 1799).

Matthiessen. Über die Gleichgewichtsfiguren frei rotirender Flüssigkeiten. Kiel 1857.

Matthiessen. Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten, etc. Kiel 1857.

Matthiessen. Über Systeme kosmischer Ringe von gleicher Umlaufszeit als discontinuirliche Gleichgewichtsformen frei rotirenden Flüssigkeitsmasse. Leipzig 1865.

Maxwell. On the stability of the motion of Saturn'srings. Cambridge 1859.

Thomson u. Tait. Treatise on Natural Philosophy; 2. видане т. I. ч. II. ст. 332 et sqts.

Poincaré. Bulletin Astronomique t. II. i Sur l'equilibre d'une masse fluide etc. (Acta mathematica t. VII. 259 et sqts.).

S. Kowalewski. Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnringe (Astronomische Nachrichten Bd. CXI. 1885).

Riemann. Über das Potential eines Ringes (Gesammelte Werke 407).

Hirn. Sur les conditions d' équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne. 1872.

G. H. Darwin. On figures of equilibrium of rotating masses of fluid (Philosophical Transactions 1887).

Basset. On the steady motion of an annular mass of rotating liquid (American Journal of Mathematics t. XI. 1889).

Надто російська робота Лапунова про рівновагу елїпсоіди з р. 1884; зміст поданий через Radau в Bulletin astronomique; далї працї Radau і Callandreau в Bulletin astronomique том III, а врештї знаменитий підручник: F. Tisserand: Traité de mécanique céleste в чотирох томах, де теория перстеня Сатурна систематично представлена становить в великій мірі вихід нашої моноґрафії раз через змодернїзованє деяких давнїйших рахунків, а в друге через много оригінальних гадок і способів аналїзи математичної.

По сих вступних увагах переходимо до властивої материї нинїшної розвідки.

Теория Ляпляса. [1])

1. Ляпляс приймає, що перстень Сатурна є коловий та співосередний з самою планетою, що складає ся з плинних та однородних частних перстенїв, та що відступ таких частних перстенїв є достаточно великий, так що можна зовсїм понехати взаїмне їх дїланє на себе. Приймає він дальше, що кождий з тих частних перстенїв повстав через оборот замкненої фіґури пр. елїпси докола планети; рух сей є одностайний та відбуває ся докола оси прямовісної до середного (рівникового) перекрою планети. Кожда точка поверхнї такого частного перстеня находить ся під дїланєм трох сил, а се: притяганя Сатурна, притяганя цїлого перстеня та сили відосередної. Ляпляс шукає условин рівноваги перстеня в виду таких трох сил та форми (виду) перстенїв.

Най же буде перекройом полуденниковим одного такого частного перстеня елїпса AA′ BB′ (фіґ. II.) о півосях a і b. Вісь OX // AA′ най буде осию обороту сеї елїпси, а O середоточка Сатурна, де цїла єго маса M є сконцентрована. Відступ OC = l, а сорядні якоїсь точки P на поверхнї перстеня є OR = ξ, RN = η, або коли положимо CS = x, SP = y, то:

$$\xi = x,\ \eta = l + y.$$

Наколи складові притяганя Сатурна на точку P є X_1 Y_1, складові притяганя перстеня на точку P є X_2, Y_2, а скорість кутова

[1]) Пор. Laplace: Traité de mécanique céleste II. ст. 155 et sqts; рік 1799.

ω (отже сила відосередна в віддаленю $= 1$ є ω^2, у Ляпляса g), то рівнанє ріжничкове для рівноваги поверхні є [1]):

$$(X_1 + X_2)\, d\xi + (Y_1 + Y_2 + \omega^2\eta)\, d\eta = 0 \qquad 1)$$

Коли абстрагуєм від сплощеня Сатурна, то:

$$X_1\, d\xi + Y_1\, d\eta = f\, d\, V,$$

де f є чинник атракції, а V потенциял притяганя Сатурна, а що:

$$V = \frac{M}{r},$$

то:

$$X_1\, d\xi + Y_1\, d\eta = f\, M\, d\left(\frac{1}{r}\right);$$

а що далї:

$$r = 0P = (l + y)^2 + x^2,$$

то:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2y}{l} + \frac{x^2+y^2}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{l} - \frac{y}{l^2} + \frac{y^2}{l^3} - \frac{x^2}{2\,l^3},$$

наколи пропустимо $\left(\frac{x}{l}\right)^3$, $\left(\frac{y}{l}\right)^3$ яко дуже малї вирази. Тодї:

$$X_1\, d\xi + Y_1\, d\eta = f\,M\left[\left(\frac{2y}{l^3} - \frac{1}{l^2}\right) dy - \frac{x\,dx}{l^3}\right] \qquad 2)$$

Ляпляс приймає, що віддаленє l є дуже велике в порівнаню з a і b, а кромі сего заступає притяганє перстеня на точку P притяганєм безконечно довгого вальця о підставі елїптичній AB A'B', стичного до перстеня в точцї B і B', а о густоті ρ такій самій як перстень (пор. фіг. II). Части E і E' можуть заступити дїланє частий F і F' перстеня, а дїланє дальших частий перстеня і так малїє надзвичайно з віддаленєм. Тодї складові X_2 і Y_2 дїланя перстеня можна заступити відповідними складовими дїланя безконечного вальця, а що ті складові є [2]):

$$X_2 = -\,4\,\pi\,f\,\rho\,x\,\frac{b}{a+b}, \qquad Y_2 = -\,4\,\pi\,f\,\rho\,y\,\frac{a}{a+b},$$

а далї:

$$dx = d\xi,\; dy = d\eta, \qquad \omega^2\eta\, d\eta = \omega^2\,(l+y)\, dy,$$

проте рівнанє 1) перейде на:

$$\left(\frac{fM}{l^3} + 4\pi f\rho\frac{b}{a+b}\right)x\,dx + \left(\frac{fM}{l^2} - \omega^2 l\right)dy + \left(4\pi f\rho\frac{a}{a+b} - \frac{2fM}{l^3} - \omega^2\right)y\,dy = 0. \qquad 3)$$

---

[1]) Пор. пр. Franke: Mechanika teoretyczna, ст. 516.

[2]) Пор. Tisserand: Traité de mécanique céleste II. ст. 54; також Laplace loc. cit. II. 160.

Рівнанє перекрою перстеня є:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

або:

$$\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} = 0,$$

отже рівнанє 3) перейде на:

$$a^2\left(\frac{M}{l^3} + 4\pi\rho\frac{b}{a+b}\right) = b^2\left[\left(\frac{M}{l^3} - \frac{\omega^2}{f}\right)\frac{l}{y} + 4\pi\rho\frac{a}{a+b} - \frac{2M}{l^3} - \frac{\omega^2}{f}\right].$$

Рівнанє то сповняє ся для якогонебудь y, отже:

$$\omega^2 = \frac{fM}{l^3} \qquad 4)\ ^1)$$

і:

$$a^2\left(\frac{M}{l^3} + 4\pi\rho\frac{b}{a+b}\right) = b^2\left(4\pi\rho\frac{a}{a+b} - \frac{3M}{l^3}\right)$$

або:

$$\frac{M}{4\pi\rho l^3} = \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)(3\lambda^2+1)} = e \qquad 5)$$

де за Ляплясом значимо $\frac{b}{a} = \lambda$. А що $e = \frac{M}{4\pi\rho l^3}$ є додатне, то мусить бути $\lambda > 1$, або $b > a$; перстень мусить бути проте конче сплощений.

$e = 0$ для $\lambda = 1, +\infty$; в границях $(1 \cdots\cdots \infty)$ є всегда $e > 0$, отже бодай раз maximum; для maximum мусить бути:

$$\frac{de}{d\lambda} = \frac{-3\lambda^4+6\lambda^3+4\lambda^2+2\lambda-1}{(\lambda+1)^2(3\lambda^2+1)^2} = 0$$

або:

$$3\lambda^4 - 6\lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Рівнанє се має два корені додатні, один меньший від 1, другий 2·594.....; можна взяти сей корінь більший, для якого перстень буде більше сплощений. Тодї $e = 0{\cdot}0543026$.

Наколиб:

$$e = \frac{M}{4\pi\rho l^3} > 0{\cdot}0543026,$$

тоби рівнанє 5) не мало анї одного кореня додатного; для:

$$e < 0{\cdot}0543026 \qquad 6)$$

---

[1]) Рівнанє 4) показує, що скорість кутова перстеня є рівна скорости сателїта, віддаленого від середоточки Сатурна о луч перстеня.

є два корені додатні. — Наколи луч Сатурна є R, густота середня Сатурна ρ_0, отже єго маса:

$$M = \frac{4}{3} R^3 \pi \rho_0 ,$$

то з нерівности 6) вийде:

$$\frac{\rho}{\rho_0} > 6{\cdot}14 \left(\frac{R}{l}\right)^3 \qquad 7)$$

Тодї для внутрішної границі перстенїв отже для $l = 1{\cdot}48\,R$ є $\frac{\rho}{\rho_0} > 1{\cdot}89$

а внїшної $l = 2{\cdot}23\,R$ є $\frac{\rho}{\rho_0} > 0{\cdot}55,$

значить ся, щоби перстень плинний однородний находив ся в сталій рівновазї, мусить єго густота при березї внутрішнїм бути майже два рази так велика, а при березї внїшнім майже через половину така, як густота Сатурна. — Густота перстеня є нам правда незвісна, но границї Ляпляса є абсолютно за великі, щоби перстень міг удержати ся в тім видї, в якім єго розсліджує Ляпляс.

До загальнїйших висліdів доходить Tisserand [1]). Після теорема Poincaré [2]) рівновага течи в якім будь геометричнім видї ставсь неможлива, наколи:

$$\omega^2 > 2\pi f\rho.$$

Отже наколи возьмем $\omega^2 < 2\pi f\rho$, то після рівнаня 4) буде:

$$\rho > \frac{M}{2\pi l^3}, \qquad \text{або:}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} > \frac{2}{3} \left(\frac{R}{l}\right)^3,$$

отже для границї внутрішної $\frac{\rho}{\rho_0} > \frac{1}{4{\cdot}9}$, для границї внїшної $\frac{\rho}{\rho_0} > \frac{1}{16{\cdot}6}$;

як бачим перстень о густотї меньшій не мігби ся удержати в нїякім видї і розпав би ся з великою силою на части, з яких кожда обертала би ся сама для себе докола Сатурна.

2. Ляпляс доказує далї [3]), що перстень однородний в тім видї, в якім він єго приймає, находив би ся в рівновазї хитkій, яку найменьший вплив може заколотити, а тодї перстень впав би на поверхню Сатурна. Єго доказ є слїдуючий.

---

[1]) Пор. Tisserand loc. cit. II. 121.

[2]) Bulletin astronomique II. 117.

[3]) Laplace loc. cit. II. 164.

Приймім, що перстень є лїнїєю кольовою о лучу r, котрої середоточка не сходить ся з середоточкою Сатурна, але через якийсь взлив внішний зістала віддалена від середоточки Сатурна о відступ l. Виследна з притягання того кола через Сатурн мусить переходити через просту l, яка лучить обі середоточки.

Наколи луч r творить кут φ з продовженєм лїнїї l, то притягане Сатурна на елемент $rd\varphi$ перстеня (рівнобіжне до l) буде:

$$-\frac{d}{dl}\int_0^{2\pi}\frac{M\,d\varphi}{\sqrt{r^2+l^2+2rl\cos\varphi}}=F.$$

А що:

$$(r^2+l^2+2rl\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r}\left(1+\frac{l}{r}e^{\varphi i}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{l}{r}e^{-\varphi i}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

то наколи розвинемо:

$$\left(1+\frac{l}{r}e^{\varphi i}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\alpha_1\frac{l}{r}e^{\varphi i}+\alpha_2\frac{l^2}{r^2}e^{2\varphi i}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(1+\frac{l}{r}e^{-\varphi i}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\alpha_1\frac{l}{r}e^{-\varphi i}+\alpha_2\frac{l^2}{r^2}e^{-2\varphi i}+\cdots\cdots\cdots$$

і ти чинники помножимо, дістанемо:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{r^2+l^2+2rl\cos\varphi}}=\frac{2\pi}{r}\left(1+\alpha_1^2\frac{l^2}{r^2}+\alpha_2^2\frac{l^4}{r^4}+\quad\right),$$

а з відси:

$$F=-\frac{4\pi Ml}{r^3}\left(\alpha_1^2+2\alpha_2\frac{l^2}{r^2}+\quad\right)$$

F остає від'ємне для якогонебудь l; значить ся середоточка перстеня віддаляє ся від середоточки Сатурна і якийби був рух зглядний обох тих середоточок, крива, яку рух сей описує, є вигнута ку Сатурнови; середоточка перстеня мусить ся проте віддаляти що раз більше і більше від середоточки планети, аж его обвід зіткне ся з поверхню Сатурна.

А що перстень однородний в усїх своїх частях складає ся з безконечного числа таких колес, як се, що ми розслїджували, проте середоточка перстеня зіставалаби відпихана через середоточку Сатурна, наколиб лиш троха були від себе віддалені, і перстень скінчив би своє істнованє, бо спавби на поверхню Сатурна.

Звідси вносить Ляпляс, що понеже тепер перстень є в рівновазї, то частні перстенї мусять мати вид неправильний, а також між ними мусять заходити взаїмні дїланя, які ми в попередних розслїдах пропустили.

Теория Maxwella. [1])

1. Maxwell займає ся квестиєю цїпкого перстеня однородного, симетричного з огляду на площу, що переходить через точку тяжести S Сатурна (фіг. III). Наколи C є середоточка тяжести перстеня, M маса Сатурна, M' маса перстеня, G середоточка тяжести Сатурна і перстеня разом, то S, C, G лежати мусять все в одній лїнїї простій. Наколи SC = r, то:

$$SG = \frac{M'}{M+M'}\, r, \qquad CG = \frac{M}{M+M'}\, r.$$

Найже в перстеню буде лїнїя BCB' незмінна, SX сталий напрям, $\sphericalangle$ XSC = ϑ, $\sphericalangle$ DCS = φ, $\sphericalangle$ XDC = $\vartheta + \varphi$.

Maxwell обчисляє скількість енергії кінетичної 2T для перстеня і планети разом в руху зглядним докола точки G. Рух віднесемо до двох осий прямовісних GX і GY (GX // SX).

Енергія складає ся з трох частий:

а) енергії маси M, т. є.

$$M\left[\left(\frac{d}{dt}\,\frac{M'r}{M+M'}\right)^2 + \left(\frac{M'r}{M+M'}\right)^2 \frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right].$$

б) енергії маси M', що є сконцентрована в C, т. є.

$$M'\left[\left(\frac{d}{dt}\,\frac{Mr}{M+M'}\right)^2 + \left(\frac{Mr}{M+M'}\right)^2 \frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right].$$

в) енергії перстеня в руху зглядним докола середоточки тяжести C; рух сей є оборотовий докола оси прямовісної в точцї C до площі рисунку. Енергія ся є:

$$M'k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

де $M'k^2$ є момент безвладности перстеня зглядом сеї оси. Цїла енергія є проте:

$$2\,T = \frac{MM'}{M+M'}\left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2\,\frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right) + M'k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

Наколи функция сил, що походить з дїланя маси M, зібраної в S, на ріжні точки перстеня, і взаїмних притягань перстеня, є fMV, то — так як V залежне є лиш від r і φ, що визначають положенє точки S з огляду на перстень, а від ϑ не залежить — дістанемо:

$$\frac{MM'}{M+M'}\,\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{MM'}{M+M'}\,r\,\frac{d\vartheta^2}{dt^2} = fM\,\frac{\partial V}{\partial r}$$

---

[1]) Maxwell. On the stability of the motion of Saturn'srings. Cambridge 1859. Цїлий сей уступ є представлений після Tisserand'a loc. cit. II, бо самого твору Maxwella годї дістати.

$$M'k^2 \frac{d^2(\vartheta+\varphi)}{dt^2} = fM \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{MM'}{M+M'} r^2 \frac{d\vartheta}{dt} + M'k^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\right)\right] = 0.$$

або:

$$\left.\begin{aligned} M'k^2 \frac{d^2(\vartheta+\varphi)}{dt^2} &= fM \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ M' \frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\vartheta}{dt}\right) &= -f(M+M') \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ M'\left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\frac{d\vartheta^2}{dt^2}\right) &= f(M+M') \frac{\partial V}{\partial r} \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Наколи пропустимо взаїмне дїланє перстеня на себе — бо оно від r і φ не залежить — то V є потенциялом перстеня в точцї S.

Наколи приймем, що середоточка Сатурна зглядом перстеня не зміняє свого положеня, можемо наложити $r = r_0$ (const.), $\varphi = \varphi_0$ (const.) і відповідно $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0$ Тодї рівнанє 1) дасть:

$$M'k^2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = fM \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0$$

$$M'r_0^2 \frac{d^2\vartheta}{dr^2} = -f(M+M') \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0$$

$$-M'r_0 \frac{d\vartheta^2}{dt^2} = f(M+M') \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0$$

З відси слїдує:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega \text{ (const.)}, \quad \omega^2 = -f \frac{M+M'}{M'r_0} \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0 &= 0, \qquad \vartheta = \omega t \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Бачимо проте, що луч SC обертавби ся одностайно докола точки S і потягавби в собою цїпкий перстень, так що его кожда точка оставалаби стало віддалена від S.

Очевидно, що такий рух в дїйсности не істнує; для правдивого руху, де виступають ріжні заколоти, треба покласти:

$$r = r_0 + r_1, \qquad \vartheta = \omega t + \vartheta_1, \qquad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1,$$

де r_0 ω φ_0 характеризують яко сталі стан початковий, r_1 ϑ_1 φ_1 представляють невеликі зміни в пересуненю так, що їх квадрати можзалишити; є они функциями змінної t, так що походні $\frac{dr_1}{dt}$ $\frac{d\vartheta_1}{dt}$ $\frac{d\varphi_1}{dt}$ є дуже малі. Тодї рівнаня 2) дадуть:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\omega^2 M' r_0}{f(M+M')} + Hr_1 + K\varphi_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = Kr_1 + L\varphi_1,$$

де:

$$H = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)_0, \qquad K = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial \varphi}\right)_0, \qquad L = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right)_0 \quad 3)$$

Рівнання 1) дадуть:

$$\left.\begin{aligned} &M'\left(2\omega r_0 \frac{dr_1}{dt} + r_0^2 \frac{d^2\vartheta_1}{dt^2}\right) + f(M+M')(Kr_1 + L\varphi_1) = 0.\\ &M'\left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \omega^2 r_1 - 2\omega r_0 \frac{d\vartheta_1}{dt}\right) + f(M+M')(Hr_1 + K\varphi_1) = 0.\\ &M' k^2 \left(\frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}\right) - fM(Kr_1 + L\varphi_1) = 0. \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Щоби ті рівнання з'інтеґрувати, підставмо — як звичайно:

$$r_1 = Ae^{\nu t}, \qquad \vartheta_1 = Be^{\nu t}, \qquad \varphi_1 = Ce^{\nu t}$$

(A, B, C, ν сталі); по підставленю дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} &A\left[2\omega r_0 \nu M' + f(M+M')K\right] + Br_0^2 \nu^2 M' + Cf(M+M')L = 0.\\ &A\left[(\nu^2 - \omega^2)M' - f(M+M')H\right] - 2B\omega r_0 \nu M' - Cf(M+M')K = 0.\\ &-AfMK + Bk^2\nu^2 M' + C(k^2\nu^2 M' - fMN) = 0. \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Еліміновуймо з відси A, B, C, то дістанемо рівнанє 6) степеня форми:

$$\nu^2(P\nu^4 + R\nu^2 + S) = 0 \qquad 6)$$

де:

$$7)\quad \begin{cases} P = M'^2 k^2 r_0^2 \\ R = 3M'^2 k^2 r_0^2 \omega^2 - fM'(M+M')Hk^2 r_0^2 - fM'\left[(M+M')k^2 + Mr_0^2\right]L \\ S = M'\left[(M+M')k^2 - 3Mr_0^2\right]fL\omega^2 + f^2(M+M')\left[(M+M')k^2 + Mr_0^2\right](HL - K^2) \end{cases}$$

Понеже рівнанє 6) має двократний корінь $\nu = 0$, проте треба взяти:

$$r_1 = A + A't, \qquad \vartheta_1 = B + B't, \qquad \varphi_1 = C + C't.$$

Наколи се вставимо в 4) і зрівнаємо до зера части сталі і сочинники при t, дістанемо:

$$A' = 0, \qquad C' = 0, \qquad C = -\frac{K}{L}A,$$

$$B' = \frac{A}{2\omega r_0}\left(f\frac{M+M'}{M'}\frac{K^2 - HL}{L} - \omega^2\right),$$

а тодї:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= A, \qquad \varphi_1 = -\frac{K}{L} A, \\ \vartheta_1 &= B + \frac{A}{2\omega r_0}\left(f\frac{M+M'}{M}\frac{K^2 - HL}{L} - \omega^2\right) t \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

о двох сталих A і B.

Дальші корони рівнаня 6) є ν_1, $\nu_2 = -\nu_1$, ν_3, $\nu_4 = -\nu_3$, і для них дістанемо на інтеґрали рівнань 4) вартости:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= A_1 e^{\nu_1 t} + A_2 e^{\nu_2 t} + A_3 e^{\nu_3 t} + A_4 e^{\nu_4 t} \\ \vartheta_1 &= \lambda_1 A_1 e^{\nu_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\nu_2 t} + \lambda_3 A_3 e^{\nu_3 t} + \lambda_4 A_4 e^{\nu_4 t} \\ \vartheta_1 &= \mu_1 A_1 e^{\nu_1 t} + \mu_2 A_2 e^{\nu_1 t} + \mu_3 A_3 e^{\nu_3 t} + \mu_4 A_4 e^{\nu_4 t} \end{aligned}\right\} \quad 9)$$

де є чотири сталі довільні і де: $\lambda_s = \frac{B_s}{A_s}$, $\mu_s = \frac{C_s}{A_s}$.

З полученя рівнань 8) і 9) дістанемо загальні інтеґрали рівнань 4) з 6 сталими. Сталі A і B представити буде можна через r_0 ϑ_0 φ_0 і ω на основі рівнань 8) та реляций $r = r_0 + r_1$, $\vartheta = \omega t + \vartheta_1$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$. Иньші сталі найдем, наколи дамо на r, ϑ, φ, $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\vartheta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ при $t = 0$ певні вартости дуже малі; тодї дістанемо і на A_1, A_2, A_3, A_4 дуже малі вартости, наколи коренї ν_1 і ν_3 мають вид αi, отже коли $e^{\nu_1 t}$, $e^{\nu_2 t}$, $e^{\nu_3 t}$, $e^{\nu_4 t}$ перейдуть на $\sin\psi$ та $\cos\psi$. Наколиб однак коренї були дїйсні, то ті функциї виложні рослиб без кінця, а так само колиб они мали вид $a + bi$, то в r, ϑ, φ виступалиби чинники періодичні, яких сочинники зарасталиб без кінця. Щоб отже обі вартости ν^2 в рівнаню $P\nu^4 + R\nu^4 + S = 0$ були дїйсні і від'ємні (отже ν_1 і ν_3 форми αi), мусить бути:

$$PR > 0, \qquad PS > 0, \qquad R^2 - 4PS > 0.$$

2. Приноровимо ту теорию тепер до **перстеня колового ріжнородного о безконечно малих поперечних перекроях.**

Най (Фіг. IV) O буде середоточкою перстеня, C середоточкою тяжести, $OC = h$, s луч перстеня, ψ змінний кут, ρ густота перстеня в точцї N. Тодї після теориї Fourier'a:

$$\rho = \frac{M'}{2\pi s}\left(\alpha_0 + 2\alpha_1\cos\psi + 2\beta_1\sin\psi + \frac{2\alpha_2}{3}\cos 2\psi + \frac{2\beta_2}{3}\sin 2\psi + \cdots\cdots\right) \quad 10)$$

α_i β_i сталі.

Елемент маси в N є $\rho s d\psi$, отже: $\int_0^{2\pi} \rho s d\psi = M'$.

Після твердження о моментах з огляду на вісь OC і просту прямовісну до OC (в точці O) дістанемо:

$$\int_0^{2\pi} s^2 \rho \cos\psi d\psi = M'h, \qquad \int_0^{2\pi} s^2 \rho \sin\psi d\psi = 0.$$

Наколи в тих трох інтеґралах вставимо за ρ вартість 10) і з'інтеґруємо, дістанемо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \frac{h}{s}$, $\beta_1 = 0$.

Щоби найти потенциял перстеня, зауважим, що момент безвладности перстеня з огляду на вісь прямовічну до єго площи в точці O є $M's^2$; момент з огляду на вісь, до тамтої рівнобіжну в точці C, є $M'k^2$, отже:

$$M's^2 = M'k^2 + M'h^2,$$

або:

$$k^2 = s^2 (1 - \alpha_1^2).$$

Най $OS = r'$, $NS = \Delta$, $\sphericalangle BOS = \psi'$, тоді:

$$\Delta^2 = s^2 + r'^2 - 2sr'\cos(\psi' - \psi),$$

а звідси — наколи пропустимо висші степені $\frac{r'}{s}$ — дістанемо:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{s}\left\{1 + \frac{r'}{s}\cos(\psi' - \psi) + \frac{r'^2}{4s^2} + \frac{3r'^2}{4s^2}\cos 2(\psi - \psi')\right\}.$$

В виду того потенциял перстеня в точці S, який є рівний:

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho s d\psi}{\Delta}$$

буде:

$$V = \frac{M'}{s}\left[1 + \alpha_1 \frac{r'}{s}\cos\psi' + \frac{r'^2}{4s^2}(1 + \alpha_2 \cos 2\psi' + \beta_2 \sin 2\psi')\right],$$

а що:

$$r'\cos\psi' = h - r\cos\varphi, \qquad r'\sin\psi' = r\sin\varphi,$$

де: $\sphericalangle SCO = \varphi$, $SC = r$, то:

$$V = \frac{M'}{s}\left[1 + \alpha_1 \frac{h - r\cos\varphi}{s} + \frac{h^2 + r^2 - 2hr\cos\varphi}{4s^2} + \alpha_2 \frac{h^2 - 2hr\cos\varphi + r^2\cos 2\varphi}{4s^2} + \beta_2 \frac{2hr\sin\varphi - r^2\sin 2\varphi}{4s^2}\right] 11).$$

Наколи приймем, що з самого початку середоточка перстеня є схожа з середоточкою Сатурна, тоді $\varphi_0 = 0$, $r_0 = h = \alpha_1 s$, $k^2 = s^2(1 - \alpha_1^2)$; тоді з 11) випаде:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0 = -\frac{M'\alpha_1}{s^2}, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0 = 0.\\
&\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)_0 = H = \frac{M'}{2s^3}(1+\alpha_2)\\
&\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial \varphi}\right)_0 = K = -\frac{M'}{2s^3}\beta_2 r_0 = -\frac{M'}{2s^2}\alpha_1\beta_2\\
&\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right)_0 = L = \frac{M'}{2s^3}r_0^2\left(1-\alpha_2+\frac{2s}{r_0}\alpha_1\right) = \frac{M'}{2s}\alpha_1^2(3-\alpha_2)
\end{aligned}\right\} \quad 12).$$

Після рівнаня 2) є:

$$\omega^2 = f\,\frac{M+M'}{s^3},$$

тож коли ті всї вартости вставимо в 7), дістанемо:

$$\frac{P}{M'^2 s^4 \alpha_1^2} = 1-\alpha_1^2$$

$$\frac{R}{M'^2 s^4 \alpha_1^2} = \omega^2\left[1-\alpha_1^2-\frac{1}{2}\,\frac{M}{M+M'}\,\alpha_1^2(3-\alpha_2)\right].$$

$$\frac{S}{M'^2 s^4 \alpha_1^2} = \frac{\omega^4}{4}\left\{(1-\alpha_1^2)(9-\alpha_2^2-\beta_2^2)+\frac{M}{M+M'}\alpha_1^2(-15+8\alpha_2-\alpha_2^2-\beta_2^2)\right\}.$$

Наколи з огляду на се, що $\frac{M'}{M}$ є дуже мале, положимо $\frac{M}{M+M'}=1$, дістанемо місто рівнаня $P\nu^4+R\nu^2+S=0$ рівнанє:

$$(1-\alpha_1^2)\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^4+\left(1-\frac{5}{2}\alpha_1^2+\frac{1}{2}\alpha_1^3\alpha_2\right)\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2+\frac{1}{4}(9-24\alpha_1^2-\alpha_2^2-\beta_2^2+8\alpha_1^2\alpha_2)=0. \quad 13)$$

Наколи перстень є однородний, тодї густота є стала, отже $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\beta_2=0$; тодї $P=R=S=0$, а рівнаня 5) дадуть:

$$\nu^2 = \omega^2 + f\,\frac{M+M'}{2s^3}$$

т. є. ν^2 булоб дїйсне і додатне, а з того — як уже знаєм — виходить, що перстень цїпкий однородний не може бути тревалий.

Наколи тепер приймем в рівнаню 13) $\alpha_2=\beta_2=0$ $(\alpha_1 \gtrless 0)$, дістанемо:

$$(1-\alpha_1^2)\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^4+\left(1-\frac{5}{2}\alpha_1^2\right)\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2+\frac{9}{4}-6\alpha_1^2=0.$$

ν^2 мусить бути від'ємне, отже P, R, S мусять мати той сам знак; щоби се було, мусить: $\alpha_1^2 < 0{\cdot}375$, або $\alpha_1^2 > 1$.

Щоби вартости на ν^2 були дійсні, мусить

$$71\,\alpha_1^4 - 112\,\alpha_1^2 + 32 \angle 0$$

або:

$$0{\cdot}37473 \angle \alpha_1^2 < 1{\cdot}20273.$$

Щоби отже була рівновага, мусить бути $\alpha_1{}^2$ замкнене або в границях 0·37473 і 0·375, або в границях 1 і 1·20273. Но се неможливо, бо густота:

$$\rho = \frac{M'}{2\pi s}\,(1 + 2\alpha_1 \cos\psi)$$

має бути додатна для всяких ψ; тимчасом для $\psi = \pi$ випаде $2\alpha_1 < 1$, $\alpha_1{}^2 \angle 0{\cdot}25$, що ся з попереднім не годить.

Треба проте в рівнаню 13) взяти $\alpha_2 \gtrless 0$ і $\beta \lesseqgtr 0$ і пересьвідчити ся, чи можна визначити сталі α_1 α_2 β_2 так, щоби чотири корені ν мали вид bi, а ρ було для всяких ψ додатне. Того случаю не розслїдив Maxwell, зробив се Radau[1]). Після его обчислень випадає на случай рівноваги:

$$1{\cdot}317 \angle 2\alpha_1 \angle 1{\cdot}397, \qquad 0{\cdot}32 \angle \frac{2}{3}\,\alpha_1 \angle 0{\cdot}60, \qquad \frac{2}{3}\sqrt{\beta_2^2} \angle 0{\cdot}068,$$

$$0{\cdot}66 \angle \frac{h}{s} \angle 0{\cdot}70.$$

Бачимо проте, що вартість безглядна сочинника β_2 в формулї на ρ має бути дуже мала, сочинника α_2 много більша. З відси слїдує, що густота ρ в ріжних місцях перстеня (для ріжних ψ) дізнавалаби наглядних змін, що є незгідне з обсервацією.

Maxwell розслїджував далї перстень коловий однородний, обтяжений якоюсь масою в одній точцї; з его розслїдів виходить, що щоби була рівновага, мусїлаби та додаткова маса бути дуже значна; середоточка тяжести цїлости булаби віддалена від соредоточки фігури в границях 0·8158s і 0·8279s. Но обсервация перстеня не вказує такої неправильности, в виду чого гіпотезу цїпких перстенїв треба відкинути.

3. Колиж в сей спосіб доказав Maxwell, що гіпотеза цїпкого перстеня є неімовірна, то тепер бере під увагу перстень, що складає ся з великого числа дрібних сателїтів P_1, P_2, P_3, наколи їх є много, то витворюють вражінє тяглого перстеня.

---

[1]) Пор. Tisserand loc. cit. II. 131.

Наколи возьмем один з них пр. P_1 о масї m_1 то він остає під впливом Сатурна (маса M) і прочих сателїтів P_2, P_3, ... (маси m_2, m_3, ...). Наколи приймем, що рухи усїх сателїтів відбувають ся в одній площи (xy), а x_1 y_1 R_1, x_2 y_2 R_2, ... є сорядні та функциї пертурбацийні поодиноких сателїтів, та коли залишимо дїланя сателїтів на Сатурна, так як ті дїланя взаїмно ся зносять, дістанемо:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + fM\frac{x_1}{r_1^3} = \frac{\partial R_1}{\partial x_1}$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + fM\frac{y_1}{r_1^3} = \frac{\partial R_1}{\partial y_1}$$

$$R_1 = f\sum \frac{m_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}};$$

(сума відносить ся до всїх P_2, P_3, ...)

або в сорядних бігунових ($x_\nu = r_\nu \cos v_\nu$, $y_\nu = r_\nu \sin v_\nu$, $\nu = 1, 2, 3, ...$):

$$\left.\begin{aligned} r_1\frac{dv_1^2}{dt^2} - \frac{d^2r_1}{dt^2} - \frac{fM}{r_1^2} &= -\frac{\partial R_1}{\partial r_1} \\ r_1\frac{d^2v_1}{dt^2} + 2\frac{dr_1}{dt}\frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{r_1}\frac{\partial R_1}{dv_1} \end{aligned}\right\} \quad 14)$$

$$R_1 = f\sum \frac{m_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(v_2-v_1)}}.$$

Приймім, що сателїти є з початку розміщені в вершках правильного многокутника вписаного в коло о лучу a, то наколи їх є p, а відповідний кут середоточний (що відповідає кождому з боків многокутника) є 2ϑ, то:

$$\vartheta = \frac{\pi}{p}.$$

Наколи пропустимо взаїмні пертурбациї сателїтів, то они відбувають рух по колї з однакою скоростию кутовою ω, а тодї для якогонебудь часу t є:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= a, & r_1 &= k + \omega t \\ r_2 &= a, & r_2 &= k + \omega t + 2\vartheta \\ r_3 &= a, & r_3 &= k + \omega t + 4\vartheta \\ &- - - - - - - \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

де k є сталий кут, який творить луч SP_1 в лучом рухомим.

Наколиж возьмем під увагу взаїмні дїлання сателїтів, дістанемо:

$$\left.\begin{array}{llll} r_1 = a\ (1 + \rho_1) & v_1 = k + \omega t + \sigma_1 & & \\ r_2 = a\ (1 + \rho_2) & v_2 = k + \omega t + 2\vartheta + \sigma_2 & v_2 - v_1 = 2\vartheta + \sigma_2 - \sigma_1 & \\ r_3 = a\ (1 + \rho_3) & v_3 = k + \omega t + 4\vartheta + \sigma_3 & v_3 - v_1 = 4\vartheta + \sigma_3 - \sigma_1 & \\ - \quad - \quad - & - \quad - \quad - \quad - & - \quad - \quad - \quad - & \end{array}\right\} \quad 16)$$

ρ_ν σ_ν є величини, звязані з масою m_ν; величини ті остануть дуже малі, наколи рух відїйде не много від стану означеного рівнанями 15). В виду того пропускаючи квадрати і добутки $\rho\nu$ і $\sigma\nu$ можем розвинути ряди і дістанемо:

$$-\frac{\partial R_1}{\partial r_1} = f \sum m_2 \frac{r_1 - r_2 \cos(v_2 - v_1)}{\left[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{r_1}\frac{\partial R_1}{\partial r_1} = f \sum m_2 \frac{r_2 \sin(v_2 - v_1)}{\left[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Але:

$$r_1 - r_2 \cos(v_2 - v_1) = 2a \sin^2\vartheta \left[1 + \frac{\rho_1 - \rho_2 \cos 2\vartheta}{2\sin^2\vartheta} - (\sigma_1 - \sigma_2)\operatorname{cotg}\vartheta\right]$$

$$r_2 \sin(v_2 - v_1) = 2a \sin\vartheta \cos\vartheta \left[1 + \rho_2 - (\sigma_1 - \sigma_2)\operatorname{cotg}\vartheta\right]$$

$$\left[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1)\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8a^3 \sin^3\vartheta}\left[1 - \frac{3}{2}(\rho_1 + \rho_2) + \frac{3}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\operatorname{cotg}\vartheta\right],$$

а дальше:

$$r_1 \frac{dv_1^2}{dt^2} - \frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{fM}{r_1^2} = a\left(\omega^2 + \omega^2\rho_0 + 2\omega\frac{d\sigma_1}{dt} - \frac{d^2\rho_1}{dt^2} - fM\frac{1 - 2\rho_1}{a^3}\right)$$

$$r_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + 2\frac{dr_1}{dt} = a\left(\frac{d^2\sigma_1}{dt^2} + 2\omega\frac{d\rho_1}{dt}\right)$$

В виду того рівнаня 14) перейдуть на:

$$\omega^2 - \frac{fM}{a^3} + \left(\omega^2 + \frac{2fM}{a^3}\right)\rho_1 + 2\omega\frac{d\sigma_1}{dt} - \frac{d^2\rho_1}{dt^2} = \frac{f}{4a^3}\sum\frac{m_2}{\sin\vartheta}\left(1 - \rho_1 - \sigma_2 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\operatorname{cotg}^2\vartheta + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\operatorname{cotg}\vartheta\right)$$

$$2\omega\frac{d\rho_1}{dt} + \frac{d^2\rho_1}{dt^2} = \frac{f}{4a_3}\sum\frac{m_2\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\left[1 - \frac{3\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}(\operatorname{tg}\vartheta + 2\operatorname{cotg}\vartheta)\right]$$

Maxwell приймає, що маси сателїтів є рівні, отже:

$$m_1 = m_2 = m_3 = \quad = \mu M,$$

де M є маса Сатурна; отже без взаїмних ділань сателїтів буде: $\omega^2 = \frac{fM}{a^3}$, або $\frac{fm_2}{a^3} = \omega^2\mu$. Послїдні рівнаня можна написати:

$$\left\{\begin{array}{l} \omega^2 - \frac{fM}{a^3} + 3\omega^2\varrho_1 + 2\omega\frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{d^2\varrho_1}{dt^2} = \frac{1}{4}\omega^2\mu\sum\left(1-\varrho_1-\varrho_2+\frac{\varrho_1-\varrho_2}{2}\operatorname{cotg}^2\vartheta+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\operatorname{cotg}\vartheta\right)\frac{1}{\sin\vartheta} \\ \frac{d\varrho_1}{dt} + \frac{d^2\sigma_1}{dt^2} = \frac{1}{4}\omega^2\mu\sum\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\left[1-\frac{3\varrho_1+\varrho_2}{2}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}(\operatorname{tg}\vartheta+2\operatorname{cotg}\vartheta)\right]. \end{array}\right.$$

В обох сумах, наколи переходимо від P_2 до P_3, , мусить ϑ переходити на 2ϑ, 3ϑ, ·····, отже перебігати вартости:

$$\frac{\pi}{p}, \quad \frac{2\pi}{p}, \qquad (p \quad 1)\ \frac{\pi}{p} \qquad 18).$$

Треба тепер з'інтеґрувати систем 2p рівнань ріжничкових лїнїових 2-ого ряду 17) зі сталими сочинниками; в тій цїли треба покласти:

$$\rho_\nu = H_\nu\, e^{Nt}$$

$$\sigma_\nu = K_\nu\, e^{Nt}$$

(H_ν K_ν сталі).

Наколи се вставимо в рівнаня, дістанемо наперед:

$$\omega^2 - \frac{fM}{a^3} = \frac{1}{4}\,\omega^2\mu\sum\frac{1}{\sin\vartheta},$$

а далї дістанемо систем 2p рівнань однородних, з яких виелїмінуємо H_ν K_ν; Їх визначник зрівнаний до зера дасть рівнане на визначене N. Рівнане се буде степеня 4p; до кождого кореня належить одна розвязка з одною довільною сталою, а сума тих частних розвязок буде загальним інтеґралом в функциї часу і 4p довільних сталих. Щоби однак $\rho\nu$ $\sigma\nu$ позістали все малі, як з початку, мусять всї корені рівнани на N мати вид $\pm$ ai.

Щоби дістати умови, в яких се ся дїє, уживає Maxwell слїдуючого способу. Кладе він яко частні розвязки:

$\rho\nu = A\cos(nt + \alpha + 2\nu\gamma\vartheta)$, $\sigma\nu = B\sin(nt+\alpha+2\nu\gamma\vartheta)$ $\nu = 1, 2, 3,$ 19)

де A, B, n, α є сталі, а γ число цїле додатне.

Або:

$\rho_1 = A\cos u$, $\sigma_1 = B\sin u$

$\rho_2 = A\cos u\cos 2\gamma\vartheta - A\sin u\sin 2\gamma\vartheta$, $\sigma_2 = B\sin u\cos 2\gamma\vartheta + B\cos u\sin 2\gamma\vartheta$,

де $u = nt + \alpha + 2\gamma\vartheta$.

В виду того рівнаня 17) дадуть:

$$\left.\begin{array}{l} \omega^2 - \frac{fM}{a^3} + \left[(3\omega^2+n^2)A+2\omega nB\right]\cos u = \Theta \\ -(2\omega n A + n^2 B)\sin u = \Phi \end{array}\right\} \qquad 20)$$

де :

$$\left.\begin{aligned}\Theta=\frac{1}{4}\omega^2\mu\sum\frac{1}{\sin\vartheta}\Big[1-\cos u\Big(2A\cos^2\gamma\vartheta-A\sin^2\gamma\vartheta\cot g^2\vartheta+\frac{1}{2}B\sin 2\gamma\vartheta\cot g\vartheta\Big)+\\ +\sin u\Big(A\sin 2\gamma\vartheta+\frac{1}{2}A\sin 2\gamma\vartheta\cot g^2\vartheta+B\sin^2\gamma\vartheta\cot g\vartheta\Big)\Big]\\ \Phi=\frac{1}{4}\omega^2\mu\sum\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\Big\{1+\sin u\Big[\frac{1}{2}A\sin 2\gamma\vartheta+B(tg\vartheta+2\cot g\vartheta)\sin^2\gamma\vartheta\Big]-\\ -\cos u\Big[\frac{3}{2}A+\frac{1}{2}A\cos 2\gamma\vartheta+\frac{1}{2}B(tg\vartheta+2\cot g\vartheta)\sin 2\gamma\vartheta\Big]\Big\}\end{aligned}\right\}\ 21).$$

В сумі перебігає ϑ вартости 18). Вартости 18) рівно віддалені від кінця сповняють ся до π, вираз середний сам в $\frac{\pi}{2}$. В виду того в 21) все ся знесе, кромі виразу, де $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ (бо иньші вирази що два в рівні, але їх знаки в противні), так що :

$$\Theta=\omega^2\mu\left[K+(AL_\gamma-BM_\gamma)\cos u\right]$$
$$\dot{\Phi}=\omega^2\mu\,(AM_\gamma+BN_\gamma)\sin u,$$

де :

$$L_\gamma=\sum_{\vartheta=\frac{\pi}{p}}^{(p-1)\frac{\pi}{p}}\left(\frac{\sin^2\gamma\vartheta\cos\vartheta}{4\sin^3\vartheta}-\frac{\cos^2\gamma\vartheta}{2\sin\vartheta}\right)$$
$$M_\gamma=\sum\frac{\sin 2\gamma\vartheta\cos\vartheta}{8\sin^2\vartheta}$$
$$N_\gamma=\sum\left(\frac{\sin^2\gamma\vartheta\cos^2\vartheta}{2\sin^3\vartheta}+\frac{\sin^2\gamma\vartheta}{4\sin\vartheta}\right)$$
$$K=\sum\frac{1}{4\sin\vartheta}$$

В виду того рівнаня 20) дадуть :

$$\omega^2-\frac{fM}{a^3}-\omega^2\mu K+\left[(3\omega^2+n-\omega^2\mu L_\gamma)A+(2\omega n+\omega^2\mu M_\gamma)B\right]\cos u=0.$$
$$\left[(2\omega n+\omega^2\mu M_\gamma)A+(n^2+\omega^2\mu N_\gamma)B\right]\sin u=0.$$

То ся дїє для всяких u, отже :

$$\omega^2-\frac{fM}{a^3}-\omega^2\mu\,K=0, \qquad 22)$$

$$\left.\begin{aligned}(3\omega^2 + n - \omega^2\mu L\gamma)\,A + (2\omega n + \omega^2\mu M\gamma)\,B = 0.\\ (2\omega n + \omega^2\mu M\gamma)\,A + (n^2 + \omega^2\mu N\gamma)\,B = 0.\end{aligned}\right\} \quad 23).$$

Видко з того, що дійдемо до тих самих условин, наколи приймем, що рівнаня 19) сповняють рівнаня ріжникові руху сателітів P_2, P_3,

Через елімінацию A і B дістанемо з 23):

$$(n^2 + 3\omega^2 - \omega^2\mu L\gamma)(n^2 + \omega^2\mu N\gamma) - (2\omega n + \omega^2\mu M\gamma)^2 = 0. \qquad 24)$$

Се є рівнанє 4. степеня до визначеня n. Для кождого кореня остане стала A довільна, а $\frac{B}{A}$ обчислить ся на основі рівнань 23). Наколи тому γ дамо цїлий ряд вартостий цїлих, дістанемо спроможність одержаня загальних інтеґралів.

Заложім, що скількість сателітів є п а р и с т а: $p = 2q$. Чотири коренї рівнаня 24) є: n_{γ_1} n_{γ_2} n_{γ_2} n_{γ_4}; їм відповідає:

$$A_{\gamma_1}\ A_{\gamma_2}\ A_{\gamma_3}\ A_{\gamma_4}$$
$$B_{\gamma_1}\ B_{\gamma_2}\ B_{\gamma_3}\ B_{\gamma_4}.$$

Най δ буде одно з чисел 1, 2, 3, 4, і най:

$$B_{\gamma\delta} = A_{\gamma\delta}\ \lambda_{\gamma\delta},$$

де після 23):

$$\lambda_{\gamma\delta} = -\frac{n^2_{\gamma\delta} + 3\omega^2 - \omega^2\mu L\gamma}{2\omega n_{\gamma\delta} + \omega^2\mu M\gamma}$$

Най ріжні вартости сталої α є $\alpha_{\gamma\delta}$; наколи положимо $\gamma = 1, 2, \cdots q$ і возьмем суму відповідних частних розвязок, дістанемо:

$$\left.\begin{aligned}\rho_\nu &= \sum_{\gamma=1}^{q}\sum_{\delta=1}^{4} A\gamma\delta \cos\left(n_{\gamma\delta}t + \alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right)\\ \sigma_\nu &= \sum_{\gamma=1}^{q}\sum_{\delta=1}^{4} \lambda_{\gamma\delta}\,A\gamma\delta \sin\left(n_{\gamma\delta}t + \alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right)\end{aligned}\right\} \quad 25).$$

Наколи будемо класти $\nu = 1, 2, \ldots 2q$ дістанемо з огляду на рівнаня попередні вираженя на незвісні в функциї t і $4p = 8q$ довільних сталих $A_{\gamma\delta}$, $\alpha_{\gamma\delta}$ і будуть се загальні інтеґрали.

Походні рівнань 25) дадуть:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d\rho_\nu}{dt} &= \sum_{\gamma=1}^{q}\sum_{\delta=1}^{4} n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \sin\left(n_{\gamma\delta}t + \alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \\ \frac{d\sigma_\nu}{dt} &= \sum_{\gamma=1}^{q}\sum_{\delta=1}^{4} \lambda_{\gamma\delta} n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \cos\left(n_{\gamma\delta}t + \alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \end{aligned}\right\} \quad 26).$$

Щоби рівнаня 25) і 26) представляли інтеґрали загальні рівнань ріжничкових, треба визначити сталі довільні в сей спосіб, щоби положеня і скорости початкові сателїтів принимали якісь дані вартости. Приймім проте яко дані вартости 8q малих величин ρ_ν σ_ν $\frac{d\rho_\nu}{dt}$ $\frac{d\sigma_\nu}{dt}$ для $t = 0$ і при їх помочи обчислїм сталї $A_{\gamma\delta}$ і $\alpha_{\gamma\delta}$. Рівнаня 25) і 26) дадуть для $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \rho_\nu^0 &= \sum\sum A_{\gamma\delta} \cos\left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \\ \sigma_\nu^0 &= \sum\sum \lambda_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \sin\left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \\ -\left(\frac{d\rho_\nu}{dt}\right)_0 &= \sum\sum n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \sin\left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \\ \left(\frac{d\sigma_\nu}{dt}\right)_0 &= \sum\sum n_{\gamma\delta} A_{\gamma\delta} \cos\left(\alpha_{\gamma\delta} + \frac{\gamma\nu\pi}{q}\right) \end{aligned}\right\}_{(\nu=1,\ 2,\ \ldots\ 2q)} \quad 27).$$

Незвісних $A_{\gamma\delta}\cos\alpha_{\gamma\delta}$ і $A_{\gamma\delta}\sin\alpha_{\gamma\delta}$ є тілько, що рівнань, можна отже незвісні обчислити.

4. Щоби перстень остояв ся в рівновазї, мусять ρ_ν і σ_ν, так як з початку, і далї остати дуже малими величинами; бо наколиб одна з величин σ_ν почала ся збільшати, мусївби відповідний сателїт занадто приближити ся до другого сусїдного і насталаби колїзия. З того слїдує, що чотири корені $n_{\gamma\delta}$ рівнаня 24) мусять бути дїйсні, що γ мусить містити ся між 0 а q. Наколиб так не було, то в інтеґралах виступалиби чинники виложні, якиби стреміли до усякої границї.

Наколи число усїх сателїтів є скінчене, можемо приняти масу кождого з них, отже і масу цїлого перстеня, достаточно малу, щоби усї корені остали дїйсні. Величини L_γ M_γ N_γ можуть бути достаточно великі з причини малих знаменників $\sin\vartheta$, $\sin^2\vartheta$, $\sin^3\vartheta$, мимо того однак остають скінчені і означені. Отже для $n = 0$ лїва сторона в рівнаню 24) зведе ся до

$$\mu\omega^4 \left[3N_\gamma - \mu \left(M_\gamma^2 + L_\gamma N_\gamma\right)\right].$$

отже при достаточно малім μ буде се величина додатна.

З другої сторони рівнанє 24) має форму:

$$n^2 (n^2 - \omega^2) + A\mu + B\mu^2;$$

вираженє се позістає відємне, наколи при достаточно малім μ є $0 \angle n^2 \angle \omega^2$. Наколи отже в лївій стороні рівнаня 24) будем класти за u вартости:

$$-\infty, \quad -\frac{\omega}{\sqrt{2}}, \quad 0, \quad +\frac{\omega}{\sqrt{2}}, \quad +\infty,$$

то та сторона прийме знаки:

$$+ \; - \; + \; - \; +,$$

маємо отже чотири зміни знаків, отже при малім μ для всїх вартостий γ всї чотири корені є дїйсні.

З відси слїдує, що **перстень зложений з рівних селїтів може все остояти ся в рівновазї, наколи его маса є достаточно мала в порівнаню з масою Сатурна.**

Розходить ся тепер о се, як мале мусить бути μ, щоби рівновага ся остояла.

Понеже γ може бути якенебудь, возьмім:

$$\gamma = \frac{p}{2} = q.$$

Як знаєм:

$\vartheta = \frac{h\pi}{p} = \frac{h\pi}{2q}$ $(h = 0, 1, 2, \quad 2q-1)$; $2\gamma\vartheta = h\pi$, отже $\sin 2\gamma\vartheta = 0$ або $M\gamma = 0$; $\sin^2\gamma\vartheta$ і $\cos^2\gamma\vartheta$ приймають вартости 1, 0, 1, 0, 1, 0,

Наколи возьмем q непаристе, дістанемо:

$$L_q = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{\pi}{2q}}{\sin^3\frac{\pi}{2q}} + \frac{\cos^2\frac{3\pi}{2q}}{\sin^3\frac{3\pi}{2q}} + \cdots + \frac{\cos^2\frac{q-2}{2q}\pi}{\sin^3\frac{q-2}{2q}\pi}\right) - \left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2q}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2q}} + \cdots + \frac{1}{\sin\frac{q-1}{2q}\pi}\right)$$

$$N_q = \left(\frac{\cos^2\frac{\pi}{2q}}{\sin^3\frac{\pi}{2q}} + \frac{\cos^2\frac{3\pi}{2q}}{\sin^3\frac{3\pi}{2q}} + \cdots + \frac{\cos^2\frac{q-2}{2q}\pi}{\sin^3\frac{q-2}{2q}\pi}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2q}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2q}} + \cdots + \frac{1}{\sin\frac{q-1}{2q}\pi}\right)$$

А що для $0 \angle x \angle \frac{\pi}{2}$ є:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}\,x + \frac{7}{360}\,x^3 + \frac{31}{15120}\,x^5 +$$

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{40}\,x + \frac{163}{15120}\,x^3 +$$

то для достаточно великого q дістанемо:

$$L_q = 4\left(\frac{q}{\pi}\right)^3\left\{1+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{(q-1)^3}\right. - \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{q}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{q-2}\right) - \frac{1}{640}\left(\frac{\pi}{q}\right)^4\left(1+3+\cdots+(q-2)\right)+$$

$$\left. + \frac{163}{967680}\left(\frac{\pi}{q}\right)^6\left[1+3^3+\cdots+(q-2)^3\right]\right\} - \frac{q}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{2}{q-1}\right) - \frac{1}{6}\,\frac{\pi}{q}\left(1+2+\cdots+\frac{q-1}{2}\right) -$$

$$- \frac{7}{360}\left(\frac{\pi}{q}\right)^3\left(1+2^3+\cdots\cdots+\left(\frac{q-1}{2}\right)^3\right) + \cdots\cdots\cdots$$

$$N_q - 2L_q = \frac{q}{\pi}\left[\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{q}\right)+2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{2}{q-1}\right)\right]+\frac{\pi}{q}\left[\frac{1}{24}(1+3+\cdots+q)+\frac{1}{3}\left(1+2+\cdots+\frac{q-1}{2}\right)\right]+$$

$$+\left(\frac{\pi}{q}\right)^3\left\{\frac{7}{5760}(1+3^3+\cdots\cdots+q^3)+\frac{7}{180}\left(1+2^3+\cdots\cdots+\left(\frac{q-1}{2}\right)^3\right)\right\}+\cdots\cdots\cdots$$

а що:

$$1+3+\cdots\cdots+(q-2)=\frac{(q-1)^2}{4},\quad 1^3+3^3+\cdots\cdots+(q-2)^3=\frac{(q-1)^4-2(q-1)^2}{8},$$

то:

$$L_q = \left(\frac{2q}{\pi}\right)^3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)+\frac{W_1}{q^2}+\frac{W^2}{q^3}+\quad\right]$$

$$N_q - 2\,L_q = \left(\frac{2q}{\pi}\right)^3\frac{V_1}{q^2}+\frac{V_2}{q^3}+$$

отже в приближеню:

$$L_q = 0{\cdot}525\left(\frac{2q}{\pi}\right)^3, \qquad N_q - 2\,L_q = 0{\cdot}0000\left(\frac{2q}{\pi}\right)^3. \qquad 28)$$

Наколи тепер після 28) в рівнанє 24) за L_γ M_γ N_γ вставимо L_q, 0, $2L_q$, дістанемо:

$$\left(\frac{n}{\omega}\right)^4 - (1-\mu\,L_q)\left(\frac{n}{\omega}\right)^2 + 2\mu\,L_q\,(3-\mu\,L_q) = 0. \qquad 29)$$

Щоби оба коренї були дійсні, мусить бути:

$$1-\mu\,L_q > 0 \qquad 30)$$

і

$$1 - 26\,\mu\,L_q + 9\mu^2\,L_q^2 > 0.$$

З відси:

$$(\mu L_q - 2{\cdot}8499)\,(\mu L_q - 0{\cdot}0390) > 0$$

або після 30)

$$\mu L_q < 0{\cdot}039, \quad \mu < \frac{0{\cdot}039}{0{\cdot}525}\left(\frac{\pi}{2q}\right)^3.$$

Наколи відношене маси перстеня а масою Сатурна є m, то:

$$m = 2\mu q = \mu p,$$

отже:

$$m < \frac{2{\cdot}30}{p^2}.$$

Наколиби отже було лиш 100 сателїтів, маса всїх їх — щоби рівновага перстеня могла бути тревала — мусїлаби бути меньша як $\frac{1}{4000}$-а часть маси Сатурна.

Но ми брали лиш $\gamma = q$; отже даймо тому γ вартости $(1, 2, \ldots q-1)$. L_γ, M_γ, N_γ мають вартости досить великі з причини малих знаменників $\sin^3\vartheta$, $\sin^2\vartheta$, $\sin\vartheta$; вартости ті зменьшать ся, наколи p є велике; тодї для першої вартости на ϑ $\left(\vartheta = \frac{\pi}{p}\right)$ в приближеню за $\sin^3\vartheta$, $\sin^2\vartheta$, $\sin\vartheta$ можна покласти: $\left(\frac{\pi}{p}\right)^3$, $\left(\frac{\pi}{p}\right)^2$, $\frac{\pi}{p}$, а тодї:

$$N_\gamma = 2L_\gamma\left(1 + \frac{S_1}{p^2}\right), \quad M_\gamma = L_\gamma\frac{S_2}{p},$$

а рівнане 24) перейде на 29) (лиш за L_q прийде L_γ). Щоби чотири корені були і ту дїйсні, треба і ту покласти:

$$\mu L_\gamma \angle 0{\cdot}039. \qquad 31)$$

А що після першого значіня на L_γ буде для всяких γ:

$$L_\gamma \angle \frac{1}{4}\sum\frac{\cos^2\vartheta}{\sin^3\vartheta},$$

а тим більше:

$$L_\gamma \angle \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\pi}\right)^3\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \quad\right) = 0{\cdot}0194p^3,$$

отже після 31):

$$\mu 0{\cdot}0194p^3 \angle 0{\cdot}039,$$

або:

$$\mu \angle \frac{2}{p^3}.$$

Нерівність 31) сповняє ся проте все. Можемо проте сказати, що наколи:

$$m \angle \frac{2}{p^2},$$

де p є число сателїтів, а m відношене між масою цїлого перстеня а масою Сатурна, то рівновага перстеня остоїть ся.

5. Наколиби сателїти мали маси ріжні, то і тодї дїйшлибисьмо до рівнань ріжничкових лінїових зі сталими сочинниками; очевидно що рахунки будуть більше скомпліковані. Однак видко, що і ту при малих масах сателїтів дїйдем до анальоґічного роздїлу сил, як в першім случаю, отже загальна конклюзия остане; зміни, які би ту виступали в положеню перстеня, будуть відбувати ся в дуже тїсних границях.

Maxwell бере дальше случай, що перстень складає ся з кусників метеоричних і доходить до заключеня, що его густота мусїлаби бути меньша або рівна $\frac{1}{300}$ густоти Сатурна. Середна густота перстеня рівналаби ся в приближеню двократній густотї воздуха під сталим тисненем, но очевидно густота в поодиноких місцях перстеня моглаби бути більша.

Maxwell доказує далї, що перстень плинний тяглий не мігби ся остояти, але мусївби роздїлити ся на множество малих сателїтів. Можна проте приняти, що перстень складає ся з окремих частий, які можуть бути сталі або плинні, але від себе не залежать (деякі сателїти є плинні, а деякі сталі). Стверджає се обсервация, бо через внутрішний берег перстеня можна обсервувати берег Сатурна, що булоб неможливе, наколиб лучі Сатурна переходили через тяглий перстень, бо тодї підлягалиби рефракциї.

Розслїди Ковалевскої.[1])

1. Ковалевска приймає подібно як Ляпляс, що перстень є однородний, утворений з плинної материї; повстав він через оборот кривої плоскої симетричної зглядом оси OY (фіґ. II.), та немного ріжної від елїпси.

---

[1]) Пор. Zusätze und Bemerkungen zur Laplace'schen Untersuchung ü. d. Gestalt der Saturnringe (Astronom. Nachrichten Bd. CXI. 1885 ст. 37 et sqts.)

Щоби якась точка перстеня могла остоятись в рівновазі, треба, щоби для неї заходило рівнанє таке, як в теориї Ляпляса

$$V + V_1 + \frac{1}{2}\omega^2\rho_1^2 = C \qquad 1)$$

де V і V_1 є потенциями перстеня і Сатурна, ω скоростию оборотовою, ρ_1 віддалене від оси оборотової, а C є стала.

Наколи маса Сатурна є сконцентрована в точцї тяжести, то:

$$V_1 = \frac{M}{\sqrt{\rho_1^2 + z_1^2}}$$

де z_1 є віддалене уважаної точки перстеня від площи рівникової, а ρ_1 віддалене єї від оси оборотової.

В обчисленю потециялу V відступає Ковалевска від способу Ляпляса; після неї спосіб Ляпляса, що дїланє перстеня заступає дїланєм безконечно довгого вальця, не є вповнї оправданий, бо годї з гори знати, чи блуд, який при тім підставленю виступає, є дїйсно такої величини, як думає Ляпляс. Також і се заложенє Ляпляса, що вісь велика перстеня (розміри) є в порівнаню з перекройом елїпси дуже велика, не є також доконче оправдане.

З тої причини приймає Ковалевска, що рівнанє згаданої кривої, мало-що ріжної від елїпси, в укладї ортоґональнім сорядних, де вісь OZ є осию обороту, є:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - a\cos t$$

$$z = a\,(\beta \sin t + \beta_1 \sin 2t + \beta_2 \sin 3t + \quad) \qquad 2)$$

де t є дїйсна величина змінна в границях (0 ..... 2π), а $a\,\beta\,\beta_1$ є сталі.

Приймаючи розміри кривої дуже невеликі, можем вважати a за малий дроб; а наколи крива мало ріжнити ся має від елїпси, мусять β_1 β_2 не лиш бути дуже малі, а також і сума

$$|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3| + \cdots\cdots\cdots$$

мусить бути дуже мала в порівнаню з β.

Наколи тепер приймем, що $d\sigma$ є безконечно малий елємент поверхнї перстеня, P один пункт того елементу, P_1 означений пункт поверхнї, для якого шукаєм потенциялу V, а Θ є кут, який творить внїшна нормальна в точцї P з простою PP_1, то після Gauss'a дістанемо на потенциял:

$$V = -\frac{1}{2}\int\int \cos\Theta d\sigma. \qquad 3)$$

Наколи сорядні для P **є** (x y z), **для** P_1 (x_1 y_1 z_1), **відступ** $PP_1 = r$, **достави напрямні згаданої нормальної** $\xi\ \eta\ \zeta$, **то як звісно:**

$$\cos\Theta = \frac{x_1 - x}{r}\xi + \frac{y_1 - y}{r}\eta + \frac{z_1 - z}{r}\zeta \qquad 4).$$

Наколи положимо:

$$\left.\begin{aligned} &x = \sqrt{x^2 + y^2}\cos\psi, \quad y = \sqrt{x^2 + y^2}\sin\psi, \\ &\varphi(t) = \beta\sin t + \beta_1\sin 2t + \cdots\cdots \\ &A = 4(1 - a\cos t)(1 - a\cos t_1) \\ &B = a^2\left[(\cos t - \cos t_1)^2 + (\varphi(t) - \varphi(t_1))^2\right] \\ &C = 2a^2(1 - a\cos t)\left[(\cos t - \cos t_1)\varphi'(t) + \sin t\,(\varphi(t) - \varphi(t_1))\right] \end{aligned}\right\} 5)$$

дістанемо на потенциял:

$$V = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} \frac{C - Aa\varphi'(t)\sin^2\frac{1}{2}(\psi - \psi_1)}{\sqrt{B + A\sin^2\frac{1}{2}(\psi - \psi_1)}}\, d\psi,$$

або, наколи положимо:

$$\frac{1}{2}(\psi_0 - \psi_1) = \vartheta,$$

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{C - Aa\varphi'(t)\sin\vartheta}{\sqrt{B + A\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta \qquad 6)$$

дістанемо:

$$V = \int_0^{2\pi} W dt \qquad 7).$$

Наколи положимо:

$$\sqrt{A\sin^2\vartheta + B} = \sqrt{B}.s, \quad k^2 = \frac{B}{A + B} \qquad 8)$$

дістанемо:

$$W = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{C + Ba\varphi'(t) - Ba\varphi'(t)\, s^2}{\sqrt{A+B}\,.\,\sqrt{s^2-1}\;\;\sqrt{1-k^2 s}}\, ds, \qquad 9)$$

де k^2 є дуже мала величина.

Є се інтеґрал елїптичний, тому-то Ковалевска уживає ту формул Weierstrass'a:[1])

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\;\sqrt{1-k^2\xi^2}} = \frac{1}{2} K \log \frac{16}{k^2} - K_1$$

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2 \xi\, d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\;\sqrt{1-k^2\xi^2}} = \frac{1}{2} I \log \frac{16}{k^2} - I_1$$

де:

$$\begin{cases} K = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \\ K_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \frac{7}{2.3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \\ I = \frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \\ I_1 = -1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{13}{12}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \end{cases}$$

В виду того дістанемо:

$$W = W_1 \log \frac{16}{k^2} + W_2,$$

де:

$$W_1 = \frac{1}{2}\,\frac{C + aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}}\,K - \frac{1}{2}\,\frac{aB\varphi'(t)}{2\sqrt{A+A}}\,I$$

$$W_2 = -\frac{C + aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}}\,K_1 + \frac{aB\varphi'(t)}{\sqrt{A+B}}\,I_1$$

Величини W_1 і W_2 можна розвинути після cos і sin величин t і t_1 в ряди, причім сочинники будуть рядами степенними вели-

---

[1]) Пор. Weierstrass: Theorie der Abelschen Functionen, Crelle's Journal т. 52. с т. 75 et sqts.

чин а β β_1 , , а що а є дуже мале, то ті ряди будуть сильно збіжні.

Інтеґрал $\int_0^{2\pi} W_2 \, dt$ дає ся впрост обчислити в сей спосіб, що вираз ряду на W_2, незалежний від t, помножимо через 2π.

Трудніїша є справа з інтеґралом $\int_0^{2\pi} W_1 \log \frac{16}{k^2} \, dt.$

Позаяк в 5) величина B стає зером лиш тоді, коли $\cos t = \cos t_1$ або $\varphi(t) = \varphi(t_1)$, що з огляду на нашу криву може лиш тоді бути, коли $t = t_1 + 2m\pi$, де m є число ціле, то з сего слідує, що B є подільне через $1 - \cos(t - t)$, отже можем написати:

$$B = a^2 \left[1 - \cos(t - t_1)\right] B_1 ,$$

де B_1 дасть ся розвинути після cos і sin величин t і t_1.

Наколи заложимо, що $\beta_1 = \beta_2 = \quad = 0$, то в виду сего B_1 зводить ся на

$$\frac{1}{2}(1 + \beta^2) - \frac{1}{2}(1 - \beta^2)\cos(t + t_1),$$

з чого слїдує, що для достаточно малих β_1 β_2 B_1 не зникає для дїйсних вартостий t t_1.

