ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСКОЇ СЕКЦИЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

ТОМ IX.

ПІД РЕДАКЦИЄЮ

ІВАНА ВЕРХРАТСКОГО, Дра ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦКОГО
і Дра ЕВГЕНА ОЗАРКЕВИЧА.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SECTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

BAND IX.

REDIGIRT VON

JOHANN WERCHRATSKYJ, Dr. VLADIMIR LEWYCKYJ
u. Dr. EUGEN OZARKEVYČ.

У ЛЬВОВІ, 1903.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З печатні Наукового Товариства імени Шевченка
під зарядом К. Беднарского.

Зміст.

		Стор.
1.	*Клим Глібовицкий.* Микола Генрих Абель і его значінє в математиці	1—88
2.	*Юлїян Гірняк.* Роля сталої, плинної і ґазової фази в хемічній рівновазї	1—42
3.	*Др. Володимир Левицкий.* Відношенє ґеометриї метричної до метової	1—11
4.	*Др. Стефан Рудницкий.* Фізична ґеоґрафія при кінци XIX. століття	1—116
5.	*Др. Михайло Кос.* Очні хиби у новобранців	1—10
6.	*Др. Вячеслав Моравевский.* Переміна материї при акромеґалії	1—6
7.	*Др. Михайло Кос.* Лїченє трахоми і других запалень злучниці іхтарґаном	1—4
8.	*Др. Володимир Левицкий.* Начерк термінольоґії хемічної	1—12
9.	Бібліоґрафія і хроніка математично-фізична	1—61

INHALT.

		Seite
1.	*Klemens Hlibowyckyj.* Niels Henrik Abel und seine Bedeutung in der Mathematik	1—88
2.	*Julian Hirniak.* Die Bedeutung der festen, flüssigen und gasartigen Phase im chemischen Gleichgewichte	1—42
3.	*Dr. Wladimir Lewyckyj.* Das Verhältniss der metrischen und projectiven Geometrie	1—11
4.	*Dr. Stephan Rudnyckyj.* Physische Geographie am Ende des XIX. Jahrhundertes	1—116
5.	*Dr. Michael Kos.* Augengebrechen der Wehrpflichtigen	1—10
6.	*Dr. Wenzel Moraczewskyj.* Stoffwechselversuch bei Acromegalie	1—6
7.	*Dr. Michael Kos.* Behandlung des Trachoms und anderer Bindehautentzündungen mit Ichthargan	1—4
8.	*Dr. Wladimir Lewyckyj.* Ein Grundriss der chemischen Terminologie	1—12
9.	Mathematisch-physikalische Bibliographie und Chronik	1—61

МИКОЛА ГЕНРИХ АБЕЛЬ І ЄГО ЗНАЧІННЄ В МАТЕМАТИЦІ.

(З нагоди столїтних роковин єго уродин).

НАПИСАВ

Клим Глїбовицкий.

Сьвіт науковий обходив 1902. р. столїтню річницю уродин великого ґенїя, математика норвеґского Абеля. В виданях товариств наукових усїх народів вийшли або ще вийдуть статї посьвячені памяти сего незвичайного чоловіка — велита, яких не числить на сотки істория культури людскости[1]). Може раз на сто років спроможесь природа на єство такої сили духа, яка була у Абеля; творчість єго така величезна, а дїла такої ваги в істориї розвою математики, що прямо непонятним здає ся, щоби се міг зробити чоловік, що в 27. році життя зійшов до гробу. — Не годить ся-ж і нам остати зовсїм по заду других і не почтити Абелевого ювилею; а не мож сего зробити красше, як передаючи спадщину по нїм виданям Наукового Товариства ім. Шевченка.

ЧАСТЬ ПЕРША.

Житє Абеля.

Микола Ґенрих Абель (Niels Henrik Abel) родив ся 25. серпня 1802. р. в селї Findoe в Норвеґиї, де батько єго був протестанцким

[1]) Єго памяти посьвячений приміром величавий твір: N. H. Abel, memorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. (Leipzig, B. G. Teubner 1902, цїна 21 марок).

пастором. Дитячі лїта перевів Абель в Gierrestadt, сусїдній парохії, де вже в р. 1803. переноїс ся его отець. І ту розпочалось образованє малого хлопця під проводом самого батька і тревало до р. 1815, поки він не вступив до школи катедральної в Християнії. Ту зразу не виріжняв ся він від своїх співучеників; аж коли в р. 1818. Holmboe зістав іменований професором в тій власне школї, тодї на окремих годинах, які сей професор призначив на вправлюванє своїх учеників в розвязуваню проблємів з альгебри і геометриї, показавсь вперве талан Абеля, і від тодї став він розвиватись безпримірно



1802—1829.

скоро. Вже тодашні его поступи казали догадуватись в нїм генїя. Проф. Holmboe зайняв ся ним і поза годинами шкільними перейшов з ним основи рахунку ріжничкового і інтеґрального Айлєра (Euler). Відтак Абель ішов вже дальше самостійно, читав працї Lacroix'a, Francoeur'a, Poisson'a, Gauss'a, Lagrange'a і сам став пробувати сил своїх. Скінчивши школу катедральну вже по смерти свого батька вступив він на унїверзитет в Християнії, а що батько не оставив средств на его образованє, то деякі з поміж професорів зложились, щоби дати Абелеви можність незалежного істнованя,

конечного для так визначного талану. По двох роках ряд на внесенє сенату академічного надав ємў надзвичайну стипендію в висотї 200 Sp. річно. І ту стипендію побирав він через два роки аж до правильного укінченя студий університетских.

В тім часї працював Абель з великим запалом і написав кілька розправ друкованих в „Magazin für die Naturwissenschaften“ в Християнії. Перша з них друкована в р. 1820. має заголовок: „Allgemeine Methode Functionen einer variablen Grösse zu finden, wenn eine Eigenschaft dieser Functionen durch eine Gleichung zwischen zwei Variablen ausgedrückt ist“. І вже тодї займав ся він справою розвязки альґебраічної рівнаня пятого степеня; раз навіть здавалось ємў вже, що найшов розвязку, та на жаль спостеріг похибку в своїй роботї. Але се єго не зразило, і він постановив собі або дійти до розвязки або показати, що розвязка є неможлива. Се послїдне вдалось ємў і він в р. 1824. оголосив в Християнії свій доказ під заголовком: „Mèmoire sur les équations algébriques où on démontre l' impossibilité de la résolution de l' équation générale du cinquième degré“. Так розяснив Абель се питанє в теориї рівнань альґебраічних, питанє найважнїйше, яке було до розвязаня в аналїзї, як каже Legendre[1]).

З оґляду на ту визначну дїяльність наукову надав ряд Абелеви на єго просьбу стипендию 600 Sp. річно на протяг двох років, щоби ємў уможливити дальше фахове образованє на заграничних університетах. Абель хотїв зразу їхати прямо до Парижа, але що разом їхали і другі єго краяни і вибирали Берлїн, то і він поїхав разом і не жалував сего, бо там познакомив ся з Crelle'ом, що став відтак єго щирим приятелем і був ним аж до смерти. Дневник „Crelle's Journal“, якого перший зошит вийшов з початком р. 1826. в часї побуту Абеля в Берлїнї, причинив ся немало до лїтерацкої слави Абеля. Він був одним з найдїяльнїйших співробітників сеї часописи і в кождім зошитї була бодай одна або дві єго розвідки; а кожда з них причинила ся немало до піднесеня поваги сеї часописи.

З кінцем лютого р. 1826. покинув Абель Берлїн і на Липск, Фрейбурґ, Дрезно і Прагу поїхав до Відня; по місяцю, десь з кінцем мая, виїхав він з Відня до Італії та Швайцариї, а в липни був вже в Парижи, де задержав ся на довше, бо до сїчня 1827. р. Ту

---

[1]) Обширне представленє сеї квестиї находить ся в розвідцї: „К. Гаїбовицкий. Рівнанє пятого степеня (Збірник матем. природ. том II).

познакомив ся він з многими математиками, а між ними і з Cauchy'ом. Відтак побув ще в Берлїнї та Копенгазї, а в маю був вже з поворотом в Християнії. Ту старав ся він о катедру математики на унїверзитетї, але обі катедри, які були, були на сей час занятї, а нової для Абеля ряд не хотїв утворити. І так оставав він без місця аж до р. 1828, коли то поручено ему заступство проф. Hansteen'a на час подорожи сего до Сиберії. Вже тодї був Абель членом королївскої академії наук в Throndhjem.

Приятелї Абеля в Нїмеччинї звернули увагу пруского міністра просьвіти на визначний талан Абеля і спонукали, що ряд згодив ся запросити его на берлїньский унїверзитет. В тім самім часї кількох членів королївскої академії наук в Парижи звернули ся до короля шведского з просьбою, щоби покликав Абеля на унїверзитет в Штокгольмі, та пруский ряд поспішив ся. Crelle дістав припоручене поспитати Абеля, чи евентуально приняв би запрошене, а по прихильній его відповіди мав остаточно уложити ту справу і стягнути Абеля до Берлїна. Єще того самого дня сповнив Crelle припоручене, та на жаль було за пізно — лист прийшов вже по смерти. Невинна праця послїдних років, а також журба о завтра підкосили і так не сильне здоровле Абеля. В грудни 1828. р. серед лютої зими виїхав він до гути желїзної в Froland коло Arendal, де була его наречена панна Кетр (пізнїйше панї Keilhau); там захорував в сїчни 1829. р. і мимо усяких старань і заходів нареченої і властителїв гути помер на чахотку дня 6. цьвітня 1829[1]).

Можна сьміло сказати про него: Коли-б був пожив довше, то не одно ще були-б про него почули. То, що Абель оставив по собі, дає повне право до такого висказу. Вистане згадати доказ про неможливість альґебраічної розвязки рівнань загальних степеня вищого чим четвертий, его працї над функциями елїптичними, які властиво він сотворив разом з Jacobi'м, розправу про загальні прикмети функций переступних і т. д., щоби бачити, що не сказалось за богато. Се все в працї, що далеко розширили границї аналїзи.

Пригляньмо ся тепер спадщинї, яка осталась по сїм так передвчасно померлим ґеніяльнім математичнім дусї.

---

[1]) Порів. Holmboe: Notices sur la vie de l'auteur (Передмова до Oeuvres complètes de N. H. Abel). Обширну біоґрафію Абеля видав Bjerknes п. заг. Niels-Henrik Abel (Paris, Gauthier-Villars 1885).

ЧАСТЬ ДРУГА.

Твори Абеля[1]).

I. Шуканє функций двох величин змінних независимих x і y, таких f(xy), що f(z, f(xy)) є функциєю симетричною величини x, y і z. (Oeuvres complètes I. 1).

Вийшовши з частного приміру:

$$f(xy) = x+y, \quad \text{де} \quad f(z, f(xy)) = z+x+y,$$

де отже виходить симетрична функция даних величин, шукає автор відтак загальної форми функциї f. Яко симетрична мусить она сповняти слїдуючі рівнаня:

$$f(z, f(xy)) = f(x, f(yx))$$
$$f(z, f(xy)) = f(y, f(zx))$$

а коли для скороченя назвем:

$$f(xy) = r, \quad f(yz) = v, \quad f(zx) = s \qquad (1),$$

то дістанемо через ріжничкованє:

$$\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial z}} = \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{\frac{\partial s}{\partial z}}.$$

Наколи приймем z постійне, тодї:

$$\frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \varphi(y)$$

---

[1]) Твори Абеля вийшли в двох виданях; перше видане видав Holmboe в р. 1839, друге, дуже старанно вредаґоване через L. Sylow'a і S. Lie, вийшло заходом ряду норвеґского в Християнїї в мові французкій в р. 1881. п. заг.: Oeuvres complètes de Niels-Henrik Abel, nouvelle édition (перший том ст. VIII+621, том другий ст. IV+341) цїна 24 марок. — Розвідки Абеля, що ся відносять до альґебраічної розвязки рівнань, видав H. Maser враз з творами E. Galois під заг. Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen (Berlin, J. Springer 1889); їх є пять. Дві розвідки Абеля вийшли в „Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften", а іменно № 71 клясиків (з р. 1895) містить: „Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \cdots$" а № 111 (з р. 1900) містить: „Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen". Одна розвідка п. з. „mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes" вийшла в Парижи в р. 1841.

буде функцією самого y, а

$$\frac{\partial s}{\partial x} \quad \frac{\partial s}{\partial z} = \varphi(x)$$

буде такою самою функцією величин z і x, як v величин z і y; а з відси:

$$r = \psi\left[\int \varphi(x)dx + \int \varphi(y)dy\right]$$

(ψ якась функция). А коли для скороченя поставимо за інтеґрал $\int \varphi(x)dx$ і $\int \varphi(y)dy$ $\varphi(x)$ та $\varphi(y)$, дістанемо:

$$r = f(xy) = \psi\left(\varphi(x), \varphi(y)\right) \qquad (2)$$

т. в. форму, яку має мати функция дана, лиш треба обмежити рівнання головні (1), бо форма (2) в більше загальна як (1).

В той сам спосіб буде далї:

$$f(z, r) = \psi\left(\varphi(z), \varphi(r)\right) = \psi\left(\varphi(z) + \varphi\psi\left(\varphi(z), \varphi(y)\right)\right).$$

А що се вираженє в симетричне з огляду на x, y, z, то:

$$\varphi z + \varphi\psi\left(\varphi x + \varphi y\right) = \varphi x + \varphi\psi\left(\varphi y + \varphi z\right).$$

Най: $\varphi z = o$, $\varphi y = o$, то:

$$\varphi\psi\left(\varphi x\right) = \varphi x + c.$$

Положім $\varphi(x) = p$, то:

$$\varphi\psi(p) = p + c,$$

а коли φ_1 в функцією відворотною до φ такою, що $\varphi\varphi_1(x) = x$, то:

$$\psi(p) = \varphi_1(p + c),$$

а форма загальна функції, яку шукаєм, буде:

$$f(xy) = \varphi_1(c + \varphi x + \varphi y). \qquad (3)$$

Автор кінчить натяком, що можна в подібний спосіб найти функцій двох величин змінних, що будуть сповняти рівнання дані трох змінних.

Близькою тій розвідцї в иньша про: **функції, що сповняють рівнанє** $\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$. (Oeuvres compl. I. 103).

Рівнанє:

$$\psi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx) \qquad (1)$$

буде сповнене, коли приміром:

$$fy = \tfrac{1}{2}y, \quad \text{а} \quad \varphi x = \psi x = \log x$$

або коли:

$$fx = \sqrt{1-y^2}, \quad \text{а} \quad \varphi x = \psi x = \arcsin x.$$

Абель ставить собі за задачу найти загальний вид функций, що відповідали би даному рівнаню і виводить, що функциями такими будуть:

$$\varphi x = a\alpha \int \frac{dx}{fx + \alpha' x}$$

$$\text{де} \quad a = \varphi' 0, \quad \alpha = f0, \quad \alpha' = f'0 \qquad (2)$$

$$\psi x = a\alpha \int \frac{dx}{\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \alpha' x} + \varphi 0$$

підчас коли само **fx** є визначене через рівнанє:

$$f'x\ (fx + \alpha' x) + (mx - \alpha' fx) = 0 \qquad (3)$$

або:

$$c^{2n} = (fx - nx)^{n+\alpha}\ (fx + nx)^{n-\alpha'}$$

де **c** означає постійну інтеґрования.

Рівнаня ті можуть послужити до вишуканя функций сповняючих рівнанє (1), в частних случаях, при означених вартостях на **n** і α'.

Функцию φx виражену ту (2) в видї інтеґралу може також представити при помочи льоґаритмів в видї:

$$\varphi x = \frac{a\alpha}{n+\alpha'} \log\ (cnx + cfx), \quad fx \text{ відоме.}$$

В случаях $\alpha' = \infty$, і $n = 0$, fx приймає якусь вартість частну яку найде ся з рівнаня (3).

II. Квестию **розвязки рівнань альґебраічних** розібрав і розвязав Абель в слїдуючих розвідках:

а) **Розвідка про рівнаня альґебраічні, де виказуєсь неможливість розвязки загального рівнаня пятого степеня.** (Християнїя 1824, Oeuvres compl. 1881. I. 28).

б) **Доказ неможливости альґебраічної розвязки загальних рівнань, степеня висшого як четвертий.** (Crelle's Journal I. 1826. Oeuvres compl. I. 66).

в) **Розвідка про специяльну клясу рівнань, що ся дають альґебраічно розвязати.** (Crelle's J. IV. 1829. Oeuvres compl. I. 478).

г) **Про альґебраічну розвязку рівнань** (твір посмертний, Oeuvres compl. II. 217).

д) **Нова теория альґебраічної розвязки рівнань** (вступ до розвідки попередної, Oeuvres compl. II. 329).

Виклади тих епохальних розвідок, що творять chef d' oeuvres Абеля в альґебрі, розібрали ми основно в наведеній вище розвідці[1]), тому пригадаєм тут лиш хід гадок в головних чертах.

1. Абель каже ось-так: Розвязати альґебраічно рівнанє значить виразити корені рівнання через функції альґебраічні сочинників. Тому-то розбирає він вперед загальний вид функцій альґебраічних і шукає, чи можна сповнити дане рівнанє, наколи вставимо на місце незвісної виражене функції альґебраічної.

Най:

$$c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots + c_{r-1} y^{r-1} + y^r = 0 \qquad (1)$$

буде дане рівнанє з сочинниками $c_0\ c_1\ c_2 \cdots$, що є виміримими функциями величин независимих $x', x'' \cdots$, та най функция альґебраічна величин x', x'',

$$y = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \qquad (2)$$

сповняє то рівнанє. Вставивши то виражене за y в дане рівнанє одержимо (редукуючи висші степені p, чим $p^{\frac{n-1}{n}}$) виражене виду:

$$r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0 \qquad (3)$$

де $r_0\ r_1 \cdots r_{n-1}$ є функції виміримі величин $p\ q_0\ q_1 \cdots q_{n-1}$. Рівнанє (3) сповнить ся лиш тоді, наколи:

$$r_0 = 0,\ r_1 = 0, \cdots r_{n-1} = 0.$$

Оно ся сповнить також, коли за $p^{\frac{1}{n}}$ будемо класти по черзі:

$$\alpha^s p^{\frac{1}{n}} \quad (s = 0, 1, 2, \cdots n-1),$$

де α є коренї рівнання:

$$\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + 1 = 0.$$

З огляду на се дістанемо на y ряд вартостий (q_1 кладем $= 1$).

$$y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

$$y_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} \alpha^{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

— — — — — — — — — — — — — — —

Звідси можна кожду з величин:

$$p^{\frac{1}{n}}\ q_0\ q_2 \cdots q_{n-1}$$

[1]) пор. Ґлібовицкий loc. cit.

виразити вимірямо через y_1 y_2 ·····. Бачимо проте, що наколи рівнанє якесь дасть ся альґебраічно розвязати, то на кождий корінь рівнання дістанемо вираженє таке, що кожда функция, яка в нього входить, є вимірямою функциєю коріньів даного рівнання (1).

Наколи загальне рівнанє пятого степеня має мати розвязку альґебраічну, то в склад єго увійдуть функциї виду $v = \sqrt[m]{R}$, де R є вимірима функция сочинників рівнання, а m є число перве. На основі (1) є v вимірима функция коріньів; она має m ріжних вартостий, а так як число ріжних вартостий, які функция m величин може приймати, не може бути меньше, як найбільше число перве, що приходить в добутку 1.2.3. ····· m, бо в противнім разї зведе ся до 2 або 1, а се є функция пятьох величин x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, то m яко число перве може бути рівне 1, 2, 5. $m = 1$ треба відкинути, бо корінь рівнання не може бути вимірямою функциєю сочинників; остає отже $m = 2, 5$.

Возьмім $m = 5$; загальний вид функциї пятивартістної пятьох величин є:

$$\sqrt[5]{R} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4;$$

а відси:

$$x = s_0 + s_1 \sqrt[5]{R^1} + s_2 \sqrt[5]{R^2} + s_3 \sqrt[5]{R^3} + s_4 \sqrt[5]{R^4},$$

а відтак, як передше:

$$s_1 \sqrt[5]{R^1} = \frac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) \quad (\alpha^5 = 1).$$

То рівнанє є неможливе, позаяк права сторона має 120 вартостий, коли тимчасом се має бути корінь рівнання 5. степеня:

$$z^5 - s_1 R = 0.$$

Остає отже $m = 2$. Тодї є:

$$\sqrt{R} = p + qs,$$

де p і q є функциї симетричні, а $s = (x_1 - x_2) \cdots (x_4 - x_5)$; а що, наколи переміннмо x_1 і x_2 випаде:

$$-\sqrt{R} = p - qs,$$

то мусить бути $p = 0$, отже $\sqrt{R} = qs$, значить ся, що кожда альґебраічна функция першого степеня, що виступає в вираженю на корінь, мусить мати вид $\alpha + \beta\sqrt{s^2} = \alpha + \beta s$ (α, β симетричні функциї). А що є річ неможлива, коріні виразити через функцию виду $\alpha + \beta\sqrt{R}$, то мусить істнувати рівнанє:

$R^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}} = v$ (α, β функції симетричні, m число перве, v вимірима функция корінів). З відси є:

$$v_1 = \sqrt[m]{\alpha + \beta s}, \quad v_2 = \sqrt[m]{\alpha - \beta s}, \quad v_1 v_2 = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}.$$

Наколи би функция $v_1 v_2$ не була симетрична, то для $m = 2$ було би $v = \sqrt{\alpha + \beta\sqrt{s^2}}$, значить ся v малоби чотири вартости, що неможливе. Мусить отже $\gamma = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}$ бути функция симетрична; тоді є:

$$p = v_1 + v_2 = R^{\frac{1}{m}} + \frac{\gamma}{R} R^{\frac{m-1}{m}}, \qquad R = \alpha + \beta\sqrt{s^2}.$$

Положім за $R^{\frac{1}{m}}$ $\alpha R^{\frac{1}{m}}$, $\alpha^2 R^{\frac{1}{m}}$, ... де $\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + 1 = 0$, то дістанем місто p вартости p_1 p_2 ..... p_m. Легко показати, що p має m ріжних вартостий; звідси слідує $m = 5$, а тоді:

$$p = R^{\frac{1}{5}} + \frac{\gamma}{R^{\frac{1}{5}}} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4.$$

З відси слїдує далї:

$$x = s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + s_3 p^3 + s_4 p^4,$$

або:

$$x = t_0 + t_1 R^{\frac{1}{5}} + t_2 R^{\frac{2}{5}} + t_3 R^{\frac{3}{5}} + t_4 R^{\frac{4}{5}}$$

(t_0 t_1 ..... є вимірими функциї R і сочинників даного рівнаня. З відси (як передше):

$$t_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) = p' \quad (4)$$

далї є:

$$p'^5 = t_1^5 R,$$

а що

$t_1^5 R$ має вид $u + u'\sqrt{s^2}$, то є $p'^5 = u + u'\sqrt{s^2}$, або $(p'^5 - u)^2 = u'^2 s^2$.

Звідси би виходило p' через рівнане 10. степеня, якого сочинники є симетричними функциями, а що се неможливе, бо після (4) p' мало би 120 ріжних вартостий, то і загальне рівнане степеня пятого (а так само і висшого) не дасть ся розвязати.

2. Та хотяй рівнаня степеня висшого чим 4. взагалї альґебраічно розвязати ся не дадуть, то однак є певна кляса рівнань всяких степенїв, що дають розвязку альґебраічну; такими є приміром рівнаня виду $x^n - 1 = 0$. Розвязка таких рівнань опираєсь

на відношеннях, які заходять між корінями. І так: коли два корінї рівнання незведимого є так звязані між собою, що один з них можна виразити вимірямо через другий, тодї розвязка рівнання даного дає ся звести до розвязки якогось числа рівнань низшого степеня. А і само рівнанє дане дасть ся тодї розвязати альґебраічно, коли степень єго є числом первим.

Так само дасть ся розвязати рівнанє, єсли всї єго корінї мож представити в видї:

$$x,\ \Theta x,\ \Theta^2 x,\ \ldots\ \Theta^{n-1}x \qquad (\Theta^n x = x)$$

(є се Абелева ґрупа правильна), де Θx є вимірима функция величини x, $\Theta^2 x$ така сама функция, що Θx, два рази взята ($\Theta^2 x = \Theta\,\Theta x$) і т. д.

Метода, якою послугує ся Абель при розвязуваню сих послїдних рівнань, годить ся з методою Gauss'a, поданою в „Disquisitiones arithmeticae“ pag. 645 sqts.

В сїм случаю всї корінї рівнання дадуть ся виразити вимірямо при помочи одного з них; але на відворот рівнання, котрих корінї мають ту прикмету, не все дають ся розвязати альґебраічно, кромі що-йно наведеного случаю.[1])

Розвязка альґебраічна рівнання є можлива еще в однім случаю, а се тодї, коли всї корінї рівнання дадуть ся виразити альґебраічно через один з них, приміром z, а поміж двома якими-небудь корінями тогож рівнання Θx і $\Theta_1 x$ заходить відношенє:

$$\Theta\,\Theta_1 x = \Theta_1\,\Theta x.$$

(є се ґрупа абелева).

На случай, коли степень рівнання даного $\varphi(x) = 0$ (а все маємо на думцї рівнання незведимі) μ дасть ся розложити ся на:

$$\mu = \varepsilon_1^{\nu_1}\,\varepsilon_2^{\nu_2}\,\varepsilon_3^{\nu_3}\ldots\ldots\,\varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha}$$

де $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ldots\ldots$ є числами первими, тодї x буде можна винайти через розвязку ν_1 рівнань степеня ε_1, ν_2 рівнань степеня ε_2 і т. д. і всї тї рівнання дадуть ся альґебраічно розвязати.

Коли $\mu = 2^\nu$, можна найти вартість x через витягненє ν корінїв квадратових.

Тї висліди стосує Абель до функцій колових і показує, що щоби поділити округ кола на $(2n+1)$ рівних частий, вистане:

---

[1]) Рівнання тї назвав Kronecker „рівнаннями Абелевими“.

1) поділити округ на 2n рівних частий.

2) поділити лук на 2n рівних частий.

3) витягнути корінь квадратовий з величини $(2n+1)$.

Послїдний теорем висказав вже і Gauss в Diquisitiones arith., на що і Абель ся покликує.

3. Дальші его працї з обсягу **альґебри** відносились до сумованя рядів. Тут належать:

Досліди над рядом:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$$

(Oeuvres compl. I. 66)

Розвідка ся важна в тим, що в нїй по раз перший (спрецизовано) поставлено умовини збіжности ряду.

Тих умовин і прикмет рядів збіжних вичислює автор 6, а в они слїдуючі:

I. Если $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \cdots$ становлять ряд величин додатних, а квот $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, для ростучих безнастанно вартостий m, зближав ся безконечно до границї α, де $\alpha > 1$, тодї ряд:

$$\varepsilon_0\varrho_0+\varepsilon_1\varrho_1+\varepsilon_2\varrho_2+\cdots\cdots+\varepsilon_m\varrho_m+$$

— де ε_m для m безнастанно ростучого не наближав ся безконечно до зера, — в рядом розбіжним.

II. Наколи в ряді $\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots\cdots$ квот $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$

для ростучих вартостий m зближав ся безнастанно до границї $a<1$, тодї ряд

$$\varepsilon_0\varrho_0+\varepsilon_1\varrho_1+\varepsilon_2\varrho_2+\cdots\cdots$$

— де $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots$ не переходять одиниці, — в рядом збіжним.

III. Если $p_m = t_0+t_1+t_2+\cdots\cdots+t_m$

в меньше, чим якась означена величина δ, тодї

$r=\varepsilon_0 t_0+\varepsilon_1 t_1+\varepsilon_2 t_2+\cdots\cdots+\varepsilon_m t_m$ в меньше, чим $\varepsilon_0\delta$,

де $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ суть величинами додатними малїючими.

IV. Наколи ряд

$$f(\alpha)=v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\cdots\cdots+v_m\alpha^m+\cdots\cdots$$

в збіжний для якоїсь вартости δ змінчивої α, то він буде збіжний і для кождої меньшої вартости α, а для безнастанно малїючої вартости β функция $f(\alpha+\beta)$ зближав ся безконечно до границї $f(\alpha)$, коли α в рівне або меньше чим δ.

V. Коли $v_0 + v_1\delta + v_2\delta^2 + \cdots\cdots$

в рядом збіжним, а $v_0, v_1, v_2,$ представляють функциї величини x, тяглі в границях межи a і b, то ряд

$$fx = v_0 + v_1 a + v_2 a^2 + \cdots\cdots$$

де $a < \delta$, буде також збіжний і буде функциею тяглою x в тих самих границях.

VI. Єсли через $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_0', \varrho_1', \varrho_2', \cdots\cdots$ назначимо вартости чисельні відповідних членів двох рядів збіжних

$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots = p$, $v_0' + v_1' + v_2' + \cdots\cdots = p'$

то наколи ряди

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots\cdots \qquad \varrho_0' + \varrho_1' + \varrho_2' + \cdots\cdots$$

суть збіжні, тодї ряд $r_0 + r_1 + r_2 + \cdots\cdots$ котрого член загальний в:

$$r_m = v_0 v'_m + v_1 v'_{m-1} + v_2 v'_{m-2} + \cdots\cdots + v_m v'_0$$

буде новим рядом збіжним, а его сума буде рівнатись:

$$(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots\cdots)\ (v_0' + v_1' + v_2' \ldots).$$

По тім вступі автор приходить до властивої задачі вишукання суми ряду:

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-m)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots\cdots \qquad (1)$$

для всїх вартостий дїйсних або мнимих x і m, для яких сей ряд в збіжний.

Назвім наш ряд через $\varphi(m)$ і положім для скороченя:

$$1 = m_0,\ \frac{m}{1} = m_1,\ \frac{m(m-m)}{1.2} = m_2, \ldots \frac{m(m-1)\cdots(m-\mu+1)}{1.2.3\cdots\mu} = m_\mu$$

то $\varphi(m) = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \cdots\cdots + m_\mu x^\mu + \cdots\cdots \qquad (2)$

Най $x = a + bi$, $m = k + k'i$ $(i = \sqrt{-1})$

де a, b, k, k' в числа дїйсні, то дістанемо

$$\varphi(m) = p + qi$$

де p і q суть рядами.

Представмо x в виді

$$x = a(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad \text{де } a = \sqrt{a^2 + b^2}$$

так само:

$$\frac{m-\mu+1}{\mu} = \delta_\mu(\cos\gamma_\mu + i\sin\gamma_\mu)$$

де

$$\delta_\mu = \sqrt{\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2}$$

то:

$$m_\mu x^\mu = \alpha^\mu . \delta_1 . \delta_2 . \delta_3 \cdots \delta_\mu \left[\cos(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu) + i\sin(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu)\right].$$

Для скорочення назвемо:

$$\delta_1 . \delta_2 . \delta_3 \cdots \delta_\mu = \lambda_\mu$$

$$\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu = \Theta_\mu$$

тодї:

$$m_\mu x^\mu = \lambda_\mu \alpha^\mu (\cos \Theta_\mu + i \sin \Theta_\mu)$$

а $\varphi(m)$ представить ся: (3)

$$\varphi(m) = 1 + \lambda_1 \alpha (\cos \Theta_1 + i \sin \Theta_1) + \lambda_2 \alpha^2 (\cos \Theta_2 + i \sin \Theta_2) + \cdots\cdots$$
$$+ \cdots\cdots + \lambda_\mu \alpha^\mu (\cos \Theta_\mu + i \sin \Theta_\mu) +$$

а відси:

$$p = 1 + \lambda_1 \alpha \cos \Theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \cos \Theta_2 + \cdots\cdots + \lambda_\mu \alpha^\mu \cos \Theta_\mu + \cdots\cdots \quad (4)$$
$$q = \lambda_1 \alpha \sin \Theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \sin \Theta_2 + \cdots + \lambda_\mu \alpha^\mu \sin \Theta_\mu + \cdots\cdots$$

З форми на λ_μ виходить

$$\lambda_{\mu+1} = \delta_{\mu+1} \lambda_\mu$$

отже:

$$\lambda_{\mu+1} \alpha^{\mu+1} = \alpha \delta_{\mu+1} \lambda_\mu \alpha^\mu$$

або:

$$\frac{\lambda_{\mu+1} \alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu \alpha^\mu} = \alpha \delta_{\mu+1}$$

а що:

$$\delta_{\mu+1} = \sqrt{\left(\frac{k-\mu}{\mu+1}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2}$$

для вартостий μ ростучих в безконечність зближає ся до одинищ, через що

$$\frac{\lambda_{\mu+1} \alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu \alpha^\mu}$$

наближає ся до границї α, проте p і q буде збіжне або розбіжне, залежно від того, чи α є більше, чи меньше від одинищ.

Представмо ряд $\varphi(m)$ в виді:

$$p + q\,i = r(\cos s + i \sin s)$$

де $r = \sqrt{p^2 + q^2}$;

возьмім, що:

$$s = \psi(k,\ k'), \qquad r = f(k,\ k'),$$

то:

$$p + q\,i = \varphi(k + k'\,i) = f(k,\ k')\left[\cos\psi(k\,k') + i \sin\psi\,(k\,k')\right]$$

а вид тих функций f і ψ буде:

одної:

$$\psi(k\,k') = \beta k + \beta' k' - 2m\pi$$

де β і β' суть якимись величинами постійними,

а другої:

$$f(k\,k') = e^{\delta k + \delta' k'}$$

де δ і δ' суть рівнож величинами постійними.