Наколи тепер положимо:

$$B_1 = \left[\frac{1}{2}(1 + \beta^2) - \frac{1}{2}(1 - \beta^2)\cos(t + t_1)\right](1 + B_2),$$

то:

$$\log B = 2\log a + \log\left[1 - \cos(t - t_1)\right] + \log\left[\frac{1}{2}(1+\beta^2) - \frac{1}{2}(1-\beta^2)\cos(t+t_1)\right] + \log(1+B_2).$$

В виду того складає ся $W_1 \log \frac{16}{k^2}$ з слїдуючих пятох частий:

$$W_1 \log 16 (A + B)$$
$$- 2 W_1 \log a$$
$$- W_1 \log\left[\frac{1}{2}(1 + \beta^2) - \frac{1}{2}(1 - \beta^2)\cos(t + t_1)\right]$$
$$- W_1 \log\left[1 - \cos(t - t_1)\right]$$
$$- W_1 \log(1 + B_2)$$

Три перші части можна подібно як W_2 розвинути в ряди і впрост з'інтеґрувати. Четверта часть дає ся розвинути на ряд лиш для вартостий $t - t_1$, що лежать між 0 а 2π, но після теориї Fourier'a і ту дістанемо вартість інтеґрала $-\int_0^{2\pi} W_1 \log\left[1 - \cos(t-t_1)\right] dt$, наколи вираз від t незалежний через 2π.

Щоби обчислити інтеґрал $\int_0^{2\pi} W_1 \log(1 + B_2)\, dt$, треба наперед $\log(1 + B_2)$ розвинути в ряд після степеній B_2; ряд сей із за дуже малих вартостий β_1 β_2, буде сильно збіжний; можна отже буде перевести інтеґроване.

Сим способом дістанем на V зовсім означений і сильно збіжний ряд форми:

$$V_0 + V_1 \cos t_1 + V_2 \cos 2\, t_1 +$$

Сочинники того ряду є з огляду на a, log a, $\log(1 + \beta)$, β_1, β_2 цілковити функциями (о безконечно много членах); їх сочинники є виміримими дробовими функциями β; log a виступає лиш яко добуток в купі з якоюсь степеною a.

2. Перейдім тепер до потенцияду V_1:

$$V_1 = \frac{M}{\sqrt{\rho_1^2 + z_1^2}} = \frac{M}{\sqrt{(1 - a\cos t_1)^2 + a^2 \varphi^2(t_1)}}$$

Вираженє се можна також розвинути на збіжний ряд:

$$m_0 + m_1 \cos t_1 + m_2 \cos 2\, t_1 + \cdots\cdots$$

де m_0 m_1, є цілими функциями a β β_1

В кінци:

$$\rho_1^2 = (1 - a\cos t_1)^2 = \frac{1}{2} a^2 - 2a\cos t_1 + \frac{1}{2} a^2 \cos 2\, t_1.$$

Наколи перстень має удержувати ся в рівновазї, треба величини ω, C, β, β_1, β_2, так визначити, щоби -

$$\left\{\begin{array}{ll} V_0 + m_0 + \frac{1}{2}\omega^2\left(1 + \frac{1}{2}a^2\right) + C = 0 & \\ V_1 + m_1 - \omega^2 a = 0 & \\ V_2 + m_2 + \frac{1}{4}\omega^2 a^2 = 0 & \end{array}\right\} \quad 10).$$

а:

$$V_{s+2} + m_{s+2} = 0 \quad (s \text{ додатне}) \qquad 11).$$

Величин $\beta\ \beta_1\ \beta_2$, ... є безконечно много і в кожде рівнанє входить їх безконечно много, отже неможливо їх визначити. Можнаби однак порадити собі в сей спосіб, що возьмем:

$$\varphi(t) = \beta^{(\mu)} \sin t + \beta_1^{(\mu)} \sin 2t + \cdots\cdots + \beta_\mu^{(\mu)} \sin(\mu+1)\,t,$$

обчислимо сочинники V_λ, m_λ і визначимо: $\omega^{(\mu)}$, $C^{(\mu)}$, $\beta^{(\mu)}$, $\beta_1^{(\mu)}$, ... $\beta_\mu^{(\mu)}$ так, щоби $(\mu+3)$ початкових рівнань 10) і 11) сповнило ся. Наколиби далї дало ся доказати, що ті величими для $\mu = \infty$ зближають ся до означених скінчених границь так, що сума безглядних вартостий граничних виражень на $\beta_1\ \beta_2$ булаб меньша як β, то можнаби з сего заключати, що рівнаня 10) і 11) сповнять ся, наколи за величини $\omega^{(\mu)}$, $C^{(\mu)}$, $\beta^{(\mu)}$, вставимо граничні вартости ω, C, β,

Се є однак лиш в теориї можливе. Щоби згадані величини з відповідним приближенєм обчислити, поступимо в слїдуючий спосіб. Положім:

$$\varphi = \beta \sin t + \beta_1 \sin 2t + \cdots\cdots + \beta_\mu \sin(\mu+1)\,t$$

і приймім на разї, що $|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots\cdots + |\beta_\mu|$ є величиною того самого ряду, що a, та пропустїм в розвиненях на V_λ і m_λ всї величини ряду висшого як $(\mu+2)$, причім $a^m \log a$ буде величиною ряду висшого як $(m-1)$. Тодї з $(\eta+3)$ початкових рівнань 10) і 11) вийде, що $\beta_1\ \beta_2$ β_μ є малими величинами $1^{\text{ого}}$, $2^{\text{ого}}$, $\mu^{\text{ого}}$ ряду; можна отже покласти:

$$\beta_1 = a\gamma_1$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= a^2\gamma_2 \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ \beta_\mu &= a^\mu\gamma_\mu \end{aligned}$$

Тодї з даних рівнань випадуть $\gamma_1\ \gamma_2 \cdots\cdots \gamma_\mu$ яко однозначні скінчені числа, а далї при так визначених величинах $\beta_1 \cdots\cdots \beta_\mu$ лїві сторони оставших ся рівнань 10) і 11) будуть величинами ряду висшого як $(\mu+2)$.

3. З усего того виходить, що можна визначити в сей спосіб перекрій перстеня, щоби вираженє:

$$V + V_1 + \frac{1}{2}\omega^2\rho^2,$$

яке для поверхні перстеня має мати сталу вартість, ріжнило ся від сталої лиш о величину ряду висшого як $(\mu + 2)$. А що $(\mu + 2)$ можна приняти так велике, як хочемо, то можем заключати, що дійсно істнує такий вид перекрою перстеня, для якого повисше вираженє на цілій поверхні перстеня є стале.

Ковалевска переводить далї обчисленє для $\mu = 1$, щоби визначити вид перекрою перстеня з точностию третого ряду. Пропускаючи в висше наведених виражених вирази ряду висшого як четвертий дістає она:

$$V = \pi a^2 (v_0 + v_1 \cos t_1 + v_2 \cos 2t_1 + v_3 \cos 3t_1),$$

де:

$$v_0 = \beta \left(\log \frac{256}{a^2 (1+\beta)^2} - 2 \right)$$

$$v_1 = a\beta \left(\frac{-11 + 9\beta - \beta^2 + 3\beta^3}{4(1+\beta)} + \log \frac{256}{a^2 (1+\beta)^2} \right)$$

$$v_2 = -\beta \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

$$v_3 = -a\beta \frac{(1-\beta)(1+3\beta)}{6(1+\beta)^2} + \alpha\gamma \frac{-2 + 6\beta + 6\beta^2 + 6\beta^3}{3(1+\beta)^3}.$$

Далї є:

$$\frac{M}{\sqrt{\rho_1^2 + z_1^2}} = m_0 + m_1 \cos t_1 + m_2 \cos 2t_1 + m_3 \cos 3t_1,$$

$$m_0 = M$$

$$m_1 = aM \left[1 + a^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8} \beta^2 - \frac{1}{2} \beta\gamma \right) \right]$$

$$m_2 = a^2 M \frac{2 + \beta^2}{4}$$

$$m_3 = a^3 M \left[\frac{1}{8} (2 + 3\beta^2) + \frac{1}{2} \beta\gamma \right]$$

а в решті:

$$\frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2} a^2 \right) - \omega^2 a \cos t_1 + \frac{1}{4} \omega^2 a^2 \cos 2t_1$$

Друге, третє і четверте з рівнань 10), які в нашім случаю є:

$$\pi a^2 v_1 + m_1 - a\omega^2 = 0.$$

$$\pi a^2 v_2 + m_2 + \frac{1}{4} a^2 \omega^2 = 0.$$

$$\pi a^2 v_3 + m_3 = 0.$$

мають тепер вартість:

$$\pi a^2\beta\left(\frac{-11+9\beta-\beta^2+3\beta^3}{4\,(1+\beta)}+\log\frac{256}{a^2(1+\beta)^2}\right)+a^2M\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\beta^2\right)+\left(2\pi\frac{1+\beta-\beta^2}{(1+\beta)^2}-\frac{1}{2}M\beta\right)a^2\gamma+M-\omega^2=0.$$

$$M\,(2+\beta^2)-4\,\beta\,\frac{1-\beta}{1+\beta}\,\pi+\omega^2=0. \qquad 12)$$

$$M\,\frac{2+3\beta^2}{8}-\pi\,\frac{\beta(1-\beta)(1+3\beta)}{6\,(1+\beta)^2}+\left(\frac{1}{2}M\beta+\frac{-2+6\beta+6\beta^2+6\beta^3}{3\,(1+\beta)^3}\right)\gamma=0.$$

З послїдного з тих рівнань виходить:

$$\gamma=\frac{1}{4}\,\frac{3M\,(2+3\,\beta^2)\,(1+\beta)^2-4\pi\beta\,(1-\beta)\,(1+3\beta)}{4-12\beta-12\beta^2-12\beta^3-3M\beta\,(1+\beta)^3}\,(1+\beta) \qquad 13)$$

а з першого:

$$\omega^2=M+a^2\,N \qquad 14)$$

де:

$$N=\pi\beta\left(\frac{-11+9\beta-\beta^2+3\beta^3}{4\,(1+\beta)}+\log\frac{256}{a^2(1+\beta)^2}\right)+M\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\beta^2\right)+\left(2\pi\,\frac{1+\beta-\beta^2}{(1+\beta)^2}-\frac{1}{2}M\beta\right)\gamma.$$

Друге з рівнань 12) провадить до рівняня:

$$M\,(3+\beta^2)-\frac{4\beta\,(1-\beta)}{1+\beta}\,\pi+a^2\,N=0 \qquad 15)$$

де за γ, яке входить в N, треба вставити вартість 13). Рівнанє 15) служити-ме до обчисленя β.

Наколи в рівнаню 15) пропустимо вираз при a^2, дістанемо:

$$M\,(3+\beta^2)-\frac{4\beta\,(1-\beta)}{1+\beta}\,\pi=0.$$

Як легко постеречи, є се то само рівнанє, що в теорії Ляпляса (рівнанє 5). Мусимо ту заложити, що β є додатне і не більше як 1. Далї як в теорії Ляпляса треба положити, що $\frac{M}{4\pi}<0{\cdot}0543$; при тім заложеню рівнанє має два додатні корені. Наколи оден з них є β_0, то з рівнаня 15) випаде з точностию до четвертого ряду:

$$\beta=\beta_0-\frac{a^2N_0}{2M\beta_0-3+\frac{8}{(1+\beta_0)^2}},$$

де $N_0=N$ } для β_0

Ся вартість вставлена в 13) дозваляє обчислити з таким самим приближенєм і γ, а так само випаде і:

$$\omega^2=M+a^2N_0.$$

В кінци завважати треба, що тепер є:

$$\varphi(t) = \beta \sin t + a\gamma \sin 2t;$$

$$\varphi(t) < \beta \sin t, \quad \text{наколи } o < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi(t) > \beta \sin t, \quad \text{наколи } \frac{\pi}{2} < t < \pi.$$

Для меньшого кореня β z буде меньше, отже перекрій полуденниковий буде мав сильнїйшу кривину в точцї найблизше положеній до середоточки цїлого систему (фіг. V. б), для більшого кореня β буде противно (фіг. V. а).

Дослїди Poincaré над рівновагою перстеня з маси длинної однородної, якого частини притягають ся після закона Нютона, та який відбуває рух оборотовий.[1])

1. Приймім, що OX є осию обороту (фіг. II.), C середоточка тяжести полуденникового перекрою ABA'B', CO = l. Най r = CM і $\sphericalangle$ φ = YCM будуть сорядними бігуновими точки M. Згадана крива, симетрична до оси OY, має після Poincaré[2]) рівнанє:

$$r = a\,(1 + \beta_1 \cos\varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \cdots\cdots) \qquad 1).$$

Poincaré приймає загальне рівнанє рівноваги:

$$\delta U = o,$$

де U є функция сил; в положеню, яке би відповідало рівновазї тревалій, мусить бути U maximum. Наколи dm і dm' є якісь два елементи перстеня віддалені від себе о Δ, то:

$$U = f \int \frac{dm\,dm'}{\Delta} + \frac{1}{2}\,\omega^2 \int y^2 dm,$$

де інтеґрал відносить ся до всїх точок маси, що обертає ся зі скоростию ω.

Найже:

$$\int \frac{dm\,dm'}{\Delta} = \frac{1}{2}\iint \frac{dm\,dm'}{\Delta} = W, \quad \int y^2\,dm = I, \qquad 2)$$

---

[1]) Пор. Poincaré: Bulletin astronomique т. II. ст. 109. і 405. і Acta mathematica т. VII. 259 et sqts.

[2]) Acta math. VII. ст. 284 sqts.

то:

$$U = fW + \frac{1}{2}\omega^2 I. \qquad 3).$$

W є енергія потенціяльна перстеня, I его момент безвладности з огляду на вісь обороту; W і I відносять ся до цїлої маси перстеня. Наколи ті елєменти dm, що лежать між поверхнею рівноваги а поверхнею здеформованою безконечно близькою, назначимо через $d\mu$, а через V_μ і y_μ назначимо відповідні вартости потенциялу та віддаленя у (точки на поверхнї рівноваги), дістанемо:

$$\delta W = \int V_\mu d\mu, \quad \delta I = \int y_\mu^2 d\mu, \quad \int d\mu = 0,$$

отже:

$$\delta U = \int \left(fV_\mu + \frac{1}{2}\omega^2 y_\mu^2 \right) d\mu = 0,$$

бо вираженє в скобках є стале для цїлої поверхнї рівноваги.

Наколи маса перстеня є M, а густота ρ, то знанє маси M дозволить нам утворити якусь реляцию між a, l, β_1 β_2, ·····, а се, що початок C лучів провідних є заразом середоточкою тяжести, дасть нам реляцию для β, і будемо могли визначити β_1 яко функцию величин (β_2 β_3, ·····). Независимими параметрами будуть тодї a β_2 β_3 Коли приймем, щосьмо найшли вираженє на U яко функцию тих параметрів, то з рівнаня $\delta U = 0$ випаде:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta_3} = 0, \qquad 4)$$

і всї елєменти фігури будуть визначені.

Вираженє W дасть ся легко обчислити на сїй основі, що перстень є оборотовий.

Наколи dS і dS′ є елєментами поверхнї перекрою ABA′B′, y та y′ їх відступами від оси OX, $h = x - x'$, то оба ті елєменти утворять через оборот довкола оси OX два перстенї колові, яких енергія потенціяльна є dW; наколи полуденники двох елєментів dm і dm′ тих елєментарних перстенїв творять з площею XOY кути ψ і ψ', а відступ тих елєментів є Δ, то:

$$W = \int dW, \qquad dW = \iint \frac{dm\, dm'}{\Delta},$$

а що:

$$dm = \rho dS y d\psi, \quad dm' = \rho dS' y' d\psi',$$

$$\Delta^2 = y^2 + y'^2 - 2yy' \cos(\psi' - \psi) + h^2,$$

то:

$$dW = \rho^2 yy' dS dS' \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{y^2 + y'^2 - 2yy' \cos(\psi' - \psi) + h^2}}.$$

Най: $\psi' - \psi = \psi''$, то узглядняючи, що ψ остає стале при інтеґрованю зглядом ψ', дістанемо:

$$dW = 4\pi\rho^2 yy' dS dS' \int_0^{2\pi} \frac{d\psi''}{\sqrt{y^2 + y'^2 - 2yy' \cos\psi'' + h^2}},$$

або:

$$dW = 8\pi\rho^2 yy' dS dS' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(y + y')^2 + h^2 - 4yy' \sin^2\vartheta}},$$

де $\psi'' = \pi - 2\vartheta$. Є се інтеґрал еліптичний першого рода, а его модули є:

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= \frac{4yy'}{(y + y')^2 + h^2} \\ k'^2 &= \frac{(y - y')^2 + h^2}{(y + y')^2 + h^2} = \frac{\delta^2}{(y + y')^2 + h^2}; \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

отже:

$$dW = 8\pi\rho^2 \frac{yy'}{\sqrt{(y + y')^2 + h^2}} dS dS' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\vartheta}}$$

де δ є відступом елєментів dS і dS'.

Poincaré приймає, що розміри даної кривої є дуже малі в порівнаню з l; тоді $\frac{y}{l} - 1$, $\frac{y'}{l} - 1$, $\frac{h}{l}$ є величини першого ряду, а k'^2 другого ряду.

Наколи положимо $y = l + y_1$, $y' = l + y_1'$, де y_1 і y_1' є сорядні елементів dS і dS' з огляду на вісь Cx_1, рівнобіжну до OX, тоді $h^2 = (x - x')^2$ і дістанемо розвиненя після $\frac{x}{l}$, $\frac{x'}{l}$, $\frac{y_1}{l}$, $\frac{y_1'}{l}$:

$$k' = \frac{\delta}{2l}\left[1 + \frac{y_1 + y_1'}{l} + \frac{(y_1 + y_1')^2 + (x - x')^2}{4l^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\delta}{2l}\left[1 - \frac{y_1 + y_1'}{2l} + \frac{(y_1 + y_1')^2}{4l^2} - \frac{(x - x')^2}{8l^2} + \cdots\right],$$

а що інтеґрал (анальоґічно як в теориї Ковалевскої):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin\vartheta}} = \left(1+\frac{\delta^2}{16l^2}+\cdots\right)\log\frac{8l}{\delta}+\frac{y_1+y_1'}{2l^2}-\frac{(y_1+y_1')^2}{8l^2}+\frac{(x-x')^2}{8l^2}-\frac{\delta^2}{16l^2}-\cdots$$

$$\frac{yy'}{\sqrt{(y+y')^2+h^2}}=\frac{(l+y_1)(l+y_1')}{\sqrt{(2l+y_1+y_1')^2+(x-x')^2}}=\frac{l}{2}\left[1+\frac{y_1+y_1'}{2l}-\frac{(y_1-y_1')^2}{4l^2}-\frac{(x-x')^2}{8l^2}+\quad\right],$$

то дістанемо:

$$dW = 4\pi\rho^2 l\left[1+\frac{y_1+y_1'}{2l}-3\frac{(y_1-y_1')^2}{16l^2}-\frac{(x-x')^2}{16l^2}-\cdots\right]\log\frac{8l}{\delta}\,dSdS'+$$

$$+4\pi\rho^2 l\left[\frac{y_1+y_1'}{2l}+\frac{(y_1-y_1')^2}{16l^2}+\frac{y_1y_1'}{2l^2}+\frac{(x-x')^2}{16l^2}+\cdots\right]dSdS'.$$

Най:

$$W_1 = 4\pi\rho^2 l\iint\log\frac{8l}{\delta}\,dSdS' \qquad 7)$$

а:

$$W_2 = 4\pi\rho^2 l\iint\left[\frac{y_1+y_1'}{2l}-3\frac{(y_1-y_1')^2}{16l^2}-\frac{(x-x')^2}{16l^2}+\cdots\right]\log\frac{8l}{\delta}\,dSdS'+$$

$$+4\pi\rho^2 l\iint\left[\frac{y_1+y_1'}{2l}+\frac{(y_1-y_1')^2}{16l^2}+\frac{y_1y_1'}{2l^2}+\frac{(x-x')^2}{16l^2}+\cdots\right]dSdS', \qquad 8)$$

то тоді:

$$W = W_1 + W_2 \qquad 9).$$

З вище наведених формул видно, що квот $\frac{W_2}{W_1}$ є величиною малою ряду $\frac{a}{l}$.

2. Щоби винайти W_1, підем способом Callandreau[1]).

Най-же:

$$f(\varphi) = 1+\beta_1\cos\varphi+\beta_2\cos 2\varphi+ \qquad 10)$$

і возьмім криві:

$$r_1 = uf(\varphi), \quad r_1 = (u+du)f(\varphi)$$
$$r_1' = u'f(\varphi'), \quad r_1' = (u'+du')f(\varphi'),$$

де u і u' є два параметри змінні в границях (0……a), $u' < u$.

Криві ті є гомотетичні зглядом кривої полуденникової (фіґ. VI).

---

[1]) Пор. Bulletin astronomique т. III. ст. 252, також Tisserand loc. cit. II.

Най елемéнтом dS буде часть між кривими u, u + du, та лучами провідними, яким відповідають кути φ і $\varphi + d\varphi$; так само dS'. Дістанемо:

$$dS = u f^2(\varphi)\, du\, d\varphi, \quad dS' = u' f^2(\varphi')\, du' d\varphi'$$

$$\delta^2 = u^2 f^2(\varphi) + u'^2 f^2(\varphi') - 2u u' f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi').$$

Для даної вартости u будемо інтеґрувати зглядом u' від 0 до u, а для φ' від 0 до 2π так, щоби елемент dS' обнимав всї положеня в середині кривої u; далї u має ся зміняти від 0 до a, а φ від 0 до 2π. Тодї можна буде написати:

$$\frac{W_1}{4\pi\rho^2 l} = \int_0^a u\,du \int_0^u u'\,du' \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log \frac{8l}{\sqrt{u^2 f^2(\varphi) + u'^2 f^2(\varphi') - 2uu' f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi')}}\, d\varphi d\varphi'.$$

u є в інтеґрованю зглядом u' стале, можна проте покласти:

$$u' = ux, \quad du' = u\,dx,$$

а тодї:

$$\frac{W_1}{4\pi\rho^2 l} = \int_0^a u^3 \log\frac{8l}{u}\, du \int_0^1 x\,dx \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi')\, d\varphi\, d\varphi' +$$

11) $$+ \int_0^a u^3 du \int_0^1 x\,dx \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log \frac{1}{\sqrt{f^2(\varphi) + x^2 f^2(\varphi') - 2x f(\varphi) f(\varphi') \cos(\varphi - \varphi')}}\, d\varphi d\varphi'.$$

Можна безпосередно інтеґрувати зглядом u; тодї:

$$\int u^3 \log\frac{8l}{u}\, du = \frac{1}{4} u^4 \log\frac{8l}{u} + \frac{1}{16} u^4 + \text{Const.}$$

$$\int_0^a \log\frac{8l}{u}\, du = \frac{1}{4} a^4 \left(\log\frac{8l}{a} + \frac{1}{4}\right);$$

дальше є:

$$\int_0^{2\pi} f^2(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} (1 + \beta_1 \cos\varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \cdots\cdots)^2\, d\varphi = 2\pi(1 + c_0),$$

де:

$$c_0 = \frac{1}{2} \sum_1^\infty \beta_n^2$$

та де пропущено добутки третого степеня величин β_n.

Тепер дістанемо:

$$W_1 = \pi^3 \rho^2 a^4 l (1 + c_0)^2 \left(\frac{1}{2} + 2\log\frac{8l}{a}\right) + \pi\rho^2 a^4 l \int_0^1 J x\,dx, \qquad 12)$$

де:

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\varphi) f^2(\varphi') \log \frac{1}{\sqrt{f^2(\varphi)+x^2 f^2(\varphi')-2x f(\varphi) f(\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}}\, d\varphi d\varphi'.$$

Щоби обчислити J, положім:

$$f^2(\varphi)+f^2(\varphi')x^2-2xf(\varphi)f(\varphi')\cos(\varphi-\varphi') = \left[1+x^2-2x\cos(\varphi-\varphi')\right](1+H),$$

де:

$$H = \frac{f^2(\varphi)-1+x^2\left[f^2(\varphi')-1\right]-2x\left[f(\varphi)f(\varphi')-1\right]\cos(\varphi-\varphi')}{1+x^2-2x\cos(\varphi-\varphi')} \qquad 13)$$

Тепер дістанемо:

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\varphi)\, f^2(\varphi') \log \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\cos(\varphi-\varphi')}}\, d\varphi d\varphi' -$$

$$14) \qquad -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(\varphi)\, f^2(\varphi') \log(1+H)\, d\varphi d\varphi'.$$

Розвиваючи на ряд дістанемо:

$$\log \frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\cos(\varphi-\varphi')}} = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}\cos n(\varphi-\varphi').$$

Найже:

$$\sum_1^\infty \beta_n \cos n\varphi = \zeta, \quad \sum_1^\infty \beta_{n'} \cos n'\varphi' = \zeta',$$

то:

$$f(\varphi) = 1+\zeta, \quad f(\varphi') = 1+\zeta'.$$

Перший інтеґрал форми 14) прийме вид:

$$\sum \frac{x^n}{n}\int_0^2 d\varphi \int_0^{2\pi}(1+2\zeta+2\zeta'+\zeta^2+\zeta'^2+4\zeta\zeta'+\cdots\cdots)\cos n(\varphi-\varphi')\, d\varphi'.$$

Щоби сей вислїд був ріжний від зера, треба виражене в скобках звести до $4\zeta\zeta'$, або до $4\Sigma\beta_n^2 \cos n\varphi \cos n\varphi' = 2\Sigma\beta_n^2 \cos n(\varphi-\varphi')$; інтеґрал прибере тодї вартість $4\pi^2\Sigma \frac{x^n}{n}\beta_n^2$.

Форма 13) дасть по виконаню:

$$H = \zeta+\zeta'+\zeta\zeta'+(\zeta-\zeta')\frac{1+\zeta-(1+\zeta')x^2}{1+x^2-2x\cos\vartheta} \qquad 15).$$

А що се вираженє є з огляду на β першого ряду, проте можна взяти:

$$\log(1+H) = H - \frac{H^2}{2},$$

а тодї:

$$J = 4\pi^2 \sum_1^\infty \frac{x^n}{n} \beta_n^2 + \frac{1}{4} J_1. \qquad 16)$$

де:

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (H^2 - 2H)(1+\zeta^2)(1+\zeta')^2 \, d\varphi d\varphi'.$$

Наколи вставимо вартість за H, дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} J_1 = {} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (-2\zeta - 2\zeta' - 3\zeta^2 - 3\zeta'^2 - 8\zeta\zeta') \, d\varphi d\varphi' + \\ & + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta' - \zeta + \zeta'^2 - 2\zeta^2 + \zeta\zeta' + (\zeta - \zeta' - 2\zeta'^2 + \zeta\zeta')x^2}{1 + x^2 - 2x\cos\vartheta} \, d\varphi d\varphi' + \\ & + (1-x^2)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta^2 + \zeta'^2 - 2\zeta\zeta'}{(1+x^2-2x\cos\vartheta)^2} \, d\varphi d\varphi' \end{aligned}\right\} 17).$$

Положім:

$$18) \quad \left\{\begin{aligned} & \zeta^2 = c_0 + \sum_1^\infty c_n \cos n\varphi, \quad \zeta'^2 = c_0 + \sum_1^\infty c_{n'} \cos n'\varphi', \quad c_0 = \frac{1}{2}\sum_1^\infty \beta_n^2 \\ & \frac{1}{1+x^2-2x\cos\vartheta} = A_0 + \sum_1^\infty A_{n''} \cos n''\vartheta \\ & \frac{1}{(1+x^2-2x\cos\vartheta)^2} = B_0 + \sum_1^\infty B_{n''} \cos n''\vartheta \end{aligned}\right.$$

то дістанем:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta \, d\varphi d\varphi' = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta' \, d\varphi d\varphi' = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta^2 \, d\varphi d\varphi' = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta'^2 \, d\varphi d\varphi' = 4\pi^2 c_0.$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta\zeta' \, d\varphi d\varphi' = 0.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta\,d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x\cos\vartheta}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta'\,d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x\cos\vartheta}=0.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^2\,d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x\cos\vartheta}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta'^2\,d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x\cos\vartheta}=4\pi^2 c_0 A_0.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^2\,d\varphi d\varphi'}{(1+x^2-2x\cos\vartheta)^2}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta'^2\,d\varphi d\varphi'}{(1+x^2-2x\cos\vartheta)^2}=4\pi^2 c_0 B_0.$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta\zeta'\,d\varphi d\varphi'}{1+x^2-2x\cos\vartheta}=\pi^2\sum_1^\infty A_n\beta_n^2,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta\zeta'\,d\varphi d\varphi'}{(1+x^2-2x\cos\vartheta)^2}=\pi^2\sum_1^\infty B_n\beta_n^2.$$

В виду того рівнанє 17) дасть:

$$J_1=8\pi^2c_0\left[-3-A_0(1+x^2)+B_0(1-x^2)^2\right]+2\pi^2\sum_1^\infty\left[A_n(1+x^2)-B_n(1-x^2)^2\right]\beta_n^2. \quad 19)$$

Наколи зріжничкуєм другий з взорів 18) і помножимо через x, дістанемо:

$$x\frac{dA_0}{dx}+\sum_1^\infty x\frac{dA_n}{dx}\cos n\vartheta=-A_0-\sum_1^\infty A_n\cos n\vartheta+(1+x^2)\left(B_0+\sum_1^\infty B_n\cos n\vartheta\right);$$

з відси слїдує, що:

$$(1-x^2)B_0=A_0+x\frac{dA_0}{dx}$$

$$(1-x^2)B_n=A_n+x\frac{dA_n}{dx}.$$

В виду того:

$$J_1=8\pi^2c_0\left[-3-2A_0x^2+x(1-x^2)\frac{dA_0}{dx}\right]+2\pi^2\sum_1^\infty\left[2A_nx^2-x(1-x^2)\frac{dA_n}{dx}\right]\beta_n^2.$$

А що:

$$A_0=\frac{1}{1-x^2},\quad A_n=\frac{2x^n}{1-x^2},$$

то:

$$J_1=-24\pi^2c_0-4\pi^2\sum_1^\infty nx^n\beta_n^2.$$

Остаточно дістанемо після 16):

$$J = -6\pi c_0 + \pi^2 \sum_1^\infty \left(\frac{4}{n} - n\right) x^n \beta_n^2;$$

а відси:

$$\int_0^1 J x dx = -3\pi^2 c_0 - \pi^2 \sum_1^\infty \frac{n-2}{n} \beta_n^2.$$

Наколи вставимо се в 12), дістанемо:

$$\frac{W_1}{\pi^3 \rho^2 a^4 l} = (1 + c_0)^2 \left(\frac{1}{2} + 2\log\frac{8l}{a}\right) + \sum_1^\infty \left(\frac{2}{n} - \frac{5}{2}\right) \beta_n^2 \qquad 20).$$

Положім:

$$a^2(1 + c_0) = a_0^2 \qquad 21)$$

то:

$$2\log\frac{8l}{a} = 2\log\frac{8l}{a_0} + \log(1 + c_0) = 2\log\frac{8l}{a_0} + c_0,$$

а рівнанє 20) дасть:

$$W_1 = \pi^3 \rho^2 a_0^4 l \left[\frac{1}{2} + 2\log\frac{8l}{a_0} + 2\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - 1\right) \beta_n^2\right] \qquad 22)$$

3. Наколи y є прямовісна поведена з елємента dm до оси обороту, тодї:

$$dm = \rho y d\psi dS,$$

а інтеґрал:

$$I = \int y^2 dm = 2\pi\rho \int y^3 dS,$$

а що:

$$y = l + y_1,$$

то:

$$I = 2\pi\rho \left(l^3 \int dS + 3l^2 \int y_1 dS + 3l \int y_1^2 dS + \int y_1^3 dS\right) \qquad 23).$$

Точка C є средоточкою тяжести, отже:

$$\int y_1 dS = 0,$$

а що:

$$dS = a(1 + \zeta)^2 du d\varphi,$$

то:

$$\int dS = \int_0^a u du \int_0^{2\pi} (1+\zeta)^2 d\varphi = \pi a^2 (1 + c_0) = \pi a_0^2 \qquad 24).$$

Отже πa_0^2 є полем полуденникового перекрою.

Дальше маєм:

$$\int y_1^2 dS = \int_0^a u^3 du \int_0^{2\pi} (1+\zeta)^4 \cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1 + 4\zeta + \cdots\cdots) \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\pi a_0 + \frac{1}{2} a^4 \int_0^{2\pi} \zeta \cos 2\varphi d\varphi \text{ (наколи добутки } \frac{a^2}{l^2} \text{ пропустимо)} =$$

$$= \frac{1}{4}\pi a^4 + \frac{1}{2}\pi a^4 \beta_2 = \frac{1}{4}\pi a_0^4 + \frac{1}{2}\pi a_0^4 \beta_2 \qquad 25).$$

З виражень 23), 24) і 25) вийде з відповідним приближенєм:

$$I = 2\pi^2 \rho a_0^2 l \left(l^2 + \frac{3}{4} a_0^2 + \frac{3}{2} a_0^2 \beta_2\right) \qquad 26).$$

В виду взорів 3), 22) і 26) дістанемо тепер на функцию сил:

$$U = \pi^3 f \rho^2 l a_0^4 \left[\frac{1}{2} + 2\log\frac{8l}{a_0} + 2\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - 1\right)\beta_n^2\right] + \pi\omega^2 \rho l a_0^2 \left(l^2 + \frac{3}{4} a_0^2 + \frac{3}{2} a_0^2 \beta_2\right)$$

Маса перстеня є:

$$M = 2\pi^2 a_0^2 l \rho,$$

отже:

$$a_0 l = \frac{M}{2\pi^2 \rho} \qquad 27)$$

а:

$$\frac{U}{\pi f \rho} = M a_0^2 \left[\frac{1}{4} + \log\frac{8l}{a_0} + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - 1\right)\beta_n^2\right] + M\frac{\omega^2}{2\pi f \rho}\left(l^2 + \frac{3}{4} a_0^2 + \frac{3}{2} a_0^2 \beta_1\right) \qquad 28).$$

U є проте функциєю змінних независимих a_0 β_2 β_3,……; β_1 не входить ту, бо для $n = 1$ є $\left(\frac{1}{n} - 1\right) = 0$. — Щоби U було maximum або minimum, мусить бути:

$$\frac{dU}{da_0} = 0, \quad \frac{dU}{d\beta_2} = 0, \quad \frac{dU}{d\beta_n} = 0 \quad n > 2 \qquad 29).$$

З $\frac{dU}{d\beta_n} = 0$ вийде $\beta_3 = \beta_4 = \cdots\cdots = 0$, а з $\frac{dU}{d\beta_2} = 0$ дістанемо:

$$\beta_2 = \frac{3}{4}\,\frac{\omega^2}{\pi f\rho} \qquad 31).$$

З $\frac{dU}{da_0} = 0$ випаде:

$$\frac{\partial U}{\partial a_0} + \frac{\partial U}{\partial l}\,\frac{dl}{da_0} = 0$$

або після 27):

$$\frac{\partial U}{\partial a_0} - \frac{2l}{a_0}\,\frac{\partial U}{\partial l} = 0 \qquad 32).$$

З рівнаня 28) випаде:

$$\frac{1}{\pi f\rho M}\,\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{a_0^{\,2}}{l} + \frac{\omega^2 l}{\pi f\rho}$$

$$\frac{1}{\pi f\rho M}\,\frac{\partial U}{\partial a_0} = a_0\left(\frac{1}{2} + 2\log\frac{8l}{a_0} - \beta_2^2\right) - a_0 + \frac{\omega^2 a_0}{\pi f\rho}\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\beta_2\right).$$

В виду сего рівнанє 32) перейде (з пропущенєм ω^4) на:

$$-\frac{5}{2} + 2\log\frac{8l}{a_0} - \frac{2\omega^2 l^2}{\pi f\rho a_0^{\,2}} + \frac{3\omega^2}{4\pi f\rho} = 0$$

або:

$$\frac{\omega^2}{\pi f\rho} = \left(\frac{a_0}{l}\right)^2\left(\log\frac{8l}{a_0} - \frac{5}{4}\right) \qquad 33).$$

При помочи сего рівнаня можна ся пересьвідчити, що U випаде maximum, значить ся рівновага буде тревала. Но тямити треба, що ми приняли перстень оборотовий і не сплощений; тревалість розслїдили ми проте лиш для таких змін, які фіґури оборотової не зміняють; найменьша зміна мусїлаб рівновагу знищити.

4. Poincaré подає далї ось-які висліди[1]) своїх теоретичних розслїдів. Елїпсоїди не є виключно фіґурами рівноваги, які приймає теч остаюча в повисшім руху оборотовім. Істнує противно безконечно много ріжних фіґур рівноваги, а всї они є симетричні з огляду на площу прямовісну до оси ротациї. Всї ті фіґури мають певну скількість площий симетриї (що найменьше одну), які переходять

[1]) Пор. Acta math. VII. ст. 378 sqts.

через вісь, а між ними є кілька площий обороту (революції). Но між усїми тими фіґурами є лиш одна фіґура т р е в а л а; має она дві площи симетриї. Мет (проєкцию) сеї поверхні на одну з площий симетриї і мет елїпсоїди, з якої поверхня ся повстала, представляє фіг. VII. Елїпсоїда назначена точками, контури мету згаданої поверхні і перекрою обох представляє лїнїя тягла. Тїнь представляє ту часть поверхні, яку видко на поперек елїпсоїди.

Елїпсоїди оборотові є т р е в а л і, наколи їх сплощене є меньше, як сплощене елїпсоїди Jacobi, а елїпсоїди Jacobi є т р е в а л і тодї, наколи є мало видовжені; в тім случаю рівновага остає, хотя би теч була клейка.

Подумаймо тепер масу плинну однородну, що відбуває рух оборотовий і помалу стягає ся, но не тратить однородности. Наколи маса та остигає дуже помалу, а терте в внутрі єї є досить велике, тодї рух оборотовий остає в усїх частях маси. В сих умовах теч стремить до принятя сталої фіґури рівноваги, а момент гону (mv) остає const.

З початку, коли густота є невелика, маса приймає вид елїпсоди оборотової, що не много ріжнить ся від кулї. Наслідком руху оборотового наступає сплощене, а коли оно дійде до $\frac{2}{5}$, елїпсоїда оборотова стаєсь елїпсоїдою Jacobi. Через дальше остиганє маса перестає бути елїпсоїдальною, стаєсь асиметричною зглядом площи yz і приймає вид представлений на фіг. VII. Елїпсоїда здаєсь легко вгнута в середній своїй части, но більше близько одного з вершків оси більшої; найбільша часть материї стремить знову до того, щоби приняти вид кулї, а мала часть відлучає ся при однім з вершків оси більшої від елїпсоїди, мовби хотїла відірвати ся від маси головної. Наколи маса стигне ще далї і далї, то імовірно маса стаєсь щораз більше і більше вгнута в середині, звужає ся і розпадає ся на два тїла.

Тернопіль в сїчню 1901.

ПРО ПЛЯМИ СОНЇЧНІ

Написав

Стефан Рудницкий.

ЧАСТЬ ДРУГА.

Про дїйсний рух сонїчних плям.

Як кожде иньше тїло небесне мають плями сонїчні два роди руху; рух позірний і рух дїйсний. Рух позірний відбувають они разом з цїлою сонїчною кулею коло єї оси, рух дїйсний відбувають они сами для себе на сонїчній поверхнї. Назва „позірний“ не конче є ту оправдана, бо беручи річ беззглядно рух, що названий нами позірний, є дїйсним. В наслїдок ротациї сонця плями змінюють преціньсвоє положенє для земского обсерватора. Уживаєм назви сеї лиш для відріжненя того руху від руху дїйсного. Вчинити се можем тим певнїйше, що сей рух є дїйсно в части позірний, бо підчас обсервациї єго наша земля зміняє своє положенє.

Позірний рух плям сонїчних представляє ся так. Плями являють ся на східнім краю сонїчного кружка і посувають ся по рівнобіжнику сонїчнім від сходу на захід. По 14 днях від часу, як ся показали, зникають плями поза західним краєм сонїчного кружка, щоби по такім самім часї знов ся показати, наколи розуміє ся за сей час не зникли. Сли відразу дві або більше плям укаже ся на сонїчнім кружку, дороги їх є звичайно рівнобіжні; те послужило в XVII. віцї доказом, що плями находять ся на самій поверхнї сонця а не поза нею. Розслїджуючи точнїйше позірний рух плям, вже рано помічено, що він не є рівномірний. На серединї кружка він є скорший, у края вільнїйший. Витолкованє легке. Бо позірно відбувають плями свій рух по площі, в дїйстности по кулистій поверхнї.

Криві лїнїї, що їх описують плями в позірнім руху, мають дуже ріжний вид. Вісь сонця є нахилена о 7^0 15' до площі еклїптичеля Carringtona для епохи 1850). В наслїдок ріжного поло-

женя землї зглядом сонця в ріжних порах року зміняють свій вид лїнії позірного руху плям. Коли сонце находить ся в котрій небудь абсидї, тодї дороги позірні плям є простими лїнїями, нахиленими до склїптики. Дїє ся се 4. червня і 6. грудня, коли довжина сонця в еклїптицї виносить 74°30' і 254°30' Від червня зачинають ся ті прості лїнії викривлювати і змінюють ся в видовжені елїпси, неповні, зверненї внутрішною стороною до півночи Найбільше виразні суть ті елїпси в вересни, потім кривина їх меньшає, щоби 6. грудня зрівнати ся з зером. Від того часу дороги плям сонїчних знов починають ся викривляти, але в сторону прямо противну, вони є тепер звернені до полудневого бігуна. Maximum кривини припадає на марець, мінїмум же знов на 4. червня.[1])

Той позірний рух плям є важним явищем, бо послужив до означеня часу обороту сонця, що є елєментом важним для дослїдів метеорольоґічних, а головно для маґнетних. Коли именно запамятаєм собі час, в якім пляма находить ся в данім місцї сонїчного кружка, а також час, в якім пляма відбувши цїлий позірний рух знов в тім самім місцї стане, найдем з їх ріжниць час обороту сонця.

Є се розуміє ся час синодичний а не сідеричний. Бож через тих двацять кілька днїв, що сей час становлять, наша земля змінила своє положенє. Вже Scheiner, означуючи по раз перший час ротациї сонця в початках XVII. віка звернув на се увагу. Для часу синодичного обороту сонця одержав він $27^1/_2$ дня. Зазначім собі тую вартість через τ. Маючи крім того дане $T = 365^1/_4$ днїв найдемо час сидеричного обороту в той спосіб:

$$\tau . \frac{1}{t} = 1 + \tau . \frac{1}{T}$$

$$\tau T - \tau t - Tt = 0 \text{ з того}$$

$$t (T + \tau) = T\tau$$

$$t = \frac{T\tau}{T+\tau} = \frac{365\frac{1}{4} . 27\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4} + 27\frac{1}{2}} = 25\frac{1}{2} \text{ дня}$$

В той спосіб означив Scheiner сидеричний час ротациї на $25^1/_2$ дня. Є се природно тільки приближена вартість. Від XVII. в. аж до наших часів кільканацять разів означувано час ротациї сонця і одержувано иньші вартости, що дають ся сучасно означити. Методи, що були притім уживані не є так прості як метода Scheinera, але займати ся ними не будем, подамо тільки висліди.[1])

Обсерватор	Час ротациї сид.	Нахиленє оси	Довжина Ω	Епоха
Scheiner	25·33°	7°30'	69—70°	1634
Cassini	25·58°	7°30'	70°10'	1678
Lalande	25·42°	7°20'	78°	1776
Delambre	25·01°	7°19'	80°17'	1775
Böhm	25·52°	6°57'	76°47'	1833
Bianchi	25·35°	—	—	1839
Langier	25·34°	7°9'	75°8'	1840
Petersen	—	6°51'	73°29'	1841
Kysäus	25·09°	6°38'	76°38'	1841
Carrington	25·38°	7°15'	73°40'	1850
Wolf	25·182°	7°51'	80°33·3'	1854
Spörer	25·234°	6°57'	74°36'	1866

Видимо отже, що результати дослїдів над ротациєю сонця є межи собою дуже ріжні, именно, коли порівнаєм ріжниці, які тут заходять між поодинокими обсерваторами, з ріжницями, які є можливі при иньших обсервациях астрономічних. Там они обертають ся що найбільше в секундах або їх частинах. Ту они є великі а походить се в части з занадто малого числа обсерваций а именно в давнїйших часах, коли звичайно лише трох обсерваций вживано, щоби обрахувати час ротациї і иньші елєменти.

В головній же мірі походять ті ріжниці з чого иншого. Именно плями сонїчні не остають стало на однім місци сонїчної поверхнї, але переносять ся щораз в иньші місця, бо відбувають крім позірного руху ще рух дїйсний або властивий.

Учені дуже пізно звернули увагу на дїйсний рух плям, головно тому, що раз їх відкривши дуже ся мало ними займали. Перший Olbers припускав істноване такого руху. Він виразив своє

[1]) Secch o. c. ст. 21. сл.

[1]) Пор. Wolf. Handbuch der Astronomie etc. т. II. ст. 422 сл. Secchi o. c. ст. 126.

припущенє в листї до Zach'a з р. 1798. II. 4.[1]) Але понеже учені французькі задивляли ся з великим скептицизмом на обсервациї сонїчних плям в загалї, то доперва в другій чверти XIX віка найшли ся люди, що заняли ся сею справою. Були се: Böhm, Langier і Peters. Böhm обсервуючи сонїчні плями в 1833 роцї, постеріг з немалим зачудуванєм, що з його обсервациї виходить иньший час ротациї дзя околиць під рівником, а иньший для иньших гелїоґрафічних ширин. Подаємо ту коротву табельку його обсерваций. Она доказує, що Böhm був на добрій дорозї, але не умів осудити важности свого відкритя та й не впорянкував належито своїх обсерваций.[2]) Langier також завважав, що майже кожда пляма сонїчна дає иньший час ротациї сонця, але не оголосив друком розвідки, що був єї заповів в Comptes Rendus том XL. ст. 140. Потім занимав ся рухом плям також Peters, але свої дослїди робив він в часї дуже недогіднім, бо в лїтах 1845/6[3]) Так отже дїйсне відкритє властивого руху сонїчних плям приписати належить англїйскому ученому Carrington-ови. Відмінно від давнїйших учених постановив він обсервувати плями систематично через довший час. Єго витревалість вже по кількох лїтах була нагороджена дуже важними результатами.[4]) Єго обсервациї зміряли до того, шоби визначити позицию кождої обсервованої плями. Найшовши єї, обраховував позициї для будучих епох. В тих самих епохах обсервував потім пляму і з ріжниць межи обрахованими а обсервованими позициями обчисляв емпіричні поправки і старав ся викрити якусь правильність. Протягом півосьма року доконав Carrington 5000 обсерваций на 954 ріжних ґрупах плям. Виелїди їх дадуть ся зібрати в кілька тез.

ч. ширини	ч. ротациї
8⁰	25·09 д.
24⁰	25·68 д.
21⁰	26·16 д.
26⁰	26·99 д.
31—33⁰	27·08 д.

---

[1]) Geographische Ephemeriden. I. Wolf Handbuch etc. II. 428.

[2]) Böhm. Beobachtungen von Sonnenflecken und Bestimmung der Rotationselemente der Sonne. Denkschriften der k. k. Akademie der Wissenschaften 7. V. ст. 150. сл. Comptes Cendes т. LX. ст. 319. сл.

[3]) Contributions to the Atmospherology of the Sun. Proceedings of American Assoc. of Science p. 1855.

[4]) Observations of the spots on the Sun from November 9, 1853 to March 24, 1861 made at Redhill by R. C. Carrington. London 1863. Менї недоступне. Пор. Comptes Rendus tome LX. p. 141 сл. Secchi o. c. 128 сл. Young o. c. 130 сл. Wolf Handbuch т. II. ст. 427 сл.

Передовсїм сконстатував Carrington, що плями дуже рідко переходять в вищі ширини гелїоґрафічні як 30⁰ на північ і на полудне від сонїчного рівника. Рідко також можна їх подибати між рівником а 10⁰ північної або полудневої гелїоґрафічної ширини.

Місцеве maximum плям не має однак сталого положеня і пересуває ся в ріжнї околицї пояса ± 10⁰ до ± 30⁰. Середно можна єго шукати при ± 17⁰ гел. ширини. В обсягу тих поясів, що були названі Scheiner'ом viae regiae, є також походнї яснїйші, численнїйші і виразнїйші, чим на иньших місцях сонїчної поверхнї. Взагалї число плям на ріжних півкулях сонїчних вирівнує ся підчас довших періодів, специяльно же майже завсїгди є нерівне.

Друге право Carrington'a відносить ся вже прямо до дїйсного руху плям і звучить: для ріжних гелїоґрафічних ширин час ротациї є ріжний. Значить се, що ріжні части поверхнї сонїчної кулї відбувають свій оборот в ріжних часах. Слїдує з того, що плями відбувають певний дїйсний рух на поверхнї сонця. Carrington найшов ту, що чисельні вартости для часу ротациї суть тим більші, чим дальше є пляма від рівника, котру обсервуєм в цїли означеня часу ротациї. Під рівником є отже ротация найскорша і виносить майже рівно 25 днів. Вже під 20⁰ ширини час ротациї є о 18 годин довший, в ширинї 30⁰ виносить він вже 26·5 дня, а під 45⁰ навіть 27·5 дня. Carrington впорядкував свої обсервациї зі згляду на змінну скорість обороту і на їх підставі уложив емпіричну формулу.

$$\xi = 865' - 165 \sin^{7}/_{4} \lambda,$$

де ξ означає денний лук ротациї, а λ гелїоґрафічну ширину. Примінивши ту формулу можем в більшости случаїв представити кожду обсервацию сонїчної плями.

Відкритя Carrington'a представить нам найлучше уложена ним самим табеля.[1]) В першій єї колюмнї находим середну гелїоґрафічну ширину обсервованих плям, в другій середний денний рух власний плями в довжинї. Если той рух є більший як 14°11', то перед числом стоїть знак + еслиж меньший, знак —. (Carrington приймає за середний час ротациї сонця число 25·380 дня.) Трета колюмна обіймає числа, що означають власний рух плям в ширинї. Коли перед ними є знак +, значить се, що пляма посуває ся в на-

---

[1]) Observations of the spots on the sun p. 222.

прямі до бігуна, колиж знак —, то пляма посуває ся ідь рівникови. Четверта вкінци колюмна дає число обсерваций[1]).

Ширина геліографічна північна	Рух денний в довжині	Рух денний в ширині	Число обсервованих плям	Ширина геліографічна полуднева	Рух денний в довжині	Рух денний в ширині	Число обсервованих плям
+ 50°	— 64'	+ 11'	1	—	—	—	—
—	—	—	—	— 45°	— 92'	— 8'	2
37°	— 66'	— 17'	2	—	—	—	—
—	—	—	—	36°	— 50'	+ 6'	2
34°	— 43'	+ 4'	12	34°	— 44'	— 1'	15
33°	— 33'	+ 7'	4	33°	— 36'	— 10'	2
32°	— 30'	— 2'	2	32°	— 52'	— 5'	2
31°	— 21'	+ 5'	15	—	—	—	—
30°	— 20'	— 1'	12	30°	— 33'	+ 4'	12
29°	— 36'	+ 6'	5	29°	— 34'	+ 1'	35
28°	— 28'	+ 8'	25	28°	— 35'	+ 1'	18
27°	— 27'	+ 2'	12	27°	— 40'	+ 0'	10
26°	— 21'	— 1'	43	26°	— 27'	+ 0'	17
25°	— 12'	+ 3'	4	25°	— 20'	+ 3'	27
24°	— 16'	+ 2'	23	24°	— 23'	+ 4'	14
23°	— 19'	+ 1'	34	23°	— 17'	+ 3'	7
22°	— 12'	— 1'	33	22°	— 14'	— 0'	72
21°	— 14'	+ 0'	34	21°	— 18'	+ 5'	27
20°	— 9'	+ 1'	31	20°	— 12'	+ 2'	38
19°	— 11'	— 0'	47	19°	— 13'	+ 1'	18
18°	— 6'	— 1'	6	18°	— 6'	— 0'	45
17°	— 9'	— 1'	15	17°	— 10'	+ 1'	32
16°	— 5'	+ 2'	17	16°	— 6'	+ 0'	9
15°	— 0'	+ 2'	41	15°	— 10'	— 0'	27
14°	— 4'	— 1'	30	14°	— 4'	— 1'	28
13°	— 2'	— 2'	24	13°	+ 1'	0'	2
12°	+ 16'	— 4'	18	12°	+ 1'	— 0'	97
11°	+ 5'	— 0'	38	11°	+ 6'	— 1'	18
10°	+ 2'	— 1'	22	10°	+ 3'	+ 1'	22
9°	+ 8'	— 8'	13	9°	+ 12'	+ 1'	43
8°	+ 10'	— 0'	71	8°	+ 6'	+ 3'	38
7°	+ 8'	— 1'	53	7°	+ 21'	+ 0'	16
6°	+ 11'	— 2'	19	6°	—	—	—
5°	+ 31'	— 10'	5	5°	+ 24'	— 12'	— 1

*) Та табеля уміщена також у Secchio-го о. с. ст. 132 і у Zöllnera: Über das Rotationsgesetz der Sonne und der grosen Planeten. Sitzungsberichte der königl. Sächs. Ges. d. Wissenschaften, p. 1871 ст. 64.

Ширина геліографічна північна	Рух денний в довжині	Рух денний в ширині	Число обсервованих плям	Ширина геліографічна полуднева	Рух денний в довжині	Рух денний в жирині	Число обсервованих плям
4°	+ 15'	+ 2'	6	4°	+ 18'	4'	3
3°	+ 38'	— 2'	2	3°	+ 0'	1'	11
2°	—	—	—	2°	+ 17'	+ 9'	2
1°	—	—	—	1°	+ 4'	0'	2
0°	—	—	—	0°	+ 10'	— 6'	1

З тої головної табелї легко вивести табелю оборотових кутів для ріжних рівнобіжників сонїчних підчас двайцять чотирох годин середного часу.

Ширина	Денний кут обороту	Число обсервованих плям	Дерний рух в ширині
+ 50°	787'	1	+ 11
+ 45°	—	—	—
+ 40°	—	—	—
+ 35°	806'	18	—
+ 30°	824'	59	+ 3·5'
+ 25°	831'	116	+ 2·8'
+ 20°	840'	151	+ 1·0'
+ 15°	851'	127	+ 0·2'
+ 10°	859'	142	— 1·0'
+ 5°	863'	85	— 2·4'
+ 0°	867'	5	+ 3·3'
— 5°	865'	31	— 1·6'
— 10°	856'	218	+ 1·0'
— 15°	845'	98	— 0·4'
— 20°	839'	200	+ 0·8'
— 25°	827'	75	+ 3·0'
— 30°	814'	67	+ 1·2'
— 35°	805'	19	— 5·3'
— 40°	—	—	—
— 45°	759'	2	8'
— 50°	—	—	—

З тої табелї виходить безпосередно, що рухи плям в довжині є зависимі від того, як они віддалені від рівника. Плями, що

находять ся в висших ширинах, мають денний кут ротациї значно меньший чим плями, що лежать близько рівника. Длятого перші дають більші вартости на оборот сонця чим послїдні.

Трете право Carringtona відносить ся до властивого руху плям в ширині. Під тим взглядом не дали ся виставити так прості правила як для руху в довжині. Але Carrington і ту найшов правильність головно на підставі послїдної колюмни своєї меньшої табелї. Именно: 1) плями, що лежать поза 20° північної або полудневої гелїографічної ширини, відбувають власний рух в ширині в напрямі до бігунів. Дорога, котру відбувають они під впливом сего руху, не перевишає межи 20° — 40° гел. ширини пересічно 2' денно. 2) Межи рівнобіжниками 10° а 20° є рух в ширині дуже малий, знак в загалї —, рух звернений в напрямі до рівника, виносить пересічно на день 1'. 3) В стрефі підрівниковій межи + 10° а — 10° гел. ширини трудно є сконстатувати рух в ширині, бо знаки + і — часто ся зміняють, а середні вартости є дуже малі. Завважати треба також, що поза 35° ширини також трудно сконстатувати істнованє і напрям власного руху плям, бо в такім віддаленю від рівника они майже нїколи сн не являють.[1])

Вкінци ще пару слїв про елементи ротациї сонця, тодї на ново Carrington ом означені. Поступав він ту в слїдуючий спосіб. Означував ріжниці руху власного в ширині у плям межи 8° а 18° ширини по обох сторонах рівника. Потім зіставлював парами зі собою завсїгди одну північну, а одну полудневу пляму. З утворених в той спосіб ґруп вирахував середні вартости для всїх елєментів ротациї.

Довжиня Ω = 73°57'
Нахиленє = 7°15'
Денний кут обороту = 14°18'
Час обороту (середно) 25·38 дня

Обсервациї Carringtona є важні не стілько для заключень, котрі він з них поробив. Ще може важнїйші они з тої причини, що показав иньшим дорогу, котрою належить поступити, щоби розслїдити проблєм власного руху сонїчних плям. А вже найбільше заслужив ся він для науки тим, що єго обсервациї стали предметом теоретичних студиїв дуже многих ученых.

---

[1]) Peters видїв в р. 1846. VI. в Неаполи пляму під + 50°½ ширини, Langier видїв одну аж під 40°, Lahire мав видїти одну аж під 70°. Тій послїдній обсервациї нїхто однак вже не вірить Secchi o. c ст. 128.

До астрономів практичних, що займали ся сонїчними плямами, належить зачислити наперед Peters'a, котрий заохочений приміром Carrington'a впорядкував свої обсервациї з 1845/6 року та найшов на їх підставі формулу:

$$\xi = 8{\cdot}582 + 5{\cdot}798 \cos d.$$ [1])

Другим був Ґустав Spörer, один з найбільших гелїольоґів. Від р. 1862 розпочав він на власну руку і власними навіть знарядами обсервациї сонїчних плям, потім покликаний до астрофізичної обсерваториї в Почдамі вів їх дальше аж до найновійших часів. (1893 р.) Обсервациї його порозкидані по дуже многих публїкациях і осібних розвідках. Обширні ті розсліди зберем ту коротенько.[2])

Передовсїм належить ся Spörer'ови заслуга, що цїлком напевно доказав, що появляне ся плям поза 40° гел. ширини належить до дуже рідких случаїв, коли протягом 30 лїт Spörer чогось подібного не завважав. Найбільші ним замічені ширини плям є:

— 38·8° р. 1872. II. 6; + 39·7° р. 1872. V. 7.
— 39·9° р. 1872. VII. 31.

Отже навіть до 40° гел. ширини не дїйшла жадна зі згаданих плям, котрі власне в тім роцї появили ся в незвичайно високих ширинах[3]) Свої погляди на ротацию сонця і дїйсний рух плям змінював Spörer кілька разів, що є певним доказом, що єго досліди були поважні та основні і не привязували ся до апріорних тез. Вже в 1861. роцї, т. є. єще заки Carrington оголосив друком свої обсервациї, найшов Spörer, що плями в околицях рівника скорше ся порушають чим плями, що находять ся в певнім від него віддаленю.[4]) Час ротациї означував зі звичайного рівнаня

$$L + (t + T).\ \xi = l,$$

---

[1]) Proceeding of the American Association of Science t. IX. Astronomical Notices of Ann Arbor observatory. March 1862.

[2]) Beobachtung von Sonnenflecken und daraus abgeleitete Elemente der Rotation der Sonne. Gymn. Progr. Anclam 1862. Die Stürme auf der Sonne. Anclam 1862. Скорочене w Poggendorfs Annalen т- 117. ст. 509—525, т. 128. ст. 269—291; Monatsberichte der Berliner Ak. I. Jahrg. 1865 ст. 337—351 і 589 сл. Beobachtungen der Sonnenflecken zu Anclam. Publ. der astr. Ges. B. XIII. Resultate aus den Sonnenbeobachtungen. Tageblatt der 54, Vers. deutsch. Naturf. und Ärzte Salzburg 1881. Publicationen des astrophylicalischen Observatoriums zu Potsdam I, II, III, IV. і gqts.

[3]) Publicationen des astrophys. Observatoriums zu Potsdam т. I, ст. 15, 22, 32.

[4]) Astronomische Nachrichten 1861. VI. 13.

де L і T суть числа сталі на означене часу і довжини геліографічної обсервованої плями, ξ т. є ротаційний кут означає ся з рівнань виведених з обсерваций, наколи можливі блуди висліміновано методою найменьших квадратів. За t можна підставити яку небудь вартість, щоби найти l, середну вартість зі всіх довжин. З того рівнаня обраховує я геліографічні довжини і означує ся опісля ріжниці межи ними а довжинами обсерваційними. Spörer зазначує ті ріжниці загально $\Delta\xi$. Таку ріжницю належить після обставин додати або відіймити від одержаного ротаційного кута ξ. Подїливши 360^0 так справленим кутом ротаційним $\frac{360}{\xi \pm \Delta\xi}$ одержимо час ротациї.

Spörer обрахував тим способом з численних ґруп сонічних плям, що були в ріжних ширинах обсервовані, ріжні часи ротациї і уставив се в табелї.*)

Час обсерваций	Число періодів	Геліографічна ширина	Денний кут обороту ξ	Випливає з того час обороту сонця = T
1861. VI. 15 — VII. 19.	$2._{11}$	+ 25°	13·783°	26·120 д.
1862. I 16. — II. 19.	$2._{8}$	+ 21°	13·877°	25·943 д.
1862. III. 9. — V. 8.	$3._{21}$	+ 15°	14·081°	25·566 д.
1862 VIII. 20. — IX. 26.	$2._{11}$	+ 14.7°	14·077°	25·574 д.
1861. III. 24. — VII. 18.	$5._{28}$	+ 14·3°	14·022°	25·674 д.
1862. IV. 2. — V. 6.	$2._{16}$	+ 13·2°	14·108°	25·517 д.
1861. IX. 27. — X. 29.	2_{12}	+ 12·5°	14·295°	25·184 д.
1860. XII. 3. — I. 2.	$2._{7}$	+ 8·3°	14·284°	25·204 д.
1860. XII. 3. — I. 4.	$2._{8}$	+ 6·2°	14·275°	25·220 д.
1862. IX. 19. — 25.	$1._{5}$	+ 5·0°	14·329°	25·150 д.
1861. VIII. 2. — 10.	$1._{7}$	+ 1·3°	14·669°	25·541 д.
1861. V. 4. — VI. 2.	$2._{7}$	— 4·3°	14·333°	25·118 д.
1862. V. 30. VII. 3.	$2._{10}$	— 6·0°	14·335°	25·113 д.
1862. III. 18. — VI. 12.	$4._{21}$	— 9·0°	14·215°	25·325 д.
1861. VII. 29. — X. 25.	$4._{20}$	— 12·7°	14·100°	25·532 д.
1861. VI. 26. — VII. 26.	$2._{6}$	— 13·9°	14·274°	25·220 д.
1861. VII. 2. — VI. 9.	$1._{8}$	— 30·4°	13·732°	26·216 д.

*) Poggendorfs Annalen der Physik und Chemie p. 1862. т. 117 ст. 510 дд. 516.

Оголошене друком обсерваций Carrington'a мало великий вплив на праці Spörer'a Передовсїм подобала ся йому у Carington'a метода обсерваций і їх обрахованя. За приміром Carrington'a і Peters'a тепер представив і Spörer свої обсервациї емпіричною формулою

$$\xi = 14{\cdot}8726^0 - 0{\cdot}217^0 \sqrt{b},$$

де b є шириною геліографічною.[1]) Та формула відносить ся однакож лиш до обсерваций з лїт 1861—1864. Коли Spörer втягнув в рахунок також дальші обсервациї до р. 1858, показала ся потреба нової формули

φ	ε	T
0^0	14·346°	25·09 д.
5^0	14·324°	25·13 д.
10^0	14·258°	25·25 д.
15^0	14·148°	25·44 д.
20^0	13·996°	25·72 д.
25^0	13 803°	26·08 д.
30^0	13·569°	26·53 д.
35^0	13·297°	27 07 д.
40^0	12·989°	27·72 д.

$$\xi = 1011' - 203' \sin (41{\cdot}13' + \varphi).$$

Від тепер укладав Spörer що раз то нові формули в міру того, як прибувала слількість материялу. Відносини на сонци змінюють ся періодично, треба було отже для представленя нових обсерваций укладати нові формули. Для плям з лїт 1861—1871 уложив Spörer дві головні формули.

$$\xi = 8{\cdot}529^0 \cos \varphi \text{ [2])} \text{ і}$$

$$\xi = 12{\cdot}7257^0 + 1{\cdot}6475^0 \cos 2\varphi. \text{ [3])}$$

А коли і ті формули не ві всїх случаях показали ся добрими, вибрав Spörer певне число плям, котрі відбули кілька ротаційних періодів. Обрахувавши їх обсервациї, утворив ще 4 формули. Найлїпшою показала ся однак пята з ряду формула.

$$\xi = 8.548^0 + 5{\cdot}798^0 \cos\varphi.$$

При еї помочи дали ся всї обсервациї точно представити. В лїтах 1872 і 1873 ріжниці межи обрахованими а обсервованими позиціями плям були майже ніякі і виступали виключно у плям, що лежали в західній части ґруп. З часом ріжниці ся збільшили, але maximum дійшло in plus до 1^0, in minus лиш до $^1/_3{}^0$.[4]) Пересїчний ротаційний кут для цїлої сонічної кулї виносить після сеї формули 14·2665°

[1]) Monatsberichte der königl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin 1865 ст. 338.
[2]) Publ. der astr. Gesellschaft. т. XIII. ст. 151.
[3]) Publ. des astroph. Observatoriums zu Potsdam т. I. ст. 81.
[4]) Tagblatt der 54. Versammlung deut. Naturf. und Ärzte Salzbg. Beil s. 43

денно, отже час ротації 25·234 дня. (Довжина $\Omega = 74^0 37'$, наклонене $= 6^0 57'$.) Згадаєм також про висліди обсерваций Spörer'a, о скільки они відносять ся до змін в геліографічній ширині.[1]) Він найшов, що: 1) в підрівникових полосах аж до $\pm 10^0$ ширини плями зближають ся ідь рівнику. 5) Межи 10^0 а 15^0 находим слабу течію в напрямі бігунів. 3) Поза 15^0 течія та стає сильнійшою. 4) Число, що виражає процент днів, в котрих переважає напрям у плям ідь бігунови, росте правильно з шириною і доходить поза 25^0 до 30%.

Крім тих двох великих обсерваторів Carrington'a і Spörer'a, що свої досліди майже тілько дійсному рухови плям посьвячали, займав ся явищами руху у плям принагідно також Secchi.

Як се вже загальний напрям єго дослідів вказує звернув він найголовнійшу увагу на відносини льокальні. Подамо ту кілька єго заміток.[2]) 1) В часі коли пляма ділить ся на дві або більші частини, видимо тоді завсігди мовби скок в перед, дійсний рух стає ся дуже скорий і напрасний. 2) Також великі і тревалі плями підлягають таким наглим скокам. Як вже висше було сказано, сила плямо-творча у таких плям проявляє ся кілька разів з ряду; за кождим таким „відмолодненєм“ робить пляма скок наперед. Те цікаве явище обсервував Secchi іменно на кількох плямах на весну і в літі 1870. 3) Округлі, правильні плями є загалом тревальші і одностайнійші, як ті, котрих вид є неправильний. Рух правильних плям є правильний. 1) Малі плями т. з. пори відбувають дуже неправильні рухи; так само великі плями в періоді повстаня і заниканя. 5) Сли коло плями вже істнуючої витворить ся пляма, хотяйби цілком незалежно від неї, то перша пляма дізнає неначе перешкоди в руху і він стає ся неправильним. 6) Великі плями коли раз зникнувши знов ся появлять, показують ся завсігди в місци, що є віддалене від місця, де зникнули, о таку просторонь, якої вимагає право ротації сонця. Та просторонь є нераз дуже значна. Secchi згадує одну пляму, що зникнувши вирнула на поверхню сонічної кулї, відбувши дорогу під нею на просторони 30^0 геліографічної довжини. — До тих заміток можемо на підставі обсервацій Secchi'ого[3]) додати ще одно: 7) В обсягу одної і тої самої ґрупи ріжні плями відбувають в ріжнім напрямі і ріжною скоростию рухи.

[1]) Пор. табелю в Publ. des astr. Obs. zu Potsdam т. IV. ст. 416—418.
[2]) Secchi o. s. ст. 140.
[3]) o. c. ст. 142—146.

Обсервації Carrington'a і Spörer'a не тілько самі собою мають велике значінє для сонічної фізики, але як згадалисьмо також для того, що они стали ся підкладом до теоретичних дослідів Faye'a і Zöllner'a. Faye вже від хвилї публікації обсерваций Carrington'a займав ся справою сонічних плям дуже усердно і почавши від 1865 р. помістив в Comptes rendus парискої академії много розвідок під загальним титулом: Sur la constitution physique du soleil, де представляв Академії свої власні погляди і обговорював чужі. По довшім розслїджуваню обсерваций Carrington'a замітив Faye, що належить зі зглядів теоретичних змодифікувати формулу ротації Carringtona. Коли она звучить $\xi = 865' - 165' \sin^{7}/_{4} \lambda$, то Faye надав єї вид:

$$\xi = 862' - 186' \sin^2 \lambda.$$

В тім виді представляє формула Faye'a обсервації Carrington'a лїпше ніж власна єго формула.[1]) Формулу тую змінив однак Faye пізнійше на слїдуючу:

$$\omega = 857{\cdot}6' - 157{\cdot}3' \sin^2 \lambda$$ [2])

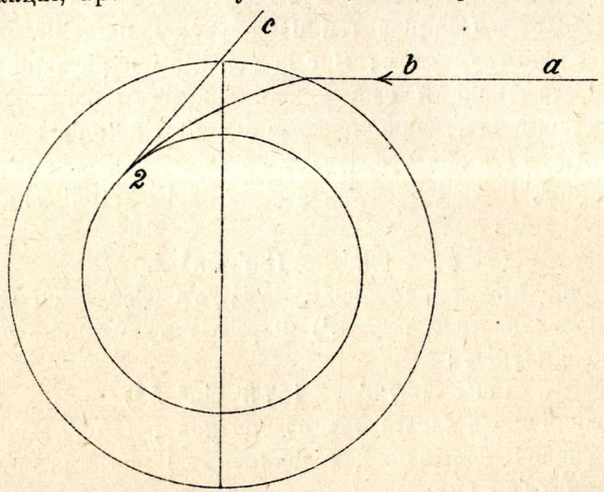
Другою річию в англїйских обсервациях, на яку звернув увагу Faye, була певна постійна неправильність і ріжниця зглядом обсерваций Spörer'a. Faye замітив именно, що подані Carrington'ом чисельні вартости ріжнять ся постійно від таких у Spörer'a о 0·16 дня, або 3·84 годин in minus. Понеже ріжниця була занадто великою, щоби єї можна присудити обсервацийним блудам, думає Faye, що дійсний рух плям зависить від епохи; інакший був в літах 1856/7, коли обсервував Carrington, а иньший в 1862—5, коли обсервував Spörer.[3]) Додаєм від себе, що новійші досліди Spörer'a цілковито оправдали се припущенє.[4])

Не так легко було Faye'ому витолкувати другу постійну неправильність в дійснім руху плям. Полягає она от на тім: Луки заточені плямою в одним дни суть при східнім краю завсігди більші, при західнім меньші, чим бути повинні. В міру як пляма і край сонічного кружка зближають ся, росте та малїє та неправильність. Завважав єї вже Carrington і обяснював єї рефракциєю сьвітла в сонічній атмосфері.[5])

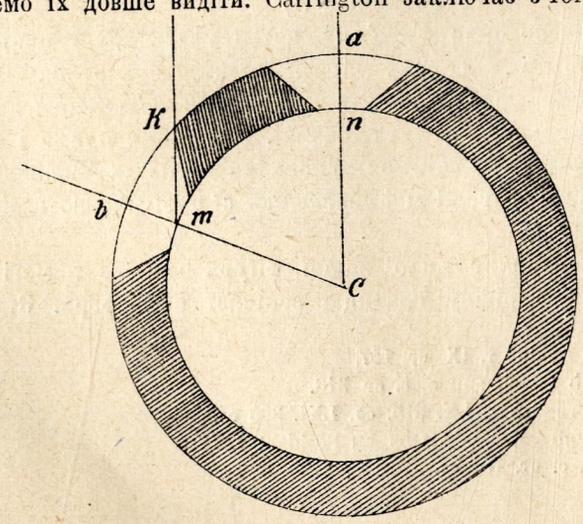
Нехай внутрішне коло нашої фіґури означає в меті сонічну кулю, а внїшне горішну границю сонічної атмосфери. Земля най

[1]) Comptes rendus т. IX. ст. 147.
[2]) Newcomb Engelmann o. c. ст. 310.
[3]) Comptes rendus т. LX. 815. сл. LXI. 398 сл.
[4]) Publicationen des astr. Obs. zu Postdam т. IV.
[5]) Secchi o. c. ст. 161 сл.

буде в такім положеню, щоби обсерватор, находячий ся на нїй дивив ся на сонце в напрямі ab. Колиб на сонци не було атмосфери, то луч виходячий від точки q ішовби в напрямі c. Але понеже сонїчну кулю окружає атмосфера і лучі сьвітла мусять в нїй улягати рефракциї, проте сей луч не піде в напрямі qc, а заточивши



лїнїю криву, піде лїнїєю b a до ока обсерватора земского. Без рефракциї обсерватор сеї точки не міг би видїти. В наслїдок сеї рефракциї ми видимо кожду точку сонїчної поверхнї єще, заки она мине дїйсний край сонїчного кружка т. є коло, що віддїлює видиму для нас сонїчну півкулю від невидимої. Отже при східнім краю сонця постережемо плями скорше чим повиннисьмо, при західнім же будемо їх довше видїти. Carrington заключає з того: Обставину,



що сонїчні плями у східного края за вчасно ся показують, а у західного за пізно никнуть, належить приписати рефракциї в сонїчнїй атмосферї котра дїлає подібно як в земскій.

Faye найшов, що той спосіб толкованя є недостаточний. Він приписує тую неправильність т. з. паралаксї глубини.[1]) Коли обсерватор дивить ся на осередок плями c, що находить ся припустім в лїйковім заглубленю, то відносить положене єго до точки a, де єго луч видженя протинає поверхню т. зв. фотосферы. Коли пляма находить ся в серединї сонїчного кружка, то луч видженя проходить через спільний центр осередка і пенумбри. Колиж пляма находить ся недалеко края сонїчного кружка, тодї обсерватор не буде видїв осередка плями (m) в рівнім віддаленю від обох берегів плями, але в безпосередній близькости, ба часом навіть в одній лїнії з точкою k, що находить ся на краю заглубленя плями. В наслїдок того здає ся нам, що пляма о кусник bk, є близша осередкови сонїчного кружка, чим в дїйстности. В наслїдок того здає ся нам, що плями вчаснїйше показують ся на східнім краю кружка, а пізнїйше никнуть на західнім. Той вплив паралакси глубин на наші обсервациї руху плям означує Faye на підставі формули

$$\varepsilon = (B + \mathrm{p}) \operatorname{tang} \varrho,$$

де ε означує сочинник рефракциї, p глубину, ϱ гелїоцентричне віддалене плями від осередка сонїчного кружка. Відворотно можна на підставі тої формули означити глубину сонїчних плям.

Faye означив єї з разу на 0·005 – 0·009 д. сонїчного луча т. є. 900—1600 миль.[2]) Але вартости одержані тим способом не причинили ся до потвердженя тої теориї, бо були за великі, щоби згодити ся з обсервациями, а іменно з давнїйшими. Длятого Faye втягнув в рахунок нові, дуже докладні обсервациї Secchi'ого з року 1866.[3]) і зредукував глубину плям на 0·36 до 0·57 земского луча. В виду тої зміни найшла його теория більше признаня.

З між многих иньших обсервайий і гіпотез Faye'ого звернем, увагу ще на одну річ. Faye припускає, що плями не мають правильного руху в ширинї, але підлягають лишень маятниковим осциляциям. Їх період є ріжний в довжинї, під 14° гелїографічної ширини виносить 150—160 днїв. Понеже сучасно підлягають осциляциям в довжинї, то під впливом тих двох сил зачеркують плями своїм дїйсним рухом сїнусоідальні криві загального виду елїпси, котрої

[1]) Sur l'inegatité du mouvement apparent des taches solaires, causée par leur profondeur. Comptes rendus т. LXI. 1082 сл.

[2]) l. c. 1089.

[3]) o. e. ст. 164.

велика вісь є рівнобіжна з сонїчним полуденником. Однак те твердженє Faye'ого, хотяй свого часу було в науковім сьвітї дуже популярне, не удержало ся довго, іменно в виду новійших дослїдів Spörera.

Другим теоретиком, що занимав ся дїйсним рухом плям, був Zöllner.[1]) Ішов він дорогою чисто теоретичною, виходячи з заложеня, що сонце є тїлом огнисто плинним, а плями жужлями, що витворили ся наслїдком льокального остудженя. Розслїдуючи теоретично оборот цїпкої кулї, окруженої плинною верствою, дїйшов Zöllner вкінци до формули:

$$\xi = \frac{A - B \sin \varphi}{\cos \varphi}$$ [2])

за φ означає гелїографічну ширину, а A і B сочинники, котрі належить означити з обсервацій. Zöllner сам не обсервував, але з'ужиткував обсервацийний материял Carrington'a і Spörer'a, узглядняючи також теоречичні дослїди Faye'ого. З обсервацій на обох сонїчних півкулях випровадив Zöllner методою найменьших крадватів вартости на A = 863·4 і B = 619·5.[3]) Формула прибрала отже вид:

$$\xi = \frac{863{\cdot}4 - 619{\cdot}5 \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Правдивість сеї формули випробував Töllner на обсервациях Carrington'a, Faye'ого і Spörera, узглядняючи формули двох перших ученых. Беручи в рахунок всї обсервациї знайшов Zöllner, що коли можливі блуди при ужитю формули Carrington'a представимо числом 1118, а Faye'a числом 1448, то при ужитю формул єго їх число спаде до 806. Колиж не увзгляднемо плям занадто близьких та занадто віддалених від рівника, то відносини блудів будуть такі: C : F : Z = 132 : 192 : 149. То значить що коли блуди, слїдуючі з формули Carrington'a, означимо числом 132, то з формули Faye'ого буде 192, а Zöllner'a 149. Се говоримо про загальну формулу Zöllner'a. На тих самих засадах випровадив він однак ще окремі вартости на A і B для кождої сонїчної півкулї, заключаючи зі змінности знак ib на табелї Carrington'a, що право ротациї є однаковє для обох півкуль. Обрахував отже окремо для півкулї північної вартости: A = 863·8, B = 613·2, для полудневої, A = 861·8, B = 620·5 і дїйсно одержав дуже добрі висліди. Колиж

[1]) Über das Rotationsgesetz der Sonne und der grossen Planeten. Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Bd. XXIII. 1871. ст. 49—113 де глянь математичні виводи.

[2]) l. c. ст. 61.

[3]) l. c. ст. 69.

прийняв A спільне для обох півкуль = 863·8, а B = 613·2 для півкулї північної і 631·1 для полудневої, то висліди перейшли всї ожиданя.[1]) Коли напр. обчисленє обсерваций Spörer'a єго власною формулою дало можливість блуду = 130·1, то обчисленє їх методою Zöllner'a дало тільки 92·4.[2]) Коли-ж усунемо плями занадто зближені або віддалені від рівника, то сума квадратів з блудів винесе при формулї Spörer'a 85·2, а при змодифікованій формулї Zöllner'a 44·8. Єго формула представляє отже обсервациї без сумнїву найлїпше. Але многі учені зі згляду на заложенє Zöllner'a, що поверхня сонця є в станї плинним, не хотїли прийняти його вислїдів без значних застережень.

Додамо, що також славний французький астроном Tisserand уложив емпіричну формулу в цїли представленя своїх дволїтних обсерваций (1874—5). Є она дуже подібна до формули Faye-ого:

$$\xi = 857{\cdot}6' - 157{\cdot}3' \sin^2 \lambda.$$[3])

Але жадна зі згаданих формул не показала ся безвзглядно доброю. Добре представляла она рух тільки тих плям, котрих обсервациї до єї уложеня послужили, а не надавала ся в більшій або меньшій мірі до представленя руху дїйсного плям в иньших часах. Дотепер не удалось отже навіть поверховно розслїдити дїйсного руху плям. Звідси найблисша консеквенция: час і спосіб ротациї сонця не суть нам докладно знані і длятого то вислїди поодиноких ученых так дуже межи собою ся ріжнять. Дуже бистроумно виразив ся о сїй справі Secchi[4]): Ми находимось при означуваню ротациї сонця в тім самім положеню, що астроном селєнїт, котрий хотїв би означити час ротациї землї, не маючи иньшої точки опертя, як лише хмари нашої атмосфери. Щоби з їх обсервациї дїйти до своїх цїлий, мусїв би він вперед пізнати як найдокладнїйше земску метеорольоґію. Так само мусимо ми пізнати метеорольоґію сонїчну, але понеже єї ще дуже мало знаємо, отже нинїшні наукові висліди в тім напрямі належить уважати доперва за перші кроки.

Наше теперішне знанє про явища руху на сонїчній поверхні дїлить їх на три кляси: 1) загальний рух сонїчних плям в наслїдок ротациї, котра має в ріжних ширинах ріжну скорість; 2) позірні рухи в наслїдок паралякси глубини, а може і рефракциї в сонїчній атмосфері; 3) неправильні рухи, що стоять в стислій звязи з самим

[1]) Пор. табелї l. c. ст. 72.

[2]) l. c. ст. 74.

[3]) Comptes rendus т. LXXXII. ст. 766.

[4]) O. c. 166 ст.

Бібліотека наукового товариства імени ШЕВЧЕНКА.

процесом повставаня плям. Про ті послїдні рухи додамо ту кілька слів. Цїкаве є у плям стремлїнє до того, щоби впорядкуватись вздовж рівнобіжників, при чім пляма, що іде передом, є найлїпше розвинена і ограничена, а иньші поступаючі за нею творять як би хвіст. Дальше дуже цїкавою проявою є взаїмне покриване ся плям. Обсервував єго Raschig в Дрезнї 1813 р., Hallaschka 1819 р., Edmund Weiss 1864. II. 12, Haag 1869. IV. 21, Birmingham в Millbrook 1869. V. 6 і 7.[1]) На увагу заслугує також оборотовий рух, який нераз помічано у плям. Dawes в 1852 р. I. 17 і 23 виразно видїв, як одна пляма обернула ся на місци коло свого центра, не змінивши впрочім зверхного виду. Konkoly обсервував се явище досить часто. І так 1872. VI. 7—10. величезна пляма обернула ся від полудня до всходу о 90°.[2]) В р. 1875. IV. 27. оден з осередків великої подвійної плями обернув ся о 100° ідь сходови.[3]) Того-ж самого року VI. 22, сконстатував знов Konkoly оборот одної плями о 90°,[4]) а 1879. VII. 12—15. обернула ся пляма від півночи на схід о 30°, а на другий день ще о 10°.[5]) Такі явища помічав також Flammarion в роцї 1894. 3. серпня с. р. цїлий притїнок великої плями, що числила 25 центрів обернув ся sinistrorsum о 20°, а разом з нею всї центра. Визначний ротацийний рух мали именно два осередки. Північний з них обернув ся з дня VIII. 2. на VIII. 3. о 32°, в днях VIII. 3—4. о 20°, в VIII. 4—5. о 22° т. є. 77° в трох днях. Полудневий осередок обернув ся в VIII. 2—3. о 50°, в VIII. 3—4. о 30°, в VIII. 4—5. о 60°, в VIII. 5—6 о 12° отже о 152° в 4 днях. Иньша пляма з VII. 20—22. обернула ся в двох днях о 34°; всї ті рухи ішли від лївої до правої.[6])

На тім кінчить ся роздїл, що занимає ся дїйсним рухом плям. Можна би ту ще много подати подробиць именно-ж з дослїдів Wilsing'a і Бєлопольского. Але представленє дослїдів сих двох учених належить радше до уступу про теориї сонїчних плям. Там єго помістимо, а тепер додамо дещо про означенє часу ротациї сонця иньшими дорогами, не вже через обсервацию плям. Обсервовано отже наперед походнї і з них означено час ротациї сонця. Wilsing найшов його рівним 25·23 днїв.[7]) Дійшов він при тім до дуже цїкавого ви-

[1]) Sirius II. 9. і XVI. 165.

[2]) Beobachtungen angestellt am astrophys. Ob. in O Gyalla т. I. ст. 88.

[3]) Ibidem т. I. ст. 104.

[4]) Ibidem т. I. ст. 106.

[5]) Ibidem т. II. ст. 37.

[6]) Comptes rendus т. CXIX. ст. 532.

[7]) Astronomische Nachrichten N. 2852 і Ableitung der Rotationsbewegung der Sonne aus Positionsbestimmungen von Fackeln. Publicationen des astr. Obs. zu Potsdam т. IV. часть 2.

слїду, бо спостеріг, що кутові скорости походень не є зависимі від гелїоґрафічної ширини, як се дїє ся у плям. ξ одержане з обсервациї походень є після Wilsing'a рівне під кождою гелїоґрафічною шириною і виносить 14·270°. З того видко, що верства сонїчної атмосфери, в котрій находять ся походнї, не підлягає тим скомплїкованим рухам, що верства, в котрій находять ся плями. Є се вислїд тим дивнїйший, що найновійша метода означувати ротацию сонця, цїлком від попередних метод ріжна, дала результати цїлком анальоґічні результатам Carrington'a і Spörer'a. То метода спектроскопна, що полягає на обсервованю спектроскопом обох країв сонїчного кружка і примінюваню права Doppler'a. Запропонував єї перший раз Zöllner, а уживав Vogel.[1]) Але доперва H. Crew перевів сею методою дві довші сериї обсерваций і найшов з другої серии для денного руху кутового формулу

$$\vartheta = 802' \ (1 - 0{\cdot}00206. \ \chi^0),$$

де χ є гелїоцентрична ширина в степенях. Під рівником найшов Crew час ротациї = 26·23 днїв. Полишаючи дальші вислїди Crew'a на боцї,[2]) звернемо увагу на се, що взагалї спектроскопні обсервациї потвердили вислїди обсерваций плям. Говоримо „взагалї", бо перша серия обсервациї Crew'a вказувала б скорше на припізненє оборотового руху під рівником. Далеко виразнїйша та згідність, коли розсмотримо докладнїйші та цїннїйші обсервациї N. C. Dunér'a.[3]) Зі спостережень в ріжних гелїоґрафічних ширинах дійшов Dunér до переконаня, що закони Carrington'a відносять ся не тілько до руху сонїчних плям, але і до ротациї цїлої поверхнї сонця. Коли точка в околицях сонїчного рівника відбуває оборот в 25·46 днях, то під 45° час обороту винесе вже 30·03 днїв, а під 75° аж 38·84 днїв. Але мимо довших дослїдів не повело ся Dunér'ови вивести теоретичної формули для обороту з спектроскопних дослїдів, так само як не повело ся єї вивести з обсервациї плям.

Заключеня, що мож зробити з тих результатів, а навіть вже і по части зроблено, полишаємо до теорий сонїчних плям і скажемо тільки, що так великі ріжниці між поодинокими ученими в означеню часу ротациї сонця викликали деякий скептицизм. Виразив єго C. A. Schultz-Steinheil, критикуючи именно Crew'a і Dunér'a. Ріжниці в вислїдах приписує він злому означеню і та Ω

[1]) Wolf. Handbuch etc. т. II. ст. 430.

[2]) American Journal of Science. 1889 т. 38. ст. 204, пор. Jahrbuch der Astronomie т. I. ст. 3.

[3]) Nova Acta Regiae Soc. Upsaliensis 3. пор. Vierteljahrschrift der astr. Ges. т. 27. ст. 36 sqts., також Jahrbuch der Astronomie т. III. ст. 1 дд.

(нахиленя сонїчної оси до екліптики і довжини вступного узла.) Його виводи, що зміряють до вияснення, в який спосіб можуть такі ріжниці походити з тих фалшивих заложень, не є однак дуже переконуючі.[1])

Вкінци ще дещо про означене часу ротациї сонця з телюричних явищ. Виходячи зі звязи явищ на сонци і явищ земского маґнетизму та з двацять-кількадневного періоду в них, означив Hornstein час ротациї сонця на 26·83 взглядно 24·55 днїв, Broun на 24·16, Liznar на 24·29, Bigelow на 24·86. Зі змін температури означили час ротациї за заохотою і взором Nervander'a (27·26 дней): Buys-Ballot на 25·682, Fritz на 25·74, Hornstein на 25·14, Broun на 24·13, Van der Stock на 24·10, Bezold (з бурий) на 24·12 день. Але ті означеня, іменно-ж зі змін метеорольоґічних є дуже непевні і мусять бути уживані cum grano salis.[2])

Про періодичність сонїчних плям.

Одною з найпізнїйше пізнаних властивостий сонїчних плям є їх періодичність. Нею заниматись будемо в тім уступі.

Перші обсерватори сонїчних плям в XVII. віцї займали ся, як висше сказано, лиш так довго ними, аж поки не рішив ся спір, чи они находять ся на самій поверхнї сонця, чи є тїлами кружачими докола него. Єсли потім займали ся обсервациями плям які люде, то були се дилєтанти, без фахового образованя. Длятого трудно їм було дійти в сїй мірі до якихсь результатів.[3]) Першим, що впав на гадку, що сонїчні плями можуть бути періодичним явищем, був Християн Horrebow. Обсервував він плями від 1738 до 1775 р. та спостеріг, що в певних часах більше плям являло ся на сонїчнім кружку, а в иньших часах меньше.[4]) Але понеже не впорядкував методично своїх обсерваций після певних правил, тож і не міг виказати періодичности плям. Він слушно подає за причину того обставину, що дотепер астрономи за мало ся тою справою займали. Зіставив отже всї свої обсервациї і замітки в рукописи, а тимчасом учені іменно французскі (Cassini, Lemonnier і иньші) сьміло висказували думку, „que les taches ne suivent pas aucune loi dans leurs apparitions.“ Але мимо того малого занятя сонїчними плямами знане

[1]) Astronomische Nachrichten N. 3543 (т. 148. ст. 225).

[2]) Пор. Jahrbuch der Astronomie etc. т. I. ст. 3.

[3]) Вичисляє тих обсерваторів Wolf в своїй Sonnenfleckenlitteratur, поміщаній в Vierteljahrschrift der natur. Ges. in Zürich.

[4]) Wolf, Handbuch der Astronomie т. II. ст. 407.

було вже пр. при початку XIX. столїтя, що они раз в більшій, другий раз в меньшій скількости ся являють. William Herschel лучив змінність цїн збіжа зі змінностию числа сонїчних плям. Але о часї, в котрім наступують ті періодичні змінн, нїхто не мав докладного понятя аж до кінця першої половини XIX. віка.

Відкритє періодичности сонїчних плям належить признати Генрикови Schwabe'ому. І він не був астрономом з фаху, лиш з замилованя (був аптикарем в Dessau). Заохочений Harding'ом, відкрителем плянетоіди Юнони, взяв ся Schwabe в 1826 роцї до правильних обсерваций поверхнї сонця, сподїючись що найбільше відкрити інтрамеркуриальну планету. Але як сам пише, трафило ся ему те що Саулови, що вийшов шукати коров свого батька, а найшов корону. (I may compare myself to Saul, who went out to seek his fathers asses, and found a kingdom.[1]) По 17 лїтах щоденних обсерваций, що полягали тільки на зазначеню плям в окрузї нарисованого на папері кола проміру 6—7 центиметрів, дійшов Schwabe до дуже важних виславїдів. Доказав він, що виступуване плям на поверхнї сонця не є неправильне, але привязане до періоду меньше більше десятилїтного.[2]) Табеля низше уміщеня представляє нам головні результати дослїдів Швабого. В першій рубрицї вираженний рік, в другій число днїв обсервациї, в третій число плям або цїлих ґруп видних тодї, а в четвертій число днїв, в котрих на сонїчнім кружку не було видно жадної плями.

1826	285	118	25	1832	264	84	49	1838	203	282	0
1827	298	161	2	1833	257	33	**139**	1839	205	162	0
1828	290	**225**	0	1834	275	52	120	1840	263	152	3
1829	261	199	**0**	1835	239	173	18	1841	283	102	15
1830	214	190	1	1836	190	272	0	1842	306	68	64
1831	251	149	0	1837	170	**327**	0	1843	309	34	**147**

Видимо з тої табелї вже на перший погляд, що maxima числа плям припадали на роки 1828 і 1837, а minima на роки 1833 і 1843.

Однакож не найшов Schwabe признання у сучасних учених. На мниме відкритє задивлювано ся дуже скептично, головно під вплывом могучої ще тодї французкої астрономії XVIII. віка і пануючої теориї сонїчних плям Herschel'a, котра вже по своїй природї не надто сприяла періодичности плям. А однак найшло ся кількох ученых,

[1]) Monthly Notices of R. A. S. т. XVII. p. 1889 ст. 123.

[2]) Astronomische Nachrichten 1844. Nr. 495.

що не відкинули a limine припущеня Schwabe'ого, але занялись блисшим єго розслїдженєм. Між ними був Рудольф Wolf, директор астрономічної обсерваториї спершу в Бернї, а опісля в Цюріху.[1])

Відкритє Швабого заняло єго від разу дуже. Розпочав отже зараз в роцї 1847 з одної сторони власну серию обсерваций сонїчних плям, з другої сторони стягав всї давнїйші обсервациї, які лиш міг дістати, щоби на довших сериях випробувати правди гіпотези Швабого. Та осторожність в оцїнюваню вислїдів роботи Швабого оплатила ся Вольфови. Застанавляючи ся іменно над ними, відкрив він сучасно, але независимо від Sabine'a і Gautier'a, згідність в рядах Schwabe'ого і Lamont'a, які представляють періодичні зміни в нахиленю маґнетної голки. Ходило єму тодї наперед о докладнїйше означенє довжини періоду сонїчних плям, бо обсервациї Швабого були занадто короткі і неточні, щоби можна було з них одержати докладні результати. Вольф скомбінував отже ряд Швабого з давнїйшими обсервациями Scheiner'a, Hevel'a, Rost'a, Zucconi'ого, Fritsch'a і Stark'a та означив на їх підставі, з можливим блудом 1 року, кілька епох, в котрих число плям дійшло до maximum або minimum. В своїй тогдашній розвідцї Neue Untersuchungen über die Periode der Sonnenflecken und ihre Bedeutung (Berner Mittheilungen 1852) потрафив Вольф означити слїдуючі maxima і minima:

1) Maxima: 1626·0 (Scheiner), 1717·5 (Rost), 1816·3 (Stark, Bode), 1829·5 (Stark, Schwabe), 1837·5±0·5 (Schwabe), 1848·6±0·5 (Schwabe).

2) Minima: 1645·0 (Hevel), 1755·5±0·5 (Zucconi), 1810·5 (Bode, Fritsch), 1823·2±0·5 (Stark, Biela), 1833·6±0·5 (Schwabe), 1844·0±0·5 (Schwabe).

Понеже ріжницї між чотирома послїдними епохами, що самі йшли одним тягом, виносили:

13·2, 8·0, 11·1 пересічно отже 10·77 років,
12·7, 10·4, 10·4 „ „ 11·17 років,

то на середну довжину періоду випало 10·97 т. є. майже 11 лїт. Щоби дійти до тим певнїйших результатів, взяв Вольф під увагу також давнїйші епохи. Порівнавши їх з новійшими, уложив Вольф слїдуючу порівняну табельку:

[1]) Праці Вольфа над тим предметом поміщені є в Berner Mittheilungen 1850—1856 і в Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich 1856—1893. Перегляд їх оголосив A. Wolfer п. т. Compte rendu des travaux de M. le prof. R. Wolf de Zurich dans la domaine de la physique solaire (Archives de Geneve 1891); те саме по нїмецки Wolfs Untersuchungen auf dem Gebiete der Sonnenphysik. Meteorologische Zeitschrift 1892. т. IX. ст. 201—219. Сам Wolf оголошував до р. 1892 короткі справозданя зі своїх праць в Comptes rendus і в Astronomische Nachrichten.

1848·6 — 1626·0 = 222·6 = 19.11·72 = 20.11·13 = 21.10·60 лїт.
1848·6 — 1717·5 = 131·1 = 11.11·92 = 12.10·93 = 13.10·08 „
1837·5 — 1626·0 = 211·5 = 18.11·75 = 19.11·13 = 20.10·57 „

Та дивна згідність в переднослїдній колюмнї навела Вольфа на здогад, що час треваня періоду сонїчних плям дуже є зближений до 11 лїт. Через порівнуваня, котрих взорець подалисьмо та увзгляднене всяких можливих блудів дійшов Вольф, що середна довжина періоду сонїчних плям виносить 11·111 ± 0·038 с. є. $11^1/_9 = 100 : 9$ і вже був в спроможности заповісти нове maximum на рік 1855.

На підставі розвідки з 1852 р. належить Вольфа вважати властивим відкрителем періодичности сонїчних плям. Швабе спостеріг єї без сумнїву перший, але уміло обробив се відкритє та навів доказів на його дїйсність доперва Вольф. Над Sabine'ом і Gautier'ом, що цїлком независимо від Вольфа, а може навіть дещо вчаснїйше звернули увагу на періодичність, має він ту перевагу, що брав річ виключно з астрономічної точки погляду. Sabine і Gautier доперва зі згідности періоду плям Швабого з періодами маґнетизма земского Lamont'a вивели періодичність самих плям.

Але подібно як відкритє Швабого, так і доказ Вольфа не відразу стрінув ся з прихильним принятєм в ученім сьвітї. Тих кілька епох не могло дати докладних результатів. В виду того почав Вольф з невтомимою робучостию збирати старі обсервациї зі всїх сторін Европи. Вичислимо ту лиш найважнїйші: Harriot'a 1611—1613, Kirch'a і єго рідні 1700—1748, Plantade'a 1705—1726, Rost'a 1718—1720, Hagen'a 1739—1751, Staudach'a 1749—1799, Horrebow'a 1738 (1767)—1776, Mallet'a 1773—1786, Bode'ого 1774—1821, Heinrich'a 1781—1818, Flaugergues'a 1788—1830, Tevel'a 1813—1836, Pastorff'a 1819—1833, Adams'a 1819—1823, Arago'a 1822—1830.[1])

Щоби в тім незміренім лябірынтї чисел завести порядок і уможливити користанє з него, впровадив Вольф тз. числа зглядні (Relativzahlen) чинности сонця. Та чинність після думки Вольфа є прямо пропорциональна числу ґруп плям g а дальше також числу поодиноких сонїчних плям f. Звязь тих двох чисел дасть нам образ чинности сонця в певнім протягу часу. Але число ґруп і число плям не є рівноважними чинниками. Далеко лекше є витворенє нової плями в істнуючій вже ґрупі, як повстанє нової ґрупи. Значінє чинника g в формулї мусить отже бути значно більше, як значінє f.

[1]) І много иньших, вичислених в 600 числах Sonnenfleckenlitteratur. Пор Geschichte der Astronomie ст. 651. Handbuch т. II. ст. 410 дд.

Вольф приняв довільно, що відношенє g : f є як 1 : 10. Є се відношенє дуже вигідне, бо зараз одержуємо формулу легку до обрахованя:

$$r = 10\,g + f.$$

Є се міра чинности сонця в якімсь часї, коли видних ґруп було g, а плям f. За одиницю часу приняв Вольф 1 день, противно як Швабе, що обраховував число плям і ґруп після місяців і лїт. Середна з чисел зглядних всїх днїв в місяци дає число зглядне місячне, середна з місячних зглядних чисел — річне зглядне число. Формула подана є так проста, що иньші учені не думали, щоби зглядні числа могли бути беззглядно докладним висловом дїяльности сонця. Secchi закидував їм недокладність по причинї, що не мають згляду на поверхню плям; а она преціньмусить мати велике значінє до пізнаня сонїчної дїяльности.[1]) Закид сей є однак несправедливий. Wolf доказав іменно з рівнобіжних римских і мадритских обсерваций, що дістанемо майже цїлком ті самі результати, сли місто числа плям f введемо чинник f_1, що означає їх поверхню.[2]) Wolf є навіть думки, що число плям є важнїйшим чинником при обчислюваню, чим їх поверхня, бо найбільшу розтягліcть мають ґрупи плям тодї, коли є вже в станї супокою. Найбільше нових плям в ґрупах творить ся в бурнім періодї повставаня, коли сила плямотворча є найбільша. Крім того за ужитем числа плям, а не їх поверхнї промавляє ся обставина, що давнїйші обсерваций обмежались виключно на численє ґруп і плям, бо означуване їх поверхнї начало ся доперва в найновійших часах. Для одноцїльности приняв отже Вольф число плям місто їх поверхнї за міродайний чинник.

Формула Вольфа в єї найпростїйшім видї може бути ужита до редукциї обсерваций лише одного обсерватора. Коли хочемо зредукувати обсерваций кількох ріжних осіб, мусимо ввести в первісну формулу т з. особистий сочинник k. Так змодифікована формула виглядати ме:

$$r = k\,(10g + f).$$

Той сочинник зависить не тілько від личности обсерватора, але і від єго знаряда. Вольф приняв для себе і для свого інструмента (далевид Fraunhofer'a з предметовою сочкою проміру 3 цалї, з огниковою 4 стопи, побільшенє 64 разів,) k = 1.[1]) Для иньших сучасних обсерваторів означив Вольф k через порівнанє їх обсерваций зі своїми. Для давнїйших обсерваторів діставав він k, порівнуючи щораз то давнїйші обсерваций від своїх власних почавши. Удалось се єму однак лиш для обсерванций від 1748 року. При помочи того сочинника уложив Вольф в р. 1877 неоцїнену табелю зглядних чисел виведених з обсерваций т. з. beobachtete Relativzahlen.

1749	80·9	1779	125·9	1809	2·5	1839	85·8
1750	**83·4**	1780	84·8	1810	**0·0**	1840	63·2
1751	47·7	1781	68·1	1811	1·4	1841	36·8
1752	47·8	1782	38·5	1812	5·5	1842	24·2
1753	30·7	1783	22·8	1813	12·8	1843	**10·7**
1754	12·2	1784	**10·2**	1814	14·4	1844	15·0
1755	**9·6**	1785	24·1	1815	35·4	1845	40·1
1756	10·2	1786	82·9	1816	**46·4**	1846	61·5
1757	32·4	1787	**132·0**	1817	41·5	1847	98·4
1758	47·6	1788	130·9	1818	30·0	1848	**124·3**
1759	54·0	1789	118·1	1819	24·2	1849	95·9
1760	62·9	1790	89·9	1820	15·0	1850	66·5
1761	**85·8**	1791	66·6	1821	6·1	1851	64·5
1762	61·1	1792	60·0	1822	4·0	1852	54·2
1763	45·1	1793	46·9	1823	**1·8**	1853	39·0
1764	36·3	1794	41·0	1824	8·0	1854	20·6
1765	20·9	1795	21·3	1825	15·6	1855	6·7
1766	**11·4**	1796	16·0	1826	36·0	1856	**4·3**
1767	37·8	1797	6·4	1827	49·4	1857	22·8
1768	69·8	1798	**4·1**	1828	62·5	1858	54·8
1769	**106·1**	1799	6·8	1829	67·3	1859	93·8
1770	100·8	1800	15·3	1830	**70·7**	1860	**95·7**
1771	81·6	1801	34·0	1831	47·8	1861	77·2
1772	66·5	1802	55·0	1822	27·5	1862	59·1
1773	34·8	1803	71·2	1833	**8·5**	1863	44·0
1774	30·6	1804	**73·1**	1834	13·2	1864	46·9
1775	**7·0**	1805	47·6	1835	56·9	1865	30·5
1776	19·8	1806	28·9	1836	121·8	1866	16·3
1777	92·5	1807	9·4	1837	**138·2**	1867	**7·3**
1778	**154·4**	1808	7·7	1838	103·1	1868	37·3

[1]) Secchi o. c. ст. 172.

[2]) Astron Mittheilungen Nr. 49 і 62 в Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich том XXIV. ст. 4, том XXIX. ст. 122 дд.

[1]) Новійші досліди Вольфа доказали, що навіть для того самого обсерватора і інструмента сочинник k зміняє ся в часї. Ті зміни стоять в відворотнім відношеню до самих зглядних чисел. Пор. Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich т. XXV. (1880) Mitth. 50 ст. 46 дд. і XXX (1885) Mitth. 65. ст. 230—242.

1869	73·9	1877	12·3	1885	52·2	1893	**84·9**
1870	**139·1**	1878	**3·4**	1886	25·4	1894	78·0
1871	111·2	1879	6·0	1887	13·1	1895	64·0
1872	101·7	1880	32·3	1888	6·8	1896	41·8
1873	66·3	1881	54·3	1889	**6·3**	1897	26 2
1874	44·6	1882	59·6	1890	6·8	1898	26·7
1875	17·1	1883	**63·7**	1891	35·6	1899	
1876	11·3	1884	63·5	1892	73·8	1900	

Обнимає она зглядні числа кождого місяця в році а крім того середне річне число зглядне. Не будемо єї подавали в цїлости, бо є дуже довга і широка та крім того легко доступна.[1]) Містимо тільки єї витяг, що дає яке таке поняте о періодичности сонїчних плям. Для науки має та табеля велике значінє, бо доперва по єї уложеню мож було докладно розслїджувати звязь ріжних періодичних явищ з періодичностию сонїчних плям. Вольф провадив свої обсервациї і обчислюванє зглядних чисел аж до смерти (1893 р.). Пізнїйші, з лїт по році 1877 зглядні числа уміщав він в своїх дотичних Mittheilungen, крім того в Astronomische Nachrichten, Meteorologische Zeitschrift і Comptes rendus. По єго смерти вів сю працю дальше єго асистент і наслїдник Wolfer.

Вольф не вдоволив ся однак тою табелею зглядних чисел, котру з таким накладом часу і працї уложив. Обсервовані числа зглядні виказують дуже часто великі колибаня в наслїдок блудів в обсервациї, атмосферних земских відносин і т. д. Ті колибаня сильно затемнюють перебіг періоду. До збільшеня амплїтуди тих колибань причиняє ся найбільше оборот сонця а в звязи з ним нерівне гелїоґрафічне розміщенє плям і короткі звідси слїдуючі кільканацятьденні періоди. Длятого постановив Вольф числа зглядні, виведені з обсервациї, вирівнати. Вирівнанє представляє ся в слїдуючий спосіб. Хотячи приміром обчислити зглядне число для місяця марта 1850 р., лучить Вольф обсервовані зглядні числа місяцїв від марта 1850 до лютого 1851 включно і бере з них середну аритметичну m_1. Потім бере таку саму середну аритметичну з місячних зглядних чисел від цьвітня 1850 до марта 1851 = m_2. Середна аритметична з m_1 і m_2 дає жадане число зглядне обчислене для місяця марта 1850 р. Так обчислив Вольф цїлу нову табелю тз.

[1]) Находить ся в Mitth. Nr. 42. p. 1877. Meteorologische Zeitschrift т. IX. 1892 ст. 205 дд. Jahrbuch der Astronomie т. III. 1892. ст. 14 дд.

чисел зглядних обчислених. Доперва та табеля, що стояла Вольфови чверть сотнї лїт тяжкої працї, уможливила а бодай дуже облегчила студиї над пробігом періоду сонїчних плям так середного, як і дїйсного. Поглянувши на ту табелю (поміщена низше) далеко виразнїйше бачимо періодичність плям, як се було можливе з табелї обсервованих чисел зглядних.[1])

1749	80·9	1784	**10·2**	1819	24·2	1854	20·6
1750	**83·4**	1785	24·1	1820	15·0	1855	6·7
1751	47·7	1786	82·9	1821	6·1	1856	**4·3**
1752	47·8	1787	**132·0**	1822	4·0	1857	22·8
1753	30·7	1788	130·9	1823	**1·8**	1858	54·8
1754	12·2	1789	118·1	1824	8·6	1859	93·8
1755	**9·6**	1790	89 9	1825	15·6	1860	**95·7**
1756	10·2	1791	66·6	1826	36·0	1861	77·2
1757	32·4	1792	60·0	1827	49·4	1862	59·1
1758	47 6	1793	46·9	1828	62·5	1863	44·0
1759	54·0	1794	41·0	1829	67 3	1864	46·9
1760	62·9	1795	21·3	1830	**70·7**	1865	30·5
1761	85 8	1796	16·0	1831	47·8	1866	16·3
1762	61·1	1797	6·4	1832	27·5	1857	**7·3**
1763	45 1	1798	**4·1**	1833	**8·5**	1868	37·3
1764	36·3	1799	6·8	1834	13·2	1869	73·9
1765	20·9	1800	15·3	1835	56·9	1870	**139·1**
1766	**11·4**	1801	34·0	1836	121·8	1871	111·2
1767	37·8	1802	55·0	1837	**138·2**	1872	101·7
1768	69·8	1803	71·2	1838	103·1	1873	66·3
1769	**106·1**	1804	**73·1**	1839	85·8	1874	44·6
1770	100·8	1805	47·6	1840	63·2	1875	17·2
1771	81·6	1806	28·9	1841	36·8	1876	11·3
1772	66·5	1807	9·4	1842	24·2	1877	12·3
1773	34·8	1808	7·7	1843	**10·7**	1878	**3·4**
1774	30·6	1809	2·5	1844	15·0	1879	6·0
1775	**7·0**	1810	**0·0**	1845	40·1	1880	32·3
1776	19·8	1811	1·4	1846	61·5	1881	54·2
1777	92·5	1812	5·5	1847	98·4	1882	59·6
1778	**154.4**	1813	12·8	1848	**124·3**	1883	**63·7**
1779	125·9	1814	14·4	1849	95·9	1884	63·4
1780	84·8	1815	35·4	1850	66·5	1885	52·2
1781	68·1	1816	**46·4**	1851	64·5	1886	25·4
1782	38·5	1817	41·5	1852	54·2	1887	12·6
1783	**22·8**	1818	30·0	1853	39·0	1888	7·0

[1]) Та табеля уміщена в Mitth. Nr. 42 (1877) Vierteljahresschrift der naturf. Gesellschaft in Zürich 1877. і в Вольфа Handbuch der Astronomie т. I. ст. 675 дд.

На підставі табелї обсервованих зглядних чисел означив Вольф передовсїм всї maxima та minima від найдавнїйших до найновійших часів. Подані они в понизшій табельці.

Minimum	Maximum	Minimum	Maximum
1610·8	1615·5	1745·0	1750·3
8·2	10·5	10·2	11·2
1619·0	1626·0	1755·2	1761·5
15·0	13·5	11·3	8·2
1634·0	1639·0	1766·5	1769·7
11·0	9·5	9·0	8·7
1645·0	1649·0	1775·5	1778·4
10·0	11·0	9·2	9·7
1655·0	1660·0	1784·7	1788·1
11·0	15·0	13·6	16·1
1666·0	1675·0	1798·3	1804·2
13·5	10·0	12·3	12·2
1679·5	1685·0	1810·6	1816·4
10·0	8·0	12·7	13·5
1689·5	1693·0	1823·3	1829·9
9·4	12·5	10·6	7·3
1698·9	1705·5	1833·9	1837·2
13·1	12·7	9·6	10·9
1712·0	1718·2	1843·5	1848·1
11·5	9·3	12·5	12·0
1723·5	1727·5	1856·0	1860·1
10·5	11·2	11·2	10·5
1734·0	1738·7	1867·2	1870·6
11·0	11·6	11·7	13·3
		1878·9	1883·9
		10·7	
		1889·6	
11·20 $\pm$ 2·11 $\pm$ 0·63	11·20 $\pm$ 2·06 $\pm$ 0·03	11·16 $\pm$ 1·54 $\pm$ 0·47	10·94 $\pm$ 2·52 $\pm$ 0·76

Епохи maxim'ів і minim'ів суть ту подїлені на дві ґрупи після своєї певности. Перша ґрупа обнимає епохи аж до 1749 р. Непевність доходить ту до 1 року. В другій ґрупі, що обнимає новійші часи, непевність є значно меньша і виносить пересїчно лиш кілька місяцїв. Перша і третя рубрика обнимає minima з промежутками, друга і четверта maxima також з промежутками. Під кождою рубрикою є на єї підставі обрахована середня довжина періоду.

З поданих власне чисел можемо означити наперед середну довжину періоду, взявши середну вартість зі всїх ріжниць

$$p = \frac{\Sigma D}{n}$$ [1])

або подїливши ріжниці межи що двома остаточними епохами через число періодів, приміром:

$$p = \frac{(m_n - m_1) + (M_n - M_1)}{n},$$

де m означає minimum, M maximum, а n число періодів пр.:

$$p = \frac{(1878{\cdot}9 - 1610{\cdot}8) + (1883{\cdot}9 - 1615{\cdot}5)}{48}.$$

В той спосіб одержав Вольф на довжину періоду число 11·18 за середним ваганєм $= \pm$ 1·98 а середною непевностию $\pm$ 0·28 року. Ті вартости ріжнять ся як видимо дуже лиш мало від одержаних Вольфом вже в 1852 році вартостий (11·111 $\pm$ 2·03 / $\pm$ 0·307). Числа, що находять ся коло цифри, що виражає довжину періоду, означують два блуди можливі при єї означеню. Зовуть ся они, як вже згадано, середним колибанєм (mittlere Schwankung) і середною непевностию (mittlere Unsicherheit). Середне колибанє повстає в слїдуючий спосіб. Таблиця епох показує нам іменно, що довжина ріжних періодів є дуже ріжна і колибає ся межи 8 а 16 лїтами. Є она отже видимо змінна, а число 1·98, що є обраховане з колибаня поодиноких періодів після звісної форми з теориї найменьших квадратів:

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n - 1}}$$

дає середну вартість для того середного колибаня. Друге додане число означає тз. середну непевність (mittlere Unsichercheit). Походить она звідси, що обсервациї сонїчних плям, хотяй вже більше як півтретя столїтя тревають, не є ще достаточно довгі, щоби довжина періоду могла бути пізнана з більшою точностию як днесь т. є. на 4 місяцї. Середну непевність обчисляємо після формули:

---

[1]) Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich т. XXVI. 1881. Mitth. Nr. 52. ст. 60.

$$\sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n\ (n-1)}}.$$

Подані повисше вартости є то тз. епохи обсервовані. Бачили ми, що ріжниці в часї між поодинокими такими епохами є дуже великі; щоби отже дістати постійні точки для дальших теоретичних досліджів, обчислив Вольф т. з. середні епохи. Спосіб рахунку покажесь найлїпше на примірі. Хотячи одержати пр. середне minimum, що припадало десь около половини XVIII. віка, додає Вольф до першого взагалї знаного minimum, що припадає на рік 1610·8, 12 нормальних періодів і нотує одержану суму (= 1745·0). Потім до другого знаного minimum 1619·0 додає 11 нормальних періодів, до третого знов десять і т. д. З одержаних тим способом епох бере середну вартість. Потім беручи XXIV-у з ряду епоху (1878·9), віднимає від неї 12 нормальних періодів, від XXIII-ої 11, від XXII-ої 10 і т. д. періодів. З одержаних епох знов бере другу головну середну вартість. Середня вартість зі згаданих двох головних середних дає нам жадану епоху.

Є ще иньший спосіб обрахованя довжини періоду і середних епох[1]) а то при помочи формул:

$$E_m = T_0 + x + nP \quad \text{і}$$
$$E_M = T_0 + y + nP,$$

де T_0 означає якунебудь епоху, від котрої виходимо, $T_0 + x$ представляє нормальну епоху minimum, $T + y$ нормальну епоху maximum, n рядове число періоду. Коли такі услівні рівнаня уложимо для кождого maximum і minimum, то одержимо при помочи методи найменьших квадратів дуже приближені вартости для x, y і P.

Табеля обсервованих і обрахованих епох.

Обсерв. Minimum	Обсерв. Maximum	Обрах. Minimum	Обрах. Maximum	△
1610·8		1610·0		+ 0·8
	1615·0		1615·1	+ 0·4
1619·0		1621·2		− 2·2
	1626·0		1626·3	− 0·3
1634·0		1632·4		+ 1·6
	1639·5		1637·5	+ 2·0

[1]) Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich т. XXVI. Mitth. 52. ст. 60. Пор. Astronomische Nachrichten Nr. 2325.

Обсерв. Minimum	Обсерв. Maximum	Обрах. Minimum	Обрах. Maximum	△
1645·0		1643·6		+ 1·4
	1649·0		1648·6	+ 0·4
1655·0		1654·8		+ 0·2
	1660·0		1659·8	+ 0·2
1666·0		1665·9		+ 0·1
	1675·0		1671·0	+ 4·0
1679·5		1677·1		+ 2·4
	1685·0		1682·2	+ 3·2
1689·5		1688.3		+ 1·2
	1693·0		1693·4	− 0·4
1698·9		1699·5		− 0·6
	1705 5		1704·5	+ 1·0
1712·0		1710·7		+ 1·3
	1718·2		1715·7	+ 2·5
1723·5		1721·8		+ 1·7
	1727·5		1726·9	+ 0·6
1734·0		1733·0		+ 1·0
	1738·7		1736·1	+ 0·6
1745·0		1744·2		+ 0·8
	1750·3		1749·3	+ 1·0
1755·2		1755·4		− 0·2
	1761·5		1760·4	+ 1·1
1766·5		1766·6		− 0·1
	1769·7		1771·6	− 1·9
1775·5		1777·7		− 2·2
	1778·4		1782·8	− 4·4
1784·7		1788·9		− 4·2
	1788·1		1794·0	− 5·9
1798·3		1800·1		− 1·8
	1804·2		1805·2	− 1·0
1810·6		1811·3		− 0·7
	1816·4		1816 3	+ 0·1
1823·3		1822·5		+ 0·8
	1829·9		1827·5	+ 2·4
1833·9		1833·6		+ 0·3
	1837·2		1838·7	− 1·5
1843·5		1844·8		− 1·5
	1848·1		1849·9	− 1·8
1856·0		1856·0		+ 0·0
	1860·1		1861·1	− 1·0
1867·2		1867·2		+ 0·0
	1870·6		1872·2	− 1·6
1878·9		1878·4		+ 0·5
	1883·9		1883·4	+ 0·5

Та метода є по тій причині добра, що означуємо від разу x, y і P. Длятого уживав єї Вольф до обчисленя зглядних чисел. Додати треба, що уложив він осібні формули для обчисленя старших і новійших епох, формулу загальну і формулу до обчисленя нормальних епох.[1])

1) Для епох старших: Maxima обчисляють ся після формули
$p = 1761{\cdot}968 + 11{\cdot}235.\ n$; для minimum
$p = 1756{\cdot}437 + 11{\cdot}235.\ n$
2) для епох новійших:
Maximum: $p = 1758{\cdot}362 + 11{\cdot}313.\ n$
Minimum: $p = 1753{\cdot}912 + 11{\cdot}313.\ n$
3) загальна формула:
Maximum: $p = 1760{\cdot}265 + 11{\cdot}082.\ n$
Minimum: $p = 1755{\cdot}278 + 11{\cdot}082.\ n$
4) для епох нормальних:
Maximum: $p = 1760{\cdot}342 + 11{\cdot}132.\ n$
Minimum: $p = 1755{\cdot}364 + 11{\cdot}132.\ n$

Переходимо тепер до послїдного уступу дослїдів Вольфа, котрий дотичить т. з. дїйсного пробігу змін в відповідній скількости сонїчних плям. Щоби улекшити пізнанє дальших властивостий періода плям, можемо ужити ґрафічного способу. Коли именно числа зглядні представимо на оси рядних, а час на оси відтятих, дістанемо криві, що виражають пробіг періоду сонїчних плям. Ті криві можуть бути двоякі після того, чи уживаємо до їх сконструованя обсервованих чи обрахованих зглядних чисел. Анї одна анї друга крива не має правильного виду, бо між поодинокими maxima'ми і minima'ми заходять в натузї (інтензивности) великі ріжниці, як се відразу можемо видїти з табелї зглядних чисел. Ріжниці будуть меньші, наколи возьмемо криву з середних вартостий. Та неправильність має свою причину раз в коротких періодичних колибанях внутр обсягу одного періода, а дальше в великих періодах, що обнимають по кілька або більше $11^1/_9$-лїтних періодів. Дрібні зубцї в кривій походять з короткого періодичного колибаня в числї сонїчних плям. Виносить оно дещо більше як $7^1/_2$ місяця і було через Вольфа сконстатоване цїлком певно, мимо великої трудности, що ішла з неточности обсервацийного материялу, з впливів геліоґрафічного розміщеня плям і з обороту сонця, який витворює кільканацятидневні позірні періоди. Так само певно доказав Вольф, що короткі періодичні ваганя

[1]) L. c. ст. 62.

мають більші амплїтуди підчас maximum, як підчас minimum. Коли споглянемо на криву, завважимо ту властивість зараз. Зубцї підчас maximum розходять ся, а підчас minimum зближають ся до себе.[1])

Ріжниця поодиноких періодів з огляду на довжину і висоту филь є дуже значна і видна раз з самого числа зглядного поодиноких maxim'ів і minim'ів, а потім з ріжниці треваня поодиноких періодів. Роздивившись в табелї яких небудь зглядних чисел, побачимо, що дїйсна довжина періоду вагає ся межи 8 а 16 лїтами. Вольф старав ся ріжними способами дослїдити, чи нема в тій мірі якої правильности, але міг лиш то сконстатувати, що в певних часах панують короткі періоди по 8, 9, 10, 11 лїт, а в иньших довгі: від 12—16 лїт. Та ріжниця виступує виразно також тоді, коли вместо промежутків часу возьмемо самі епохи т. є. maxima і minima. В рубриці Δ послїдної табелї Вольфа можемо постеречи деяку систематичність. Вольф занимав ся тою справою дуже довго. З початку здавало ся єму, що більша дїяльність сонця є звязана з короткими періодами та відворотно. Наслїдком сеї думки було тверджене, що дїяльність сонця внутр періоду є величиною сталою. Пізнїйші дослїди не потвердили сеї думки, противно виказали, що сума місячних зглядних чисел межи двома по собі слїдуючими minima'ми є в ріжних періодах дуже ріжна.

Що до більших періодів, то істноване їх припускав Вольф вже в 1861 роцї.[2]) Вказує на них і то дуже виразно та обставина, що горбки і долинки періодичної кривої не лежать в одній горизонтальній лїнії. Але мимо дослїдів кілька разів в тім напрямі піднаних, не дійшов Вольф до певних результатів. Він думав з початку, що довжина того великого періоду виносить $55^1/_2$ та 160 лїт.[3]) Але змінив своє переконанє в р. 1889 при розслїджуваню дуже давних як знаємо китайских обсерваций. Они нотують дуже численні плями в лїтах 371 і 1371 по Христї. Тих 1000 лїт, що лежать межи ними, дадуть ся подїлити або на 12 періодів по $85^1/_3$ лїт, або 15 по $66^2/_3$ лїт, або на 90 по $11^1/_9$, або на 100 по 10, або врештї на 120 по $8^1/_3$ лїт. ($1000 = 12.83^1/_3 = 15.66^2/_3 = 90.11^1/_9 = 100.10 = 120.8^1/_3$). Були отже до вибору дві дати $83^1/_3$ і $66^2/_3$ лїт. За першою цифрою промавляє ще та обставина, що в 1871 р. т. є. 500 ($= 6.83^1/_3$) лїт по 1371 роцї, припало дуже сильне maximum

[1]) Криві Вольфа є дуже розповсюднені пр. і у Secchi'ого ст. 177. Young ст. 144. Пор. Wolf, Handbuch т. II. ст. 412.

[2]) Astr. Mitth. Nr. 12. Vierteljahresschrift der nat. Ges. in Zürich 1861. Bd. VI.

[3]) Astr. Mitth. Nr. 19 і 20. Comptes rendus т. LXII. ст. 913.

а так само в році 1788 т. є. на 83 лїт перед 1871 роком. Але пізнїйше показало ся, що таку саму претензию до докладности мають і періоди по 100 і 170 лїт. Именно послїдна величина має дуже много даних за собою, але Вольф не міг ще доказати істнованя так довгого періоду, бо від року 1750, відколи зачинає ся непереривний ряд обсерваций, не уплинуло ще 170 лїт. Треба отже сконстатованє того періоду полишити будучности.

Спосіб повстаня таких довготревалих періодичних колибань толкує Вольф сходом кількох коротких, другорядних періодів, котрі наслїдком нерівної довгости від часу до часу сходять ся, і як би через інтерференцию викликують підвисшенє филї.[1]) На ту гадку навели Вольфа рахунки, що їх був підприйняв, щоби на ново означити докладну довжину 11-лїтного періода. Полягали они на тім: Кожде вирівнане (обраховане) зглядне число місячне з лїт 1751—1870 (т. є. 1440 цифр) представив Вольф яко рядну. Опісля подїлив ті рядні на ґрупи з рівним числом складників і брав аритметичну середну наперед зі всїх перших, потім зі всїх других і т. д. цифр в кождій ґрупі. В наслїдок того ті рядні вирівнувались лиш в тім случаю, коли одна така ґрупа припадала на maximum або minimum якого періоду більшого від 11 лїт, а тодї виходила на верх періодичність функциї. Коли именно обчислимо $\sqrt{\frac{\Sigma m^2}{n}}$ т. є. другий корінь з аритметичної середної квадратів середних вартостий, то та величина, тз. середна екскурзия принимає від часу до часу найбільшу вартість, сли істнує або довший, або коротший від нормального період, а беремо на увагу ґрупи з числом членів щораз то ріжним. Вольф подїлив тих 1440 зглядних чисел на ґрупи по 96, 98, 100, 102 і т. д. аж до 150 чисел та шукав періодів. Обчисливши висше згадану середну екскурзию, одержав він тз. місячні ріжницеві ряди (monatliche Differenzreihen). З них взявши середну обрахував такі самі річні ряди.[2]) З уміщеної там (ст. 197) табелї подамо ту витяг, доповнивши єї в зад після пізнїйших дослїдів Вольфа.[3])

[1]) Пор. Astr. Mitth. Nr. 57. Vierteljahresschrift d. nat. Ges. in Zürich 1882. Bd. 27. ст. 189 дд.

[2]) Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich 1882. Bd. 27. ст. 190—194.

[3]) Пор. Mitth. 60. Vierteljahresschrift der nat. Ges. in Zürich. Bd. 30, 1885. ст. 323 дд.

8^a	0^m	± 7·9	9^a	2^m	± 7·9	10^a	4^m	±10·0	11^a	6^m	±17·4
	2	10·2		4	6·3		6	5·6		8	16·6
	4	**12·2**		6	9·2		8	7·1		10	14·7
	6	11·0		8	13·3		10	11·7	12^a	0	12·6
	8	9·1		10	15·9	11^a	0^m	15·0		2	10·5
	10	8·1	10^a	0^m	**16·4**		2	17·6		4	9·0
9^a	0^m	8 3		2	14·4		4	**18·2**		6	7·4

Видимо, що вартости максимальні припадають на $8^1/_3$, 10 і $11^1/_3$ лїт, що вказувалоб на істноване трох підрядних періодів. З них оден довжиною дуже мало ся ріжнить від властивого, головного періода $11^1/_9$ лїт, иньші два виказують вже значнїйші ріжницї.

Ті дослїди Вольфа, які ми власне зібрали, не відразу приєднали собі признанє у ученых. Деякі астрономи, именно по першім виступі Вольфа, вважали його теореми мріями без вартости, иньші закидували єму недокладність та своєвільність. Найбільшим противником єго був Lamont, що виходив з періодів маґнетної деклїнациї, означених ним на 10·43 лїт. Він хотїв ту довгість приписати реґрессивно також періодови сонїчних плям.[1]) Але пізнїйші працї Вольфа та дослїди инших ученых виказали без сумнїву істноване 11-лїтного періода. Carrington, заслужений дослїдник дїйсного руху сонїчних плям, станув відразу по сторонї Вольфа і сконструував криву цїлком подібну до кривої начертаної Вольфом. Він то як знаємо постеріг, що наколи зближає ся minimum, ширина гелїоґрафічна плям малїє, а по minimum являють ся они знов і то нагло, в значній ширинї, котра поволи ся зменьшає. Обясняє се найлїпше долучена табелька Carrington'a.

Ротациї сонця		Північні плями					Полудневі плями				
		0^0—10^0	11^0—20^0	21^0—30^0	31^0—40^0	Середна ширина	0^0—10^0	11^0—20^0	21^0—30^0	31^0—40^0	Середна ширина
1854	1—6	19	16	0	0	10·5°	16	8	0	0	8·7°
	7—13	14	15	0	0	10·7°	17	6	0	0	8·5°
1855	14—20	16	4	0	0	8·4°	13	5	0	0	7·8°
	21—27	11	1	0	0	6·5°	7	4	0	0	9·2°
1856	28—34	10	5	0	0	8·7°	2	1	2	1	20·3°
	35—40	1	0	0	3	25·5°	1	0	16	4	26·4°
1857	41—47	4	0	14	2	21·0°	0	0	29	11	28·4°
	48—53	8	13	47	5	22·0°	0	26	40	2	22·0°
1858	54—60	5	47	34	5	20·3°	2	60	67	9	21·7°

[1]) Пор. полєміку в Poggendorfs Annalen p. 1862.

Carrington виказуючи вплив періодичности на дійсний рух плям, дуже ся прислужив Вольфови, бо через те відкрите дуже ся збільшила імовірність висліїдів Вольфа. Вольф звернув отже пильну увагу на праці Carringtona і переконав ся о справедливости его теорії, коли в той сам спосіб впорядкував обсервації Böhm'a. Одержав для літ 1833, 1834, 1835 і 1836 середні ширини 9·9°, 25·0°, 22·6°, 16·7° і переконав ся, що в часї minimum 1833/4 панували ті самі відносини, що в р. 1855/6. Ще цїкавше те, що навіть обсервації з попереднього віку (XVIII) згоджувались з правом Carrington'a. До того відкритя дійшов Вольф посередно з порівнуваня часів обороту 20 ріжних означувань. Час обороту сонця на їх основі виносить 25·342 ± 0·243 днїв. Колиж Вольф на підставі своєї таблиці епох обчислив середну вартість для часу обороту сонця з обсервованих плям 1) по minimum, 2) в часї maximum, 3) перед слїдуючим minimum, то одержані вартости виносили:

ad 1 — T = 25·599 ± 0·068
ad 2 — T = 25·302 ± 0·051
ad 3 — T = 25·107 ± 0·068

і потвердили цїлковито теорию Carringtona, доказуючи разом, що теория Carringtona є правдива і що періодичність сонїчних плям іде за законами, що їх відкрив Вольф.

Праці Вольфа заохотили також астрономів з Kew: Warrena de la Rue, Balfour Stewart'a і Венямина Loewy'ого до розслїджуваня періодичности. Робили они се фотографічною дорогою при помочи фотогелїографа. De la Rue увзгляднив також обсервації Schwab'ого і Carrington'a а обчисливши для них редукційні сочинники, уложив табелї для літ 1826—1870. Висліди его оголошені суть в Researches on Solar Physics (Philosophical Transactions літ 1865—1870).[1]) Warren de la Rue думав, що спосіб редукції обсерваций, якого вживав Вольф, занадто малу дає запоруку точности. Длятого взяв він за міродайний елемент поверхню плям. З доступних ему обсерваций обчислив отже величину поверхні, покритої плямами, в мілїонових частях видимої півкулї сонїчної. Щоби виелїмінувати можливі похибки, обчисляв він осібно поверхню осередків, пенумбр і цїлих плям, узглядняючи завсїгди перспективну — отже позірну зміну поверхні плям.

[1]) Подана понизше табеля находить ся в річниках 1869 ст. 1. і 1870 ст. 111. Secchi o. c. 172 сл.

Рік	Число днів обсервації	Число днів без плям	Число плям в Kew	Число плям в Римі	Поверхня плям	Рік	Число днів обсервації	Число днів без плям	Число плям в Kew	Число плям в Римі	Поверхня плям
1826	277	22	118	—	—	1849	285	0	238	—	755
1827	273	2	161	—	—	1850	308	2	186	—	583
1828	282	0	225	—	—	1851	308	0	141	—	658
1829	244	0	199	—	—	1852	337	2	125	—	522
1830	217	1	190	—	—	1853	299	4	91	—	350
1831	239	3	149	—	—	1854	334	65	67	—	198
1832	270	49	84	—	196	1855	313	146	38	—	82
1833	267	139	33	—	73	1856	321	193	34	—	40
1834	273	120	51	—	142	1857	324	52	98	—	227
1835	244	18	173	—	837	1858	335	0	202	—	763
1836	200	0	272	—	1407	1859	343	0	205	257	1390
1837	168	0	333	—	1236	1860	332	0	211	251	1343
1838	202	0	282	—	876	1861	322	0	204	251	1310
1839	205	0	162	—	817	1862	317	3	160	168	1165
1840	263	3	152	—	575	1863	330	2	124	165	749
1841	283	15	102	—	340	1864	325	3	130	97	815
1842	307	64	68	—	209	1865	307	26	93	86	542
1843	312	149	34	—	108	1866	349	76	45	81	199
1844	321	111	52	—	197	1867	312	195	25	32	188
1845	322	29	114	—	396	1868	301	12	101	92	449
1846	314	1	157	—	599	1869	179	0	—	198	—
1847	276	0	257	—	1127	1870	147	0	—	305	—
1848	278	0	330	—	1112						

З поданої табелї можемо вивести слїдуючі заключеня: 1) Довжина періоду колибає ся межи 10 а 12 літами, обнимаючи середно 11 літ і якийсь дроб. Для об'ясненя подамо ту ще епохи обчислені Warren'ом de la Rue і порівнаємо їх з епохами обчисленими Вольфом.[1])

Minima Warren'a de la Rue	Minima Wolf'a	Maxima Warren'a de la Rue	Maxima Wolf'a
1833.XI.28 = 1833·91	1833·9	1836.XII.21 = 1836·97	1837·2
1843.IX.21 = 1843·72	1843·5	1847.XI.14 = 1847·87	1848·1
1856.IV.21 = 1856·30	1856·0	1859.IX.7 = 1859·67	1860·1
1867.II.14 = 1867·12	1867·2		

[1]) Researches on Solar Physics Nr. 28. (Phil. Transactions p. 1870 ст. 115 дд.)