З відси:

$$\varphi(k + k'\,i) = e^{\delta k + \delta' k'}\left[\cos(\beta k + \beta' k') + i \sin(\beta k + \beta' k')\right] \tag{5}$$

в найзагальнїйшою функциею, представляючою суму ряду $\varphi(m)$ з неозначеними еще на разї величинами постійними β, β', δ, δ'.

Роздїлїм часть першорядну і другорядну, то дістанемо:

$$e^{\delta k + k'\delta'}\cos(\beta k + \beta' k') = 1 + \lambda_1 \alpha \cos\Theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \cos\Theta_2 + \cdots + \lambda_\mu \alpha^\mu \cos\Theta_\mu + \cdots \tag{6}$$

$$e^{\delta k + \delta' k'}\sin(\beta k + \beta' k') = \lambda_1 \alpha \sin\Theta_1, + \lambda_2 \alpha^2 \sin\Theta_2 + \cdots + \lambda_\mu \alpha^\mu \sin\Theta_\mu + \cdots$$

а для $k' = 0$ взори ті перейдуть на:

$$e^{\delta k}\cos\beta k = 1 + \frac{k}{1}\alpha\cos\varphi + \frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\cos 3\varphi + \cdots$$

$$e^{\delta k}\sin\beta k = \frac{k}{1}\alpha\sin\varphi + \frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\sin 3\varphi + \cdots \tag{7}$$

а з відси для $k = 1$ найдемо:

$$e^{\delta} = \sqrt{1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2} \qquad \text{і} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\alpha\sin\varphi}{1 + \alpha\cos\varphi}$$

т. з.

$$\delta = \tfrac{1}{2}\log(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2), \quad \text{а} \quad \beta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\alpha\sin\varphi}{1 + \alpha\cos\varphi}\right)$$

а тодї рівнання (7) представлять ся остаточно в видї:

$$1+\frac{k}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\cos 3\varphi+$$
$$=\sqrt{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^k}\cos k\,s$$
$$\frac{k}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\sin 3\varphi+\cdots \tag{8}$$
$$=\sqrt{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^k}\sin k\,s$$

де s значить найменьшу вартість, яку β може приняти. Та вартість заключена в поміж $-\frac{\pi}{2}$ а $+\frac{\pi}{2}$. Подібно, як β і δ, найде ся вартости на β' і δ' і они будуть $\beta'=\delta$, $\delta'=-\beta$. А тодї рівнання (6) можуть приняти вид:

$$1+\lambda_1\alpha\cos\Theta_1+\lambda_2\alpha^2\cos\Theta_2+\cdots+\lambda_\mu\alpha^\mu\cos\Theta_\mu+\cdots$$
$$=e^{\delta k-\beta k'}\cos(\beta k+\delta k')=p$$
$$\lambda_1\alpha\sin\Theta_1+\lambda_2\alpha^2\sin\Theta_2+\cdots+\lambda_\mu\alpha^\mu\sin\Theta_\mu+\cdots \tag{9}$$
$$=e^{\delta k-\beta k'}\sin(\beta k+\delta k')=q$$

Отже наш ряд $\varphi(m)=p+qi$ буде:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-\mu+1)}{1.2.3\cdots\mu}x^\mu+\cdots$$
$$=e^{\delta k-k\beta'}\left[\cos(\beta k+\delta k')+i\sin(\beta k+\delta k')\right]$$

де $m=k+k'i$, а $x=a+bi=\alpha(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

з чого виходить:

$$\alpha=\sqrt{a^2+b^2},\ \alpha\cos\varphi=a,\ \alpha\sin\varphi=b,\ \delta=\tfrac{1}{2}\log(1+2a+a^2+b^2)$$
$$\beta=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{1+a}\right).$$

Вставивши тое і кладучи m замість k, а n замість k', дістанемо на суму ряду:

$$1+\frac{m+ni}{1}(a+bi)+\frac{(m+ni)(m+ni-1)}{1.2}(a+bi)^2+$$
$$+\frac{(m+ni)(m+ni-1)(m+ni-2)}{1.2.3}(a+bi)^3+$$
$$+\cdots+\frac{(m+ni)(m+ni-1)+\cdots+(m-\mu+1+ni)}{1.2.3\quad\mu}(a+bi)^\mu+ \tag{10}$$

$$= \left[(1+a)^2+b^2\right]^{\frac{m}{2}} e^{-n \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{1+a}\right)} \left[\cos\left\{ m \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{1+a}\right) + \frac{1}{2} n \log\left((1+a)^2+b^2\right)\right\} \right.$$
$$\left. + i \sin\left\{ m \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{1+a}\right) + \frac{1}{2} n \log\left((1+a)^2+b^2\right)\right\} \right]$$

Вираженє то сповняє ся для всяких $\alpha = \sqrt{a^2+b^2}$ меньших чим одиниця.

Для $b = 0$ і $n = 0$ дістанемо ряд поданий в заголовку.

Єслиж $\sqrt{a^2+b^2}$ є рівне одиниці, тодї наш ряд буде збіжний для всякої вартости m заключеної поміж -1 і $+\infty$, єсли рівночасно не є $\alpha = -1$. Наколиж $\alpha = -1$, то m мусить бути додатне. У всїх иньших случаях ряд є розбіжний.

Ту треба згадати також про другі ряди, якими займав ся Абель.

І так ряд:

$$y = \varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \cdots\cdots + \varphi(n)x^n \text{ [1]}$$

— де n є число цїле додатне, скінчене або безконечно велике, а $\varphi(n)$ означає функцию альґебраічну вимірима величин n, — сумує автор при помочи рядів виду:

$$p = A0^\alpha + Ax + A2^\alpha x^2 + \cdots\cdots + An^\alpha x^n$$
$$q = \frac{B}{\alpha^\beta} + \frac{Bx}{(\alpha+1)^\beta} + \frac{Bx^2}{(\alpha+2)^\beta} + \cdots\cdots + \frac{Bx^n}{(\alpha+n)^\beta}$$

котрі на суму дають:

$$\frac{p - A0^\alpha}{A} = x + 2^\alpha x^2 + 3^\alpha x^3 + \cdots\cdots + n^\alpha x^n =$$
$$= x\,d\left(x.d\left(x \cdots\cdots d\left(x.d\left(\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right)\right)\right)\right)$$

а $$\frac{q}{B} = \frac{1}{x^\beta} + \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \cdots\cdots \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx\,(x^{\beta-1} - x^{n+\beta})}{1-x}$$

а що ряд даний складаєсь з рядів тих двох видів, то і сума цїлого ряду буде через них визначена.

Подібно находить і суму ряду:

$$z = f(0)\varphi(0) + f(1)\varphi(1)x + f(2)\varphi(2)x^2 + \cdots\cdots + f(n)\varphi(n)x^n$$

де $f(n)$ означає функцию яку небудь, а $\varphi(n)$ функцию вимірима.

---

[1]) Oeuvres compl. II. 41.

Окремо займає ся еще автор рядом:

$$\psi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots\cdots \quad ^1)$$

Подає іменно лежандрівскі висліди сумованя сего ряду для частних аргументів в границях збіжности $(-1 \quad +1)$, а відтак сумує сей ряд для аргументу, що є добутком функций двох змінних, а іменно:

$$\psi\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\right) = \psi\left(\frac{y}{1-x}\right) + \psi\left(\frac{x}{1-y}\right) - \psi y - \psi x - \log(1-y)\log(1-x).$$

В тім взорі x і y мусять мати такі вартости, щоби величини: $\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\right)$, $\frac{y}{1-x}$, $\frac{x}{1-y}$, y, x не перевисшали одиниці. А то стане ся для додатних x і y, коли $x+y<1$. — Наколиж $y=-m$, тоді мусить $x+m<1$, а коли оба і x і y суть від'ємні, тоді вистане, наколи кожде з них є меньше чим одиниця.

III. Перейдїм тепер до другої царини аналїзи, яку Абель збогатив безсмертними дослїдами, а се до теориї функций еліптичних, та переглянемо по черзї его розвідки в тій области.

1. Перша его розвідка має заголовок:

Розвязка загального проблему відносячого ся до перетворення функций еліптичних. (Oeuvrel compl. I. 253).

Ту ставить собі Абель за завдане найти всї можливі случаї, в яких виповнить ся рівнане рїжничкове:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)}} = \pm a\,\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

наколи за y вставимо функцию альґебраічну величини x, виміриму або невиміриму.

Задача дуже тяжка на око з огляду на загальність функциї y дасть ся провадити до случаю, коли y є виміриме, змінить ся лиш сочинник a даного рівнаня, а прочі величини c c_1 e e_1 остануть ті самі.

Положім:

$$\Theta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

---

[1]) Oeuvres compl. II. 249.

то x буде якоюсь функцією величини Θ; назвім її $\lambda\Theta$. Дальше назвім через $\frac{\omega}{2}$ і $\frac{\omega'}{2}$ вартости Θ для $x = \frac{1}{c}$ і $x = \frac{1}{e}$, а через $\Delta\Theta$ функцию $\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}$.

Тодї на підставі рівнаня:

$$\lambda(\Theta \pm \Theta') = \frac{\lambda\Theta . \Delta(\Theta') \pm \lambda\Theta' . \Delta(\Theta)}{(1 - c^2e^2\lambda^2\Theta) . \lambda^2\Theta'}$$

де Θ і Θ' означають величини які небудь, і на підставі твердженя, що рівнанє:

$$\lambda\Theta = \lambda\Theta'$$

сповнить ся, коли положимо:

$$\Theta' = (-1)^{m+m'}\Theta + m\omega + m'\omega'$$

де m і m' є які небудь числа цїлковиті додатні або від'ємні, легко буде можна дістати загальне вираженє на y і всї вартости величин c_1 і e_1.

Най $y = \psi(x)$ буде функцією вимірімою, якої шукаємо, то x виражене яко функция y буде корінем рівнаня $y = \psi(x)$; а всї корінї сего рівнаня то будуть всї ріжні вартости вираженя:

$$\lambda(\Theta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \cdots\cdots + k_\nu\alpha_\nu)$$

які дістанемо, даючи величинам k_1 k_2 $\cdots\cdots$ k_ν всї вартости цїлковиті, підчас коли α_1 α_2 $\cdots\cdots$ α_ν мати муть вид: $\mu\omega + \mu'\omega'$ (μ і μ' числа вимірімі). Назвім вартости повисшого вираженя:

$$\lambda\Theta,\ \lambda(\Theta + \alpha_1),\ \lambda(\Theta + \alpha_2), \cdots\cdots \lambda(\Theta + \alpha_{m-1})$$

і положім $\psi(x) = \frac{p}{q}$ (p і q функциї цїлковиті величини x без спільного подїльника), тодї:

$$p + qy = A(x - \lambda\Theta)\big(x - \lambda(\Theta + \alpha_1)\big) \cdots\cdots \big(x - \lambda(\Theta + \alpha_{m-1})\big)$$

а рівнанє се сповнить ся для всякої вартости x. A яко сочинник при x^{m-1} буде мати вид $f - gy$, де f і g є величини постійні.

На случай, коли p і q є степеня першого, розвязка нашої задачі може мати слїдуючі три види:

1) $\quad y = ax, \quad c_1^2 = \frac{c^2}{a^2}, \quad e_1^2 = \frac{e^2}{a^2}$

2) $\quad y = \frac{a}{ec}\,\frac{1}{x}, \quad c_1^2 = \frac{c^2}{a^2}, \quad e_1^2 = \frac{e^2}{a^2}$

3) $y = m\,\frac{1 - x\sqrt{ec}}{1 + x\sqrt{ec}}, \quad c_1 = \frac{1}{m}\,\frac{\sqrt{c} - \sqrt{e}}{\sqrt{c} + \sqrt{e}}, \quad e_1 = \frac{1}{m}\,\frac{\sqrt{c} + \sqrt{e}}{\sqrt{c} - \sqrt{e}}, \quad a = \frac{m\sqrt{-1}}{2}(c - e).$

Для якого-небудь степеня m функцій p і q дістанемо:

$$y = \frac{f' + f \cdot \varphi\Theta}{g' + g \cdot \varphi\Theta}$$

де f' g' є сочинники при x^{m-1} в p і q, а $\varphi\Theta$ має вид:

$$\varphi\Theta = (1-k)x + \frac{k'' - k'}{ec} \frac{1}{x} \sum_{\alpha} \frac{2x\Delta(\alpha)}{1 - e^2c^2\lambda^2\alpha \cdot x^2};$$

k, k' і k'' є рівні зеру або одиниці.

З тих перетворень витягав Абель дуже важні твердження, що дотичать елїптичних функцій; і так:

а) Наколи рівнанє:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)}} = \pm a \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

сповнить ся через підставленє: $y = \psi(x) = \frac{p}{q}$, де степень функцій p і q є рівний добуткови mn, то всегда буде можна найти функциї вимірими φ і f такі, що наколи положимо:

$$x_1 = \varphi(x) = \frac{p'}{q'},$$

то дістанемо:

$$y = f(x_1) = \frac{p_1}{q_1}$$

$$\frac{dx_1}{\sqrt{(1-c_2^2x_1^2)(1-e_2^2x_1^2)}} = a_1 \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)}} = a_2 \frac{dx_1}{\sqrt{1-c_2^2x_1^2)(1-e_2^2x_1^2)}}$$

при чім степень функцій p' і q' є рівний одному з чинників m і n, а степень p_1 і q_1 другому.

б) Який-небудь бувби степень рівнаня $p - qy = 0$, то все можна буде дістати вартість x в y дорогою альґебраічною. Маємо отже одну клясу рівнань, що дадуть ся розвязати альґебраічно; їх корінї будуть функциями вимірими величин:

$$y,\ r_1^{\frac{1}{n_1}},\ r_2^{\frac{1}{n_2}},\ \cdots\cdots\ r_\nu^{\frac{1}{n_\nu}}$$

де n_1 n_2 n_ν в перші зглядом себе, а їх добуток рівнаєсь степеневи рівнання даного; r_1, r_2, ... r_ν мають вид:

$$\xi + t\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)}$$

(ξ і t функциї цїлковиті y).

в) Коли шукаєм всїх можливих розвязок рівнання:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c^2y^2)(1-e^2y^2)}} = a\,\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

і оно дасть розвязку альґебраічну що до x і y без огляду на те, чи y дасть ся представити вимірімо через x чи нї, то величина постійна a буде мати вид $\mu' + \sqrt{-\mu}$, де μ і μ' в числа вимірімі, а μ в все додатне. При такій вартости на a можна найти безконечне число ріжних вартостий e і c, що будуть сповняти наше рівнанє, а всї они дадуть ся виразити через корінї.

г) Через введенє нових змінних перейде рівнанє на:

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-b^2\sin^2\psi}} = a\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Наколи заложимо φ і ψ дїйсне, а модул $c < 1$, а надто рівнанє дістане на інтеґрал функцию альґебраічну що до $\sin\varphi$ і $\sin\psi$, то a буде квадратовим корінем з додатної вимірімої величини.

Яко додаток до попередних перетворень функций еліптичних випроваджує Абель теорему:

Щоби рівнанє:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)}} = a\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

сповнити рівнанєм альґебраічним о змінних x і y, при чім модули c і c_1 в меньші як 1, а сочинник a дїйсний або мнимий, потреба, а заразом вистарчає, щоби тї модули так були звязані з собою, щоби одно з виражень $\frac{\omega_1}{\tilde{\omega}_1}$ і $\frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1}$ дало ся виразити вимірімо через $\frac{\omega}{\tilde{\omega}}$,

де $$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

а $$\frac{\tilde{\omega}}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2x^2)}}$$

$$b_1 = \sqrt{1-c^2}$$

а де ω_1 і $\tilde{\omega}_1$ відносять ся до модулїв c_1 і b_1.

2. В окремій розвідці випроваджує Абель:

Число перетворень функції еліптичної одержаних через підставлене функції виміримої, котрої степень є числом першим. (Oeuvres compl. I. 309).

Приймім, що рівнанє

$$\frac{dy}{\Delta'} = a\,\frac{dx}{\Delta} \qquad (1)$$

де $\Delta' = (1-y^2)(1-c_1{}^2y^2)$, $\Delta = (1-x^2)(1-c^2x^2)$

сповнить ся, коли за y підставимо функцию виміриму x виду:

$$y = \frac{A_0 + A_1 x + \cdots\cdots + A_{2n+1}x^{2n+1}}{B_0 + B_1 x + \cdots\cdots + B_{2n+1}x^{2n+1}}$$

де $2n+1$ є числом першим, а бодай один з сочинників A_{2n+1} і B_{2n+1} є ріжний від зера. Найзагальнійшим розвязанєм рівнанія (1) буде для $B_{2n+1} = 0$:

$$y = a\,\frac{x\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2 2\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2 n\alpha}\right)}{(1-c^2\lambda^2\alpha x^2)\left[1-c^2\lambda^2(2\alpha)x^2\right]\cdots\left[1-c^2\lambda^2(n\alpha)x^2\right]}$$

$$c_1 = c^{2n+1}\left[\lambda\left(\frac{\omega}{2}+a\right)\lambda\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\cdots\cdots\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^4$$

$$a = \frac{c^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c_1}}\left(\lambda\alpha\,.\,\lambda(2\alpha)\,.\cdots\lambda(n\alpha)\right)^2 \qquad (2)$$

де $\alpha = \dfrac{m\omega + m'\omega}{2n+1}$, $\dfrac{\omega}{2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\Delta}$, $\dfrac{\omega'}{2} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\Delta}$

а m і m' суть числами цїлими.

Всї прочі вартости на y будуть виду $\dfrac{f'+fy}{g'+gy}$, де y подане через (2) а f', f, g' і g суть величинами постійними, сповняючими рівнанє:

$$\left(1+\frac{g+f}{g'+f'}x\right)\left(1+\frac{g-f}{g'-f'}x\right)\left(1+\frac{g+c'f}{g'+c'f'}x\right)\left(1+\frac{g-c'f}{g'-c'f'}x\right)$$
$$= (1-x^2)(1-c'^2x^2).$$

Рівнанє то дає 24 системів вартостий ріжних поміж собою. Отже найдемо, що кождій вартости α відповідає 24 вартостий y і 12 вартостий модулу c_1; але позаяк що дві вартости y суть рівні, лише противних знаків, то число ріжних вартостий y буде 12, а так само число вартости c_1 буде рівнати ся шість. Кождій

вартости c_1 відповідають дві ріжні вартости функциї y. Отже коли числам m і m' дамо якінебудь вартости цїлковиті, дістанемо всї можливі розвязання нашого проблему.

3. Дальша розвідка з теориї функций еліптичних носить заголовок:

Досліди над функциями еліптичними. (Oeuvres coml. I. 141).

На вступі подав Абель коротку історию функций еліптичних від часу Euler'a, що впровадив тї функциї до математики доказавши спроможности інтеґрования рівнання:

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}+\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}=0$$

аж по часи Legendre'a, котрий показав, що всякий інтеґрал еліптичний т. є. інтеґрал

$$\int\frac{Rdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$$

де R є функциєю вимірником, а α, β, γ, δ, ε величини постійні дїйсні, можна звести до одного з трох видів:

$$\int\frac{d\Theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\Theta}},\quad \int d\Theta(1-c^2\sin^2\Theta),\quad \int\frac{d\Theta}{(1+n\sin^2\Theta)\sqrt{1-c^2\sin^2\Theta}}$$

т. є. інтеґрал першого, другого і третого виду.

Абель займає ся в своїй розвідцї функциєю відворотною, функциєю $\varphi(x)$ означеною рівнаннями:

$$x=\int\frac{d\Theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\Theta}}$$

$$\sin\Theta=\varphi(x)=x$$

а надавши їй вид:

$$\alpha=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$$

або:

$$\varphi'(\alpha)=\sqrt{(1-c^2\varphi^2\alpha)(1+e^2\varphi^2\alpha)}$$

займає ся прикметами трох функций

$$\varphi\alpha,\quad f\alpha=\sqrt{1-c^2\varphi^2\alpha},\quad F\alpha=\sqrt{1+e^2\varphi^2\alpha}.$$

Деякі з тих прикмет виходять безпосередно з видомих прикмет інтеґралів першого виду, инші є меньше видні.

І так справджує теорем додавання для функций φ, f, F, випроваджує їх періодичність, через що стає нам відоме захованє ся функций на цїлім необмеженім просторі змінної дїйсної і мнимої, наколи знаєм захованє ся функциї для вартостий дїйсних в границях $\frac{\omega}{2}$ і $-\frac{\omega}{2}$, а для вартостий мнимих в границях $\frac{\tilde{\omega}}{2}$ і $-\frac{\tilde{\omega}}{2}$; дальше випроваджує Абель, що рівнаня $\varphi\alpha = 0$, $f\alpha = 0$, $F\alpha = 0$ мають безконечне число корінїв, перше з них в видї:

$$\alpha = m\omega + n\tilde{\omega}i,$$

друге:
$$\alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right)\omega + n\tilde{\omega}i,$$

третє:
$$\alpha = m\omega + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tilde{\omega}i;$$

се є вже всї корінї тих рівнань.

Одною з найбільше характеристичних прикмет тих функций є, що $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$, де m є числом цїлим, можна виразити вимірямо через $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ (теорем множеня). Але случай відворотний не має місця, бо рівнаня, які виражають $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$, є взагалї рівнанями висших степенїв, отже відверненя не є однозначні. Але корінї тих рівнань дадуть ся виразити при помочи φ, f, F і то коли $m = 2n$ (паристе), то:

$$\varphi\alpha = x = \pm\,\varphi\left[(-1)^{m'+\mu'}\alpha + \frac{m'}{2n}\omega + \frac{\mu'}{2n}\tilde{\omega}i\right]$$

де m' і μ' є додатні, меньші від $2n$. Отже всї ріжні вартости на x дістанемо кладучи за m' і μ' всї вартости $(0 \cdots\cdots 2n-1)$; число корінїв є $8n^2$. — Коли ж $m = 2n+1$ (непаристе), тодї:

$$x = \varphi\left[(-1)^{\mu'+m'}\alpha + \frac{m'}{2n+1}\omega + \frac{\mu'}{2n+1}\tilde{\omega}i\right],$$

де за m' і μ' треба класти всї вартости цїлковиті $(-n \cdots\cdots +n)$; число корінїв є тодї $(2n+1)^2$.

Так само:

$$y = f\alpha = f\left[\alpha + \frac{2m'}{m}\omega + \frac{\mu'}{m}\tilde{\omega}i\right]$$

(m' і μ' цїлковиті меньші від m); корінїв буде m^2.

А:
$$z = F\alpha = F\left[\alpha + \frac{m'}{m}\omega + \frac{2\mu'}{m}\tilde{\omega}i\right]$$

(m' і μ' цїлковиті додатні, меньші від m); корінїв буде m^2.

Через розвязку тих рівнань доходить Абель до представленя функций $\varphi\left(\frac{\alpha}{m}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{m}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{m}\right)$ при помочи функций $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$, $F(\alpha)$. Задачу ту ділить він на дві части, при чім шукає вираженя наперед для $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ при помочи $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, а відтак для $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ при помочи $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, бо всяке число може розбити на $2^{\nu}(2n+1)$.

В першім случаю приходять в вираженю самі лиш корінї квадратові, в другім треба розвязати рівнанє степеня $(2n+1)^2$, а розвязка та, як доказує Абель, дасть ся все перевести альґебраічно. Вираженя, якими представлені є корінї сего рівнаня, заключають дві величини постійні, що зависять від рівнаня степеня $(2n+1)^2-1$. Та розвязка сего рівнаня дасть ся звести до розвязки лиш одного рівнаня степеня $2n+2$; тільки се рівнанє не дасть ся взагалї розвязати альґебраічно.

Та в дуже многих случаях розвязка альґебраічна є можлива, пр. коли: $e=c$, $e=c\sqrt{3}$, $e=c(2\pm\sqrt{3})$ і т. д.

Першим з тих случаїв займає ся Абель і стосує сей случай до ґеометриї, щоби при помочи лїнїї і циркля поділити округ лємніскати на m рівних частий, наколи $m=2^n$, або 2^{n+1}, або коли m є добутком більше чисел тих обох видів. Є се той сам теорем, який стосував Gauss до кола.

Функциї $\varphi(n\alpha)$, $f(n\alpha)$, $F(n\alpha)$ можна представити в ріжнім виді. Назначім через $\sum_{k}^{k'}{}_{m}\,\psi(m)$ суму, а через $\prod_{m=k}^{k'}\psi(m)$ добуток всїх $\psi(m)$, які одержимо кладучи за m всї вартости цїлковиті $(k\cdots\cdots k')$, далї через $\sum_{k}^{k'}{}_{m}\sum_{\nu}^{\nu'}{}_{\mu}\,\psi(m\mu)$ суму, а через $\prod_{m=k}^{k'}\prod_{\mu=\nu}^{\nu'}\psi(m\mu)$ добуток всїх вартостий функциї $\psi(m\mu)$, які одержимо кладучи за m всї вартости цїлковиті від k до k', а за μ всї вартости цїлковиті від ν до ν', тодї наші функциї представлять ся в видї сум:

$$\varphi(2n+1)\alpha=\frac{1}{2n+1}\sum_{-n}^{+n}{}_{m}\sum_{-n}^{+n}{}_{\mu}(-1)^{m+\mu}\varphi\left(\alpha+\frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)$$

$$f(2n+1)\alpha = \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{-n}^{+n}{}^{m} \sum_{-n}^{+n}{}^{\mu} (-1)^m f\left(\alpha + \frac{m\omega + \mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)$$

$$F(2n+1)\alpha = \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{-n}^{+n}{}^{m} \sum_{-n}^{+n}{}^{\mu} (-1)^{\mu} F\left(\alpha + \frac{m\omega + \mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)$$

або в виді добутків:

$$\varphi(2n+1)\alpha = (2n+1)\varphi\alpha \prod_{m=1}^{n} \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2}i + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{m=1}^{n} \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2}i + \frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \cdot \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}$$

$$f(2n+1)\alpha = f\alpha \prod_{m=1}^{n} \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{m=1}^{n} \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2}i + \frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \cdot \frac{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}$$

$$\mathrm{F}(2\mathrm{n}+1)\alpha = \mathrm{F}\alpha \prod_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{n}} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\tilde{\omega}}{2}\mathrm{i}+\frac{\mathrm{m}\omega}{2\mathrm{n}+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\tilde{\omega}\mathrm{i}}{2}+\frac{\mathrm{m}\omega}{2\mathrm{n}+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\mu=1}^{\mathrm{n}} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\tilde{\omega}\mathrm{i}}{2}+\frac{\mu\tilde{\omega}\mathrm{i}}{2\mathrm{n}+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\tilde{\omega}\mathrm{i}}{2}+\frac{\mu\tilde{\omega}\mathrm{i}}{2\mathrm{n}+1}\right)}} \cdot$$

$$\prod_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{n}} \prod_{\mu=1}^{\mathrm{n}} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\tilde{\omega}\mathrm{i}}{2}+\frac{\mathrm{m}\omega+\mu\tilde{\omega}\mathrm{i}}{2\mathrm{n}+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\tilde{\omega}\mathrm{i}}{2}+\frac{\mathrm{m}\omega+\mu\tilde{\omega}\mathrm{i}}{2\mathrm{n}+1}\right)}} \cdot \frac{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\tilde{\omega}\mathrm{i}}{2}+\frac{\mathrm{m}\omega-\mu\tilde{\omega}\mathrm{i}}{2\mathrm{n}+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\tilde{\omega}\mathrm{i}}{2}+\frac{\mathrm{m}\omega-\mu\tilde{\omega}\mathrm{i}}{2\mathrm{n}+1}\right)}}$$

Се в вартости для $\varphi(\mathrm{m}\alpha)$, $\mathrm{f}(\mathrm{m}\alpha)$, $\mathrm{F}(\mathrm{m}\alpha)$, коли m в числом непаристим; анальоґічні взори вийдуть і для m паристого.

Наколи підставимо в тих взорах $\alpha = \dfrac{\beta}{2\mathrm{n}+1}$, дістанемо взори на функції $\varphi\beta$, $\mathrm{f}\beta$, $\mathrm{F}\beta$, які зі огляду на неозначене число n можуть зміняти ся на безконечно много способів. Поміж всїми тими взорами заслугують на увагу ті, які випадуть, коли вставимо $\mathrm{n} = \infty$. Тоді дістанемо на функції $\varphi\alpha$, $\mathrm{f}\alpha$, $\mathrm{F}\alpha$ вираженя зложені з безконечно много виразів; і так з взорів на суми дістанемо безконечні ряди:

$$\varphi\alpha = \frac{1}{\mathrm{ec}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty} (-1)^{\mathrm{m}} \left(\frac{(2\mu+1)\omega}{[\alpha-(\mathrm{m}+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2} - \frac{(2\mu+1)\tilde{\omega}}{[\alpha+(\mathrm{m}+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2} \right)$$

$$f\alpha = \frac{1}{e}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left\{\sum_{0}^{m}{}^{\infty}(-1)^m\,\frac{2[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}-\sum_{0}^{m}{}^{\infty}(-1)^m\,\frac{2[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}\right\}$$

$$F\alpha = \frac{1}{c}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{0}^{\mu}{}^{\infty}(-1)^\mu\,\frac{(2\mu+1)\tilde{\omega}}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}+\sum_{0}^{\mu}{}^{\infty}(-1)^\mu\,\frac{(2\mu+1)\tilde{\omega}}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}\right\}$$

а з ваорів на добутки:

$$\varphi\alpha = \alpha\prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^2}{\mu^2\tilde{\omega}^2}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{\mu^2\omega^2}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{\mu=1}^{\infty}\frac{1+\frac{(\alpha+m\omega)^2}{\mu^2\omega^2}}{1+\frac{[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}\,\frac{1+\frac{(\alpha-m\omega)^2}{\mu^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}\left\{\frac{1+\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{m^2\omega^2}{\mu^2\tilde{\omega}^2}}\right\}^2$$

$$f\alpha = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{\mu=1}^{\infty}\frac{1+\frac{[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}\,\frac{1+\frac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}\left\{\frac{1+\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{\mu^2\tilde{\omega}^2}}\right\}^2$$

$$F\alpha = \prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha^2}{(\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{\mu=1}^{\infty}\frac{1+\frac{(\alpha+m\omega)^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}\,\frac{1+\frac{(\alpha-m\omega)^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}\left\{\frac{1+\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}{1+\frac{m^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2}}\right\}^2$$

Через застосованє функций виложничих та колових до повисших взорів дійдем до еще простійших виражень на функциї $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$:

$$\varphi\alpha = \frac{\omega}{\pi}\sin\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1+\dfrac{4\sin^2\left(\dfrac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}}-e^{-\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}}\right)^2}}{1-\dfrac{4\sin^2\left(\dfrac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}+e^{-\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}$$

$$F\alpha = \prod_{m=0}^{\infty}\frac{1+\dfrac{4\sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}-e^{-\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}{1-\dfrac{4\sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}-e^{-\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}$$

$$f\alpha = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-\dfrac{4\sin^2\left(\dfrac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}}+e^{-\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}}\right)^2}}{1-\dfrac{4\sin^2\left(\dfrac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}+e^{-\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}$$

А вже найпростійший вид після Абеля буде:

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \frac{4\pi}{c\omega'}\sqrt{q}\left(\sin x\frac{1}{1-q}+\sin 3x\frac{q}{1-q^3}+\sin 5x\frac{q}{1-q^5}+\cdots\right)$$

$$\lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \frac{4\pi}{c^2\omega'}\sqrt{q}\left(\cos x\frac{1}{1+q}+\cos 3x\frac{q}{1+q^3}+\cos 5x\frac{q}{1+q^5}+\cdots\right)$$

де $q = e^{-\frac{\tilde{\omega}'}{\omega'}\pi}$, $\sqrt[4]{c} = \dfrac{1-r}{1+r}\dfrac{1-r^3}{1+r^3}\dfrac{1-r^5}{1+r^5}\cdots\cdots$ $r = e^{-\pi i-\frac{\omega'}{\tilde{\omega}'}\pi}$

а де λ і λ' означають функциї, на які перейде φ і f, коли за α підставимо $1-\dfrac{2\pi}{x}$.

На підставі повисшого вираженя на модул c дійдем до відношеня загального між модулами; а іменно, коли функцыя еліптична має модул: $\sqrt[4]{c} = \frac{1-r}{1+r}\,\frac{1-r^3}{1+r^3}\,\frac{1-r^5}{1+r^5}\cdots\cdots$ то модул кождої иньшої функциї еліптичної дасть ся перетворити на перший, наколи в виражене на c вставимо на місце r $r^{\frac{n}{m}}$, де n і m є які небудь два числа цїлковиті додатні.