Довжину періода обчисляв de la Rue з проміжок обрахованих епох. Проміжка між першим а другим minimum виносила 9·81, між другим а третим 12·58, між третим а четвертим 10·82 лїт. Середна вартість буде отже 11·07.

2) З більшої і меньшої табельки бачимо заразом, що maximum не лежить рівно в середині між двома сусїдними minima'ми, але зближаєсь своїм положенєм дуже до попереджаючого єго minimum, так, що крива, представляюча період, скорше ся підносить до гори як опадає. Середно виносить проміжка між minimum a maximum 3·51 лїт, між maximum a слїдуючим minimum аж 7·54 лїт.

3) Видно слїди, що істнує друге другорядне maximum, що припадає пару лїт по головнім.

4) Поверхня плям підлягає майже тому самому законови, що їх скількість.

5) Плями навіть підчас maximum закривають лиш дуже малу часть сонїчної поверхні. Она не доходить навіть до $^1/_{500}$ видимої півкулї.[1])

Справа періодичности сонїчних плям занимала також Spörer'a[2]) а іменно в пізнїйших часах його дослїдів. За приміром Вольфа взяв ся він до опрацьованя обсерваций почавши з 1750 року. До опрацьованя давнїйших обсерваций від 1750 — 1853 ужив він чисел зглядних Вольфа, а для лїт 1854 — 1878 обсерваций Carrington'a і своїх. Але мимо того, що уживав в другій части роботи материялу цїлком инакше впорядкованого, згідність з висліддами Вольфа була велика. Признає се сам Spörer, хотяй не вірив в докладність і вагу давнїйших обсерваций.[3]) Найлїпше показує се табеля умішена Spörer'ом в єго розвідцї. Перша єї рубрика обнимає епохи після обчислень Вольфа, друга і третя ті самі епохи, означені Spörer'ом на два способи: з кривих і на підставі осібної формули, означеної Spörer'ом числом 28. Взагалї думає Spörer, що при обраховуваню періода сонїчних плям належить для ріжних епох послугуватись ріжними формулами.[4])

---

[1]) Для об'ясненя своїх обсерваций і їх висліддів начертав також Warren de la Rue криву і опрацьував єї дуже докладно. Єї находимо і у Secchi'ого o. c. ст. 179.

[2]) Astronomische Nachrichten p. 1880 Bd. 98. Nr. 2337 ст. 97 дд.

[3]) Пор. Vierteljahresschrift d. naturf. Ges. in Zürich т. XXVI. Mitth. Nr. 52. ст. 61 сл.

[4]) Astronomische Nachrichten Bd. 98. 1880. Nr. 2335, ст. 103.

Епохи Вольфа		Епохи Spörer'a з обчисленя кривих		Епохи Spörer'a середні	
Minimum	Maximum	Minimum	Maximum	Minimum	Maximum
1755·2	1761·5	1755·5	1761·0	1753·7	1758·5
1766 5	1769·7	1760·1	1770·1	1765·1	1769·9
1775·5	1778·4	1775·5	1778·7	1776·4	1781·2
1784·7	1788·1	1784·2	1788·6	1787·7	1792·5
1798 3	1804·2	1798·5	1804·0	1799·1	1803·8
1810·6	1816·4	1810·8	1817·3	1810·4	1815·2
1823·3	1829·9	1822·6	1829 9	1821·7	1826·5
1833.9	1837 2	1833·7	1837·1	1833·6	1837·8
1843·5	1848·1	1843·6	1848·6	1844·4	1849·1
1856·0	1860·1	1856·0	1860·4	1855 7	1860·5
1867·2	1870 6	1867·2	1870·8	1867·0	1871·8
1878·9		1878·9		1878·4	

В звязи з тими дослїдами, а іменно Вольфа, є одна дуже цїкава проба (бо инакше сего годї назвати) Fritz'a, щоби означити maxima періодів сонїчних плям, котрі припали перед 1610 роком, т. є. перед властивим відкритєм сонїчних плям для науки. Fritz опер ся на рівнобіжности одинацятьлїтного періода сонїчних плям і полярної зорі, та скомбінувавши записані по лїтописях обсерваций полярної зорі з записками про незвичайні притемненя сонця, а навіть про дїйсно обсервовані (Китайцями або Арабами) сонїчні плями, потрафив в приближеню означити много давних maxim'ів. Найбільше послужили єму записки згаданої китайскої енцикльопедиї Ma-Twan-Lin, що сягають часів ще передхристових. Отсе виказ тих давнїйших maxim'ів після Fritz'a:[1])

— 44, + 24, 188, 302, 321, 344, 354, 360, 372, 388, 397, 501, 535, 578, 626, 797, 807, 829, 839, 865, 874, 974, 1078, 1089, 1096, 1104, 1112, 1120, 1130, 1137, 1145, 1160, 1185, 1193, 1202, 1238, 1276, 1370, 1511, 1526, 1529, 1547, 1589, 1596, 1608.

Ріжниці між тими епохами дають середно дещо більше чим 11 лїт, згоджують ся отже цїлком з періодом прийнятим через Вольфа. Завважати однак належить, що часові притемненя сонїчного сьвітла, котрі брав Fritz за maxima сонїчних плям, могли мати свою причину в иньших явищах природи пр. довготревалій „сухій" мрацї, вульканїчних димах і попелах високо занесених воздушними

---

[1]) Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich 1881 Bd. XXIV. ст. 259 дд.

струями, а може і хмарам метеоритів, що перелїтали між землею а сонцем.[1]) Liais постеріг пр. в Бразилії 1860. IV. 11. так велике притемненє сонїчного сьвітла, що планета Венера, що тодї стояла дуже близько сонця, була видна в білий день.[2]) В серпни 1883 року підчас вибуху вулькана Krakatau треба було на кораблях, що плили сундайским морем, в само полудне сьвітити лямпи. Сучасно в Батавії панувала 40-дневна темнота.

Для доповненя належить з між розвідок, що відносять ся до періодичности сонїчних плям, згадати ще про розвідки Korteweg'a і Remeis'a.

Korteweg[3]) виступає против думки Вольфа, що істнують два періоди малі, котрі через інтерференцию викликують ваганя в довжинї і напрузї великого періода. Подїливши місячні зглядні числа на три секциї, з котрих одна обнимає час від 1751 до 1791, друга від 1792 до 1732, третя від 1833 до 1873, обчисляє Korteweg середне ваганє для пробних періодів, що обнимають 9 до $12^1/_2$ року, і конструує на підставі тих обчислень т. з. комбінацийну криву. Обчисленями і дорогою ґрафічною представляє дальше Korteweg, що ріжні середні колибаня дають правильну криву з одним тільки maximum, котре припадає що $11^1/_4$ року. Десятилїтний період Вольфа є отже цїлком фікцийний. Деякі неправильности, що істнують в пробігу періода, належить приписати неправильному дїланю сонця.

Remeis[4]) на підставі обсерваций Tacchini'ого звернув знов увагу на кільканацятиденні періоди в дїяльности сонця. Подамо ту тілька епох maxim'ів і minim'ів.

Minima	Ріжниця в часї	Maxima	Ріжниця в часї
1879. XII. 28.	13 день	1880. I. 10.	14 день
1880. I. 24.	14 „	1880. II. 7.	11 „
1880. II. 18.	19 „	1880. III. 9.	14 „
1880. III. 23.			

Істноване так коротких періодів підлягає однак великим сумнївам. Та періодичність є лиш мнима, викликує єї оборот сонця.

[1]) Secchi o. c. ст. 181.

[2]) Comptes rendus t. 60. ст. 649 і 857 дд.

[3]) Über die von Prof. Wolf vermuthete Doppelperiode der Sonnenfleckenhäufigkeit. Sitzungsberichte der kas. Akad. der Wissenschaften in Wien. Math. nat. Classe Bd. LXXXVIII. II. Abth. ст. 1004—1017.

[4]) Sirius т. XIII. 1880. ст. 210.

На тім кінчимо розсмотрюванє періодичности сонїчних плям і мусимо ствердити, що працї Вольфа в тім предметї мусять бути узнані епохальними. Ріжні критики, що металисъ на них зі всїх сторін, не зможуть зменьшити їх значіня. Spörer уживав иньших метод, а одержав результати, котрі ріжнять ся від результатів Вольфа так незначно, що ті ріжниці містять ся в обсязї середного ваганя, яке Вольф подає для кождої своєї дати. Дослїди Warren'a de la Rue також згоджують ся в головних чертах з результатами Вольфа. А хотяй в деяких точках значно ся ріжнять від себе, то по нашій думцї Вольфови а не Warren'ови de la Rue належить признати слушність. Самі Kew'скі астрономи мусять признати, що взявши в рахунок поверхню ґруп і плям одержимо майже такий сам результат, якбисьмо взяли їх число. Крім того завважати належить, що Warren de la Rue обчисляє довжину періода з дуже коротких обсерваций та ще до того в так первісний спосіб, як се робив Вольф ще в 1852 р. Що дотичить Korteweg'a, то він цїлком не порозумів Вольфа і хоче констатувати чи відкривати істноване періода другорядного при помочи чисел зглядних виведених з рахунку, а не з обсерваций. Нема що отже дивувати ся, що досмотрив ся лише одинокого періода. На такім самім, тільки далеко грубшім непорозуминю Вольфа полягають закиди Duponchel'a, про котрі пізнїйше поговоримо.[1])

З періодичностию сонїчних плям получені є ріжні дуже цїкаві явища на сонци. Передовсїм завважали Rosa і Secchi, що промір сонця підлягає періодичним ваганям. Secchi вже в 1873 роцї мав те пересьвідченє, що промір сонця є змінний, именно найбільший в часї minimum сонїчних плям. Право поставлене Ros'ою звучить: Наколи число плям і протуберанций є меньше, сонце має більший промір.[2]) Над сею цїкавою справою розвела ся оживлена дискусия, в котрій взяли участь Respighi, Wagner, Auwers, Remeis та много иньших. Auwers доказав, що материял використаний Secchi'м не є достаточний, а Remeis виступив так переконуючо против Ros'и, що справа здавалась убитою.[3]) Піднїс єї на ново Вольф на підставі обсерваций проміру сонця Maskelyne'a (1765—1800) і Hilfiker'a

[1]) Comptes rendus tome XLIII. ст. 827 дд.

[2]) Розвідки Ros'и: Sulle variazioni del diametro solare. Memorie rei spettroscopisti italiani. Anno 1872. Studii intorno ai diametri solari. Roma 1874.

[3]) Пор. Sirius т. XII. 1879.

(1862—1883).[1]) Він піднїс, що найдені в них періодичні ріжниці не могуть походити виключно з обсерваційних та личних хиб. Дїйсно: криві, що виражають зміну сонїчного проміру, мають подібний пробіг, як криві, що виражають періодичність сонїчних плям. Auwers, що за приміром Вольфа зайняв ся знова сею справою, мусїв признати, що пр. обсервації Maskelyne'a з лїт 1783—1790, коли було дуже много плям на поверхні сонця, виказують зменьшене сонїчного проміру, а знов з лїт 1791—1810, коли було плям дуже мало, виразно є видне збільшене сего проміру. Але заразом доказав Auwers, що дослїди иньших учених, що обсервували в новійших часах і нерівно лучшими інструментами (іменно Wagner) не потверджають висліїв Maskelyne'a і Hilfiker'a. 120-лїтний ряд ріжних обсервацій передискутований дуже пильно Auwers'ом не виказав найменьшої змінности проміру сонця. Дослїди Сикори в послїдних лїтах XIX віка[2]) виказали тільки деяке винесене льокальне поверхні сонця в близькости плям.

Другим сонїчним явищем, що ся дуже тривко лучить з періодичностию плям, є нерівність в їх виступуваню на ріжних півкулях сонїчної кулї. Вже Швабе замітив підчас maxim'ів 1828 і 1848 року, що плями виступали майже виключно на одній з сонїчних півкуль. Що більше замітив Швабе, що місце найсильнїщого розвитку плям здає ся обходити сонце довкола і то в напрямі цїлком противнім до его обороту. В р. 1858 сконстатував він цїлком певно, що півкуля полуднева через довший час була далеко богатша в плями як північна. По Швабе'ви звернув Carl увагу на те, що в лїтах 1859—1863 повстало і зникло далеко більше плям на півкулї сонця від нас відверненій, як на зверненій до нас. Крім того мож було дуже виразно помітити у плям змаганє, щоби щораз виключнїйше витворюватись на одній з півкуль. Вже з дослїдів Carl'a можна заключитв, що ся проява стоїть в звязи з періодичностию сонїчних плям; іменно, коли число плям дійде до свого minimum, тодї на зверненій до нас півкулї сонця слїдує також minimum. Рівночасні і дещо пізнїйші обсервації Spörer'a доказали, що minima лїт 1856 і 1867 і maxima 1860 і 1875 виступили скорше на полудневій як на північній півкулї, а De la Rue, Stewart і Loewy конс-

[1]) Пор. Mitth. Nr. 39 і 61. Vierteljahresschrift d. nat. Ges. in Zürich рік 1873 і 1884.

[2]) Bulletin astronomique 1899 ст. 455.

статували також в тім часі кілька случаїв, котрі вказують на змаганє у плям виступати в певнім періодї на противних кінцях того самого проміру сонця.

Такими самими дослїдами занимав ся також Weber, та ствердивши у плям змаганє, щоби виступувати на поодиноких півкулях, звернув на те явище увагу Вольфа. Вольф вичислив стан плям осібно для обох півкуль в лїтах 1869—1881. Уложена ним таблиця[1]) вказала на те, що число плям від р. 1869 прибувало на полудневій півкулї скорше, як на північній. Потім північна півкуля дігнала в тім зглядї полудневу. Коло половини 1871 р. зачало загальне число плям опадати, але скорше на північній, як на полудневій півкулї. Вкінци однак знов полуднева півкуля перегнала північну. Сума середних зглядних чисел для обох півкуль не є дуже ріжна одна від другої і виносить для північної півкулї 557·9, для полудневої 559·0. Епохи періода т. є maxima і minima приходили на полудневій півкулї о три або чотири місяцї вчаснїйше, чим на північній. Можна се сказати іменно про maximum року 1870 і minimum року 1878. Обсервацнї показали ся занадто короткими, щоби мож було відкрити більшу правильність.

Тим самим предметом заняв ся також Tacchini.[2]) Доказав він іменно цїлковито, що 1) плями часто виступають виключно на одній з півкуль сонця і то протягом довшого часу (пр. через три перші місяцї 1880 року), 2) деякі околиці сонїчної поверхні специяльно сприяють розвиткови плям. В роцї 1880 плями звичайно показували ся в двох точках одного полуденника: під + 22° і — 20° геліографічної ширини.

На закінченє розділу скажемо дещо про причини періодичности сонїчних плям. Під тим зглядом можемо всїх астрономів подїлити на дві ґрупи. Одні приписують періодичність сонїчних плям періодичному дїланю внутрішних сил сонця, другі внїшним причинам. Про погляди першої ґрупи говорити будемо в слїдуючім розділї, що занимати ся буде природою сонїчних плям і ріжними теоріями, які ріжні учені про ню виставили. Бож в такім разї внутрішні причини періодичности сонїчних плям будуть залежали від загального погляду кождого з тих учених на загальний устрій сонїчної кулї

[1]) Mitth. 55. Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich. Bd. 26, 1881. ст. 354 і 355.

[2]) Atti della reale Accademia dei Lincei 1881. Aprile S. 2. vol. 5. ст. 157, 200. Sirius XIII. 1880 ст. 210.

а спеціяльно на істоту сонїчних плям. О причинах внїшних можемо вже ту говорити.

Зараз по відкритю періодичности сонїчних плям, попали учені на думку, що причиною періодичности є планет Юпітер, котрий як знаємо окружає сонце в 11 лїтах 314·834 днях. Вольф в початках своїх дослїдів був приклонником сеї гипотези,[1]) а і в новійших часах не бракувало приклонників того способу толкованя періодичности плям пр. Faye, Sonrel[2]) і Duponchel. Сей послїдний в своїй розвідцї: Les taches solaires reglés par l'éxcentricité des mouvements planetaires Paris 1882,[3]) на підставі цїлком хибно понятих вислїдів Вольфа приходить до переконаня, що межи maxima'ми 1619 а 1856·2 року пройшло не 21 але 20 періодів, отже довжина періоду вино-11·85 лїт т. є. майже цїлком тілько само, що сидеричний рік Юпітера. Єго отже вважає Duponchel справником періодичности сонїчних плям. Абстрагуючи вже від сеї фатальної похибки, що всї виводи Duponchel'a робить неправдивими,[4]) толковане періоду сонїчних плям ексцентричностию, отже раз сильнїйшим, другий раз слабшим притяганем Юпітера, не веде до нїякого позитивного результата. Правда, що крива періоду сонїчних плям згоджуєсь в деяких місцях цїлком добре з кривою, що виражає змінне віддалене Юпітера від сонця, але в иньших знов місцях мають ті криві цїлком відмінний і собі взаїмно противний пробіг. Пр. при початку XIX столїтя був Юпітер найблисший до сонця підчас minimum сонїчних плям, а в роцї 1870 підчас maximum.

Хотяй як бачимо не повело ся вияснити періодичности плям ексцентричностию орбіти Юпітера, то однак аж до найновійших часів не переставали учені мішати планети до періодичности сонїчних плям. Впроваджено однак вже і иньші планети в рахунок. Chacornac, толкуючи повставане плям відпливом сьвітляної маси сонця, твердить, що найбільше їх витворюєть ся під лучистим впливом Венери, Землї і Юпітера з деяким співудїлом Сатурна і Меркура. Спеціяльно розвойови плям сприяє той час, коли стоять в квадратурі з одної сторони Земля і Сатурн, з другої Меркур, Венера і Юпітер.[5]) Також Вольф видячи, що згідність періода плям з часом обігу Юпітера не дасть ся удержати, пробував взяти в рахунок чотири планети: Венеру, Землю, Юпітера і Сатурна.[1]) Уложив він вже в 1859 роцї формулу для кривої плям, в котрій приходили 4 періодичні члени, за котрі підставляв елементи чотирох згаданих планет. В кривій, що виражає зміну числа плям в часї і є виведена з обсервованих чисел зглядних, знаходить ся именно кілька другорядних maxim'ів і minim'ів, котрі можна ввести в звязь з обігом Венери і Землї. Вольф припускає отже, що Юпітер викликує загальний вид кривої плям, Сатурн — зміни в довжинї і висотї єї горбків і долинок, а Земля і Венера зубцї в тій кривій. Також астрономи з Kew, не могучи протягом довшого часу виробити собі ясного погляду на істоту плям, припускали, що істнує звязь між їх періодичностию і рухами планет. De la Rue і Stewart вивели зі своїх обсерваций ряд чисел, з котрих ся показує, що плями все тодї ся в більшім числї показують, коли з трох планет: Юпітера, Венери і Меркура дві стоять в одній лїнії. Застановлювали ся они над чотирома можливими случаями: 1) коли спільно дїлають Меркур і Венера, 2) Юпітер і Венера, 3) Юпітер і Меркур, 4) коли ся зближає або віддаляє сам Меркур. В двох послїдних случаях вплив є малий, а найбільший є в другім, коли Юпітер і Венера разом дїлають. Плями мають після Kew'ских обсерваций змаганє, щоби повставати напротив планети Венери. Віддаляючись від неї в наслїдок ротациї сонця, ростуть і осягають свою найбільшу величину, коли найдуть ся по прямо від Венери відверненій сторонї сонїчної кулї.[2]) З иньших, дуже численних дослїдів подамо на конець тілько вислїди Fritz'a, Kirkwood'a, Sellmeier'a, Loomis'a і Harrison'a.

Fritz звернув увагу на синодичні обіги планет, підчас коли дотепер зважано лишень на сидеричні. Найбільший вплив приписав він планетї Меркурови. Sellmeier противно узнав вплив Меркура мінїмальним, зазначуючи рівночасно, що Венера, Земля і Юпітер пересїчно що 10.07 лїт находять ся для обсерватора уміщеного в середоточцї сонця, в полученю. Вплив тих планет викликує періодичність сонїчних плям в періодї 77·54 лїт. Підчас того періода міняють ся але неправильно періоди по 10·38 і 12 лїт довгі. Kirkwood на стільки є оригінальний, що вийшов від многократно обсервованого факту, що оден полуденник на поверхнї сонця особенно сприяє витвореню плям. Причин сего факту шукає Kirkwood в гипотезї, що згаданий полуденник є приступнїйший дїланю планет як

[1]) Mitth. Nr. 8. Vierteljahresschrift der naturf. Ges. in Zürich 1859.
[2]) Comptes rendus tome 65 ст. 227 + 69 ст. 263.
[3]) Comptes rendus т. 93. ст. 827 дд.
[4]) Пор. рецензию Вольфа Mitth. 56. Vierteljahresschrift etc. т. 27. ст. 64 дд.
[5]) Comptes rendus tome 64 ст. 1196.

[1]) Handbuch der Astronomie т. II. ст. 414.
[2]) Comptes rendus т. 67 ст. 191. Secchi o. c. ст. 182. Young o. c. ст. 147.

иньші полуденники. Заложивши час обороту сего полуденника 24·826 днів, спровадив Kirkwood середний час тревання періода ($11^1/_9$ року) до впливів Меркура, а ріжні його ваганя і неправильности до пертурбаций через плянети взагалї, а Венеру і Землю спеціяльно. Loomis приписує кон'юнкциям і опозициям Юпітера і Сатурна найбільше значінє для періодичности сонїчних плям. Він є приклонником 10-лїтного періода, виходячи від вагань земского маґнетизму, а обставина, що кождих 9·93 лїт припадає по черзї кон'юнкция і опозиция обох тих планет, здавала ся виразно вказувати на вплив тих планет. Але близше розслїдженє річи виказало, що підчас таких констеляций трафляли ся часом maxima, часом знов minima сонїчних плям. Згадаємо ту ще о однім цїкавім постереженю C. Harrisona.[1]) Постеріг він, що коли в формулї:

$$P = \Sigma \frac{pm}{d^2} : \Sigma \frac{m}{d^3}$$

підставимо за p, m, d, час обігу, масу і середнє віддаленє вісьмох головних планет, одержимо для P (довжина періода) 11·29 лїт — величина, що майже цїлком згоджуєсь з середною довжиною періода плям сонїчних Вольфа. Ріжниця лежить в обсягу середної непевности.[2])

Тепер не числять ся вже учені з впливом планет на сонїчні плями і шукають виясненя періодичности в змінній чинности сонця. Трудно собі именно представити, в який спосіб могуть планети сорозмірно малі і так дуже від сонця віддалені, мати на него так сильний вплив. Тяжко припустити, що сила тяжести ту дїлає, бо пр. сила з якою притягає Венера поверхню сонїчну, є 750 разів меньша, як дїланє сонця на поверхню землї. Сила притяганя Юпітера і Меркура є вже 1000 разів меньша. Сонце само викликує на поверхнї землї в околицях рівника приплив около 30 cm. висоκий. Юпітер викликав би на поверхнї сонця, наколи би там була вода, приплив 0·3 mm., Венера приплив 0·4 mm. Хотяй бисьмо навіть приняли, що материя поверхнї сонця є безмірно лекша від води, то преціньь трудно витолкувати впливами планет так великі заколоти, якими є плями. Зрештою само виступуванє плям досить нечаянне, подібне часом до експльозий і кождоразові в них зміни не дадуть ся погодити з рівномірним впливом планет.

[1]) Wolf. Handbuch der Astronomie т. II ст. 414. Philosophical Magarine 1889.

[2]) Розуміє ся, що також Фальб є приклонником впливу планет на сонїчні плями вже зі згляду на свою теорию. Пор. Sirius IV. 1871. ст. 48.

Пробувано вияснити періодичність сонїчних плям ще в оден спосіб. Оден учений американьский B. Peirce правдиво по американьски поставив теорию, що плями то дїри в фотосфері, викликані падаючими на сонце метеоритами. Вистарчить отже припустити, що ті метеорити окружають сонце довгим перстенем, котрий має в однім місци значне згрубінє. Що 11·1 лїт приходить оно в околицю сонця, множество метеоритів спадає тодї на него і маємо maximum сонїчних плям.[1]) Та теория не має однак наукових підстав. Супротивляють ся їй тревалість плям і гелїографічне їх розміщенє. Если би тая теория була правдива, найбільше плям було б під бігунами сонця, де сила від'осередна є найменьша. Тимчасом, як знаємо, плями находять ся головно межи 10° а 35° гел. ширини.[2])

Про теориї сонїчних плям.

Пояснити істоту сонїчних плям пробувало дуже много ученых і неучених людий. Те велике число ріжних поглядів легко витолкувати, бо сонїчні плями є дуже цїкавим, можна навіть сказати таємничим явищем природи. Могло б ся видавати, що те велике число ріжних теорий преціньь причинило ся до якогось поступу в пізнаню натури сонїчних плям. Але на жаль так не є. Нинїшна астрономія стоїть перед сонїчними плямами як перед загадкою так само майже темною як в початках XVII віка. Поступ понять астрономії є на тім поли нескінчено меньший чим на иньших, хоч не бракувало проб посунути єї вперед. Причиною сего є занадто далеке запусканє ся в теорию і неуміле а повне претензиї і занадто аподиктичне пояснюванє річи у многих учених. Щоби пізнати явище сонїчних плям основно, треба довго самому обсервувати сонїчні плями і то найлучшими средствами, якими орудує теперішна наука. Лише теориї, що опирають ся на обсервациях, могуть мати вартість. Теориї оперті на анальоґіях і чисто теоретичних виводах, не могуть вдоволити обсерваторів. Такі теориї переносять результати дослїдів роблених по ляборатория на мікроскопійну міру в безконечні простори сонїчної кулї. Що вислїд сих проб не вдоволяє, легко зрозуміти. Коли ще до того нераз цїлком непокликані люди мішались до сонїчних плям, не дивно, що у фахових астрономів всї нові те-

[1]) Young o. c. ст. 148.

[2]) Запримітити належить, що властивим вітцем сеї гіпотези є John Herschel.

орії сонїчних плям не роблять вражіня. Цїлий сей предмет на довгі лїта здискредитований в їх очах. Найбільше характерною обставиною в тім напрямі є те, що великі обсерватори сонїчних плям, як Carrington, Spörer, Wolf не ставили нїколи своїх власних теорий, хиба лиш принагідно кинули пару слів, що признавали тій або тамтій теорії більшу імовірність. Навіть Secchi, хоч поставив сам кілька теорий, не держав їх ся так завзято як теоретики.

Погляди на істоту сонїчних плям представимо в порядку хронольоґічнім, щоби лїпше пізнати лїтературну полємїку в тім напрямі. Відступимо від сего порядку хиба для яснїйшого уґрупованя річи. Більшість теорий, котрі оглянемо, має вже лише історичну вартість.

Зараз по відкритю сонїчних плям в 1610 р. зачали тодїшні учені спорити ся над їх істотою. Одні зі зглядів фільософічних та догматичних заперечували, щоби сонце, око сьвіта і взорець чистоти, могло мати на собі чорні плями. В виду сконстатованого факту говорили они, що явище плям викликують малі тїла небесні, що окружають сонце в невеликім віддаленю від него. Так думав протягом довшого часу також Scheiner, перший науковий дослїдник поверхні сонця. Він розповсюднив сю думку між своїми учениками.[1]) Tardé і Malapert надали навіть мнимим новим планетам назви. Перший назвав їх Sidera Borbonica, другий Sidera Austriaca. Але і сам Scheiner перехилив ся невдовзї до противної думки, що іменно плями сонїчні находять ся на поверхні сонця, а не поза нею. Від початку приклонниками сего твердженя були: Galilei, Kepler, Fabricius — відкритель плям і Marius. Galilei, а з ним Kepler, вважали плями чимсь подібним до наших хмар. Kepler вносив вже навіть, що плями є независимі від сонїчної кулї, але мусять ся уносити над єї поверхнею. Заключав се він з неправильности руху плям. Видимо отже, що початки теорії хмар лежать ще в початках XVII віка. Так само давних часів сягає теория жужлїв. Представителем єї був в тих часах Marius. Єго теория дасть ся звести в кілька слів: Плями сонїчні се жужлї, що видїлюють ся з палячого ся сонця, котре їх потім викидає в простори всесьвіта, щоби пізнїйше яснїйше сьвітило як сьвічка, коли обітнемо єї спалену часть ґнотика. Через певний час був і Scheiner пересьвідчений, що плями мають сталий стан зґїпненя.

---

[1]) Wolf. Handbuch der Astronomie т. I. ст. 567 дд.

Від тепер нїколи не бракло ученых, котрі би не признавали плям жужлями. Пр. Aversa і Lahire вважали плями непрозрачними місцями плинної поверхні сонця — отже жужелицями. Але пануючою теориєю стала невдовзї иньша. Scheiner під конець своїх дослїдів дійшов до переконаня, що плями не є хмарами. Внїшний їх вигляд вказував на що иньшого, именно, що се є заглубленя в сьвітляній материї поверхні сонця. Ті заглубленя відслонюють долїшну темну верству і через те витворюють явище плями. Тепер по перший раз виробило ся понятє фотосфери яко обволоки, що зложена з ясних хмар покриває зі всїх сторін кулю сонїчну, що сама для себе є цїлком темна.[1]) Певну модифікацию тої теорії подав в другій половині XVII віка Домінїк Cassini. Він думав, що фотосфера підлягає припливови і відпливови та після того відкриває або закриває поодинокі гори, що находять ся на сонци.[2]) Та модифікация найшла многих приклонників, именно межи французскими ученими пр. De la Hire і Lalande, що вважав осередки плям верхами сонїчних гір а пенумбри їх склонами, котрі ми видимо крізь тонку верству фотосфери та до того на пів-прозрачну. Понеже иньші держались гадки, що плями є заглубленя, проте почалась довша полємїка між приклонниками пропастий і гір. Она тревала довший час, але вкінци стали переважати приклонники пропастий, именно в другій половині XVIII віка. Rost вже в першій половині сего віка виставив теорию, що дими виходячі зі сонїчних вулканів продирають фотосферу і отвираючи нам вид на темний осередок сонця є причиною плям. Він також звернув увагу на се, що плями наближаючи ся до сонїчного края викликують в нїм заглубленє.[3])

Остаточне обаленє теорії гір належить приписати Wilson'ови, котрий, як се висше подалисьмо, відкрив,[4]) що осередки сонїчних плям стають зглядом своїх притїнків ексцентричними, наколи плями наближать ся до края сонїчного кружка. Те явище не згоджує ся з припущенєм, що плями, се гори, і тільки тодї дасть ся витолкувати, коли приймемо, що они є заглубленями. Те саме відкритє зробив в 1771 р. независимо від Wilson'a Schülen, а Bode витягнув навіть з тих обсерваций відповідні заключеня. Осередок плями є після Bod'ого куснем сонїчної поверхні. В міру того, чи сей ку-

---

[1]) Wolf. Handbuch der Astronomie т. I. ст. 568. т. II. ст. 406.
[2]) Wolf. Geschichte der Astronomie ст. 650.
[3]) Wolf. Handbuch der Astronomie т. II. ст. 406.
[4]) Observations on the solarspots Philosophical Transactions т. 64. 1774. ст. 1 дд.

сень є скалистий, пісковатий або покритий водою, осередок плями є темнїйший або яснїйший. Притїнок витворюють темні хмари, що лежать між властивою поверхнею сонця а внїшною сьвітляною оболокою або фотосферою.

На тих дуже незначних підставах повстала перша наукова теория сонїчних плям, поставлена William'ом Herschel'ом в початках XIX столїтя.[1]) Не була се теория без упереджень. Herschel з релїгійно-фільософічних принципів думав, що сонце є придатне до замешканя і в дійсности замешкане як і наша земля. Щоби се було можливе, мусїв Herschel припускати, що осередок сонця є зимним, отже темним тїлом. Усе сьвітло і тепло, яке сонце видїляє, походить після теориї Herschel'a лише від тз. фотосфери т. є. внїшної верстви сонїчної амосфери. Фотосфера має натуру наших земских хмар, але є розпалена до білости. Щоби однак таке горяче сусїдство не зашкодило мешканцям сонця, принимає Herschel, що безпосередно під фотосферою находить ся верства темних хмар, котра цїлковито віддїляє фотосферу від сонїчного нїдра.

Роздивімось тепер, яким способом толкує Herschel на підставі своєї теориї явища на сонци.

Передовсїм ґрануляция походить звідси, що долїшна темна верства хмар проглядає через фотосферу в многих місцях і справляє, що поверхня сонця виглядає рапаво. Походні — се поодинокі хмарки фотосфери, унесені прямовими струями воздуха в гору. Плями толкує Herschel в той спосіб: Коли обі верстви хмар т. є. темна і ясна в наслїдок хотьби димів, що уносять ся з сонїчних вулканів, або в наслїдок иньших подібних причин прорвуть ся, тоді через повсталий отвір бачить земский обсерватор кусник темної поверхні, властивого сонїчного нїдра. Сей видимий кусень сонїчного нїдра творить осередок плями. Притїнок же творить верства темних хмар, що роздерта укладає ся концентрично коло осередка. Цїла отже пляма представляє ся яко лїйкоподібне заглубленє, що своїм дном опирає ся о темне внутро сонїчної кулї.

Хотяй своєвільність теориї Herschel'a відразу кидала ся в очі, то все таки она удержала ся дуже довго і числила до своїх приклонників учених сеї міри, що Humboldt[2]) або Arago. Найважнїйшою причиною того довгого удержаня ся теориї Herschel'a була об-

[1]) Observations tending to investigate the Nature of the Sun Philosophical Transactions 1801. ст. 265 дд.

[2]) Kosmos вид. Stuttgart 1880 т. III. ст. 341.

ставина, що нїхто нової теориї протягом кількадесяти лїт не виставив — длятого, що не було жадних нових даних.

Теория Herschel'a є в істориї сонїчної фізики дуже важним явищем, бо замикає перший період істнованя сеї галузи астрономії. Перший сей період був дуже довгий — майже двіста лїт уплинуло від відкритя сонїчних плям до поставленя теориї Herschel'a — а можемо єго назвати дитинячим віком сонїчної фізики.

Про істоту плям маємо в тім часї лише голі гіпотези, а по двіста лїтах теорию прямо чудернацку і незгідну зі здоровим розсудком. Довгий час єї панованя найлучше сьвідчить про те, що сонїчна фізика находилась тодї ще в пеленках. Але за загальним поступом астрономії в першій половині XIX. віка мусїв піти поступ і на тім поли. З початку зазначив ся він хиба тим, що щораз більше обсерваторів звертало свої інструменти на сонїчний круг. І зачали поволи родитись сумнїви. Найбільше впадала в очи неімовірність, щоби внутро сонця могло лишити ся темне і зимне в сусїдстві розпаленої фотосфери. John Herschel старав ся що правда через довший час боронити теориї свого батька. Приписував він именно тій темній верстві хмар особливу властивість: цїлковитої рефлєксиї сьвітла, якої ще у жадного тїла на сьвітї не сконстатовано. Крім того хотїв він ввести теорию свого батька знов в моду, опираючись на припущеню Mayer'a, котре так виразив Leverrier: „que le soleil dejeune et dine des asteroïdes.“ Такі річи були тодї дуже популярні, Herschel хватив ся отже того і приписував творенє ся дїр в сонци паданю на него метеоритів. Потім попав на здогад, що ті отвори походять від воздушних труб на сонци, але всї проби ратувати гіпотезу батька не придались до нїчого. Найгрізнїйше оруже давала єї противникам в руки теория Kant'a і Laplace'a, що була тодї вже загально прийнята. А власне теория Herschel'a прямо їй ся супротивляла. Не бракувало їй що правда аж до найновійших часів приклонників, але мусїла перебути великі модифікациї, так що лишилось з неї хиба те, що плями є заглубленя в фотосфері. Остаточний удар завдала гершлївскій гіпотезї спектральна аналїза. Відкритє Kirchhoffa і Bunsena, вияснюючи природу темних лїній Фраунгофера в сонїчній дуговинї, пхнуло сонїчну фізику на цїлком нові дороги. Майже всї добутки, що добуто в послїдних часах на тім поли, маємо завдячити спектральній аналїзї.

Першим, що на підставі спектральних дослїдів поставив нову теорию сонця був оден з відкрителїв спектральної аналїзи, G. Kirchhoff.[1])

[1]) Untersuchungen über das Sonnenspektrum und die Spektren der chemischen Elemente. Physikalische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften in

Щоби вияснити істноване лїнїй фраунгоферівских в сонїчній дуговинї, твердить Kirchhoff, що сонце складає ся з ядра сталого або плинного, розжареного до найбільшої степени. Само для себе те ядро безпосередно обсервоване дало би дуговину тяглу. Але окружаюча его атмосфера значно холоднїйша, хотяй також розпалена, повна ріжних ґазів. Та атмосфера абсорбує деякі лучі ядрової дуговини і викликує в сей спосіб явище лїнїй Fraunhofer'a.[1])

В дальших уступах своєї працї критикує Kirchhoff теорию Wilson'a і Herschel'a. Він думає, що та теория мусїла би навіть тодї упасти, наколиб жадної новійшої і лїпшої не виставлено. Супротивляє ся она именно всяким правилам фізики. Удержане ядра в станї темнім і зимнім є в сусїдстві так горячої фотосфери не можливе. Через провід розігрілаб ся наперед атмосфера а опісля і само ядро. Доставив на се практичного доказу Draper, теоретично розслїдив ще попередно сам Kirchhoff. В виду того конечна є нова теория сонїчних плям і єї виставляє автор. Она подібна до здогадів Galilei'ого та Кеплєра, але ріжнить ся від них о стілько, що здогад від науково виробленої теориї.[2])

Kirchhoff виходить з того заложеня, що в атмосфері сонця відбувають ся подібні явища як в атмосфері земскій. Льокальні обниженя температури поводують на сонци так само як і на земли творенє ся хмар. Сонїчні хмари розуміє ся є цїлком відмінної натури як земскі. Ті повстають з пари водної, тамті з пар металїчних в незміримо високій температурі. Наколи в атмосфері сонця повстане така хмара, то в лежачих над нею частях атмосфери послїдує відповідно значне остудженє. Хмара перегороджує їх именно від жерела тепла, се є сонїчного осередка. Викликане нею остудженє буде тим значнїйше, чим она буде густїйша і більша. Найсильнїйше буде остудженє безпосередно понад хмарою і в ту сторону то є в гору она буде ся розширяти. Температура єї поволи опаде до тої степени, що она стане непрозорою і утворить тим способом осередок сонїчної плями. В деякім віддаленю понад сею долїшною хмарою витворить ся друга в місци, де стрінуть ся атмосферичні течії, що прямують до вирівнаня температури. Витворить ся ту знижка теплоти і ґази зближившись в тім місци до кондензацийного пункту витворять ту другу хмару, значне рідшу від долїшної, бо в висших

Berlin. 1861 ст. 63—95 і 1862 ст. 227—240. Пор. оцїнки Faye'a в Comptes rendus т. LXIII. ст. 980 дд.

[1]) l. c. ст. 83.

[2]) l. c. ст. 86.

реґіонах атмосфери загальна єї густота є меньша. (Такі дві хмари, що лежать, над собою, можемо часто обсервувати і в земскій атмосфері.) Долїшна хмара дає початок осередкови плями, горішна, укладаючи ся концентрично до першої, творить притїнок. Також иньші явища, котрі бачимо на плямах, вияснює Kirchhoff на підставі своєї гіпотези, а именно промінясте уложенє притїнка і розміщенє плям в двох стрефах по обох сторонах рівника. Льокальне остудженє в сонїчній атмосфері, що є репрезентоване плямою, викликує в безпосереднім сусїдстві хмари атмосферну течію в діл та заразом рівнобіжну єї внїшну течію в гору. Понад самою хмарою переходять ті течії взаїмно в себе. В наслїдок того повстають ту горизонтальні течії, що прямують з великою скоростию від середини на зверх. Длятого то притїнок виглядає промінясто. Материя хмари разом зі згаданими течіями стремить до віддаленя ся від середини та громадить ся при берегах хмари. Длятого ту пенумбра є темнїйша. Великаньска сила тих заколотів вияснює після Kirchhoff'a велику змінність плям цїлковито.[1]) Що до розміщеня плям, є оно випливом нерівної теплоти ріжних околиць сонїчної кулї. В наслїдок високої температури на сонїчнім рівнику повстає ту горяча течія і іде до бігунів, звідки знов приходить зглядно зимна течія до рівника. В місци, де ся ті дві атмосферні течії сходять, то є межи 10^0 а 35^0 гелїоґрафічної ширини, повстають найчастїйше плями. Вкінци займає ся ще Kirchhoff відносинами походень до плям. По его думці є се вибухи, а повстають в наслїдок реакциї температури в околицях плям. Стоять они з ними в тривкій звязи, бо ті вибухи себто походнї викликують стиканє ся верств ріжної температури, а через те творенє ся плям. З другої сторони плями здержуючи промінюванє тих околиць сонїчної поверхнї, що їх закривають, підносять їх температуру і стають ся причиною нових вибухів.

Теория Kirchhoff'a сама для себе не многих зискала собі приклонників. Перехилив ся на єї сторону в перших лїтах своєї наукової працї Spörer і застосував єї до вияснення дїйсного руху плям. Сли пляма відбувала дїйсний рух до заходу, приписував се Spörer істнованю східного вітру (Oststurm), що уносить з собою хмару себто пляму. Сли пляма відбувала рух ідь сходови, припускав Spörer вплив вітру западного (Weststurm). Рухи плям в ширинї приписував Spörer також вітрам з відповідним напрямом.[2]) Але має теория Kirchhoff'a иньше велике значінє. Она перша ввела в науку

[1]) l. c. 89.

[2]) Пор. Comptes rendus т. 63. ст. 977.

властиве загальне поняте про будову сонця, оперте на аналїзї спектральній, котрої здобутки мусїли від тепер узглядняти всї учені, єсли хотїли виставляти нову теорию сонїчних плям. Причиною малого розповсюдненя теориї Kirchhoff'a була обставина, що она не толкувала, длячого плями представляють ся невпередженому навіть обсерваторови яко заглубленя. Приклонники сеї теориї старали ся що правда доказати, що той внїшний вигляд плям є оптичною маною. Spörer так виражавсь аж до недавнього часу. Але те нїкого не переконало так, що около 1865 р. знов ся збільшило значінє теориї Wilson'a і Herschel'a, підпертої в Анґлїї Herschel'ом молодшим а у Франциї головно Chacornac'ом, славним зі своїх щасливих „польовань на планети".

John Herschel тепер по раз перший сформулував свою нову теорию, котра опирає ся на слїдуючих основах. Атмосфера сонця в наслїдок ротациї підлягає сплощеню в околицях бігунів, підчас коли в околицях рівника повстає набренїлість. Через проміньованє обнижає ся температура сонїчної поверхнї при бігунах, а при рівнику зглядно підвисшає ся, бо ту згрубіла верства атмосфери перешкаджає сильнїйшому проміньованю. В наслїдок тої ріжниці в сонїчній температурі, що є цїлком анальоґічна до таких же ріжниць в земскій атмосфері, повстають і на сонци пассати і дві полоси бур, котрі викликують повставанє отворів в фотосфері — отже плям. Повстають там именно цикльони в наслїдок зіткненя течії ідучої від рівника, з течією, що іде від бігуна.[1])

Chacornac держав ся ще чистїйшої теориї Herschel'a. Вважав він плями сонїчні наслїдком вулканїчних вибухів на сонци і шукав в їх розміщеню анальоґії до вулканїчних пасем Buch'a.[2]) Опирав ся він на схожости сонїчних плям а вулканїчних кратерів.[3])

В тім часї (около 1865 р.) виступили однак на тім поли два учені, котрих погляд був протягом довшого часу в тих справах рішаючий. Були се: французский астроном Faye та італїйский патер Secchi. Поставили они рівночасно і від себе независимо в лїтах 1864 і 1866 майже цїлком ідентичні теориї.[4]) Ось їх зміст.

Сонце є величезна куля зложена з розпалених ґазів. Внїшна єї обволока, що повстала в наслїдок остудженя, відгриває меньше

[1]) Пор. Comptes rendus т. LX. ст. 94 Young o. c. ст. 166 дд.

[2]) Comptes rendus том LX. ст. 62.

[3]) Ibidem tome LXII ст. 1095.

[4]) А не в 1868 як думає Young o. c. 167. Secchi оголосив свою теорию по раз перший в Bolletino meteorologico Novembre 1865. Faye в Comptes rendus т. LX. (1865).

більше таку ролю як в штучних сьвітлах ті частинки сталих тїл, що жарять ся в полуминї пр. сьвітляного ґазу і дають много сильнїйше сьвітло, як би дав сам ґаз. Мимо того отже, що є холоднїйша, сьвітить фотосфера далеко сильнїйше, чим внутро сонця. В сонїчній атмосфері панують вічні течії в гору і в діл по лїнїях прямовісних. Они викликують нитковату структуру у фотосфери і ґрануляцию. Де течії в гору будуть інтензивнїйші, материя фотосфери дїлить ся і творить отвір. Через сей отвір дивимо ся на масу ґазову сонїчного внутра, котра має слабу спосібність сьвіченя в порівнаню з фотосферою, що є наповнена жаріючими частинками металїв. Той отвір, крізь котрий видобувають ся на зверх розпалені ґази, представляє ся нам яко сонїчна пляма.

Faye толкує на підставі своєї теориї також дїйсний рух плям. Плями є именно, як згадано, випливом течий, що ідуть з середини сонця прямовісно в гору. У свого жерела мають отже ті течії далеко меньшу лїнїйну скорість оборотову, чим частинки сонїчної поверхнї під тою самою гелїоґрафічною шириною. Прибуваючи з тою меньшою скоростию на поверхню сонця мусять плями в загалї викликувати припізненє ротациї.[1])

Тая теория була так проста, що Young виражає свій жаль, що показала ся неправдивою. Звалили єї именно анґлїйскі астрономи на підставі власне дальшого розвитку спектральної аналїзи. De la Rue, Stewart і Loewy а именно N. Lockyer звернули увагу на обставину, що в разї правдивости гипотези Faye'ого і Secchi'ого дуговина осередка плями мусїлаб ся складати з кількох ясних лїнїй. Тим часом, як се і сам Secchi мав невдовзї спосібність бачити, дуговина плям є абсорпцийна.[2]) Астрономи анґлїйскі, особливож Lockyer, відкрили при помочи спектроскопа, що понад плямами лїнії водня підпадають пересуненю і вносили звідси на істнованє там зступних течій „down rush". Те робило їх приклонниками теориї Kirchhoff'a з тою модифікациєю, що причиною витвореня ся хмари вважали они сю зимну течію down rush, що мала викликувати льокальне остудженє отже і льокальне придушенє сьвітла. Першій теориї Faye'a закинули єще й те, що він вважає внутро сонця горячійшим від фотосфери, а рівночасно темнїйшим. Тимчасом будучи горячійшим мусїло би се внутро бути прозрачне, отже пропускати сьвітляні лучі части фотосфери, що лежить напротив.

[1]) Comptes rendus tome 60. ст 143, 146, 470.

[2]) Sirius т. III. ст. 83.

Ті заміти анґлїйских астрономів дали знов теориї Kirchhoff'a на певний час перевагу, именно коли Spörer подав до неї знов певну модифікацию. Після него є плями наслїдком сонїчних вибухів, котрі бачимо яко протуберациї. Ті вибухи водня підносять части фотосфери в гору. Понад ними повстають темні хмари з продуктів вибуху, котрі збирають ся в один комплекс під впливом течий атмосфери, що прямують з сусїдних зимнїйших місць в горячійшу околицю вибухів. Ціла та хмара западає ся в глубину і виїшна єї часть своїм промінястим уложенем вказує істнованє і напрям згаданих збіжних течий.

Але у Франциї теория Kirchhoff'a не була популярна і коли упали перші теориї Faye'ого і Secchi'ого, повстало через певний час велике замішанє понять в тім напрямі. Sonrel[1]) пропаґував погляди Warren'a de la Rue і товаришів, твердячи, що плями повстають під впливом течий зступних в сонїчній атмосфері, а їх рух походить з того, що атмосферні вири уносять їх в ріжних напрямах. Vicaire[2]) ще в 1872 р. пропонував вернути до гіпотези Wilson'a і Herschel'a з тою тільки зміною, що сонїчне ядро належить вважати огнисто-плинним або сталим, але розпаленим. Оно будучи далеко темнїйше від фотосфери витворює осередок плями. Дїйсний рух плям є імовірно наслїдком течій на плинній поверхнї сонця. Навіть Janssen, дуже визначний дослїдник в области сонїчної фізики, говорячи про устрій сонця цїлком не розбирав квестиї сонїчних плям, згадуючи лиш се, що они здають ся бути заглубленями чи отворами в зверхній околиці сонця.[3]) В тім часї зискала приклонників навіть та дуже первісна теория, що сонце палить ся, а продукти спаленя в родї углїв або попелу витворюють плями.[4])

Значний пролом зробило в тім замішаню велике дїло Secchi'ого під титулом Le soleil, котре мимо що вийшло підчас нїмецко-французкої війни, відразу звернуло на себе увагу ученых. Є се перша книжка, що обняла цїлість нашого знаня про сонце, причинила ся она отже не мало до впорядкованя понятий і облегчила наукову дискусию. Дотепер треба було материяли до неї збирати з ріжних розвідок, часописий і самостійних творів. Для нас важний є твір Secchi'ого ще з тої причини, що находимо в нїм другу з ряду теорию того ученого. Она розпочинає ряд теорий сонїчних плям, котрі повстали при початку осьмого десятка XIX. столїтя.[1])

[1]) Comptes rendus tome 69. ст. 527 дд.
[2]) Comptes rendus tome 75 ст. 528.
[3]) Comptes rendus tome 68 ст. 312 дд.
[4]) Пор. Reis. Die Sonne. Mainz 1869.

Фотосфера складає ся після теориї Secchi'ого зі сконденсованих ґазів, котрі цїлком подібно заховують ся в розпаленій сонїчній атмосфері, як хмари зложені з пари водяної в земскій атмосфері. Їх внїшний вигляд є цїлком однаковий, так само спосіб повставаня і т. д. На тій підставі вияснює Secchi наперед ту великаньску змінність плям. Не треба в цїли виясненя єї принимати, що цїлі плями з так великою скоростию відбувають свої зміни і рухи. Вистарчить прийняти тільки льокальну ріжницю в температурі, котра викликує в данім місци кондензацию ґазів, а поза ним позваляє їм вернути до первісного стану. Анальоґічне явище становлять ті хмари, що мимо сильного вітру здають ся постійно перебувати коло гірских вершків. В тім случаю воздух насичений водяною парою перебуває реґіон нисшої температури — заміняє ся отже в обсягу сего реґіона в хмару, щоби поза ним знов прийняти давний стан сцїпленя. Так само заховують ся сонїчні плями і творенє ся їх полягає на тій самій основі. В дальшім тягу своїх розслїдів застановлює ся Secchi над ріжними можливими теориями сонїчних плям. Плями можуть бути або 1) жужлї, що плавають по плинній поверхнї сонця, або 2) маси диму чи хмари, що в певній висотї уносять ся понад фотосферою, або 3) є се остуджені маси ґазів, тяжші від свого окруженя, котрі з тої причини западають ся до певної глубини в огнисту масу фотосфери. Четверта евентуальність булаб: плями є місця, де в наслїдок дуже високої температури ґазів, що добувають ся туди з сонїчного внутра, маси фотосфери переходять в стан ґазовий. Темнота тих місць походить звідси, що з одної сторони нема ту сьвітячої фотосферної маси, а з другої сторони, понеже находять ся ту слабосьвітячі ґази, що абсорбують майже все сьвітло, що іде з внутра сонця.

Перша евентуальність є неможлива. Супротивляє ся їй велика змінність величини і виду плям — незгідна зі сталим станом зцїпленя, дальше рухливість притїнка, що була б неможлива, наколиб фотосфера була плинна. Другу евентуальність зробив підставою своєї теориї Kirchhoff. Secchi закидує єму, що не толкує заглублень, які становлять найвиднїйшу цїху плями. Иньші закиди Secchi'ого[2])

[1]) Результати дослїдів Secchi'ого і єго теория находять ся на ст. 107 дд. і 552 дд. нїмецкого виданя.
[2]) о. с. ст. 112.

полягають на недокладнім зрозуміню теорії Kirchhoff'a. Оставала би отже до вибору третя і четверта евентуальність. Secchi вибрав зразу четверту, бо здало ся єму неімовірним, щоби плями будучи центрами льокального остудженя могли ся так довго удержати мимо сусїдних, так горячих вибухів. Друга теория Secchi'ого звучить отже: Плями є місця горячійші чим околиці, що їх окружають. Горячо, що там панує, улетучує ясні хмари фотосфери цїлковито, так що они стають прозрачні, а абсорбуючи сьвітляні промінї, що ідуть з внутра сонця, справляють, що пляма здає ся темною. Притїнок повстає в наслїдок течий в околичній атмосфері сонця, котрі концентрично прямують до місця горячійшого, провадячи з собою пірвані хмари фотосфери. Звідси пенумбра має промінясту будову. Принесений материял зміняє ся в наслїдок горяча в ґаз так довго, доки того горяча стане. Потім заливає холоднїйша фотосфера зі всїх сторін пляму.

Тій другій своїй теорії, що була тільки модифікациєю першої, вірив Secchi так сильно, що перечене єї правдивости клав рівним перечню очевидним обсерваціям і всїм фізикальним анальоґіям. Але не припускав Secchi, хоч і як був досьвідчений, як капризною наукою є сонїчна Фізика. По пару лїтах высказав він именно цїлком противну, з ряду трету теорию. Але понеже на зміну поглядів Secchi'ого не малий мали вплив теорії, що повстали в тій кількалїтній промежутцї часу, то мусимо найперше їх представити. Є се теорії: Zöllner'a, Faye'a (друга) і Reye'a. Хронольоґічним ладом начнемо від теорії Zöllner'a.

Теория єго належить до жужлевих, котрих праотцем є Симеон Marius, сучасний Galilei'ому і Scheiner'ови. В новійших часах найшла та теория приклонника в Gautier'i, що то відкрив звязь періода сонїчних плям з земским маґнетизмом. Виражав він єї кілька разів, але без блисшого научного выясненя.[1]) Науково опрацював теорию жужлеву Фридрих Zöllner і вчинив се так основно, що єго теория сонїчних плям є зі всїх, які коли небудь були виставлені, найстараннїйше викінчена і опрацьована.[2]) Всї свої виводи опирає Zöllner

[1]) Gautier. De la constitution du Soleil. Archives de Géneve т. XVIII. 209. XIX. 265. XXIV. 21.

[2]) Теория Zöllner'a представлена на підставі єго розвідок в Vierteljahresschrift der astronomischen Gesellschaft т. IV. ст. 172 дд., Über die Periodicität und heliographische Verbreitung der Sonnenflecken. (Berichte über die Verhandlungen der königlichen sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig. Math. phys. Classe т. XXII. 1870 ст. 338—350.) Über die Temperatur und physische Beschaffenheit der

на припущеню, що сонце є розпаленою кулею але не ґазовою, а огнисто-плинною. Температура сонця виносить після єго дослїдів середно тільки 27700° C (Границї: 29.500° C і 26.000° C), щоби дїйсно промавляло за станом плинним сонїчного ґльоба. Навіть у внутрі, де температура після Zöllner'a має виносити 68.400° C, не могуть істнувати ґази задля великого тисненя. Понад тим розпаленим морем находить ся розпалена ґазова атмосфера, в котрій плавають розпалені металїчні хмари, що творять фотосферу. Значіне сеї атмосфери для льокальної температури на сонїчній поверхнї є під певним зглядом таке саме, як значіне атмосфери земскої для земскої температури. Де атмосфера сонця є припадково чиста і вільна від хмар, там зараз слїдує сильнїйше чим деинде промінюване. За сильнїйшим промінюванєм іде льокальне остуджене, а в наслїдок него повстають на плинній поверхнї сонця жужлеві острови, що ся нам представляють яко сонїчні плями. Витворене ся жужлїв є не тільки наслїдком, але і причиною остуджуваня ся околиці. Понад жужлевим островом повстають в сонїчній атмосфері забуреня, що переходять часом в нагальні бурі, котрі викликують понад плямою нові кондензациї, хмарної вже натури. Они представляють ся нашим очам яко притїнки.[1])

Повставши в сей спосіб, істнує пляма так довго, доки удержить ся се льокальне остуджене а враз з ним жужлевий остров. Поволи однак зачинає льокальне остуджене уступати, головно в наслїдок того, що жужлевий остров, що творить пляму, перешкаджає промінюваню верств, що під нею лежать і викликує в них великий зріст теплоти. Те підвисшене температури безпосередно під жужлевим островом вакликує єго розтоплене; потім знов слїдує рівновага в температурі околиці зайнятої недавно сонїчною плямою.

То є головний ескіз теорії Zöllner'a, котра, як вже на перший погляд бачимо, має много точок схожих з теориєю Kirchhoff'a. Але не высказав єї Zöllner так побіжно. Підприняв він глубокі математичні дослїди над стиканєм ся тїл цїпких і плинних взагалї і на тій підставі додав много доповнень до своєї теорії.

Що до внїшного вигляду і природи плям выступає Zöllner проти підставовому твердженю Kirchhoff'a, що плями є хмарами. Виходячи з дослїдів самогож Kirchhoff'a доказує именно Zöllner,

Sonne. I (Ibidem ст. 103—123), II (Ibidem т. XXV (1773) ст. 158—194), Über den Aggregatzustand der Sonnenflecken (Ibidem т. XXV. 1873. ст. 505—527). Пор. також die Natur der Sonnenflecken Gaea т. IX. ст. 650—662.

[1]) Über Periodicität etc. l. c. ст. 339.

1) що ті хмари не могли́б бути видимі, 2) що они не могли́б так довго остояти ся над поверхнею сонця при своїй нисшій температурі, а великій змінности і рухливости.[1]) За найлїпший доказ против хмаристої природи плям вважає Zöllner брак на сонци поясів хмар, які бачимо пр. на Юпітері.[2]) Для вияснення темної краски і довготревалости плям конечне є на думку Zöllner'a приняти, що осередки плям мають сталий стан сцїпнення. Загальний вид плям вважає також Zöllner лїйковатим, вияснюючи тим способом явище обсервоване Wilson'ом. Думає він именно, що в наслїдок обниження температури понад осередком плями і в наслїдок воздушної течії з гори на діл, котра ся з тої причини витворює, хмари пенумбри похиляють ся з вні до осередка і витворюють над ним лїйковатий отвір. В наслїдок того внїшний край притїнка лежить в ровени сьвітячої верстви хмар (фотосфери), сам же осередок значно нисше.

Дїйсний рух плям толкує Zöllner також на підставі своєї теориї, а навіть уважає єго одною з головнїйших підпор єї правдивости. З табелї гелїоґрафічних ширин, уставленої Carrington'ом, видить Zöllner, що ротацийні кути двох точок на поверхні сонця, котрих гелїоґрафічна ширина ріжнить ся о 1^0, виказують ріжницю $1{\cdot}6^0$. В наслїдок того мусїла би пляма 1^0 проміру, наколи́б складала ся з хмар, змінитись вже по кільканацяти (12—13) днях в пояс довгий на 20^0, а пляма 3^0 проміру змінила би ся по одноразовій ротациї в пояс довгий на 120^0. Понеже такі случаї не трафляють ся, то і не можна говорити, що плями мають природу хмар.[3]) Плями після теориї Zöllner'a могуть бути тільки жужлями, що пливають по плинній поверхні сонця. Рух власний плям викликують істнуючі в сонїчній атмосфері течії, що уносять жужлї независимо від ротациї в ріжні сторони. Ті течії можна взагалї подїлити на дві головні кляси: полуденникові і рівнобіжникові. Полуденникові дадуть ся знов подїлити на два роди. Одні з них ідуть від бігунів до рівника, а причиною їх є поверхневе тертє течій, що йдуть в сонїчній атмосфері від бігунів до рівника.[4]) Другі полуденникові струї йдуть від рівника до бігунів в наслїдок ріжниць температури. Атмосферні струї, що йдуть від бігунів до рівника, збочують в наслїдок ротациї сонця і стають східними вітрами, котрих скорість збільшає ся, чим більше они наближають ся до рівника і осягає maximum в єго околицях. Ті вітри викликують поверхневим тертєм припізнене в ротациї сонїчної поверхні, котре в теориї булоб найсильнїйше на рівнику.[1]) В теориї отже скорість обороту булаб на рівнику найменьша. Що річ має ся зовсїм противно, се справляє прямовісна воздушна течія при рівнику. В наслїдок висшої ту температури воздух уносить ся в гору. Та прямовісна струя рівноважить горізонтальну в цїлости так, що поверхневі верстви сонця зістають виключно під вплывом своїх спідних верств, що порушають ся рівномірно але відносно скорше. Длятого скорість оборотова є у рівника найбільша, а меньшає в мірі, як зближаємо ся до бігунів. В часї maximum сонїчних плям бігунові струї є слабші в наслїдок тертя о численні плями, що находять ся тодї на поверхні сонця. Длятого тодї сильнїйший є вплив долїшних верств, що відбувають скорший оборот, отже ротация взагалї скорша (як се вже нераз завважано).

Сонїчні плями відбувають рух власний не тільки під вплывом струй сонїчної поверхні, що їх уносять, але і під вплывом вітрів. Вітри віючи в ту саму сторону, в котру іде течія, посувають жужлеві острови ще скорше, слиж віють в сторону противну, задержують в руху плями, а навіть самі течії, при чім плями дїлають як острови на ріках.[2]) Найсильнїйшим може сей вплив стати підчас часового maximum т. є. під $\pm 17{\cdot}5^0$ гелїоґрафічної ширини. Ті льокальні забуреня викликані вітрами є причиною незгідности обрахованих позицій плям з обсервованими. Досліди Spörer'a доказують, що ті ріжниці власне найсильнїйше виступають підчас часового maximum і то в maximum місцевім.[3]) Дїйсний рух плям залежить після Zöllner'a також від якости і степеня зануреня жужлевого острова, що творить осередок плями. Ті жужлї в наслїдок зглядно значної грубости і скоршого руху у долїшних чим у горішних верств принимають (именно що грубші) скісне положене, так що передня часть є правильно піднесена, а долїшна глубше занурена. Під вплывом того великого тисненя стремить пляма, щоби ся перевернути. Часом бачимо без сумнїву таке явище, пляма зануряє

[1]) Über den Aggregatzustand der Sonnenflecke l. c. ст. 505 дд.

[2]) Über das Rotationsgesetz der Sonne etc l. c. ст. 93.

[3]) Über das Rotationsgesetz der Sonne l. c. ст. 93. Сей закид Zöllner'a Kirchhoff'ови полягає на похибцї. Zöllner проминяв ту степенї за мінути. Ріжниця межи кутами ротацийними місць о 1^0 гелїоґрафічної ширини від себе віддалених виносить не $1{\cdot}6^0$, а $1{\cdot}6'$. Отже пляма 3^0 проміру змінила би ся в 120^0 довгий пояс аж по 60 ротациях. Пор. Reye Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen ст. 177.

[4]) Rotationsgesetz l. c. ст. 58.

[1]) Über das Rotationsgesetz etc. l. c. ст. 76.

[2]) l. c. ст. 78 дд.

[3]) l. c. ст. 81 дд.

ся та випливає в місци, де би ся находила, сли би ся була удержала на поверхні сонця. Часто пляма вказує ся дещо дальше, поза місцем призначеним законом, по причині більшої скорости ротациї внутрішних верств сонця. Те тиснене від переду викликує також дуже часто сеґментацию плями. Оно в полученю з сильними вітрами, що витворюють ся на побережах жужлевих островів, викликує вкінци часто розірване плями на кілька частий, котрі ідуть в ріжні сторони. Кожда з тих частий, сли не підпаде розтопленю, витворює над собою осібний притінок і стає нормальною сонїчною плямою. Розірвані кусні ідуть в ріжні сторони під впливом згаданих льокальних вітрів з ріжними скоростями, бо є нерівно занурені в плинній масї сонїчної поверхні.[1]) Степень зануреня є важний також для дійсного руху цїлих плям. Він є змінний іменно підчас повставаня і заниканя плям, бо тоді жужлевий остров робить ся грубший або тоньший. А власне тоді, як доказали обсервациї, дійсний рух плям є дуже змінний. Грубість жужлевого острова є з початку мала, а іменно в відносинї до розтяглости. Потім она росте в наслїдок поступуючого в перед остудженя а також зглядно в наслїдок обтоплюваня ся задної части жужлевого острова, яка в наслїдок згаданого скісного положеня лежить в глубших і горячійших верствах. Коли ся зближає пора заниканя плями, жужлевий остров стає знов тоньшим в наслїдок приросту температури під ним.

Розгляньмо тепер, як толкує Zöllner на підставі своєї теориї розміщене плям по поверхні сонця.

Наперед що до льокального розміщеня плям виводить Zöllner теоретично, що коло великої і виобразованої сонїчної плями не повинні повставати нові, бо околичні відносини сему не сприяють. Натомість в періоді повставаня плями або ґрупи може в тій самій околиці повстати більше плям. Теория стоїть ту як видимо в цїлковитій згоді з дійсностию. Загальне розміщене сонїчних плям є після теориї Zöllner'a условлене розміщенем атмосфери чистої і вільної від хмар, котра облегчає промінюване. Zöllner доказує на підставі своєї теориї, що такі атмосферичні відносини панують меньше більше межи 10° а 35° гелїоґрафічної ширини. Сонце має після Zöllner'a огнисто-плинну поверхню. В наслїдок постійного промінюваня остуджує ся поверхня. Глубше лежачі, отже горячійші і специфічно легчі верстви сонїчної материї старають ся взнести ся в гору. Сли би сонїчна куля була в супочинку, відбувало би ся

[1]) Ibidem ст. 88 дд.