Legendre показав в своїх „Exercises de calcul integral“, як можна замінити інтеґрал:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

на иньші інтеґрали того самого виду з ріжними модулами. Тому теорию зґенералїзував Абель доказавши, що наколи назначимо:

$$\alpha = \frac{(m+\mu)\omega + (m-\mu)\tilde{\omega}i}{2n+1}$$

де бодай одно з поміж чисел m і μ є перше взглядом $(2n+1)$, то дістанемо:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)}} = \pm a \int \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$$

де:

$$y = f.x.\frac{(\varphi^2\alpha - x^2)(\varphi^2 2\alpha - x^2)\cdots\cdots(\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha.x^2)\cdots\cdots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2)}$$

$$\frac{1}{c_1} = \frac{f}{c}\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\cdots\cdots\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^2$$

$$\frac{1}{e_1} = \frac{f}{e}\left[\varphi\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2}+\alpha\right)\varphi\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2}+2\alpha\right)\cdots\cdots\varphi\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2}+n\alpha\right)\right]^2$$

$$a = f(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha.\varphi 3\alpha\cdots\cdots\varphi n\alpha)^2$$

де f є неозначене, c_1 і e_1 є виражене через c і e при помочи функциї φ так, що істнує лиш одно відношене поміж тими величинами. Відношене се можна представити також при помочи рівнаня альґебраічного. Величини e_1 і c_1 можуть принимати усякі вартости кромі 0 і ∞.

На основі повисших взорів можна при помочи функций φ, f, F дістати безконечне число перетворень, що є великої ваги в зіставленю повної теориї перетворень функций еліптичних.

4. Дальша розвідка Абеля з теориї функций елїптичних під заголовком: „**Теория функций елїптичних**“ дїлить ся на дві части. (Oeuvr. compl. I. 326.)

Перша часть говорить про функциї елїптичні яко інтеґрали неозначені і не згадує ся в нїй нїчо про природу величин дїйсних або мнимих, з яких ті функциї ся складають. В тій части послугуєсь Абель слїдуючими означеннями:

$$\Delta(x, c) = \pm \sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}$$

$$\tilde{\omega}(x, c) = \int \frac{dx}{\Delta(x, c)}, \quad \tilde{\omega}_0(x, c) = \int \frac{x^2\,dx}{\Delta(x, c)}$$

$$\Pi(x, c, a) = \int \frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right)\Delta(x, c)}$$

так що $\tilde{\omega}(x, c)$, $\tilde{\omega}_0(x, c)$, $\Pi(x, c, a)$ означають функциї першого, другого і третого виду.[1])

Часть друга говорить про функциї о модулах дїйсних меньших як одиниця. На місце функций $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_0$ і Π впроваджує Абель три иньші, а се функцию $\lambda(\Theta)$ означену рівнанем:

$$\Theta = \int_0^{\lambda\Theta} \frac{dx}{\Delta(x, c)}$$

отже функцию відвернену першого виду, і дві функциї:

$$\tilde{\omega}_0(x, c) = \int (\lambda\Theta)^2\,d\Theta$$

$$\Pi(x, c, a) = \int \frac{\Delta\Theta}{1 - \frac{\lambda^2\Theta}{a^2}}$$

які одержимо кладучи в вираженях на $\tilde{\omega}_0(x, c)$ і $\Pi(x, c, a)$ $x = \lambda\Theta$.

а) Часть перша. Функциї елїптичні мають ту прикмету, що суму кількох-небудь тих функций можна виразити через одну лише функцию того самого виду з додатком якогось вираженя альґебраічного і льоґаритмічного. Коли ψx буде представляти якунебудь функцию виду:

---

[1]) се властиво не є функциї, але інтеґрали елїптичні.

$$\psi x = \int \left[A + Bx^2 + \frac{\alpha}{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \frac{\alpha_1}{1 - \frac{x^2}{a_1^2}} + \cdots\cdots + \frac{\alpha_\nu}{1 - \frac{x^2}{\alpha_\nu^2}} \right] \frac{dx}{\Delta x},$$

то:

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots\cdots + \psi x_\mu = C - Bp - \frac{\alpha a}{2\Delta a} \log \frac{fa + \varphi a\, \Delta a}{fa - \varphi a\, \Delta a} -$$

$$- \frac{\alpha_1 a_1}{2\Delta a_1} \log \frac{fa_1 + \varphi a_1\, \Delta a_1}{fa_1 - \varphi a_1\, \Delta a_1} - \qquad - \frac{\alpha_\nu a_\nu}{2\Delta a_\nu} \log \frac{fa_\nu + \varphi a_\nu\, \Delta a_\nu}{fa_\nu - \varphi a_\nu\, \Delta a_\nu}$$

де C є стала інтеґрована, p функция альґебраічна, f(x) і $\varphi(x)$ дві якінебудь функції цїлковиті що до x, одна паристого степеня, друга непаристого, о сочинниках змінних.

Окремо для функций першого, другого і третого виду форма ся перейде по черзї на:

$$\tilde{\omega} x_1 + \tilde{\omega} x_2 + \cdots\cdots + \tilde{\omega} x_\mu = \tilde{\omega} y + C$$

$$\tilde{\omega}_0 x_1 + \tilde{\omega}_0 x_2 + \cdots\cdots + \tilde{\omega}_0 x_\mu = \tilde{\omega}_0 y - b_{\mu-1} + C$$

$$\Pi x_1 + \Pi x_2 + \cdots\cdots \Pi x_\mu = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a} \log \frac{fa + \varphi a\, \Delta a}{fa - \varphi a\, \Delta a} + C$$

де $b_{\mu-1}$ є сочинником при найвисшій степени x в функциї $\varphi(x)$, а:

$$y = \pm \frac{a_0}{x_1 x_2 \cdots\cdots x_{\mu-1}}$$

(a_0 вираз вільний в f(x); знак + або — залежить від того, чи μ непаристе чи паристе).

$$\tilde{\omega} x = \int \frac{dx}{\Delta x}, \quad \tilde{\omega}_0 x = \int \frac{x^2 dx}{\Delta x}, \quad \Pi x = \int \frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Delta x}.$$

Суму якого-небудь числа функций еліптичних можна проте представити одною лиш функциєю того самого виду з додатком величини постійної для функций першого виду, а функциї льоґаритмічної для функций третого виду. — Теорем сей не є новий, бо его поставив еще Legendre.

Теорем сей можна виразити при помочи трох иньших простїйших теоремів, дуже важних в своїх застосованях:

1) Коли якийсь інтеґрал виду:

$$\int (y_1\, dx_1 + y_2\, dx_2 + \cdots\cdots + y_\mu\, dx_\mu)$$

— де $y_1\, y_2 \cdots y_\mu$ є функциї альґебраічні величин $x_1\, x_2 \cdots x_\mu$, звязані поміж собою якимсь числом рівнань альґебраічних — дасть ся виразити через функциї альґебраічні, льоґаритмічні, елїптичні в спосіб:

$$\int (y_1\, dx_1 + y_2\, dx_2 + \cdots + y_\mu\, dx_\mu) = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu + \alpha_1\, \psi_1(t_1) + \alpha_2\, \psi_2(t_2) + \cdots + \alpha_n\, \psi_n(t_n),$$

де $A_1\ A_2 \ldots\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots$ є сталі, а $u\ v_1\ v_2 \ldots t_1\ t_2 \ldots$ функциї альґебраічні величин $x_1\ x_2 \ldots$, а $\psi_1\ \psi_2 \ldots$ якінебудь функциї елїптичні, то все буде можна виразити сей інтеґрал в спосіб:

$$\delta \int (y_1\, dx_1 + y_2\, dx_2 + \cdots + y_\mu\, dx_\mu) = r + A' \log \varrho' + A'' \log \varrho'' + \cdots + A^{(k)} \log \varrho^{(k)} + \alpha_1\, \psi_1(\Theta_1) + \cdots + \alpha_n\, \psi_n(\Theta_n),$$

де δ є число ціле, $\alpha_1\ \alpha_2, \ldots\ A'\ A'' \ldots$ сталі, а Θ_1, $\Delta_1(\Theta_1)$, Θ_2, $\Delta_2(\Theta_2), \cdots \Theta_n$, $\Delta_n(\Theta_n)$, $\varrho'\ \varrho'' \cdots \varrho^{(k)}$ є функциї виміримі величин $x_1\ x_2 \cdots x_\mu\ y_1\ y_2 \ldots\ y_\mu$.

Теорем сей служить не лиш до розвязки передше поданого теорему загального, але кромі сего є він підставою до застосования функций альґебраічних, льоґаритмічних і елїптичних до теориї інтеґрования форм ріжничкових альґебраічних.

2) Коли інтеґрал виду:

$$\int (y_1\, dx_1 + y_2\, dx_2 + \cdots + y_\mu\, dx_\mu)$$

дасть ся виразити функциею альґебраічною і льоґаритмічною виду: $u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu$, то $u\ v_1\ v_2 \ldots$ все будуть функциями виміримими величин: $x_1\ x_2 \ldots x_\mu$, $y_1\ y_2 \ldots y_\mu$.

Коли отже маєм інтеґрал $\int y\, dx$, де y є з x звязане якимсь рівнанєм альґебраічним, то тодї $u\ v_1\ v_2 \ldots$ є функциями виміримими величин x і y[1]).

Покладїм в відношеню якімнебудь заходячім між функциями елїптичними:

---

[1]) Є се „теорем Абелевий“, важний в теориї „інтеґралів Абелевих“. На нїм основує автор нову теорию інтеґрования форм ріжничкових альґебраічних. Задачею сеї теориї є виконати всї можливі перетворена інтеґралів форм альґебраічних при помочи функций альґебраічних і льоґаритмічних. Через се вводить ся до можливо малого числа інтеґрали, то представляють в скінченім виді всї інтеґрали тої самої кляси.

$$\alpha_1 \psi_1(x_1) + \alpha_2 \psi_2(x_2) + \cdots + \alpha_\mu \psi_\mu(x_\mu) = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots A_\nu \log v_\nu, \quad (A)$$

де $\psi_1(x_1)$, $\psi_2(x_2)$, $\cdots$ $\psi_\mu(x_\mu)$ означають функції еліптичні, — $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_\mu = x$, а модули тих функцій $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_\mu = c$, то ліва сторона рівнаня (A) буде інтеґралом $\int \frac{r dx}{\Delta x}$, де r є функциею виміримою змінної x. Отже:

3) Коли поміж функциями $\tilde{\omega} x$, $\tilde{\omega}_0 x$, $\Pi_1 x_1$ $\Pi_\mu x$, — де модули функций першого, другого і третого виду суть ті самі, — заходить відношене:

$$\alpha \tilde{\omega} x + \alpha_0 \tilde{\omega}_0 x + \alpha_1 \Pi_1 x_1 + \alpha_2 \Pi_2 x_2 + \cdots + \alpha_\mu \Pi_\mu x_\mu = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu,$$

то u, v_1, v_2 v_ν все будуть виду $p + q\Delta x$, де p і q суть функциями виміримими x.

Порівнуючи рівнане (A) з рівнанем одержаним з него через ріжничковане, можемо (A) обнижати, так що число функций еліптичних в тім рівнаню буде малїти, а в кінци через повтаряне дійдемо до рівнаня, в котрім будуть приходити лише функциї альґебраічні і льоґаритмічні.

І так теорем поставлений на самім вступі „части першої“ зводить ся до сповнена рівнаня:

$$\psi(x) = \beta_1 \psi_1 y_1 + \beta_2 \psi_2 y_2 + \cdots + \beta_n \psi_n y_n + u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu.$$

А щоби се рівнане сповнити в случаю найзагальнїйшім, потреба:

1) Найти всї случаї, коли дасть ся сповнити рівнане:

$$(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2) = p^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2) \quad (1)$$

(p і q функциї виміримі неозначеного x, а c і c' величини постійні).

2) Сповнивши рівнане (1), звести три функциї $\tilde{\omega}(y\,c')$, $\tilde{\omega}_0(y\,c'a)$ $\Pi(y\,c'a)$ до виду:

$$r + A\tilde{\omega} x + A_0 \tilde{\omega}_0 x + A' \Pi(x\,a') + A'' \Pi(x\,a'') + \cdots$$

де r означає часть альґебраічну і льоґаритмічну.

3) Найти умовини потрібні і достаточні, щоби функцию виду:

$$\alpha \tilde{\omega} x + \alpha_0 \tilde{\omega}_0 x + \alpha_1 \Pi'(x\,a') + \alpha_2 \Pi''(x\,a'') + \cdots$$

— де всї функциї еліптичні мають той сам модул — виразити при помочи функций альґебраічних і льоґаритмічних.

Найлекша є умовина послїдна і тому від неї зачнемо.

Взір, що позваляє функциї еліптичні якінебудь всїх трох видів виразити при помочи функций альґебраічних і льоґаритмічних, є:

$$\beta\tilde{\omega}x - \frac{2m_1 \Delta\alpha_1}{\alpha_1} \Pi'\alpha_1 - \frac{2m_2 \Delta\alpha_2}{\alpha_2} \Pi'\alpha_2 -$$

$$- \frac{2m_n \Delta\alpha_n}{\alpha_n} \Pi'\alpha_\nu = \log\left(\frac{fx+\varphi x\Delta x}{fx-\varphi x\Delta x}\right) + C$$

де α_1, α_2, α_n мусять сповняти рівнанє:

$$(fx)^2-(\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha_1{}^2)^{m_1}(x-\alpha_2{}^2)^{m_2}\ldots\ldots(x-\alpha_n{}^2)^{m_n}$$

а з поміж функций fx і φx одна є париста, друга непариста.

Таке є відношенє найзагальнїйше поміж функциями відносячими ся до того самого модулу і тої самої змінної. Цїкаве, що у взорі повисшім нема зовсїм функциї еліптичної другого виду.

Друга умова, то сповненє рівнаня:

$$(1-y^2)(1-c'^2y^2) = r^2(1-x^2)(1-c^2x^2)$$

де y і r суть функциями вимірими величини x. Через підставленє

$$r = \frac{1}{\varepsilon}\frac{dy}{dx}$$

де ε є постійне, можна се рівнанє звести до виду:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \frac{\varepsilon\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

або:

$$\frac{dy}{\Delta(y,c')} = \varepsilon\frac{dx}{\Delta(x,c)}$$

а інтеґруючи одержимо:

$$\tilde{\omega}(y,c') = \varepsilon\tilde{\omega}(x,c) + C.$$

Отже коли істнує відношенє між якимнебудь числом функций еліптичних, а c означає модул одної з них довільно вибраної, то поміж прочими функциями найдесь бодай одна о модулї c' така, що між функциями *першого виду* відповідаючими модулам c і c' істнує відношенє:

$$\tilde{\omega}(y,c') = \varepsilon\tilde{\omega}(x,c) + C$$

де y є функция вимірима x, а де ε є постійне. Якийнебудь буде степень тої функциї

$$y = \psi(x) = \frac{p}{q}$$

де p і q суть функциями цїлковитими x, то все модул c' буде мати 6 вартостий ріжних між собою, а до кождої вартости модула c належати будуть дві вартости y. Значить, що функция y буде мати 12 ріжних вартостий. Вид тої функциї буде залежати від вартостий a і b в рівнаню

$$p - qy = (a - by)(z - x)(z - x')(z - x'') \cdots (z - x^{(\mu-1)})$$

де a і b суть постійні, а $x', x'', \cdots x^{(\mu-1)}$ суть коренями рівнання $y = \psi(x)$.

І так для b рівного зеро, а μ непаристого $\mu = 2n + 1$

$$y = a \frac{x(e_1^2 - x^2)(e_2^2 - x^2) \cdots (e_n^2 - x^2)}{(1 - c^2 e_1^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \cdots (1 - c^2 e_n^2 x^2)}$$

для $b = 0$, а $\mu = 2n$

$$y = \frac{a(1 - \delta_1^2 x^2)(1 - \delta_2^2 x^2) \cdots (1 - \delta_n^2 x^2)}{x(1 - c^2 e_1^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \cdots (1 - c^2 e_{n-1}^2 x^2)}$$

для $a = 0$, а $\mu = 2n + 1$

$$y = \frac{a(1 - c^2 e_1^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \cdots (1 - c^2 e_n^2 x^2)}{x(e_1^2 - x^2)(e_2^2 - x^2) \cdots (e_n^2 - x^2)}$$

для $a = 0$, а $\mu = 2n$

$$y = a \frac{x(1 - c^2 e_1^2 x)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \cdots (1 - c^2 e_{n-1}^2 x)}{(1 - \delta_1^2 x^2)(1 - \delta_2^2 x^2) \cdots (1 - \delta_n^2 x^2)}$$

де e_1, e_2, ... суть коренями рівнання $e^n = 0$, а e_n є функция величини e така, що:

$$\frac{de_n}{\Delta e_n} = n \frac{de}{\Delta e},$$

а де δ_1, δ_2 ..... суть коренями рівнання $q = 0$.

Рівнанє $y = \psi(x)$, де $\psi(x)$ є функцією виміримою x, сповняюче:

$$\frac{dy}{\Delta(y,c')} = \epsilon \frac{dx}{\Delta(x,c)}$$

має ту приємету, що дасть ся розвязати при помочи самих лиш коренїв.[1])

Через се дістаємо цїлу величезну клясу рівнань альґебраічних якихнебудь степенїв, що дадуть ся розвязати альґебраічно.

---

[1]) Теорем сей, званий теоремом множеня функций еліптичних, має перворядне значінє в дальшім розвою функций еліптичних.

На трету умовину відповідає автор, що відношенє якенебудь між функциями еліптичними о модулах c_1, c_2, ... c_m, не може істнувати, наколи поміж відповідними функциями першого виду не заходить відношенє:

$$\tilde{\omega}(x,c) = \frac{1}{\varepsilon_1}\tilde{\omega}(y_1,c) = \frac{1}{\varepsilon_2}\tilde{\omega}(y_2,c) = \cdots\cdots = \frac{1}{\varepsilon_m}\tilde{\omega}(y_m,c_m)$$

де ε_1, ε_2, ε_3 ..... ε_m суть величини постійні, а y_1, y_2, y_3 ..... y_m функциї вимірні змінної x.

Але коли якусь функцию еліптичну $\varphi(x)$ о модулї c' може виразити через другі функциї еліптичні о модулах c_1, c_2, ... c_m, то все буде може ту функцию виразити при помочи функций еліптичних, — всїх з тим самим модулом c, де c є довільно вибраним з поміж модулів c_1, c_2, ... c_m. Тота функция представить ся:

$$\varphi y = \int \frac{r\,dx}{\Delta(x\,c)}$$

де y і r є функциї вимірні змінної x.

б) В частї другій подані лиш самі висліди без доказів, а всї они відносять ся до прикмет функциї $\lambda\Theta$.

1. Функция $\lambda\Theta$ є двоперіодична і має період один дїйсний, другий мнимий.

$$\lambda(\Theta + 2\tilde{\omega}) = \lambda\Theta,$$
$$\lambda(\Theta + \omega i) = \lambda\Theta$$

де $\frac{\tilde{\omega}}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x\,c)}$, а $\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x,b)}$

$(b = \sqrt{1-c^2},\ \sqrt{-1} = i)$

2. Функция $\lambda\Theta$ стає ся зером і безконечностию для безконечного числа вартостий дїйсних і мнимих Θ:

$$\lambda(m\tilde{\omega} + n\omega i) = 0,$$
$$\lambda\left(m\tilde{\omega} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega i\right) = \frac{1}{0}$$

де m і n є числа цїлі додатні або відємні.

Дальше для:

$$\Theta' = (-1)^m\Theta + m\tilde{\omega} + n\omega i$$

є

$$\lambda\Theta' = \lambda\Theta.$$

3. Функция $\lambda\Theta$ сповняє рівнанє:

$$\lambda(\Theta' + \Theta)\,\lambda(\Theta' - \Theta) = \frac{(\lambda\Theta')^2 - (\lambda\Theta)^2}{1 - c^2(\lambda\Theta)^2(\lambda\Theta')^2}$$

де Θ і Θ' суть якінебудь величини змінні дїйсні або мнимі.

4. Функция $\lambda\Theta$ дасть ся розвинути на добуток або суму дробів на богато способів. Приміром кладучи:

$$q = e^{-\frac{\omega}{\tilde{\omega}}\pi} \qquad p = e^{-\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\pi}$$

дістанемо:

$$\lambda(\Theta\omega) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{c}}\sqrt[4]{q}\,\sin(\pi\Theta)\,\frac{[1-2q^2\cos(2\Theta\pi)+q^4][1-2q^4\cos(2\Theta\pi)+q^8][1-2q^6\cos(2\Theta\pi)+q^{12}]\cdots}{[1-2q\cos(2\Theta\pi)+q^2][1-2q^3\cos(2\Theta\pi)+q^6][1-2q^5\cos(2\Theta\pi)+q^{10}]\cdots}$$

$$= \frac{4\sqrt{q}}{c}\,\frac{\pi}{\tilde{\omega}}\left[\frac{1}{1-q^2}\sin(\Theta\pi) + \frac{q}{1-q^3}\sin(3\Theta\pi) + \frac{q^2}{1-q^5}(5\Theta\pi) + \cdots\right]$$

$$\lambda\left(\frac{\tilde{\omega}}{2} - \Theta\omega\right) = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\frac{(1-pe^{-2\pi\Theta})(1-pe^{2\pi\Theta})(1-p^3e^{-2\pi\Theta})(1-p^3e^{2\pi\Theta})\cdots}{(1+pe^{-2\pi\Theta})(1+pe^{2\pi\Theta})(1+p^3e^{-2\pi\Theta})(1+p^3e^{2\pi\Theta})\cdots}$$

Анальоґічно може представити функцию другого і третого виду.

5. Дуже важна прикмета функциї $\lambda\Theta$ є слїдуюча: (для скороченя підставимо $\Delta\Theta = \pm\sqrt{(1-\lambda^2\Theta)(1-c^2\lambda^2\Theta)}$)

Наколи рівнанє:

$$(\lambda\Theta)^{2n} + a_{n-1}(\lambda\Theta)^{2n-2} + \cdots + a_1(\lambda\Theta)^2 + a_0 = b_0\,\lambda\Theta + b_1(\lambda\Theta)^3 + \cdots + b_{n-2}(\lambda\Theta)^{2n-3}.\Delta\Theta$$

буде сповнене, коли за Θ підставимо 2n вартостий Θ_1, Θ_2 Θ_{2n}, таких що $(\lambda\Theta_1)^2$, $(\lambda\Theta_2)^2$, $\cdots$ $(\lambda\Theta_{2n})^2$, суть ріжні поміж собою, тодї буде все:

$$\lambda(\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{2n}) = 0$$

$$-\lambda(\Theta_{2n}) = \lambda(\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{2n-1}) = \frac{a_0}{\lambda\Theta_1 . \lambda\Theta_2 \quad \lambda\Theta_{2n-1}}$$

сочинники a_0, a_1, , b_0, b_1, $\cdots$ можуть бути якінебудь, а можна їх визначити, позаяк Θ_1, Θ_1, $\cdots$ Θ_{2n-1} є дані.

А отсе також важна прикмета:

Коли покласти

$$p^2 - q^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = A(x-\lambda\Theta_1)(x-\lambda\Theta_2)\cdots(x-\lambda\Theta_\mu)$$

де p і q є якінебудь функциї цїлковиті x, то все може буде вибрати величини Θ_1, Θ_2, Θ_3 Θ_μ так, що вираженє:

$$\lambda(\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_\mu)$$

буде зером або безконечностию.

Подібно приміром, коли

$$p^2 - x^2(1 - x^2)(1 - c^2x^2) = A(x^2 - \lambda^2\Theta)^\mu$$

де одна з функций p і q, є париста а друга непариста, тоді буде:

а) для p паристого:

$\lambda(\mu\Theta) = 0$, коли μ є пристe

$\lambda(\mu\Theta) = \frac{1}{0}$, коли μ є непаристе.

б) для p непаристого

$\lambda(\mu\Theta) = 0$, коли μ є непаристе

$\lambda(\mu\Theta) = \frac{1}{0}$, коли μ є пристe;

а з відси виходить, що коли рівнанє повисше має місце, то:

$$\lambda\Theta = \lambda\left(\frac{m\tilde{\omega} + \frac{1}{2}n\omega i}{\mu}\right)$$

де m і n суть цїлі і меньші чим μ.

6. Поміж величинами $\lambda\left(\frac{m\tilde{\omega} + n\omega i}{2\mu+1}\right)$ а коренями одиницї $(2\mu+1)^{\text{ими}}$ істнують дуже цїкаві відношеня:

$$0 = \lambda\left(\frac{2m\tilde{\omega} + \omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^k\lambda\left(\frac{2m\tilde{\omega} + 2\omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^{2k}\lambda\left(\frac{2m\tilde{\omega} + 3\omega i}{2\mu+1}\right) +$$

$$+ \cdots\cdots + \delta^{2\mu k}\lambda\left(\frac{2m\tilde{\omega} + 2\mu\omega i}{2\mu+1}\right)$$

$$0 = \lambda\left(\frac{\omega + m\omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^{k'}\lambda\left(\frac{2\tilde{\omega} + m\omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^{2k'}\lambda\left(\frac{3\tilde{\omega} + m\omega i}{2\mu+1}\right) +$$

$$+ \cdots\cdots + \delta^{2\mu k'}\lambda\left(\frac{2\mu\tilde{\omega} + m\omega i}{2\mu+1}\right)$$

де $\delta = \cos\frac{2\pi}{2\mu+1} + i\sin\frac{2\pi}{2\mu+1}$, а всї величини $\lambda\left(\frac{m\tilde{\omega} + n\omega i}{2\mu+1}\right)$ суть коренями одного лиш рівнаня степеня: $(2\mu+1)^2$, котрого сочинники є функциями вимірними c^2.

7. Коли функция

$$\int \frac{dx}{\Delta(xc)}$$

о модулї c, дїйснім і меньшім чим одиниця, дасть ся перетворити на иньшу:

$$\varepsilon \int \frac{dy}{\Delta(x,c')}$$

о модулї c' дїйснім або мнимім, через підставлене за y якоїнебудь функциї альґебраічноґ x, тодї модул c' дасть ся виразити через одно з помежи рівнань:

$$\sqrt[4]{c'} = \sqrt{2}\ \sqrt[8]{q_1}\ \frac{(1+q_1{}^2)(1+q_1{}^4)(1+q_1{}^6)\cdots\cdots}{(1+q_1)(1+q_1{}^3)(1+q_1{}^5)\cdots\cdots}$$

$$\sqrt[4]{c'} = \frac{1-q_1}{1+q_1}\quad \frac{1-q_1{}^8}{1+q_1{}^8}\quad \frac{1-q_1{}^5}{1+q_1{}^5}$$

де $q_1 = q^{\mu}$, а μ виміримо, або, що на одно вийде:

$$q_1 = e^{\left(\mu\frac{\omega}{\tilde{\omega}} + \mu' i\right)\pi}$$

μ і μ' які небудь числа виміримі.

8. Функция $\lambda\theta$ має застосоване в теориї перетворень. І так при ей помочи показуєсь, що, щоби дві функциї дїйсні перетворити одну на другу, т. зн. щоби сповнити рівнане:

$$\int \frac{dy}{\Delta(x,c')} = m\,\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} \int \frac{dx}{\Delta(x,c)}$$

потреба, щоби поміж функциями $\tilde{\omega}$, ω, $\tilde{\omega}'$, ω' заходило рівнане:

$$\frac{\tilde{\omega}'}{\omega'} = \frac{n}{m}\,\frac{\tilde{\omega}}{\omega}$$

де n і m є числа цїлі.

9. На увагу заслугує случай, коли один з поміж модулів може перетворити на ґо доповнене $\sqrt{1-c^2} = b$.

В тім случаю будемо мати з узглядненем рівнаня:

$$\frac{\tilde{\omega}'}{\omega'} = \frac{n}{m}\,\frac{\tilde{\omega}}{\omega}$$

$$\frac{\tilde{\omega}}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{n}} \quad \text{і} \quad \frac{dy}{\Delta(y,b)} = \sqrt{mn}\,\frac{dx}{\Delta(x,c)}.$$

Модул c буде визначений рівнанем альґебраічним, котре може розвязати при помочи корінів; бодай так буде дїйсно, коли $\frac{m}{n}$ є повним квадратом. У всїх случаях легко виразити c через безконечні добутки.

І справдї коли

$$\frac{\tilde{\omega}}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{n}},$$

тодї маємо:

$$\sqrt[4]{c} = \sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{8}\pi\sqrt{\frac{m}{n}}} \frac{\left(1+e^{-2\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\left(1+e^{-4\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)}{\left(1+e^{-\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\left(1+e^{-3\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)}$$

$$= \frac{\left(1-e^{-\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\left(1-e^{-3\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\cdots\cdots}{\left(1+e^{-\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\left(1+e^{-3\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\cdots\cdots}$$

Коли два модули c і c' дадуть ся перетворити один на другий, то они будуть звязані між собою альґебраічно. Але взагалї буде неможливо виразити c' через c при помочи коренїв і тілько в тім случаю буде се можливе, коли c мож перетворити на его доповненє.

Рівнаня модулові мають ту прикмету, що всї їх кореня можуть виразити виміримо при помочи двох з поміж них; а всї кореня дадуть ся виразити через один з помежи них при помочи корінів.

10. Функцию $\lambda\Theta$ можуть розвинути на:

$$\lambda\Theta = \frac{\Theta + a\Theta^3 + a'\Theta^5 + \cdots\cdots}{1 + b'\Theta^4 + b''\Theta^6 + \cdots\cdots}$$

де чисельник і знаменник є рядами збіжними.

Кладучи:

$$\varphi\Theta = \Theta + a\Theta^3 + a'\Theta^5 + \cdots\cdots$$
$$f\Theta = 1 + b'\Theta^4 + b''\Theta^6 + \cdots\cdots$$

можемо ті функциї виразити при помочи рівнань:

$$\varphi(\Theta' + \Theta)\,\varphi(\Theta' - \Theta) = (\varphi\Theta f\Theta')^2 - (\varphi\Theta' f\Theta)^2$$
$$f(\Theta' + \Theta)\,f(\Theta' - \Theta) = (f\Theta f\Theta')^2 - c^2(\varphi\Theta\varphi\Theta')^2$$

де Θ і Θ' є независимі змінні.

IV. Широко опрацьовує автор теорию **переступних функций еліптичних.** Ту належить розвідка:

1. **Теория переступних функций еліптичних.** (Oeuvres compl. II. 93.)

Автор розпочинає з а в е д е н є м і н т е ґ р а л а

$$\int \frac{P\,dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}}$$

н а ф у н к ц и ї а л ь ґ е б р а і ч н і.

Назвім для скороченя корінь через $\sqrt{R}$ та розбираймо:

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$$

де P значить функцию альґебраічну виміриму x.

P мож розложити на члени виду Ax^m і $\frac{A}{(x-a)^m}$, де m є числом цїлковитим. Автор розбирає ті інтеґрали:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} \quad \text{і} \quad \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$$

спершу окремо, а відтак разом.

а) *Зведенє інтеґрала*

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}.$$

Пошукаймо загальної функциї альґебраічної, котрої ріжничка дасть ся розложити на члени виду

$$\frac{Ax^m dx}{\sqrt{R}},$$

бо тодї інтеґрал тої функциї так розложеної дасть відношене загальне поміж інтеґралами виду

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}.$$

Функция шукана не може заключати иньших корінїв, лише $\sqrt{R}$, а як функция вимірима величин x, $\sqrt{R}$ буде мати вид:

$$f(x, \sqrt{R}) = Q' + Q\sqrt{R}$$

де Q і Q' суть функциями вимірими x, або опустивши Q', позаяк оно буде заключати лише самі вираженя вимірімі x, дістанемо:

$$f(x, \sqrt{R}) = Q\sqrt{R}.$$

Функция Q мусить бути цїлковитою, бо в противнім случаю, колиб заключала член виду $\frac{1}{(x-a)^m}$, тодї ріжничка вираженя $\frac{\sqrt{R}}{(x-a)^m}$:

$$d\left[\frac{\sqrt{R}}{(x-a)^m}\right] = \left[\frac{\frac{1}{2}\frac{dR}{dx}}{(x-a)^m} - \frac{mR}{(x-a)^{m+1}}\right]\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

малаби за сочинник при $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ функцию дробову, хиба що R малоби принайменьше два сочинники рівні т. з. інтеґрал мавби зовсїм иньший вид, бо $\int \frac{Pdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$.

Тото Q яко цїлковита функция альґебраічна представить ся:

$$Q = f(0) + f(1)x + f(2)x^2 \cdots\cdots + f(n)x^n;$$

зріжничкуймо найдену функцию $Q\sqrt{R}$, то дістанемо:

$$d(Q\sqrt{R}) = \frac{RdQ + \frac{1}{2}QdR}{dx} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}} = S\frac{dx}{\sqrt{R}},$$

а коли за Q і R підставимо вартости, дістанемо на S якусь функцию цїлковиту x степеня m, пр.

$$S = R\frac{dQ}{dx} + \tfrac{1}{2}Q\frac{dR}{dx} \tag{1}$$

$$= \varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \cdots\cdots + \varphi(m)x^m; \tag{2}$$

з порівнаня сочинників (1) і (2) вийдуть вартости на φ:

$$\varphi(p) = (p+1)f(p+1)\alpha + (p+\tfrac{1}{2})f(p)\beta + pf(p-1)\gamma + (p-\tfrac{1}{2})f(p-2)\delta + \\ + (p-1)f(p-3)\varepsilon \tag{3}$$

де $p = 0, 1, 2, 3, \quad m.$

А що дотичить вартости n, то випаде $m = n+3$.

І тепер функция наша:

$$Q\sqrt{R} = \int S\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

представить ся в видї:

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}} + \cdots\cdots + \varphi(m)\int\frac{x^m dx}{R} = \\ = \sqrt{R}\,(f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots\cdots + f(m-3)x^{m-3}) \tag{4}$$

То є найзагальнїйше відношенє поміж інтеґралами виду $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$, виражене функциями альґебраічними. З рівнаня сего може випровадити всї зведеня (réduction), які інтеґрали сего виду допускають. Лїва сторона сего рівнаня є заразом найбільше загальним

інтеґралом виду $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ (P функция цїлковита x), який дасть ся виразити через функциї альґебраічні.

В рівнаню (4) є очевидно $m \geqq 3$, бо права сторона є функциєю цїлковитою x, отже всяке $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$, $m \geqq 3$, дасть ся виразити через інтеґрали того самого виду о низшім m. Лише

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$$

суть незведимі при помочи функций альґебраічних, і то суть одинокі функциї переступні в інтеґралї $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ (P функция цїлковита), (інтеґрали абелеві I-го, II-го і III-го виду).

Щоби звести інтеґрал $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$, положимо в рівнаню (4) $\varphi(m) = -1$, а позаяк:

$$\varphi(m-1) = \varphi(m-2) = \qquad \varphi(3) = 0$$

то:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} = \varphi(0) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} -$$

$$- \sqrt{R}\,(f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots\cdots + f(m-3)x^{m-3})$$

а сочинники $\varphi(0)$ $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $f(0)$, $f(1)$, $\cdots\cdots$ $f(m-3)$ дістанемо з (3) кладучи $p = 0, 1, \cdots\cdots m$.

І так приміром $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}}$ виразить ся через названі функциї переступні ось як:

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}} = \left(\frac{5}{24}\frac{\beta\delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{3}\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

$$+ \left(\frac{5}{12}\frac{\gamma\delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\frac{\beta}{\varepsilon}\right)\int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$$

$$+ \left(\frac{5}{8}\frac{\delta^2}{\varepsilon^2} - \frac{2}{3}\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$$

$$- \left(\frac{5}{12}\frac{\delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{\varepsilon}x\right)\sqrt{R}$$

Інтеґрал $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ дасть ся, як бачилисьмо, виразити через три функциї переступні. Колибисьмо хотїли се число функций переступних зменьшити, то поміж величинами $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ мусїлиби зайти якісь відношеня. Приміром, щоби $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ виразити через функциї альґебраічні, требаби покласти $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi(2) = 0$, а тодї три з поміж $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ виразять ся через дві прочі. Приміром інтеґрал $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}}$ виражений функциями альґебраічними буде:

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}} = -\left(\frac{5}{12}\frac{\delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{\varepsilon}x\right)\sqrt{R}$$

6) *Зведеня інтеґрала*

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}.$$

В тім случаю Q яко функция дробова дасть ся розложити на дроби частинні:

$$Q = \frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \cdots\cdots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}$$

$$d(Q\sqrt{R}) = \int \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

де S кладемо:

$$S = \varphi'(0) + \varphi'(1)(x-a) + \varphi'(2)(x-a)^2 + \frac{\chi(1)}{x-a} + \frac{\chi(2)}{(x-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{\chi(m)}{(x-a)^m}$$

а φ і χ суть сочинниками при відповідних степенях $(x-a)$, такі які випадуть з розвиненя.

А інтеґрал: $Q\sqrt{R} = \int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ представить ся:

$$\varphi(0)\int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$$

$$+ \chi(1)\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \chi(2)\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}} + \cdots\cdots + \chi(m)\int \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$$

$$= \sqrt{R}\left(\frac{\psi(1)}{(x-a)} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \cdots\cdots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}\right) \quad (5)$$

З сеї форми видко, що

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}, \quad m > 1$$

все дасть ся виразити через три інтеґрали:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$$ і інтеґрал $$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}},$$

та що сей послїдний *звагалї* є незвідимий. Він дасть ся звести лише через відповідне дібране величини $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, подібно, як три попередні функциї переступні. Кладучи в (5) $\chi(m) = -1$, $\chi(2) = \chi(3) = \quad = \chi(m-1) = 0$, дістанемо:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}} = \varphi(0) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} + \chi(1) \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

$$- \sqrt{R} \left(\frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \cdots\cdots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}} \right) \qquad (6)$$

Єслиж $(x-a)$ є чинником функциї R, отже R стає зером для $x = a$, тодї (5) не дасть ся застосувати до зведеня інтеґрала $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$. Та коли за m положимо $m+1$ і в так зміненім взорі покладемо $m = 1$, тодї інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$ дасть ся виразити через $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}} = \varphi(0) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$$

$$- \sqrt{R} \left(\frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \cdots\cdots \frac{\psi(m)}{(x-a)^m} \right) \qquad (7)$$

Ві всїх прочих случаях оно є неможливе, позаяк рівнане (6) закладає $m > 1$.

Інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ дасть ся також звести в случаю, коли $(x-a)$ є чинником R. Взір (7) перейде тодї на:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = -\frac{a^2 + a(a'+a''+a''')}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} \int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{a+a'+a''+a'''}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$$

$$+ \frac{2}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} - \frac{2}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} \cdot \frac{\sqrt{R}}{x-a} \qquad (8)$$

де $R = (x-a)(x-a')(x-a'')(x-a''')$.

Щоби найти відношене поміж інтеґрадами виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, положім:

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}}+$$

$$+\varphi(3)\int\frac{dx}{(x-a''')\sqrt{R}}=\sqrt{R}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{A'}{x-a'}+\frac{A''}{x-a''}+\frac{A'''}{x-a'''}\right)$$

$$\frac{A}{x-a}+\frac{A'}{x-a'}+\frac{A''}{x-a''}+\frac{A'''}{x-a'''}=Q$$

Та коли в то рівнане підставимо вартости за $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ і т. д., тоді дістанемо відношене:

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}}=$$

$$=\sqrt{R}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{A'}{x-a'}+\frac{A''}{x-a''}\right) \qquad (9)$$

То є відношене між трома якимиинебудь з помежи інтеґралів:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a''')\sqrt{R}}$$

значить, два з поміж них можна виразити через два другі, наколи $(x-a)$ є чинником R. В противнім случаю, коли $(x-a)$ не є чинником R, відношене ніяке між інтеґралами не істнує.

Попукаймо тепер еще, чи інтеґрали

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}},\ \int\frac{xdx}{\sqrt{R}},\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$

не дадуть ся звести на інтеґрали виду $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ і які відношеня мусять тоді істнувати поміж $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$.

Позаяк $(x-a)$ мусить бути чинником R, проте на підставі (9):

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}=$$

$$=A\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+A'\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\sqrt{R}\left(\frac{B}{(x-a)}+\frac{B'}{(x-a')}\right)$$

Підставивши за $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ і $\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$ вартости, дістанемо з порівнання сочинників вартости на A, A', B, B', а межи $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ вийде відношене:

$$2\varepsilon\varphi(1)-\delta\varphi(2)=0.$$

Кладучи $\varphi(1)=0$ а $\varphi(0)=1$ дістанемо $\varphi(2)=0$, а тоді:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{(a-a'')(a-a''')}{(a''+a'''-a-a')}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+$$

$$+\frac{(a'-a'')(a'-a''')}{(a''+a'''-a-a')}\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\frac{2\sqrt{R}}{(a+a'-a''-a''')(x-a)(x-a')} \quad (10)$$

Колиж покладемо $\varphi(0)=0$, а $\varphi(2)=1$, тоді $\varphi(1)=\frac{\delta}{2\varepsilon}$ і дістанемо:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}+\tfrac{1}{2}\delta\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}=\frac{a'(a'-a-a''-a''')f'(a)}{2(a'-a)(a+a'-a''-a''')}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

$$+\frac{a(a-a'-a''-a''')f'(a')}{2(a-a')(a+a'-a''-a''')}\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} \quad (11)$$

$$+\frac{\sqrt{R}}{(a-a')(a+a'-a''-a''')}\cdot\left(\frac{a'(a'-a-a''-a''')}{x-a}-\frac{a(a-a'-a''-a''')}{x-a'}\right)$$

де:

$$f'(a)=\frac{df(a)}{da}\qquad f(x)=R.$$

Отже бачимо, що $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$ дасть ся виразити при помочи інтеґралів $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ і $\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$. А вже інтеґрали $\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}$ і $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$ не дадуть ся виразити в сей спосіб. Коли $a+a'=a''+a'''$, то (10) і (11) стають ілюзоричні, а лишаєсь лише рівнане (8); в тім случаю мож найти відношене поміж двома інтеґралами виду $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$; оно буде:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}=\frac{2\sqrt{R}}{(a''-a)(a''-a')(x-a)(x-a')}$$

Дальшою квестиею є слїдуюча:

Зведенє інтеґралу $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ при помочи функций льоґаритмічних.

Будемо шукати відношень льоґаритмічних, які може одержати поміж чотирома інтеґралами $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ незведимими при помочи функций альґебраічних. В тій цїли пошукаємо загальної функциї льоґаритмічної, котрої ріжничка дасть ся розложити на вираженя виду:

$$\frac{Ax^n\,dx}{\sqrt{R}}, \text{ і } \frac{Adx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$$

а зінтеґрувавши ту ріжничку дістанемо загальне відношенє поміж тими чотирома інтеґралами, виражене при помочи функций льоґаритмічних. Шукана функция льоґаритмічна буде очевидно мати вид:

$$T = A\log(P+Q\sqrt{R}) + A'\log(P'+Q'\sqrt{R}) + A^{(2)}\log(P^{(2)}+Q^{(2)}\sqrt{R}) + \\ + \cdots\cdots + A^{(n)}\log(P^{(n)}+Q^{(n)}\sqrt{R})$$

де $P, P', P^{(2)}, \ldots$ $Q, Q', Q^{(2)}\ldots\ldots$ суть цїлковитими функциями x, а $A, A', A^{(2)}, \ldots$ суть величинами постійними. З тої функциї T може еще виділити вимірима часть яко не маючу значіня і взяти під увагу функцию:

$$T' = A\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right) + A'\log\left(\frac{P'+Q'\sqrt{R}}{P'-Q'\sqrt{R}}\right) +$$

а вже ріжничка сего вираженя не буде зовсїм заключати в собі частий вимірима.

$$dT' = A\frac{PQdR+2(PdQ-QdP)R}{(P^2-Q^2R)\sqrt{R}} + A'\frac{P'Q'dR+2(P'dQ'-Q'dP')R}{(P'^2-Q'^2R)\sqrt{R}} + \cdots\cdots \\ = S'\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

Коли положимо:

$$A\frac{PQdR+2(PdQ-QdP)R}{(P^2-Q^2R)\sqrt{R}} = \frac{M}{N}\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

то: $$M = A\frac{2N\frac{dP}{dx} - P\frac{dN}{dx}}{Q}, \quad N = P^2-Q^2R.$$

З сего видно, що коли $(x-a)^m$ є подільником функції N, $(x-a)^{m-1}$ буде подільником M, отже $\frac{M}{N}$ не може мати членів виду $\frac{B}{(x-a)^m}$ при $m > 1$. Дальше, коли $(x-a)$ є чинником заключеним в R, то він буде і чинником P, отже M і N будуть его мати яко чинник спільний, значить $\frac{M}{N}$ не може заключати також виражень $\frac{B}{x-a}$, наколи $(x-a)$ є чинником R. $\frac{M}{N}$ є на случай, коли $m > n+2$ і $m < n+2$, величиною постійною, а лише на случай коли $m = n+2$, може бути функцією цілковитою першого степеня, (m означає степень функції P, а n функції Q), і на тій підставі $\frac{M}{N}$ буде мати вид:

$$\frac{M}{N} = Bx + B' + \frac{C}{x-a} + \frac{C'}{x-a'} + \frac{C''}{x-a''} +$$

де $(x-a)$, $(x-a')$ не суть чинниками в R.

З сего виходить, що інтеґрал $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$ є незведимий в ніякім случаю. Він становить незведимість особливу (transcedente particulière).

T' представить ся: (12)

$$T' = k\int \frac{dx}{\sqrt{R}} + k'\int \frac{x dx}{\sqrt{R}} + L\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \cdots\cdots + L^{(\nu)}\int \frac{dx}{(x-a^{(\nu)})\sqrt{R}}$$

І се є найзагальнїйше відношене між нашими інтеґралами.

Щоби скористати з сего рівнаня, автор розвязує кілька (пять) частинних проблемів, з котрих перший є:

А) Виразити інтеґрал $\int \frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}}$ через як найменьше число інтеґралів виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

Наколи P, Q, P', Q', ... $P^{(r)}$, $Q^{(r)}$ суть степенів: m, n, m', n', $m^{(r)}$, $n^{(r)}$, то они мають $m + n + m' + n' + \cdots\cdots + m^{(r)} + n^{(r)} + r + 1$ сочинників неозначених, а додавши до сего ще A, A', $A^{(r)}$, будемо мати всїх сочинників неозначених:

$$m + n + m' + n' + \cdots\cdots + m^{(r)} + n^{(r)} + 2r + 2 = a'$$

отже:

$$A\frac{M}{N}+A'\frac{M'}{N'}+A''\frac{M''}{N''}+\cdots\cdots+A^{(r)}\frac{M^{(r)}}{N^{(r)}}$$

$$=k+k'x+\frac{C+C_1x+C_2x^2+\quad+C_{\nu-\alpha'+1}x^{\nu-\alpha'+1}}{D+D_1x+D_2x^2+\cdots\cdots+D_{\nu-\alpha'+1}x^{\nu-\alpha'+1}}=P$$

(ν є сумою степенів N, $N'\cdots\cdots N^{(r)}$, k і k' суть які небудь). А то значить, що: Інтеґрал $\int\frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}}$ можна виразити через $\nu+\alpha'+2$ інтеґралів виду $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

В случаю частнім, именно коли всї P будуть степеня $m=n+2$, випаде: $\nu-\alpha'+2=2$. Тодї

$$S=k+k'x+\frac{C+C'x}{D+D_1x+D_2x_2}=k+k'x=\frac{L}{(x-a)}+\frac{L'}{(x-a')}$$

а інтеґрал сего:

$$\int\frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}}=T'-L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}-L'\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}.$$

А позаяк r є довільне, то при $r=0$

$$T'=A\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

а коли кромі сего положимо $n=0$, бо оно також є довільне, то $m=2$. Положім:

$$P=f+f^{(1)}x+f^{(2)}x^2,\text{ а }Q=1$$

дістанемо:

$$N=P^2-Q^2R=(f+f^{(1)}x+f^{(2)}x^2)^2-R=D+D_1x+D_2x^2$$

$$M=A\left(2N\frac{dP}{dx}-P\frac{dN}{dx}\right)$$

$$=A\left[2(D+D_1x+D_2x^2)(f^{(1)}+2f^{(2)}x)-(D_1+D_2x)(f+f^{(1)}x+f^{(2)}x^2)\right]$$

$$=C+C_1x+C_2x^2+C_3x^3$$

а з відси через порівнанє сочинників одержимо C, C_1, C_2, C_3, D, D_1, D_2, f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, отже:

$$\frac{M}{N}=\frac{C+C_1x+C_2x^2+C_3x^3}{D+D_1x+D_2x^2}=\frac{C_3}{D_3}x+\frac{C_2D_2-C_3D_1}{D_2^2}+\frac{C'+C'_1x}{D+D_1x+D_2x^2}$$

де для скорочення положено:

$$\frac{C_1D_2 - C_2D}{D_2} - \frac{D_1(C_2D_2 - C_2D_1)}{D_2^2} = C_1' \quad \text{а}$$

$$C - \frac{D(C_2D_2 - C_2D_1)}{D_2^2} = C'$$

Возьмім $\frac{C_2}{D_2} = k'$ а $\frac{C_2D_2 - C_2D_1}{D_2^2} = k$

то наколи: $\frac{C' + C_1'x}{D + D_1x + D_2x^2}$ розібємо на:

$$\frac{L}{x-a} + \frac{L'}{x-a'} \quad \text{тоді:}$$

$$\int \frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}} = -L\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} - L'\int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} \qquad (13)$$

$$+\frac{k'}{2\sqrt{\varepsilon}} \log\left(\frac{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x + \sqrt{\varepsilon}x^2 + \sqrt{R}}{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x + \sqrt{\varepsilon}x^2 - \sqrt{R}}\right)$$

і то є шукане зведене.

Коли $k = 0$, а $k' = 1$, то взір сей перейде на:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{R}} = (G + H\sqrt{K})\int \frac{dx}{(x-\sqrt{K})\sqrt{R}} + (G - H\sqrt{K})\int \frac{dx}{(x-\sqrt{K})\sqrt{R}} \qquad (14)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \log\left(\frac{\frac{\beta}{\delta}\sqrt{\varepsilon} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x + \sqrt{\varepsilon}x^2 + \sqrt{R}}{\frac{\beta}{\delta}\sqrt{\varepsilon} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x + \sqrt{\varepsilon}x^2 - \sqrt{R}}\right)$$

де:

$$G = \frac{4\alpha\delta^2\varepsilon + \beta\delta^3 + \beta^2\varepsilon^2 - 4\beta\gamma\delta\varepsilon}{2(\delta^4 + 8\beta\delta\varepsilon^2 - 4\gamma\delta^2\varepsilon)}$$

$$H = \frac{\delta}{4\varepsilon}\left(\frac{\beta^2\varepsilon - \alpha\delta^2}{\varepsilon\beta^2 - \alpha\delta^2}\right), \quad K = \frac{4\varepsilon}{\delta}\left(\frac{\varepsilon\beta^2 - \alpha\delta^2}{4\gamma\delta\varepsilon - 8\beta\varepsilon^2 - \delta^3}\right)$$

На случай, коли $D_2 = 0$, рівнанє (13) перейде на

$$\int \frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}} = \left[\frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}}f - \left(\frac{k'}{3\varepsilon} - k\right)\mu\right]\int \frac{dx}{(x+\mu)\sqrt{R}}$$

$$+\frac{k'}{2\sqrt{\varepsilon}}\log\left(\frac{f+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x+\sqrt{\varepsilon}x^2+\sqrt{R}}{f+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}+\sqrt{\varepsilon}x^2+\sqrt{R}}\right)$$

де: $f=\frac{4\varepsilon\gamma-\delta}{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}$ а: $\mu=\frac{(f^2-\alpha^2)\sqrt{\varepsilon}}{f\delta-\beta\sqrt{\varepsilon}}$

а взір (14) представить ся:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}=\frac{1}{3\varepsilon}(\mu'-\mu)\int\frac{dx}{(x+\mu)\sqrt{R}}+\frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}}\log\left(\frac{\frac{\mu'}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x+\sqrt{\varepsilon}x^2+\sqrt{R}}{\frac{\mu'}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x+\sqrt{\varepsilon}x^2-\sqrt{R}}\right)$$

де: $\mu'=\frac{4\varepsilon\gamma-\delta^2}{8\varepsilon}$ а $\mu=-\frac{\delta}{2\varepsilon}$;

між сочинниками α, β, γ, δ, ε заходить тодї відношене:

$$(4\varepsilon\gamma-\delta^2)^2+4\delta^2(4\varepsilon\gamma-\delta^2)+32\beta\delta\varepsilon^2-64\alpha\varepsilon^3=0.$$

До зведень тих дійшли ми в той спосіб, щосьмо спровадили $\frac{M}{N}$ до виду $\frac{C+C_1x+C_2x^2+C_3x^3}{D+D_1x+D_2x^2}$ кладучи $P^2-Q^2R=D+D_1x+D_2x^2$. Але се можна би зробити також в иньший спосіб, приміром кладучи:

$$R=(p+qx+rx^2)(p'+q'x+x^2)$$
$$P=f(p'+q'x+x^2),\ Q=1.$$

Поступаючи анальоґічно найдемо, що $\int\frac{(k+x)dx}{\sqrt{R}}$ на сей спосіб звести ся не дасть, за се $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$ дасть ся звести до одного лише інтеґрала виду $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}=-L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+A\log\left[\frac{f(p'+q'x+x^2)+\sqrt{R}}{f(p'+q'x+x^2)-\sqrt{R}}\right] \quad (15)$$

де:

$$L=\frac{pq'-qp'+(rq'-q)a^2}{(rq'-q)a}$$

$$A=\frac{f^2-r}{f(rq'-q)},\quad a=\frac{q-q'f^2}{2(f^2-r)}$$

а f визначене в рівнанєм

$$f^4(q'^2-4p')-f^2(2qq'-4p-4p'r)+q^2-4pr=0.$$

Положім в взорі (15) $r = 1$, $q' = -q$, $p' = p$, то дістанемо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(p+qx+x^2)(p-qx+x^2)}} = 2\sqrt{p}\int \frac{dx}{(x-\sqrt{p})\sqrt{(p+qx+x^2)(p-qx+x^2)}} \tag{16}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{4p-q^2}} \log \left(\frac{\frac{q+2\sqrt{p}}{\sqrt{4p-q^2}}\sqrt{p-qx+x^2} + \sqrt{p+qx+x^2}}{\frac{q+2\sqrt{p}}{\sqrt{4p-q^2}}\sqrt{p-qx+x^2} + \sqrt{p+qx+x^2}} \right).$$

Можна ще через підставлене $P = f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^2$ звести інтеґрал $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ і на иньші способи, пр. кладучи:

$$N = P^2 - R = k(x-a)^4, \quad R = \varepsilon(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''').$$

Взір зведеня буде:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}} = L\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}} \tag{17}$$

$$+ A \log \frac{f + f'x + f''x^2 + \sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}{f + f'x + f''x^2 - \sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}$$

де:

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{(p+p'-2a)(p''+p'''-2a)}}$$

$$L = 2\sqrt{\frac{(a-p)(a-p')(a-p'')(a-p''')}{[2a-(p+p')][2a-(p''+p''')]}}$$

а коли в тім взорі положимо $p'' = -p$, $p''' = -p'$ і назвемо $(p+p')$ через q, а pp' через r, то (17) перейде на:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}} = 2\sqrt{r}\int \frac{dx}{(x-\sqrt{R})\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}} \tag{18}$$

$$-\frac{1}{(q^2-4r)} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{q^2-4r}\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}}{2r\sqrt{r}-q^2x+2\sqrt{r}x^2} \right)$$

А то є той сам взір, що (16), лише представлений в иньшім видї. Додати треба, що все можна приняти P і R без спільного чинника, (бо через перерібку все може дійти до таких P' і R, котрі не будуть мати спільного подїльника).

Б) **Найти умовини потрібні, щоби:**

$$\int \frac{x^m + k^{(m-1)}x^{m-1} + \cdots + k' + k}{x^m + l^{(m-1)}x^{m-1} + \quad + l'x + l} \frac{dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}$$

Спосіб переведеня остане той сам.

Положім:

$$Q = e_1 + e^{(1)}x + e^{(2)}x^2 + \cdots + e^{(n-1)}x^{(n-1)} + x^n$$

$$P = f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^2 + \cdots + f^{(n+1)}x^{(n+1)} + x^{n+2}$$

де n є число цїле, сповняюче услівє $2n + 4 > m$.

Най:

$$x^m + l^{(m-1)}x^{m-1} + \cdots + l'x + l = (x-a)((x-a')(x-a'')\cdots(x-a^{(m-1)}),$$

то щоби $\frac{M}{N}$ звести до виду:

$$\frac{x^m + k^{(m-1)}x^{m-1} + k^{(m-2)}x^{m-2} + \cdots + k}{x^m + l^{(m-1)}x^{m-1} + l^{(m-2)}x^{m-2} + \cdots + l} = \frac{M'}{(x-a)(x-a')\cdots(x-a^{(m-1)})}$$

потреба положити:

$$N = P^2 - Q^2R = C(x-a)^{\mu}(x-a')^{\mu'}(x-a'')^{\mu''}\cdots(x-a^{(m-1)})^{\mu^{(m-1)}} = CS$$

де $2n + 4 = \mu + \mu' + \mu'' + \cdots + \mu^{(m-1)}$;

а то сповнимо, кладучи пр.

$$P = Fx, \quad Q = fx, \quad R = \varphi(x)$$

і дістанемо $(m-1)$ рівнань:

$$(Fx)^2 = (fx)^2 \varphi x$$

або:

$$Fx = \pm fx\sqrt{\varphi x} = i\,fx\sqrt{\varphi x}$$

$$x = a,\ a',\ a'',\quad a^{(m-1)}. \tag{19}$$

А ріжничкуючи перше $(\mu-1)$ разів, друге $(\mu'-1)$ разів і т. д. дістанемо зі згляду на a рівнанє виду:

$$d^p Fa = \pm d^p fa\sqrt{\varphi a} + p d^{p-1} fa\, d\sqrt{\varphi a} + \frac{p(p-1)}{2} d^{p-2} fa\, d^2\sqrt{\varphi a} + \cdots + fa\, d^p\sqrt{\varphi a} \tag{20}$$

$$a = a,\ a',\ a'',$$

а кладучи:

$$p = 0,\ 1,\ 2, \qquad \mu$$

$$p = 0,\ 1,\ 2, \qquad \mu'$$

$$p = 0,\ 1,\ 2, \qquad \mu''$$ і т. д.

дістанемо рівнаня потрібні до визначеня e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, і т. д. Щоби найти k, k', k'' і A, утворім:

$$\frac{dN}{Ndx} = \frac{\mu}{x-a} + \frac{\mu'}{x-a'} + \frac{\mu''}{x-a''} + \frac{\mu'''}{x-a'''} + \cdots\cdots$$

$$\frac{dN}{Ndx} = \frac{h + h^{(1)}x + h^{(2)}x^2 + h^{(3)}x^3 + \cdots\cdots + h^{(m-1)}x^{m-1}}{l + l^{(1)}x + l^{(2)}x^2 + l^{(3)}x^3 + \cdots\cdots + l^{(m-1)}x^{m-1}} = \frac{t}{S}$$

а:

$$\frac{M}{N} = \frac{A\left(2\frac{dP}{Qdx}S - \frac{PT}{Q}\right)}{S} = \frac{k + k^{(1)}x + k^{(2)}x^2 + \cdots + k^{(m-1)}x^{m-1} + x^m}{S}$$

а в відси:

$$k + k^{(1)}x + k^{(2)}x^2 + \cdots\cdots + k^{(m-1)}x^{m-1} + x^m = A\,\frac{2\frac{dP}{dx}S - Pt}{Q};$$

для $x = a$ буде:

$$k + k^{(1)}a + k^{(2)}a^2 + k^{(3)}k^3 + \cdots + a^m = -i\mu A\sqrt{\varphi}\,\psi(a) \qquad (21)$$

де $\psi(x) = (x-a')(x-a'')(x-a''')\cdots\cdots$

для $x = a,\ a',\ a''\cdots\cdots a^{(m-1)}$.

Через се дістанемо з (21) m рівнань на визначене: k, $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, $\cdots\cdots$ $k^{(m-1)}$ при помочи A, a, a', $a''\cdots\cdots a^{m-1}$, а на A найдемо вартість:

$$A = -\frac{1}{(\mu a + \mu' a' + \mu'' a'' + \cdots\cdots)f^{(n+2)} + 2f^{(n+1)}}.$$

Коли $\mu = \mu' = \mu'' = \cdots = \mu^{(m-1)} = 1$, рівнання остануть ті самі, а $m = 2n + 4$.

Возьмім $n = 0$ і щоби найти сочинники, покладїм:

$$R = (x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')$$

а в рівнанях:

$$P = \sqrt{R + CS},\quad S = l + l^{(1)}x + l^{(2)}x^2 + l^{(3)}x^3 + x^4 = \Theta x$$

положім $x = p,\ p',\ p'',\ p'''$, то на підставі (19) дістанемо чотири рівнаня:

$$f + pf^{(1)} + p^2 f^{(2)} = \sqrt{C}\sqrt{(\Theta p)} \qquad p = p,\ p',\ p'',\ p'''$$

а усуваючи з тих рівнань f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, дістанемо рівнанє:

$$\frac{\sqrt{(p-a)(p-a')(p-a'')(p-a''')}}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{\sqrt{(p'-a)(p'-a')(p'-a'')(p'-a''')}}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}+$$

$$+\frac{\sqrt{(p''-a)(p''-a')(p''-a'')(p''-a''')}}{(p''-p)(p''-p')(p''-p''')}+\frac{\sqrt{(p'''-a)(p'''-a')(p'''-a'')(p'''-a''')}}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')}=0$$

котре вказує, які відносини мусять заходити, щоби сповнилось заложене подане в заголовку.

Перейдїм другі частні случаї.

1) $m=2,\ n=0.$

Се може сповнити кладучи:

$\alpha)$ $P^2-R=C(x-a)(x-a')^3$

$\beta)$ $P^2-R=C(x-a)^2(x-a')^2$

$\alpha)$ Наколи $P^2-R=C(x-a)(x-a')^3$, то з рівнань (19) і (20) вийдуть вартости на f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, а на відношене між a і a' дістанемо:

$$\sqrt{\varphi a}-\sqrt{\varphi a'}-\frac{1}{2}(a\quad a')\frac{\varphi'(a')}{\sqrt{\varphi a'}}+\frac{1}{8}(a-a')^2.\frac{2\varphi a'\varphi''(a')^2}{\varphi a'\sqrt{\varphi a'}}=0$$

$$A=-\frac{1}{(a+3a')f^{(2)}+2f^{(1)}}$$

$\beta)$ Коли $\qquad P^2-R=C(x-a)^2(x-a')^2$

то підставляючи вартости за f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ і A найдені з рівнаня (20) в вираженях на k і k' дістанемо:

$$\frac{k+k'x+x^2}{(x-a)(x-a')}=1+\frac{2b+2b'x}{(x-a)(x-a')},$$

де:

$$b=\frac{a'\sqrt{\varphi a}+a\sqrt{\varphi a'}}{\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}}+\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}},\quad b'=\frac{\sqrt{\varphi a}+\sqrt{\varphi a'}}{\frac{\varphi' a}{\sqrt{\varphi a}}+\frac{\varphi' a'}{\sqrt{\varphi a'}}}$$

Отже інтеґрал виразить ся:

$$\int\frac{dx}{\varphi(x)}=-\int\frac{(2b+2b'x)}{(x-a)(x-a')}\frac{dx}{\sqrt{\varphi x}}+A\log\frac{P+\sqrt{\varphi x}}{P-\sqrt{\varphi x}}$$

а відношене поміж a і a' буде:

$$a'=\frac{(pp'-p''p''')a+(p+p')p''p'''-(p''+p''')pp'}{(p+p'-p''-p''')-pp'+p''p'''}$$

2) Для $m=1$ буде:

$$P^2-Q^2R=C(x-a)^{2n+4}$$

$$\int \frac{x+k}{(x-a)} \frac{dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

k виразить ся безпосередно з рівнаня (21) $k = -a - \mu A \sqrt{\varphi a}$, а величини A, a, f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, і т. д. найде ся при помочи (20).

Підставивши вартість за k в повисшім інтеґралї одержимо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \mu A \sqrt{\varphi a} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

В той спосіб найде ся всї інтеґрали виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, які може спровадити на інтеґрал $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ при помочи функциї льоґаритмічної виду $A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$.

З цїлого сего уступу бачимо, що коли заходить рівнанє

$$\int \frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + k^{(m-2)} x^{m-2} + \cdots + k^{(1)} x + k}{(x-a)(x-a')(x-a'') \cdots (x-a^{(m-1)})} \frac{dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{P+R\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

то поміж сочинниками a, a', a'' ..... $a^{(m-1)}$, k, k' ..... $k^{(m-1)}$ буде істнувати $(m+1)$ рівнань, значить буде може $m+1$ з поміж тих величин вибрати довільно і при їх помочи означити прочі. Звідси виходить, що можна положити:

$$\frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + k^{(m-2)} x^{m-2} + \cdots + k^{(1)} x + k}{(x-a)(x-a') \cdots (x-a^{(m-1)})} =$$

$$= \frac{x^m + k_1^{(n-1)} x^{n-1} + \cdots + k_1^{(1)} x + k_1}{(x-a)(x-a') \cdots (x-a^{(n-1)})} + \frac{L}{x-c} + \frac{L'}{x-c'} + \cdots + \frac{L^{(n-1)}}{x-c^{(n-1)}}$$

де $k_1^{(n-1)}$, $k_1^{(n-2)}$, ... $k_1^{(1)}$, k_1, a, a', a'', ... $a^{(n-1)}$ суть які-небудь.

Отже інтеґрал

$$\int \frac{x^n + k_1^{(n-1)} x^{n-1} + \cdots + k_1^{(1)} x + k_1}{(x-a)(x-a') \cdots (x-a^{(n-1)})} \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

може виразити через n інтеґралїв виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$. Так само видко, що можна інтеґрал $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ виразити че-

рез n інтеґралів виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, з поміж котрих $(n-1)$ є довільних зі згляду на a.

B) Найти всі інтеґрали виду $\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{R}}$, що дадуть ся выразити при помочи функциї $A \log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$.