таке кружене без перешкоди на кождім ей місци. Але сонце обертає ся коло своєї оси і та его ротация викликує зміни в напрузї сили тяжести, котра, як знаємо, є завсїгди функциєю ширини. Під сонїчним рівником взносять ся отже постійно внутрішні горячі маси сонїчної материї в гору і відпливають ідь бігунам. Остудивши ся по дорозї в наслїдок промінюваня опадають і вертають до рівника. По дорозї через зіткнене ся зі спідними верствами знов ся огрівають і тим способом сей процес круженя постійно ся повторює. В висших ширинах сильнїйша ґравітация не позваляє на так сильну циркуляцию. Длятого рівникові околиці сонця, як се зрештою вже потвердили термоскопічні дослїди, є теплїйші, а полярні околиці зимнїйші. Наслїдки є такі самі як на земли. Повстають отже і на сонци по обох сторонах рівника в певнім від него віддаленю дві полоси сонїчних пассатів. В тих полосах, подібно як і земских полосах пассатів воздух визначує ся чистотою і ясностию. Длятого в стрефах сонїчних пассатів найчастїйше повстають плями.

Періодичність сонїчних плям вияснює Zöllner слїдуючим способом.

Вважає він пересічне число і поверхню сонїчних плям, що в певнім періоді часу находять ся на поверхні сонця, за число стале. В часі того періода може те число (сли не будемо узглядняти позасонїчних впливів) бути зависиме 1) від евентуальної зміни середної температури сонця, 2) від взаїмної зависимости плям від себе в відносинах льокальних тих околиць сонця, де плями виступають.[1]) Можемо ту приняти, що середна температура сонця не зміняє ся ані in plus ані in minus а то тим більше, що маємо на думцї час 11 лїт, отже зглядно дуже короткий. Длятого можемо в рахунок брати лиш взаїмні відносини плям. Они є, як з попереднього знаємо, дуже змінні, щоби отже середна скількість і поверхня плям могли бути сталою величиною, мусить їх дійсна скількість колибати ся межи двома екстремами: maximum і minimum. Сли в тім колибаню заходить певна правильність, можемо сьміло число і величину сонїчних плям представити яко періодичну функцию часу. Після Zöllner'a є перехід від maximum до minimum сонїчних плям і на відворот нїчим иньшим, як тільки великим вирівнуваném тисненя і температури в сонїчній атмосфері. В часі maximum панують на цїлій майже поверхні сонця відносини, що сприяють витворенню ся плям т. є. ясна і прозрачна атмосфера. Підчас minimum

[1]) Über Periodicität etc. l. c. 342.

річ має ся цїлком противно. Час того вирівнуваня є в обсягу певних границь ріжний; се зависить від спроможности проводженя, від рухливости і від маси тїл, що творять плями, т. є. самих жужлїв і лежачої над ними сонїчної атмосфери. Середні вартости на означене тих трох відносин будуть що найменьше для довших часів сталі, а з ними і період сонїчних плям. Розуміє ся, що по довших часах, коли ся тенлота сонця зменьшить, змінить ся і час треваня періода. Довжина його буде щораз малїти, maxima будуть щораз скорше по собі наступали, аж вкінци цїла поверхня сонця покриє ся оболокою жужелиць, звіщаючи тим конець орґанїчному житю нашої планетарної системи.

Третою важнїйшою теориею, що повстала при початку осьмого десятка лїт XIX. столїтя, є друга теория Faye'a. Як і иньші сучасні теориї цїлком новою она не є. Вже John Herschel висказував думку, що плями є воздушні вири в атмосфері сонця. В виду закидів, іменно зі сторони анґлїйских астрономів з Kew піднесених проти першої єго теориї, попав Faye на другу і розвів думку J. Herschel'a на підставі новійших наукових здобутків на тім поли. Теория єго не від разу повстала. Много замїток і закидів з ріжних сторін підношених зложило ся на сей кінцевий вид, що їй був наданий. Перший ескіз сеї другої теориї начертав Faye при кінци року 1872.[1])

Сонїчні плями є після нової теориї Faye'a цикльонами, що врізують ся з гори в глубину атмосфери сонця. Они повстають в слїдуючий спосіб: Фотосфера відбуває свій ротацийний рух в ріжних гелїоґрафічних ширинах з ріжною скоростию. Наслїдком того є численні вири в атмосфері сонця, котрі прямують до вирівнаня ріжних скоростий у ріжних полос фотосфери. Поводять ся они подібно як водні вири або вертнї воздушні нашої атмосфери і так само як наші цикльони ідуть за горішними течіями воздуха, так і сонїчні цикльони слїдують по течіях фотосфери. Рух в них є після Faye'a зступний, т. є. з гори в долину, длятого потягають они за собою в глубину сонїчного ґльоба околичні части горішних, отже зимнїйших верств сонїчної атмосфери, що головно складають ся з водня. В сей спосіб повстає в центрі вира придушене сьвітла і теплоти на так довго, як довго треває вировий рух. Вкінци водень потягнений в глубину розгріває ся на ново, іде в гору і вибухаючи творить

[1]) Comptes rendus т. 75 ст. 1664 дд. Ibidem т. 76 ст. 301 дд. Оригінальний уступ Faye'a у Newcomb-Engelmanna o. c. ст. 310—312 представляє, як виглядала єго теория в 1877 році.

протуберанциї. Пенумбра повстає з остужених, потягнених в дїл частий фотосфери, иньші части виром відкинені на бік творять вінець походень, що окружає пляму.

В цїли дальшого уґрунтованя своєї теориї констатує Faye, що ріжниця в скорости ротациї є досить значна, щоби могла викликати вировий рух, бо виносить 24 m в 1 секундї на 1° гелїоґрафічної ширини. Таких вирів є на поверхні сонця незмірно много, дуже ріжної величини, бо не тільки плями, але і пори є такими вирами. Так само мають і земскі цикльони дуже ріжну величину. Сонїчні цикльони мають подібно як земскі напрям до дїленя ся на два або більше центрів обороту. В той спосіб з одного вертня повстає два, або більше, котрі ся потім взаїмно відпихають. Дїйсні обсервациї слїдів вирового руху, пр. на уложеню ниточок притїнка, після Faye'a длятого є так рідкі і трудні, бо хмари притїнка закривають звичайно перед нами те, що ся дїє ві внутрі плями.

Періодичність сонїчних плям толкує Faye дуже замотано і неясно. Згадаємо тільки те, що він еї робить зависимою від ваганя в формі внутрішних верств, на котрі сконденсована материя фотосфери спадає в виді дощу. Такий рясний і тяжкий дощ мусить поволи змінити час ротациї тих верств.

Ахиллевою пятою теориї Faye'a була все та обставина, що з неї без сумнїву виходило, що сонїчні цикльони вертять ся па північній півкулї сонця в ту саму сторону, що і вказівки годинника, а на полудневій півкулї в сторону прямо противну. Через те саме мусїла б упасти анальоґія з земскими цикльонами, бо ті ведуть ся прямо противно. Длятого Faye перечить прямо в очи дотеперішним результатам метеорольоґічних дослїдів над цикльонами і уперто твердить, що земскі цикльони також на північній півкули обертають ся як вказівки годинника. Сучасно приписав Faye земским цикльонам цїлком неправдиву власність, що їх рух є зступний, бо того треба єму було, щоби перевести анальоґію з сонїчними цикльонами, себ-то плямами, в котрих без сумнїву виказали зступний рух спектроскопічні обсервациї. Також та теза стоїть в суперечности з законами метеорольоґії і надає теориї Faye'a характер великої довільности. Одинока ріжниця, яку найшов Faye межи сонїчними а земскими цикльонами, полягає на тім, що коли земскі цикльони мають рух проґрессивний в ширинї і довжинї ґеоґрафічній, то сонїчні цикльони відбувають тільки елїпсоідальні осциляциї в 80—160 днях, амплїтуди 2°—4°.[1])

[1]) Пор. рисунки Faye'a Comptes rendus т. 76 ст. 389.

Вже від самого повстаня не бракувало теориї Faye'а численних і завзятих противників. Зараз з початком 1873 р. виступив против нього Secchi і підніс найважнїйший та дуже трафний закид, що именно ротацийний рух є у плям лиш дуже рідко видимий. Пересїчно лиш 5—6 плям в роцї виконують ротацийні рухи, або мають притїнок спіральної будови.[1]) Під впливом власне того закиду додав Faye пізнїйше, що оборот сей закриває нам пенумбра зложена з нагромаджених хмар. Але Secchi знов виказав, що є се припущенє дуже довільне, котрого жадним способом не мож доказати. Острійше взяв ся до Faye'а французский фізик Vicaire.[2]) Закинув він теориї Faye'а, що она не толкує неправильного і змінного виду плям, недостаточно толкує темну їх краску. Цїлком не толкує теория Faye'а явищ ґрануляциї, розміщеня плям, їх руху власного і т. д. Деякі иньші закиди Vicaire'а полягають що правда тільки на непорозуміню, але ті, що є узасаднені, не одержали від Faye'а достаточної відправи.

Так само дуже слабі є відповіди Faye'а на закиди Tacchini'ого. Звернув він їх проти Faye'а з тої самої точки погляду, що Secchi, именно завважав підчас своїх довголїтних обсерваций, що спіральні рухи є у плям дуже рідкі а ротация їх коло оси відбуваєсь дуже часто в противнім напрямі, як сего теория Faye'а вимагає.[3]) Faye жадного арґумента проти тим закидам не міг навести. При поновлюваню своєї теориї ограничив ся він лиш на виясненю ґрануляциї і періодичности. Ґрануляцию вияснює він приймаючи, що цїла поверхня сонця є покрита такими цикльональними вирами мінїмального проміру 1″. Становлять они тз. пори і своїм густим виступуванєм викликують явище ґрануляциї. В полосах сонїчної поверхнї, що тому сприяють, розширюють ся ті пори в плями — т. є. більші цикльони, котрих вісь однак завсїди ся находить в центрі первісної пори. Такий цикльон витворюючий пляму треває через певний час, потім знов зменьшає свій обвід та вертає до скромних розмірів пори.[4]) В той спосіб толкує Faye ґрануляцию, спосіб витолкованя періодичности цїлком анальоґічний до способу Zöllner'a.[5])

Найважнїйші однак закиди піднїс против теориї Faye'а американьский учений Young. Правда що співчасно він вважає теорию

[1]) Comptes rendus tome 76. 1873. ст. 254.
[2]) Ibidem ст. 703 дд.
[3]) Comptes rendus tome 77 ст. 606.
[4]) Comptes rendus tome 77 ст. 626.
[5]) Пор. Comptes rendus tome C. ст. 593 дд. Sirius т. XVIII ст. 121.

Faye'а найімовірнїйшою.[1]) Young'а разить передовсїм брак ротацийного руху у плям. Потім звертає він увагу на обставину, що навіть тоді, коли можна у плям сконстатувати ротацию, она не відбуває ся на тій самій півкулї в одну сторону, але противно часто ся лучає, що плями належачі до тої самої ґрупи, ба навіть поодинокі части складові тої самої плями відбувають оборот в прямо противні сторони. Дальше є ріжниця ротацийних скоростий рішучо за мала, щоби могла викликати ротацийний рух. Виносить она для двох точок сонїчної поверхнї, що лежать під 20° гелїоґрафічної ширини і є від себе віддалені о сонїчну 1′ = 0·90 ґеоґрафічних земских миль на день. А преціньсонїчна мінута велика на 26·5 ґеоґрафічних миль.

Против теориї Faye'а піднесено ще з иньшої сторони закид — він є в звязи річевій з повстанєм нової цикльональної теориї плям. Именно в р. 1873 Tarry, взагалї признаючи теориї Faye'а много імовірности, зробив єму в подробицях сей закид, що земскі цикльони є преціньполучені з опаданєм барометра і рухом атмосфери з долу в гору а не з гори на діл.[2]) Faye відповів на те з великою певностию себе, що цикльони се явища цїлком ріжні від сонїчних цикльонів, а зрештою і межи земскими лиш певні роди мають рух воздуха в гору.[3])

Але невдовзі потім, переглядаючи найновійшу лїтературу попав Faye на книжку нїмецкого ученого Теодора Reye п. т. die Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen in der Erdatmosphäre mit Berücksichtigung der Stürme in der Sonnen-Atmosphäre, що була написана ще в початках 1872 р. Reye не знаючи анї про працї Faye'а анї про закид Tarry'ого, поставив самостійну теорию, що виясняє сонїчні плями подібно як теория Faye'а з модифікациєю, пропонованою Tarry'м з пильним узглядненєм теориї Kirchhoff'а та дослїдів Spörer'a.

Reye ставить на ст. 178 своєї книжки[4]) слїдуючу тезу: Плями сонїчні се хмаристі продукти кондензациї в глубших районах сонїчної атмосфери, котрі подібно як маси хмар наших земских цикльонів відновлюють ся від долу. А творять ся они в спосіб слїдуючий. В місцях, де температура поверхнї сонця осягає свої льо-

[1]) Comptes rendus т. 95 ст. 1310 пор. Young die Sonne ст. 170.
[2]) Comptes rendus т. 77 ст. 44 дд.
[3]) Comptes rendus т. 77 ст. 1122.
[4]) Пор. також Comptes rendus т. 77 ст. 5.

кальні maxima, взносять ся ґази і металїчні пари, що становлять сонїчну атмосферу, в гору, де ся остуджують і згущають творячи якби темну хмару, що абсорбує в значній мірі сьвітло і тепло, що приходить з долу від властивої поверхні сонця. В наслїдок того стає ся там хмара осередком остудженя і темноти. Коло неї з подвійною скоростию вистрілюють в гору прямовісні течії. Они уносять з собою решткы сконденсованих хмаринок і творять з них притїнок. Ротация сонця дїлаючи на такі хмари так само, як ротация землї дїлає на земскі хмари, викликує оборотовий рух, замінюючи хмару в цикльон. По хмарі того не видко, як не видко і по земских хмарах, що товаришать цикльонови. Они як знаємо все є одностайні і нїколи не мають спірального уложеня. — Сонїчні цикльони викликують подібно як і земскі рух атмосфери в гору. Они повстають в двох стрефах по обох сторонах рівника з тої причини, що розложене температури є на сонци таке саме, як на земли, а крім того понеже атмосфера є під сонїчним рівником значно висша як у бігунів. Про властивий рух сонїчних цикльонів не много може Reye сказати, бо і у земских цикльонів не пізнано його і до тепер. Сеґментанция відбуває ся і у одних і у других однаково. Тільки в способі заниканя є ріжниця. Плями заникають далеко скорше чим земскі цикльони.

Reye цїлком не має претензиї, щоби єго теория була ві всїх точках досконала, але мимо своєї скромности приписує головній своїй тезї: плями, се сонїчні цикльони, значіне більше чим звичайній гіпотезї.[1])

Переходячи всї важнїйші теориї сонїчних плям, що повстали в початках осьмого десятка лїт XIX. віка, належить вкінци звернути увагу на третю теорию Secchi'ого, котра появила ся як би на закінченє сьвітлого ряду тих теорий. Перші єї почини подав Secchi вже в 1873 роцї[2]) і держав ся єї до кінця житя. Був се отже мов би результат кількадесятилїтної працї — длятого належить сей послїдний вислів поглядів Secchi'ого обширно представити. Та теория сонїчних плям є властиво лиш частию загальної теориї сонця поставленої тодї Secchi'м, але єї цїлої представити ту не можемо і мусимо ся ограничити лиш на тих єї частях, що відносять ся до істоти самих сонїчних плям. Сонце після Secchi'ого не находить ся нїколи в станї цїлковитого супочинку. З ріжних причин повстають на єго

[1]) Reye. Wirbelstürme, Tornados und Wettersäulen ст. 185.

[2]) Comptes rendus т. LXXVI. ст. 250 дд., 519 дд. звязке а докладне представленє своєї теориї подав Secchi в Newcomb. Engelmann o. c. ст. 302–310.

поверхні заєдно вибухи. З них найлїпше видимі є для нас протуберанциї, що складають ся з розпаленого водня. Але при тих вибухах з розпаленим воднем є часто змішані металїчні пари. Они мають більшу густоту і питимий тягар, длятого не могуть при вибуху досягнути тої висоти, що маси далеко лекшого водня. Ті металїчні пари складають ся головно з пар соду, маґну, желїза, вапня, котрі як знаємо викликують в сонїчній дуговині явище лїнїй Fraunhofer'a. Коли отже така маса металїчних пар найде ся межи фотосферою а оком обсерватора, стає ся абсорпция сьвітла дуже визначною і обсерватор має вражінє темної плями на фотосфері. Абсорпційні лїнії є в тій околиці ширші і меньше виразні, а коли маса є достаточно густа і високо в гору винесена, видимо нераз навіть відвернене абсорпційних лїнїй. Відвертають ся найчастїйше лїнії водня, котрий доходить до найбільших висот, а також лїнії соду і маґну, бо пари тих металїв є також досить легкі. З того випливає: Сонїчні плями повстають з металїчних, абсорбуючих пар, що добувшись з внутра сонця і умістивши ся межи фотосферою а оком обсерватора, задержують для него велику часть сьвітла фотосфери. Ті пари є тяжші, чим окружаючі їх верстви сонїчної атмосфери. Коли отже зможе ся сила вибуху, котра їх до такої висоти винесла, ті пари западають в глубину атмосфери і творять заглубленє, виповнене масою, що темнїйша і більше абсорбує чим єї околиця. Длятого виглядають плями як заглубленя. Коли вибух, що дає початок плямі, є наглий і коротко треває, хмара, що повстала з металїчних ґазів, під впливом горяча сусїдних околиць фотосфери невдовзї розгріває ся і пляма никне. Часто однак вибух треває пару місяців, тодї і пляма удержує ся на поверхні сонця протягом кількох ротацийних періодів. Часом вибух, що як здавалось, вже кінчивсь, нараз відзискує свою силу і пляма, що туй-туй мала зникнути, знов росте і розвиває ся на ново. Змінність плям зависить від змінности вибухів, а ті, як знаємо з анальоґії вулканїчних вибухів на земли, є дуже капризні.[1])

Пляма складає ся з осередка і притїнка. Притїнок повстає з легких мрак і течій фотосферної материї, котрі старають ся заляти внутрішну темну масу і часом яко ясні мости прориваються єї на цїлій розтяглости. У кождої плями розріжняємо три періоди. В першім періоді: повставаня, темна хмара силою вибуху підно-

[1]) Щоби заховати звязь і хід думок Secchi'ого повторюємо ту много річий, які ми вже висше обговорювали.

сить ся в гору і прибирає в наслїдок сильного заворушеня дуже неправильний, нераз дивовижний вид. Часом вибух приймає вид і властивости вихру, котрий виносить темну хмару дуже високо, та творить неправильну набренїлість довкола осередка новоповсталої сонїчної плями. Она має тодї дуже неправильний притїнок, або і (що частїйше) цїлком його не має. Сила вибуху і викликані нею рухи відзначують ся незмірямою скоростию і нагальностию. На просторі кількох квадратових степенів фотосфера є тодї в постійнім заворушеню. Але невдовзї начинає сила вибуху малїти і наступає другий період розвитку плями: період супокою. В тім періодї винесена в гору темна маса опадає в дїл і старає ся прийняти меньше або більше округлий вид. Понеже она є тяжша від фотосфери, отже западає в єї глубину та творить лїйковате заглубленє. До сеї депресиї пливе зі всїх сторін фотосфера в формі концентричних струй, щоби єї заляти, але коли вибух треває дальше, то пляма удержує ся і прибирає круглий вид. Коли вибух переведе ся, начинає ся третий період: заниканя, струї фотосфери заливають темне внутро плями, горячо сусїдних околиць довершає дїла і пляма зникає. Істнованє тих трех фаз потверджають обсерваціï. Коли пляма підчас першого періоду свого істнованя наближить ся до сонїчного края, а має при тім значний промір, то місце єї перебуваня зраджують вибухи металїчних пар, а іменно соду, желїза і маґну. Пляма в періодї супокою має звичайно круглий вид і є окружена красними походнями а також ясними огняними язиками водня і металїчних пар. Але ті язики є вже низькі та незначні. В періодї заниканя не показує пляма жадних металїчних вибухів, часом тільки незначні вибухи водня; фотосфера, що їх окружає, є знов в ненастаннім руху.

Сонїчні плями є отже тільки другорядним явищем. Їх повстанє і істнованє є зависиме 1) від сонїчних вибухів, котрі попереджають і витворюють пляму. 2) від спосібности абсорбованя сьвітла у хмар, котрі повстають в наслїдок тих сонїчних вибухів. Вибухи самого водня нїколи пр. не викликують сонїчних плям, лиш тільки походнї. Але плями, хотяй є тільки другорядним явищем, преціньо дають нам найлїпше поняте про насильні рухи у внутрі сонця. Число плям відповідає числу вибухів, а оба ті явища разом взяті є внїшними признаками дїяльности сонця. Плями як знаємо виступають по обох сторонах сонїчного рівника тільки до 30° гелїоґрафічної ширини і не виходить майже нїколи поза ту праницю. (Завважати належить, що трицятий рівнобіжник дїлить кожду гемісферу на два, об'ємом рівні відтинки.) Полоси, в котрих найбільше плям ся знаходить, не мають сталого положеня, місцеві maxima

плям відбувають рух від рівника до бігунів. Дійшовши до певної ширини, звичайно до 30°, плями зникають, наступає звичайно тодї часове minimum, а потім знов вказують ся плями, але вже в околицях рівника, та знов начинають свою мандрівку до бігунів. Слиж розважимо, що фотосфера має також власний рух в довжинї, котрий є найбільший під рівником, можемо з того заключити, що цїла фотосфера підлягає рухови вировому, що іде від рівника до бігунів в напрямі скіснім до полуденників. Теориа тих рухів фотосфери не є дотепер звісна; Secchi думає, що они є в звязи зі способом повстаня і виобразуваня сонця. Дїяльність сонця підлягає значним флюктуаціям в періодї $11^1/_3$ лїт. Она росте протягом 4 лїт, а малїє протягом 7 лїт, отже далеко повільнїйше. Она є получена зі змінами в земскім маґнетизмі в спосіб дотепер незнаний. Можна припускати, що істнує безпосередний електромаґнетний вплив сонця на нашу землю, або що він є посередний: тепло викликане на земли впливом сонця дїлає на єї маґнетизм. Можна з великою імовірностию прийняти, що етер, котрий наповняє простори нашої планетарної системи, не може бути зависимий від дїяльности сонця, бож оно є центральним тїлом тої системи. Були між ученими такі, що хотїли приписувати зміни в чинности сонця впливам планет, але ті послїдні є занадто малі, щоби могли мати подібні наслїдки. Наука доперва тодї потрафить вияснити причини періодичности на сонци, коли відкриє звязь тепла з електричностию, маґнетизмом та ґравітациєю.

Нову свою теорию розвинув Secchi систематично в осібнім письмі пересланім S. Newcomb'у, котрий пишучи в 1877 р. свій підручник астрономії, просив найславнїйших тодї гелїольоґів, щоби коротко сформулували свої погляди на будову сонця, для его книжки. Крім Secchi'ого прислали Young, Faye, Langley, а тогдашні погляди Newcomb'a зібрав також коротко видавець другого нїмецкого видання его книжки: H. C. Vogel. Погляди Faye'a не змінились від часу поставленя его другої теориї аж до р. 1877 цїлковито, отже повторювати їх не будемо, але погляди иньших згаданих учених коротко перейдемо, понеже конець сїмдесятих лїт XIX віка є для гелїоґрафії дуже важною епохою, котру належить як найвиразнїйше схарактеризувати.

Young вважає річию безсумнївною, що плями є заглубленями в поверхні фотосфери. Їх темна краска повстає в наслїдок абсорпційного дїланя ґазів і пар, котрі наповняють їх внутро. Дуже часто, хотяй не завсїгди витрискує водень і металїчні пари довкола пенумбри. Понад осередком плями хромосфера є вгнута, імовірно істнує

також зступна течія в середині плями. Що ся тичить причини повставаня плям і їх вигляду, жадна дотеперішна теория не вдоволяє Young'a. Теория Faye'a видає ся єму найбільше до правди подібною, але приняти єї не може зі згляду на 1) брак систематичної ротациї у плям, 2) їх дуже ріжні види. Однак теория Faye'a має в собі якусь часть правди і може бути отвітно змодифікована, щоби вияснити згадані дві трудности. Young не пропонує на разї жадної модифікациї теориї Faye'a в тім напрямі, але всї планетарні впливи вважає a limine неімовірними. Так само не може Young собі вияснити, в який спосіб впливають на себе заворушеня на сонїчній поверхнї та земский маґнетизм.[1])

Langley думає, що тепер (т. є. в р. 1877) можна вже з евіденцією видати суд про дотеперішні погляди на істоту сонїчних плям, чи се є жужелиці на плинній поверхнї (Zöllner), чи хмари (Kirchhoff). Але сей суд випадає у Langley'a дуже блїдо, ба навіть трудно його вирозуміти. Langley вважає фотосферу цїлковито ґазовою і зложеною з пар, котрі суть рідші і лекші чим найтоньші хмариночки (cirrus) нашої атмосфери. Обсервация плям вводить близьку звязь між телєскопічними обсервациями фотосфери, а спектроскопічними хромосфери. Довели они, як думає Langley, до безсумнївного результату, що на цїлій поверхнї сонця дїлає одна велика система внутрішньої циркуляциї. Течії ведуть зі собою тепло витворене через кондензацию ві внутрі сонця на єго поверхню і забирають зі собою остуджений та сильно абсорбуючий материял. Та циркуляция сягає зглядно дуже глубоко і є в тривкій звязи з майже горизонтальними течіями, котрі безлїч разів обсервовано в горішних верствах фотосфери в сусїдстві плям. З обсервациї плям набрати мож на думку Langley'a прямо переконаня, що ту дїлає щось в родї цикльонів. А темні є плями тому, що в їх глубинї (єї вважає Langley дуже значною, ба незвичайною) находить ся „затемнююча атмосфера", імовірно пірвана в діл згаданою прямовою циркуляциєю. Она то творить се шаре тло на котрім виглядають завішені хмари і хмарки фотосфери. Ся шара материя виповнює внутро плями і через него то дивимо ся в єї глубину, котра длятого видає ся так темною. В иньшім місци говорить Langley: Дотепер не поставлено ще жадної теориї устрою сонця, котра би вільна була від закидів. Але хотяй ще не найдено ключа до вияснення всїх сонїчних явищ, то преціньтеория Faye'a найбільше дає пояснень

[1]) Newcomb. Engelmann o. c. ст. 314.

Видимо отже виразно тільки те, що Langley є рішучим противником теориї жужлїв, а перехилюєть ся до теориї хмар і то на спосіб Faye'a. Не можемо отже говорити про яку небудь самостійну теорию Langley'a, бо він анї не пробував вияснити дїйсного руху або періодичности сонїчних плям.[1]) Навіть те, що Langley сказав позитивно про сонїчні плями, є дуже невиразне, навіть несьміле і нерішуче. Таку саму побіжність і брак рішучости бачилисьмо уже у Young'a; Newcomb же перевисшає єще своїх американьских товаришів під тим зглядом, бо анї словом не зраджує своїх поглядів на істоту сонїчних плям та думає, що гелїольоґія чекає поки-що на свого Newton'a.[2])

Представивши тим способом погляди великих гелїольоґів подивимо ся і на погляди кількох „малих", що ту належать хиба зі зглядів хронольоґічних, бо на пробіг дискусиї над істотою сонїчних плям зовсїм они не вплинули.

До теориї Herschel'a навязує Lüdinghausen-Wolff. Думає він, що сонїчні плями се отвори в фотосфері. Крізь них ми дивимо ся на саме ядро сонця. Оно не є в звичайнім значіню слова темне, але так розпалене, що наше око не може захопити так коротких сьвітильних фильок.[3]) Ту належить також висше згадана метеоритова гіпотеза B. Peirce'a. Твердить він, що плями повстають в наслїдок спаданя на сонце метеоритів, котрих перстень протинає єго дорогу і через згрубінє в однім місци викликує що 11 лїт maximum плям.[4]) Тая гіпотеза хиба в такім разї мала б певну претензию до научного характера, слибисьмо прийняли, що не через безпосередне продертє фотосфери викликують метеорити повставанє сонїчних плям, але посередно, в наслїдок ріжниць температури, викликаних їх упаданєм. Для докладности додамо ще, що теория Reis'a найшла приклонника ві Франциї в Vicaire'ім, котрий також твердив, що сонце палить ся яко пальне тїло і продукти того спаленя творять плями; а також згадаємо про цїлком оригінальну теорию електричну Planté'ого.[5]) Видячи схожість межи внїшним виглядом сонїчних плям а наслїдків електричного тока з батериї 400 елєментів на поверхнї бібули до фільтрованя, що є напущена солоною водою, ставить Planté ту електричну теорию. Думає він,

[1]) Newcomb. Engelmann o. c. ст. 314 дд.
[2]) Ibidem ст. 302.
[3]) Humboldt т. I ст. 347 дд.
[4]) Young o. c. ст. 148.
[5]) Comptes rendus т. 76 ст. 1541 дд. т. 77 ст. 40 дд.

що плями повстають наслїдком електричних вибухів зі середини сонїчного ядра, котре є наладоване додатною електричностию. (Так заключає Planté на підставі власних дослїдів з розпаленими кулями). Сонце є для него тїлом ґазовим, що покрите плинною оболокою. Про ту гіпотезу не дасть ся більше сказати як те, що є ориґінальна. Треба іменно завважати, що переношене досьвідів переведених в лябораторії в всесьвітні простори є річ що найменьше за сьміла.

Рік 1877, а в кождім разї найпізнїйше конець сїмдесятих лїт XIX. віка можна вважати епохою рівно важною, як поява теориї старшого Herschel'a при початку тогож віка. Межи тими двома епохами лежить другий період розвитку гелїольоґії взагалї, а спеціяльно нашої відомости про сонїчні плями. В тім періодї, дуже короткім, сли его порівняємо з попередним, зробила наука прямо великаньскі поступи. Представилисьмо їх вже деінде, ту звернемо лиш уваги на перед на великаньске число материялу, зискане в численних обсерваторіях при помочи усовершених і уріжнороднених інструментів і помічних средств. З них найважнїйшим є без сумнїву нововинайдений спектроскоп. Розслїджено подрібно структуру фотосфери, плям, походень, відкрито протуберанциї та корону, пізнано хемічний склад сонця і в головних чертах його будову при помочи спектральної аналїзи. Наслїдки тих обсерваций та відкрить були для пізнаня явища сонїчних плям дуже важні. Те пізнане придбало собі іменно много всесторонности і докладности. Дїйсний рух сонїчних плям і їх періодичність стають від тепер сталими добутками науки і на тих підставах повстає кілька науковх теорий сонїчних плям. Збирають они все знане свого часу в тім напрямі і старають ся пояснити тайну сих явищ. Як в початках XVII віка, так і тепер двома головними дорогами пішли в своїх теоріях учені. Одні вибрали теорию жужлеву — Zöllner і его приклонники, другі теорию хмар — отже Kirchhoff, Secchi, а посередно також Faye і Reye, хотяй головну ролю в витвореню плям признають цикльонам. В критичне обговорюване тих теорий запускатись ту не будемо та зазначимо тільки, що ті теориї на довгий час вичерпали зміст сонїчної фізики. Число і значіне теорий та гіпотез, що повстали по 1877 роцї, є так мале в порівнаню з тим материялом, що рік-річно виходить з астрономічних та астрофізичних обсерваторий, що кождий мусить признати, що як початок XIX. віка був під безперечним впливом гіпотези Herschel'a, так теперішні учені зістають під впливом

ріжних теорий з перед 1877 року. Не можна що правда заперечити фактам повставаня пізнїйших теорий, але того значіня, що колись теориї Zöllner'a, Kirchhoff'a, Secchi'ого, Faye'a, Reye'a мали, не вспіла нїяка новійша теория осягнути.

Длятого то представляючи найновійші теориї та гіпотези сонїчних плям, будемо їх ґрупували після найважнїйших теорий другого періода нашого знаня про сонїчні плями.

Теория Zöllner'a найшла в короткім часї значне число приклонників, головно тому, що була зі всїх теорий найосновнїйше оброблена. Вже в лїтах 1870 і 1871 висказали ся за сею теориєю Respighi і Falb, у Франциї Gazan.[1]) Крім того мали єї потому прийняти Бредихин, Lohse і Spörer. Так бодай можна вичитати в першім нїмецкім виданю астрономії Newcomb'a на ст. 314, а відомість ту повторив Günther.[2]) Тимчасом є она лиш в части правдива. Бредихин дїйсно висказав про фізичний устрій сонця ті самі погляди, що Zöllner.[3]) Але Lohse є приклонником теориї хмар на спосіб Secchi'ого, а навіть в певній мірі і Kirchhoffa, бо в значній части опирає ся на Spörer'і, що є від Kirchhoff'a в теориї зависимий. Зміст теориї Lohse'ого такий: В наслїдок нарушеня рівноваги в атмосфері сонця з внїшних причин (може планетарних впливів) прорвває ся верства металїчних пар і повстає вибух. Его продукти остудивши ся опадають назад на поверхню фотосфери, викликують ту замішане, вири і течиї зі всїх сторін (звідси походить промінюватість притінка), котрі коли устане вибух, заливають пляму, що повстала з его продуктів.[4]) Так само Spörer нїде виразно не зазначив, що прихиляєть ся до теориї Zöllner'a. Повздержувала его, як впрочім і других та обставина, що Zöllner приняв для сонця сталий стан сцїпленя, та що за тим ішло, занадто низьку температуру. Подібність до Zöllner'івскої теориї бачимо лиш в виясненю періодичности і дїйсного руху плям.[5]) На думку Spörer'a є періодичність викликана ріжницею в промінюваню рівникових а полярних

---

[1]) Sirius т. VI, 1871 ст. 42 Comptes rendus т. 83. ст. 658 і 1188.

[2]) Навіть в другім виданю своєї книжки Handbuch der Geophysik т. I ст. 76.

[3]) Newcomb-Engelmann o. c. ст. 325.

[4]) Beobachtungen angestellt auf der Sternwarte des Kammernherrn v. Bülow zu Bothkamp. Heft III. 1875. ст. 45 дд.

[5]) Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam т. II. 1880. ст. 79 дд.

околиць сонця. Ті ріжниці в промінюваню викликує знов ріжна густота хмарної оболоки сонця. Під рівником температура є висша, а звідти густота поверхневих верств меньша. Ко бігунам температура обнижає ся, густота росте. Понеже промінюване безнастанно треває, ріжниця в густоті стає щораз більша — вкінци мусить слїдувати вирівнане. Оно дїє ся в той сам спосіб, що в наших земских морях т. є. посередством струй, але що сонце є ґазовим тїлом, то вирівнане начинає ся з більшою силою доперва тодї, коли ріжницї сильнїйше зростуть, а те вимагає довшого часу — на сонци над 11 лїт. Коли вирівнане доходить до кінця, тодї маємо часове minimum сонїчних плям; тимчасом в околицях бігунів відносини так ся змінили, що заходить потреба нового вирівнаня, котре ся також без проволоки начинає. Сам Spörer признає, що єго висказ є доперва ескізом теориї, але виразно вже бачимо вплив Zöllner'a.[1]) Дїйсний рух плям повстає після Spörer'a в наслїдок: 1) течій з внутра сонця, що приносять меньшу скорість ротацийну долїшних верств на поверхню, 2) атмосферних течій, що ведуть з собою знов більшу скорість горішних верств. З глубини z приходить на поверхню сонця по усуненю опору скорість:

$$v = 2\pi (R-z) \cos b \frac{w}{360^{0}}$$

де R = луч сонця, b = φ, w = кут оборотовий. З сеї формули можна вивести иньшу вигідну до обрахованя формулу:

$$R\xi = (R-z+h)\, w$$

в цїли обчисленя оборотового кута ξ, де h є висотою, з котрої приходять згадані атмосферні течії

Для доповненя поглядів Spörer'a мусимо додати, що в пізнїйших своїх публїкациях він начинає ся уже не признавати до теориї Kirchhoff'a. Именно вже від початку своїх почдамских публїкаций перестав Spörer виступати против правдивости явища Wilson'a, а вкінци навіть виразно сказав, що мусимо вважати деякі сонїчні плями заглубленями, та не заперечував, що є можливою річию, щоби всї сонїчні плями такими були.[2])

Теория Zöllner'a мала що правда дуже великий вплив на розвиток сонїчної фізики, именно длятого, що до послїдного потягненя

[1]) Цїлком подібно виясняє періодичність і французский учений Lamey, що мабуть також стоїть під впливом Zöllner'a. Comptes rendus т. 82. ст. 1262 дд.

[2]) Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam т. IV. ст. 416 дд. Sirius т. XIX ст. 55.

пера була викінчена. Але власне задля того свого викінченя не найшов Zöllner учеників ані наслїдників. По теориї Zöllner'a не повстала жадна нова більша теория жужлїв. Взагалї найшов Zöllner найбільше приклонників в Нїмеччинї. Всїм промовляла до серця основність і докладне викінченє його теориї. Голос Bauschinger'a можемо вважати в тім зглядї за міродайний.[1])

Натомість теориї хмар, що давали більше способности розвиненя індивідуальних поглядів, найшли в найновійших часах много приклонників. Можна се сказати именно про теориї Secchi'ого, котрі дуже заохочували пізнїйших ученых. Теория Kirchhoff'a не входить вже в рахунок в тім періодї, бо нема тепер хиба вже нїкого, хтоби заперечував, що плями є заглубленями, коли се так наглядно доказав Ricco.[2]) Тої самої думки є Trouvelot[3]) і Janssen,[4]) котрі поза тим твердженєм, що плями є заглубленями, нїчого позитивного про них не висказують.

Межи новійшими приклонниками теориї хмар вичислимо, йдучи хронольоґічним ладом, наперед Hastings'a професора в Baltimore. Підставою єго теориї є прямовісні течії з внутра сонця до єго поверхні. Ту наступає в наслїдок експанзиї остудженє і кондензация в тих течіях і через те повстає ґрануляция. Скондензований материял остуджує ся дуже скоро в наслїдок значної спроможности промінюваня та творить рід диму, котрий поволи западає в вільні місця межи ґрануляциями, де в наслїдок більшого горяча знов ся улетучує. Той дим є власне темним тлом, на котрім тим виразнїйше відбиває ся ґрануляция. Коли в якім місци сонїчної поверхні повстане зступна течія, то зі всїх сторін прямують до неї вітри, приносять з собою дуже много згаданого диму, та нагромадивши єго витворюють сонїчну пляму. Маса диму, що западає в глубину, творить осередок плями, промінистий притїнок витворюють доосередні вітри, що викликують збоченє течій, котрі ідуть прямовісно в гору, на напрям поземий. На підставі сеї теориї вияснює Hastings, длячого пенумбра на внутрішній границї є найяснїйша. Поясненє буде найпростїйше, коли порівнаємо прямовісну течію з поземими. В течії прямовісній, що іде в гору, остуджує ся материял в наслїдок розширеня так довго, аж доки не дійде до конденсацийної точки. Тодї видїляє ся нагло цїлий материял, спосібний до

[1]) Sirius т. XVII. ст. 152 дд.

[2]) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei p. 1897. 5. ст. 202 дд.

[3]) Sirius т. XIX. ст. 51. дд.

[4]) Comptes rendus т. 68 ст. 312.

кондензації, причім видїлене дещо ся припізнює в наслїдок увільненого при тім тепла. Безпосередно потім стають видїлені части в наслїдок проміньованя зглядно темними. Цїлком инакше поводять ся поземі течії. Ту остуджує ся материял не через розширене, а через проміньоване. Понеже однак проміньоване сталої частинки є значно сильнїйше, чим проміньоване окружаючого єї ґазу, то остуженє поступає головно в наслїдок проміньованя сталих частинок. Коли отже покаже ся перша частинка, то мусить задержати своє сьвітло так довго, аж доки цїлий материял, з якого ся она складає, не згустить ся. Звідси виходить, що в такій поземій течії сьвітло поволи ся змагає, а потім відразу малїє, що ся цїлком згоджує з обсервованими фактами.[1])

Дальшим приклонником теорії хмар є Young. Він, як знаємо, був з початку за теориєю Faye'a, але потім перехилився на сторону Secchi'ого а навіть запропонував одну модифікацию до єго теорії. Думає він іменно, що плями могуть бути заглубленями в фотосфері, але що викликує їх не так тисненє вибухових продуктів з гори на дїл, як зменьшене тисненя з долу до гори, в наслїдок вибухів в сусїдних околицях сонїчної поверхні. Фотосфера не є в кождім разї тяглою, одностайною обволокою, але є зглядно тяжка в порівнаню з парами і ґазами, котрі ся під нею находять. Відносини подібні як у наших земских дощевих хмар, що стисло беручи є питимо тяжші від воздуха, що їх уносить. На сонци фотосфера тисне з гори на атмосферу, що находить ся під нею, а та не будучи пружива тисне на фотосферу з долу. Коли в якім небудь місци фотосфери отворить ся усте для вибуху, то в околиці повстає в наслїдок зменьшеного тисненя з долу зовсім природно заглубленє. Оно удержує ся так довго, доки в сусїдстві треває вибух.[2])

Young подав в найновійших часах також свою теорию дїйсного руху сонїчних плям. Після єго думки належить шукати поясненя нинїшного дивного обороту сонця в єго минувшости. Прискоренє під рівником є полишкою попередних ротацийних відносин сонця, а не випливом якихсь сил дїлаючих в теперішности. Противно — тепер всї сили сонця старають ся відносини ротацийні під ріжними геліоґрафічними ширинами вирівнати. Своя річ, той процес вирівнуваня іде зглядно так поволи, що ледво по кількох столїтях люди при дуже уважнім досліджуваню могли б його сконстатувати. Причиною того прискореня вважає Young перстень з мраковинної материї, що спустив ся перед віками на поверхню сонця.[1])

Взагалї теорії Secchi'ого з літами находили собі щораз то більше приклонників, бо були зглядно найменьше аподиктичні та легко давались в ріжні стороны нагинати. Великим здобутком для теорії Secchi'ого був передовсім славний анґлїйский спектроскопіст Norman Lockyer, що отверто заявив свою згоду з нею.[2]) Другим ученим, що вже в найновійших часах, бо в послїднім десятилїтю прилучив ся до теорий Secchi'ого, був шведский спектроскопіст Dunèr.[3]) Именно в католицких кругах був Secchi дуже популярний. K. Braun, представляючи космоґонїю з християньского становища, подав свою теорию сонїчних плям, котра є дуже близко споріднена з теориями Secchi'ого, хотяй Günther думає, що Braun деякі свої принципи бере з теорії Reye'a.[4])

Рівновага в ґазовій атмосфері сонця є після Braun'a непостійна в напрямі прямовіснім. Верстви остужені в наслїдок проміньованя опадають на дїл так довго, доки не зустрінуть верств більшої густоти. На їх місце взносять ся нові маси в гору. При остуженю ся зступаючих верств повстане в сонїчній атмосфері щось в родї дощу зложеного з плинного бору, крему і угля. Пари, що зносять ся в гору, творять зернята ґрануляції, верстви опадаючі темне тло. В той спосіб опаданєм одних верств а взношенєм ся других вияснює Braun явище ґрануляції. Крім того зглядного і правильного круженя ґазових мас тревають на сонци заедно вибухи в родї вулканїчних і викидають металїчні пари далеко поза фотосферу. Там однак они удержатись не могуть і в наслїдок проміньованя. Остужуючись і згущаючись опадають они на дїл і западають в глубину фотосфери, творячи лїйковаті заглубленя т. є. плями. Осередок їх творять ті остужені і загущені металїчні пари, котрі, як се очевидно видають слабше сьвітло, чим окружаюча їх фотосфера. Она будучи горячійша поволи знов огрівае остужені пари, що творять пляму і зальлявши єї вкінци викликують явище походень, котрі як знаємо є звичайно наслїдним явищем плям.

---

[1]) Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences November 1880 і American Journal of Science Januar 1881. Young o. c. ст. 292 дд

[2]) Young o. c. ст. 172 дд.

[1]) Пор. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik т. IX. 1898. ст. 3—5.

[2]) Пор. Sirius т. XXVI. ст. 150 дд.

[3]) Nova acta regiae societatis Upsaliensis (3). 14. ст. 12. пор. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik IV. Jahrgang 1893. s. 6.

[4]) K. Braun. Über Kosmogonie vom Standpunkte christlicher Wissenschaft. München 1889. ст. 130 дд. Пор. S. Günther, Handbuch der Geophysik. II Auflage. т. I. ст. 75.

Але найважнїйшим наслїдком теорий Secchi'ого було се, що они були підставою дуже основно обробленої теориї Ег о н а Oppolzer'a.

Плями сонїчні а іменно їх осередок є масами ґазів і пар, котрі в наслїдок своєї нисшої температури викликують сильну абсорбцию сьвітла висиланого фотосферою. Показують се наглядно дослїди Young'a і Duner'a над дуговиною сонїчних плям. Недвижність абсорпційних лїнїй вказує на те, що ві внутрі плями в абсорбуючих масах панує великий спокій. Длятого Oppolzer разом з Dunèr'ом перехиляє ся на сторону теориї Secchi'ого, заразом признаючи се доказаним фактом, що плями є заглубленя в фотосфері. Але цїлком инакше вияснює Oppolzer, длячого льокальне остудженє треває так довго. Твердить він іменно, що в заглубленю фотосфери понад осередком плями (зложеним з остужених продуктів сусїднього вибуху) находять ся ґази в дуже високій температурі, що не допускають кондензациї ґазів фотосфери в тім місци. Маємо отже в кождій плямі два великі екстреми температури, про що сьвідчать знов спектроскопічні і термоскопічні дослїди.[2]) Причиною того істнованя коло себе таких екстремів температури є після Oppolzer'a течія в сонїчній атмосфері з гори на дїл. (Є се щось в родї down rush, котрий анґлїйскі астрономи вважали причиною остуженя в плямах.) По дослїдам Hann'a температура такого опускаючого ся в дїл стовпа воздуха в земскій атмосфері є в горі висша понад середну вартість. Аж при самім долї, де прямовісний рух переходить в повільний рух поземий, слїдує остуженє під впливом промінюваня, котре збільшає ще чистість і сушу лежачих під нею верств воздуха. На сонци ті рїжниці температури мусять бути безконечно більші, чим в земскій атмосфері, де їх наслїдком є тільки мраки. Така отже зступаюча течія удержує в горішних реґіонах лїйковатого заглубленя, що творить сонїчну пляму, велике горячо, котре не позваляє на тім місци загуститись фотосфері, а в долї викликує сильне остуженє, витворюючи в части і удержуючи в сей спосіб осередок в відповідно холодній температурі. Ті рїжниці теплоти мусять бути о стільки ще сильнїйші, що течії зступні також длятого є горячійші, позаяк они є тільки наслїдком течий вступних

[1]) Egon von Oppolzer. Über die Ursache der Sonnenflecken. Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, CII. II Abtheilung. a. ст. 375 дд. Astronomische Nachrichten т. 132.

[2]) Frost в Astronomische Nachrichten Nr. 3105/6 ст. 143 дд. виказав, що плями є нераз теплійші як фотосфера, що їх окружає.

Причинки до істориї розвитку і інволюциї желези thymus у риб кістноскелетних (Teleostei).

Написав

ФЕДІР ПРИМАК.

(Інститут анатомії порівнательної ц. к. унїверситета у Львові).

Железа thymus була до недавна у низших зьвірят зовсїм незвісна. Вперве найдено єї і описано у чоловіка, а відтак у декотрих висших ссавців. Доперва Meckel[1]) в початку XIX. віка викрив у водяних птахів орудє, котре назвав glandula thymus. Однак Haugstedt[2]) і Simon[3]) в основнїйших дослїдах доказали, що згадане орудє Meckel-a не було глезою (thymus), а лише звичайним нагромадженєм товщи, яке Meckel помітив і хибно описав яко thymus. На правдиве положенє gl. thymus у птахів вказав доперва Lucae[4]), хоч і опісля єще богато анатомів заперечували єствованє тої желези у птахів, а нинїшну глезу (gl. thymus) у тихже зьвірят уважали железою щитовою (Schilddrüse, thyroidea).

Тривку основу до дослїдів порівнательно-анатомічних глези (thymus) положив згаданий повисше Simon котрого погляди відтак

[1]) Meckel, Abhandlungen aus der menschl. und vrgl. Anatomie u. Physiologie, Halle 1806.

[2]) Haugstedt, Thymi in homine ac per seriem animalium descript. anatom.-physiol. Havniae 1832.

[3]) Simon, A physiological Essay on the thymus gland. London 1845.

[4]) S. Lucae, Anatomische Untersuchungen der Thymus in Menschen u. Thieren, Frankfurt a/M. 1811—1812.

Але найважнїйшим наслїдком теорий Secchi'ого було се, що они були підставою дуже основно обробленої теориї Ег о н а Oppolzer'a.

Плями сонїчні а іменно їх осередок є масами ґазів і пар, котрі в наслїдок своєї нисшої температури викликують сильну абсорбцию сьвітла висиланого фотосферою. Показують се наглядно дослїди Young'a і Duner'a над дуговиною сонїчних плям. Недвижність абсорпційних лїнїй вказує на те, що ві внутрі плями в абсорбуючих масах панує великий спокій. Длятого Oppolzer разом з Dunèr'ом перехиляє ся на сторону теориї Secchi'ого, заразом признаючи се доказаним фактом, що плями є заглубленя в фотосфері. Але цїлком инакше вияснює Oppolzer, длячого льокальне остудженє треває так довго. Твердить він іменно, що в заглубленю фотосфери понад осередком плями (зложеним з остужених продуктів сусїднього вибуху) находять ся ґази в дуже високій температурі, що не допускають кондензациї ґазів фотосфери в тім місци. Маємо отже в кождій плямі два великі екстреми температури, про що сьвідчать знов спектроскопічні і термоскопічні дослїди.[2]) Причиною того істнованя коло себе таких екстремів температури є після Oppolzer'a течія в сонїчній атмосфері з гори на дїл. (Є се щось в родї down rush, котрий анґлїйскі астрономи вважали причиною остуженя в плямах.) По дослїдам Hann'a температура такого опускаючого ся в дїл стовпа воздуха в земскій атмосфері є в горі висша понад середну вартість. Аж при самім долї, де прямовісний рух переходить в повільний рух поземий, слїдує остуженє під впливом промінюваня, котре збільшає ще чистість і сушу лежачих під нею верств воздуха. На сонци ті рїжниці температури мусять бути безконечно більші, чим в земскій атмосфері, де їх наслїдком є тільки мраки. Така отже зступаюча течія удержує в горішних реґіонах лїйковатого заглубленя, що творить сонїчну пляму, велике горячо, котре не позваляє на тім місци загуститись фотосфері, а в долї викликує сильне остуженє, витворюючи в части і удержуючи в сей спосіб осередок в відповідно холодній температурі. Ті рїжниці теплоти мусять бути о стільки ще сильнїйші, що течії зступні також длятого є горячійші, позаяк они є тільки наслїдком течий вступних

[1]) Egon von Oppolzer. Über die Ursache der Sonnenflecken. Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, CII. II Abtheilung. a. ст. 375 дд. Astronomische Nachrichten т. 132.

[2]) Frost в Astronomische Nachrichten Nr. 3105/6 ст. 143 дд. виказав, що плями є нераз теплійші як фотосфера, що їх окружає.

Причинки до істориї розвитку і інволюциї желези thymus у риб кістноскелетних (Teleostei).

Написав

ФЕДІР ПРИМАК.

(Інститут анатомії порівнательної ц. к. унїверситета у Львові).

Железа thymus була до недавна у низших зьвірят зовсїм незвісна. Вперве найдено єї і описано у чоловіка, а відтак у декотрих висших ссавців. Доперва Meckel[1]) в початку XIX. віка викрив у водяних птахів орудє, котре назвав glandula thymus. Однак Haugstedt[2]) і Simon[3]) в основнїйших дослїдах доказали, що згадане орудє Meckel-a не було глезою (thymus), а лише звичайним нагромадженєм товщи, яке Meckel помітив і хибно описав яко thymus. На правдиве положенє gl. thymus у птахів вказав доперва Lucae[4]), хоч і опісля єще богато анатомів заперечували єствованє тої желези у птахів, а нинїшну глезу (gl. thymus) у тихже зьвірят уважали железою щитовою (Schilddrüse, thyroidea).

Тривку основу до дослїдів порівнательно-анатомічних глези (thymus) положив згаданий повисше Simon котрого погляди відтак

[1]) Meckel, Abhandlungen aus der menschl. und vrgl. Anatomie u. Physiologie, Halle 1806.

[2]) Haugstedt, Thymi in homine ac per seriem animalium descript. anatom.-physiol. Havniae 1832.

[3]) Simon, A physiological Essay on the thymus gland. London 1845.

[4]) S. Lucae, Anatomische Untersuchungen der Thymus in Menschen u. Thieren, Frankfurt a/M. 1811—1812.

розширив і поглубив Ecker[1]) і Leydig[2]). Simon розглядав анатомічну будову ріжних хребовців (Vertebrata) і прийшов до заключеня, що thymus питомою є лише зьвірятам, котрі віддихають легкими; він твердив, що риби і земноводники (Amphibia) [котрі також подібні до риб як пр. печеровець (Proteus), гущер (Siren)] не мають тої желези. Після него не мають thymus і пуголовиці Rana paradoxa, що також віддихають зявами. Однакож ті погляди Simona не удержали ся, бо, як вислідив Ecker, железа thymus находить ся також в тїлї пуголовиць віддихаючих зявами.

Викритє thymus у риб належить вже до найновійших здобутків науки. Именно Stannius[3]) винайшов у кругоротів (Cyclostomi) двійне орудє, що „находить ся по обох боках cardia тутже поза зявами". У перекустих (Plagiostomi) а именно у дерпана звичайного (Squatina vulgaris) описав Ecker thymus яко подовгасту, лопатовату масу, котра находить ся понад яминами зявними. Зовсїм подібно Stannius представляє thymus яко велику, сїру, мягку, лопатовату масу железову, котра, поміщена в горі над луками зявними, розширює ся ід передови, а з'ужує ід задови. Крім повисше згаданих вчених занимали ся дослїдами над thymus у риб також Leydig і Dohrn[4]). Именно сей послїдний подав нам кілька дуже важних помічаній, дотикаючих розвитку thymus у Selachii-в. Відтак належить згадати оттут і Афанасієва[5]) (професора з С.-Петербурга), котрий, розслїджуючи анатомічну будову thymus у ріжних хребовців, не виключаючи і риб, положив неоцїнені заслуги основними помічанями, дотикаючими передовсїм способу заниканя (інволюції) сего орґана, о чім впрочім понизше обширнїйше поговоримо.

Приведена лїтература зовсїм еще не пояснює нам значіня і функції фізиольоґічної gl. thymus для зьвиріного тїла. Железа thymus все ще являє ся для нас загадкою. А особливо у найнизших хребовців, то есть у риб, єствованє єї для орґанїзма буває ріжними ученими ріжно понимана. По нинїшний день нема одноцїльної гадки що до походженя тої желези: одні виводять єї з внїскірні (ектодерми), иньші із середскірні (мезодерми). Fr. Maurer[1]), De Meuron[2]), Schaffer[3]) і J. Beard[4]), котрих студиї на тім поли належать до найновійших і найвартнїйших здобутків анатомії та фізийольоґії згаданого орудя, все ще виявляють великі недостачі, так що повставанє thymus, а особливо найважнїйша фаза в єї розвою поки-що не рішена.

1) Ecker, Bluttgefässdrüsen. Handwörterbuch der Physiologie von R. Wagner Bd. IV, 1853.

2) F. Leydig, Lehrbuch der Histologie. Frankfurt a/M. 1857 pg. 429.

3) Stannius, Lehrbuch der vergleichenden Anatomie der Wirbelthiere. Berlin 1846.

4) Dohrn, Studien zur Urgeschichte des Wirbelthierkörpers IV. Mittheilungen aus der Zoolog. Station zu Neapel Bd. V. Heft 1.

5) Afanassiew, Über Bau und Entwickelung der Thymus der Säugethiere. Archiv f. mikrosk. Anatomie. Bd. XIV. 1877.

Глеза (thymus) є лїмфатичним тїлом. Єї сїтчасту ткань заповняють незлїчимі лєвкоцити, котрих походженє, помимо, що они становлять головну складовину згаданого орудя, є поки-що неясним. Дослїди наші, посьвячені спеціяльно тій річи, наглядно нас переконали і в тій гадцї як найсильнїйше утвердили, що лїмфатичні клїтини thymus прямо з клїтин наболонних витворюють ся. Постереженє се являє ся нам фактом загальної морфольоґічної ваги і прінціпіяльного значеня, бо оно зовсїм перечить загально принятим поглядам що до специфічности листків зародочних та що до походженя лїмфатичних елєментів з мезенхими.

Пригадаймо собі, який то приилеск з одної, а остру критику з другої сторони, викликала праця Retterer-a[5]), котрий доказував походженя лєвкоцитів і сїтчастої остроми (Netzwerk) в узликах лїмфатичних (Lymphknötchen) з наболони. Stöhr[6]), що саме накинув ся був з острою критикою на погляди Retterer-a, назвав також і дані Юлії Platt, Gronowitsch-a, Klaatsch-a, v. Kupffer-a і Фр. Maurer-a що до походженя лучнотканних і лїмфатичних тканий з ентo- чи з ектодерми хибними і зовсїм не переконуючими. „Auf Irrthümern... beruht" — каже він — „die grosse Mehrzahl der Arbeiten, welche die Lehre der Specifität der Keimblätter stürzen wollen, welche Bindegewebe und Leucocyten von Ekto- oder Entoderm abzuleiten versuchen".

1) Fr. Maurer, Schilddrüse u. thymus der Teleostier. Morpholog. Jahrb., Bd. 11, 1885.

2) De Meuron, Recherches sur le devéloppement du thymus et de la glande thyroïde. Recueil Zool. Suisse, 1886.

3) Schaffer, Über den feinen Bau der Thymus u. deren Beziehungen zur Blutbildung. (Sitzungsberichte der kais. Akadem. der Wissenschafften CII. Bd. Abth. III. Jahrg. 1893. Heft I—X).

4) J. Beard, The Developement aud probable Function of the Thymus. Anat. Anzeiger, Bd. 9, 1894.

5) Retterer, Origine épithéliale des leucocytes et de lu charpente réticulée des follicules clos. Compt. rendus. Soc. Biol., 1897. Histogenése du tissu réticulé aux dépens de l'épithélium. Verhandl. der anat. Gesellschaft auf der 11. Versammlung, 1897.

6) Stöhr, Über die Entwickelung der Darmlymphknötchen. Ibid. 1897.

Студиюючи препарати, які зладили ми до зовсїм иньших цїлий, именно до слїдженя розвитку зародочного шарнованих (Cyprynoides) і лососоватих (Salmonides), завважали ми під мікроскопом образи, що нас споводували до помічаня розвитку лїмфатичних елєментів желези thymus. З початку веденої роботи ми стояли по сторонї Stöhr-a, проте вже a priori всяку можливість повставаня лїмфатичних елєментів з наболони ми цїлковито виключали. Однак по дуже основних обсервациях і студиях препаратів зладжених ми дійшли до результатів зовсїм противних. Тим паче, що подібні процеси відбувають ся також і в thymus жирунів (Selachii), як се бачимо з розвідки J. Beard-a[1]), що нам случайно в часї дослїдів попала в руки. Именно J. Beard виводить також і у плахура (Raja) лїмфатичні клїтини thymus безпосередно з наболони.

Молодші стадиї слїдили ми на зародках пструга (salmo). Ми можемо вповнї потвердити дані Maurer-a, що перші пуплї thymus розвивають ся з наболонного згрубіня горішних кінців (dorsalen Enden) щелин зявних (Kiemenspalten). Що клїтини тих перших пуплїв суть клїтинами наболони, сего доказав Maurer нехибно, бо они переходять безпосередно в наболонні клїтини зяв; що під наболонию находить ся оболона властива (membrana propria), котра становить границю межи наболонию а находячою ся під нею тканию, на се цїлковито з Maurer-ом годимо ся. Але негодимо ся з ним в чім иньшім.

Именно після Maurer-a, елєменти розвиваючої ся глези (thymus) мають вже від першої хвилини повстаня питоменний визір, бо клїтини не мають нїяких границь, а ядра клїтинні є малі, точковаті, дуже густо побіч себе нагромаджені і закрашують ся інтензивнїйше, нїж ядра клїтин наболонних. Ті послїдні мають — після Maurer-a — в супротивцї до первістних елєментів thymus виразні границї і овальні ядра, що красять ся блїдо і визначають ся виразною будовою ядристою (deutliche Kernstructur), котра в первістних елєментах thymus має бути затертою. Ядра ті — після Maurer-a — „gleichen sofort den lymphoiden Elementen“. Сей погляд Maurer-a зовсїм хибний, бо клїтини завязку thymus нїчим непохожі на лїмфатичні елєменти, але противно они мають дуже виразний характер наболонний і лишень мало-помалу переходять в лїмфатичні клїтини, о чім понизше основнїйше буде бесїда.

---

[1]) Beard, The True Function of the Thymus. Lancet, 1899.

У з а р о д к а пструга, що мав 63 днїв, збита маса thymus складає ся — після Maurer-a — з однородних густо побіч себе нагромаджених ядер, що на краю наросту переходять непроривно в наболонні клїтини слизистої оболонки ямин зявних; однак вже й тепер покривова верства thymus складає ся з плоских і великих наболонних клїтин, так що все оруде має лишень одноверстну огортку наболонну, хоч всї єго складові елєменти суть витвором epithelium. Округлі ядра thymus „machen den Eindruck von lymphoiden Elementen“. В тій стадиї помічав Maurer всмикуване лучноткани до завязка thymus. Лїмфатичні ядра, що становлять головну масу thymus, має він не за лучнотканні частини, тілько „für Elemente epithelialen Ursprunges“, котрі вибуяли на н а б о л о н и (epitheliale Wucherung) із внїшної ткани. Именно слїдуючим способом доказує Maurer наболонне походженє ядер лїмфатичних:

„Zunächst sind die Elemente alle vollkommen gleichartig. Ferner sind sie durch eine Membrana propria gegen das subcutane Bindegewebe abgegrenzt; diese Membran wird nur an den Stellen durchbrochen, an welchen die Bindegewebszellen in das Organ eindringen. Drittens gehen an der Grenze des Organs die lymphoiden Elemente direct in die Epithelzellen der Kiemenhöhlenschleimhaut über“. Maurer однакож, що найважнїйшим тут являє ся, не характеризував сего безпосередного переходу, так що з єго опису зовсїм не виходить, що клїтини наболони дїйсно в лїмфатичні елєменти перетворюють ся, хоч в самій основі гадки єго зовсїм слушні.

Maurer уважає ті „lymphoide Elemente“ творами темпорарної натури і тому каже їм по часї назад в клїтини наболонні переміняти ся, причім знов не пояснює способу сеї переміни, що являє ся нам істольоґічним курийозом.

Вельми заслужений згаданий дослїдувач зве лїмфатичні елєменти „lymphoide Kerne“. І справді они виглядають як ядра, бо ослоняюча їх плязма є незвичайно тоненька і густо-часто лишень при дуже сильнім побільшеню мож єї ледви-заледви добачити. Maurer характеризує дуже поверхно сю дивоглядну переміну тих майже позбавлених плязми лїмфатичних елєментів, котрі лежать або зовсїм свобідно побіч себе або розміщені посеред вроснутої тут зо внї лучноткани. Именно, начеркнувши коротенько сї відносини у пструга, що мав вже 4 місяцї, говорить він так: „Die primären Thymuszellen (значить у него тільки що „die lymphoiden Elemente“) haben sich insofern verändert, als ihre Kerne grösser geworden sind, sich weniger intensiv färben und deutliche Structur erkennen lassen, kurz

ein Verhalten zeigen, das man... als Beginn eines Rückfalles in ihren epithelialen Charakter bezeichnen darf".

Приняте сего переображеня вспятного ядер лїмфатичних в наболонні клїтини є чистою ипотезою із сторони Maurer-a, видуманою — здаєть ся — на те, щоби якимось способом „lymphoide Elemente epithelialen Ursprunges" з лїмфатичних складнїв дефінітивної глези (thymus) виключити, бо ті елєменти, одвітно загально принятій теорії, повинні з мезодерми походити.

Maurer принимає дальше, що лїмфатичні елєменти, які вийшли з наболони, так довго задержують свій характер, як довго они розростають ся і становлять головну масу thymus. Вправдї лучноткань, що безпосередно одягає thymus, вже вісїм днїв опісля, як появив ся завязок желези, починає вростати, всмикувати ся до thymus, однак она є лишень тканию остромною (руштованєм), що становить мовби подвижника для судин кровних. Але по двох-трох місяцях, каже дальше Maurer, наколи починають лїмфатичні елєменти мезодерматичного походженя до thymus вростати, переміняють ся лїмфатичні елєменти наболонного походженя назад в клїтини наболонні. „Die primären epithelialen Elemente allmählich in ihrer Proliferation erschöpft, verlieren ihr lymphoides Aussehen und nehmen auch äusserlich ihren epithelialen Charakter wieder auf". Такий погляд Maurer-a є — як вже повисше сказано — зовсїм хибним. Понисше наведені дослїди доказують зовсїм недвузначно, що переміна клїтин наболонних в лїмфатичні елєменти дїйсно довершує ся і, що раз таким способом повсталі лєвкоцити свій характер задержують і нїяк не переміняють ся в клїтини наболонні. Противно они заховують ся в незміненій формі аж до найпізнїйших стадий і допервa по часї або роздроблюють ся на зернисту масу або перетворюють ся в червоні тїльця крови (еритроцити), як се впрочім понизше викажем.

Видумку Maurer-a що до вспятного розвитку лєвкоцитів в наболонні клїтини уже Beard скритикував зовсїм справедливо в „Anatom. Anzeiger" l. c. 1894. А впрочім з дотичної розвідки Maurer-a годї дізнати ся, чи автор повсталі з наболони клїтини дїйсно за лїмфатичні елєменти уважає, чи лишень за творива, що похожі на лїмфатичні елєменти, бо раз (на сторонї 161) говорить він „an der Grenze des Organs gehen die lymphoiden Elemente direct in die Epithelzellen der Kiemenschleimhaut über", на иньшім знов місци зве ті самі елєменти, „lymphoid aussehende Zellen der epithelialen Anlage". Тож дуже трафно замітив Beard, коли сказав, що „The expression „lymphoid aussehende Zellen" would seem indicate, that Maurer does not regard these cells as true lymph-cells". Beard подібно в дослїдах над розвитком thymus у Raja дійшов до заключеня, що і тут „the lymph elements of the thymus are the direct offspring of the epithelial cells of a gill-cleft". До того самого заключеня дійшов він на підставі поновлених помічаній над розвитком thymus у плахура (Raja), де лїмфатичні клїтини сего орудя мають виключно з наболони витворювати ся.