Позаяк $$\int \frac{(x-k)dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

то ріжничка $$x+k = \frac{M}{N}$$

а з сего виходить, що $N = c = \text{const.}$

З взорів: $$M = \frac{A\left(2N\frac{dP}{dx} - P\frac{dN}{dx}\right)}{Q}$$

$$N = P^2 - Q^2 R$$ дістанемо:

$$c(x+k) = 2Ac\frac{dP}{dx}, \qquad c = P^2 - Q^2 R.$$

З рівнань тих може винайти k і A, наколи P і Q суть відомі. Приявши $c = 1$, положім в наших рівнанях:

$$P = f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^2 + \cdots\cdots + f^{(n+2)}x^{n+2}$$
$$Q = e + e^{(1)}x + e^{(2)}x^2 + \cdots\cdots + e^{(n)}x^n$$

то дістанемо на A і k вартости:

$$A = \frac{e^{(n)}}{(2n+4)f^{(n+2)}}, \quad k = \frac{f^{(1)}e^{(n)}}{(n+2)ef^{(n+2)}}$$

Що до вартостий P і Q, то їх дістанемо з рівнання:

$$P^2 - Q^2 R = 1.$$

Іменно, коли за P і Q підставимо повисші вираженя, дістанемо:

$$(f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^{(2)} + \cdots\cdots + f^{(n+2)}x^{n+2})^2 - (e + e^{(1)}x + e^{(2)}x^2 + \cdots\cdots + e^{(n)}x^n)^2(\alpha + \beta x + \cdots\cdots \varepsilon x^4) = 1. \qquad (22)$$

Розвинувши се і порівнавши сочинники, дістанемо $(2n+5)$ рівнань на означене $(2n+4)$ сочинників: f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(2n+2)}$, e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ ..... $e^{(n)}$, значить ся, що понад се дістанемо ще відношенє поміж α, β, γ, δ, ε. Сочинник при x^{2n} буде: $f^{(n+2)} - \varepsilon e^{(n)} = 0$, а через се вартости на A і k перейдуть на:

$$A = \frac{1}{(2n+4)\sqrt{\varepsilon}}, \quad k = \frac{1}{(n+2)\sqrt{\varepsilon}}\frac{f^{(1)}}{e}. \qquad (23)$$

Є ту лиш недогідність рахунку, а то та, що рівнаня, які вийдуть з порівнаня сочинників в (22), не суть лїнійні. Але рівнаня ті може заступити системою рівнань лїнїйних в слїдуючий спосіб: Коли в рівнаню:

$$P^2 - Q^2 R = 1$$

місто x положимо $\frac{1}{y}$, одержимо рівнане виду:

$$(Fy)^2 - (fy)^2 \varphi(y) = y^{2n+4}$$

котре для $y = 0$ перейде на:

$$Fy = fy\sqrt{\varphi y}$$

а в нїм:

$$F(y) = f y^{2n+2} + f^{(1)} y^{n+1} + \cdots\cdots + f^{(n+2)}$$
$$f(y) = e y^n + e^{(1)} y^{n-1} + \cdots\cdots + e^{(n)}$$
$$\varphi(y) = \alpha y^4 + \beta y^3 + \gamma y^2 + \delta y + \varepsilon$$

Зріжничкувавши рівнане $Fy = fy\sqrt{\varphi y}$ $2n+3$ разів дістанемо дл $y = 0$ по підставленю вартостий:

$$f^{(n+2)} = c\, e^{(n)}$$
$$f^{(n+1)} = c\, e^{(n-1)} + c^{(1)} e^{(n)}$$
$$f^{(n)} = c\, e^{(n-2)} + c^{(1)} e^{(n-1)} + \tfrac{1}{2} c^{(2)} e^{(n)}$$

(24)

$$f^{(2)} = c\, e + c^{(1)} e^{(1)} + \frac{c^{(2)}}{2} e^{(2)} + \frac{c^{(3)}}{2.3} e^{(3)} + \cdots\cdots + \frac{c^{(n)}}{1.2\cdots n} e^{(n)}$$

$$f^{(1)} = c^{(1)} e + \frac{c^{(2)}}{2} e^{(1)} + \frac{c^{(3)}}{2.3} e^{(2)} + \cdots + \frac{c^{(n+1)}}{1.2.3\cdots(n+1)} e^{(n+1)}$$

$$f = \frac{c^{(2)}}{2} e + \frac{c^{(3)}}{2.3} e^{(2)} + \frac{c^{(4)}}{2.3.4} e^{(3)} + \cdots\cdots + \frac{c^{(n+2)}}{1.2.3\cdots(n+3)} e^{(n+1)}$$

$$0 = \frac{c^{(3)}}{2.3} e + \frac{c^{(4)}}{2.3.4} e^{(1)} + \frac{c^{(5)}}{2.3.4.5} e^{(2)} + \cdots\cdots + \frac{c^{(n+3)}}{1.2.3\cdots(n+3)} e^{(n)}$$

$$0 = \frac{c^{(4)}}{2.3.4} e + \frac{c^{(5)}}{2.3.4.5} e^{(1)} + \cdots\cdots + \frac{c^{(n+4)}}{1.2.3\cdots(n+4)} e^{(n)}$$

$$0 = \frac{c^{(n+3)}}{2.3\cdots(n+3)} e + \frac{c^{(n+4)}}{2.3\cdots(n+4)} e^{(1)} + \cdots\cdots + \frac{c^{(2n+3)}}{1.2.3\cdots(2n+3)} e^{(n)}$$

де в сочинники c, $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, ... і т. д. війшли кромі c ще α, β, γ, δ, ε. З $n+1$ послїдних а поміж тих рівнань виразимо $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ ..... $e^{(n)}$

при помочи e, а кромі сего дістанемо відношенє поміж $c^{(3)}$, $c^{(4)}$, і т. д. Перших $(n+2)$ рівнань дасть знова f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ ..... $f^{(n+2)}$ виражені при помочи e. Само e є довільне і в вислїдї не буде приходити. Коли положимо $k = 0$, то і $f^{(1)} = 0$, а з відси дістанемо ще друге відношенє поміж $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, ... і т. д. і тодї побачимо що:

Інтеґрал $$\int \frac{x dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}}$$

дасть ся виразити при помочи льоґаритмів все, наколи поміж α, β, γ, δ, ε, заходять два відношеня, які дістанемо, коли виелїмінуємо з $n+1$ з поміж (20) і з $f^{(1)} = 0$ величини e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ... $e^{(n)}$. (Ограниченє $k = 0$ не впливає на загальність проблєму, бо вистане в вислїдї положити $x = y + k$, а дістанемо той сам інтеґрал, як колиб не були закладали $k = 0$).

І так пр. для $n = 0$ тото відношенє поміж α, β, γ, δ, ε представить ся:

$$\gamma = \frac{2\varepsilon\beta}{\delta} + \frac{\delta^2}{4\varepsilon}.$$

Пр.: $n = 1$;

можна положити $\varepsilon = 1$, $\beta = -\alpha$, тодї з рівнань (20) вийде: $\delta = 2$, $\gamma = 3$, e (яко довільне) возьмемо $= 2$, то дальше вийде: $e^{(1)} = 1$, $f^{(3)} = 1$, $f^{(2)} = 3$, $f^{(1)} = 0$, $f = -\frac{\alpha}{2} - 2$, $k = 0$, $A = \frac{1}{6}$

отже:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}} = \frac{1}{6} \log \left(\frac{x^3+3x^2-2-\frac{\alpha}{2}+(x+2)\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}}{x^3+3x^2-2-\frac{\alpha}{2}-(x-2)\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}} \right)$$

Рівнанє: $P^2 - 1 = Q^2 R$ можна переробити:

$$(P+1)(P-1) = Q^2 R = P'^2 Q'^2 R' R''.$$

Положім ту:

$$Q = P' Q', \quad R = R' R'',$$

то дістанемо:

$$P + 1 = P'^2 R'$$

$$P - 1 = P'^2 R''$$

а з відси:

$$2 = P'^2 R' - Q'^2 R'' \qquad (25)$$

А то є простїйше рівнанє, чим $P^2 - Q^2R = 1$. Пожиток з сего рівнання побачимо.

Положім:

$$R' = x^2 + 2qx + p, \quad R'' = x^2 + 2q'x + p'$$

а P' і Q' возьмім постійні, то дістанемо через порівнанє сочинників в (25) по підставленю вартостий за R' і R''

$$P = \frac{2x^2 + 4qx + p + p'}{p - p'}, \quad Q = \frac{2}{p - p'}, \quad k = q, \quad A = \frac{1}{4}.$$

А інтеґрал виразить ся:

$$\int \frac{(x+q)dx}{\sqrt{(x^2+2qx+p)(x^2+2q'x+p')}} = \frac{1}{4} \log \left(\frac{2x^2+4qx+p+p'+2\sqrt{R}}{2x^2+4qx+p+p'-2\sqrt{R}} \right)$$

Є ще і другий спосіб розвязання рівнання:

$$P^2 - Q^2R = 1 \tag{26}$$

а є він слїдуючий:

Поставмо: $R = r^2 + s,$

де r є степеня другого, а s першого, то:

$$P^2 - Q^2r - Q^2s = 1.$$

Перший сочинник в P^2 і в Q^2r мусить бути той сам, отже можна положити:

$$P = Qr + Q_1$$

де Q_1 буде степеня $n - 1$, наколи Q є степеня n, а наше рівнанє перейде на:

$$Q_1^2 + 2QQ_1 - Q^2s = 1.$$

А коли v є найбільшою функциєю цїлковитою, що містить ся в $\frac{r}{s}$, тодї:

$$r = sv + u,$$

де u є постійне.

Через се дістанемо:

$$Q_1^2 + 2QQ_1 u + Qs(2vQ_1 - Q) = 1$$

або кладучи:

$$Q = 2vQ_1 + Q_2$$

$$s_1 = 1 + 4uv, \quad r_1 = r - 2u$$

дістанемо місто рівнання (26):

$$s_1 Q_1^2 - 2r_1 Q_1 Q_2 - sQ_2^2 = 0$$

А стосуючи до сего рівнаня на той сам лад і дальші підставленя виду:

$$s_m = s_{m-2} + 4u_{m-1}v_{m-1} \tag{27}$$

$$r_m = r_{m-1} - 2u_{m-1} \tag{28}$$

$$r_m = s_m v_m + u_m \tag{29}$$

$$Q_m = 2v_m Q_{m+1} + Q_{m+2}$$

де Q_{m+2} в степеня $n - m - 2$, дійдемо до рівнаня:

$$s_n Q_n^2 = (-1)^{n+1}$$

де Q_n буде величиною постійною, а тим самим і s_n буде постійне. А то значить, що коли $P^2 - Q^2R = 1$ дасть ся розвязати при помочи функций цїлковитих, тодї одна з поміж величин:

$$c,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \cdots\cdots$$

в постійною і на відворот. А коли приміром $s_n = const$, тодї P в степеня $n+2$, а Q степеня n. Отже треба по черзї класти s, s_1, s_2, $= const$, щоби найти всї вартости R.

З рівнань (27), (28), (29), виходять слїдуючі прикмети величин r, s, u, v для $s_n = const$:

$$r_{n-k} = r_k,\ s_{n-k} = s_{k-1}u^{\mp 1},\ v_{n-k} = v_{k-1}u^{\mp 1},\ u_{n-k} = -u_{k-1}.$$

Для n непаристого $= 2\alpha + 1$ дістанемо кладучи $k = \alpha + 1$:

$$u_\alpha = 0,$$

а для n паристого $= 2\alpha$ дістанемо:

$$u_{\alpha-1} + u_\alpha = 0.$$

То значить, що коли $P^2 - Q^2R = 1$ дасть ся розвязати, а P в степеня непаристого, тодї $u_\alpha = 0$, а коли P в степеня паристого, тодї $u_{\alpha-1} + u_\alpha = 0$ і на відворот: $u_\alpha = 0$ в разї непаристого степеня P, а $u_{\alpha-1} + u_\alpha = 0$ в разї P паристого суть умовинами потрібними і достаточними до розвязаня рівнаня $P^2 - Q^2R = 1$.

З взорів перетворюючих (трансформацийних)

$$Q_m = 2v_m Q_{m+1} + Q_{m+2}$$

$$Q = 2vQ_1 + Q_2,\quad P = rQ + Q_1$$

одержимо $\frac{P}{Q}$ в видї дроба тяглого:

$$\frac{P}{Q} = r + \frac{1}{2v} + \frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2v_{n-2}} + \frac{1}{2v_{n-1}}$$

а звиваючи се на дроб звичайний одержимо F і Q.

$\sqrt{R}$ дістанемо кладучи в $\frac{P}{Q} = \sqrt{R}$ $n = \infty$

$$\sqrt{R} = r + \frac{1}{2v} + \frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_2} + \cdots\cdots \text{in inf.}$$

На случай коли $P^2 - Q^2 R = 1$ дасть ся розвязати, дріб сей буде періодичний.

Щоби означити величини v_m, u_m, s_m і r_m для всякої вартости m, положім:

$$r_m = x^2 + ax + b_m, \quad s_m = c_m + p_m x, \quad v_m = (g_m + x)\frac{1}{p_m}.$$

Коли ті вартости підставимо в (27), (28), (29), дістанемо через порівнане сочинників рівнаня, з котрих постепенно найдемо c_m, p_m, b_m, g_m, u_m. — Так само мож ті величини дістати, зіставляючи названі рівнаня з рівнанем:

$$(c_{m-1} + p_{m-1} x)(c_m + p_m x) + (x^2 + ax\, b_m)^2 = (x^2 + ax + b)^2 + c + px.$$

Тут дістанемо ще відношеня:

$$c_{m-1} c_m = c + b^2 - b_m^2, \quad p_{m-1} p_m = 2(b - b_m) = 2q_m$$

де $$(b - b_m) = q_m.$$

$$c_{m-1} p_m + c_m p_{m-1} = p + 2a(b - b_m)$$

а з відси по перерібці:

$$q_m = \frac{\frac{1}{2} p^2 + (ap - 2c) q_{m-1} - q_{m-2} q_{m-1}^2}{q_{m-1}^2}$$

$$\frac{c_m}{p_m} = \frac{c + q_m q_{m-1}}{p}, \quad q_m = a - \frac{c_m}{p_m}, \quad p_m = \frac{2q_m}{2q_{m-1}} p_{m-2}$$

маємо: $$q_m = b - b_m,$$

отже: $$q = b - b = 0, \quad q_1 = b - b_1$$

з відси: $$b_m = -b_{m-1} + 2\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right)$$

а для: $$m = 1 \quad b_1 = -b + 2\frac{c}{p}\left(a - \frac{c}{p}\right)$$

$$q_1 = 2\frac{bp^2 - acp + c^2}{p^2}$$

Застосуймо се до інтеґрала:

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}}$$

Для упрощеня можна положити $c=0$ і будемо мати:

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}} = \frac{1}{2n+4} \log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$$

а узглядниви $P^2-Q^2R=1$

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}} = \frac{1}{n+2} \log (P+Q\sqrt{R})$$

Щоби се рівнанє було можливе, потреба перше всього, щоби:

$$P^2-Q^2R=1$$

дало ся розвязати. Се станеєь, наколи $s_n = const$, а що $s_n = c_n + p_n x$, проте мусить бути:

$$p_n = 0.$$

Коли та умовина $p_n=0$ буде сповнена, то все буде можливизначити k так, що $\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}}$ буде рівне $\frac{1}{n+2} \log (P+Q\sqrt{R})$.

Вартість k можбуде винайти, так як шукало ся еї повисше: $k=\frac{1}{n+2}a+\frac{f^{(1)}}{e}$. Ту тото k буде мати вартість:

$$k=\frac{1}{n+2}a+\frac{1}{n+2}\left(\frac{c_1}{p_1}+\frac{c_2}{p_2}+\cdots\cdots+\frac{c_{n-2}}{p_{n-2}}\right)$$

Позаяк умовина $p_n=0$ є рівноважна з иньшою, іменно $q_n=0$ або $q_{n-k}=q_{k-1}$, то збираючи всьо то разом дістанемо слїдуюче правило, щоби найти всї інтеґрали виду:

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px+c}}$$

які дадуть ся представити функциєю льоґаритмічною:

$$2A \log\left[P+Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px+c}\,\right]$$

іменно:

Обчислює ся всї величини q_2, q_3, q_4, ... після взора:

$$q_m = \frac{\frac{1}{2}p^2 + (ap - 2c)\,q_{m-1} - q_{m-2}\,q^2_{m-1}}{q^2_{m-1}}$$

закладаючи:

$$q = 0, \quad q_1 = 2\,\frac{bp^2 - acp + c^2}{p^2}$$

Відтак кладе ся по черзї:

$$q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ q_3 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ q_n = 0$$

або, що на одно вийде:

$$q_{n-k} = q_{k-1}\,.$$

Тодї всї вартости, які R може мати, одержимо позбуваючись з тих рівнань і рівнаня $R = 0$ одної з поміж a, p, b, c. Найшовши R найдемо k:

$$k = \frac{1}{n+2}\,a + \frac{1}{n+2}\left(\frac{c}{p} + \frac{c_1}{p_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{c_{n-1}}{p_{n-1}}\right)$$

де:
$$\frac{c_m}{p_m} = \frac{c + q_m\,q_{m-1}}{p}\,.$$

Дальше $\frac{P}{Q}$ представить ся:

$$\frac{P}{Q} = x^2 + ax + b + \cfrac{1}{\cfrac{x+g}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{x+g_1}{p_1} + \cfrac{1}{\cfrac{x+g_2}{p_2} + \ldots\ldots\ldots + \cfrac{1}{\cfrac{x+g_{n-1}}{p_{n-1}}}}}}$$

де:
$$g_m = a - \frac{c + q_m\,q_{m-1}}{p}\,.$$

А з відси дістанемо P і Q, коли сей дріб тяглий замінимо на дріб звичайний, памятаючи що $q_{n-k} = q_{k-1}$. Найшовши се маємо наконець

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}} = \frac{1}{n+2}\,\log\left[P + Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}\right]$$

Г) Найти всї інтеґрали виду $\int \frac{x+k}{x+l}\,\frac{dx}{\sqrt{R}}$, які дадуть ся виразити через функцию льоґаритмічну

$A \log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$. Есть се вправді частний случай заключений в проблемі (Б), та для его ваги в теорії функций еліптичних розвяжемо его окремо при помочи проблему попередного.

Вийдемо з рівнаня:

$$\int \frac{(y+k')dy}{\sqrt{R'}} = A' \log\left(\frac{P'+Q'\sqrt{R'}}{P'-Q'\sqrt{R'}}\right)$$

і коли в нїм за y підставимо $\frac{1}{x+l}$, дістанемо

$$-k'\int \frac{(x+k)dx}{(x+l)\sqrt{R}} = A' \log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$$

де $k' = \frac{1}{k-l}$, а P, Q, R означають вартости, на які перейде P', Q', R' по підставленю $y = \frac{1}{x+l}$.

Вартість на l дістанемо з порівнаня сочинників в рівнанях:

$$R = (1+(x+l)a+(x+l)^2 b)^2 + p(x+l)^3 + e(x+l)^4$$
$$R = (b^2+c)(x^4+\delta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha)$$

іменно l виразить ся при помочи α, β, γ і δ, а наш інтеґрал представить ся в видї:

$$\int \frac{(x+k)}{(x+l)\sqrt{(x^4+\delta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha)}} = A\sqrt{b^2+c}\,\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

де:
$$A = -\frac{A'}{k'}$$

а звідси:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = (k-l)\int \frac{dx}{(x+l)\sqrt{R}} = A\sqrt{b^2+c}\,\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

або:

$$\int \frac{dx}{(x+l)\sqrt{R}} = \frac{1}{1-k}\int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{A\sqrt{b^2+c}}{1-k}\,\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$$

І в той спосіб дістанемо всї інтеґрали виду

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

які дадуть ся виразити через інтеґрал $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ і функцию льоґаритмічну $A\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$.

Д) Відношенє поміж інтеґралами виду:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

Загально неможливо є виразити інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ через інтеґрали $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$. Але в границях, именно для таких x, котрі дають $R=0$, все мож інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ виразити через тамті інтеґрали.

І так, коли інтеґрал:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

зріжничкуємо зі згляду на a і $\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}$ зведемо на інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, дістанемо узглядняючи таке $x=r$, що для него $R=f(x)=0$, таке рівнанє:

$$\sqrt{fa}\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}} - \sqrt{fx}\int \frac{da}{(x-a)\sqrt{fa}} =$$

$$= \int \frac{da}{\sqrt{fa}}\int \frac{(\frac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2)dx}{\sqrt{fx}} - \int \frac{dx}{\sqrt{fx}}\int \frac{(\frac{1}{2}\delta a+\varepsilon a^2)da}{\sqrt{fa}}$$

Маємо в той спосіб ріжницю двох інтеґралів $\sqrt{fa}\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}$ і $\sqrt{fx}\int \frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}}$ виражену через інтеґрали виду:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{fy}} \text{ i } \int \frac{(\frac{1}{2}dy + \varepsilon y^2)\,dx}{\sqrt{fy}}.$$

Наколи інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}$ возьмемо в границях від $x = r$ до $x = r_1$, де r_1 також є вартостию, що сповняє $fx = 0$, дістанемо:

$$\sqrt{fa} \int_r^{r_1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}} =$$

$$= \int_r \frac{da}{\sqrt{fa}} \int_r^{r_1} \frac{(\frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}} - \int_r^{r_1} \frac{dx}{\sqrt{fx}} \int_r \frac{(\frac{1}{2}\delta\alpha + \varepsilon\alpha^2)\,da}{\sqrt{fa}}$$

Взір сей має важне значіне в теорії функций еліптичних.

Можна найти еще загальнїйше відношене межи інтеґралами означеними в слїдуючий спосіб:

Най s означає якунебудь функцию льоґаритмічну виду:

$$A \log\left(\frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}\right) + A' \log\left(\frac{P' + Q'\sqrt{R'}}{P' - Q'\sqrt{R'}}\right) + \cdots\cdots$$

то:

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{R}}\left(B + Cx + \frac{L}{x-a} + \frac{L'}{x-a'} + \cdots\cdots\right)$$

а з відти:

$$s = \int\left(\frac{B + Cx}{\sqrt{R}}\right)dx + L\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + L'\int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} +$$

а інтеґруючи від $x = r$ до $x = r_1$ одержимо:

$$s' - s = \int_r^{r_1} \frac{(B + Cx)\,dx}{\sqrt{R}}$$

$$- \int_r^{r_1} \frac{dx}{\sqrt{fx}}\left[\frac{L}{\sqrt{fx}} \int_r \frac{(\frac{1}{2}\delta\alpha + \varepsilon\alpha^2)\,da}{\sqrt{fa}} + \frac{L'}{\sqrt{fa'}} \int_r \frac{(\frac{1}{2}d\alpha' + \varepsilon\alpha'^2)}{\sqrt{fa'}} + \quad\right]$$

$$+ \int_r^{r_1} \frac{(\frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}}\left[\frac{L}{\sqrt{fa}} \int_r \frac{da}{\sqrt{fa}} + \frac{L'}{\sqrt{fa'}} \int \frac{da'}{\sqrt{fa'}} + \quad\right]$$

Рівнане се дає відношене поміж системою інтеґралів виду:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{fy}}, \quad \int \frac{y\,dy}{\sqrt{fy}}, \quad \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{fy}}.$$

Кромі до тепер виведених відношень поміж функциями переступними, випроваджує автор такіж:

2. **Відношеня для частної кляси функций переступних.** (Oeuvres compl. II. p. 54).

І так, коли y є функцивю x ($y = \psi x$) сповняючою рівнане:

$$y\,fx + \varphi x \frac{dy}{dx} = 0,$$

тоді між функциями тими заходити буде відношене:

$$\frac{1}{\psi a}\int \frac{\psi x\,dx}{x-a} - \psi x\,\varphi x \int \frac{da}{(a-x)\,\varphi a\,\psi a} =$$

$$= \sum \left((n+1)\,\alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1}\right) \int \frac{a^m\,da}{\varphi a\,\psi a} \int x^n \psi x\,dx$$

де α і β суть сочинниками належачими до:

$$\varphi x = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 +$$
$$fx = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \ldots\ldots$$

Причім треба зазначити, що інтеґрали зі взгляду на x належить брати від тої вартости x, яка зводить до зера функцию $\psi x . \varphi x$, а зі згляду на a від тої вартости a, яка зводить до зера функцию $\frac{1}{\psi a}$.

Наколи $\psi x = \frac{1}{\sqrt{\varphi x}}$, тоді повисше відношене переходить на:

$$\sqrt{\varphi a}\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{\varphi x}} - \sqrt{\varphi x}\int \frac{da}{(a-x)\sqrt{\varphi a}} =$$

$$= \sum \tfrac{1}{2}(n-m)\,\alpha_{m+n+2} \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{\varphi x}} \int \frac{a^m\,da}{\sqrt{\varphi a}}$$

а для відомого нам вже виду функциї φx:

$$\varphi x = (1-x^2)(1-c^2x^2)$$

дістанемо відношенє:

$$\sqrt{[(1-a^2)(1-c^2a^2)]}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} -$$

$$-\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}}$$

$$=c^2\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}\int\frac{da}{\sqrt{(1-a^2)(1-a^2c^2)}} -$$

$$-c^2\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}\cdot\int\frac{a^2da}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}}$$

котре служить як точка вихідна до випроваджування прикмет функций еліптичних. — Єсть се тверджене Абеля найбільше основне в цілій теорії інтеґралів альґебраічних.

3. Як виразити суму функций переступних $\int f(yx)\,dx$, де y є функциєю x, через означене число функций того самого виду, показує Абель в уступі під заголовком: **Порівнанє функций переступних.** (Oeuvres compl. II. p. 66).

Коли y є функциєю альґебраічною, означеною рівнанєм:

$$0 = \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 \qquad + \alpha_m y^m \tag{1}$$

де α суть функциями цілковитими x:

а так само:

$$0 = q + q_1 y + q_2 y^2 + \cdots\cdots + q_{m-1} y^{m-1} \tag{2}$$

де q суть функциями цілковитими x і якогось числа иньших змінних $a, a_1, a_2, \ldots$, де ті α суть сочинниками при ріжних степенях x в функциях $q, q_1, q_2 \ldots$ З обох тих рівнань можна y виразити виміримо при помочи $x, a, a_1, a_2 \ldots$ Нехай r буде тою функциєю, значить $y = r$, то підставивши ту вартість за y в одно з обох рівнань даних, дістанемо:

$$s = 0$$

де s є функциєю цілковитою $x, a, a_1, a_2 \ldots$

Зріжничкувавши его і помноживши через $f(yx) = f(rx)$, дістанемо:

$$f(yx)\,dx = \varphi(x)\,da + \varphi_1(x)\,da_1 + \varphi_2(x)\,da_2 + \cdots\cdots \tag{3}$$

де $\varphi(x), \varphi_1(x) \ldots$ суть функциями виміримими $x, a, a_1, a_2, \ldots$

Наколи x_1, x_2, x_3, ... x_n суть корінями рівнання $s = 0$, то підставивши їх по черзі в послідне рівнанє, дістанемо суму:

$f(y_1 x_1)dx_1 + f(y_2 x_2)dx_2 \cdots\cdots + f(y_n x_n)dx_n = R\,da + R_1\,da_1 +$

де R, R_1, R_2, суть функциями виміримими а a_1 a_2 виду:

$$R_m = \varphi_m(x_n) + \varphi_m(x_{n-1}) + \cdots\cdots + \varphi_m(x_2) + \varphi_m(x_1).$$

Позаяк ліва сторона повнешого рівнаня ріжничкового в цілковитою ріжничкою, то і права сторона також мусить дати ся з'інтеґрувати:

$\int R\,da + \int R_1\,da_1 + \int R_2\,da_2 + \cdots\cdots = \varrho$, де ϱ є функциєю альґебраічною і льоґаритмічною величин a, a_1, a_2,

Назвавши ще $\int f(yx)dx$ через $\psi(x)$

дістанемо: $\psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) \cdots\cdots + \psi(x_n) = C + \varrho.$ (4)

При помочи сего рівнаня можна виразити суму якогонебудь числа функций ψx через означене число функций того самого виду.

Величини x_1, x_2, x_3, x_n суть функциями змінних независимих a, a_1, a_2, ... Ясною річею є, що закладаючи число тих змінних рівне μ, може уважати число μ з поміж величин x_1, x_2, ... x_n яко независимі, а прочі $n - \mu$ яко їх функциї. Функциї ті може вишукати.

Положім в рівнаню (4) $n = \mu + \nu$, а $x_{\mu+1} = c_1$, $x_{\mu+2} = c_2$, ... $x_n = c_\nu$, то оно перейде на:

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots\cdots + \psi(x_\mu) = C + \varrho$$

де x_1, x_2, ... x_μ суть звязані між собою рівнанями:

$$\begin{aligned} &\Theta(x_1) = 0, \quad \Theta(x_2) = 0 \cdots\cdots \quad \Theta(x_\mu) = 0 \\ &\Theta(c_1) = 0, \quad \Theta(c_2) = 0 \qquad\quad \Theta(c_\nu) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Коли ж тепер покладемо $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, $x_\nu = x'_\nu$ а: $x'_{\nu+1} = \beta_1$, $x'_{\nu+2} = \beta_2$ ..... $x'_\mu = \beta_{\mu-\nu}$,

дістанемо: $C = -\varrho' + \psi(x_1') + \psi(x_2') + \cdots\cdots + \psi(x'_\nu)$

а:

$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots\cdots + \psi(x_\mu) = \varrho - \varrho' + \psi(x_1') + \psi(x_2') + \cdots\cdots + \psi(x'_\nu)$,

де x_1', x_2', ... x'_ν суть означені рівнанями:

$$\begin{aligned} &\Theta(x_1') = 0, \quad \Theta(x_2') = 0, \cdots\cdots \quad \Theta(x'_\nu) = 0 \\ &\Theta(\beta_1) = 0, \quad \Theta(\beta_2) = 0, \qquad\quad \Theta(\beta_{\mu-\nu}) = 0 \\ &\Theta(c_1) = 0, \quad \Theta(c_2) = 0, \qquad\quad \Theta(c_\nu) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

То коли s означимо через $\Theta_1(x)$, то буде також

$$\Theta_1(x'_\varkappa) = 0, \quad \Theta_1(\beta_\varkappa) = 0, \quad \Theta_1(c_\varkappa) = 0,$$

позаяк a, a_1, a_2, $a_{\mu-1}$ суть визначені двома послїдними рядами рівнань (6).

Отже буде: $\Theta_1(x) = (x-x_1')(x-x_2') \quad (x-x_\nu')$
$\cdot (x-\beta_1)(x-\beta_2) \cdots (x-\beta_{\mu-\nu})$
$\cdot (x-c_1)(x-c_2) \cdots (x-c_\nu)$

а дїлячи рівнанє $\Theta_1(x) = 0$ через добуток:

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2) \cdots (x-\beta_{\mu-\nu})(x-c_1)(x-c_2) \cdots (x-c_\nu)$$

дістанемо рівнанє степеня ν, котрого корені будуть величинами:

$$x_1', \quad x_2', \quad x'_\nu.$$

А коли так визначені суть x_1', $x_2' \cdots x_\nu'$, яко функциї c_1, $c_2, \cdots c_\nu$ то можна їх уважати яко змінні а визначені через (5). В той спосіб величин x_1, $x_2, \cdots x_\mu$ суть независимі, а x_1', $x_2', \cdots x_\mu'$ стають функциями тих змінних.

V. Прочі розвідки Абеля належать до ріжних дїлів математики, а вимінити з них належить слїдуючі:

1. **Про функцию переступну** $\sum\left(\frac{1}{x}\right)$. (Oeuvres compl. p. 24 et 30). Функция $\sum\left(\frac{1}{x}\right)$ названа через Абеля Lx в першою функцией переступною, яка приходить в рахунку ріжничковім, в се функция такої самої ваги в рахунку ріжничковім як $\int \frac{dx}{x}$ в рахунку інтеґральнім.

Автор зачинає представленєм еї в видї ряду і принявши що

(1)
$$L(a+x) = \alpha + \beta x + \gamma x(x-1) + \delta x(x-1)(x-2) + \varepsilon x(x-1)(x-2)(x-3) + \cdots$$

находить через ріжничковане вартости на α, β, γ , через що L(a+x) прийме вид: (2)

$$L(a+x) = La + \frac{x}{a} - \frac{x(x-1)}{2a(a+1)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3a(a+1)(a+2)} - \frac{x(x-1)(x-)(x-3)}{4a(a+1)(a+2)(a+3)} +$$

Наколи за x возьмемо число цїле, тодї ряд сей буде мати скінчене число членів, а если будемо знали вартість L(a), то будем знати так само і L(a+n), де n є число цїле додатне.

І так, коли в взорі тім підставимо по черзі $x = 1, 2, 3$ і т. д., то знаючи вартість $L(a)$ для всіх величин на a, від $a = 1$ до $a = 2$, найдемо $L(a)$ для всіх прочих вартостий на a. [Позаяк функция $\sum\left(\frac{1}{x}\right) = Lx$ має одну величину постійну довільну, то для якоїсь даної вартости на a буде може за ню підставити яку небудь вартість функциї $L(a)$, прим. $L(1) = 0$, тоді з нашого взора (2) дістанемо: $L(0) = -\infty$, $L(a) = -\infty$].