В пізнїйшій розвідцї о розвитку thymus у земноводників (Amphibia) припускає Maurer[1]), що тут лїмфатичні клїтини „durch Theilung aus den Epithelzellen hervorgehen können" (через дїльбу з клїтин наболонних можуть повставати). В яйцеватім завязку thymus 17 mm довгої личинки жаби (пуголовача) виріжняє Maurer субстанцию стрижеву (Marksubstanz) і субстанцию корову (Rindensubstanz). „Die Zellen des Markes" — каже він — „gleichen in ihrem Aussehen vollkommen den Epithelzellen der ersten Anlage, während die Genese der kleinen Rundzellen der Rindenschicht eine doppelte Deutung gestattet. Sie können nämlich ebenso gut durch Theilung aus Epithelzellen hervorgehen als auch mesodermaler Herkunft, d. h. mit den Gefässen hineingewuchert sein. Ich neige zur letzteren Annahme, da es mir nicht möglich war, neben den kleinen Rundzellen und den spärlichen dazwischenliegenden Epithelzellen der Rinde Theilungsfiguren oder sonstige Übergangsformen zu entdecken. Beide Zellenformen lagern scharf unterscheidbar neben einander, zwischen den verästelten Bindegewebszellen, welche das Organ durchsetzen". Так говорить Maurer, і він має зовсїм слушність, коли на підставі власних помічаній (треба додати неосновних і поверхних) удержує походженє лїмфатичних ядер з клїтин наболонних кори лише за „möglich", бо він не бачив анї подїлових фіґур (Theilungsfiguren) анї перехідних форм (Übergangsformen). Однак сей погляд Maurer-a дотикаючий Amphibia є недостаточним, походячим або з несовістного студийованя препаратів або з неосновної методи консервованя материялу (через що імовірно лучноткань не задержала ся в природнім видї). В зовсїм відповідних стадиях розвоєвих thymus у риб кістноскелетних[2]) бачили ми не лиш численні карийокінетичні фіґури подїлові клїтин наболонних, але й також прегарні форми перехідні між обома родами клїтин, що понизше буде основнїйше обговорено.

---

[1]) F. Maurer, Schilddrüse, Thymus u. die Kiemenreste bei Amphibien Morphol. Jahrbuch 1888.

[2]) Карийокінетичні фіґури в великій скількости обсервували ми також в thymus земноводників (Amphibia) а именно на препаратах зладжених до постеріганя концентричних тїлець (Гассаля), о чім иньшим разом буде бесїда. — Автор.

Яко материял до дослїдів служили нам переважно зародки пструга (Salmo fario L.) і молодий карас звичайний і золотий (Carassius vulgaris і C. auratus), хоча малисьмо під рукою також препарати з ковблика (Gobio fluviatilis і з вюна (Cobitis fossilis) та слижа (Cob. barbatula). Обєкти утревалювалисьмо почасти в самім концентричнім сублїматї, по части в сумішщї концентричного сублїмату і 3 проц. квасу азотного (на половину); передовсїм сей послїдний плин явив ся дуже пригідним як до розмягчуваня ткани кістної, так і рівночасно також до нїжного утревалюваня всїх тканий. До крашеня уживали ми еозин-гематоксилїни і алькоголїчного розпусту сафранїни, що особливо достатчала образів інструктивних.

Погляди Maurer-a, що перші пуплини thymus пструга повстають з наболонних згрубілостий горішних кінців ямин зявних і що ті пуплини дуже вчасно з собою зливають ся, так що творять одно наболонне згрубінє горішної стїни ямини зявної, ми потверджаємо. Однак не годимо ся з Maurer-ом мовби то клїтини тих пуплїв уже від початку ріжнили ся від иньших клїтин наболони ямини зявної, і мовби то між ними не видно було границь та ядра їх були меньші. Ми бачили, що клїтини завязка thymus уже в найранших фазах розвитку виявляли видні границї, а ядра їх були зовсїм такої самої величини і зовсїм з тою самою окривою, що і ядра наболони на иньших місцях ямини зявної.

Перша зміна наболони завязка thymus починає ся уже в тім часї, коли lamella cutis єще нїгде не прорвана, і коли єще в завязку thymus нїяких слїдів лучноткани і судин кровних не мож добачити. Зміна починає ся в понизших партиях завязка, коли партиї верхнї, що переходять в наболонь ями зявної, єще зложені з зовсїм невиріжненої епітелії (epithelium). Зміна розпочинає ся від того, що клїтини укладають ся свобіднїйше одна побіч одної, віддалюють ся від себе, розсувають ся, а межиклїтинні містки видовжують ся, тоншають і відтак зникають, лиш декотрі з них задержують ся. Нам видає ся дуже імовірним, що сї довгі нитки, які мовби узонькі кладки, лучать розвільнені клїтини, завдячують своє повстанє зїллятю певної скількости первістних, коротких і нїжних містків межиклїтинних.

Особливо виразне розсуванє (Lockerung) клїтин наболонних бачили ми на препаратах з зародків пструга, що були 1,2 cm довгі. Таке звільненє довершує ся в припідставних партиях thymus. Именно на верхнї (що яко горішна стїна зяв становить підставу для желези thymus) находить ся 2—3 верстви тїсно до себе прилягаючих клїтин наболонних, котрі дуже енергічно множать ся, як сего доказують численні карийокінези і мітози, які ми в клїтинах тих партий в великій скількости бачили. Таким отже чином скількість молодих клїтин заєдно росте, коли число верстов індиферентних, більш доверхних клїтин наболонних, єще через довгий час те саме полишає ся. Сьвіжо повсталі клїтини, не маючи тут доволї місця, входять до середини завязка желези, де підлягають згаданому повисше розповільненю.

У зародків пструга, що мали 1,5 cm довготи, подибувалисьмо тут і там судинки кровні і лучнотканні елємснти, котрі мож дуже легко пізнати по їх подовгастім, веретеноватім і почасти волокнистім виді; елємснти ті, що вже на перший погляд ріжнять ся від розвільнених клїтин наболонних, всмикують ся тут і там через cutis lamella до наболонного завязка желези thymus. В тій стадиї бачили ми численні форми перехідні від індиферентних клїтин наболонних партий периферичних до згаданих повисше клїтин розвільнених, що з початку повязані з собою міжклїтинними містковатими висувками, а в дальшім розвою і тих послїдних позбувають ся і громадять ся як зовсїм свобідно побіч себе лежачі клїтини лїмфатичні.

Фіґ. 1 (гл. табл. I.) представляє нам частину стрілового перекрою (Sagittalschnitt) через завязок желези на 1,5 cm довгого зародка пструга. При внїшнїй верхнї жел. thymus находимо битком побіч себе нагромаджені клїтини, що визначають ся блїдими, примінно великими, майже безхроматиновими, округлавими або овальними ядрами. В одній з тих клїтин, як також і в другій понизше лежачій бачимо хороші фіґурн дїлитьби ядер. На препаратах утревалених в сумішщї сублїмату і 3 проц. HNO_3, а закрашених відтак сафранїною находилисьмо дуже богато мітоз. Поява мітотичних фіґур, що доказують дуже скорої множби клїтин наболонних, є для нас дуже великої ваги, бо се є сьвідоцтвом, що роля наболони при твореню елємснтів thymus є активною, а дальше, що скількість клїтин епітельних завязка желези стало росте.

Елємснти, що повстали через дїлитьбу більших і єще індиферентних клїтин наболонних, суть меньші і замикають в собі також ядра меньші чим у клїтин матерних. Більшість тих енергічним процесом дїлитьби поменшених ядер клїтинних задержує вже свої скупі розміри і переходить мало-помалу в лїмфатичні елємснти. Рівночасно зі скорим помножуванєм і зменшуванєм обєму клїтин йде рука в руку і їх розвільненє.

На повисшій (1) фіґурі бачимо наглядно дуже красно перехідні степени від несвобідних єще, більших, тїсно побіч себе лежачих клїтин наболонних до таких, що на обєм меньші, більш від себе

віддалені, а довгими містковатими волокнами повязані. Ті послідні клїтини характеризують ся маленькими ядрами і дуже вбогою плязмою, котра немовби тонесеньким пластком огортає ядра. Такі клїтини майже вже зовсїм мають характер лїмфатичних елєментів, котрих однак спосіб (modus) розвоєвий, як також приналежність до клїтин наболонних виявляє хочби ся обставина, що плязма їх лучить ся непроривно з сусїдними клїтинами наболонними, а іменно за посередою довгих, нїжних, волокнистих містків. Із таких клїтин доволї розвільнених, але єще повязаних з собою обопільно бачимо знов ряд дуже ядерних образів переходових до зовсїм вже свобідних клїтин, що не лучать ся з собою; клїтини ті визначають ся нїжними, обводовими висувками, котрі виходять з плязми і очевидно представляють тут прочки (решткн) повисших міжклїтинних містків. А відтак доходимо до клїтинних форм, що, лишені всяких висувок, мають ледви слїди плязми і суть зовсїм перетворені в типові лїмфатичні елєменти, значить ся, представляють малі, округлі ядра, котрі визначують ся так тонесенькою огорткою плязми, що єї не легко навіть і при сильних побільшенях мож доглядїти.

Ядра лїмфатичних елєментів виріжняють ся від ядер індиферентних клїтин наболонних, як також від блїдих, кужільоватих ядер клїтин лучнотканних, не лиш меншими розмірами, але також і тим, що они красять ся сафраніною дуже інтензивно, інтензивнїйше нїж ядра всяких иньших клїтин. Ту послїдну появу пояснює нам та обставина, що в ядрах лїмфатичних виступає субстанция хроматинова (она сильно поглитає сафраніну) в більшій скількости, нїж пр. в ядрах типових клїтин наболонних, а дальше, що та хроматина творить в них більше або менше густу сїть, коли ядра иньших клїтин (пр. наболонних або лучнотканних) посїдають дуже скупо хроматини, що виступає в них в видї зеренець. Так при крашеню препаратів сафраніною получали ми як найвиразнїйші переходи від більших, зовсїм блїдих (клїтин) ядер наболонних до менших засібнїйших в хроматину, інтензивнїйше закрашених, а навпослї до типових, повисше описаних лїмфатичних елєментів.

До повного обговореня квестиї що до первістного жерела лїмфатичних елєментів thymus, мусимо оттут з великим натиском дві важні обставини запримітити. Іменно: 1) в жаднім ядрі лїмфатичного елємента thymus не бачили ми мітоз або якихсь иньших форм дїлитьби, проте помножуваня тих елєментів в дотичних стадиях слїдує не через дїлитьбу уже нагромаджених лєвкоцитів, але виходить завсїгди з індиферентних клїтин наболонних,

причім в тих послїдних відбуває ся дуже скоре множенє на мітотичній дорозї; 2) в розвільненій піднаболонній лучноткани, в якій (в повисше описаній стадиї) бачили ми судини кровні і блїді, кужілеваті лучнотканні елєменти, не було нї одного лєвкоцита, хоча в завязку thymus була їх вже велика скількість нагромаджена. Проте уже з тої причини виводженє лїмфатичних елєментів thymus з піднаболонної лучноткани є виключене; таке виводженє не має нїякого наукового підкладу і видає ся нам дуже невдалим, особливо, коли зважимо повисші дані, де наведено ріжні форми переходові від індиферентних наболоннх клїтин аж до типових тїлець лїмфатичних.

Зміни лєвкоцитів завязка thymus, як взагалї нїяких форм вспятних, щоб вказували перетворбу лїмфатичних елєментів в наболонні клїтини, ми не бачили в жадних стадиях розвитку: анї на повисше описаних, анї на слїдуючих препаратах старших особнїв. Раз повставші лєвкоцити, котрих головну складовину становлять ядра, бо плязми на них лиш дуже скупо находить ся, задержують свій здіб (habitus) аж до дуже пізних стадий розвитку thymus. А навіть в стадиях далеко старших, як ті, що ми їх повисше описали, відбував ся безнастанна трансформация клїтин наболонних в лєвкоцити. Так пр. на численних препаратах, де жел. thymus в декотрих місцях свого тїла починає вже хилити ся до інволюциї, бачили ми значнїйше розвільнюваня наболонних клїтин корових thymus, обнажуваня їх з плязми та прямованє до внутра, де відтак наступає повна їх переміна в лєвкоцити.

Дуже займаві і поучаючі образи в тім зглядї мали ми у караса (Carassius vulgaris), на 2·6 cm довгого. (Гл. фіг. 2). Грушковата железа, як бачимо, є в тій стадиї єще з кришою зявної ямини безпосередно получена, хотяй віддїлюваня (відставаня) при підставі уже намітило ся. На стрілових перекроях засновок thymus найчастїйше має вид грушки (очевидно не у всїх риб та не у всїх стадиях), котрої чільна часть є уміщена в заглубі між кістьми лобиновими, а іменно замикають єї: з заду кости ушні (otica), з переду кости окоямні (ossa orbitalia). Підстава thymus переходить безпосередно в наболонь ямини зявної, котра в дотичній стадиї є ще сильно згрубіла. Thymus при підставі (basis) є розширена, іменно двома пластами (передним і задним) підставовими остає в тїсній, безпосередній звязи з наболонию горішної даховатої стїни зяв.

В повисшій стадиї (фіг. 2) свобідно стремляча в гору железа thymus є окружена дуже нїжною, вільною і блїдою лучнотканию,

в котрій находимо судини кровні без найменьшого слїду навкруг них лєвкоцитів. Зате появляють ся лєвкоцити в згаданій окружаючій (вільній) нїжній лучноткани, а іменно у тій єї частинї, що тїсно прилягає до тонесенької внїшної оболонки верхнї thymus. Оболонка та є на численних місцях просаджена судинами кровними, що вростають до середини желези.

В підставовім платї thymus находять ся єще індиферентні клїтини наболонні, котрі чим висше ід горі переходять у вільнїйшу наболонь, яку майже на цілій периферії грушковатого виростка thymus находимо іменно під внїшною окриваючою єї нїжною оболонкою. Середину тїла thymus доповняє дуже велика скількість лїмфатичних елєментів, то єсть лєвкоцитів, поміж котрими добачуємо мірно розміщену лучноткань вільнїйшу, зложену з кужілеватих клїтин, поруч з сїтчастою дуже нїжною лучнотканию (reticulum). Судин кровних постерігаємо тут велику скількість. Вельми займавою і дуже важною являє ся тут та обставина, що і в тій, відносно уже так пізній, стадиї, все ще таки в клїтинах наболонних бачимо численні мітози і як найкрасші форми перехідні від таких клїтин наболонних, що енергічно множать ся карийокінетичною дорогою, до щораз свобіднїйше укладаючих ся, а відтак до найхарактеристичнїйших типових білих тїлец крови (лєвкоцитів) доходимо.

Фіг. 3. з'ображає нам частину прорізу стрілового через глезу (thymus) караса (Carassius vulgaris) повисшої стадиї при сильнім побільшеню. При споді бачимо єще зовсїм індиферентну наболонь безпосередно в стїну ямини зявної переходячу; в тій наболони на лїво видно врослу судинку кровну і кілька кужілеватих клїтин лучнотканних. При самій долинї підстави бачимо дві фіґури мітози. Їх поява, що в наболони дотичних серий препаратів у великій скількости виступає, є — як зазначено повисше — сьвідоцтвом скорого розросту ткани — скажу спішного множеня клїтин наболонних. Входячи в середину thymus, бачимо, як клїтини наболонні ід внутрі свобіднїйшають. Многі з них вже зовсїм не вяжуть ся з собою міжклїтинними волокнистими містками, хоча многокутним своїм визором зраджують наглядно своє наболонне походженє. Дотична фіґура 3. ілюструє нам знаменито висше описаний перехід від розвільнених, єще получених з собою клїтин (на право ід середини) аж до таких, що вже зовсїм свобідно побіч себе нагромаджені. Ядра тих послїдних, красять ся сафраніною інтензивнїйше, нїж ядра зовсїм єще індиферентних клїтин, котрі тутже при верхни находять ся. Ядра клїтин наболонних визначають ся грубою огорткою плязми, що тоншає в міру освободжуваня та посуваня клїтин до середини тїла

thymus, так що у ядер лїмфатичних з неї остають ледви насчадкові слїди.

Повисше згадали ми, що наболонь в периферичних партиях thymus звичайно зложена з клїтин, що побіч себе в довгі ряди установляють ся. Така стрічковата рядовитість клїтин увиднює ся навіть тоді, коли вже клїтини, тиснені нововитвореними клїтинами наболони, посунули ся до середини, поменшили свою огортку плязми і приймили удачу ядер лїмфатичних. Ряди ядер, що виглядають немовби шнурки доволї рідко нанизаних пацьорок, виступають на ріжних місцях thymus, найлучше однак се увиднене є в підставовій части желези, що граничить з наболонию ямини зявної; очевидно пізнїйше сей уклад ядер в ряди зникає, в міру як округлі, зовсїм вільні ядра свобідно розсувають ся по сїтчастій лучноткани. На фіг. 4 бачимо такі довгі ряди ядер лїмфатичних, именно по серединї thymus, на місци граничнім з наболонию. Понисше маємо кілька верстов клїтин індиферентних, що ограничають ямину зяв, яко звичайна наболонь; зараз над наболонию типовою бачимо в ряди уложені клїтини, що правда, також наболонні, але вільнїйші, котрих границї майже затирають ся, так що плязма поодиноких клїтин немов зливає ся в одну масу. Дальше ід серединї бачимо ряди лїмфатичних ядер, що мають свій початок в наболони.

Так отже на підставі повисше описаних помічаній приходимо отсе до рішучого заключеня, що велика скількість лїмфатичних елєментів (ядер), які в незміненій формі (они відтак перетворюють ся в червоні тїлця крови, о чім понизше буде бесїда) мож і в найпізнїйших стадиях розвитку слїдити, виводять ся з наболони слизистої оболонки ямин зявних — значить походять прямо з ентодерми, що є фактом загальної, далекосяглої ваги теоретичної. Ми певні, що наболонь є одиноким жерелом лїмфатичних елєментів желези thymus, а нїколи, як се навіть і до сегодня думають, лїмфатичні елєменти thymus не походять з мезенхими; ми нїколи не бачили, щоби до тїла thymus входили лїмфатичні ядра з окружаючої лучноткани, але навпаки ми помічали — особливо вже у старших стадиях — дуже громадне вилучанє лєвкоцитів з тїла thymus до прилягаючої лучноткани, як се дуже добре бачити мож на фіг. 5. Подібні образи бачыти мусїв і Maurer. Жаль лише, що нїмецкий вчений в тім случаю заявив мало віри і певности в самого себе і в те, що бачив під мікроскопом, але, йдучи за загально пануючими поглядами, він тим вандрівникам казав іти в противнім вспятнім напрямі, то єсть сказав, що

они йдуть з лучноткани до середини тїла thymus. „...nach mehreren Monaten — каже Maurer[1]) — fallen diese Zellen (epithelialen Ursprunges) in ihren epithelialen Charakter zurück, in dem ihre Proliferationsfähigkeit erschöpft ist. Zu gleicher Zeit brechen längs der Blutgefässe und Bindegewebszüge vom umgebenden Bindegewebe lymphoide Zellen in grossen Massen in die Thymus ein und etabliren sich in einer intermediären Zone, wo sie Lymphfollikel bilden". Таке заключенє Maurer-a зовсїм нїчо нам не пояснює, а противно оно лиш затемнює належний погляд на справу. Maurer, що казав лїмфатичним елєментам перетворити ся назад в клїтини наболонні, був приневолений конечностию вияснити собі якимсь способом ту обставину, що лїмфатичні елєменти аж до найпізнїйших стадий розвою thymus, ба навіть тодї, коли вже железа thymus на добре подала ся до інволюциї, лїмфатичні ядра все ще таки становлять головну складову масу тїла thymus. Тому то сей образ, де він в дотичній стадиї бачив громадно розміщені лєвкоцити в безпосередно прилягаючій до желези лучноткани, був для него дуже пожаданим, бо він єму вказав нове жерело лїмфатичних ядер, котрі саме прямували „massenhaft in die Thymus hinein, wo sie sich in einer intermediären Zone etabliren .." Maurer нїколи не був би дійшов до подібних хибних результатів, наколи би він був a priori не приняв теориї специфічности листків зародочних, після котрої всякі елєменти лїмфатичні походять лише з мезенхими (а нїколи з ento- чи ектодерми).

Ми єсьмо в посїданю цїлих серий препаратів з всїляких стадий, котрі не лише нас як найосновнїйше переконують о неправдивости повисших гадок Maurer-a, але заразом насунули нам єще дальше сягаючі гадки. Именно ми певні, що железа thymus в тїлї звірінім, а передовсїм у риб, над котрими отсе свої досліди ведемо, становить одно з найперших огнищ лєвкоцитів. Ми розглядали кількократно дотичні препарати, почавши від наймолодших зародочних стадий, і завсїгди доходилисьмо до того самого заключеня, що: в нїякій части тїла пструга (Salmo fario L.) так довго не мож хочби й одного лєвкоцита бачити, як довго железа thymus єще находить ся в найраньших стадиях розвою, то єсть як довго в нїй лїмфатичні елєменти єще не появили ся. Ми не подибували нїколи лїмфатичних ядер в орґанїзмі ембриональних осібняків, у котрих thymus оказувала ся доперва лише яко наболонне згрубінє горішної

[1]) Fr. Maurer, Schilddrüse und Thymus der Teleostier. Стор. 170. Morphol. Jahrbuch XI. Bd. 1886.

стїни ямини зявної; натомість в великій скількости постерігали ми лєвкоцити в ріжних частях тїла особнїв, що мали глезу (thymus) уже доволї розвинену, thymus з великим засобом лїмфатичних елєментів у внутрі. В більшій мірі єще мож се було постерігати на препаратах трохи пізнїйших стадий (пр. фіґ. 5), на котрих, як бачимо, лєвкоцити цїлими масами виходять з грушковатого тїла желези і розходять ся по сусїдних тканях.

Такі образи нас конче удержують в вірі що железа thymus є для орґанїзма звіриного, а особливо у риб, мовби першою фабрикою лєвкоцитів, машиною, котра функционує лише до певного означеного часу, доки не витворять ся в орґанїзмі иньші огнища, як стриж кістний (у риб єго нема), селезінь і иньші орудя лїмфатичні, що відтак переймають на себе ролю продукованя лєвкоцитів. Гадку сю висказуємо тим певнїйше, що і найновійші досліди над глезою у Raj-a довели J. Beard-a[1]) до зовсїм таких самих здогадів. Таке заключенє — поки-що ипотеза, основана на дуже точних помічанях — пояснює нам заразом і прояв інволюциї сего орудя, що, сповнивши свою задачу для устрою орґанїзма, стає для него злишним, а яко такий мусить нидїти і загибати.

Глеза, як сказано є твором тимчасовим, твором, що у всїх звірят хребових до певної пори єствує, а відтак, у одних вчаснїйше, у других пізнїйше, зникає з орґанїзма. Заник (інволюция) глези, подібно як і єї розвиток, має ще богато обстанов не прояснених; тож, нашими дослїдами думаємо дати доволї важні причинки до пізнаня способу заниканя сего орґана.

У чоловіка, як взагалї у висших ссавців, глеза доходить до найвисшого розвою уже в часї внутрматерничого житя даного особня; очевидно затим, що і інволюция єї у тихже звірят розпочинає ся уже в матерницї або коротко, зараз по народженю. Інакше має ся річ з глезою риб. У них глеза починає розвивати ся з хвилею, як особень (individuum) вступає у фазу житя послїзародочного (постембрионального) то єсть доперва по вилязї. Тому то й єствованє єї у риб, навіть уже в дуже пізних стадиях, бо майже у зовсїм вже старих особнїв, бодай незначними насчадками репрезентоване. У шаранів пр. понад три dcm довгих, ми находили глезу дуже сильно розвинену. Значить ся і інволюция єї у тих хребовців починає ся о много пізнїйше, нїж пр. у ссавців.

Першим характеристичним проявом інволюциї глези єсть повставанє в єї тїлї ямин, то єсть місць вільних від лїмфатичних ядер,

[1]) J. Beard, The Source of Leucocytes and the true Function of the Thymus. Anat. Anz. Bd. XVIII. 1900/901.

а заповнених звичайно ніжно-зернистою аморфною субстанциєю (detritus). Творба таких ямин (гл. фіг. 5) в тілї, що перед тим визначало ся великою збитою масою лєвкоцитів, пояснює ся тою обставиною, що лєвкоцити старших стадий: одні виходять до судин кровних, другі взагалї виеміґровують, як се іллюструє фіг. 5, а ще иньші або перемінюють ся в еритроцити або наконечно підлягають процесови розпаду і таким чином розсипають ся в згадану повисше мілку ніжно зернисту масу (detritus) — одним словом лєвкоцити старших стадий виходять в великій скількости, а лиш дуже незначне число їх доповняє ся сьвіжими клїтинами лїмфатичними. Незначне їх число кажу, бо наболонь тепер стратила уже давну здібність енерґічно дїлити ся та витворювати дорогою мітотичною нові лїмфатичні елєменти в колишній скількости.

Другою важною познакою знаменаючою глезу в фазї єї інволюциї, являють ся концентричні (соосередні) тїльця. Сї загадочні істольоґічні творива становлять до нинї квестию спірну в мікроскопній анатомії. Особливо у риб їх дуже мало помічано, а один впрочім дуже поважний вчений заперечує цїлковито їх єствованє в глезї риб: „Concentrische Körper“ — пише Schaffer[1]) — „wie sie als Reste der epithelialen Anlage (!) in der Marksubstanz der Säugethierthymus vorkommen, fehlen...“. Такий голословний висказ Schaffer-a є зовсїм хибним, як взагалї дотична єго розвідка являє ся надто поверхною і не науковою.

Наші дослїди дотично соосередочних тїлець глези нас переконали, що: 1) соосередні тїльця є примітною познакою інволюциї глези, 2) соосередні тїльця не суть останками клїтин наболонних, як се говорить Schaffer і як се взагалї подає ся нинї в підручниках істольоґічних і анатомічних, але, ми певні, що ті тїльця походять з дряхлїючих і заникаючих (облїтеруючих) судин кровних, як се понизше буде близше обговорено.

Ecker[2]) був першим, що назвав повисші творива соосередними (concentrische Körper), він, мож сказати, був першим, що науково розслїджував будову тих тїлець. До єго часів знано ті творива лише яко тїльця Hassal-a, а названі так від імени першого їх винахідника.

[1]) Schaffer, Über den feinen Bau der Thymus (der Fische) und deren Beziehungen zur Blutbildung. Kaiser. Akademie der Wissenschaften CII. Bd. Abth. III. Jahrg. 1893.

[2]) Ecker — Blutgefässdrüsen. Handwörterbuch der Physiologie von R. Wagner. Bd. IV. 1853.

Ґассаль[1]) іменно перший їх помітив в крови серця. Після Ґассаля ті творива складають ся з певного змісту, замкненого обгортною тобілкою з численних соосередно уложених міхурців (Bläschen). Такі творива бачив Ґассаль і в глезї чоловіка і вважав їх за матерні клїтини, що замикають в собі численні клїтини і ядра дочерні. Зовсїм подібно описує розвій концентричних тїлець і Ґінґсбурґ[2]), котрий однакож пізнанє будови сих творів посуває наперед, бо викриває, що одні з них є поєдинчі, а другі зложені. Берлїн[3]) пояснює значенє концентричних тїлець в той спосіб, що, уважаючи їх за нормальну складову часть глези, каже їм по певнім часї виходити з тїла глези і переміняти ся в железові клїтини.

Основнїйші дослїди над змістом соосередних тїлець робив Брух[4]) і прийшов до пересьвіду, що ті творива зложені з самих міхурців (Bläschen), котрих клїтини саме підлягають вспятному переображеню. Сей погляд повторив відтак Фрідлєбен[5]) з більшим засобом наукових даних, в обширній моноґрафії о глезї. Фрідлєбен не привязує до появи сих творів нїякої фізиольоґічної ваги для інволюциї, а лише уважає їх виразом морфольоґічних змін, які появляють ся в глезї в часї єї найсильнїйшої функциї.

Противно згаданий вже повисше Екер появу соосередних тїлець удержує в тїсній звязи з інволюциєю глези. Він приймає повставанє концентричних тїлець через збиванє в купки (купкованє) железових (слизних) міхурців, котрі відтак перебувають товщеву переобразу; тїльця ті після повисшого автора найчисленнїйше появляють ся в перийодї інволюциї. Те саме ствердяє відтак Гіс[6]), котрий однакож виключає звязь соосередних тїлець з інволюциєю. Сей послїдний толкує повставанє концентричних тїлець в той спосіб, що новоутворені клїтини (що се можуть бути за клїтини, се нам не відомо) глези через якусь перешкоду не можуть розходити ся і тому збивають ся в купки, приймають плоску форму і таким робом дають почин до

[1]) Arthur Hill Hassal's microscopische Anat. d. menschl. Körpers. Aus dem englischen übersetzt von Dr. Kohlschütter 1852.

[2]) Güngsburg, Notiz über die geschichteten Körper der Thymus, Zeitschr. für klin. Medicin. 1857. pg. 456.

[3]) Berlin, Etwas über die Thymusdrüse. Arch. f. d. holländ. Beiträge zur Natur u. Heilkunde Bd. I, 1858.

[4]) Bruch, Zeitschrift f. ration. Medicin. Henle und Pfeuffer. Bd. IX. 1850.

[5]) Friedleben, die Physiologie d. Thymusdrüse etc. Frankfurt a. M. 1858.

[6]) His, Beiträge zur Kenntniss der zum Lymphsystem gehörigen Drüsen. Zeitschrift f. wiss. Zoologie von V. Siebold und Kölliker. Bd. X. und XI. Leipzig 1860—62.

творби соосередних тїлець, подібно, як се дїє ся після Вірхова (Virchov. Archiv BJ. III. 222 стр.) у верствоватих канкроїдальних тїлах. Для нас дуже важним є постереженє Гісса, що ті елємепти глези не легко дають ся випензлювати з нїжних прорізів, але звичайно лишають ся побіч судин в лучноткани.

Киллїкер, а відтак Єндрассік[1]) збивають погляди Екера і Бруха, мовби то ті творива глези походили з прямої метаморфози клїтин і ядер, але натомість приймають они, що переміну клїтин і ядер в соосередні тїла поводує мертва безподобна (аморфна) субстанция, котра доокола них (клїтин і ядер) в великій скількости наспорює ся. Ендрассік іменно є гадки, що згадана аморфна субстанция осаджує ся головно наоколо тих клїтин, котрі вже в певній мірі підлягли вспятній переобразї. Він подибував в концентричних тїльцях і еритроцити в більше або меньше зміненій формі, що після єго думки походять з екстравазатів, подибуваних доволї в паренхимі глези. Єндрассік бачив ті концентричні творива лиш в часї інволюції глези, а іменно з початком інволюції бувало їх меньше, в дальших стадиях інволюційних постерігав їх велику скількість. Порівнуючи соосередні фіґури з волосницями, прийшов до пересьвідченя, що концентричні тїльця, розростаючи ся, стискають волосницї, так що ті послїдні під натиском внїшним приневолені застановити чинність і підпадають здряхленю і заникови (облїтерації). Таким способом хоче Єндрассік вияснити брак судин кровних в тих партиях глези, де находить ся велика скількість соосередних тїлець.

Відтак належить єще згадати про Пауліцкого[2]). Сей автор в своїх дослїдах прийшов до заключеня, що концентричні тїльця творять ся з новоутворених клїтин, маючих характер наболонний. Такі новоутворені клїтини — Павліцки зовсім не подає, в чім они ріжнять ся від звичайних клїтин наболонних — мають дуже скоро множити ся і таким чином повстають купки верствовато уложених клїтин, котрі завдяки внїшному натискови бувають сплощені і дають початок концентричним тїлам. Приймаючи повисший спосіб повставаня соосередних тїлець. Павліцки уважає їх патольоґічними новотворами, що в нормальній будові глези не появляють ся.

Найобширнїйша однак і по нашій думці найосновнїйша студия над глезою, а в особливости над розвоєм тїл соосередних, є праця

[1]) Jendrassik, Anatom. Untersuchungen über den Bau d. Thymus. Sitzungsberichte der Kais. Akad. der Wissenschaften 1856. Bd. XXII. Wien 1857.

[2]) Paulitzky, Disquisitiones de stratis glandulae Thymi corpusculis. Halis 1863. Inaug. diss.

професора Афанассієва[1]). Афанассієв уважає концентричні тїльця яко судини кровні (в поперечнім прорізї), що, підпавши здряхленю і заникови (облїтерації), застановили свою чинність допроваджуваня крови і таким чином поводують нидїнє глези. Тїльця соосередні становлять у Афанассієва вихідну точку інволюції глези.

Те, що Афанассієв бачив в глезї чоловіка і висших ссавців, ми сконстатували і в глезї риб, а передовсім у риб шарнуватих (Cyprinoidei).

Концентричні (соосередні) тїльця появляють ся в глезї особня (у риб) в доволї ріжних перийодах житя зависимо від причин чисто індівідуальної натури. Ми порівнували препарати особнїв одні з другими, що на внїшний визір представляли ту саму стадию житя — той сам рід (species), та сама великість — однак анатомічні відносини в заникаючій глезї виявляли дуже відмінні признаки і то вже як в загальній зверхній формі так також в особливости в єї мікроскопній будові. На всякий случай однак соосередні тїльця постерігали ми лише в глезї, котра, що найменьше бодай тільки в декотрих мішчинках (фолїкулах), почала хилити ся до інволюції. Іменно в тих партиях глези виступають соосередні тїльця, де лїмфатичні елємепти розсувають ся, приймають вільнїйше розміщенє, побільшають свою плязму і переміняють ся в червоні тїльця крови, як се о тім буде бесїда понизше. Визір тих концентричних тїл як також і величина їх бувають ріжні; звичайно однак они округлі, округлаві або овальні, подовговаті: зовсім, під тим зглядом вже на перший погляд, пригадують нам судини кровні, які тут і там поперечно перекроєні може постерігати. Здаєсь нам однакож, що визір тих тїлець зависить головно від часу, в якім ми їх студиюємо, значить, чи в часї розвитку, зрілости, чи в стадиї вспятної переобрази. Замітимо, що концентричні тїльця найінструктивнїйших образів достатчають в фазї розвитку, в стадиї, котру лиш щасливим трафом може підхопити; тому то часто з поміж препаратів зроблених з кількох особнїв на око тої самої стадиї, лише декотрі пригідні до постеріганя соосередних тїлець, бо, як сказано повисше, із-за чисто індівідуальних причин у одних особнїв глеза вже на добре улягла інволюції і тїльця концентричні виступили в великій скількости, у других інволюция того орудя ледви що розпочала ся і концентричні тїльця лиш в дуже скупім числї появили ся. Сей послїдний случай, де соосередні тїльця виступили в малім числї і де глеза ледви що по-

[1]) Afanassiew, Über die concentrischen Körper der Thymus. (Archiv. f. mi croscop. Anat. Bd. IV.)

чинає хилити ся до інволюції, се як раз найлучша стадия до студийованя концентричних тїлець, бо тут они саме находять ся в першім актї повставаня то єсть в розвою.

Розглядаючи препарати, на котрих глеза осягнула вже найвисший степень розвою, завважали ми в нїй зміни, що попереджали безсумнївно зближаючу ся інволюцию глези. А іменно творба згаданих повисше ямин в тїлї глези і доволї нагла зміна у визорі судин кровних становлять отту признаку інволюції. Endothelia (внутроболони) судин кровних починають грубіти і витворюють велику скількість ядер, що, укладаючись соосередно, надають судинам концентричний визір. Велика скількість клїтин (ядер) повязаних часто з собою межиклїтинєм (Фіґ. 6 d). зменьшає сьвітло судин, а часом зовсїм, особливо у волосниць, затикає проводи і тим чином поводує їх здряхленє і заник (облїтерацию).

На Фіґ. 6 бачимо цїлий ряд тїлець соосередних, почавши від звичайних нормальних аж до таких судин, що вже не функционують, бо сьвітло їх зменьшене цїлковито, так що нїяким способом тїльця крови не можуть через них просмикувати ся. Фіґ. 6 *a*, представляє нам вельми цїкаву форму, котру на перший погляд сейчас пізнаєм яко судину, хотяй endothelium єї анормально згрубіле відріжнює єї від звичайних нормальних судин. Друга з черги форма (Фіґ. 6 *b*), вправдї значно уже ріжнить ся від попередної, але все ще таки представляє нам судину, чого доказом хочби отті численні тїльця крови, які в єї сьвітлї добачуємо; однак сильно згрубіле endothelium та численні концентрично уложені ядра кажуть нам уважати сю форму нїчим иньшим як лиш концентричним тїльцем (Гассаля тїльцем). А вже тим певнїйше можемо те саме сказати про три слїдуючі форми під *c, d* і *e*, що нам вже зовсїм типові концентричні тїльця з'ображають. Для нас особливо займавою і переконуючою являє ся послїдна форма під *e*, де ми бачимо дуже хорошо заразом і типове концентричне тїльце і прилягаючу до него волосницю (в серединї єї находимо одно червоне тїльце крови), волосницю, котра також вже находить ся в стадиї твореня концентричного тїльця: endothelium починає грубіти і витворювати ядра імовірно дорогою звичайної дїлитьби, бо се найкоротший спосіб витворби нових клїтин, який довершує наглі морфольоґічні процеси клїтин і тканий, передовсїм процеси, що провадять до знидїня тканий. Ся Фіґ. 6 *e*, є для нас ще з иньшого згляду дуже важною: именно на нїй є наглядно увиднений факт, який ми в многих місцях констатували, а чого імовірно Афанассієв не постеріг, именно, що множба ядер в концентричних тїльцях слїдує не лиш виключно на счот endothelium, але також і tunica accessoria причиняє ся в великій мірі до побільшеня числа ядер. Хочби отті чотири ядра, що прилягають зовнї до концентричного тїльця і котрі нїяк не є продуктом endothelium, насувають нам повисшу гадку.

Концентричні тїльця в пізних стадиях зникають. Именно їх клїтини ендотеліальні зливають ся мовби в одну безвиразну масу, що відтак приймає вид дрібно крупнистий і розпадає ся на дрібненькі зеренця. Найвчаснїйше однак підлягають процесови розпаду самі ядра, що відтак випадають з клїтин і осадовують ся в окружаючій ткани яко дрібно зерниста, мілка маса, що як раз прискорює патольоґічні зміни, а тим самим і нидїнє концентричних тїлець, колишних судин кровних. Очевидна річ, що в місце концентричних тїлець, як в загалї в місце усеї заникаючої глези являє ся слабка лучноткань, що тут розростає ся надзвичай швидко.

Казаринов[1]), що в своїй розвідцї о глезї силкує ся збити погляди Афанассієва, а сильно підпирає погляди Ґончарукова, мовби то концентричні тїла були останками клїтин наболонних, не знаходить в нас приклонників. Противно результати, до яких ми дійшли по дуже основних дослїдах над глезою риб, рішучо промавляють против Ґончарукова і Казаринова, а клонять ся на сторону Афанассієва[2]).

(Розвідку Казаринова хотїв я дістати в ориґіналї і робив всякі заходи, щоби єї получити. Коли однак мій труд в тім зглядї зістав без'успішним, бо навіть в Науковім Товаристві ім. Шевченка сказано менї, що годї... як нема єї в бібліотецї Товариства, я покористував ся тим, що попало в руки, а се є звітом професора Арнштайна (Arnstein) в „Jahresberichte für Anatomie und Entwickelungsgeschichte von G. Schwalbe. 1900", що наводжу отсе в дословнім видї: „In dem adenoiden Gewebe der Follikel der Thymus findet der Autor epitheloide Zellen einzeln oder in Gruppen; nebenbei findet er häufig junge Hassal'sche Körperchen, die aus ähnlichen Zellen bestehen, daher verwirft der Autor die Ansicht von Afanassiew u. adoptirt die Ansicht von Gontscharukow (Russ. Archiv f. Pathol., clinische Medic. u. Bacteriologie 1895), laut welcher die Hassal'schen Körperchen Reste des ursprünglich epithelialen Bildungsmaterials darstellen).

---

[1]) Kasarinow G. Zur Anatomie der Gl. Thymus Dissertat. St Peterburg. 1899.

[2]) Affanassiew, Weitere Untersuchungen über den Bau und die Entwickelung der Thymus und der Winterschlafdrüse der Säugethiere. (Archiv f. microskop. Anat. Bd. XIV).

Дальшим дуже важним фактом, нами по раз перший взагалї сконстатованим, є переміна лєвкоцитів в червоні тїльця крови, що ми в глезї риб в перийодї єї інволюциї в великій мірі постерігали. Що глеза у риб є в можности витворювати червоні тїльця крови, сего нї котрий з повисше згадуваних авторів не слїдив. Schaffer[1]), котрого студиї в тім напрямі належать взагалї до найновійших дослїдів, прямо виключає участь глези (у риб) в твореню крови. „Der histologische Bau" — каже сей автор — „scheint meine Vermuthung, dass es sich auch hier um ein zur Bildung von Blutkörperchen in Beziehung stehendes Organ handle, nicht zu bestätigen und die einzige Analogie (роз. der Thymus der Fische) mit der Thymus der Säugethiere besteht in der innigen Verbindung von epithelialen und lymphoiden Zellen"... Ся гадка Шаффера, як також і повисше єго заперечене єствованя концентричних тїлець в глезї риб, зовсїм недоладні і доводять лише або злої методики в зладжуваню на ту цїль препаратів або взагалї доволї поспішної, поверхної роботи, що відтак довела єго до хибних результатів.

Ми на основі дуже точних помічаній дійшли до пересьвіду, що глеза gl. thymus риб не лиш тільки зовсїм гомольоґічна з глезою висших ссавців не винимаючи і чоловіка, але ми думаємо, що глеза риб, се є найнизших хребовців, задержала богато примітивних питомостий, яких вже годї добачити у висших звірят пр. у ссавців і через те она у риб представлає для помічателя більший інтерес науковий: морфольоґічні дослїди над глезою риб становлять властиву дорогу до пізнаня значеня і функциї сего орудя в тїлї зьвіринім взагалї.

Переміну лєвкоцитів в червоні тїльця крови бачили ми на многих препаратах; однак найвизначнїйші в тім зглядї образи получили ми з караса золотого (Carassius auratus) понад 6 cm довгого — особня, що находив ся в дуже пізній стадиї розвоєвій (се був примірник малий, що після запевнюваня торговця мав яких 7 лїт). Фіґ. 7 і 8, що зладжені саме із повисшої стадиї Carassius aur., на опак Шаффєрови — наглядно показують, „dass es sich hier um ein zur Bildung von Blutkörperchen in Beziehung stehendes Organ handelt".

Фіґ. 7. відрисована вірно при помочи camera lucida достатчає нам вельми богато материялу на піддержане нашої гадки. Именно бачимо тут: 1) і типові лєвкоцити *a* і типові червоні тїльця крови *b*;

[1]) Гляди стор. 3.

2) як найвиразнїйші форми перехідні поміж обома повисшими типами клїтин: лїмфатичні ядра, означені буквою *α*, вправдї зовсїм ще похожі на типові лєвкоцити (*a*), але вже відріжняють ся від тих послїдних тонесеньким пластиком плязми; другі ядра, означені буквою *β*, побільшили уже значно свою плязму і через те у своїм видї далеко відійшли від лєвкоцитів, хоть ядро їх все ще таки виявляє свою ґенетичну звязь з типовими лїмфатичними ядрами; відтак клїтини *γ*, що вже наближають ся до червоних тїлець — а на послїдку типові вже еритроцити *b*.

Те саме бачимо і на фіґ. 8, що представляє нам тож усї типи згаданих клїтин: з одної сторони (лєвкоцити) білі тїльця крови і червоні тїльця крови, з другої сторони посередні форми — усе те при сильнім побільшеню. Сей послїдний рисунок, зроблений також при помочи camera lucida, не з'ображає намоднотяглого поля, баченого в мікроскопі, але він є комбінациєю з кількох найхарактеристичнїйших партий, ілюструючих дуже наглядно найважнїйші етапи розвою червоних тїлець. Именно, коли глядимо на глезу (під мікроскопом), почавши від долїшних, підставових верстов що-раз то вище в гору, пересуває ся перед нашими очима цїлий ряд перехідних форм, так що, вийшовши від уложених в ряди лєвкоцитів, що находять ся тут зараз при оболонці горішної стїни ямини зявної, доходимо до як найкрасших типових форм червоних тїлець, залягаючих цїлими масами горішну полосу желези і прилягаючу (до неї) слабку лучноткань. (Замічу, що глеза в тій стадиї уже не виявляє жадної дефінїтивної форми, а лише представляє ся яко безподобна, з ріжних форм повисших клїтин зложена маса, котру наскрізь перестає сильно розвинена лучноткань).

Препарати дотичної стадиї (фіґ. 7 і 8) специяльно для квестиї переміни червоних тїлець становлять для нас неоцїнену вартість, а то вже хочби тому, що прямо треба особлившого щастя, щоби підхопити сей розвоєвий момент, котрий — як сконстатувалисьмо — у глезї не довго треває. Именно ми спрепарували дуже богато примірників, що на око видавали ся бути тої самої стадиї, що й повисша, однак в жаднім з них не получили ми так переконуючих і так інструктивних образів, бо всюди бачилисьмо глезу або у вчаснїйшій стадиї розвоєвій, де мала єще виразну грушковату чи палковату форму, або знов в стадиї значно пізнїйшій, де глеза ледви якимись насчадками питоменних елєментів була репрезентована.

З повисшою фіґ. 8 єсть в тїсній звязи також і слїдуюча фіґура 9, що нам представляє червоні тїльця крови в найпізнїйшій стадиї їх єствованя, а именно в стадиї їх вже цїлковитого розпаду на мілку,

дрібно зернисту субстанцию т. з. detritus. Сей образець, є також важним причинком до морфольоґії тїлець крови взагалї, а особливо до морфольоґії тїлець крови у риб, що для нас доселї є terra incognita.

Зібравши таким чином усе повисше сказане о глезї, а передовсїм, узглядниви усї три послїдні фіґури, відносячі ся до істориї червоних тїлець крови, являє ся ось що:

Глеза риб становить один з найперших орудий, що в перийодї розвою свого (з наболони) витворює лєвкоцити і підмагає ними увесь орґанїзм. Коли однак виобразують ся в тїлї риб иньші лїмфатичні орудя, що переймають на себе функцию глези, та послїдна стає для орґанїзма злишною і починає нидїти-заникати. Першим обявом нидїня єї є притуплене здібности клїтин наболонних в витворбі лїмфатичних клїтин, хотяй до послїдної хвилї інволюциї глези постерігаємо в тій послїдній значну скількість лєвкоцитів — значить ся: згадана здібність наболонних клїтин цїлком не уступила. Лїмфатичні клїтини одні входять до судин кровних, другі з них виходять взагалї (фіґ. 5), але без порівнаня більша їх скількість остає в тїлї глези. Питанє затим, яка судьба жде тих позісталих лєвкоцитів в глезї? Отже слїдує відповідь: они перемінюють ся (те саме імовірно дїє ся і з лєвкоцитами, що увійшли до судин) в червоні тїльця крови, які в глезї в стадиї єї інволюциї цїлими збитими масами (комплєксами) наспорюють ся.

Афанасієв, котрий також помічав велику скількість червоних тїлець крови в нидїючій глезї, не могучи знайти иньшої відповіди на задаване собі питанє, звідки они тут в такій масї взяли ся, поясню̀є собі сю появу тим, що се як раз тїльця крови, котрі виступили з судин кровних, перемінених на концентричні тїльця. Таке заключенє Афанасієва є оправдане о стільки, що Афанасієв, не бачучи переміни лєвкоцитів в червоні тїльця крови, а лише спосіб перетворби судин кровных в концентричні тїла (де судини в наслїдок розросту endothelium поменьшують — часами цїлковито — своє сьвітло і таким чином утруднюють кружбу крови), міг зовсїм спокійно приймати, що „Der Untergang der Thymusdrüse und die Veränderungen der Intima derselben bringen ausser der Bildung der concentrischen Körper Störungen in der Blutcirculation zu Stande, die sich durch das Auswandern einer grossen Zahl weisser und rother Blutkörperchen manifestiren“. Ми рішучо сеї гадки Афанасієва не подїляємо. Після нашої гадки виступленє червоних тїлець крови з судин, котрих endothelium і tunica accessoria (оболонка прилучна) не лиш погрубшали але й скремезнїли, є прямо фізично неможливе.

Тим паче не можемо приймити повисшого погляду Афанасієва, що нам походженє червоних тїлець крови, які помічаємо в глезї під кінець єї інволюциї у великих масах, є зовсїм знане, як се повисше (фіґ. 7 і 8) доказано. Але натомість годимо ся вповнї з Афанасієвим, що „Die Anhäufung einer grossen Zahl angequollener (гл. фіґ. 8) und vergrösserter Blutkörperchen im Follikel kann nicht ohne Einfluss auf das betreffende Gewebe bleiben; das Reticulum sowie die Lymphelemente werden von Seiten dieser Gebilde einem Drucke ausgesetzt, atrophiren in Folge dessen und zerfallen“.

Замічу єще, що червоні тїльця лише через певний час єствують в глезї в незміненій формі. По часї плязма їх і ядро приймають вид крупнистий і розпадають ся в мілкий зернистий detritus, котрий передовсїм приспішує до решти інволюцию глези, а поводує натомість скорий розріст лучноткани (роз. в місце глези).

Близші відомости що до анатомії і фізиольоґії глези (gl. thymus) подам в слїдуючій розвідцї, де будуть крім Cyprinoidei-в всякі иньші роди особливо риб морских узгляднені. Стация зоольоґічна в Терстї, куди отсе в половинї вересня с. р. під проводом ВП. професора дра О. Нусбавма в наукових цїлях виїзджаю, єсть спеціяльно для сеї студиї догідним місцем; тож надїю ся зібрати богатий материял, щоби основнїйше підперти мої повисші заключеня та приспорити нових помічаній в тім предметї так займавім.

Повисша праця провожала ся в робітнї анатомії порівнательн о ц. к. унїверситета у Львові під наглядом мого Високоповажаного Професора Д-ра О. Нусбавма, котрому отсе складаю прилюдно щиро-сердечну подяку за ласкаві вказаня і інструкциї, якими підпомагав мене як в зладжуваню препаратів, так і в призбираню дотичної літератури. Руска термінольоґія і номенклятура тут ужита після проф. Івана Верхратского.

У Львові, дня 15. липня 1901.

Поясненя до таблиці.

Fig. 1. Часть стрілового проріза через засновок глези зарода пструга (1,5 cm. довгого). *c* cutis lamella. *r* в ряди уставлені, розповільнені клїтини наболони. *l* білі тїльця крови. Oc. 4, S. homog. Imm. $^1/_{15}$b. Mikr. Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 2. Стріловий проріз через лївий засновок глези (thymus) молодого, 2,6 cm довгого караса звичайного. *b* розповільнена лучноткань. *k. e.* наболонь ями зявної. *k* хрястний завязок костий черепних. *m. m* мяз.

T Thymus. Oc. 2, S. 3. Mikr. Merk. u. Ebell. рисовано при camera lucida.

Fig. 3. Частина повизшого препарата (як фіг. 2) з місця * при сильнїйшім побільшеню. *g* судинка кровна. *b* елємети лучнотканні. *l* лєвкоцити (білі тїльця крови). Oc. 4, S. homog. Imm. $^1/_{15}$ b. Mikr. Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 4. Частина стрілового проріза через засновок глези Carass. vulg. 2,2 cm довгого. *k. e.* наболонь горішної стїни ямини зявної. *r* в ряди уложені клїтини наболонні. *l* лєвкоцити. Oc. 2, S. hom. Imm. $^1/_{15}$ b. Mikr. Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 5. Стріловий проріз через глезу 3 cm довгого караса золотого. *T* глеза. *b* вільна лучноткань. *k* кости черепні. *k. e* наболонь криші ями зявної. *l* лєвкоцити, що виступили громадно з глези і розсипались в окружаючій вільній лучноткани. *j* ямини повсталі в тїлї thymus, що знаменають початок єї інволюції. *n* шпара, відділююча підставу thymus від наболони горішної стїни ями зявної. *p* підставові пласти thymus. *m* мяз. *x* місце, що виглядає як прірва межи підставою а горішною частию thymus, походить із-за того, що проріз через тїло глези є поведений більш лятерально, так що мікротом не дійшов еще до вузонької немов шийки thymus.

Oc. 2, S. homog. Immers. $^1/_{15}$ b. Mikroskop Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 6. Соосередні тїльця a, b, c, d, e. Oc. 4, S homog. Imm. $^1/_{15}$ b. Mikr. Merk. u. Ebell. (tot. tubus.). Рисовано при camera lucida.

Fig. 7. Частина глези при підставі, з'ображаюча білі тїльця крови (лєвкоцити) *a*, червоні тїльця крови *b* і відтак всякі перехідні форми лїмфатичних клїтин в еритроцити *α*, *β*, *γ*. Oc. 2, S. homog. Imm. $^1/_{15}$ b. tot. tubus. Mikr. Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 8. Зкомбінований рисунок, що нам з'ображає лєвкоцити *l*, перехідні форми лєвкоцитів в червоні тїльця крови *l'*, *l''*, і відтак ріжні стадиї червоних тїлец крови *r*, r', r'', r''', r''''. Oc. 4, S. hom. Imm. $^1/_{15}$ b. tot. tubus Mikr. Merk. u. Ebell. Рисовано при camera lucida.

Fig. 9. Червоні тїльця крови, що, осягнувши найвизшу ступінь розвитку, розпадають ся, творячи мілку нїжно крупнисту субстанцию (detritus). Oc. 2. S. hom. Imm. $^1/_{15}$ b. tot. tubus. Рисовано при camera lucida.

Fig. 1.

Fig. 2.

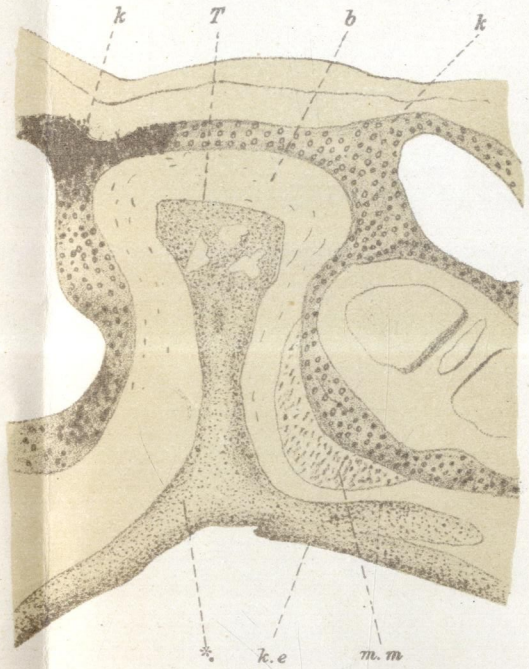


Fig. 3.

Fig. 4.

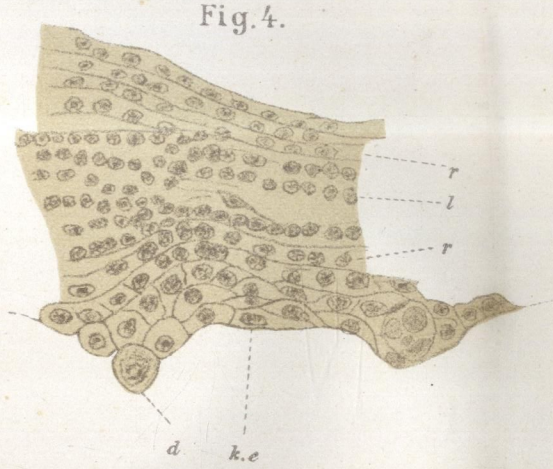


Fig. 5.

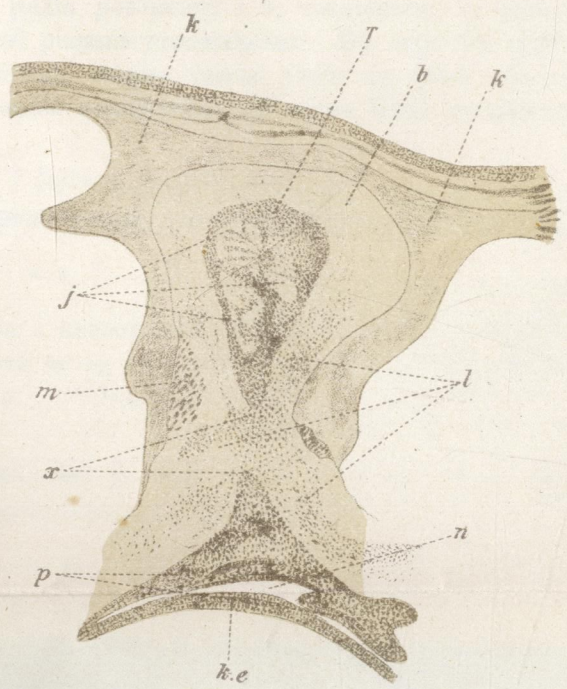
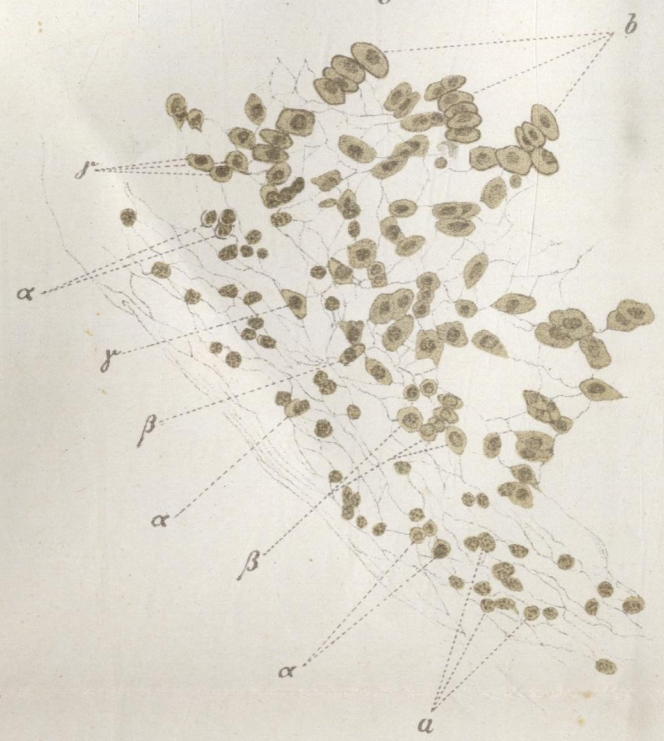


Fig. 6.

Fig. 7.



k.e

Fig. 8.

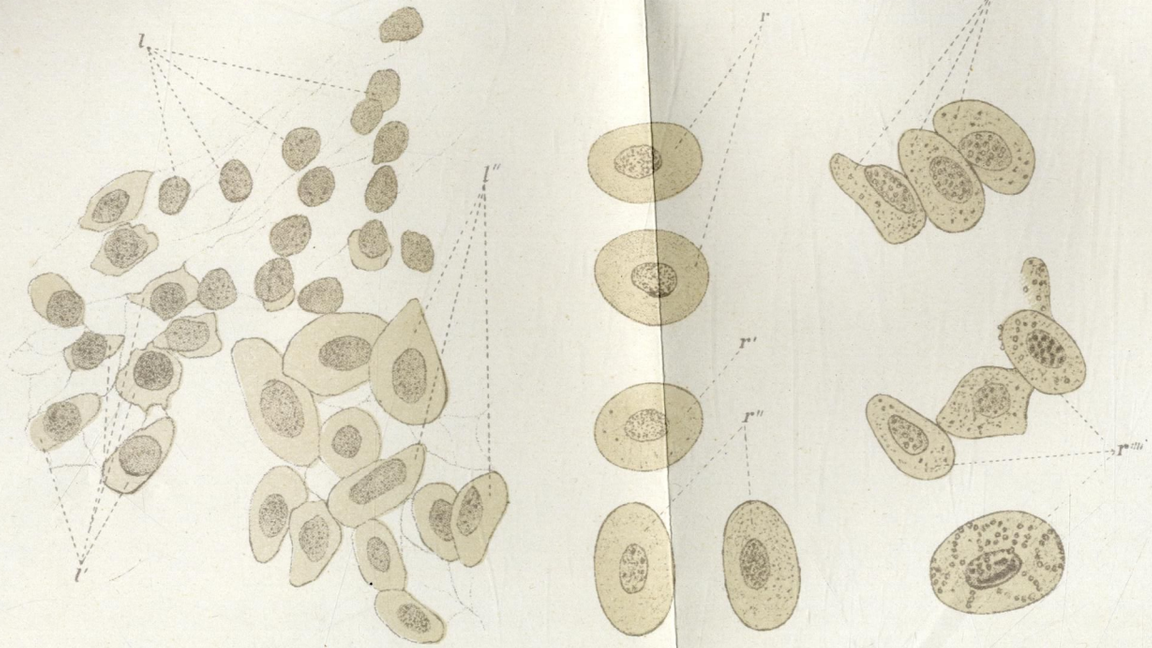
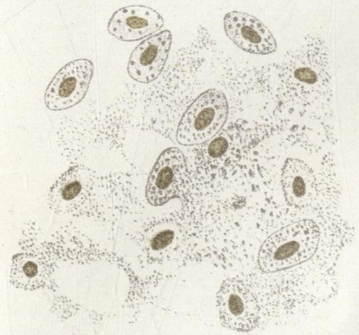


Fig. 9.



LIT. A. PRZYSZLAK LWÓW.

Найновійші праці з теорії функций аналїтичних

подав

Володимир Левицкий.

—▬—

Найновійші праці в теорії рядів степенних обнимають головно три проблєми: значінє рядів розбіжних, узагальненє ряду Taylora та захованє ся ряду на обсягу збіжности. В послїдних двох роках появило ся дуже много цінних праць, що обнимають згадані проблєми; найважнїйші є праці Borel'a, Fabry, Phragmén'a, Painlevé, Mittag-Leffler'a, Pringsheim'a та много иньших. З праць тих хочу звернути увагу головно на праці Mittag-Leffler'a та Pringsheim'a, що появились в р. 1900; но не можу нїяк поминути славної конкурсової роботи Borel'a: Mémoire sur les séries divergentes (Annales de l'École normale 1899. ст. 1—136), де сей знаменитий ґеометр займає ся значінєм рядів розбіжних і їх численними застосованями, особливо в теорії рівнань ріжничкових. Не беру ся зовсїм подавати змісту сеї праці, зверну однак увагу на дуже красне твердженє з теорії функций аналїтичних, до якого Borel дійшов в сій роботї. Є оно таке:

Наколи $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots$

є функциєю аналїтичною, а єї долученою функциєю є функция

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \cdots + \frac{a_n z^n}{n!} +$$

то доконечною і достаточною условиною, щоби функцию $f(z)$ можна було перевести по за лук $\alpha\beta$ кола збіжности, є, щоби істнувало число додатне $\varrho > 1$ таке, що для $|z| = \varrho$ добуток

$$e^{-a} F(az)$$

стремить одностайно до зера, наколи a росте in inf. Очевидно:

$$F(az) = a_0 + \frac{a_1 za}{1!} + \frac{a_2 z^2 a^2}{2!} + \cdots\cdots$$

1. Mittag-Leffler впроваджує в своїй праці: „Sur la représentation analytique d' une branche uniforme d' une fonction monogène“ (Acta matem. т. XXIII. ст. 43—62 і т. XXIV. ст. 183—204 і ст. 205—244) нове поняте т. зв. звізди. На площі x маєм сталу точку a; з неї поведім луч (пів-луч) l і обернім єго раз довкола a та на кождім положеню луча зазначім однозначним способом таку точку a_1, що $|a_1 - a|$ є більше, як певне число додатне; $|a_1 - a|$ може бути навіть безконечно велике. Наколи $|a_1 - a|$ є скінчене, то з площі x вилучимо ту часть луча, яка іде від a_1 до безконечности. Той засяг, який остане, наколи поведемо всї тятя на пл. x, називає Mittag-Leffler звіздою; точка a є єї середоточкою, a_1 вершками. Одна звізда є вписана в другу, наколи єї всї точки лежать в другій, а вершки обох є спільні. Наколи маєм числа сталі: F(a), $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a)$, ..., що підлягають правилу Cauchy т. є. що границя $\left| \sqrt[\mu]{\frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)} \right|$ є скінчена, то згадана звізда A є їх звіздою основною.

З даної звізди E можемо дістати нові звізди $E^{(n)}$, де n є якесь дане число додатне, слїдуючим способом. Возьмім число додатне r достаточно мале і на лучу l, що виходить з a, відмірмо (n—1)r; кожде коло зачеркнене з якої небудь точки того луча, заключає в собі часть звізди E. Наколи горішна границя для r є ϱ і наколи на l відміримо довгість $n\varrho$ і обернемо l раз довкола a, дістанемо звізду $E^{(n)}$. Звізда $E^{(1)}$ є колом, звізда $E^{(n+1)}$ обнимає звізду $E^{(n)}$, а всї звізди $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, ... творять часть звізди E.

До $E^{(n)}$ долучимо n иньших звізд $E_\mu^{(n)}$ ($\mu = 1, 2, \ldots n$) в сей спосіб, що положимо $\varrho_\mu = \alpha^\mu \varrho$, де $0 < \alpha < 1$; конструкция є така, як в горі. Звізда $E_\mu^{(n)}$ лежить в $E_{\mu-1}^{(n)}$; $E_0^{(n)} = E^{(n)}$

Подібно як $E^{(n)}$, так само будуємо звізди $E^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ із звізди E о середоточцї a. На лучу l будуєм систем n колес о середоточках a η_1 η_2 $\ldots$ η_{n-1}; кожде коло переходить через середоточку попереднього; їх лучі є r, $r_1, \ldots r_{n-1}$. Середоточки η_1 η_2 $\ldots$ η_{n-1} вибираєм в сей спосіб, щоби кожде коло перетинало попереднє в точках стичности стичних ідучих з a, та щоби $|\eta_1 - a| = r_1 = r$. Наколи r є достаточно мале, то наш систем колес творить все часть звізди E;

наколи на l відміримо довгість $|\eta_{n-1} - a| + r_{n-1}$ і підставимо за r горішну границю ϱ та обернемо l раз довкола a, дістанемо звізду

$$E^{\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Наколи F(x) є функция аналїтична, то она є схарактеризована через елєменти F(a), $F^{(1)}(a)$, ... $F^{(\mu)}(a)$, ..., до яких стосує ся правило Cauchy, що границя $\left|\sqrt[\mu]{\frac{1}{\mu!}F^{(\mu)}(a)}\right|$ є скінчена. Галузь функциї F(x) є представлена через ряд степенний $\mathfrak{P}(x|a)$, а єї переведеня є в звізді A одностайні і правильні. Галузь ту значить Mittag-Leffler для звізди A через FA(x) і випроваджує цїлий ряд важних теоремів, які ми низше подамо (без довгих та глубоких доказів M. Lefflera).

a) Галузь FA(x) можна всюда представити рядом $\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)$, де $G_\mu(x)$ є функциєю цїлою:

$$G_\mu(x) = \sum_{\nu} c_\nu^{(\mu)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$$

сочинники $c_\nu^{(\mu)}$ є дані à priori независимо від вибору a і $F^{(\nu)}\left(\nu = 0, 1, \quad \infty; F^{(0)}(a) = F(a)\right)$.

Ряд $\Sigma G_\mu(x)$ є збіжний в кождій точцї звізди A, а одностайно збіжний в кождім обсягу в серединї звізди A. Сочинники $c_\nu^{(\mu)}$ мають ту вид:

$$c_\nu^{(\mu)} = \frac{1}{\mu^\nu} \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2! \cdots \lambda_n!},$$

а:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x) = \lim_{n=\infty} G_n(x|a),$$

де:

$$G_n(x|a) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2! \cdots \lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

Сей ряд $\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)$ не є однак одностайно збіжний в continuum, яке обнимає в собі один з вершків звізди A. В внутрі звізди A галузь FA(x), здефінїована тим рядом, є правильна кромі вершків звізди і має власність:

$$\left(\frac{d^\mu FA(x)}{dx^\mu}\right)_{x=a} = F^{(\mu)}(a) \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots$$

Повисший ряд можна уважати за узагальнене ряду Taylor'a.

б) Ряд $G_n(x|a)$, де F(a), $F^{(1)}(a)$, ... є величини, що підлягають праву Cauchy, інакше ся поводить для $n = 1, 2, 3$, а інакше для $n > 3$. В першім случаю істнує такий обсяг збіжности K — який одержимо через конструкцию звізди $E^{(n)}$ з огляду на A — що ряд є одностайно збіжний в кождім обсягу в внутрі K, но перестає бути збіжний для кождої точки внї K. Для $n > 3$ ряд не має такого обсягу K. В тім случаю можна через вибір величин F(a), $F^{(1)}(a)$, зробити, що ряд буде збіжний в точцї x', а не є збіжний в точцї x'', що лежить на лучу, сполучаючім a з x'.

в) Наколи возьмем ряд:

$$\sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\,(x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} = FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x),$$

де сочинники $c_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ не є залежні від F, а і x, то можна ті сочинники так вибрати, що ряд сей буде збіжний в певній звізді $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ і представляє там галузь $FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x)$, а внї тої звізди є розбіжний. Та звізда є вписана в звізду основну величин F(a), $F^{(1)}(a)$, і для $n \geqq \overline{n}$, де $\overline{n}$ є число додатне достаточно велике, замикає сама в своїм внутрі обсяг скінчений, що належить до внутра звізди A. Звізда $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ є кромі сего вписана в звізду $A^{\left(\frac{1}{n'}\right)}$ для $n < n'$.— Висше наведений ряд стаєсь для $n = 1$ рядом Taylor'a.

г) Возьмім ряд:

$$G_m^{(n)}(x|a) = \sum_{\lambda_1=0}^{m}\sum_{\lambda_2=0}^{m^2}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{m^n} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n},$$

то істнує звізда A_n вписана в A — одержимо єї так, як $E^{(n)}$ для

E — така, що $\lim_{m=\infty} G_m^{(n)}(x|a)$ є одностайно збіжна для кождого обсягу в внутрі A_n і представляє там галузь $FA_n(x)$.

д) Найже функция $f_\alpha(x, y, z, \ldots)$ змінних x, y, z, буде для безконечного числа вартостий α означена однозначно в обсягу K_α, так що кождий обсяг K_α стає ся тою самою частию обсягу K, наколи α зближає ся безконечно до границі α_0. Найже (x, y, z, ...) представляє якусь точку в внутрі K і най кожде число додатне σ відповідає иньшому числу додатному δ такому, що функції $f_{\alpha'}(x\ y\ z,\ldots)$ і $f_{\alpha''}(x\ y\ z,\ldots)$ мають значінє і що $|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma$, наколи $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$. Тодї $\lim_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(x\ y\ z\ldots)$ має точне значінє для кождої точки в внутрі, значить ся, є одностайно збіжне в точцї (x y z...).

Наколи $\alpha_0 = \infty$, то $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$ заступаємо через $\left|\frac{1}{\alpha'}\right| < \delta$, $\left|\frac{1}{\alpha''}\right| < \delta$.

Наколи $|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma$ в обсягу X, то кажемо, що $\lim_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(x\ y\ z\ldots)$ є в тім обсягу одностайно збіжне.

е) Возьмім під увагу звізду A з середоточкою a і звізду $A^{(\alpha)}$ співосередну з нею і вписану в ню ($0 < \alpha < 1$), та най звізда $A^{(\alpha)}$ буде утворена через функцию творячу:

$$f(u|\alpha) = K\ u\ e^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right] du}$$

де $\alpha = 1 - \beta$, $0 < \alpha \leqq 1$, а K стала независима від u.

Можна ту функцию f все так вибрати, що при достаточно малім α звізда $A^{(\alpha)}$ заключає в своїм внутрі обсяг даний уміщений в A, так що для $\alpha = 1$ звізда $A^{(1)}$ переходить в коло співосередне з A і вписане в A.

Ту функцию $f(u|\alpha)$ можна далї вибрати так, що, коли A є основною звіздою для величин F(a), $F^{(1)}(a)$..... ряд

$$S_\alpha(x|a) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x - a),$$

де:

$$G_\nu(x-a) = \frac{h_{\nu-1}^{(1)}}{1!(\nu-1)!} F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{h_{\nu-2}^{(2)}}{2!(\nu-2)!} F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots\cdots\cdots + \frac{h^{(\nu-1)}}{(\nu-1)!\,1!} F^{(\nu-1)}(a)(x-a)^{\nu-1} + \frac{h_0^{(\nu)}}{\nu!\,a!} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$$

і де $h^{(\mu)}_{\nu-\mu}$ $\begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \cdots \nu \\ \nu = 1, 2, \cdots \infty\end{pmatrix}$ є сталі додатні означені, зависимі тілько від функциї творячої — ряд $S_\alpha(x|a)$ має звізду збіжности ідентичну з $A^{(\alpha)}$, так що в внутрі $A^{(\alpha)}$ є:

$$FA(x) = S_\alpha(x|a),$$

а для $\alpha=1$ S_α переходить в ряд Taylor'a.

$\lim_{\alpha=0} S_\alpha(x|a)$ має звізду ідентичну зі звіздою A, а рівність

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} S_\alpha(x|a)$$

істнує всюди в внутрі A.

Дальше можна ту функцию $f(u|a)$ так вибрати, що:

1) Наколи α є дане, границя горішна вартостий $\left| \sqrt[n]{G_\nu(x-a)} \right|$ $(\nu = 1, 2, \cdots \infty)$ рівнає ся 1 для x в внутрі $A^{(\alpha)}$, а є більша як 1, коли x лежить внї звізди $A^{(\alpha)}$.

2) Наколи x лежить в основній звізді A, істнує все таке число $\alpha_0 < 1$, що для $\alpha < \alpha_0$ границя горішна $\left| \sqrt[n]{G_\nu(x-a)} \right| = 1$, а наколи x лежить внї A, границя та є більша як 1.

ж) Наколи E є звізда співосередна, гомотетична і в внутрі звізди $A^{(\alpha)}$, а x є точка на контурі E, а g границя горішна функций $|FA^{(\alpha)}(x)|$, коли x біжить по контурі, та наколи:

$$FA^{(\alpha)}(x) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a),$$

то:

$$|G_\nu(x-a)| < g \quad (\nu = 1, 2, \cdots \infty)$$

Най $\alpha = 1$, то наколи Θ є коло збіжности, а r число додатне меньше як обсяг збіжности ряду Taylor'a:

$$F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} F^{(\alpha)}(a)(x-a)^\nu,$$

та наколи g є границя горішна для $|F(x)|$ на колї o лучу r, а o середоточцї a, а точка x є на колї, то:

$$\left| \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \right| < g \qquad \nu = 1, 2, \cdots \infty.$$

2. E. Phragmén в ноті: „Sur une extension d'un théórème de Mittag-Leffler“ (Comptes rendus CXXVIII 1899. 1. ст. 1434) розширяє початкові теореми Mittag-Leffler'a слідуючим способом:

Маєм дану криву C правильну або утворену з кусників кривих правильних, яка не переходить ані через початок ані через безконечність, замкнену або ні; тятем є луч від початку до одної якоїсь точки. Найже f(x) буде функция аналїтична правильна в всїх точках кривої C. Phragmén дефініює обсяг B (анальоґічний до звізди M. Leffler'a). На кождім лучу, що іде з початку та перетинає криву C, відтинаєм по обох сторонах точки перетятя части тяглі, на яких функция f(x) остає правильна і то части можливо великі. Ті части луча задержуємо, решту відкидаємо; ті задержані части творять обсяг B.

Приймім, що по всїх дорогах в внутрі B f(x) дає ся інтеґрувати. Возьмім сталі:

$$c_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z^{\lambda+1}} \qquad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$$

і многочлени $G_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots\ldots$) такі, що $\lim G_\nu(x)$ стремить до границі $\frac{1}{1-x}$ в цїлім обсягу, в якім не ма точки, лежачої на оси дійсній між 1 і ∞ (incl. 1 і ∞).

Утворім символїчне вираженє:

$$G_\nu(xc) + \frac{1}{xc} G_\nu\left(\frac{1}{xc}\right),$$

де степені c^λ треба заступити вираженями c_α; тодї

$$\lim\left[G_\nu(xc) + \frac{1}{xc} G_\nu\left(\frac{1}{xc}\right)\right]$$

представляє функцию f(x) в цїлім обсягу B і є одностайно збіжний в кождім обсягу в внутрі B.

2. Досліди A. Pringsheima, поміщені в розправі: Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise“ (Sitz. Berichte der k. bayr. Akad. der Wissensch. in München 1900. ст. 37—100) займають ся захованєм ряду степенного на обводї кола збіжности, т. є. ряду:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu \qquad (a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i)$$

для $X = Re^{\vartheta i}$, де R є луч кола збіжности.

Розсліди ті коротко зреасумуємо, а іменно наведемо висліди, до яких Pringsheim доходить.

а. Наколи Σa_ν є властиво розбіжне, то границя $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X) = \infty$, де ϱ є дійсне додатне число меньше як 1. Властиву розбіжність ряду $\Sigma a_\nu = \Sigma (\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ розуміти треба в сей спосіб, що що найменьше один з рядів $\Sigma\alpha_\nu$ і $\Sigma\beta_\nu$ є розбіжний до $\pm \infty$.

Наколи $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ для якогось місця X має означену вартість, то ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$ мусить бути або збіжний або невластиво розбіжний.

Сума $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{\nu\vartheta i}$ є тоді збіжна, наколи границя $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho e^{\vartheta i})$ має означену вартість для якогось місця $e^{\vartheta i}$, а члени $(\alpha_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta)$ мають для себе (що найменьше для $\nu \leqq n$) рівні знаки, а так само члени $(\alpha_\nu \sin\nu\vartheta + \beta_\nu \cos\nu\vartheta)$.

б. Наколи ряд $\mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty} a_\nu x_\nu$ є збіжний для $|x| < r \leqq 1$, то істнують слідуючі дві трансформації:

$$\mathfrak{P}(x) = (1-x) \sum_{1}^{\infty} s^\nu x^\nu$$

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} s'_\nu x^\nu + (1-x) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu+1} s'_r x^r$$

де:

$$s_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\nu} a_\lambda, \qquad s'_r = \sum_{\lambda=1}^{r} \lambda a_\lambda .$$

Наколи границя $\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = 0$, де $s_n = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa$, то тоді є також:

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho) \sum_{r=1}^{\infty} a_r \varrho^r = 0.$$

в. Конечною і достаточною условиною, щоби $\sum_{1}^{\infty} a_\nu$ була збіжна, є условини:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varrho^\nu = A \text{ (означене число)}$$

і:

$$\lim \frac{s_n'}{n} = 0. , \qquad \text{де } s_n' = \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda\, a_\lambda.$$

Обі ті умови подав вже давнїйше Tauber (Monatshefte für Math. і Phys. 1897.) Можна їх розширити і виповісти дуже важний теорем.

Щоби ряд $\mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n x^n$ був збіжний для якогось місця $x = X$ (на обводї обсягу збіжности), є конечною і достаточною условиною, щоби границя $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ мала скінчену вартість, та щоби:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\left(1\, a_1\, X + 2\, a_2\, X^2 + - + n\, a_n X^n\right) = 0.$$

Наколи $\lim_{n=\infty} n\, a_n = 0$, то ряд $\mathfrak{P}(x)$ є збіжний для кождої точки $x = X$ такої, що $|X| = 1$, наколи там $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ має скінчену вартість.

Най $\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$ має коло збіжности $|x| = 1$, то для $|x| < 1$ дефініює сей рад однозначну і тяглу функцию, яку назначимо $f(x)$. На обводї кола є:

$$f(X) = \lim_{\varrho=1} f(\varrho X) = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X).$$

Для такого місця X, де $\lim \mathfrak{P}(\varrho X)$ не істнує, є $f(X)$ неозначена. Pringsheim називає ту функцию $f(x)$ функциєю приналежною до $\mathfrak{P}(x)$ (zugehörig), а $f(X)$ приналежною функциєю крайною (zugehörige Randfunction).

Є можливий такий случай, що ряд степенний $\mathfrak{P}(x)$ збіжний в колї $|x| = 1$ має на кождім лучу та здовж цїлого обводу скінчену та тяглу крайну функцию $f(X)$, а мимо того $f(x)$ в окруженю нїякого місця X не буде ані тягла ані скінчена. Пр. функция $f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x-1}\right)^4}$ є на кождім лучу та здовж цїлого обводу без винятку тягла, а мимо то не є ані тягла ані навіть скінчена для найменьшого окруженя точки $x=1$.

Вже давнїйше доказав Pringsheim (Sitz. Ber. der k. bay. Akad. 1895. ст. 337), що ряд степенний $\mathfrak{P}(x)$, який є еще в загалї збіжний і на місцях $X = Re^{\vartheta i}$, є в загалї рядом Fourier'a. Тепер на основі сего випроваджує нові твердженя.

г. Наколи функция Fourier'a $f(x)$, яка належить до ряду: $\mathfrak{P}(x) = \Sigma a_\nu x^\nu$, а також і квадрат ві беззглядної вартости, дає ся *в* колї збіжности і *на* нім одностайно інтеґрувати, то тоді з б і ж н и й є р я д $\Sigma |a_\nu|^2$, а також ряд $\Sigma C_\nu^{-\frac{1}{2}} |a_\nu|$, де ΣC_ν^{-1} є який-небудь збіжний ряд з додатними членами.

З того слїдує дальше дуже важне твердженє:

Ряд степенний $\Sigma a_\nu x^\nu$ є також на обводї кола збіжности а б с о л ю т н о з б і ж н и й, наколи приналежна до него функция Fouriera $f(x)$ (в колї 1) має в окруженю точок обводу збіжности єще в загалї тяглу походну таку, що ві квадрат стає ся безконечностию що-найбільше на такій скількости тих точок ряду низшого як перший, яка ся дає зредукувати.

д. Далї займає ся Pringsheim рядами степенними, які є на обводї збіжности **без винятку** (ausnahmslos) з б і ж н і, а мимо того **не є абсолютно** з б і ж н і. Пр. така є функция $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$; $f(e^{\vartheta i})$ є скінчено-нетягла. Такі ряди, які б е з в и н я т к у, але у с л і в н о є збіжні н а колї $|x| = 1$, мають вид:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} x^\nu ,$$

де ε_ν є відповідно ± 1, а M_ν є ряд додатних чисел, які одностайно ростуть в безконечність, так що $M_\nu > \nu$, а $\Sigma \frac{1}{M_\nu}$ є розбіжна; пр. $M_\nu = \frac{1}{\nu \log \nu}$. Можна одержати ряди, що ся заховують анальоґічно, наколи M_ν так виберем, що $\Sigma \frac{1}{M_\nu^2}$ є з б і ж н а; а іменно виберем M_ν так, що:

$$M_\nu = \sqrt{\nu}\, m_\nu , \quad \text{де} \lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty ,$$

а:

$$\varepsilon_\nu = (-1)^{\sqrt{\nu}-1}$$

Тодї покаже ся, що к о н е ч н о ю условиною, щоби ряд Σa_ν був збіжний, де $a_\nu = (-1)^{\sqrt{\nu}-1} \frac{1}{\sqrt{\nu}\, m_\nu}$, є, щоби $\lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty$, а д о с т а т о ч н о ю, щоби m_ν росло одностайно, а $\Sigma \frac{1}{\nu\, m_\nu}$ була збіжна.

Тоді ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu X^\nu$, де a_ν має повище значіне, а $|X| = 1$, є збіжний без винятку. Но ряд сей буде условно збіжний, наколи m_ν так виберем, що вправді $\Sigma \frac{1}{\nu\, m_\nu}$ є збіжна, але сума $\Sigma \frac{1}{\sqrt{\nu}\, . m_\nu}$ є розбіжна. Пр. вистарчить покласти:

$$m_\nu = (\sqrt{\nu})^\varepsilon, \quad (\lg \nu)^{1+\varepsilon}, \quad \lg \nu\,(\lg \nu)^{1+\varepsilon}, \ldots\ldots, \text{ де } \varepsilon > 0.$$

Істнують отже ряди степенні $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty a_\nu x^\nu$ з обсягом збіжности 1, які для $|x| = 1$ є еще збіжні без винятку, але услівно; противно $k = 2$ є найменьший виложник, для якого $\Sigma |a_\nu|^k$ є збіжна, отже сума $\Sigma a_\nu^k X^k$ є абсолютно збіжна.

e. В кінци займає ся Pringsheim звязею, яка заходить між дійсною а мнимою частию крайної функциї.

$$f(\varrho e^{\vartheta i}) = \Sigma (\alpha_\nu + \beta_\nu) \varrho^\nu e^{\nu\vartheta i} = \varphi(\varrho\vartheta) + i\psi(\varrho\vartheta) \quad \varrho < 1.$$

де:

$$\varphi(\varrho\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu \cos \nu\vartheta - \beta_\nu \sin \nu\vartheta)\, \varrho^\nu$$

$$\psi(\varrho\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\beta_\nu \cos \nu\vartheta + \alpha_\nu \sin \nu\vartheta)\, \varrho^\nu$$

Ряд $\varphi(\vartheta) = \Sigma (\alpha_\nu \cos \nu\vartheta - \beta_\nu \sin \vartheta)$ (отже для $\varrho = 1$ на обводї обсягу) є збіжний або властиво розбіжний, після того, чи гранична вартість:

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{n=\infty} \int_0^\pi \left\{\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta - \alpha)\right\} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}\, (1 - \cos n\alpha) d\alpha$$

випаде скінчена, чи безконечно велика. Конечним і достаточним для збіжности ряду $\varphi(\vartheta)$ є, щоби

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta - \alpha)}{\alpha}\, (1 - \cos n\alpha)\, d\alpha$$

рівночасно з ε стреміло до зера.

Ряд $\varphi(\vartheta)$ є властиво розбіжний, наколи $\psi(\vartheta+\alpha) - \psi(\vartheta-\alpha)$ має для $\alpha < \varepsilon$ сталий знак, а для $\lim \alpha = 0$ стремить до зера не сильнїйше, як $\left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \lg_2 \frac{1}{\alpha} \cdots \lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-1}$ при так великім k, як хочемо.

Ряд степенний $\mathfrak{P}(x)$, якого функция крайна $f(e^{\vartheta i})$ дає ся абсолютно, а при переході до обводу кола збіжности в загалї одностайно інтеґрувати, є властиво розбіжний на всїх місцях перерви функциї $f(e^{\vartheta i})$ (Sprungstellen). Місце перерви є таке, де:

$$\underline{\lim_{\alpha=0}}\ \psi(\vartheta+\alpha) > \overline{\lim_{\alpha=0}}\ \psi(\vartheta-\alpha), \quad \text{або} \quad \overline{\lim_{\alpha=0}}\ \psi(\vartheta+\alpha) < \underline{\lim_{\alpha=0}}\ \psi(\vartheta-\alpha).$$

Ряд степенний $\mathfrak{P}(x)$, який для якогось тяглого кусника свого обводу є збіжний, ріжнить ся — яко ряд зложений з двох від себе залежних рядів Fourier'a — від звичайного ряду Fourier'a в своїй істоті через се, що его сума [сума $\mathfrak{P}(x)$] ніколи не може мати скоків (перерв). За се не є виключене виступуване нетяглости без скоків, т. є. такої, де:

$$\underline{\lim_{\alpha=0}}\ \psi(\vartheta+\alpha) < \overline{\lim_{\alpha=0}}\ \psi(\vartheta \quad \alpha)$$

і

$$\overline{\lim_{\alpha=0}}\ \psi(\vartheta+\alpha) > \underline{\lim_{\alpha=0}}\ \psi(\vartheta-\alpha).$$

Ряд $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ є збіжний на кождім місди ϑ, де дїйсна або мнима часть функциї $f(e^{\vartheta i})$ є тягла та має міру тяглости, яка сповняє (на право та лїво) умову:

$$|\psi(\vartheta \pm \alpha) - \psi(\vartheta)| \lesssim \left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \lg_2 \frac{1}{\alpha} \cdots \lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \left(\lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-\varrho} (\varrho > 0).$$

Göttingen, в марті 1901.

Додаток до теорії дробів тяглих та ґрупи модулової.

(Друга нота.)

Написав

Володимир Левицький.

1. В першій розвідці[1]) розслїджував я трансформації модулові форми:

$$Uz = -\frac{1}{a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{a} - \cdots - \frac{1}{a+z} = TS^a TS^a T \cdots TS^a z$$

де основні трансформації мають вид:

$$Sz = z + 1, \quad Tz = -\frac{1}{z} \quad (z = x + iy)$$

і показав, як можна безпосередно обчислити таку n-кратну ітерацию без звиваня дроба тяглого. Взір, який я подав, дає спроможність повисший тяглий дроб обчислити без знаня вартостий приближених.

Тепер маю намір піддати розслїдам зовсім загальний случай модулових трансформаций:

$$Uz = TS^{a_n} TS^{a_{n-1}} TS^{a_{n-2}} T \cdots TS^{a_1} z \qquad 1)$$

і

$$Uz = S^{a_n} TS^{a_{n-1}} TS^{a_{n-2}} T \cdots TS^{a_1} z \qquad 2)$$

---

[1]) Збірник мат.-природ. т. IV. зош. 2.; також Monatshefte für Math. u. Phys. p. XI. ст. 118 sqts. (Wien).

(a_n, a_{n-1}, ... числа цїлі дїйсні), отже розслїдити дроби тяглі форми:

$$Uz = -\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}} - \cdots - \frac{1}{a_1 + z}$$

і

$$Uz = a_n - \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}} - \cdots - \frac{1}{a_1 + z}$$

Ті розслїди дадуть нам вигідні форми до обчисленя повисше наведених дробів тяглих, зглядно дадуть нам можність найти місце, до якого загальна модулова трансформация переносить точку z півплощі.

2. Наколи означимо дроб тягний:

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}} - \cdots - \frac{1}{a_1 + z}$$

через $\varphi_n(z)$, дістанемо, як се очевидно, слїдуючу реляцию:

$$a_{n+1} - \varphi_n = \frac{1}{\varphi_{n+1}} \qquad 3)$$

Впровадьмо виражене:

$$\frac{1}{\varphi_n \varphi_{n-1} \varphi_{n-2} \cdots \varphi_1} = F_n(z) \qquad 4)$$

то після 3) дістанемо:

$$\frac{a_{n+1} - \varphi_n}{\varphi_n \varphi_{n-1} \cdots \varphi_1} = F_{n+1}(z)$$

або, що на одно виходить,

$$a_{n+1} F_n - F_{n-1} = F_{n+1}(z) \qquad 5).$$

На основі сеї реляциї можем виписати слїдуючі рівнаня в числї (n—2):

$$\left.\begin{array}{llll} a_n & F_{n-1} - F_{n-2} & = & F_n \\ a_{n-1} & F_{n-2} - F_{n-3} & = & F_{n-1} \\ a_{n-2} & F_{n-3} - F_{n-4} & = & F_{n-2} \\ a_{n-3} & F_{n-4} - F_{n-5} & = & F_{n-3} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ a_3 & F_2 - F_1 & = & F_3 \end{array}\right\} \qquad 6).$$

3. Щоби з сих рівнань виелїмінувати величини F_{n-1}, F_{n-2}, F_{n-3}, ..., творимо слїдуючі вираженя:

$$a_n = C_n^{(0)}, \quad C_n^{(-1)} = 1$$

$$a_{n-1}\, a_n - 1 = C_{n-1}^{(0)}\, C_n^{(0)} - C_n^{(-1)} = C_n^{(1)}$$

$$a_{n-2}\, C_n^{(1)} - a_n = C_{n-2}^{(0)}\, C_n^{(1)} - C_n^{(0)} = C_n^{(2)}$$

$$a_{n-3}\, C_n^{(2)} - C_n^{(1)} = C_{n-3}^{(0)}\, C_n^{(2)} - C_n^{(1)} = C_n^{(3)}$$

$$a_{n-t}\, C_n^{(t-1)} - C_n^{(t-2)} = C_{n-t}^{(0)}\, C_n^{(t-1)} - C_n^{(t-2)} = C_n^{(t)}$$

при чім треба покласти $n > t$; $n = 0$, 1 треба відкинути, бо в тім разї приходилоб в повисших вираженях a_0, отже член, якого в дробі тяглім нема.

Для $t = 0$ дістанемо з послїдного рівнаня:

$$C_n^{(0)} = C_n^{(0)}\, C_n^{(-1)} - C_n^{(-2)},$$

отже $C_n^{(-2)} = 0$;

для $t = -1$ дістанемо:

$$C_n^{(-1)} = C_{n+1}^{(0)}\, C_n^{(-2)} - C_n^{(-3)},$$

отже:

$$C_n^{(-3)} = -C_n^{(-1)} = -1$$

і т. д.; загально дістанемо:

$$C_n^{(-2s)} = 0, \quad C_n^{(-(4s+1))} = 1, \quad C_n^{(-(4s+3))} = -1 \qquad (n > 1).$$

Очевидно: $C_{-n}^{(t)} = 0$.

Наколи помножимо рівнаня 6) постепенно через:

$$1$$

$$C_n^{(0)}$$

$$C_n^{(1)}$$

$$C_n^{(2)}$$

$$C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(0)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(-1)}$$

$$C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(1)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(0)}$$

$$C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(2)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(1)}$$

$$C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(3)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(2)}$$

$$C_n^{(2)}\, C_{n-3}^{(n-7)} - C_n^{(1)}\, C_{n-4}^{(n-8)}$$

і додамо, то дістанемо сейчас:

$$F_n = (a_3 F_2 - F_1)(C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-7)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}) - (C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-9)}) F_2 \quad 7)$$

а що:

$$\varphi_n = \frac{F_{n-1}(z)}{F_n(z)},$$

то дістанемо *форму, якої шукаємо:*

$$\varphi_n(z) = \frac{(a_3 F_2 - F_1)(C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-1}^{(1)} C_{n-5}^{(n-9)}) - (C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-9)} - C_n^{(1)} C_{n-5}^{(n-10)}) F_2}{(a_3 F_2 - F_1)(C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-7)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}) - (C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-9)}) F_2} \quad 8).$$

Ся форма має однак лиш значіне для $n > 5$, бо на случай $n = 5$ виступав C_0, що ми виключили; що так є, слїдує з відси, що ми доперва пяте рівнанє помножили через такий чинник, як прочі, підчас коли $\varphi_5 = \frac{F_4}{F_5}$.

Для $n \leqq 5$, де отже скількість членів є дуже мала, можем від разу виписати слїдуючі очевидні форми:

$$\varphi_{3,} = \frac{F_2}{a_3 F_2 - F_1}, \quad \varphi_4 = \frac{a_3 F_2 - F_1}{(a_3 F_2 - F_1) C_4^{(0)} - F_2}, \quad \varphi_5 = \frac{(a_3 F_2 - F_1) C_4^{(0)} - F_2}{(a_3 F_2 - F_1) C_5^{(1)} - C_5^{(0)} F_2}.$$

На случай $n = 6$ виступають в загальній формі чинники $C_1^{(-4)}$ і $C_1^{(-3)}$, які ми вище вилучили. Наколи однак розважимо, що:

$$\varphi_6 = \frac{F_5}{F_6}$$

та порівнаємо вираженє:

$$F_5 = (a_3 F_2 - F_1) C_5^{(1)} - C_5^{(0)} F_2$$

з чисельником форми 8), то дістанемо сейчас:

$$C_1^{(-3)} = -1, \quad C_1^{(-4)} = -\frac{C_5^{(0)} + C_5^{(2)}}{C_5^{(1)}}$$

так що форма 8) дає ся застосувати для всїх тяглих дробів, де $n \geqq 6$. Форма та є особливо догідна для висших n, як се сейчас на примірах побачимо.

Наколи в $\varphi_n(z)$ змінимо знак, дістанемо трансформацию модулову 1), наколи обчислимо $\varphi_{n-1}(z)$ та утворимо вираженє $a_n - \varphi_{n-1}(z)$, дістанемо трансформацию 3).

4) Тепер випробуєм вірність форми 8) на примірах.

а) Най:

$$\varphi_6(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{3-\frac{1}{1-\frac{1}{1+z}}}}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{3-\frac{1+z}{z}}}}} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{z}{2z-1}}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2-\frac{2z-1}{3z-2}}} = \frac{1}{1-\frac{3z-2}{4z-3}} = \frac{4z-3}{z-1}.$$

Рахунок є отже досить довгий, як бачимо; а тимчасом на основі форми 8) дістанемо:

$$F_1 = 1 + z, \quad F_2 = z$$

$$\varphi_6 = \frac{(2z-1)\left(C_5^{(2)} C_2^{(-2)} - C_5^{(1)} C_1^{(-3)}\right) - \left(C_5^{(2)} C_2^{(-3)} - C_5^{(1)} C_1^{(-4)}\right) F_2}{(2z-1)\left(C_6^{(2)} C_3^{(-1)} - C_6^{(1)} C_2^{(-2)}\right) - \left(C_6^{(2)} C_3^{(-2)} - C_6^{(1)} C_2^{(-3)}\right) F_2}.$$

А що:

$$C_2^{(-2)} = 0, \; C_2^{(-3)} = -1, \; C_5^{(1)} = 3, \; C_5^{(2)} = 7, \; C_6^{(1)} = 1, \; C_6^{(2)} = 1, \; C_3^{(-1)} = 1,$$
$$C_1^{(-3)} = -1, \; C_1^{(-4)} = -3,$$

то вийде сейчас:

$$\varphi_6 = \frac{(2z-1)\,3 - (-7+9)\,z}{(2z-1) - z} = \frac{4z-3}{z-1}.$$

Інакше: трансформация:

$$TSTS^2TS^2TS^3TSTSz$$

переносить точку z півплощі в точку $\frac{3-4z}{z-1}$ тоїже.

б)

$$\varphi_6 = \frac{1}{2-\frac{1}{1-\frac{1}{3-\frac{1}{4-\frac{1}{2-\frac{1}{2+z}}}}}} = \frac{1}{2-\frac{1}{1-\frac{1}{3-\frac{1}{4-\frac{2+z}{3+2z}}}}} =$$

$$= \frac{1}{2-\frac{1}{1-\frac{1}{3-\frac{3+2z}{10+7z}}}} = \frac{1}{2-\frac{1}{1-\frac{10+7z}{27+19z}}} = \frac{1}{2-\frac{27+19z}{17+12z}} = \frac{17+12z}{7+5z};$$

а на основі 8) дістанемо:

$$F_1 = 2 + z, \quad F_2 = 3 + 2z$$

$$\varphi_6 = \frac{(10+7z)\,(C_5^{(2)} C_2^{(-2)} - C_5^{(1)} C_1^{(-3)}) - (C_5^{(2)} C_2^{(-3)} - C_5^{(1)} C_1^{(-4)})\,F_2}{(10+7z)\,(C_6^{(2)} C_3^{(-1)} - C_6^{(1)} C_2^{(-2)}) - (C_6^{(2)} C_3^{(-2)} - C_6^{(1)} C_2^{(-3)})\,F_2}.$$

А що:

$$C_2^{(-2)} = 0, \; C_2^{(-3)} = -1, \; C_3^{(-1)} = 1, \; C_5^{(1)} = 2, \; C_5^{(2)} = 4, \; C_6^{(1)} = 1, \; C_6^{(2)} = 1,$$

$$C_1^{(-3)} = 1, \; C_1^{(-4)} = -\frac{7}{2},$$

то дістанемо:

$$\varphi_6 = \frac{(10+7z)\,2 - (3+2z)}{(10+7z) - (3+2z)} = \frac{17+12z}{7+5z}.$$

в) Возьмім:

$$\varphi_9 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{1+z},$$

то обчислене через досить довгий рахунок дає на виклїд:

$$\frac{18+41z}{7+16z}.$$

Тимчасом після нашої форми 6:

$$F_1 = 1 + z, \quad F_2 = 1 + 2z, \quad a_3 = 2.$$

$$\varphi_9 = \frac{(a_3 F_2 - F_1)\,(C_8^{(2)} C_5^{(1)} - C_8^{(1)} C_4^{(0)}) - (C_8^{(2)} C_5^{(0)} - C_8^{(1)} C_4^{(-1)})\,F_2}{(a_3 F_2 - F_1)\,(C_9^{(2)} C_6^{(2)} - C_9^{(1)} C_5^{(1)}) - (C_9^{(2)} C_6^{(1)} - C_9^{(1)} C_5^{(0)})\,F_2}.$$

А що:

$$C_8^{(1)} = 5, \; C_8^{(2)} = 18, \; C_5^{(0)} = 1, \; C_5^{(1)} = 0, \; C_4^{(0)} = 1, \; C_4^{(-1)} = 1, \; C_9^{(1)} = 1,$$

$$C_9^{(2)} = 2, \; C_6^{(1)} = 3, \; C_6^{(2)} = -1,$$

то дістанемо:

$$\varphi_9 = \frac{-(1+3z)\,5 - (18-5)\,(1+2z)}{-(1+3z)\,2 - (6-1)\,(1+2z)} = \frac{18+41z}{7+16z}.$$

г) Най:

$$\varphi_{10} = \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{5+z}}}}}}}}}} = \frac{23+5z}{32+7z},$$

вислід одержаний через довгий рахунок.

Тимчасом після форми 8) в:

$$a_3 = 2,\quad F_1 = 5+z,\quad F_2 = 14+3z,$$

$$\varphi_{10} = \frac{(23+5z)\left(C_9^{(2)}C_n^{(2)} - C_9^{(1)}C_5^{(1)}\right) - \left(C_9^{(2)}C_6^{(1)} - C_9^{(1)}C_5^{(0)}\right)F_2}{(23+5z)\left(C_{10}^{(2)}C_7^{(3)} - C_{10}^{(1)}C_6^{(2)}\right) - \left(C_{10}^{(2)}C_7^{(2)} - C_{10}^{(1)}C_6^{(1)}\right)F_2}.$$

Ту в:

$$C_9^{(1)} = 0,\ C_9^{(2)} = -1,\ C_5^{(1)} = 1,\ C_5^{(0)} = 1,\ C_6^{(1)} = 0,\ C_6^{(2)} = -1,\ C_{10}^{(1)} = 1,$$
$$C_{10}^{(2)} = -1,\ C_7^{(1)} = 0,\ C_7^{(2)} = -1,\ C_7^{(3)} = -2;$$

отже:

$$\varphi_{10} = \frac{23+5z}{(23+5z)\,2-(14+3z)} = \frac{23+5z}{32+7z}.$$

Значить ся: трансформация $TSTSTSTSTSTSTS^2TS^2TS^3TSz$ **переносить точку** *z* **півплощі в точку** $y = \frac{23+5z}{32+7z}$.

Наколи всї члени $a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_1 = a$ **в рівні, маєм до дїла з специяльним случайом, який я вже в першій розвідцї розібрав.**

5. **Хочемо тепер розслїдити граничний случай** $\lim n = \infty$, **с. є. безконечно-многократну ітерацию трансформациї модуловоï. В тій цїли напишім реляцию 8) в слїдуючім видї:**

$$\frac{a_3F_2C_{n-1}^{(2)}\left(C_{n-4}^{(n-8)}-C_{n-4}^{(n-9)}\right)-C_{n-1}^{(1)}\left(C_{n-5}^{(n-10)}-C_{n-5}^{(n-9)}\right)F_2-F_1\left(C_{n-1}^{(2)}C_{n-4}^{(n-8)}-C_{n-1}^{(1)}C_{n-5}^{(n-9)}\right)}{a_3F_2C_n^{(2)}\left(C_{n-3}^{(n-7)}-C_{n-3}^{(n-8)}\right)-C_n^{(1)}\left(C_{n-4}^{(n-9)}-C_{n-4}^{(n-8)}\right)F_2-F_1\left(C_n^{(2)}C_{n-3}^{(n-8)}-C_n^{(1)}C_{n-4}^{(n-8)}\right)}.$$

А що для $\lim n = \infty$ **можна покласти:**

$$\lim_{n=\infty}\left(C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-4}^{(n-9)}\right) = 0.$$

$$\lim_{n=\infty}\left(C_{n-5}^{(n-10)} - C_{n-5}^{(n-9)}\right) = 0.$$

$$\lim_{n=\infty}\left(C_{n-3}^{(n-7)} - C_{n-3}^{(n-8)}\right) = 0.$$

$$\lim_{n=\infty}\left(C_{n-4}^{(n-9)} - C_{n-4}^{(n-8)}\right) = 0.$$

проте дістанемо:

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = \frac{C_{n-1}^{(2)} C_{n-4}^{(n-8)} - C_{n-1}^{(1)} C_{n-5}^{(n-9)}}{C_n^{(2)} C_{n-3}^{(n-8)} - C_n^{(1)} C_{n-4}^{(n-8)}},$$

а се вираженє дає, наколи в границї положимо:

$$\lim_{n=\infty} C_{n-4}^{(n-8)} = \lim_{n=\infty} C_{n-3}^{(n-8)} = \lim C_{n-5}^{(n-9)},$$

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = \frac{C_{n-1}^{(2)} - C_{n-1}^{(1)}}{C_n^{(2)} - C_n^{(1)}} = \lim_{n=\infty} \frac{(a_{n-1} a_{n-2} - 1)(a_{n-3} - 1) - a_{n-1}}{(a_n a_{n-1} - 1)(a_{n-2} - 1) - a_n},$$

отже на всякий случай дїйсну величину; безконечно многократна ітерация Uz дасть проте:

$$\lim_{n=\infty} Uz = \lim_{n=\infty} \frac{a_{n-1} - (a_{n-1} a_{n-2} - 1)(a_{n-3} - 1)}{a_n - (a_n a_{n-1} - 1)(a_{n-2} - 1)}$$

для трансформациї 1), а:

$$\lim_{n=\infty} Uz = \lim_{n=\infty} \left(a_n - \frac{a_{n-2} - (a_{n-2} a_{n-3} - 1)(a_{n-4} - 1)}{a_{n-1} - (a_{n-1} a_{n-2} - 1)(a_{n-3} - 1)} \right)$$

для трансформациї 2).

С. 6. Кожда зовсїм загальна модулова трансформация, зложена з безконечно многих ітерацийосновних трансформаций $S^n z$ і Tz (n цїлковите яке-небудь число), переносить *кожду* точку додатної півплощі z в безконечно близьке окруженє одної з обох точок граничних, які все є дїйсні та лежать на перворядній оси. В тих точках тратить отже ґрупа модулова свою нетяглість; а що a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... є які-небудь дїйсні числа, то з того слїдує, що ґрупа модулова на цїлій дїйсній оси є нетягла, що вповнї годить ся з звісним свойством сеї ґрупи.

Берлїн, в червни 1901.

Бібліографія та хроніка математично-фізична.

O. Stolz u. A. Gmeiner. Theoretische Aritmetik; I. Abth. Allgemeines, die Lehre von rationalen Zahlen (Leipzig, B. G. Teubner 1900, ст. IV + 98).

Є се один з підручників, які в послїдних часах фірма Teubner'a видає під заг. „Teubners Sammlung der Lehrbücher auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften". Підручник сей опертий є на поглядах Grassmann'a, Hankel'a, Hauber'a, Dedekind'a, Stolz'a і и., що в послїдних часах запанували в цїлій теорії чисел. Складаєсь він з чотирох частий; часть перша подає поняте величин і чисел, часть друга займає ся натуральними числами, часть трета обнимає аналїтичну, четверта синтетичну теорию чисел виміримих та теорию систематичних дробів. Книжочка ся може служити яко дуже добрий вступний підручник до висшої теорії чисел, а вартість єї підносять єще численні приміри, долучені до другої і четвертої части.

Max Simon. Euklid und die sechs planimetrischen Bücher (Leipzig, B. G. Teubner, 1901, ст. VIII + 141).

Є се переклад звіснх „*στοιχεῖα*" Евкліда, але переклад критичний, осмотрений численними поясненями та увагами; на початку подані дати біо- та бібліографічні про Евкліда та єго твори. Книжка та добра для тих, що займають ся істориєю математики та хотять пізнати близше того великого духа, якого вплив перетривав до нинїшного часу.

R. Fricke. Kurzgefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik; analytisch-functionentheoretischer Theil. (Leipzig, B. G. Teubner, 1900, ст. X + 520).

Книжка ся є випливом нового напряму в математиці, до якого почин дав головно Кляйн, а именно, щоби висліди теоретичні лучити по змозі з практикою (стосована математика). Сей напрям є консеквентно переведений в цілій книжці, яка в 7 розділах подає найважнійші висліди сучасної аналізи та стосує їх до практичних проблємів. Уступ перший посьвячений є рядам Fourier'a; є ту подана теория сочинників тих рядів, теорем їх збіжности (Dirichlet), інтеґрали Fourier'a та пристосованє сеї теориї до фізики. В другім уступі маємо теорию функций кулї та вальця, отже функциї Legendre'a $P_n(\mu)$, теорию коренів рівнаня $P_n(x) = 0$. Далї є теория розвиваня функциї $f(\vartheta\varphi)$ і якої-небудь функциї $\varphi(x)$ після функций кулї. Заслугує ту на увагу застосованє функций кулї до електростатики і задача Кеплєра, розвязана способом Bessel'a при помочи функций вальця. Розділ третий обнимає теорию функций зложених арґументів, отже функциї аналїтичні, ряди степенні, теореми Cauchy і Laurent'a, теорию точок особливих, представленє функций аналїтичних через добутки, функцию Γ, теорию функций многозначних та поверхнї Riemann'a; кромі сего є ту стереоґрафічна проєкция площи на кулю. В слїдуючім четвертім розділї є теория функций елїптичних після Jacobi і Weierstrass'a (отже функциї σ, ζ, p, Θ, sn, cn, трансформация Landen'a і и.); інтересне є ту відтворенє площі u через функцию p. Пятий розділ подає практичне застосованє функций елїптичних; отже многокутники Poncelet'a, лїнії ґеодетичні на елїпсоїдї оборотовій, поверхнї співогнискові 2. ряду, застосованє до теориї тепла, сферичний маятник, оборотовий рух тїла цїпкого і и. В розділї шестім є теория лїнїових рівнань ріжничкових о двох змінних; отже маємо ту теорем істнованя, систем основний інтеґралів, теорию обігу інтеґралів, рівнанє ріжничкове гипериґеометричне і функциї Z_1 і Z_2, функцию $\eta(z)$ і відтворенє півплощі z на коловий трикутник площі η та поверхнї Riemann'a, що належить до функциї $\eta(z)$, на сїть колових трикутників. В кінци послїдний уступ обнимає теорию рівнань ріжничкових I. ряду з кількома змінними; маєм ту теорию визначників функцийних, редукцию рівнань при помочи послїдного множника, рівнаня частні першого ряду та систем Jacobi. Далї є ту теория характеристичних поверхний (Developpable) рівнаня $f(x\,y\,z\,p\,q) = 0$, загальнійші рівнаня ріжничкові $f(z\,x_1 \cdots x_n\,p_1 \cdots p_n) = 0$, та теорем Poisson'a. Уступ сей кінчать

рівнаня ріжничкові динаміки. Кромі сего є ту в відповідних місцях подані таблиці функций кулї та функций елїптичних.

Як з повисше поданого короткого змісту видно, книжка ся є дуже добрим підручником для тих, що хотять загально поінформувати ся про модерну теорию функций; вказує она також на се, що теориї аналїзи, на перший погляд нїчим не звязані з практикою, можуть однак дуже користно придатись до розвязки практичних проблємів.

E. Borel. Leçons sur les fonctions entières. (Paris, Gauthier-Villars, 1900, ст. VI + 124).

Підручник сей представляє в коротких рамах теорию функций цїлих (переступних), до якої дав почин Weierstrass, а яку розширили в новійших часах Picard, Poincaré, Hadamard, Borel та иньші. Автор єї загально звісний учений, що послїдними часами розширив теорию функций аналїтичних знаменитими дослїдами над істотою рядів розбіжних, тому-то і єго книжка заслугує на тим більшу увагу. Складаєсь она з пятьох уступів. Перший представляє ідеї Weierstrass'a і єго теорию чинників первих, другий представляє ідеї Laguerre'a, отже понятє роду, функциї роду 0 і 1 та роду скінченого.

Третий уступ займає ся нерівностями Poincaré (Bull. soc. mat. 1883). Є ту три дуже важні теореми. 1) Наколи функция цїла:

$$F(z) = \left(1-\frac{z}{a_1}\right)\left(1-\frac{z}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\cdots = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots$$

є ряду p, а M(r) є єї найбільша беззглядна вартість на обсягу збіжности, то:

$$M(r) < e^{\alpha r^{p+1}}$$

наколи α є число додатне (дане à priori) а r достаточно велике.

2) В тих обставинах $A_m \Gamma\left(\frac{m+h+1}{p+1}\right)$ стремить до зера, де Γ є знаною функциєю з рахунку інтеґрального, а h яке небудь число додатне.

3) Наколи r є достаточно велике, то:

$$|F(z)| < e^{r^{p+\varepsilon}}, \quad |F(z)| < e^{\varepsilon r^p},$$

де ε є a priori дане.

В тім уступі впроваджує Borel поняте „майоранти“ себ то вираженя:

$$M(r) = |A_0| + |A_1|\, r + |A_2|\, r^2 + \cdots$$

Четвертий уступ є посьвячений розслїдам Hadamard'a (Journ. de Mathem. 1893), а особливо двом дуже важним теоремам тогож. Перший з них відносить ся до коренїв функциї і їх границї, а другий є ось який: „Наколи G(z) є канонїчним добутком чинників первих ряду p, а число ε є додатне, то можна найти безконечну скількість колес, яких лучі безконечно ростуть, а на кождім з них заходить нерівність:

$$|G(z)| > e^{-r^{p+\varepsilon}}$$

Пятий роздїл подає звісний теорем Picard'a о вартостях, яких функция не може приняти; кромі сего подає ту Borel загальний теорем слїдуючий: „Наколи F(z) є функция цїла така, що

$$|F(z)| < e^{e^{r^m}}$$

(де m є стала), а $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$, $\psi(z)$, $\psi_1(z)$ є функциї цїлї ряду скінченого такі, що:

$$\varphi\psi_1 - \varphi_1\psi \leqq 0,$$

то наколи $\varphi F - \varphi_1$ та $\psi F - \psi_1$ є ряду скінченого, то і F є ряду скінченого.“

На кінци книжки є додані три ноти. В них занимає ся Borel функциями з правильним та неправильним ростом.

Функция цїла F(z) ряду скінченого є тодї функциєю з правильним ростом, наколи M(r) т. є. вартість безглядна найбільша функциї F(z) для $|z| = r$ містить ся в інтервалї

$$e^{r^{\alpha}} < M(r) < e^{r^{\beta}}$$

(α і β дані), а сей інтервал спадає до зера; в противнім случаю зріст функциї є неправильний.

Так представляє ся в короткім нарисї зміст сеї інтересної книжки.

E. Weber. Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Leipzig, B. G. Teubner, 1900, ст. XI + 622).

Не так легко подати справозданє з сеї книжки; тілько там материялу, зібраного після новійших теорий та дослїдів Jacobi, Clebsch'a, Lie, Mayer'a, Frobenius'a та иньших ґеометрів, що теорию частних рівнань ріжничкових посунули вперед. Книжку ту подїлити можна на дві части; перша (розд. I—XI) обнимає т. зв. проблєм Pfaff'a, друга (розд. XII—XIV) обнимає теорию рівнань ріжничкових частних першого ряду нелїнїових.

В короткім вступі схарактеризований є проблєм Pfaff'a слїдуючим способом: „Визначити найзагальнїйший, зложений з m реляций систем рівнань зі змінними $z\, x_1\, x_2 \cdots x_m\, p_1\, p_2 \cdots p_m$, який можна розвязати що до тих змінних, та який сповняє повне рівнанє ріжничкове:

$$dz - \psi(z\, x_1\, x_2 \cdots x_m\, p_1 \cdots p_m)\, dx_1 - p_2\, dx_2 - \cdots - p_m\, dx_m = 0.$$

Pfaff доказав, що істнують всегда 2m функций

$$F_i(z\, x_1 \cdots x_m\, p_1 \cdots p_m) \text{ та } f_i(z\, x_1 \cdots x_m\, p_1 \cdots p_m) \quad (i = 1, 2, \cdots m),$$

таких, що:

$$dz - \psi dx_1 - p_2\, dx_2 - \cdots - p_m\, dx_m \equiv F_1\, df_1 + F_2\, df_2 + \cdots + F_m\, df_m.$$

Вираженє: $\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1 \cdots x_n)\, dx_i = 0$ називає ся виражененєм Pfaff'a.

Виложивши коротко теорию визначників та матиць (Matrix), теорию скісно-симетричних визначників, тверджења Grassmann'a, Frobenius'a, Sylvester'a та и. переходить автор в розд. II. до теориї рівнань лїнїових частних першого ряду, т. є. до понятя інтеґралів, характеристик та характеристичних кривих, трансформаций безконечно малих Lie Xf одночастної ґрупи та множника Jacobi; дальше є теория p-частного системи рівнань:

$$\sum_{1}^{n} \xi_{ks}(x_1\, x_2 \cdots x_n)\, \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots p),$$

p-частного системи Jacobi та метода інтеґрованя Jacobi. До системи рівнань ріжничкових лїнїових частних долучає (ад'юнґує) автор систем рівнань Pfaff'a, який необмежено можна інтеґрувати т. є. систем, до якого можна пристосувати всї безконечно малі перетвореня долученої громади:

$$Xf \equiv \sum_{1}^{n} \xi_s(x_1\, x_2 \cdots x_n)\, \frac{\partial f}{\partial x_s}.$$

Роздїл сей кінчать точні (exakte) рівнаня Pfaff'a, т. є. такі рівнаня:

$$V \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1\, x_2 \cdots x_n)\, dx_i = 0,$$

де ∇ може приняти вид:

$$\nabla \equiv \varrho(x_1\, x_2 \cdots x_n)\, d\varphi(x_1\, x_2 \cdots x_n),$$

та трансформация Mayer'a.

В слїдуючім роздїлї (III) є здефінїована кляса вираженя Pfaff'a.

Наколи: $\Delta = \sum_1^n a_i\,(x_1\, x_2 \cdots x_n)\, dx_i$,

то клясою того вираженя є ряд матиці:

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{array} \right\|, \text{ де } a_{ik} \equiv -a_{ki} \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}.$$

Кляса та є незмінником (інваріантою) для $\triangle$ з огляду на трансформації:

$$\left.\begin{array}{l} y^i = \varphi_i\,(x_1\, x_2 \cdots x_n) \\ x_i = \psi_i\,(y_1\, y_2 \cdots y_n) \end{array}\right\} (i = 1, 2, \cdots n)$$

До кляси відносить ся слїдуюче твердженє Frobenius'a:

Кляса k є для вираженя Pfaff'a париста або непариста після того, чи лїнїове рівнанє:

$$a_1\,\xi_1 + a_2\,\xi_2 + \cdots + a_n\,\xi_n = 0$$

слїдує з систему рівнань:

$$(\alpha) \qquad a_{i1}\,\xi_1 + a_{i2}\,\xi_2 + \cdots + a_{in}\,\xi_n = \xi_0\, a_i \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

чи ні. Кляса є непариста або париста після того, чи $\xi_0 = 0$ слїдує з (α), чи ні.

Роздїл IV. обнимає методи редукцийні Pfaff'a, Grassmann'a та Jacobi. Після твердженя Grassmann'a вираженє Pfaff'a Δ, наколи єго кляса $k = 2\lambda$ (париста), тодї і лиш тодї дасть ся звести до форми:

1) $$z_{\lambda+1}\, dz_1 + z_{\lambda+2}\, dz_2 + \cdots + z_{2\lambda}\, dz_\lambda,$$

де z є независимі функциї змінних $(x_1\, x_2 \cdots x_n)$. Наколи кляса $k = 2\lambda - 1$ (непариста), то Δ дасть ся звести до форми:

$$\sigma(z_1\, z_2 \cdots z_{2\lambda-1})\,(dz_\lambda + z_{\lambda+1}\, dz_1 + \cdots + z_{2\lambda-1}\, dz_{\lambda-1}),$$

де z має значінє як висше, а σ є певна функция.

В разї, коли $k = 2\lambda$, є тілько можлива редукция 1); коли $k = 2\lambda - 1$, можна дістати редукцию:

2) $$dz_\lambda + z_{\lambda+1}\, dz_1 + z_{\lambda+2}\, dz_2 + \cdots + z_{2\lambda-1}\, dz_{\lambda+1}$$

Се є основне твердженє (Fundamentalsatz).

Два вираженя Pfaff'a:

$$\Delta \equiv \sum_1^n i\, a_i\,(x_1\, x_2 \cdots x_n)\, dx_i$$

$$\Delta' \equiv \sum_1^n i\, a'_i\,(x'_1\, x'_2 \cdots x'_n)\, dx'_i$$

є рівноважні, наколи мають ту саму клясу; кляса та є співзмінником (ковариянтою) для якої-небудь трансформациї змінних $(x_1\, x_2 \cdots x_n)$.

До кождого вираженя Pfaff'a кляси k належать повні системи V і W, а именно:

V) $$X_s f \equiv \xi_1^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_n} \equiv 0$$

W) $$X_h f \equiv \Pi_{1,2\lambda+1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \Pi_{2\lambda,2\lambda+h} \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda}} - P \frac{\partial f}{\partial x_{2\lambda+h}} = 0$$

$$(s = 0, 1, \cdots n-k;\ h = 1, 2, \cdots n-k),$$

де:

$$P \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)} \begin{pmatrix} F_1\, F_2 \cdots F_\lambda\, f_1\, f_2 \cdots f_\lambda \\ x_1\, x_1 \cdots x_{2\lambda} \end{pmatrix} \text{(визначник функцийний)}$$

$$\Pi_{k,\nu} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)} \begin{pmatrix} F_1 \cdots F_\lambda\, f_1 \cdots f_\lambda \\ x_1 \cdots x_{k-1}\, x_\nu\, x_{k+1} \cdots x_{2\lambda} \end{pmatrix}$$

Тими системами займає ся уступ V. нашої книжки:

V є (n—k+1)-частним повним системом з інтеґралами

$$\frac{F_1}{F_\lambda},\ \frac{F_2}{F_\lambda},\ \cdots \frac{F_{\lambda-1}}{F_\lambda},\ f_1\ f_2 \cdots f_\lambda$$

а W (n − k)-частним повним системом з інтеґралами $F_1\, F_2 \cdots F\lambda\, f_1\, f_2 \cdots f\lambda$.

Ті два системи V і W є співзмінниками до Δ.

Наколи для непаристого k знаємо інтеґрали повного систему V, то послїдний k-тий інтеґрал найдемо з W через ріжничкованє, елїмінацию та ряд квадратур.

Далї ідуть дві методи редукцийні закриті (implicit) Clebsch'a та Lie (розд. VI). При їх помочи дістанемо нормальні форми ось-які:

для $k = 2\lambda$ є $\Delta \equiv F_1\, df_1 + F_2\, df_2 + \cdots + F_\lambda\, df_\lambda$

для $k = 2\lambda - 1$ $\Delta \equiv F_1\, df_1 + F_2\, df_2 + \cdots + F_{\lambda-1}\, df_{\lambda-1} + df_\lambda$

В уступі VII. про рівноважники інтеґралів рівнаня Pfaff'a находим тверджене:

Рівноважник інтеґралів рівнаня Pfaff'a

$$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \cdots + p_m\,dx_m = 0$$

обнимає що найменьше m рівнань. Найзагальнійший рівноважник, який не має виду:

$$p_1 = 0, \cdots p_m = 0$$

дістанемо, наколи до якого-небудь ν-частного системи рівнань виду:

$$\Psi_i\ (x_1\ x_2 \cdots x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots \nu)$$

долучимо тих $(m-\nu)$ рівнань, які повстають через еліїмінацию ϱ_i з рівнань $p_i = \sum_{k=1}^{n} \varrho_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \cdots m)$.

Наколи кляса рівнаня Pfaff'a є 2λ (або $2\lambda - 1$), то кождий рівноважник інтеґралів, що обнимає меньше як λ рівнань, є конечно особливий.

Возьмім нормальне рівнанє Pfaff'a:

$$dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - \cdots - p_m\,dx_m = 0,$$

то трансформация:

$$\left.\begin{aligned} z' &= Z\ (z\ x_1\ x_2 \cdots x_m\ p_1\ p_2 \cdots p_m) \\ x_i' &= X_i\ (z\ x_1\ x_2 \cdots x_m\ p_1\ p_2 \cdots p_m) \\ p_i' &= P_i\ (z\ x_1\ x_2 \cdots x_m\ p_1\ p_1 \cdots p_m) \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \cdots m)$$

називає ся стичною, наколи по вставленю тих вартостий дістанемо:

$$dz' - p_1'\,dx_1' - \cdots - p_m'\,dx_m' \equiv \varrho\,(z\,x_1\,x_2 \cdots p_1 \cdots p_m)\,(dz - p_1\,dx_1 - \cdots - p_m\,dx_m),$$

де ϱ не є ідентично зером.

Теорию і значінє тих трансформаций подає уступ VIII.

В дальшім уступі (IX) є подана метода редукцийна відкрита (explicit). Редукция вираженя Δ провадить до слїдуючих форм загальних. Наколи $f_1\ f_2 \cdots f_r$ $(r < n)$ є які небудь независимі функциї, а матиця

$$\left\| \begin{matrix} a_{ik} & a_i & f_{hi} \\ -a_k & 0 & 0 \\ -f_{kh} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

має ряд 2ϱ, то тодї і лиш тодї Δ можна представити в видї:

$$\Delta \equiv F_1\,df_1 + \cdots + F_r\,df_r + F_{r+1}\,df_{r+1} + \cdots + F_\varrho\,df_\varrho,$$

де $f_1\ f_2 \cdots f_\varrho$ є независимі, а в видї:

$$\Delta \equiv F_1\,df_1 + \cdots + F_r\,df_r + F_{r+1}\,df_{r+1} + \cdots + F_{\varrho-1}\,df_{\varrho-1} + df_\varrho,$$

наколи $f_1\ f_2 \cdots f_\varrho\ F_{r+1} \cdots F_\varrho$ є з собою звязані.

Роздїл X. стосує безконечно малу трансформацию до вираженя Pfaff'a. Наколи єго кляса k є непариста, а безконечно мала трансформация $Xf = \Sigma \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ сповняє ідентично реляцию $X\Delta = \varrho\Delta$ та належить до громади безконечно малих трансформаций долучених до Δ, тодї є завсїгди $\varrho \equiv 0$, а $Xf = \sum_{s=1}^{n-k} \varrho_s X_s f$, де:

$$X_s f = \xi_1^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n^{(s)} \frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad (s = 1, 2, \cdots n-k);\ \xi_1^{(s)}, \cdots \xi_n^{(s)}$$

є розвязками рівнань $\Sigma \xi_k a_{ik} = 0$, $(i = 1, 2, \cdots n)$.

Наколи кляса є париста, то тодї Xf має вид $\varrho X_0 f + \varrho_1 X_1 f + \cdots + \varrho_{n-k} X_{n-k} f$, де $\varrho\ \varrho_1 \cdots$ є які небудь функциї, $X_s f$ має значінє, як висше, а $\xi_1^{(s)}, \cdots$ є розвязками рівнаня $\Sigma \xi_k a_{ik} = \varrho a_i$.

Ідентичність Jacobi та Mayer'a кінчать сей уступ.

Далї іде (розд. XI) теория скінчених, однородних та неоднородних стичних трансформаций. При їх помочи маємо слїдуючу редукцию.

Наколи $2r-1$ змінних $y_1\ y_2 \cdots y_r\ q_1 \cdots q_{r-1}$ є звязані реляцією:

$$\varphi\,(y_1\ y_2 \cdots y_r\ q_1 \cdots q_{r-1}) = 0,$$

то вираженє Pfaff'a:

$$dy_r + q_1\,dy_1 + \cdots + q_{r-1}\,dy_{r-1}$$

можна звести до форми:

$$q_1'\,dy_1' + \cdots + q_{r-1}'\,dy_{r-1}' \text{ або } dy_r' + \sum_{s=1}^{r-2} q_s'\,dy_s'$$

після того, чи $\varphi = 0$ заключає в собі y_r чи ні.

Наколи же $2r$ змінних $y_1 \cdots y_r\ q_1 \cdots q_r$ є звязані реляцією:

$$\varphi\,(y_1 \cdots y_r\ q_1 \cdots q_r) = 0,$$

то вираженє Pfaff'a:

$$q_1\,dy_1 + \cdots + q_r\,dy_r$$

можна звести до форми:

$$\sum_{s=1}^{r-1} q_s' \, dy_s' \quad \text{або} \quad dy_r' + \sum_{s=1}^{r-1} q_s' \, dy_s'$$

після того, чи φ є в q однородне чи ні.

Часть друга книжки (розд. XII—XIV) займає ся рівнанями частними першого ряду нелінїовими: $F\left(z\, x_1\, x_2 \cdots x_m \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial z}{\partial x_m}\right) = 0$; є ту подана теория поверхний інтеґральних та характеристик, теория інволюций, застосоване трансформаций стичних, метода Lagrange'a варияції сталих, методи Jacobi, Lie та Mayer'a, засада Hamilton'a (функция сил); далї іде теория ґруп функцийних, неоднородних, однородних, бігунових, r-частна ґрупа та інволюцийні системи ряду зерового; далї рівнане Transon'a $F(p,q,x+pz,y+qz) = c$, а в кінци теория Bäcklunda особливих множиний інтеґральних.

Послїдний XV. роздїл подає історию рівнань ріжничкових частних (Pfaff, Gauss, Cauchy, Jacobi, Natani, Clebsch, Grassmann, Frobenius, Lie, Darboux, Engel).

Задержав ся я довше над тою книжкою, бо она обнимає теориї майже найновійші, які в будучности відіграють певно перворядну ролю. Автор сеї книжки хорошо вивязав ся зі своєї задачі та для сьвіта математичного своїм твором безперечно дуже ся прислужив.

R. Fricke u. F. Klein. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen (I. Bd. gruppentheoretische Grundlagen, Leipzig B. G. Teubner, 1897, ст. VIII+634).

Виклад сей обнимає теориї, до яких почин дали Schwarz та Poincaré, а які головно розвинув Klein. Складає ся він зі вступу та трох частий.

Вступ обнимає теорию проєктивних означень мір (projektive Massbestimmungen), отже споріднене перекроїв стіжкових (Collineation), ґеометрию параболїчну, гиперболїчну та елїптичну і належні до них площі (згд. кулї), поняте ґруп руху та ґруп субституций лінїових $\zeta' = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}$.

Часть перша (теория нетяглих ґруп субституций лінїових) подає наперед теорию ґруп циклїчних та ґруп тїл правильних, подїл площі елїптичної та гиперболїчної, теорию ґрупи та підґруп Picard'a і чотиростінний (tetraedrisch) подїл півпростони ζ. Далї є теория ґруп нетяглих, які не мають безконечно малих субституций, поняте

району нетяглости проєктивної площі в ґрупах оборотових, поняте ґруп належачих до головного кола, нормальний многостінник в просторони гиперболїчній та нормальний район нетяглости на площі ζ та в просторони ζ, теория ґруп з кривими граничними. Всї ґрупи без субституций безконечно малих дїлять ся на циклїчні ґрупи, ґрупи необоротові з двома граничними точками, ґрупи оборотові та ґрупи необоротові з безконечною скількостию точок граничних. Звязи між основними субституциями ґрупи, канонїчні райони нетяглости ґрупи многокутників, однородні субституциї та ґрупи кінчать часть першу.

Часть друга (вивід ґеометричної теориї ґрупи многокутників з субституций ζ) займає ся вперед ґрупою оборотовою на основі нормальних районів нетяглости, а именно елїптичною та параболїчною ґрупою оборотовою і їх нормальними шестикутниками та параболїчною ґрупою оборотовою з субституциями елїптичними, далї ґрупою необоротовою з двома граничними точками, понятєм роду (Gattung) та подїлом типів нормальних многокутників, а в кінци „натуральним“ районом нетяглости оборотової ґрупи гиперболїчної. Далї ідуть канонїчні многокутники для ріжних родів та їх модули j_1 j_2 j_3 і модули ад'юнґовані (долучені), трансформациї системів модулових та модулові ґрупи поодиноких родів. В кінци подана теория чотирокутників колових без кола головного, сїм типів таких чотирокутників та їх незмінники, чотирокутник з кутами 0 і єго крива гранична; ґрупи необоротові 1. і 2. рода.

Часть трета (аритметичні способи дефінїованя властиво нетяглих ґруп з субституций ζ) займає ся в роздїлї „про ґрупи оборотові посеред ґрупи Picard'a“ формами Gauss'a, квадратовими формами Dirichlet'a та Hermite'a і їх ґеометричною інтерпретациєю, редукциєю і трансформациєю означених (definite) форм Hermite'a та Dirichlet'a, редукциєю неозначених (indefinite) форм Hermite'a, відтворяючими (reproducirend) ґрупами форм Hermite'a з визначником 5 та 7, та проєктивно-ґеометричною інтерпретациєю форм Gauss'a, ґрупи Picard'a, форм Dirichlet'a та Hermite'a. В дальшім уступі про відтворяючі ґрупи трійкових (ternär) та чвіркових (quaternär) форм квадратових є подана теория їх нетяглости, рівноважности, доказ істнованя ґрупи форм трійкових та чвіркових; теория Seling'a квадратових трійкових форм, дальші методи конструкцийні району нетяглости поодиноких ґруп з колом головним та приміри. Послїдний уступ обнимає специяльні случаї ґруп з колом головним та ґруп многостінників з цїлими альґебраічними сочинниками субституцій-

ними; доказ, що такі ґрупи з сочинниками субституційними дійсними та зложеними є нетяглі та три услівя властивої нетяглости.

Се є короткий зміст сеї дуже важної книжки; бажати би лиш треба, щоби друга часть тої книжки, с. є. функційно-теоретична часть теориї функций автоморфних скоро вийшла з друку для ужитку всїх, що займають ся за Кляйном ґеометричною інтерпретациєю теориї функций.

E. Pascal. Die Variationsrechnung (übersetzt vom A. Schepp. Leipzig. B. G. Teubner 1899, ст. VI + 146).

Є се переклад книжки італїйского математика, якого численні підручники найшли в послїдних часах велике признанє. По історичнім вступі наступає поняте варияциї означених поєдинчих інтеґралів, основний проблєм рахунку варияційного, канонїчні форми Lagrange'a та Weierstrass'a, проблєм Lagrange'a та Mayeŕa, метода множника та проблєм ізоперіметричний; далї іде поняте другої вариациї та єї трансформация, вариациї многократних інтеґралів (Остроградский, Delaunay), теория брахістохрони та найкоротшої лїнії, поверхнї мінїмальні, а в кінци застосованя.