Щоби найти $L(a)$ від $a = 1$ до $a = 2$, треба взір (2) представити в відповіднім виді:

$$L(1+\omega) = \frac{\omega}{\omega+1} + (S_2-1)\,\omega - (S_3-1)\,\omega^2 + (S_4-1)\,\omega^3 -$$

$$\text{де} \quad S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots\cdots;$$

кладучи $-\omega$ на місце ω дістанемо (3)

$$L(1-\omega) = \frac{\omega}{\omega-1} - (S_2-1)\,\omega - (S_3-1)\,\omega^2 - (S_4-1)\,\omega^3 +$$

а позаяк: $\quad L(2-\omega) = L(1-\omega) + \frac{1}{1-\omega}, \quad$ то:

$$L(2-\omega) = 1 - (S_2-1)\,\omega - (S_3-1)\,\omega^2 - (S_4-1)\,\omega^3 - \cdots\cdots.$$

Взори (3) мають важне застосоване при обчисленю рядів. Бо позаяк $S\varphi(x) = \Sigma\varphi(x+1)$, то буде може найти суму всяких рядів, котрих член загальний є φx, наколи знаємо $\Sigma\varphi x$.

Обчислїм для приміру суму ряду гармонїчного при помочи функциї $L(x)$:

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} + \cdots\cdots + \frac{a}{b+cx} = S\left(\frac{a}{b+cx}\right) = P$$

маємо $\quad P = \sum\left(\frac{a}{b+c+cx}\right) = a\sum\left(\frac{1}{b+c+cx}\right).$

Положім $b+c+cx = cy$, то $P = \frac{a}{c}\sum\left(\frac{1}{y}\right) = C + \frac{a}{c}L(y)$

$P = C + \frac{a}{c}L\left(\frac{b+c}{c} + x\right)$. Щоби означити C, положім $x = o$, тоді $P = \frac{a}{b}$, а з відси: $\frac{a}{b} = C + \frac{a}{c}L\left(\frac{b+c}{c}\right)$, отже:

$$P = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\left[L\left(\frac{b+c}{c} + x\right) - L\left(\frac{b+c}{c}\right)\right];$$

для $a=1, b=1, c=2$ буде:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{1+2x}=1+\frac{1}{2}L\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}L\left(\frac{3}{2}\right).$$

Функция L(1+a) дасть ся представити при помочи інтеґралу:

$$L(1+a)=\int_0^1 \frac{x^a-1}{x-1}\,dx$$

кладучи $x^{a'}$ на місце x і називаючи $aa'=m$, дістанемо:

$$L\left(1+\frac{m}{a'}\right)=a'\int_0^1 \frac{x^m-1}{x^{a'}-1}\,x^{a'-1}\,dx$$

а взір сей говорить, що доки y в якою небудь величиною дійсною, то L(y) дасть ся все виразити через функциї альґебраічні, льоґаритмічні і колові, бо інтеґрал $\int\frac{x^m-1}{x^{a'}-1}x^{a'-1}\,dx$ дасть ся для цїлковитих вартостий a' і m представити при помочи функций альґебраічних, льоґаритмічних і колових.

Цїкаві суть також деякі прикмети тої функциї; і так:

$$L\left(\frac{1}{a}\right)+L\left(\frac{2}{a}\right)+L\left(\frac{3}{a}\right)+\cdots+L\left(\frac{a-1}{a}\right)=a\log\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$2L(2a)=2\log 2+L(a)+L\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

$$L(na)=\log n+\frac{1}{n}\left[L(a)+L\left(a+\frac{1}{n}\right)+\cdots+L\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

і т. д.

Ріжничкуючи постепенно функцию $\sum\left(\frac{1}{a}\right)$ дістанемо:

$$\frac{d\sum\left(\frac{1}{a}\right)}{da}=\frac{\sum\left(d\frac{1}{a}\right)}{da}=-\sum\frac{1}{a^2}$$

$$\frac{d^2\sum\frac{1}{a}}{da^2}=\frac{\sum d^2\left(\frac{1}{a}\right)}{da^2}=+2\sum\frac{1}{a^3}$$

$$\frac{d^n\sum\frac{1}{a}}{da^n}=\frac{\sum d^n\left(\frac{1}{a}\right)}{da^n}=\pm 2.3.4\cdots n\sum\frac{1}{a^{n+1}}$$

де знак + буде, коли n паристе, а −, коли непаристе.

То і на відворот:

$$\sum \frac{1}{a^2} = \frac{d \sum \frac{1}{a}}{da}, \quad \sum \frac{1}{a^3} = \frac{d^2 \sum \frac{1}{a}}{da^2} \text{ і т. д.}$$

Ті всї функциї переступні вищпорядні можж представити при помочи інтеґралів означених:

Було, що:

$$\sum \frac{1}{a} = La = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - 1}{x - 1} dx;$$

ріжничкуючи се зі згляду на α дістанемо:

$$\sum \frac{1}{a^2} = -\int_0^1 \frac{x^{a-1} lx}{x-1} dx \qquad \text{де } lx = \int \frac{dx}{x}$$

$$\sum \frac{1}{a^3} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{a-1} (lx)^2}{x-1} dx \quad \text{і т. д.}$$

$$\sum \frac{1}{a^\alpha} = \pm \frac{1}{2.3.\cdots\alpha} \int_0^1 \frac{x^{a-1} (lx)^{\alpha-1}}{x-1} dx$$

або:

$$\sum \frac{1}{a^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{x^{a-1} \left(l \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1} dx \quad (\Gamma \text{ функция Euler'a})$$

найшовши сталу інтеґрованя і вставивши в послїднім взорі одержимо:

$$\sum \frac{1}{a^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{x^{a-1} - 1}{x-1} \left(l \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx$$

2. **Інтеґрал скінчений $\Sigma^n \varphi x$ виразити через інтеґрал означений поодинокий.** (Oeuvres compl. II. 45).

Після Parseval'a можна інтеґрал скінчений $\Sigma^n \varphi x$ виразити через інтеґрал означений подвійний.

Абель представляє той сам інтеґрал $\Sigma^n \varphi x$ при помочи інтеґралу означеного поодинокого.

Він надає функциї φx вид:

$$\varphi x = \int e^{xv} fv. \, dv \qquad (1)$$

де інтеґрал береся поміж двома якимись границями v незалежними від x, fv означає функцию v залежну від виду φx.

Інтеґруючи обі сторони для $\Delta x = 1$ дістанемо:

$$\Sigma \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{e^v - 1} dv$$

з додатком сталої інтеґрованя. А по n-кратнім інтеґруванню одержимо:

$$\Sigma^n \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{(e^v - 1)^n} dx \qquad (2)$$

з додатком:

$$C + C_1 + C_2 x^2 + \cdots\cdots + C_{n-1} x^{n-1},$$

де C, C_1, C_2, суть сталими інтеґрованя.

$\frac{1}{(e^v - 1)^n}$ дасть ся представити в виді:

$$\frac{1}{(e^v - 1)^n} = (-1)^{n-1} \left(A_{0,n} p + A_{1,n} \frac{dp}{dx} + A_{2,n} \frac{d^2 p}{dv^2} + \cdots\cdots + A_{n-1,n} \frac{d^{n-1} p}{dv^{n-1}} \right).$$

Ріжничкуючи се рівнанє одержимо взори на сочинники: $A_{0,n}$, $A_{1,n}$ і т. д.

$$A_{0,n} = 1, \quad A_{1,n} = \sum \frac{1}{n}, \quad A_{2,n} = \sum \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{n} \right),$$

$$A_{3,n} = \sum \left[\frac{1}{n} \sum \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$A_{n,n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdots\cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1}, \quad A_{0,1} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}.$$

А що після Legendre'a (Exerc. de calc. int. T. II. p. 189).

$$\frac{1}{e^v - 1} = \frac{1}{v} - \frac{1}{2} + 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt \sin dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

проте для n паристого

$$\frac{d^n p}{dv^n} = \frac{2.3 \quad n}{v^{n+1}} - 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^n dt \cos vt}{e^{2\pi t} - 1}$$

для n непаристого будемо мати знак — і $\sin vt$ місто $\cos vt$. Інтеґрал $\int e^{vx} fv \sin vt \, dv$ найдемо кладучи в рівнаню (1) за x раз $x + ti$, другий раз $x - ti$; дістанемо іменно:

$$\int e^{vx} . \sin vt . fv . dv = \frac{\varphi(x+ti) - \varphi(x-ti)}{2i}$$

а так само:

$$\int e^{vx} . \cos vt . fv . dv = \frac{\varphi(x+ti) + \varphi(x-ti)}{2}$$

узглядниви при тім

$$\int_{\cdot}^{n} \varphi x \, dx = \int e^{vx} fv \, \frac{dv}{v^s}$$

дістанемо по підставленю:

$$\sum\nolimits^{n} \varphi x = A_{n-1,n} \Gamma(n) \int_{\cdot}^{n} \varphi x \, dx^n - A_{n-2,n} \Gamma(n-1) \int_{\cdot}^{n-1} \varphi x \, dx^{n+1} + \quad +$$

$$+ (-1)^{n-1} \int \varphi x \, dx + (-1)^n \tfrac{1}{2} \varphi x$$

$$+ 2(-1)^{n-1} \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{P . dt}{e^{2\pi t} - 1} \, \frac{\varphi(x+ti) - \varphi(x-ti)}{2i} +$$

$$+ 2(-1)^{n-1} \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{Q . dt}{e^{\pi t} - 1} \, \frac{\varphi(x+ti) + \varphi(x-ti)}{2}$$

де: $P = A_{0,n} - A_{2,n} t^2 + A_{4,n} t^4 -$

а: $Q = A_{1,n} - A_{3,n} t^3 + A_{5,n} t^5 - \cdots\cdots$

Взором (3) представлений в інтеґрал скінчений $\Sigma^n \varphi x$ при помочи інтеґрала означеного поодинокого.

3. В розвідцї:

Визначні прикмети функциї $y = \varphi x$, **означеної рівнанєм:**

$$fy . dy - dx \sqrt{(a-y)(a_1-y)(a_2-y) \quad (a_m-y)} = 0$$

де fy **означає якунебудь функцию** y, **що не стає ся зером анї безконечностию для** $y = a, a_1, a_2, \quad a_m$. (Oeuvres compl. II. 51), — доказує автор, що функция φx в функцию періодичною о періоді 2α означеним рівнанєм:

$$\alpha = \int^{a} \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{\psi y}}$$

де отже α означає вартість x відповідаючу вартости $y = a$.

$$\varphi(v) = \varphi(v + 2n\alpha + 2n_1\alpha_1 + 2n_2\alpha_2 + \cdots\cdots + 2n_m\alpha_m)$$

де $n_1 + n_2 + n_3 + \quad + n_m = 0$

а де α_1, α_2, і т. д. суть вартостями x для $y = a_1, a_2, \quad a_m$.

4. Теория функций творячих (génératrice) і визначаючих (déterminante). (Oeuvres compl. II. 77).

Если $\varphi(x\,y\,z)$ представляє якунебудь функцию змінних x, y, z, то може найти функцию f(u, v, p) таку, щоби:

$$\varphi(x, y, z) = \int e^{xu+yv+zp} f(u, v, p)\,du\,dv\,dp$$

число змінних може бути якенебуь.

В рівнаню тім називає автор φ функциєю творячою функциї f і значить ей: $\varphi(x, y, z \quad) = fgf(u, v, p, \quad)$, а f називає визначаючою функциї φ і значить: $f(u, v, p \quad) = D\varphi(x, y, z \cdots\cdots)$.

Возьмім функцию одної змінної:

$$\varphi x = \int e^{vx} fv\,.\,dv$$

$$\varphi x = D\varphi x$$

$$fv = fg\,.\,fv$$

так само:

$$\varphi_1 x = \int e^{vx} f_1 v\,dv$$

то:

$$\varphi x + \varphi_1 x = \int e^{vx}(fv + f_1 v)\,dv$$

отже:

$$D(\varphi x + \varphi_1 x) = fv + f_1 v$$

т. з.:

$$D(\varphi x + \varphi_1 x) = D\varphi x + D\varphi_1 x$$

так само;

$$D(\varphi x + \varphi_1 x + \varphi_2 x + \cdots\cdots) = D\varphi x + D\varphi_1 x + D\varphi_2 x + \cdots\cdots$$

а рівночасно:

$$fg\,.\,(fv + f_1 v + f_2 v + \quad) = fg\,.\,fv + fg\,.\,f_1 v + fg\,.\,f_2 v +$$

Дальше випроваджує автор, що:

$$D\left(\frac{d^n \varphi v}{dx^n}\right) = v_n D\varphi v,$$

$$fg.(v^n fv) = \frac{d^n fx}{dx^n}$$

що:

$$D\left(\int^n \varphi x\, dx^n\right) = v^{-n} D\varphi x, \quad fg(v^{-n} fv) = \int^n \varphi x\, dx^n$$

Потім:

$$D(\Delta_\alpha^n \varphi x) = (e^{v\alpha} - 1)^n fv, \quad fg.\left[(e^{v\alpha} - 1)^n fv\right] = \Delta_\alpha^n \varphi x$$

$$D(\Sigma_\alpha^n(\varphi x)) = (e^{v\alpha} - 1)^{-n} fv, \quad fg.\left[(e^{v\alpha} - 1)^{-1} fv\right] = \Sigma_\alpha^n \varphi x$$

де α значить ріжницю x.

Єсли возьмемо загально:

$$\delta(\varphi x) = A_{n,\alpha} \frac{d^n \varphi(x+\alpha)}{dx^n} + A_{n_1,\alpha_1} \frac{d^{n_1} \varphi(x+\alpha_1)}{dx^{n_1}} +$$

то:

$$\delta(\varphi x) = \int e^{vx}.fv\left(A_{n,\alpha} v^n . e^{v\alpha} + A_{n_1,\alpha_1} v^{n_1} e^{v\alpha_1} + \quad\right) dx$$

отже:

$$D(\delta\varphi x) = fv.\left(A_{n,\alpha} v^n e^{v\alpha} + A_{n_1,\alpha_1} v^{n_1} e^{v\alpha_1} + \cdots\cdots\right).$$

Назвім:

$$A_{n,\alpha} v^n e^{v\alpha} + A_{n_1,\alpha_1} v^{n_1} e^{v\alpha_1} + \cdots\cdots = \psi(v)$$

тодї:

$$D(\delta\varphi x) = \psi(v).D\varphi x$$

а:

$$D(\delta\delta_1\delta_2 \quad \varphi x) = \psi(v).\psi_1(v).\psi_2(v) \quad D\varphi x.$$

Теория та є дуже придатна при розвиваню функций на ряди.

Розвинїм для приміру $\varphi(x+a)$ при помочи ріжничкових сочинників φx.

Визначаюча функциї $\varphi(x+a)$ є рівна $e^{v\alpha} fv$, а функциї $\frac{d^n \varphi x}{dx^n} = v^n . fv$. Ходить о розвинене $e^{v\alpha}$ на вираженя виду $A_n v^n$, отже буде:

$$e^{v\alpha} = 1 + v\alpha + \frac{v^2}{1.2}\alpha^2 + \frac{v^3}{1.2.3}\alpha^3 + \cdots\cdots + \frac{v^n}{1.2.3\cdots n}\alpha^n + \cdots\cdots$$

а:

$$e^{v\alpha}.fv = fv + \alpha.vfv + \frac{\alpha^2}{1.2}v^2fv + \frac{\alpha^3}{1.2.3}v^3fv +$$

а беручи функцию творячу кождого члена сего рівнаня дістанемо з увагою на:

$$fg(e^{v\alpha}.fv) = \varphi(x+a) \text{ і } fg(v^n fv) = \frac{d^n \varphi x}{dx^n}$$

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi x + \alpha \frac{d\varphi x}{dx} + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d^2\varphi x}{dx^2} + \cdots\cdots\cdots$$

Форма відома нам з рахунку ріжничкового.

Таких примірів застосованя повисшої теорії випроваджує автор більше.

Дальше є пару розвідок, в яких автор старає ся ріжні функциї виразити при помочи інтеґралів означених пр.:

5. **Виразити $\varphi(x+yi) + \varphi(x-yi)$ через інтеґрал означений.** (Oeuvr. compl. II. 222).

Часть дїйсну сеї суми $\varphi(x+yi) + \varphi(x-yi)$ можна на случай, коли φ є функциєю альґебраічною, льоґаритмічною, виложничою або коловою, представити в видї дїйснім і скінченім, та не мож сего зробити в случаю загальнім. За се мож саму суму представити при помочи означеного інтеґрала:

Коли $\varphi(x+yi)$ і $\varphi(x-yi)$ розвинемо після взору Taylor'a, то дістанемо на суму:

$$\varphi(x+yi) + \varphi(x-yi) = 2\left(\varphi x - \frac{\varphi''x}{1.2}y^2 + \frac{\varphi''''x}{1.2.3.4}y^4 - \right) \quad (1)$$

Щоби найти суму сего ряду, возьмім під увагу:

$$\varphi(x+t) = \varphi x + t.\varphi' x + \frac{t^2}{2}\varphi'' x + \frac{t^3}{2.3}\varphi''' x + \cdots\cdots\cdots$$

Помноживши обі сторони рівнаня через $e^{-v^2t^2}$ та інтеґруючи від $t = -\infty$ до $t = +\infty$ одержимо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+t)\, e^{-v^2t^2}\, dt =$$

$$= \varphi x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2t^2}\, dt + \varphi' x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2t^2}.t\, dt + \tfrac{1}{2}\varphi'' x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2t^2}.t^2\, dt + \cdots\cdots \quad (2)$$

а що:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2t^2} t^{2n+1}\, dt = 0$$

проте остануть самі паристі ріжнички функції φx. Інтеґрали з паристими виложниками при t будуть мати вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2t^2} . t^{2n}\, dt = \frac{1.3.5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n\, v^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{v^{2n+1}} . A_n$$

По підставленю вартостий за них в рівнаню (2) одержимо:

(3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\, e^{-v^2t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{v}\left(\varphi x + \frac{A_1}{2}\frac{\varphi'' x}{v^2} + \frac{A_2}{2.3.4}.\frac{\varphi'''' x}{x^4} + \quad\right)$$

Помноживши се через $e^{-v^2y^2}.v.dv$ і з'інтеґрувавши від $v = -\infty$ до $+\infty$ дістанемо остаточно: (4)

$$\frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v.dv.e^{-v^2y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\, e^{-v^2t^2} dt = 2\left(\varphi x - \frac{\varphi'' x}{2}.y^2 + \frac{\varphi'''' x}{2.3.4}.y^4 \quad\right)$$

Другий член сего рівнаня є рівний:

$$(\varphi x + y\,i) + \varphi(x - y\,i)$$

отже:

$$\varphi(x+yi) + \varphi(x-yi) = \frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v dv.e^{-v^2y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\, e^{-v^2t^2} dt$$

дасть суму $\varphi(x+y\,i) + \varphi(x-y\,i)$ виражену означеним інтеґралом.

6. **Числа Bernoulli'ого виражені при помочи означених інтеґралів і випроваджене звідси вираженє скінченого інтеґралу $\Sigma\varphi x$.** (Oeuvr. compl. II. 224).

Числа Бернулього суть то сочинники A_1, A_2, A_3 ..... в розвиненю функциї $1 - \frac{u}{2}\cot\frac{u}{2}$ на ряд після ростучих степений u:

$$1 - \frac{u}{2}\cot\frac{u}{2} = A_1\frac{u^2}{2} + A_2\frac{u^4}{2.3.4} + \cdots\cdots + A_n\frac{u^{2n}}{2.3.4\cdots 2n}$$

Вартости тих сочинників суть:

$$\frac{A_n}{1.2.3\cdots 2n} = \frac{1}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots\cdots\cdots\right)$$

Возмім на увагу інтеґрал:

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}\, dt}{e^t - 1}.$$

Розвинувши его знаменник на ряд дістанемо:

$$\int \frac{t^{2n-1}dt}{e^t} = \int e^{-t}.t^{2n-1}\,dt + \int e^{-2t}\,t^{2n-1}\,dt + \cdots + \int e^{-kt}\,t^{2n-1}\,dt + \cdots$$

а позаяк:

$$\int_0^{\frac{1}{0}} e^{-kt}\,t^{2n-1}\,dt = \frac{\Gamma(2n)}{k^{2n}}$$

проте:

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^t-1} = \Gamma(2n)\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\quad\right) = \frac{\Gamma(2n).2^{2n-1}.\pi^{2n}}{1.2.3\cdots 2n}.A_n$$

отже:

$$A_n = \frac{2n}{2^{2n-1}}\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^{\pi t}-1}$$

При помочи послїдного выраженя мож функцию $\Sigma\varphi x$ выразити означеним інтеґралом.

$$\Sigma\varphi x = \int \varphi x\,dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + A_1\frac{\varphi' x}{1.2} - A_2\frac{\varphi''' x}{1.2.3.4} + A_3\frac{\varphi^v x}{1.2.3.4.5.6} -$$

Підставивши за A_1, A_2, A_3 вартости дістанемо (винявши перед скобки $\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t}-1}$):

$$\Sigma\varphi x = \int \varphi x\,dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t}-1}\left(\varphi' x\frac{t}{2} - \frac{\varphi'''' x}{1.2.3}\frac{t^3}{2^3} + \frac{\varphi^v x}{1.2.3.4.5}\frac{t^5}{2^5} + \cdots\right)$$

а що:

$$\varphi' x\frac{t}{2} - \frac{\varphi'''' x}{1.2.3}\frac{t^3}{2^3} + \frac{\varphi^v x}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{t^5}{2^5} - \cdots\cdots$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\varphi\left(x+\frac{t}{2}i\right) - \varphi\left(x-\frac{t}{2}i\right)\right]$$

проте $\Sigma\varphi x$ выразить ся рівнанєм:

$$\Sigma\varphi x = \int \varphi x\,dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t}-1}\,\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}i\right) - \varphi\left(x-\frac{t}{2}i\right)}{2i}$$

Суть також розвідки, в яких Абель подає способи інтеґрованя деяких рівнань ріжничкових. Пр.:

7. **Інтеґроване рівнаня ріжничкового** $dy = (p + qy + ry^2)\,dx = 0$ **де** p, q, **і** r **суть функциями самого** y. (Oeuvr. compl. II. 229).

Рівнанє ріжничкове: $dy = (p + qy + ry^2)\,dx = 0$ (1) перейде через підставленє $y = zr'$ на:

$$dz + (pe^{\int q\,dx} + re^{-\int q\,dx} z^2)\,dx = 0 \qquad (2)$$

т. є на рівнанє виду: $dy = (P + \Theta y^2)\,dx$

а се рівнанє (1) дасть ся з'інтеґрувати, наколи $pe^{\int q\,dx} = ar\,e^{-\int q\,dx}$, бо тоді (3)

$$\frac{dz}{a+z^2} = -\frac{p}{a}\,e^{\int q\,dx}\,.\,dx, \quad \text{отже:}$$

$$z = -\sqrt{a}\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\int p\,dx\,.\,e^{\int q\,dx}\right)$$

значить, що:

$$y = -\sqrt{a}\,.\,e^{\int -q\,dx}\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\int e^{\int q\,dx}\,.\,p\,dx\right) \qquad (4)$$

Через підставленє (3) перейде рівнанє (1) на:

$$dy + \left[p + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dr}{r\,dx} - \frac{dp}{p\,dx}\right)y + ry^2\right]dx = 0 \qquad (5)$$

а єго інтеґрал на:

$$y = -\sqrt{\frac{p}{r}}\,\mathrm{tg}\int\sqrt{rp}\,dx$$

або вираживши tang функциями виложничими на:

$$y = \sqrt{-\frac{p}{r}}\,.\,\frac{1 - e^{2\int dx\,\sqrt{-pr}}}{1 + e^{2\int dx\,\sqrt{-pr}}} \qquad (6)$$

Пр. для $p = -r = \frac{1}{x}$ інтеґрал сей буде $y = \frac{1 - cx^2}{1 + cx^2}$.

Та помимо сего, що — як видко в деяких случаях — через відповідне підставленє рівнанє дасть ся з'інтеґрувати, то всеж догідніїшим для інтеґрованя рівнань є чинник інтеґруючий. Коли приміром чинник інтеґруючий возьмемо $z = e^r$, то рівнанє (1) перейде на:

$$\frac{dr}{dx} = (p + qy^2)\,\frac{dr}{dy} + 2qy \qquad (7)$$

Рівнанє се взагалї не є лекше до розвязаня чим (1); та може найти богато частних случаїв, в яких рівнанє (7) дасть ся з'інтеґрувати.

Возьмім приміром за чинник інтеґруючий

$$\frac{1}{(\alpha+\beta y)^2},$$

тодї рівнанє (7) перейде на:

$$dy + \left(\frac{\alpha'}{\beta} - \frac{\beta'}{\alpha} y^2\right) dx = 0 \qquad (8)$$

де α' значить $\frac{d\alpha}{dx}$ а $\beta = \frac{d\beta}{dx}$

причім α і β будуть звязані рівнанями:

$$\alpha' - \beta p = 0, \quad \beta' + aq = 0.$$

З'інтеґрувавши (8) дістанемо:

$$\int \frac{dy}{(\alpha+\beta y)^2} + fx = 0$$

або:

$$fx - \frac{1}{\alpha+\beta y} = 0.$$

Щоби найти fx, треба се послїдне рівнанє зріжничкувати, виразити y при помочи x, тодї:

$$f'x = -\frac{\alpha'}{\alpha\beta^2}, \quad \text{а} \quad fx = -\int \frac{\beta'}{\alpha\beta^2} dx$$

а тодї інтеґрал рівнаня (8) буде:

$$\frac{1}{\beta(\alpha+\beta y)} + \int \frac{\beta'}{\alpha\beta^2} dx = 0$$

т. є.

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta^2\left(C - \int \frac{\beta'}{\alpha\beta^2} dx\right)}$$

Застосованє чинника інтеґруючого до розвязаня рівнань ріжничкових показує автор ще і на рівнаню:

$$(y+s)\,dy + (p+qy+ry^2)\,dx = 0$$

розвязуючи єго на кілька способів при помочи ріжних чинників інтеґруючих. T. II. p. 236).

8. **Умовини потрібні, щоби функция більше змінних і їх ріжничок скінчених, — де ті змінні суть независимі одна від другої — була цїлковитою ріжничкою.** (Oeuvres compl. II. 9.).

Най U буде функциєю, що має бути цїлковитою ріжничкою а ΣU єї інтеґралом, то наколи ΣU має бути цїлковитим інтеґралом, тоді і $\delta\Sigma U$ також ним буде.

Наколиж:

$$U = f(x, y, z, \cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots \Delta^2 x, \Delta^2 y, \Delta^2 z, \cdots)$$

то:

$$\Sigma\delta U = \Sigma\delta x \,.\, P + \Sigma\delta y \,.\, Q + \Sigma\delta z \,.\, R + \cdots + \alpha$$

де:

$$P = fx - \Delta f'\big(\Delta(x - \Delta x)\big) + \Delta^2 f'\big(\Delta^2(x + 2\Delta x + \Delta^2 x)\big) - \cdots$$

$$Q = f'y - \Delta f'\big(\Delta(y - \Delta y)\big) + \Delta^2 f'\big(\Delta^2(y + 2\Delta y + \Delta^2 y)\big) -$$

і т. д.; α означає часть поза знаком інтеґрования.

Позаяк $\delta x, \delta y, \delta z,$ суть независимі, проте $\Sigma\delta x \,.\, P$, $\Sigma\delta y \,.\, Q$, $\Sigma\delta z \,.\, R,$ не будуть цїлковитими інтеґралами, хиба що $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$. А се значить, що щоби функция більше змінних і їх ріжничок скінчених була повною ріжничкою, потреба, щоби сповнили ся слїдуючі рівнаня:

$$0 = f'(x) - \Delta f'\big[\Delta(x - \Delta x)\big] + \Delta^2 f'\big[\Delta^2(x - 2\Delta x + \Delta^2 x)\big] -$$
$$- \Delta^3 f'\big[\Delta^3(x - 3\Delta x + 3\Delta^2 x - \Delta^3 x)\big] + \cdots$$

$$0 = f'(y) - \Delta f'\big[\Delta(y - \Delta y)\big] + \Delta^2 f'\big[\Delta^2(y - 2\Delta y + \Delta^2 y)\big] -$$
$$- \Delta^3 f'\big[\Delta^3(y - 3\Delta y + 3\Delta^2 y - \Delta^3 y)\big] +$$

$$0 = f'(z) - \Delta f'\big[\Delta(z - \Delta z)\big] + \Delta^2 f'\big[\Delta^2(z - 2\Delta z + \Delta^2 z)\big] -$$
$$- \Delta^3 f'\big[\Delta^3(z - 3\Delta z + 3\Delta^2 z - \Delta^3 z)\big] +$$

і т. д.

Се суть умовини конечні, а як автор дальше доказує, заразом і достаточні.

Рівнаня ті випроваджує автор ще і другий раз як умовини потрібні, щоби інтеґрал функциї даної був maximum або minimum. Є се именно предметом розвідки: **Про maxima і minima інтеґралів.** (Oeuvres compl. II. p. 1.). Там окрім випровадженя повисших взорів, є ще і два частні приміри яко застосованє виведених рівнань.

Закінченє.

Так перейшов я по черзі всі праці Абеля, великі обємом, богаті ріжнородностию обсягів, а перворядного значіня в історії розвою математики. Вже перші его праці з обсягу розвязуваня рівнань альґебраічних мають епохальне значінє в альґебрі. Квестия, яка через два століття оставала непорішеною, а якій посьвятили свої праці майже всї визначні математики XVIII. століття, як Euler, Bézout, Lagrange, Vandermonde, Malfatti і иньші, квестия альґебраічного розвязаня рівнаня пятого степеня, війшла тепер на нову дорогу. Стало ясно, що рівнаня степеня висшого чим четвертий, альґебраічно розвязати не дадуть ся, а тим самим і досліди на тім поли мусїли звернутись в иньшім напрямі; треба було шукати иньших функций, що при їх помочи рівнанє пятого степеня дало ся розвязати. Се й довело до розвязаня при помочи функций елїптичних.

Теория ґруп абелєвих дала новий спосіб розвязуваня рівнань альґебраічних, а дальше можність пізнаваня, коли рівнанє дасть ся розвязати альґебраічно. Теория ся, піднята пізнїйше через Galois, розвинула ся широко і отворила нове поле до дослїдів над функциями аналїтичними. Не меньше цінні є праці Абеля, що відносять ся до функций елїптичних, а період 1815 – 1829, на який припадає час творенія Абеля, може безперечно назвати найважнїйшим в розвою теориї функций елїптичних. Прикмети функций елїптичних, випосажених теоремом множеня зложеного, по части доказані, а по части лиш (інтуіцийно) віщо перечуті Абелем, стались товчком до дальших праць в тім напрямі Jacobi, Hermite'a, Jouberta, Greenhilla, Webera, а передовсїм Kroneckera, який не лише доказав теореми Абля, але відкрив глубші відносини сеї науки до альґебри і теориї чисел. В тім множеню зложенім беруть початок „числа альґебраічні“, які доперва в послїдних часах стали загальним добром ширших кругів математичних. Відкритє альґебраічної природи рівнаня, відносячого ся до поділу періодів функций елїптичних, основує ся на відношенях поміж коренями того рівнаня, відношенях, які відкрив Абель.

Єго досліди над функциями переступними суть підставою до цїлої нової теориї функций і інтеґралів абелевих, а єго славне твердженє о сумі інтеґралів абелевих є найбільше основним твердженєм в цїлій теориї функций альґебраічних і їх інтеґралів. З ним вяжуть ся праці Riemanna і цїла теория поверхний ріманівских,

дальше працї Eulera, Weierstrassa, Neumanna, а також Clebscha і Gordana, який щасливо зробив *ту* початок до сполуки понять геометричних і аналїтичних.

В загалї у всїх галузях аналїзи слїдний вплив сего великого чоловіка.

Перемишль, вересень 1902. – май 1903.

Роля сталої, плинної і ґазової фази в хемічній рівновазі.

I.

Від коли хемія вступила на науковий шлях, від тоді датуєсь повстанє проблєму самої сути тої внутренної сили, що поводує хемічні переміни. Вже навіть старинна грецка фільозофія говорить про симпатию і антипатию атомів. Від того старинного погляду наука не поступала так дуже наперед, якби собі може дехто уявляв. Нині тая симпатия атомів має лише нову наукову назву хемічного свояцтва чи посвояченя, котрим коротко збуваємо неясну для нас квестию. Но з другої сторони годї заперечити, щоби на тім поли забракло коли серийозної і совісної праці. Безперечний поступ у тім напрямі в порінаню з поглядами старинних зробили Бореллї і Лємері, котрі собі уявляли, що атоми мають гачковату структуру, дальше Нютон, Берґман і Бертолє, котрі підряджують хемічні процеси явищам взаїмної атракциї маси, яко щось зовсїм анальоґічного спаданю каміня на верхню землї. Пізнїйше (в половинї XIX віку) пановала довгий час іпотеза Берцелїя о електричних силах, котра однакож, не причиннилась зовсїм до поступу на дорозї вияснення властивої сути хемічної сили.