E Pascal. Repertorium der höheren Mathematik (übers. von A. Schepp). I. Theil: Analysis (Leipzig, B. G. Teubner 1900 ст. XII + 638).

Книжка та — як каже сам автор — має ціль в короткім нарисї злучити найважнїйші теориї новійшої математики; з кождої теориї подає она тілько, кілько треба, щоби читач міг ся в нїй з'орєнтувати, та вказує найважнїйші підручники. В 23 розділах подає автор найголовнїйші висліди нової аналїзи від чисел зложених до знарядів ґрафічних. Є ту отже теория чисел зложених, кватернїонів, субституций, визначників, рядів; теория рівнань альґебраічних та теория Galois, рахунок ріжничковий, інтеґральний та рівнаня ріжничкові; ґрупи трансформаций, рахунок ріжниць та варияційний, теория незмінників; функциї змінних зложених, функциї періодичні, модулові, автоморфні, альґебраічні, елїптичні, гіперелїптичні, Abel'a, Euler'a, функция гіперґеометрична, функциї кулї, Bessel'a та Lamé, функциї аналїтичні; теория чисел, рахунок імовірности та номоґрафія. Словом є се мовби енцикльопедия математична, де з кождої теориї піднесено найважнїйші моменти. Найбільша вартість книжки в численній лїтературі, яка до кождого уступу долучена.

Другий том сеї книжки (ґеометриа) анальоґічно зладжений вийшов доселї лиш по італїйски.

N. Herz. Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung. (Sammlung Schubert XIX. Leipzig, G. J. Göschensche Verlagshandlung 1900. ст. IV+381).

Підручник сей складає ся з шістьох уступів; пять перших обнимає рахунок імовірности, послїдний рахунок блудів. Подана є ту теория і дуже много задач практичних; отже дефінїция імовірности беззглядної та зглядної, право великих чисел, зложена імовірність, імовірність причин, теореми Bernouilli, Bayes'a, Moivre'a та проблєм петербурский; моральна надія. З застосовань заслугує на увагу теория гри, теория обезпечень та імовірність зізнань сьвідків, засудів та перечуть (се послїдне дуже інтересне). Послїдний уступ подає теорию блуду, блуду пересїчного та середного, теорию найменьших квадратів, вирівнанє обсерваций та рівнаня нормальні.

На кінци долучені таблиці смертности.

P. Appell. Eléments d' analyse mathématique à l' usage des ingénieurs et des physiciens (Paris, G. Carré et C. Naud 1898. ст. 719).

Як вже заголовок вказує, книжка та має ціль більше практичну; подає она в 24 уступах найважнїйші теориї аналїзи, а через многі приміри стосує теорию до практики. Є ту зібране все, що входить в теорию рахунку ріжничкового та інтеґрального, отже ріжничкованє усяких функций, інтеґрали неозначені та означені, кубатури брил оборотових та правило Guldin'a, ректифікациї кривих та поверхнї брил оборотових; далї ідуть інтеґрали рациональних функций, розвиванє функций в ряди, ріжничкованє та інтеґрованє рядів, ряд Mac-Laurin'a та Taylor'a, розвиванє функций на ряди триґонометричні, вираженя неозначені. Опісля слїдує теория стичних до кривих плоских, „maxima“ та „minima“ одної змінної, теория функций двох змінних, площа стична до поверхнї, „maxima“ та „minima“ функций двох змінних; кривина кривих плоских та кривих подвійно кривих (крива шрубова), кривина поверхнї, лїнії кривинові, асимптотичні, ґеодетичні, напрями та сїти спряжені. Ріжничкованє під знаком інтеґрованя, інтеґрали вздовж кривих, інтеґрали многократні; рівнаня ріжничкові першого ряду, які мож через квадратури інтеґрувати, рівнанє Clairaut, рівнаня ріжничкові другого ряду і висших степенів, рівнаня ріжничкові другого ряду і висших степенів, рів-

нання ріжничкові лїнїові та системи рівнань, рівнання частні першого ряду і деякі другого ряду. Уступ про методи приближень, інтеґратори та інтеґрафи кінчить сей знаменитий та до того дуже елеґантно виданий підручник; впрочім само імя автора добре звісне, щоби розводити ся довго над прикметами єго твору.

A. Schoenflies. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (Leipzig, B. G. Teubner 1900. ст. V+251).

Книжка ся є рефератом, представленим нїмецкому товариству математичному. Обнимає она три части. Часть перша обнимає теорию множінний відчисельних (abzahlbäre Menge), поняте їх „сили“ (Mächtigkeit), поняте множінний невідчисельних та висші кляси чисельні. Часть друга обнимає теорию множінний точкових (Punktmenge), та їх „сили“, теорию множінний відграничених (abgeschlossen) та совершенних та зміст множіни точкової. Трета часть приноровлює повисші теориї до функций змінних дїйсних; виступає ту проте поняте тяглости, функциї нетяглі та колибаючі ся (oscillirend), основне твердженє рахунку інтеґрального та теория збіжности рядів.

M. Voigt. Elementare Mechanik. (II. Auflage. Leipzig, Veit et Compagnie 1901. ст. X+578).

Є се підручник для початкових фізиків; но він вимагає знаня рахунку ріжничкового та інтеґрального; поняте скалярів, векторів, тензорів та операциї ними подає сам автор у вступі. Книжка складає ся з трох частий: механїки точок материяльних, механїки тїл цїпких та механїки тїл, які можна деформувати. Часть перша виходить з засади безвладности Ґалїлєя, дефінїює скорість та прискоренє, силу та условини рівноваги, подає теорию свобідного спаданя тїл, теорию рухів услівних (маятник сферичний), теорию тертя та опору воздуха, поняте живої сили, працї, потенциялу та енерґиї, теорию руху середоточного, ґравітациї, удару, моментів та рівнанє енерґиї. Друга часть оперує моментами оборотовими та безвладности, подає теорию рівноваги та обороту тїл, та теорию притяганя після закона Newton'a. Часть трета займає ся рівнанями руху ідеальних течий, рухами потенцияльними та вировими, дальше механїкою течий, що підлягають тертю, механїкою тїл пружевих, однородною деформациєю, комбінованою деформациєю, згинанєм вальця; дал слїдує теория филь плоских, дроганя напруженої нитки, поступ филь в осередках неограничених та ограничених, теория сопівок,

струн, фуль кулистих; уступ про теорем Poisson'a кінчить часть трету, а разом і книжку.

L. Ambronn. Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde. (Berlin, Julius Springer; I. Bd. 1899. ст. IX+500; II. Bd. 1899. ст. VII + від ст. 503 до 1276.)

Величезний сей підручник обнимає технїчний опис найважнїйших інструментів астрономічних в 7 уступах. Уступ перший займає ся знарядами помічними в астрономії, отже шрубою, прямом, лїбельою, нонїом, та мікроскопами до відчитаня крисочок нонїя; уступ другий говорить про годинники, їх компензатори та реґулятори; уступ третий говорить про поодинокі части знарядів, отже про оси, люнети, об'єктиви, окуляри, рефрактори, зеркала, телєскопи Herschel'a, Newton'a, Gregory, Cassegrain'a, оптичні сталі знарядів, побільшенє та силу сьвітла; уступ четвертий говорить про колеса, машини до дїленя, полученє колес з інструментами, про мікрометри, подвійні мікрометри, гелїометри. Уступ пятий займає ся знарядами, що служать до особливих цїлий, отже знарядами проєкцийними, фотоґрафічними рефракторами, фотометрами, фотометром поляризацийним та знарядами спектральними. Шестий уступ говорить про цїлі знаряди, с. є. про секстант, октант, знаряди унїверзальні, альтазімути, колеса в мурах (Mauerkreis), телєскопи зенітальні, колеса прямові, знаряди до переходів (Durchgangsinstrumente), колеса полуденникові (Meridiankreise), хромоґрафи, рефрактори уставлені паралєктично та люнети кометальні (Kometensucher). Послїдний уступ займає ся стовпами під ріжні знаряди та будовою ріжних обсерваторий.

Вартість книжки підносять численні хорошо виконані ілюстрациї.

T. Beck. Beiträge zur Geschichte des Maschinenbaues. (Berlin, J. Springer 1900. ст. 582.)

Книжка ся подає житє та зміст праць фізиків від найдавнїйших часів, які причинили ся до технїчного розвою механїки. Виступають ту перед нами особи старшого Герона, Паппуса, М. Вітрувія Польльона, С. І. Фронтіна, старшого Катона, Леонарда da Vinci (три розвідки), Biringuccio, Ґ. Аґріколї, Єронима Ґардана, Й. Бессона, A. Ramelli, B. Lorini, Д. Фонтани (дуже інтересна історія ватиканьского обелїска), Сальомона Кауса, Ф. Верантїя, J. de Strada, G. Branca, M. Mersenne'a, G. P. Harstörffera ta J. Watt'a (винахід машини парової).

В бібліотеці Ostwald'a: „Klassiker der exacten Wissenschaften“ вийшли в послідних часах ось-які книжки:

Ч. 93. Euler. Drei Abhandlungen über Kartenprojection.
Ч. 103. J. L. Lagrange. Unbestimmte Analysis.
Ч. 107. Jakob Bernouilli. Wahrscheinlichkeitsrechnung (I. II. часть).
Ч. 108. То само (III. IV. часть).
Ч. 111. Abel: Abhandlungen über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen.
Ч. 112. A. Cauchy. Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen.
Ч. 113. Lagrange u. Cauchy. Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung.
Ч. 116. Lejeune-Dirichlet. Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinus-Reihen. P. Seidel. Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen.

Recueil de travaux offerts par les auteurs à H. A. Lorentz. (Haye, Martinus Nijhoff, 1900, ст. IX + 678).

Книжка ся присьвячена звісному фізикови Lorentz'ови, професорови університету в Leyden, по причині 25-літних роковин его докторату. Обнимає она праці визначнійших фізиків, як Brunhes'a, Rayleygh'a, Pellat'a, Aubel'a, Farkas'a, Boltzmann'a, Kaufmann'a, Planck'a, Riecke, Duhem'a, Zeemann'a, Poincaré, Ramsay, Voigt'a, Wan der Waals'a, Berthelot'a, Cohn'a, Wiechert'a, Dorn'a, Wind'a, Des Coudres'a, Goldhammer'a та иньших в язиці французскім, нїмецкім та англійскім.

Журнала бібліографічного Revue semestrielle des publications mathématiques (під ред. P. H. Schoute, Korteweg etc. Amsterdam, Delsman en Nolthenius) том IX. часть I. 1901, вийшла з друку.

F. Klein u. E. Riecke. Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen (Leipzig, B. G. Teubner 1900, ст. VI + 252).

Є се виклади, які мали проф. Klein, Riecke, Schilling, Wiechert, Bohlmann, Des Coudres для учителїв шкіл середних в часї Великодних сьвят в р. 1900 в Ґетінґен. Відносять ся они до стосованої математики взагалї, технічної механіки, начеркової ґеометриї, математики обезпечень, електротехніки та ґеодезиї. Виклади сї обертають ся довкола слїдуючих питань: Що се є стосована математика та фізика та яке їх значінє для висших шкіл; в який спосіб може придбати собі учитель відповідні відомости через самоуцтво; в який спосіб треба доповнити напрями університетскі з огляду на потреби школи з одної, а знаня з другої сторони.

Другу часть книжки займають деякі давнїйші розвідки Кляйна в повисшій материї.

F. Schilling. Über die Nomographie von D'Ocagne (Leipzig, B. G. Teubner, 1900, ст. 47).

Є се реферат на основі книжки „Traité de nomographie“ d' Ocagne'a (Paris, Gauthier-Villars 1899). Реферат сей обнимає поняте скалї функцийної, таблиці рахункові для рівнань о двох незвісних, для рівнань о трох незвісних, чотирох та більше незвісних, а вкінци теоретичні примітки.

Перегляд важнїйших журналів математичних.

Biblioteca mathematica (журнал присьвячений істориї наук математичних під ред. G. Eneström'a, проф. в Штокгольмі; Leipzig, B. G. Teubner).

Трета серия, том II. зош. 1. р. 1901. ст. 1—176 містить праці з обсягу істориї науки математичних Schmidt'a, Tannery, Suter'a, Curtze, Steinschneider'a, Braunmühl'a, Stäckel'a.

Acta mathematica (під ред. Mittag-Leffler'a в Штокгольмі). том 24. зошит 1. і 2. рік 1900 містять слїдуючі праці:

I. Bendixson: Криві визначені через рівнаня ріжничкові. H. Koch: Кілька квестий з теориї безконечних визначників. R. Lipschitz: Доказ звязи між чотирма осями оборотовими зміни довгости систему прямокутного, а „максимальним“ чотирокутником. H. Koch: Про роздїл чисел первих. G. Mittag-Leffler: Представленє аналїтичне одностайної галузи функциї моноґенічної (дві ноти).

Mathematische Annalen (під ред. Klein'a, Dyck'a, Mayer'a, а в послїдних часах Hilbert'a; Leipzig, B. G. Teubner).

Том 54-ий зошит 1. і 2. 1900 обнимає слїдуючі праці: C. Neumann: Про методу середної аритметичної, а особливо про усовершеня, яких дізнали дотичні досліди Poincaré в послїдних часах через праці A. Korn'a та E. R. Neumann'a. P. Stäckel: Friedrich Ludwig Wachter, додаток до істориї неевклїдової ґеометриї. P. Stäckel: Про вид кривих тору (Bahncurve) в певній клясї проблемів динамічних. H. Minkowski: Про приближене до дїйсної величини через вимірими числа. H. Ricci і Levi-Civita: Методи абсолютного рахунку ріжничкового і їх пристосованя. A. Hirsch: Про білїнїові реляциї між періодами інтеґралів відворотних громад форм. H. Richmond: Про поверхні мінїмальні. K. Zindler: Про скількість особливих змінних в r-частній ґрупі трансформаций точкових.

Том 54-ий зошит 3. 1901: Geiser і Maurer: Elwin Bruno Christoffel. Windelband: В память E. B. Christoffel'a. Спис єго праць. E. Christoffel: Совершенна теория функциї Riemann'a. E. Pascal: Основи теориї систему рівнань ріжничкових другого ряду. M. Petrovitsch: Про спосіб розширеня теореми о середній вартости на рівнаня ріжничкові першого ряду. K. Hensel: Теория альґебраічної функциї одної змінної та інтеґралів Абелевих. H. E. Timerding: Про 16 подвійних площ поверхні Kummer'a. P. Wolfskehl: Про одну задачу елєментарної аритметики.

Journal für reine und angewandte Mathematik (оснований через Crelle, тепер редаґований через L. Fuchs'a; Berlin).

Том 123. зошит 1 (рік 1901) містить праці:

Zimmermann: Новий вивід рівнаня Plücker'a побіч кількох прямих визначень подвійних стичних плоских альґебраічних кривих якогобудь ряду (ст. 1—32). Grünfeld: Про кілька білїнїових ріжничкових виражень, що приходять в теориї рівнань ріжничкових (ст. 32—41). Jahnke: Ґрупа точкова, що належить до потрійно перспективних трикутників (42—47). Jahnke: Конструкция деяких точок в ґеометриї трикутника (48—53). R. Fuchs: Про лїнїові однородні рівнаня ріжничкові, які належать до того самого рода, що і їх долучені (54—65). Thomé: Про лїнїові рівнаня ріжничкові з альґебраічними сочинниками (66—88).

Bulletin de la Société mathématique de France, том 29. зошит I. (падолист та ґрудень 1901 р.) обнимає праці:

Duporcq: Про замітне уложене двох параметрів. Touche: Про певну квестию d' Alembert'a. Rivereau: Незмінники лїнїових та однородних рівнань частних 2. ряду. Appell: Спеціяльна деформация тяглого осередка, вири ріжних родів. Bricard: Про певне свійство циліндроіда. Borel: Про формули Rodrigues'a. Weill: Про точки основні жмутів лїнїових кривих альґебраічних. Duporcq: Розширене теорему Simson'a на просторонь. Sparre Застосоване функций елїптичаих до студіованя руху проєктилів. Demoulin: Про циліндроід та про теорию жмутів комплєксів лїнїових. Hadamard: Про поступ филь.

Journal de l' école polytechnique, 2-а серия, 5-ий зошит 1900.

Caspari: Азимут, ширина та довжина через рівні висоти звізд. E. Maillet; Ґрупи кляси N-u степеня N що найменше (u—1) рази переходні (transitif). Lecornu: Рівновага пружывости стовпа. Appell: Рівновага пружывости пливака з плинним тягаром. Carvallo: Теория руху моноциклїв та біциклїв.

Transactions of the American Matematical Society volume 2. Nr. 1. 1901. містить ось-такі праці:

Wilczyński: Незмінники систему лїнїових рівнань ріжничкових. F. Cajori: Розбіжні та зглядно збіжні ряди, яких добуток є абсолютно збіжний. B. Porter: Твердженє про згідність точок неособливих та сизиґетичних жмутів. W. Strong: Нота про неквaтернїонні системи чисельні. J. C. Fields: Редукция загального інтеґрала Abel'a. D. Hilbert: Про поверхні зі сталою кривиною. F. Blichfeldt: Нота про функцию $f(x) = \Phi(x) + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, яка в данім інтервалї ріжнить ся довільно мало від зера.

American Journal of Mathematics, vol. 23. Nr. 1. 1901.

Kantor: Типи лїнїових комплєксів рациональних кривих в R_r. Wilczyński: Трансформация систему лїнїових рівнань ріжничкових. L. E. Dickson: Розділ трійкових лїнїових однородних субституций в тїлї Galois. J. C. Glashan: Визначене та розвязка метациклїчних рівнань 5. степеня з рациональними сочинниками. E. O. Lovett: Конструкциї ґеометриї Евклїдової n-розмірової при помочи тяглих ґруп. Legh W. Reid: Таблиці кляс чисел для кубічних

чисельних тїл. R. A. Roberts: О дояких свойствах площі кривої кубічної з огляду на колові точки в безконечности.

Annales of Mathematics (London) 2-а серия вол. 2. Nr. 2. (сїчень) 1901. містять працї:

R. E. Moritz. Розширенє дослїдів Hurwitz'a над переступом e на переступ числа π. A. Emch: Приноровленє функций еліптичних до рукояти Peaucellier'a. Ch. Augas Scott: Нота про стіжкові криві. R. A. Harris: Про дворозміровий рух течи etc. G. Miller: Про спеціяльну клясу ґруп Abel'a. M. Bôcher: Теория лїнїової зависимости. A. Hamilton: Особливі точки в родинї поверхний співосередних. D. Lehmer: Добутки совершенних чисел.

Annali di matematica pura ed applicata (журнал італїйский під редакциєю Bianchi, Cremona, Dini, Jung'a; Milano); серия III, том V. зош. 2. (сїчень 1901) містить твори:

Pagliano: Про ріжноманітність альґебраічну 3-розмірову утворену лиш через безконечну площу (ст. 72- 106). Bigiavi: Про зведенє рівнаня ріжничкового лїнїового з сочинниками подвійно періодичними (107—140). Інавґурация памятника для E. Brioschi (ст. 141—164).

El progresso matématico (журнал ішпаньский; Zaragossa): падолист та грудень 1900.

Aubry: Про певну ідентичність Euler'a (стор. 401—413). Ріжні квестиї та задачі (414—432).

Математическій Сборникъ (Москва. 1900).

Том XXI. 1 зошит. С. Антаевъ: Виклад основних свойств рівнаня n-ого степеня в зависимости від системи n рівнань з коренів даного рівнаня (продовженє, ст. 1—53). Е. Сабининъ: Застосованє рахунку варияційного до доказу теорема зглядом суми кутів в ґеодезийнім трикутнику, нарисованім на поверхнї сталої кривини (ст. 54—61). З переписки академика Hermite'a з професором В. Анисимовим: о формі інтеґралів звичайних рівнань ріжничкових з сочинниками періодичними (ст. 62—67). П. А. Некрасовъ: Рахунок приближених виражень функций дуже великих чисел (ст. 68 - 224).

Том XXII. 2 зошит. П. А. Некрасовъ: продовженє попередної статиї (ст. 225 334). Н. В. Бугаевъ: Звязь чисельних

інтеґралів по дїльникам з чисельними інтеґралами по натуральним числам (ст. 335—350). Г. К. Суслов: До питаня про рух точки в осередку, який ся деформує (351—378). П. А. Некрасовъ: По причинї „Отвѣта“ акад. А. А. Маркова (ст. 379—386).

Будучі проблєми математичні. На послїднім міжнароднім конґресї математичнім в Парижи в р. 1900 піднїс D. Hilbert, професор університ. в Ґетінґен, цїлий ряд проблємів, якими після єго погляду мусить ся математика зайняти, щоби тим успішнїйше могла дальше ся розвинути. На єго погляд в математиці нема „Ignorabimus“; є проблєм, то можна єго все розвязати при помочи чистого мисленя. Проблєми ті наведемо низше без довгих мотивів, які до них долучає Hilbert[1]).

В аритметиці є два такі проблєми:

1. дати безпосередний доказ на твердженє Cantor'a (якого до нинї не доказано): кождий систем безконечно много дїйсних чисел т. є. кожда безконечна множінь чисел є рівноважна або з множінию цїлих природних чисел 1, 2, 3, ·····, або з множінию всїх чисел дїйсних, а проте є рівноважна з continuum (пр. з точками лїнії); значить ся в дусї рівноважности є лише дві множінї чисел, відчисельна (abzählbar) і continuum.

2. доказати, що аритметичні аксіоми не є між собою суперечні, значить ся, що на їх основі при помочи скінченого числа заключень нїколи не дійдем до висліїдів суперечних між собою.

В ґеометриї маєм ось-такі проблєми:

3. подати два чотиростінники о тій самій підставі і висотї, яких в нїякий спосіб не можна розложити на пристайні чотиростінники, та яких через доданє пристайних чотиростінників не можна доповнити до таких чотиростінників, що для них є можливий розклад на пристайні чотиростінники.

4. збудованє та систематичне обробленє можливих ґеометрий, (евклїдова, неевклїдова etc.)

5. розслїдити, о скілько понятє тяглої ґрупи перетворень Lie є доступне до наших дослїдів без заложеня, що функциї, які дефінїюють ґрупу $x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n\ a_1 \cdots a_n)$ $(i = 1, 2, \cdots n)$, є тяглі і дають ся ріжничкувати (як у Lie).

До фізики відносить ся слїдуюча задача:

---

[1]) Пор. Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissensch. Göttingen 1900. Math. physik. Klasse Heft 3. ст. 253—297.

6. аксіоматичне оброблене — після взорів ґеометриї — тих частий фізики, в яких вже нині математика відгриває велику ролю, с. є. в першій мірі рахунок варияційний та механїка.

Теория чисел має ось-такі проблєми для будучих дослїдів:

7. Доказати, що наколи в трикутнику рівнораменнім відношенє кута при підставі до кута у вершка є альґебраічне (але не раціональне), то відношенє підстави і рамен трикутника є всегда переступне. Дальше доказати, що степень α^{β}, де α є число альґебраічне, а β альґебраічно невимірime, є всегда числом переступним, або що найбільше невимірimим (irrational).

8. Доказати в теориї чисел первих тверджене Riemann'a, що всї місця зерові функциї:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \text{---------}$$

мають часть дїйсну $\frac{1}{2}$. Коли ся вдасть се доказати, порішити, чи ріжниця між скількостию чисел первих понизше якоїсь величини x а льоґаритмічним інтеґралом x дїйсно не є що до x безконечностию ряду висшого як $\frac{1}{2}$.

Перенести опісля висліди одержані для розділу вимірimих чисел первих на теорию розділу первих ідеалів в якімсь данім тїлї чисельнім K.

9. Доказати право відворотности (Reciprocitätsgesetz) l-тих решт степенних для якого небудь тїла чисельного

10. Подати спосіб, в який можна при помочи скінченого числа дїлань пізнати, чи рівнанє Діофанта має цїлі додатні розвязки.

11. Заняти ся теориєю форм квадратових з яким-будь числом змінних та якими-будь альґебраічними чисельними сочинниками.

12. Kronecker доказав, що кожде чисельне тїло Abel'a в обсягу чисел вимірimих повстає через зложенє з тїл одиничних (утворених з коренів з одиниці). Розширити се тверджене на случай, наколи місто царини чисел вимірimих або мнимої квадратової царини чисел приймем яко царини вимірimости (Rationalitätsbereich) якенебудь альґебраічне тїло. Значить ся найти та дискутувати ті функциї, які для якогонебудь альґебраічного тїла мають ту саму ролю, як функция виложна для тїла чисел вимірimих, а елїптичні модулові функциї для мнимого квадратового тїла.

В альґебрі виказує Hilbert слїдуючі квестиї:

13. Доказати, що рівнанє 7-ого степеня:

$$f^7 + x f^3 + y f^2 + z f + 1 = 0$$

не дасть ся розвязати при помочи яких небудь тяглих функций з двома тілько арґументами.

14. Наколи маєм систем:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= f_1(x_1\ x_2\ \text{-----}\ x_n) \\ &\text{.....} \\ X_m &= f_m(x_1\ x_2\ \text{-----}\ x_n) \end{aligned}\right\} \quad (S)$$

то кожде вимірime (рациональне) получене величин $(X_1 \text{-----} X_n)$ буде очевидно вимірiною функциєю арґументів $(x_1 \text{-----} x_n)$; можуть однак істнувати такі вимірimі дробові функциї величин $(X_1 \text{----} X_m)$, які по зробленю субституциї (S) перейдуть на цїлі функциї арґументів $(x_1 \text{----} x_n)$; такі функциї називає Hilbert зглядно цїлими. Рішити, чи все є можливо найти скінчений систем зглядно цїлих функций з арґументами $(X_1 \text{----} X_m)$, які можна зложити рационально з кождої иншої зглядно цїлої функциї арґументів $(X_1 \text{----} X_m)$.

15-ий проблєм відносить ся до т. зв. рахунку відчисляня (Abzählungskathül), що єго сотворив Schubert (Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig, 1879). Доказати стисло ті ґеометричні услівя, які Schubert визначив на основі т. зв. засади специяльного положеня, та подати точні границї, в яких ті услівя є правдиві.

16-ий проблєм відносить ся до альґебраічних кривих і поверхний в просторони. Точно розслїдити взаїмне положенє найбільшої скількости віддїльно положених куснїв (Züge), яку крива альґебраічна n-ого ряду може мати, далї розслїдити скількість, вид та положенє плащів (Mantel), належачих до альґебраічної поверхні в просторони. Далї визначити найбільшу скількість та положенє циклів граничних (cycles limites) Poincaré для рівнаня ріжничкового першого ряду і першого степеня виду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

де Y та X є цїлі вимірimі функциї n-ого степеня змінних (xyz), або в однороднім видї:

$$X\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + Y\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + Z\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

де X, Y, Z є цїлі вимірimі функциї однородні n-ого степеня змінних (x y z), а t параметр.

17. Розслїдити, чи кожда означена (definite) форма не дасть ся представити яко квот сум форм квадратових.

18. Розслїдити, чи також в просторони Евклїда о n розмірах істнує лиш скінчене число дїйсно ріжних родів ґруп руху (Bewegungsgruppe) з основною цариною. Чи істнують також такі многостїнники, які не виступають яко основні царини, а однак при їх помочи дає ся просторонь виповнити без перерви через відповідне уґрупованє пристайних куснів.

Проблєми з теорії функций.

19. Розслїдити, чи кожде частне рівнанє ріжничкове правильного проблєму варияційного (Lagrange'a) має яко розвязки лиш аналїтичні інтеґрали.

20. Розслїдити, чи кождий правильний проблєм варияційний не дасть ся розвязати, наколи з огляду на дані услівя граничні сповняють ся деякі заложеня (а через се понятє розвязки конче дізнає розширеня).

21. Доказати, що всегда істнує рівнанє ріжничкове лїнїове кляси Фухса з даними особливими точками і даною монодромічною ґрупою.

22. Poincaré доказав, що яка небудь звязь альґебраічна між двома змінними дасть ся все перетворити через функцию автоморфну одної змінної; се значить, що коли є дане рівнанє альґебраічне двох змінних, то для них найдуть ся всегда такі однозначні функциї автоморфні одної змінної, що по підставленю рівнанє сповняє ся ідентично в тій одній незвісній. Но з сего не слїдує зовсїм, чи оно є можливо, ті однозначні функциї автоморфні нової змінної так вибрати, щоби — наколи та змінна перебігає правильний обсяг тих функций — через се був представлений також збір всїх правильних місць даного утвору аналїтичного (рівнаня). Проблєм 22-ий жадає проте розслїдженя того тверджења і тих наведених трудностий.

23. Ту не подає Hilbert нїякого специяльного проблєму, лиш висказує бажанє розширити і уґрунтувати дотеперішні теориї рахунку варияційного.

Плинні криштали. В послїдних часах занимали ся квестиєю плинних кришталів Reinitzer, Schenck, Abegg, Seitz, а головно O. Lehmann. Сей послїдний в двох викладах в „naturw. Verein-ї“ в Карльсруге в р. 1900 подав цїкаві звістки про азоксианїсоль і азоксифенетоль. В відповідній температурі є се чисті, ясні течі; наколи температура ся обнижає, теч стає каламутна, а опісля замерзає і стає кристалїчна. Та теч каламутна ломить сьвітло подвійно, а в сьвітлї сполярізованім поводить ся зовсїм як криштал, витворює чорний хрест, ясні перстенї і т. и. Згадані два тїла — а є їх єще більше — з причини їх власностий треба уважати за криштали. Теч чиста є ізотропна (безподобна), каламутна стаєсь анїзотропна (статьна). В виду сего Lehmann подає таку дефінїцию кришталів: є се тїла статьні осмотрені дробинною напрямною силою; свойства, які до тепер лучено з понятєм криштала, як пр. видержність, спроможність росту, однородність і пр., треба з того понятя усунути. Істнує проте цїла скаля тїл кристалїчних від твердого дияманта до кристалїчних течий.

(Beibl. zu Wiedemanns Annal.)

Арґон і єго товариші. Дуже цїкаві розслїди над тими тїлами перевели в минувшім роцї W. Ramsay і Morris W. Trawers. Після тих розслїдів метанеон не є елєментом, а всї прочі нові елєменти: гель, неон, арґон, криптон та ксенон є ґазами одноамотовими. Иньші свойства тих тїл вказує залучена табличка:

	Гель	Неон	Арґон	Критнон	Ксенон
Сочинник заломаня (воздух = 1)	0·1238	0·2345	0·968	1·449	2·364
Ґазова густота (0 = 16)	1·98	9·97	19·96	40·88	64
Точка кипіня (тиснене 760 m/m)	?	?	86·9° abs.	121·33°abs.	163·9° abs.

Після своїх свійств елєменти ті треба в системі періодичнім ось-так примістити:

H	Helium	Li	Be
1	4	7	9
Fl	Neon	Na	Mg
18	20	23	24
Cl	Argon	Ka	Ca
35·5	40	39	40
Br	Krypton	Rb	Sr
80	82	85	87
I	Xenon	Cs	Ba
127	128	133	137

(Proceed. Roy. Soc. **67** p. 329—333, 1901, Natur. **63** p. 165, 1900).

Енергією лучів Рентґена та Becquerela займав ся в минувшім році E. Rutherford (Proc. Roy. Soc. 1900). З его розслїдів над дїланєм тепляним лучів X виходить ось-що. Тверді рури, мірені больометром, давали лучі X, що відповідали 0·046 Watt, а найбільша емісия на секунду виносила 19·5 кальорий; енергія та була отже 560 разів більша як сонїчна. Сочинник абсорпциї для лучів X при тисненю атмосферичнім був 0·000279, в CO_2 половину того. Взагалї абсорпция в ґазах росла пропорционально до тисненя.

Пересуненє вікове оси маґнетної земскої. W. van Bemmelen перевів рахунки над зміною положеня маґнетної оси земскої в часї від 1600 р. до 1885 р. З рахунків тих вийшло, що вісь маґнетна дізнала пересуненя в напрямі східно-західнім, при чім видним способом зрастало єї віддаленє від бігунів оборотових. Дорога точок оси лежить майже в ізохасмі с. є. лїнії рівночастого виступованя сьвітла полярного; здає ся проте, що вісь маґнетна відбуває оборот довкола бігуна сьвітла полярного, а не довкола бігуна ґеоґрафічного.

(Wiedem. Beiblätter 1901. Heft 2.)

Густота елєктрична на елїпсоїдї. Наколи скількість елєктричности на елїпсоїдї о осях 2a, 2b, 2c є M, p є нормальна з середоточки елїпсоїди до точки O, то густота елєктрична в точцї виражає ся після обчислень H. Dörrie взором:

$$\varrho = \frac{Mp}{4\pi abc}$$

(Wiedem. Annal. 1901. Heft 3.)

Perrotin мірив в обсерваториї ніцейскій скорість сьвітла способом Fizeau. Після тих помірок скорість сьвітла є 299·90±0·08 тисячів km.

(Comptes rendus **131**. 1900 p. 731—736.

На загальнім конґресї фізиків в Парижи подав Ch. Dufonr виклїди помірок при помочи сонїчного мікроскопа сили сьвітла деяких звізд в порівнаню з сонцем. Сьвітло місяця є 300.000, Арктура 33 мілїярдів, Антареса 132 мілїярдів, Атаіра 48 мілїярдів разів слабше як сьвітло сонця.

(Physikal. Zeitschrift 1901).

Щоби витворити в ґазї один йон, треба після Rutherforda при тисненю одної атмосфери середної енергії $1{\cdot}90 \cdot 10^{-10}$ erg.; та „енергія йонова“ є здаєсь для всїх ґазів однака.

Відступ поодиноких набоїв в йонах в одній дробинї є після обчисленя Rutherforda $1{\cdot}1 \cdot 10^{-9}$ cm., с. є. $^1/_{30}$ часть проміру атома; се згоджує ся з виклїдами I. I. Thomsona, що відємний йон є лиш маленькою частинкою дробини.

Скількість енергії, яку висилає один ґрам окиса уранового протягом одного року, є 0·032 кальорії, яку висилає один ґрам радіюм, 3000 кальорії.

Виправа дуньска вислана минувшого року під проводом Paulsena до Ісляндиї в цїли розслїдженя сьвітла полярного доказала, що лїнії, які виступають в дуговинї того сьвітла, є ідентичні з лїніями катодальних лучів азота, так що навіть напруги зглядні лїній в обох дуговинах є однакі.

Виправа ся мірила елєктричність воздушну протягом 53 днів, однак лиш 11 днів серед сприяючих обставин. З помірок сих виходить, що потенциял воздушний зрастав від години 8 рано аж до 12—1 з полудня; опісля спадав аж до години 2 в ночи, та осягав minimum між 3 а 4 годиною рано.

(Verhandlungen der deutsch physik. Gesell. 1900 p. 218 sqts).

Нові лямпи елєктричні. Великим поступом в техніцї осьвітленя елєктричного є лямпа В. Нернста, професора унїверзитета в Ґетінґен. Нернст доказав імепно, що т. зв. діелєктрики, що на зимно не перепускають елєктричного току, стають дуже добрими провідниками через достаточне огрітє. Такими тїлами є порцеляна та „рідкі землї“ (т. зв. тїла Нернста) пр. циркон. Лямпа Нернста складає ся з такого діелєктрика, а довкола него в певнім відступі окручена є спіраля з плятини; до обох тих тїл ведуть провідні дроти. Наколи ток починає кружити, то в першій хвилї переходить він лиш через дріт Pt та розжарує єго до білого. Під впливом

горяча перемінює ся однак тїло Нернста в дуже добрий провідник та розжарує ся і видає інтензивне сьвітло, а рівночасно автоматично дїлаючий маленький електромаґнет вилучає дротик Pt з току електричного. — Ще простїйша відміна сеї лямпи є лямпа, де тїло Нернста огріває ся лямпкою спіритусовою, а опісля перепускає ток. В обох разах цїлий процедер заміни того тїла в провідник треває кілька секунд. Користи сеї лямпи є наперед дуже інтензивне сьвітло, дуже зближене до сонїчного, далї се, що тїло Нернста не спалює ся в воздусї, отже не потреба до лямп Нернста грушок скляних безвоздушних, як в лямпах Едізона, а в кінци найважнїйша користь є та, що лямпа Нернста зуживає через половину тілько току, що лямпа Едізона однакої сили.

Засаду Нернста пристосував E. Раш (Rasch) до лямп лукових: місто стовпчиків вугля уживає він стовпчиків з тїл Нернста, отже рідкі землї, маґнезию, вапно і т. п. Конструкция є анальоґічна, як у Нернста (побіч стовпчиків з тїл Нернста є — як звичайно — два стовпчики вугляні, які опісля відсуваютъ ся). Є ту о стілько вигіднїйше, як в лямпі Нернста, що як відомо сьвітло лукове повстає лиш між кінцями стовпчиків, отже висока температура 3000°—4000° C, яка є в лямпі Раша, не атакує та не нищить оправи мосяжної лямп. Дальша користь сеї лямпи є та, що краска сьвітла лежить в наших руках, бо она зависить від материялу. Наколи сьвітло лукове має закраску фіолєтну, то сьвітло стовпчика цирконового або маґнезіового є зовсїм біле. Що до скількости електричности, яка є потрібна в лямпі Раша, найлїпше показує слїдуюче порівнанє: один ват витворює в лямпі Едізона сьвітло $^1/_3$ сьвічки, в лямпі Нернста $^2/_3$ сьвічки, в лямпі луковій вуглевій 2 сьвічки, а в лямпі Раша 4 сьвічки.

Рівночасно обдумав звісний Auer von Welsbach нову лямпу жарову, де дротик вугляний заступив дротиком з осму; є се о стілько користне, що Os дуже є витревалий на дїланє тепла, більше як Pt та C; лямпа така треває 700 до 1200 годин, а опір нитки осмової є чотири рази меньший, як в дотеперішних лямпках жарових. До використаня токів електричних в дотеперішних закладах треба проте уставляти в ряд по чотири такі лямпки осмові. Сьвітло такої лямпки є дуже сильне, а на лямпцї заощаджує ся до 60% в порівнаню з лямпкою Едізона.

Цїкаві розслїди над планетою Ерос ом (пор. попередні випуски Збірника) перевів Ch. André. З розслїдів тих показує ся, що Ерос є звіздою фотометричною і є системом подвійним; обі астероіди, з яких планета ся зложена, мають проміри в відношеню 3 : 2, а площа їх орбіт переходить через землю.

(Comptes rendus CXXXII. 1901. ст. 397.)

В найблизших двох роках мож обсервувати слїдуючі наворотні комети:

Комета	Час обігу (в лїтах)	Перехід через перігелїюм	Після обчислень
de Vico E. Swift	6·4	1901·1	Seares'a
Brorsen	5·5	1901·1	Lamp'a
1894 I (Denning)	7·4	1901·5	Gutesman'a
Encke	33.	1901·7	Иванова
1895 II Swift)	7·2	1902·8	Dickerman'a
$Tempel_3$-Swift	5·5	1902·9	Bossert'a.

(Vierteljahresberichte der astron. Gesellsch. 1900.)

Помер славний математик французский Шарль Hermite. Родж. в р. 1823 був професором школи полїтехнїчної та Сорбонни в Парижи. Від р. 1856 був членом Інституту, а в р. 1892 разом з покійним Pasteur'ом обходив ювілей своєї научної дїяльности. Яко математик займав дуже видне місце в сьвітї науковім; єго голосні розслїди над переступом числа e, праці над теориєю рівнаня пятого степеня та висших, в теориї ґруп та функций елїптичних та и. виробили єму почесне місце в істориї розвою наук математичних та придбали єму безсмертне імя.

Конкурс академії парискої на рік 1902. 1) Усовершити в важнїй точцї застосованє теориї ґруп тяглих до науки о рівнанях ріжничкових частних. 2) Розвинути і усовершити теорию поверхний, які ся стосують до парабольоіди оборотової.

Academia Pontaniana di Napoli розписує на рік 1901 слїдуючий конкурс: Виклад елєментарний основ аксонометричного рисунку з застосованями усякого рода.

Поняте тяглости. Фільозофічний факультет університету в Ґетінґен поставив в марти 1898 р. слїдуючу конкурсову задачу: „Через довгий час уважано за загальну засаду для математичного трактованя явищ природних засаду тяглости (Stetigkeit) або ще спеціяльнїйше представленє при помочи функций, які дають ся ріжничкувати без нїякого застереженя. Ту засаду ввели творці рахунку ріжничкового та інтеґрального яко щось, що само через себе ся розуміє; поступи дослїдів математичних показали однак що раз то виразнїйше, що при тім tacite за основу принимано дуже велике число заложень, до котрих ми однак при все істнуючій неточности наших змислових постережень зовсїм не є приневолені. То заложенє стоїть вже навіть заздалегідь в незгоді з приниманєм дробинної будови материї. Факультет бажав би собі праці о чисто-науковім характері, яка би питаня, що ту виступають, виложила в загально зрозумілий спосіб, зглядно піддала точному дослїдови хосенність звичайного представленя тої квестиї. Праця може мати більше характер математичний або фільозофічний та психольоґічний; історичні студиї є пожадані, але не вимагані". — Наколи первісне сформулованє задачі задля єї короткости не зістало в властивий спосіб поняте — три надіслані праці показали ся яко недостаточні до удїленя їм нагороди — оголошує факультет слїдуюче обширне поясненє сеї конкурсової квестиї:

Поставлене питанє толковано переважно, або бодай уважано за єго ядро, в слїдуючий спосіб: треба рішити, чи лїпше є уважати материю за збудовану в спосіб молекулярний, чи за тяглу, та чи спеціяльно нові поступи наук природописних основують ся на тім, чи на тамтім поглядї.

Того рода вивід, піднятий з независимого становища та з дїйсним поглядом на найновійші поступи царин природописних, які ту входять в рахубу, не був би без заслуги. На кождий случай однак треба би при тім завважати, що ті два погляди власне в найновійших часах що раз то на перемін ся заступають. Наколи Maxwell в науці електричности впровадив теорию тяглости (continuum), то тепер в тій науці через студию лучів катодальних та електродинамічну теорию сьвітла звертаєм ся назад до атомістичного представленя річи. Фізикальна хемія, яка в науці фаз Gibbs'a характеризує стан материї через скінчене число параметрів, отже за підставу здає ся принимати поняте тяглости, розвиває з другого боку атомістичну в своїй основі теорию йонів. В тім самім часї, в якім фізика змагає найлїпше зробити через виключно „феноменольоґічне" представленє явищ, будує хемія науку про положенє атомів в просторони і т. д. — З другого боку треба піднести, що погляд атомістичний не конче потягає за собою ідею сил з віддаленя (Fernkraft), сей погляд можна злучити з ідеєю тяглого в просторони переношеня сил, наколи впровадимо електричні або материяльні атоми (як собі їх хто представляє) яко поодинокі (особливі) місця в осередку, що в тяглий спосіб виповняє просторонь.

Повисший вивід, хоч і як інтересний, не влучає однак властивої теми, поставленої через факультет, лиш давав би для неї тимчасовий материял. До тої теми зближимо ся дїйсно, наколи спитаємо: о скілько є в висше наведених примірах оба погляди (теория тяглости і теория дробинова) математично рівноважні для вияснення, або лїпше для представленя дослїджених фактів? Змисл теми сейчас ухопимо, наколи усунемо все ґіпотетичне та спекулятивне, що ся відносить до самої істоти материї, та зовсїм загально розважимо се, що слїдує: Кождий впроваджує, скоро хоче осудити цїлковите дїланє розтяглих утворів, які є в малих розмірах неоднородні, однородні вартости середні; за ті впроваджує він залежности, які виражає через можливо просто дібрані функциї. Так пр. заступає сей, що рахує, в многих случаях сумованє через інтеґрованє і т. п. Первісний наклін до такого поступованя здаєсь лежить в натурі наших змислових постережень. Подумаймо пр., що купа снїгу, на яку дивимо ся з далека, або лїс, що замикає овид, здаєсь мати тяглий контур. З тим лучить ся дальше змаганє до можливо простого представленя. О скілько є сей спосіб математично оправданий? Спеціяльно, який змисл має, стосувати до залежностий, які ми уставляєм поміж однородними середними вартостями, правила рахунку ріжничкового та науки про ряди? А наколи ми через таке застосованє найдем правдиві вислїди, чи можемо опісля заключати назад на однородність або неоднородність субстрату? — Доперва наколи полагодимо або бодай зрозуміємо комплекс так представлених питань, будемо могли вернути до проблєму поясненя натури. Тодї ся спитаємо, яке внутрішне значінє треба приписати заложеням тяглости (Stetigkeit), які ми привиклі від давна робити, чи они є чимсь більше, як лиш средством помічним до лекшого переведеня математичних розслїдів, та в якім змислї мають вислїди, з тих заложень випроваджені, претенсию до обєктивного значіня.

Є неможлива річ, сказане ту ще основнїйше пояснити. Звернемо лиш увагу на дуже простий примір (який принагідно Boussinesq розбирає). Кождий вчить ся, що потенциял тяжести в серединї якогось тїля сповняє рівнанє ріжничкове $\Delta V = 4\pi\varrho$. Яке значінє має

се рівнанє ріжничкове, або: яке значінє хочемо величинам V і ϱ, що в рівнаню ріжничковім приходять, надати для тїла, яке в малих розмірах є неоднородне (як висше купа снїгу)? І як представляють ся ті питаня, наколи хочем приняти будову тїла з атомів, що мають форму точок? Очевидно в однім або другім случаю схочемо впровадити V і ϱ яко середні вартости; як обчислити ті середні вартости?

По над питанями та трудностями повисшого рода перейшли найвизначнїйші теоретики минувших десятків лїт до порядку. Перечитати лиш, як Cauchy або Poisson від погляду молєкулярного переходить до ріжничкових рівнань математичної фізики. А сей наведений примір находить зі сторони великого числа нинїшних фізиків наслїдуванє без надумуваня ся. Очевидно входить ту в розважанє множество емпіричних елементів. Досьвід дає нам певність, що в загалї мала зміна преміс дуже мало зміняє вислїди. Правда не все ся се дїє (наколи заходить „нерівновага“, при вибухах і т. и.); природописцї спускають ся з огляду на питанє, чи в данім случаю заходить такий виняток, чи нї, на своє чутє або на експериментальну контролю; а як вислїд показує, слушно.

Но нинїшний математик, що роздумує про основи своєї науки, не може в нїякий спосіб так себе ограничати. Він не буде оспорювати хісна повисше наведеного поступованя — навіть з відси возьме охотно імпульс — но по за тим буде жадав точного математичного уґрунтованя та ограниченя такого поступованя. Для єго накліну до пізнаня міродайним є новітний розвій математики в напрямі критичнім. Той розвій уважають однак в загальнїйших кругах, так зі сторони фізикальної, як і фільософічної, радо за щось додаткового, що для цїлий поясненя натури властиво не входить в рахубу. Но однак нїколи не повинно бути задачею, відсувати неприємну критику на бік, але противно еї внутрішно (в еї істотї) побороти. З другої сторони вдоволило ся много математиків тим, нові основи в обсягу їх специяльної науки привести до значіня; они дуже рідко мали або шукали нагоди відповідно тому змінити відношеня до сусїдних царин. Тому будуть ту відповідні слїдуючі пояснення.

1. Розходить ся о такий розвій математики, який означуєм яко з'аритметизоване еї. Яко одиноку єго основу служить перегляд образу чисел (Zahlbild), згл. прав, після яких оперує ся числами; до тої основи треба звести всї иньші відношеня. Ідея тяглої змінної буде заступлена через загальнїйші сформулованя науки о множінях;

ідея функциї дізнасть відповідного неретвореня. Рахунок ріжничковий та інтеґральний будуть оперті виключно на стисле поняте границї; окаже ся правилом, а не винятком, що тягла функция не дасть ся зріжничкувати і т. д.

2. Істотною річею є, що змисловий погляд мірений на так з'аритметизованій математиці оказує ся яко щось неточного, означеного лиш на певну скількість десяточних. Мимо сего з'аритметизована математика буде точкою виходу для квантитативного опанованя сьвіта внїшного[1]). В якій формі се має ся стати? І на які улекшеня можна собі позволити, наколи жадає ся від вислїдів знов ограниченої точности? Се є центральне питанє, під яке підпорядковує ся все висше сказане.

3. В сказанім містить ся, що потрібне є до розвязаня повисших трудностий. Розходить ся о се, щоби математик та емпірик подали собі руку на вспільній царинї. Для математика повстає задача, на основі з'аритметизованої науки розвинути обширну науку про приближені методи, розвивати яко окрему науку се, що п. Heun в новійших часах слушно назвав математикою приближень (Approximationsmathematik).[2]) Знов же для емпірика буде розходити ся про се, щоби на всїх царинах, далеко більше як до тепер, установити степень точности, до якого (зверхні та внутрішні) обсерваций, з яких він виходить, є правдиві, або внутрі якого він хоче мати вірні (zuverlässig) вислїди.

Ся наведена проґрама не жадає в дїйсности нїчого нового, не достає лиш до тепер стислого еї переведеня. Рахмайстри прилучили ся до неї вже давно, а також в астрономії та ґеодезиї принято еї загально від часу робіт Gauss'a. З новійших чисто математичних робіт треба згадати працї Чебишева. Так само треба ту навести твердженє Вейерштрасса, що можна кожду в якімсь інтервалї подану функцию тяглу рівномірно приближити з довільною точностию через виміриму (рациональну) функцию скінченого степеня. Яко нове жаданє виступає ту лишень се, щоби висше наведене поставленє питаня більше висунути на перед яко властиву середоточку цїлої стосованої математики, та набрати пересьвідченя, що приближене представленє відносин між величинами далеко більше про-

---

[1]) В противнім случаю приходять нові трудности. Пор. вступну промову проф. Burkhardt'a: Mathemat. und naturwissen. Denken, Zürich 1897.

[2]) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung XI, 2 (1900).

никає наше цїле мисленє, як дотепер думано. Наші вискази про натуру річий стануть однак скромнїйші. Говорено давнїйше нераз, що в природї приходять лиш функциї аналїтичні. Сей висказ змінимо тепер о стілько, що може лиш через неточність нашого погляду на природу вистарчали функциї аналїтичні, і то дуже прості функциї аналїтичні. Через се не впадєм однак єще в другий екстрем, який в найновійших часах заступає Boltzmann, ставлячи гіпотезу нетяглости явищ в природї — так сказати — яко конечність мисленя.

Значінє питаня конкурсового, поставленого через факультет, здаєсь тепер достаточно піднесене. Ходило о се, щоби комплєкс квестий, які входять в рахубу, та понять в прозорій формі виложити і о скілько можна критично розібрати. Математик міг би рівночасно передприняти, науку про приближені методи перевести в специяльній царині, фільозоф або психольоґ неточність нашого змислового постереженя в тім або иньшім напрямі точнїйше студиовати; згадаймо лиш на кінематоґраф, так залюбки наводжений через Boltzmann'a. Чого треба безусловно жадати з математичних відомостий, то лиш сего, щоби автор істоту з'аритметизованого знаня, як оно тепер виступає в письмах нинїшних міродайних математиків, в себе прийняв. До сего не вистарчить перечитати загальні вискази визначних авторів, які подробиць новійшої прецізийної математики нїколи не тикали, хотяй би се ходило про Гельмгольца або Кірхгоффа, Больцманна або Маха. Математики можна вивчити ся лиш через сконцентроване студиум; в нїй нема нїякої „королївскої дороги“ (Königsweg).

Дальші свойства лучів Бекереля. Після дослїдів F. Giesel'a (Braunschweig) можна видїти лучі Бекереля, що виходять з препарату раду, держаного перед замкненим оком, навіть тоді, коли препарат (найлїпше хльорак або бромак) находить ся в скринцї зробленій з олова. Має ся тодї чутє, мов би цїле око було наповнене сьвітлом; око мучить ся тому дуже скоро. Навіть слїпий, хотяй у него сочка очна є закаламучена, дізнає під впливом лучів Бекереля вражіня сьвітла, що треба приписати фосфоресценциї, яка повстає в серединї ока. Дїланє фотоґрафічних лучів Бекереля є таке, як лучів Рентґена, хотяй слабше. — Подібно, як лучі Рентґена, виладовують лучі Бекереля наладований електроскоп (через йонїзацию воздуха). Відмінне однак від лучів Рентґена є їх поведенє маґнетне; дізнають они, як лучі катодальні, збоченя маґнетного, чого нема у лучів Рентґена. — Мимо так сильного промінь-

ваня частинки, які відривають ся від тїл лучистих, є так малі, що требаб мілїона лїт, щоби рад стратив на вазї 1 mg.

F. Himstedt і W. Nagel стверджують дїланє лучів Бекереля на око, але лиш на око, яке в темноті випочало; для такого ока є лучі Рентґена і лучі позафіолєтні видимі.

Після обсерваций Himstedt'a дїлають лучі Бекереля на селєн в сей спосіб, що єго електричний опір зменьшає ся; рад замкнений в подвійну ослону паперову викликав зменьшенє опору в клїтинцї з селєну через верству воздуха грубу на 1 cm. о 1%. Єще сильнїйше дїлають лучі Рентґена, які викликують зменьшенє опору селєну о 50%. В сей спосіб дїлають і позафіолєтні лучі; противно позачервоні не дїлають на селєн зовсїм. — (Annal. der Physik 1901, 4, IV, 531).

В розвідцї „elektrische Leitfähigkeit in Gasen, die von Kathodenstrahlen durchsetzt sind“ доходить J. C Mc Lennan до слїдуючих висліdів: 1. Спроможність проводу, яку в якімсь ґазї викликують лучі катодальні, є подібна до спроможности, викликаної через лучі Рентґена та Becquerel'a, так що можна приняти, що в обємі ґазу, на який трафляють лучі катодальні, повстають додатні та відємні йони. 2. Наколи лучі катодальні падуть на ізольовані металїчні провідники, окружені воздухом, то ті провідники, передше ненабиті, одержують малий набій; набої додатні остають знищені (наколи передше на провіднику були), а від'ємні зменьшають ся. Ся утрата набою походить від дїланя з'йонїзованого воздуху, окружаючого провідник. 3. Наколи катодальні лучі о певнїй силї переходять через ґаз, то скількість йонів витворених в однім cm^3 ґазу залежить лише від ґустоти ґазу, а не залежить від єго складу хемічного. 4. Йонїзация, походяча в ґазах від лучів о сталій натузї, є пропорциональна до тисненя, яке є в ґазї. 5. При лучах катодальних, подібно як при лучах Рентґена, стоїть число витворених йонів в ґазї в означенім відношеню до скількости з'абсорбованої лучистої енерґії.

(Zeitschr. für phys. Chemie 1901, зош. 5).

Нову методу до означеня тягарів атомових подає L. Benoist на основі своїх розслїдів над проникливостию материялів для лучів Рентґена. Після него питома проникливість елємента, яку міримо в означених простих условинах, є сталою, яка далеко простійше зависить від тягару атомового, як питоме тепло. Ту сталу

можна легко визначати і она надає елементови его становище в ряді чисел, які виражають тягар атомовий. Возьмім пр. інд, якого тягар атомовий є після деяких хеміків 75·6, після иньших 113·4. Проникливість інду для лучів Рентґена дає сему елементови місце за сріблом (108) та кадмом (112); отже інд має тягар атомовий 113·4 (а не 75·6).

(Compt. rend. 1901, t. 132 p. 772).

Монахійскі хеміки K. A. Hoffmann та E. Strauss одержали з пехблєнди, клєвсіту, самарскіту та евксенїту олово, яке є лучиво-чинне (як рад); одержали они лиш его полученя, як хльорак та сїркан. Тїла ті флюоризують під впливом лучів катодальних на сино та дїлають в темноті на плиту фотоґрафічну. Препарати ті ривалїзують що до сили лучистости з найлїпшими препаратами тору та урану. Вартостність того олова, як і его тягар дробиновий здаєсь є більші як звичайного олова.

(Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. 1901, Jahrg. 34).

Розходженє ся дрогань Гертца в водї мірив C. Gutton в сей спосіб, що при помочи ексцитатора Гертца перепускав филї елєктричні здовж двох рівнобіжних дротів, які в віддалею 2·5 m від ексцитатора переходили через деревляне, парафіною виложене корито. Резонатор до викритя филь складав ся з колеса переломаного, зробленого з мідяного дрота, і стояв між рівнобіжними мідяними дротами. Поза резонатором переходили дроти через друге подібне корито та були злучені містком. Наколи пересувано місток, показувала іскра резонатора мініма та максіма, а відступ містка між одним мінімум та одним максімум давав довгість филї. Поміри роблено наперед в воздусї, опісля в водї (дроти і резонатор уміщувано в водї). Довгість филї в водї була така, як і в воздусї; не залежала она анї від положеня резонатора зглядом дротів, анї від розмірів та поємности ексцитатора. Наколи однак дроти уміщено в водї, а резонатор в воздусї, то филя була 8·3 рази меньша як тодї, коли дроти були в воздусї; с. є. сочинник заломаня води для филь елєктромаґнетних є 8·3, число, яке вже і передше найдено. З факту сего, що довгість филї остала така як в воздусї, наколи дроти і резонатор були рівночасно уміщені в водї, слїдує, що період дроганя резонатора мусить при тім 8·3 рази бути більший.

(Compt. rendus 1901 t. 132 p. 543).

Після найновійших обчислень сила, якої уживає ся тепер в печах елєктричних цїлого сьвіта, виносить summa summarum до 230000 конїв паровых; з того на фабрикацию карбіду відпадає 185000 (в самій Франциї над 60000) конїв, на фабрикацию алюмінїюм 27000, міди 11000, а карборунду 2000 конїв.

(L'etincille électriqae, Paris 1901 Nr. 15).

Нові теориї полярного сьвітла. Після ученого шведского Сванта Arrheniusa є сьвітло полярне наслїдком від'ємного елєктричного виладованя сонця. Виладованя ті підлягають колиганям, які дають ся відчувати на планетах відповідно до їх положеня зглядом площі рівника сонїчного та їх віддаленя. Сильне виладованє перетворює ся в катодальні лучі, які є причиною полярного сьвітла. Лучі ті є розповсюднені по цїлій землї, але бачити їх можна лиш коло бігуна, де они остають під більшим тисненєм і через те сильнїйше сьвітять. Після Arrheniusa всї планети мають хвости утворені з частинок від'ємно елєктричних, но хвости ті не є так сильні, як у комет.

Дещо подібна є теория англїйского фізика J. J. Thomsona. Приймає він, що всї тїла, отже і сонце, підлягають делїкатному промінюванню, подібному до лучів Becquerel'a. Наколи такі сонїчні лучі увійдуть в засяг маґнетного притяганя землї, то они дізнають відклоненя в напрямі до обох бігунів, а наколи они в кінци осягнуть в атмосфері відповідну верству з відповідною густотою, тодї повстають прояви сьвітляні зорі полярної, подібні до лучів катодальних в рурках з розрїженим воздухом. — Теорию ту потверджують досьвіди Poulsen'a, після яких дуговина полярного сьвітла є схожа з катодальною дуговиною азота.

Нові акумулятори Едізона. Едізон побудував нові акумулятори, яких поємність трикратно перевисшає поємність дотеперішних акумуляторів з олова. Анодою є в них делїкатно розміщена металїчна мідь, катодою металїчний кадм, елєктролїтом 10%-овий розтвір NaOH; катода і анода віддїлені від себе перепоною асбестовою. При набиваню повстає CuO, при виладованю редукує ся CuO, а оксидує ся кадм. — В другім акумуляторі Едізона елєктролїтами є надокис желїза і надокис нїклю, елєктролїтом є KOH: при набиваню редукує ся надокис желїза, при виладованю дїє ся противно.

Продукция платини на Уралю, де є головне жерело того рідкого металю, представляє ся так:

Видобуто:

Рік	kg	Рік	kg
1891	4226	1896	4930
1892	4570	1897	5649
1893	5094	1898	5978
1894	5208	1899	5946
1895	4406	1900	5438

Курс Pt був в 1900 р. 3500 fr. за 1 kg, кошта продукциї 1000—1800 fr.

(L'électricien 1901. Nr. 546).

Продукция алюмінїюм в тоннах метричних виносила в послїдних 12 лїтах:

Рік	Сполучені Держави Америки півн.	Иньші краї
1889	21·6	70·9
1890	27·9	165·3
1891	68·2	233·4
1892	118·1	487·2
1893	164·4	716·0
1894	250·0	1290·9
1895	417·8	1418·2
1896	590·9	1659·7
1897	1814·4	3394·4
1898	2358·7	4500·0
1899	2948·4	6000·0
1900	4000·0	7500·0

(L'étincille électrique, Paris 1901 Nr. 10).

Хотяй в природї дуже много витворюєсь метану (CH_4) (ґаз блотний), то однак майже нема єго в атмосфері. Толковано се в ріжний спосіб, а найчастїйше, що ґаз сей в міру, як ся творить, спалюєсь в атмосфері під впливом озону. Доперва V. Urbain впав на думку і ствердив се досьвідом, що ґаз сей абсорбують рослини, подібно як безводник квасу углевого (CO_2). Рослини замкнені щільно в начиню, яке було наповнене атмосферою богатою в метан, з'абсорбували протягом 6 до 11 днїв 82% сего ґазу.

(Comptes rendus 1901. t. 132, p. 334).

Після найновійших помірок J. Dewar'a є середна температура кипіня плинного кисня — 182·5 C, а плинного водору — 252·5° C, значить ся 20·5° абсолютної скалї.

(Proceed. of the Royal Society 1901, vol. 68).

Нові означеня температури, при якій топить ся золото, переведені через L. Holborn'a та A. Day'a дали на вислїд 1063·5° C, наколи золото топлено в тиґлю, уміщенім в печи елєктричній, а 1063·9° C, наколи золотий дріт уміщено в термоелєментї в точцї злютованя сего елєменту та розгріто так сильно, що ся сей дріт стопив.

(Annal. der Physik 1901. F. 4. Bd IV).

Температура, в якій топлять ся ріжні мінерали та скали, є слїдуюча (після помірок C. Doelter'a, довершених при помочи плятино-родового пирометру): 1. мінерали: ортокляз 1145° C, альбіт 1100°, лябрадор 1119°, анортит 1125° C, авґіт 1075° C, ґальяґ 1035°, сподумен 925°, музовіт 1205°, біотит 1115°, нефелїн 1042°, левкіт 1300°, маґнетит 1140° C. 2. скали: ґраніт 1240°—1300°, монзоніт 1115°—1170, лїмбурґіт 995°, базальт 992°—1050°, лява з Етни 960°, лява з Везува 1030°—1090°, левцитіт 1400° C.

(Wiener akad. Anzeiger 1901).

Екстреми температур в XIX. столїтю. Після „Revue scientifique" температура обсервована в Парижи в лїтах 1801 до 1900 представляє ся ось так. Найнижша температура припала в 45 лїтах на сїчень, в 27 лїтах на грудень, в 21 лїтах на лютий, в 5 лїтах на март, а лиш в однім роцї на падолист. Лиш в двох роках впала температура низше 20°, а се 9. грудня 1871 р. (−21·3° C) та 10. грудня 1879 (−23,9°). Переважно (бо в 79 лїтах) minimum лежало між −5° а −15° C. — Найвисша температура випала в 49 лїтах на липень, в 33 на серпень, в 14 на червень, а в 2 на май та вересень. Найвисша температура випала на 9. липень 1874 р. (+38·4° C), 2. липень 1900 (+37·7° C), 8. серпень 1873 та 19. липень 1881 (+37·2° C). Пересїчне maximum (бо в 68 лїтах) лежало між +30° а +35° C.

(Die Natur 1901).

Зимне сьвітло відкрив R. Dubois, професор унїверзитету в Лїоні. Сьвітло се дає один рід бактерий т. зв. фотобактериї, наколи їх культуру годує ся на буліоні з соли морскої, ґлїцерини,

пентону та аспараґіни в начиню шкляннім. Сьвітло се є досить сильне, так що можна ним осьвітити цїлу салю, мов сьвітлом місяця в повни; тревае оно досить довго і є зомсїм зимне (без слїду тепляних лучів).

В часї виправи Нанзена до бігуна північного робив численні поміри прискореня земского капітан Scott-Hansen при помочи маятника Штернека. Поміри ті порівнані з дотеперішними формулами на обчисленє прискореня потверджують правдивість другого взору берлїньского професора Гельмерта, так що нормальне прискоренє в ширинї ґеоґраф. φ дасть ся представити точно взором Гельмерта:

$$g_0 = 9{\cdot}78046\ (1 + 0{\cdot}005302\ \sin^2\varphi - 0{\cdot}000007\ \sin^2 2\varphi).$$

Physik. Zeitschrift 1901. N. 38).

Високість хмар мірено недавно в Анґлії при помочи фотоґрафії та одержано: для „cirrus“ 10200 m, „cirrocumulus“ 8600 m, вершок „cumulus“ 3000 m, підстава 1300 m, „cumulostratus“ 2200 m. Хмари осягають найвисшу високість коло 2—3 години з полудня, а опісля опадають.

(Nature).

Дыректорови обсерваториї Smith'a в Женеві (Ню-Йорк), William'ови R. Brooks'ови повело ся одержувати фотоґрафії при ужитю виключно сьвітла, яке походило від планети Венери. В найтемнїйшій порі нічній впускав він через отвір копули в обсерваториї до цїлком затемненої комнати лучі сеї планети та при ужитю виключно тих лучів фотоґрафував ріжні предмети; одержані фотоґрафії були надсподївано виразні та ясні.

(Prometheus 1901. Nr. 590).

На планетї Юпітер виступила 15^0 півн. ширини чорна пляма з слабою червоною примішкою (після обсерваций п. Solá в Барцельоні); пляма та має вид округлий і є в части оточена чорним перстеньом. Пляму ту спостережено 2. червня, а єще 31. мая Solá обсервуючи поверхню Юпітера не замітив на нїй нїчого нового. Пляма та є проте імовірно зовсїм нова.

(Astron. Nachricht. 1901 червень).

В послїдних 14 роках, т. є. від часу введеня фотоґрафії до астрономії, виступило після Pickering'a 8 нових звізд, а именно

Nova Persei 1887, Nova Aurigae 1891, Nova Normae 1893, Nova Carinae 1895, Nova Centauri 1895, Nova Sagittarii 1898, Nova Aquilae 1899 і Nova Persei 1901.

(Die Natur 1901. Nr. 16).

E. Nichols розслїджував в обсерваториї Yerkes'a тепляне промінюваннє деяких звізд та планет при помочи дуже докладного радїометра; з розслїдів тих випали на зглядне тепляне промінюваннє числа:

Веґа: Арктур: Юпітер = 1 : 2·2 : 4·7,

підчас коли їх ясність є:

Веґа: Арктур: Юпітер = 1 : 1 : 7·8.

Отже Арктур є сорозмірно теплїйший, а Юпітер яснїйший, як другі тїла.

(Naturwiss. Rundschau 1901. Nr. 19).