Нинїшне становище хемії в тій квестиї є таке, що ті праці троха ще за передчасні, як на теперішний стан науки і від коли вчені зачали займатись не самою сутию, но лиш обсягом і сферою проявлювання тої своячної міжатомової сили, а особливо в зависимости від внїшних фізичних условий якими є пр. масове відношенє складових тїл систему, температура і тиск, що впрочім зовсїм не сьвідчить о зрезиґнованю з того понадного для нас питаня, тільки о зрілім і строго науковім єго трактованю, отже від коли питаємось,

не чому кваси інвертують цукор, но як го інвертують, і т. д.; від того часу прийшла наука до посїдання закладних і основних законів, котрі кермують хемічними перемінами, хоч не подають нам найглубшої причини, чому заходить хемічна реакция взагалї.

Загально звісний факт, що наколи зробимо собі якийсь зовсїм здовільний уклад кількох ріжних субстанций, або як то тепер говорить ся : хемічний систем, то сейчас повстає у нїм якийсь міжчастинковий рух, якась для нашого ока несхітна внутренна вимїна, котра так перестроює поодинокі складові того систему, що їх внїшні власности, визір, яким они проявляють ся нашим змислам, приймає зовсїм нові форм. І з тих власне нових форм ми пересьвідчаємось о внутреннїй перемінї, о руху, котрим кермують неімовірно прості закони, до котрих математичного сформулованя приходимо по довгих, трудних обсервациях і експериментальних працях. Той рух устає по упливі якогось часу цїлком, нові тїла (твори) не зміняють вже дальше своїх прикмет, словом настає рівновага.

На єствованє такої рівноваги звернули увагу вже Венцель (1777) і Бертолє (1799), котрі завважали, що границя стану рівноваги є зависимою від скількости реаґуючих творів.

Про таку рівновагу можна ще загально то сказати, що она доперва тодї наступає, як один або більше творів (тїл) перемінить ся зовсїм квантитативно в иньші твори о цїлком нових прикметах, про що нам сьвідчить найбільша часть перемін між мінеральними творами і з чого, як знаємо, зроблено як найобширнїйше примінене в аналїтичнїй хемиї, або рівновага наступає вже в половинї переміни, загально сказавши в певній лиш части, так, що вагово-масове відношенє хемічних творів по обох сторонах знаку хемічного рівнаня взросло до якоїсь характеристичної для того систему максимальної вартости в даних фізичних условях. В орґанічній хемиї маємо незмірно численні приміри, де реакция здержує ся вже в половинї переміни одних хемічних творів на иньші.

Дуже цїкавим є дальше фактом, що єще в часї, коли о математичнім трактованю хемічного свояцтва не могло бути й бесїди, формовано собі повні глубокої інтуициї погляди і прочувано гейби інстинктово, що наука мусить вглубитись в незмірно дрібний сьвіт частинок і там студиювати напруженя між ними, бо в тих лиш ріжничкових відношенях зсумованих в системи дїлаючі фізично на наші змисли і доступні нашій обсервациї і експериментациї, є напрям і сила з якою відбувають ся хемічні явища. Досить лиш пригадати дві перші з шістьох тез Guyton'a de Morveau виголошених ще в 18. віку, а іменно:

I). Corpora non agunt, nisi fluida. Хемічна лучба́ не наступить, єсли бодай одно з тїл не є так плинним, щоби єго найдрібнїйші частинки могли підлягати хемічній силї, котра їх має з собою получити.

II). Тая сила свояцтва може дїлати виключно між найдрібнїйшими частинками творів.

III). . . . . і т. д.

Як бачимо автор несьвідомо, мовби в прочутю витичує науцї дорогу, вказує область, в котрій попросту бачить фізичну можливість слїдженя за загальними законами хемічних перемін і реакций. Ту область представляють очевидно реакциї, що заходять виключно в ґазових системах, одноцїльних на скрізь, де частинки самі собою вимішують ся безперестанно.

Ґазовий стан материї, та єї крайна форма, де всяке притяганє між частинками, тертє і т. д. є зовсїм виключене, представляє найдогіднїйші условя для аналїтичного студиєваня хемічних сил, приміри хемічних перемін будуть отже в ґазових системах самі собою найпростїйші, тим то не диво, що наука мусїла звернутись вперед до перестудиєваня тої области. Туда ступаючи випровадили Ґульдберґ і Ваґе (1865) перший основний закон дїланя мас (Massenwirkung), дальші епохові працї St. Claire-Deville'a (1866) і Горстманна (1865—1870), що впроваджують в хемію незвичайно цїнну термодинамічну доктрину, вибрали собі за субстрат явища диссоциациї, тему що правда дуже обширну, бо сягаючу далеко поза ґазові переміни, всеж таки виходячу і обертаючу ся коло тих послїдних.

Тому я уважаю за відповідне випровадити вперед коротенько закон дїланя мас на основі кінетичної теориї ґазів.

Частинки материї, що находить ся в тій фазї є в найбільшім поступнім руху, отже бють об окружаючі стїни і о себе незмірно часто, ослабляють через те взаїмну притяжну силу поодиноких атомів, котра їх держить в частинцї, словом бомбардують ся взаїмно, через що в разї присутности кількох ріжних хемічних творів спроваджують таку зміну в данім системі, що нагромаджують велику скількість свобідних атомів, котрі відбувають незвичайно скорі рухи.

Но обопільне свояцтво первнїв, що найшлись тим способом in statu nascendi не перестає ту дїлати, отже в слїд за тим розбиті атоми сполучують ся знов з собою, ґрупуючись лиш трохи відмінно і творячи відповідні комбінациї.

Больцман видить навіть теоретичну можливість випроваджуваня при помочи рахунку правдоподібности як раз тих нових творів,

котрі мусять повставати через комбінацию атомів первнів присутних, навіть їх чисельне до себе відношенє (що має основуватись на первісних вагових відношенях).

Чим сильнійше буде розбитє атомів в частинках, від котрих виходимо, тим сильнійще може заходити реакция в напрямі твореня нових тїл; а то розбитє є в певній зависимости від скількости взаїмних ударів між частинками. Тая знов скількість є при близших даних внїшних условях точно означеною, хоч для нас скількостю не знаною. Однак те ще нас не виключає по крайній мірі від якостного аналїзованя тих відносин. Що тут заходить проста пропорциональність між степенем переміни а скількостию ударів в одній пр. секундї, то річ певна а всякий сумнїв є виключений.

На частість взаїмних частинкових ударів в данім ґазовім системі впливає з осібна присутність тїл A_1, A_2, A_3, і т. д., а в сумі буде та загальна скількість зависима від продукту концентрациї всїх тїл.

Наколи степень переміни будемо міряти скількостию тїл, що повстають або зникають в певнім часі пр. також в одній секундї (в практицї бересь звичайно мінуту) то спровадимо цїлу студию хемічної динаміки до слїдженя скорости переміни *(v)*. Тая скорість, як бачимо, буде все пропорциональною до продукту концентрациї всїх дїлаючих тїл, котрий напишім $c_1\ c_2\ c_3$ і т. д. Буде отже лиш пропорциональною, а рівною доперва тодї, коли той продукт $c_1 . c_2 . c_3 ...$ помножимо через якусь сталу вартість k, котру можемо назвати сочинником скорости, котрої величина чи абсолютна чисельна вартість мусить зависїти від безглядної температури, від меньшого чи більшого свояцтва атомів, з котрих новий твір має зложити ся, якої абсолютна вартість, словом буде математичним виразом имовірности, що реакция в тім напрямі і в тім степени буде взагалї заходити.

Нові ґазові твори, що повстають при таких перемінах дїлають зовсїм так само як попередні, з котрих они повстали, отже бють об себе і стїни, бомбардують ся і викликують через нове розбиванє частинок на атоми in statu nascendi реакциї цїлком противні, що стремлять до витворби тїл, з котрих ми вийшли, реакциї звані в термодинаміцї відвертні*). (Umkehrbare, reversible Reaktionen).

*) Ту треба замітити, що лиш на таких відвертних реакциях в ґазових системах можна було оперти випроваджене закону дїланя мас, бо рівноваги які ту бувають, є справдїшні, реальні, що дають ся осягнути з обох боків знаку хемічного рівнаня, в противставленю до множества таких припадків, де рівноваги є фальшиві, як пр.

$$2H_2 + O_2 \rightleftarrows 2H_2O$$

в низких температурах.

Те нове наворотне дїланє буде, ясна річ, так само пропорциональне до продукту концентрациї творів, що повстали при першій перемінї, то є до їх масової вартости в одиницї об'єму.

В загалї, если реакция поступає наперед в якімсь напрямі, то скорість з якою під обсервацию взятий систем стремить до стану рівноваги, є вже ріжницею двох скоростий $v - v'$, з котрих кожда дїлає в цїлком противнім напрямі. Нї одної нї другої не зможемо нїколи експериментально знайти. Ми можемо лиш ствердити, що ріжниця між противними що до себе скоростями є доволї великою, тодї, як виражаєм ся, хемічна реакция поступає. Доперва, коли ріжниця приймає вартість нулї, або парцияльні скорости зрівнують ся, зникає на око всякий рух і вимінa, а на їх місце наступає зглядна, що так скажу, рівновага. Зглядна тому, бо після погляду кінетичної теорії рівновага нїколи не може прийти. Беззглядна хемічна рівновага в ґазових системах, ідентична з ундуляцийною або термічною смертию може настати доперва при температурі абсолютної нулї, — 273° Цель., де є виключений всякий рух частинок. Кождий материяльний систем, що находить ся в температурі понад — 273° Цель. є вже тимсамим в молекулярнім руху з котрого при ріжницях в напружінях енергії того самого рода, в напруженях анальоґічних до ріжниці електричних потенциялів, ріжниці в температурі двох тїл в однім системі, ріжниці в віддаленях двох тїл від осередка притягаючої атракцийної сили, випливає вічна і ненастанна вимінa, стремлїнє до рівноваги, вирівнуване тих хемічних напружень. Та сили, які ту проявляють ся, надибають і поконують найріжнїйші опори, отже виладовують ріжницю чи злишку енергії в найріжнїйші напрями і форми а через те викликують нечувану ріжнородність то фізичних, то хемічних явищ, котрими мертва та жива природа дїлає на наші змисли, на нашу сьвідомість. В послїдних десятках лїть повстала в хемії нова наука, що попросту вдираєсь в ту область, що внясняє нам ґенезу того богатства форм, в яких як неорґанїчне кому, так орґанїчне житє нам проявляєсь, ба не лиш ґенезу в загалї, але намагаєсь випроваджувати з математичною точностию конечність прояву таких а таких конкретних форм. Наука та заінїциована і математично уґрунтована американьским хеміком Джібсом,

називаєсь тепер наукою о фазах і про ню як раз я бажаю в тій вступній студиї висказати кілька загальних, признаю, під зглядом практично-наукової вартости банальних поки що гадок.

Отже вперед вертаю до дальшого характеризованя хемічної рівноваги і реасумую ще раз коротенько дотеперішні розважуваня реакцій між ґазовими творами. Ріжниця $v - v'$ називаєсь скоростию переміни, а продукт концентрациї поодиноких ґазових тїл в системі, що стоять по одній сторонї знаку хемічного рівнаня, і котрих та активна маса числить ся тепер ґрамово частинковими або молярними одиницями, помноженій ще через сталу „k“, є виразом одної з тих парцияльних скоростий v або v' —

Отже випадкова

$$V = k\ c_1\ c_2 \ldots - k'\ c'_1\ c'_2 \ldots$$

При рівновазї зменьшуєсь она до нулї, тодї

$$k\ c_1\ c_2\ c_3 \ldots = k'\ c'_1\ c'_2\ c'_3 \ldots$$

а відношене k до $k' = \frac{k}{k'}$

можна знайти з рівнаня

$$\frac{k}{k'} = \frac{c'_1 .\ c_{,2} \ldots}{c_1 .\ c_2 \ldots}$$ отже тимсамим представити знаними нам (з відповідної хемічної аналїзи систему має розуміти ся) концентрациями. Той квот, як показує експериментальний д о с л ї д має с т а л у вартість дла кождого хемічного систему при незмінній температурі. Називають его тепер сочинником рівноваги і означують великим K.

$$K = \frac{k}{k'} = \frac{c'_1 .\ c'_2 \ldots}{c_1 .\ c_2 \ldots}$$

Тут отже маємо вже цїлком точно означені математичні взаємини між k_1, k'_1, c_1, c_2, і т. д представлені незвичайно простим рівнанем. Через відповідну дискусию того рівнаня випроваджуємо всї заключеня, котрі можуть для нас мати практичну вартість і позволять нам пояснити собі справу, реґульовати і бути попросту панами над напрямом хемічних реакцій. Один з таких заключеній пр. той що степень переміни в одиниці часу не зависить від абсолютної скількости поодиноких складових творів, лиш від їх активних мас з осібна, иньшими словами концентрациї або скількости маси в одиниці обєму, є основним законом хемічної статики і називаєсь законом д ї л а н я м а с.

В дотеперішних розважуваних, що мали нас допровадити до наведеного математичного взору стояли ми на тім, що в станї рівноваги міждробинний рух дальше відбуваєся, що складні дальше на себе впливають і що в тім станї відворотні собі переміни зносять ся ідеально. То можна коротко ще так назвати, що хемічна рівновага в загалї не є статична, лиш динамічна.

Рівновагу між чистою водою а єї парою толкує Клавзіюс в той спосіб, що через означений меннїск води перелїтають безперестанно частинки в противних собі напрямах, але так, що як раз тілько ґазових частинок затоплюєсь моментально в водї, кілько їх видобуваєсь з плинної части в ґазовий простір.

Зовсїм так само можна собі толкувати рівновагу між иньшими ґазовими творами, плинними, або сумішкою одних і других. Но треба застеречись, що тії закони, заключеня не вийшли з чисто теоретичної дедукциї а потім доперва зістали доказані експериментально, лиш як раз навпаки, з дослїдних фактів, з дуже великого материялу, в котрім є перестудийовані найріжнїйші хемічні реакциї, меньше або більше скомпліковані, доходить ся до емпіричних математичних взорів, а доперва в дальшій консеквенциї до погляду на суть хемічної рівноваги, котра тим характеризуєсь, що в кождім моментї переміна в обох напрямах є рівна.

Тому закон дїланя мас треба нинї уважати за дослїдний, експериментальний факт, независимий зовсїм від теоретичної кінетично-частинкової спекуляциї; наколи давнїйше примінене кінетичної теориї до випроваджуваня нинї нам знаних реляцій було узнаване принайменше западго сьміле і невистарчаюче, то тепер хемічна статика і кінетика як найвимовнїйше потверджує кінетичні погляди на сталу, плинну і ґазову материю, так що ми нинї можемо нею навідворот послугуватись до виясненя собі взагалї напряму і степеня хемічних перемін, до виясненя поки що більше образового нїж беззглядно правдивого *).

Випадалоби тепер подати ту деякі приміри, котрі би мали в конкретний спосіб ілюструвати випроваджуване а опісля по передискутованю практичне примінене математичних рівнаній, що формують природні закони, після котрих відбувають ся всякі явища в природї, а специяльно хемічні реакциї.

Та при теперішнім станї науки є перестудиєване вже так велике число специяльних хемічних реакцій, що представити менї їх ту фізично неможливо. Я передискутую, а радше згадаю лиш про

*) То буде, ясна річ, зависїти від конкретних припадків. Одні меньше скомпліковані дають ся легко кінетичною теориєю пояснити, иньші вимагають ще іпотетичних преміс. Один з таких типових примірів наводжу низше.

кілька рефлексий, які насувають ся при читаню хемічної динаміки. Вперед кілька слів, про чисто ґазові системи.

На реакції повставаня йодакового квасу з водня і ґазового йоду, перестудиєваної в тім*) напрямі Готфиєм (Hautefeuille), пізнійше Лємоаном (Lemoine), що представляєсь хемічно:

$$H_2 + J_2 \rightleftarrows 2HJ$$ і т. д.

видимо, що з двох ріжних, що до хемічної природи, частинок повстають дві рівні. Если тая реакция відбуває ся в замкненім системі, зі всїх боків, то замість парцияльних концентраций, котрі були очевидно вихідною точкою при таких емпіричних студиях можна брати на основі ґазового закону Дальтона, пропорциональну їм вартість парцияльного тиску кождого з тих трех ґазових тїл.

Парцияльний тиск для H_2 назначім p_1, для J_2 p_2, а для HJ p, то після вище представленого загального закону в станї рівноваги маємо

$$v = v'$$

або $k.\ p_1 : p_2 = k'.\ p.\ p. = k'.\ p^2.$

а з відси $\frac{k'}{k} = \frac{p_1\ p_2}{p^2}$

Отже стала рівноваги, котру ван'т Гоф (van't Hoff) називає попросту сталою свояцтва, велике K буде $= \frac{p_1\ p_2}{p^2}$ і буде змінятись лиш враз з температурою систему. Ту згадаю коротенько, що названий хемік потрафив зробити дуже важний крок вперед до виясненя хемічного свояцтва через впровадженє в математичну реляцию сталої K з температурою. Загально сформуловав він ті відношеня в той спосіб:

При підношеню температури наступає переміна, що спротивляєсь, противділає тому підношеню, то є наступає масове пересуванє рівноваги в тім змислї, що наступає реакция, котра в своїм пробігу абсорбує теплоту систему. Дальше, виходячи з того погляду на хемічну реакцию, що то є енергетична проява, зовсїм анальоґічна до такої фізичної переміни як топленє сталих тїл, паруванє або кипїнє течий і т. д., примінив він ту термодінамічні закони, особливо другий основний закон, що модифікує переміни одних форм енергії на иньші, через що прийшов до математичної формулки

$$\frac{d\ ln\ k}{dT} = -\frac{q}{RT^2}$$

де K є сталою рівноваги, котрої абсолютна вартість, як знаємо вже,

*) Lemoine, Ann. d. chim. et de Rys. [5] 12. 145; Bodenstein, Zeitschr. f. Physik. Chem. 22, 1.

зависить виключно від концентрациї поодиноких реаґуючих творів, q означає вглинену (заабсорбовану) скількість теплоти, а R рівняєсь сталій для ідеальних ґазів (= 1.99 cal.)

Наколи той ґазовий систем стиснемо і зменшимо єго обєм на n-ту часть первісної вартости, тодї парцияльний тиск поодиноких складових збільшаєть ся на n-ту вартість. Дістанемо тодї

$$\frac{n\ p_1 .\ n\ p_2}{np .\ np} = \frac{p_1\ p_2}{p^2} = K.$$

Звідси видимо, що внїшний тиск не має ту найменшого впливу на рівновагу. Зовсїм противно має ся річ при розкладї, диссоциациї ґазів на лекші фізично частинки.

Ту з одного хемічного індивідуум A, возьмім з одного моля повстає n_1 молїв субстанциї A_1, + n_2 молїв субст. A_2 + ... + і т. д.

Стала рівноваги K, котра ту називає ся сталою диссоциациї має вартість

$$K = \frac{p_1^{n_1}\ p_2^{n_2} \ldots}{p}$$

де p_1, p_2, p_3,..... і т. д. означує парцияльні тиски ґазів, що ту повстають, (p парцияльний тиск першого ґазу), n_1 n_2..... число молїв тих нових індувідиів з окрема. Збільшенє внїшного тиску, як то дуже легко порозуміти з анальоґії до попереднього случаю, впливає дуже сильно на стан хемічної рівноваги. А імено чисельник..... росте дуже скоро вже не лиш через збільшенє парцияльних тисків p_1 p_2..... і т. д. але також, через вартість експонентів n_1, n_2....., котрі по найбільшій части в практицї, в приздаченю до типовних розкладових перемін мають вартість більшу від 1, тодї як знаменник мусить збільшатись виключно своїм активним концентрованєм, своїм парцияльним тиском.

Дальше дослїд показує, що вартість цїлого дробу не зміняєсь пропорциоально до зміни чисельника викликаної внїшним атмосферичним тиском, бо вона має сталу вартість K, отже з того виходить скорий зріст активної вартости знаменника, або первісного ґазу в порівнаню з тамтими. Словами: внїшний атмосферний тиск впливає сильно на стан ґазової диссоциациї.

Берім річ загальнїйше, отже втягнїм ту і перший примір:

$$H_2 + J_2 \rightleftarrows 2HJ$$

то дістанемо правило:

Стан хемічної рівноваги є независимим від внїшного тиску лиш в тім случаю, як вчасї хемічної

реакції не зміняється число частинок, як сума молїв по обох сторонах знаку хем. рівнаня є тасама, або (на основі законів Ґе-Люссака і ипотези Авоґадри) як об'єм ґазового системи не зміняється.

Иньшими словами можна схарактеризувати вплив внїшного тиску, а додам мимоходом і температури, на стан хемічної рівноваги: збільшене тиску сприяє реакциї, при котрій наступає контракция первісного обєму, а підвисшуване температури сприяє реакциї, при котрій абсорбує ся теплота.

Не можна здержатись, щоби не навести в тім власне місци кілька гарних рефлєкций проф. Оствальда, крайного енерґетиста як го називають, на тему сути хемічної енерґиї.

Всї переміни і явища в природї не є нїчим иньшим як ненастанними змінами енерґетичних станів. Наколи ми в станї зміряти ті зміни після якости і скількости, тодї доперва можемо їх науково означити і здефінювати. Цїлий внїшний сьвіт, що нас окружає, можна уважати за уклад, в котрім енерґія найріжнїйших форм є розложена в означений собі спосіб в просторі і часї. При таких феноменах як переходжене одних хемічних тїл в иньші переміняєсь хемічна енерґія майже все в иньші форми. В які? запитаємо. Проф. Оствальд так відповідає. При всїх хемічних реакциях зміняєсь вічно концетрация присутних в системі творів. Ті як раз зміни становлять цїлу суть тих реакций. З того легко зрозуміємо, що форма енерґиї, яка ту проявляє ся, буде енерґією об єм у, котра знов входить в загальну енерґію механїчну. Згадані дві єї форми т. є обєму і хемічна входять в себе взаїмно, і тим поводують внїшні явища. Отже нова наука, що називаєсь хемічною механїкою, заслугує вповнї на тую назву, бо наука о хемічній рівновазї є справдї наукою про реляциї між механїчними а хемічними формами енерґиї.

На закінчене згадаю ще про найважнїйші способи якими нинї слїдить ся поступ хемічних реакций. В одноцїльних ґазових системах найвизначнїйшу аналїтичну ролю при означуваню масовних відношеній мають:

1) звичайні т. зв. хемічно-вагові методи або волюметричні і розумієсь ґазометричні о скілько дають примінити ся.

2) визначуване густоти, котра зміняєсь всюда там, де зміняєсь обєм або що на те саме виходить скількість ґазових молїв в наслїдок хемічної переміни.

При диссоциациї та друга метода є дуже корисна. Специфічна вага системи малїє враз із ростом диссоциациї, бо об'єм ґазів збільшуєсь при тім дуже сильно, хоч їх маса лишаєсь все та сама.

Припустім, маємо 100 частинок або молїв. Якась їх дробова частина α, диссоциює сь на n нових молїв, отже їх нове число виносить тодї 100 n. α. Нездиссоциованих лишилось 100 $(1-\alpha)$. По скінченій диссоциациї в станї рівноваги сума всїх молїв збільшить ся на

$$100(1-\alpha)+n\,100\,\alpha = 100\left[1+(n-1)\,\alpha\right].$$

або инакше пропорциональний приріст маєсь як $1 : 1+(n-1)\,\alpha$.

Означім тепер специфічну вагу первісного ґазу через δ, здиссоциованого Δ, то на основі ипотези Авоґарди маємо пропорцию

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{1}{1+(n-1)\,\alpha}$$

а звідси

$$\alpha = \frac{\delta - \Delta}{(n-1)\Delta}$$

В той спосіб через визначене питомого тягару ґазу перед і по здиссоциованю, приходимо незвичайно простою методою до найденя α, т. є. молярного степеня розкладу.

Дальші фізикальні методи визначуваня квантитативного пробігу диссоциациї можуть основуватись на помірах скорости ефузиї ґазів, специфічної теплоти при сталїм тиску C_p, проводженю теплоти перед і по диссоциациї, часом навіть зміни барви ґазу.

Однак найориґінальнїйший спосіб квантитативного слїдженя диссоциациї ґазових творів подав Девіль, про котрого я вже згадав, що він впровадив термодинамічну доктрину в хемію. Наведене тих метод не відповідає загальному характерови розвідки, тому згадаю про них дуже коротенько.

Девіль студиював диссоциацию CO^2 на $CO + O$ в дуже високих температурах. А позаяк про безпосередні експериментальні дослїди ту тяжко навіть подумати, проте примінював він ту термодинамічну методу. Щоби вперед випровадити одну типову і дуже важну формулку, що виражає вплив температури на кальоричну прояву якої небудь хемічної реакциї, заложім слїдуюче.

Наколи ми якусь хемічну реакцию переводимо в температурі t_1, то єї кальоричний затон*) най виносить U_1 cal.

Тая сама реакция переведена в температурі t_2 дає на внї U_2 cal.

Подумайно собі тепер слїдуючий замкнений процес.

Вперед заходить переміна в температурі t_1, отже дістаємо на внї теплоту..... $+U_1$ cal.

---

*) Wärmetönnung.

Тепер відвисшуємо температуру систему з t_1 на t_2, до чого зуживаємо ..... $(t_2 - t_1)\,c_1$ cal. де c_1 означає спец. теплоту продуктів хемічної реакції.

В тім місци уявім собі, що реакция відвертає ся і переходить термодинамічно відвертним способом очевидно цїлий час при сталій температурі t_2 в противну сторону. Експериментально завважаєму тоді абсорбцию теплоти, що виносить ..... $-U_2$ cal. Наконець остудїм систем первісних тїл, котрі ту зреґенерувались, назад до температури t_1, то достанемо тодї ..... $+(t_2 - t_1)c$ cal. де c означає спец. теплоту систему, в котрого ми вийшли.

З принципу захованя енерґії можна вже теоретично догадуватись, що в тім замкненім процесї не можна на внї ані дістати ані стратити жадної теплоти, бо ту вертаємо до того стану з котрого ми вийшли. (Закон Гесса 1840). Отже можна сьміло написати:

$$U_1 - (t_2 - t_1)\,c_1 - U_2 + (t_2 - t_1)\,c = O, \text{ також}$$

$$U_1 + (t_2 - t_1)\,c = U_2 + (t_2 - t_1)\,c,$$

$$\text{або } c - c_1 = \frac{U_2 - U_1}{t_2 - t_1}$$

що можна висказати словами:

Злишка специфічної теплоти реаґуючих тїл над спец. теплотою тїл, що повстають при реакції, проявляєсь нам на внї, експериментально, приростом кальоричного затону або ефекту на 1^0 підвисшеної температури.

Послїдна формулка має, як легко догадатись, перворядне місце в термохемиї. Застановім ся тепер над практичним приміном того взору на реакцию:

$$2\,CO^2 \rightleftarrows O_2 + 2\,CO.$$

c може ту означати лиш спец. теплоту ґазу CO_2

c_1 „ „ „ „ „ „ сумішки $2\,CO + O_2 + n\,CO^2$,

t_1 най означає комнатну температуру $+15^0$ Цель, а t_2 здовільно ставлену, в тім випадку степеновану що раз висше аж до 3000^0 Цель.

U_1, представляє ту кальоричний ефект при спаленю CO на CO^2 при 15^0 Цель., або висказуючись яснїйше при оксидациї $2CO + O_2$. Тодї U_2, котре означає теплоту що вивязуєсь при тій самій реакциї, але в температурах 100^0, 1000^0 2000^0, 3000^0 Цель. і т. д. можна з послїдної формулки дуже легко обчислити на тій основі, що: 1) c і c_1 зміняють ся лиш дуже незначно при ріжних температурах

2) ріжниця між c і c_1 є взагалї дуже невелика 3) абсолютна вартість c_1 сумішки $2CO + O_2 + n\,CO_2$ независить практично від n.*)

Тепер пригадаймо собі формулку ван т'Гофа

$$\frac{d\ln k}{dT} = -\frac{q}{RT^2}$$

котра представляє нам сталу рівноваги K яко функцию абсолютної температури, або наколи та послїдна є, як в нашім конкретнім случаю знаною, стало здефіньованою (бо здовільно вибраною), яко функцию q т. є. кальоричного затону реакциї. Той послїдний уміємо вже обчислити для кождої температури, отже по вставленю q і T в формулку ван т'Гофа можемо K, або масові відносини CO^2, CO і O_2 дуже легко обчислити інтеґральним рахунком. Девіль подає ту табелю:

Із 100 молїв CO^2 здиссоциовало ся:

при внїшнім тиску	0.001	0.01	0.1	1	10	100	атмос.
в темп. 1000^0 Цель.	0.7	0.3	0.13	0.06	0.03	0.015	
1500^0 „	7	3.5	1.7	0.8	0.4	0.2	
2000^0 „	40	12.5	8.0	4.0	3.0	2.5	
. . . . .	. . . . .						
. . . . .	. . . . .						
4000^0 „	97	90	80	63	45	25	

Про велике значене тої табелї для металюрґічної техніки досить згадати.

Та мушу йти дальше. Нїм приступлю до розтворів подаю один ще примір реакциї, між ґазовими, але вже і одним сталим твором. Випадок під кождим зглядом типовий, тому буду старатись его докладнїйше обговорити.

Горстманн студиєвав именно закон дїланя мас на диссоциациї сталих тїл. Яко вихідну точку взяв сублїмацию амонового карбамінїяну.

$$CO \begin{cases} ONH_4 \longleftarrow \\ NH_2 \longrightarrow \end{cases} 2NH_3 + CO_2$$

*) Треба розуміти в тім змислї, що тую теоретичну формулку можна ужити лиш при виповненю тих трех условій, бо лиш тодї реакция є відвертна термодинамічно.

Тая материя улїтає при рівночасній майже диссоцияциї пар, котрі, що й но повстають з якимсь означеним напруженєм при даній температурі.

Абсолютна вартість того сублїмацийного напруженя малїє враз з тим, як нагромаджують ся пари над сталою материєю, наконець приймає вартість нулї в хвили, як приходить рівновага, то є тілько частинок вилїтає в ґазовий простір, кілько їх згущає ся на верхнї сталого твору в тую форму.

Поки що, розгляньмо реакцию, що заходить лиш в ґазовій фазї, а іменно сам процес диссоцияциї. Означім собі парцияльний тиск першого тїла π, другого p_1, третого p_2, то для реакциї.

$$CO \begin{cases} ONH_4 \longrightarrow \\ NH_2 \longleftarrow \end{cases} 2NH_3 + CO_2$$

Закон дїланя мас виражуєсь математично

$$k\pi = p_1^2 . p_2$$

як то ясно виходить з молярного відношеня тїл в тім хемічнім рівнаню.

Парцияльний тиск π не має сталої вартости в ґазовім станї, бо зменьшує ся дуже скоро враз з підношуваньем температури, але наколи находить ся і стала фаза в системі, тодї вже не зміняє своєї беззглядної вартости, доки сталий твір зовсїм не зникне. Отже в рівнаню $k\pi = p_1^2 p_2$ лїва сторона не змінає своєї чисельної вартости, а через те саме і права сторона $p_1^2 . p^2$ задержує сталу вартість. Максимальну вартість диссоцияцийного напруженя означім через P. На амоняк припадає тодї після закону Дальтона $^2/_3$ P, а $^1/_3$ P на CO_2. Отже стала вартість $k\pi$ виносить тодї $(^2/_3 P)^2 \, ^1/_3 P = \frac{4}{27} P^3$, де P дає дуже легко зміритн ся манометром, а тим самим експериментальне ствердженє поставленої формулки є можливе.

Тепер дуже легко порозуміти, що нове впроваджуване амоняку до систему впливає далеко більше на обнижуване степеня диссоцияциї ґазового амонового карбаміняну, нїж додаток CO^2. Отже дістаємо ту дуже ражне заключенє, котрого анальогії при иньших хемічних реакциях можуть мати принціпіяльну вартість в хемічній практицї.

Ще одно заключенє, дуже загальної натури, насуваєсь при розважуваню того клясичного приміру. Парцияльний тиск π є ту супроти p_1 і p_2 дуже малий, що константуємо експериментально, (через хемічну аналїзу), тому сублїмация сталого твору буде ту розмірно дуже скоро поступати. Коли знов противно при сублїмациї якого небудь твору пари, що виходять, будуть досить поволи диссоциювати ся, тодї сильно також зменшить ся зглядне темно процесу сублїмациї.

Той фактъ може на око видатись досить дивним, коли зважимо, що при диссоцияциї повстає з одної частинки дві або й більше нових частинок, з котрих кожда має свій ґазовий тиск. Отже мимо того, що загальний тиск в замкненій атмосферї систему взростає дуже сильно, сублїмация не зменшуєсь, лиш навпаки поступає скоршим темпом.

Знамениту того анальогію маємо при процесї розчинюваня сталих тїл в иньших плинних, котрих сила розчинюваня йде в дуже численних случаях рівнобіжно зі степенем електролїтичної диссоцияциї частинок, що розпускають ся.

Та внїшна суперечність вияснить ся нам зовсїм, як собі з другої сторони пригадаємо, що вплив внїшного атмосферного тиску на стан рівноваги систему є зовсїм инший від парцияльного тиску твору, котрий своєю присутностию і участию в реакциї нормує пересув масової рівноваги в одну або другу сторону хемічного рівнаня відповідно до постуляту закону дїланя мас.

Перейдїм гадкою ще раз ті скомплїковані відношеня.

Кождій змінї температури відповідме якась зміна максимального сублїмацийного напруженя сталого карбамінїяму на ґазовий. Скорість з якою той простий систем стремить до свого питомого максимального напруженя в даній температурі або що на одно виходить, скорість сублїмациї, зависить виключно від напруженя нагромаджених пар карбамінїяму в системі, як то зовсїм ясно виходить з енергетичного пониманя скорости переміни і з кінетичного пониманя динамічної рівноваги.

Після закону Дальтона домішуване яких иньших, „чужих“ ґазів пр. азоту, кисня, а в нашім випадку навіть NH_3 або CO^2 не може мати найменшого безпосереднього впливу на зміну максимального напруженя ґазового карбамінїяму в сумішці, що ту при сублїмациї повстає, або иншими словами не зміняє сталої „K“ реакциї самого сублїмованя, котра збільшуєсь лише від висшої температури.

Так отже підвисшуване температури збільшує той тиск в наслїдок інтензивнїйшої сублїмациї, но здругої сторони, пригадаймо собі, мусить також зменшувати его, а то по поводу майже рівночасної диссоцияциї тих частинок на NH_3 і CO^2, при чім стала „K“ процесу диссоцияциї має вже в тих условях доволї велику вартість.

Поки не зникне стала фаза будуть зносити ся ідеально тії два собі противні впливи, котрих інтензивність може більшати при енергічнім допроваджуваню теплоти до систему дуже нагло. Виразом тої незвичайно займавої динамічної рівноваги хемічних сил є ту тая *висліdочна сталість* парціяльного тиску ґазових частинок карбамінїяну, котра так довго задержить ся, доки більшане енергії систему через абсорбцию внїшної теплоти не перемінить цїлком сталої материї на здиссоційовані ґазові частинки.

Такий обяв припадкової сталости тиску повтаряєсь в теоретичній хемії дуже часто і подібних примірів можнаби ту много ще навести.

Вже Ґульберґ і Вааґе завважали, що в гетероґенїчних системах, то є таких, де хемічні твори находять ся при собі в ріжних аґреґатах, активна маса сталих складнїв є зовсїм незмінна. В послїдних часах Нернст поставив іпотези в дусї кінетичної теорії, що она є рівноважна а радше просто пропорціональна до скількости частинок сталої материї, що переходять в означених очевидно условях в розчин або як в наведенім примірі в ґаз при сублїмації. Дуже влучно згадує Русбум про дотеперішне пояснюване тих відношеній в коротенькім, але знаменитім історично-критичнім вступі до своєї праці, котрої частину оголосив перед двома роками *).

Передовсїм пригадує, що можна їх собі пояснювати двояко, а іменно за Нернстом кінетично або термодинамічно „фазовим законом“, що відкрив Джібс.

Наведений припадок сублїмації я старав ся роз'яснити як найдокладнїйше кінетичною теориею.

На зовсїм подібний лад толкує ся нині диссоцияцию угляну вапового на окис ваповий і на ґаз CO^2, котру представляє ся схематично.

$$CaCO^3 \rightleftarrows CaO + CO^2 -$$

При степеннім огріваню вапно розкладає ся з щораз більшим парціяльним тиском CO^2. При температурі $+ 812^0$ Цель. той тиск дістає свою максимальну вартість одної атмосфери і тодї вже температура систему отвореного на вільнім воздусї не підносить ся так довго, доки $CaCO^3$ не розложить ся зовсїм квантитативно на $CaO + CO^2$. При тім диссоцияційний тиск CO^2 не зміняєсь ту так само, як в попереднім случаю, доки в системі не зникне стала фаза $CaCO^3$, котра достарчує безперестанно свїжі порції CaO і CO^2.

*) Dr. H. W. Bakhuis Rooseboom. Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre. Braunschweig 1901.

Сталість тиску і задержане температури при $+812^0$ Цель, мимо непастанного огріваня пояснює Нернст тим, що приймає в системі побіч CO^2 еще ґазові материї $CaCO^3$ і CaO.

Через таке іпотетичне заложене цїле явище можна зрозуміти яко постулят закону дїланя мас, зовсїм анальоґічно як в наведенім случаю диссоцияції карбамінїяну.

Але Горстман пояснював собі реакції того типу инакше, а іменно в слїдуючий спосіб.

Незмінність і независимість активної вартости сталої фази в гетероґенїчнім системі проявляє ся тим, що при якім небудь переходї тої форми материї в иньшу, будь то в фізично иньшу фазу (плинну чи ґазову), будь то лиш в альотропну або полїмеричну сталу форму, можемо завважати сталий максимальний тиск при піддержуваню незмінної температури в системі. Та сталість є *зовсїм независимою від масового відношеня*, від скількости сталої форми*).

І чим більше сталих творів, тим лекше рівновагу математично опредїлити, бо тим менше є она зависимою від масової скількости поодиноких членів систему. Сталість тиску і температури $+812^0$ при диссоцияції $CaCO^3$ на CaO і CO^2 толкує Горстман коротко присутностию аж двох сталих творів т. є. $CaCO^2$ і CaO. Виходить, додаю від себе, що наколиби CO^2 не був ґазом, лиш також сталою материєю, то навіть пересув максимальної вартости диссоцияційного тиску враз із змінами температури булиби також виключені.

На тім коротенькім зазначеню другої теорії поперестаю. В докладнїйше єї обговорене не можу ту входити, бо мусївби вивести вперед цїлий фазовий закон. Зроблю то аж при кінци розвідки і там буду мав нагоду сказати ще кілька слів про те.

Як бачили ми зрозуміне цїлого механїзму хемічних перемін було строго сполучене з *конечним знанєм величини* і хемічної *структури частинок*. В молодечих стадиях розвою має нова доктрина о хемічних рівновагах нечувані трудности через таке обмеженє, бо о фізичній конфіґурації та хемічній структурі частинок плинних а тим менше сталих творів ми не маємо майже жадного виображеня. А предся їх знане малоби не лиш для хемії, але і для всїх майже природних наук неоцїнену вартість. При нинїшнім станї науки годї собі представити, щоби до знаня молекулярної структури сталих і плинних творів можна дійти иньшою дорогою, як дорогою,

*) На розкладї $CaCO^3$ на $CaO + CO^2$ перший заобсервував той факт Ґебрай (Debray) 1867 р.

сказати-б, a posteriori, з точного і всесторонного знаня хемічної рівноваги між материями, котрих фізичний і хемічний характер хочемо дослїдити.

На закінчене того вступу до властивої теми додам ще, що роля того посереднього ґазового твору (амонового карбамінїяну), котрого активна маса в системі не зміняє ся мимо его наглої переміни і реґенерациї, насуває дуже живо на гадку анальоґію до ролї, яку декотрі твори ґрають в невисліджених ще механїзмі всяких каталїтичних перемін. В згаданім случаю сублїмациї і диссоцияциї без гіпотетичного заложеня тої посередної фази, не можнаби ту примінити закону дїланя мас до выясненя їх пробігу. Що тая фаза є ту чисельно, на вагу беручи, зникуще мала, в границях за субтельних для наших аналїтичних метод, то є очевидно чистий припадок. Тая фаза може бути що до своїх змірів, що так скажу, свобідно великою, але ту треба на то бити, що она не може цїлком зникнути, пропасти в переміні тому, що після Джібса хемічний потенциял якої небудь материї приймає зовсїм иньші вартости в хвили, як концентрация маси в данім системі зближуєсь до нулї. Власне тим наглим змінам напруженя треба приписувати заховане дуже собою цїкавої хоч провізоричної сталости парцияльного тиску тої посередної фази.

Возьмім тепер під розвагу каталїзу.

Через строго математичне трактоване хемічних реакций доходить ся до висновку, що переміна не поступить нїколи так далеко, щоби одна сторона хем. рівнаня зовсїм зникла, щоби зникаюча субстанция чи фаза зменьшилась до абсолютної нулї. Динамічно говорить ся, що то наступить доперва по часї $t = \infty$, а розуміємо в той спосіб, що вартість хемічного потенциялу материї, котрої концентрация зближуєсь до нулї збільшуєсь прогрессивно і таким чином зачинає протидїлати силї, що ю має знищити. Наведу ту в кількох словах математичне сформуловане тих відношеній за Оствальдом [Ostwald. Lecrb. der allg. Chemie. Zweiten Bandes zweiter Theil. Leipzig 1896—1902 стр. 129].

Основне рівнане для хемічної рівноваги, примінене до гомоґенічної маси котра складає ся з двох независимих від себе складових творів представить ся при сталім t, p і m_1 [маса одного з творів] математично:

$$m_1 \left(\frac{a\mu_1}{dm_1}\right)_{t,\,p,\,m_1} + m_2 \left(\frac{a\mu_2}{dm_2}\right)_{t,\,p,\,m_1} = 0. (\mu_1 \text{ і } \mu_2 = \text{потенцияли } m_1 \text{ і } m_2)$$

Если m_2 має перейти в нулю, то будемо мати:

$$\left(\frac{a\mu_1}{dm_1}\right)_{t,\,p,\,m_1} = 0\ (\text{I}) \text{ або } \left(\frac{a\mu_2}{dm_2}\right)_{t,\,p,\,m_1} = \infty\ (\text{II}).$$

Розгляньмо тепер такий конкретний случай. До течі, розчинника m_1, додаємо дуже маленьку скількість иньшої материї dm_2. Ту dm_2 мусить отже мати позитивну а не неґативну вартість. Наколиб (I) було правдиве, то $a\mu_1$ мусїлоби бути $= 0$, то зн. потенциял розчичника не змінив би ся. Тим часом дослїд показує, що він зменьшуєсь, бо наколи передтим розчинник був в рівновазї зі своєю парою, то по розпучещю в собі dm_2 его парове напруженє стає меньшим. Отже дїфференцияльний квот (I) має скінчену неґативну вартість, а тим самим бачимо, що не (I) але (II) є правдиве.

Наколиб ми тепер до розчинника m_1 додавали не индиферентну субстанцию dm_2, лиш таку що викликає хемічні в нїм переміни, то можливість каталїзованя стає нам

ясною на нові закону дїлання мас, бо активна вартість посередної материї може ту приймати найріжнїйші скінчені вартости.

Анальоґія, котру ту підношу, впадає тим більше в очи, що при каталїзах маємо так само ненастанну реґенерацию посередної материї, а ей потенциял потрібний неначе системови до перемін в означенім напрямі, буде реґулюватись сам:

а) повмисто, то є масово-ваговою скількостию фази, щоби тим самим надати собі взагалї якусь чисельну вартість, зависиму від условій систему,

б) нївеляцийно, що так скажу, то є тим, щоби свою прибрану вартість ненастанно задержувати. В виду того пояснюване хемічних рівноваг в гетероґенічних системах за Нернстом кінетичною теориєю можнаби також підтягнути під пояснювана фізичною каталїзою або навідворот.

Закон дїланя мас, як бачилисьмо, випроваджено індукцийною методою з хемічних перемін, що заходять між ґазовими творами, бо нинї можемо лиш кінетично-молекулярною теориєю їх льоґічно выяснити і зрозуміти. О его абсолютній правдивости нинї нїхто не сумнїваєсь, бо дослїдом зістав як найдокладнїйше потверджений і потверджуєсь дальше в щоденній лябораторийній і технїчній практицї на вічну память, подібно як закон заховання маси в аналїтичній практицї. Тому реакциї між сталими і ґазовими творами уявляємо собі яко переміни, що відбувають ся виключно між самими ґазовими творами в той спосіб, що сталі материї вперед сублїмують а доперва їх пари реаґують на себе хемічно наслїдком диссоцияциї, якій они підпадають в висшій температурі.

Коли отже напружности сублїмациї яких небудь сталих творів будуть нам знані, дальше коли сочинники диссоцияциї пар, що при тім повстають, будуть нам так само знані в цїлій тяглій реляциї від температури, тоді напрям реакциї можна предвидїти, а цїлий еї квантитативний пробіг дуже докладно обчислити. З того становища выходячи высказуєсь Нернст, що найблизшою задачею загальної хемиї є подати тії всї сочинники як найбільше вичерпуючо, для всїх даючих ся подумати частинок материї, що можуть повставати через комбінацию сїмдесять кількох первнїв до що раз висшої кляси. Як бачимо домаганя не аби які.

II.

По такій поверховній характеристиці реакций, котрі можуть зайти між сталими і ґазовими творами і які розуміємо тягом в сьвітлї кінетичної теориї частинок, переходжу до дальшого не меньше в самій річи поверховного начеркненя хемічної рівноваги в розчинах. Ту мушу зазначити, що нову форму материї то є плинну фазу,

можемо уважати за відмінне в дечім середовище від попереднього середовища чужих індиферентних ґазів, котре від тамтого ріжнить ся лиш більшим сконцентрованєм маси в просторі. Сублїмация сталої материї при відповідно високій температурі відбуває ся в самій річи так само і в иньшім індиферентнім плинї, як передше в атмосфері воздуха, безводника квасу угляного або в вакуум, по сублїмациї виступає так само при досить високій температурі електролїтична диссоциация на йони, як тепер науково виражаємо ся, а всяка хемічна вимина в розчинї може відбувати ся, виконклюдовано консеквентно і дослїдно стверджено, виключно між йонами.

Отже при зіставленю сталого твору побіч иньшого (хемічно індиферентного) плинного маємо зовсїм подібні відношеня, як в попереднім случаю, а цїла ріжниця лише в тім, що великого значеня і впливу на стан хемічної рівноваги набирає ту аттракційна міжчастинкова сила котра в ґазовім середовищи була лиш діференцияльною величиною, рівною нулї. Требаби тут згадати о дуже цїкавих дослїдах Ганная і Ґоґарта над розчиненєм сталих творів в ґазах під високим тиском, котрі приміром завважали, що алькоголь вище своєї критичної температури то є в ґазовім станї розпускає в більшій скількости йодак потасовий. Той послїдний сублїмує ту при анормально високім напруженю*). Дальше студиї Віллярда**) виказують той факт, що ґази згущені високим тиском мають власність розпускати сталі материї, приміром бром парує в атмосфері стисненого кисня з далеко більшим напруженєм нїж в порожни (вакуум). (Хоч і ту є виїмки пр. скомпримований ґаз водня розпускає слабше сталі субстанциї).

Отже при розчиненю сталих материй в течах маємо цїлком анальоґічний случай до їх сублїмациї в атмосфері иньших сильно скомпримованих ґазів. Вище згадані факти годять ся як найлучше з тим, що плинні твори впливають в без порівнаня більшій мірі на аґреґатні зміни сталих творів від ґазів, що мають напруженє одної атмосфери.

Справдї дивні гадки насувають ся нам, коли вглублюєм ся в той сьвіт нечуваної ріжнородности відношеній, яку ту вивязують ся. В границях температури від 0° Цель. — до 20°, а атмосферного тиску 720—760 mm помічаємо тілько найріжнїйших тревалих атомних комплєксів, тілько хемічних індивідуїв, що обняти їх уміло навіть для фахових майже неможливо. А цїлу компліґацию треба

*) Ostwald. Lehrb. der allg. Chemie. B. I. 1891. стор. 612.
**) Journal de physique [3]. 5. 453. 1896.

очевидно віднести до ріжних напружностий, відмінних і питомих для кождої хемічної субстанциї з осібна. Питаюсь тепер, відки береся тая нечувана ріжнородність напруженій, з котрих кожда представляєсь ґрафічно иньшою кривиною в зависимости від температури і тиску? Чи хвилевий напрям тих кривин буде в кождім случаю зависїти лиш від температури і тиску? Фазовий закон дає на те неґативну віповідь і повідає, що крім тих двох чинників то є температури і тиску дїлає ту ще третий найсильнїйший хемічний (чинник) вплив, вплив чужих тїл, що находять ся припадково в данім системі, вплив середовища чи медиюм.

При найповерхнїйшім характеризованю хемічної динаміки і статики в розтворах можна виказати дуже досяглу ролю, яку відграють три типові форми материї в хемічній рівновазї то є стала, плинна і ґазова форма.

Щоби собі виробити який такий погляд на цїлу тую обширну квестию, спробую тепер нашкідувати цїлий механїзм міжчастинкових рухів в системі, що находить ся в плинним середовищи на основі кінетичної теориї.

Кінетична енерґія частинок зависить виключно від абсолютної температури, есть єї дефінїциєю. Відношенє енерґії поступного руху частинок до внутренної енерґії вирующих атомів є знане, представляєсь квотом $\frac{C_p}{C_v}$, їх ріжниця для ідеальних ґазів виносить $R = 1{\cdot}99$ cal., котра зменьшує ся до нулї, як температура опадає до 273° Цель. Чим більше підносить ся температура тим більше взростає тая ріжниця, але то помічаєсь лиш у ґазів, що складають ся з більше атомних частинок, де ріжниця стає визначнїйшою.

Отже при більшеатомних частинках ґазовий тиск буде дуже скоро зміняти ся з температурою, крітериї по поводу диссоциациї будуть частїйше являтись і ту треба шукати причини того в далеко більшій мірі ріжнородного поведеня під взглядом хемічного характеру в протиставленю до ідеальних ґазів.

Всї ґазові частинки мають в однозначних внїшних условях зовсїм ідентичні виміри в просторі. Всї збилисьби в одну безглядну масу (що малаби правдо-подібно виповняти в тяглий і безпрорывний спосіб простір), наколиб не мали в собі жадної енерґії, що проявляєсь на внї ґазовим тиском о стілько, о скілько она перевисшила міжатомну аттракцию маси.

Анальоґічно беручи, цїла атмосферна напружність сталої, плинної і ґазової маси є лише виразом злишки кінетичної енерґії части-

нок над атракційною силою маси. Цїла спосібність диссоціяції зложеної частинки є лиш дальшою реляцією тої злишки.

Звідси можна випровадити слїдуюче дуже загальне заключене:

Чим з лекших атомів суть збудовані частинки материї, тим єї тревалість в наших условях буде меньша, тим єї критична температура буде низша і на відворот, бо вміру того як зменьшуєсь атомна вага малїє також атракційна сила і наконець не вистарчає, щоби поконати кінетичну енергію атомів, котрі з вирового руху, подібного до руху планет, переходять раз на все в поступовий рух або висказуючись инакше стала або плинна материя переходить в ґазову форму.

В найбільшій части дослїдна практика не противить ся зовсїм такому висновкови. Всї легко улїтаючі материї складають ся понайбільшій части з атомів, що мають домірно малу атомну вагу. Дуже наглядних репрезентантів тої кляси творів маємо в ідеальних ґазах. Коли тепер яка небудь материя перейде раз в поле, що лежить висше єї критичної температури, коли переступить критичну ізотерму, тоді вже має спроможність примінитись до найширших условій внїшного тиску, бо буде мусїла совствовати (коеґзистувати) безпрорівно в ґазовій формі при найріжнїйших гетероґенїчних системах. В плинну форму не перейде нїколи. Більше зложені частинки материї, що легко улїтають мають звичайно можність дальшого диссоцийованя в дуже високій температурі на меньше зложені, а кондензованя (згущаня) при малїючій енергії поступового руху, котрі то однак переміни відбувають ся все після математичного шабльону, нормального законом дїланя мас. Отже тимсамим мають можність захованя своєї ґазової фази в дуже широких границях внїшного тиску, в котрих мусять наступати основні фазові переміни для иньших станів скупленя, то є сталого і плинного.

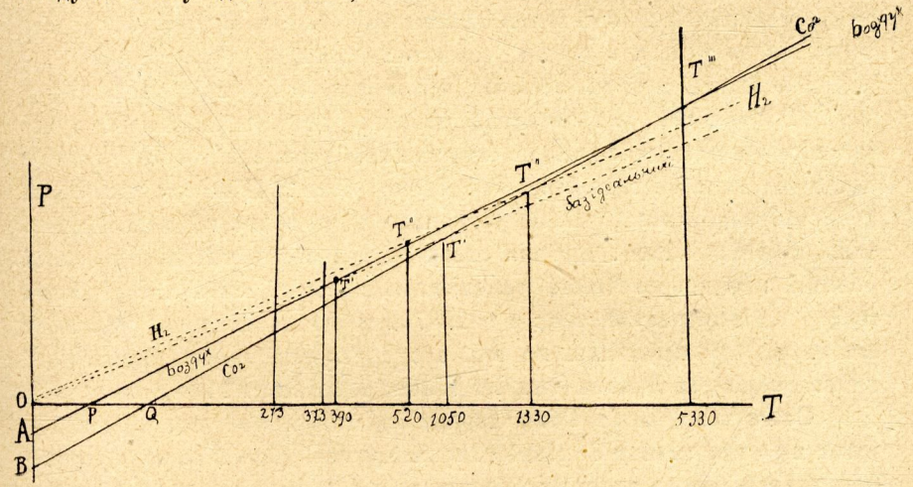
І те як раз становить цїлий характер ґазової фази материї, що в дуже просторім шматї на діяґрамі, що йде в гору від критичної ізотерми, потрафить вдержатись в коеґзистенції при найріжнїйших укладах в протиставленю до плинної і сталої фази.

Та нелишень потрафить вдержатись, але з другої сторони впливати своєю присутностию, своїми хемічними прикметами і своїм енергетичним темпераментом (висше згадана пр. фізична та хемічна каталїза) на стан хемічної рівноваги у тих системах. Звідси стає нам зрозумілою цїла досягліть точного знаня кривих напружности пар в зависимости від температури та внїшного тиску для всїх ґазових творів, звідси з другого боку розуміємо, чому так велика

скількість найріжнїйших сталих та плинних творів сублїмує або парує в звичайній температурі.

Таке характеристичне захованє ґазової материї відмінилоби ся доперва дуже близко температури — 273° Цель, для творів, що мало ріжнять ся від ідеальних ґазів, а степенно в щораз висших температурах понад — 273°, чим відповідна материя є у висше згаданім змислї меньше трівкою в наших фізичних условях або чим єї властива температуральна нуля стоїть висше — 273° Цель.

Мимоходом мушу ту застеречись проти евентуальних і дуже справедливих замітів, що ґазовий тиск твору не буде зависїти виключно від висоти своєї температуральної нулї. Оно справдї так ся має, а щоби тії відносини легко порозуміти вистарчить подати ту за van Laar'ом ґрафічне представленє систему кількох простих лїній ґазового тиску для слїдуючих чотирох субстанций: H_2, CO_2, воздуха і ґазу ідеального*).



Але спішусь до плинного середовища. При ґазовій фазї не було й бесїди о якій небудь компліґкациї від масової атракциї. Єї вартість була за мала, щоби впливати на стан хемічної рівноваги. Зовсїм противно мають ся відносини в плинних системах. Зближене частинок є ту вже так велике, що переступає критичну ізотерму, в слїд за чим частинки у всїх своїх рухах підпадають своїй власній притягаючій силї.

Безмірне число можливих частинкових одиниць, що можуть повстати через комбінацию 70 первнїв, з котрих кождий має иньший тягар атомний або пропорциональну єї притягаючу силу, стає причиною такої ріжнородности функций тої атракциї, що доволї тяжко

*) I. I. van Laar. Die Thermodynamik in der Chemie. 1893. S. 15.

представити собі відвагу кінетичної теорії, що намагаєсь вишукати загальні закони, після котрих тую ріжнородність можнаби опанувати точно одною лиш гадкою, або, що на те саме виходить вияснити фізично причину всїх реакций в розтворах та предвидїти захованє кождого твору в кождих даючих ся подумати внїшних условях як що до тиску, температури, так і материяльного середовища (Medium).

Молоденька наука „Фізикальна хемія“ не встигла ще здефінювати і конкретно виповісти дуже простих законів, котрі в першій мірі справляють реакції в ту або другу сторону, але нині можна надїятись, що їх математичне сформулованє висить у воздусї, що в плинним середовищи все дасть ся спровадити до атракцийної маси атомів. Енергетика сповнила вже свою задачу о стілько, що виповіла дуже много законів, при котрах помочи можна зрозуміти всї межидробинчі рухи в ґазових творах, що ґрунтують хемічну динаміку особливо основний закон дїланя мас. Але там дїлає виключно термічна енергія, а є зовсїм вилїмінована атракцийна сила.

Накидаєсь питанє, якимже чудом удалось в послїдних часах ван’т Гофови так углубитись в розчини, де преціньпанує дуже великий тисяч-атмосферичний внутренний тиск, що є споводований виключно між-частинковою атракциєю маси? Цїла єго нечувано досягла теория розтворів не узглядняє нї на волос тої атракцийної сили. Пригадаю лиш, що для етеру пр. Стефан обчисляє на основі реляциї між теоретичними законами капілярної сили а парованєм течей, що внутренний тиск є о 1287 атмосфер більший, нїж тиск єго пари, єго пружність на внї, а з критичних даних вставлених в рівнанє ван дер Вальса (van der Waals) обчисляєсь 1400 атмосфер*).

Отже чому ван’т Гофа теория не згадує про вплив середовища на стан хемічної рівноваги, чому стає безсильною супроти осмотичного тиску сконцентрованих розчинів, а тим більше супроти сталих творів?

Спробую відповісти коротенько на то питанє при помочи кінетичної теорії на основі закону диссоцияциї, про котрий я згадав в першій части. Вперед однак, нїм го ту єще раз наведу, зверну увагу на давний, бо ще 1807 р. Дальтоном поставлений закон, котрий повідає: в сумішці кількох ґазів загальний тиск є рівний сумі парцияльних тисків кождого ґазового складня.

Подумаймо собі тепер такий найпростший гетероґенічний систем двох тїл, індиферентних до себе в хемічнім змислї. В замкненім

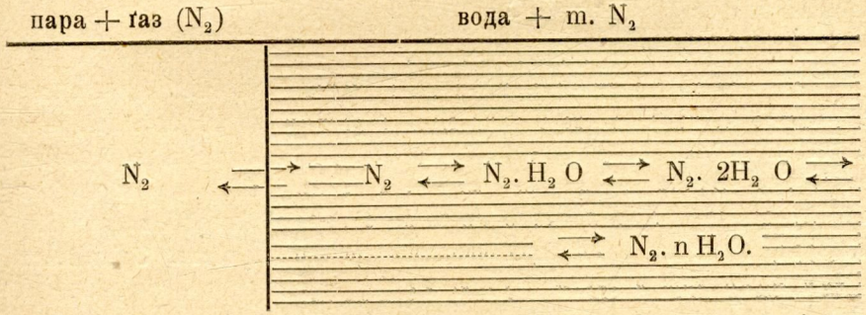
*) Ostwald. Zeitschrift für physikalische Chemie I 46. 1887.

начинню находить ся вода. В вільнім просторі над єї меннїском побіч водяної пари находить ся якась скількість чужого ґазу пр. H_2, O_2, воздуха, CO і т. д. Єще давнїйший закон Анрі’я (Hewri), бо поставлений 1803 р. дефінює математично рівновагу між обома материями, що належить до ріжних фаз, а именно рівновагу між ґазами і плинами в той спосіб: ґази розпускають ся в індиферентнім розчиннику просто пропорционально до свого тиску. Той надзвичайно простий закон потвердили безчисленні досліди дуже докладно. Він задержує своє значенє очевидно і на відворот для плинних творів, що розпустились в ґазовій фазї і після него приміром парцияльний тиск пари алькоголю над водним розчином є пропорциональний до своєї концентрациї в водї.

На тій основі дістаємо можність слїдженя поступу реакциї, взагалї стану хемічної рівноваги в розчинах, если будемо в можности визначити парцияльну напружність тих творів понад меннїском плинної фази, бо їх напружність на внї все буде пропорциональна до концентрациї в плиннім медиюм. Тая дорога називає ся тепер: приміном ґазової фази до означуваня активної вартости даного твору в плинній фазї, та основуєсь на принципі рівности потенциялів в станї рівноваги, поставленій Джібсом.

Коли именно субстанция А находить ся в рівновазї з субстанциєю Б, а Б з субст. В в яких небудь фазах, тодї очевидно находить рівновага між субстанциями А і В.

Возьмім такий простий примір:



З того схематичного представленя видимо, що розпущений ґаз є із згляду на свою концентрацию або парцияльний тиск з одної сторони в динамічній рівновазї зі своєю ґазовою напружностию, що уявляєсь над меннїском води, з другого боку в динамічній рівновазї із своїми евентуальними гідратами, про котрих єствованє маємо поки що лиш здогади в тім случаю. Всяка диссоциация N_2 в розчині на $N + N$ або полїмеризация на N_4, N_6 ..... і т. д. є виключена, бо тодї, по ріжних сторонах знаку хемічного рівнаня

малибсьмо ріжне число частинок, отже тимсамим проста пропорциональність між тиском ґазу а єго розчиненою скількости булаби звихнена, або иньшими словами ґаз не слухав би закону Анрі'я.

Дальше, як видимо, заходить також точна пропорциональність між концентрациями N_2, а $N_2 H_2 O$ і т. д., отже тимсамим маємо заґварантовану просту пропорциональність між гідратами а ґазовими частинками N_2.

Розчинник, становить, зовсїм відмінне середовище від вакуум або від атмосфери ґазів через свій атракцийний тиск. Єсли однак заходить такий случай, що той розчинник мимо свого великого тиску не впливає зовсїм на зміну числа частинок ґазового твору, що при контактї переходить на основі свого руху в єго плинну фазу, отже тим самим не зміняє поєму активної концентрациї даних частинок в розчинї, тодї слїдуюча висше згадана формулка набирає ту актуального значеня:

„Стан хемічної рівноваги не зависить від внїшного тиску лиш тодї, як через хемічну реакцию не зміняється число частинок або як обєм ґазів не зміняється.

Висше зґаданий примір відповідає тим условям, бо слухає закону Анрі'я. Означім собі осмотичний тиск розпущеного азоту через π, ґазовий тиск через p, тодї дістаємо пропорциональність

$\pi = L.p$, або коли замість парцияльних тисків возьмемо концентрациї:

$$c = L.C$$

де L означає сочинник розчиняваня.

На основі тої простої пропорциї можна було всї закони, що нормують динамічну рівновагу між ґазовими творами розширити на твори розчинені в індиферентних плинах, що зробив ґенїяльний ван'т Гоф. Вплив середовища зазначив ся лиш тим, що пружність або лучше тиск ґазу понад плином не є прямо рівний осмотичному тискови, а є лиш пропорцийональним до єго вартости. Зрівнятись з ним може лиш в такім случаю як

$$v = V \text{ чи } \frac{1}{v} = \frac{1}{V} \text{ або}$$

$$c = C$$

то є наколиб простірна концентрация ґазового твору в розчинї і в вакуум, що з ним стикає ся, була та сама. Але то в практицї майже нїколи не виступає, хиба при материях, що себе взаїмно в безграничнім степени розпускають, бо внутренне атракцийне терте при

поступнім руху того самого ґазового твору в обох середовищах має зовсїм ріжні вартости.

Отже сочинник рівноваги буде для творів розчинених в індиферентнім середовищи зовсїм такий сам, як наколиб ті твори находились в ґазовій формі в вакуум або в якімсь чужім індиферентнім ґазї. Цїлу ріжницю можнаби хиба добачувати в скорости внутренних відворотних перемін, або, як кому подобаєсь, в скорости внутренних віртуальних перемін. В такім случаю рівновага в плиннім середовищи малаби характер в більшій (або меньшій) мірі зближений до безглядної статичної рівноваги від ґазового системи. Она пригадує придавлені хитаня, котрих амплїтуди не зміняють ся. Отже в меннїску на граници двох фаз малибисьмо немовбо лиш скік в тім придавненю, але не в вартости сочинника рівноваги.

Комплікациї зі взгляду на можливу а навіть дуже імовірну реакцию:

$$N_2 + H_2 O \rightleftharpoons N_2 H_2 N$$

$$N_2 + 2H_2 O \rightleftharpoons N_2 . 2H_2 O \text{ і т. д.}$$

(котру мимоходом згадаю можна знаменито помічати пр. в наглих скоках сочинника розчиняваня в водї ґлявберської соли) не треба так довго боятись, доки розчинник находить ся в перемагаючім надмірі, де число молїв N_2 супроти числа молїв H_2O є нескінчено малим.

Отже коли частинки якогонебудь ґазу по переходї в чужий плинний твір не переступають ще в наслїдок дуже високого внутренного тиску свого критичного стану зі взгляду на можливе иньше уложеня атомів в серединї частинки або иньшими словами: як не зачнуть анї диссоциювати ся, анї кондензуватись нї полїмеризуватись, тодї тиск середовища, котрий мимо своєї імпонуючої вартости не потрафить в жадний спосіб зміннти числа розпущених молїв, елїмінуєсь і з ним „бодай так довго не треба числитись, доки через хемічні переміни в розтворах дістаємо частинки творів, для котрих температура середовища лежить висше їх критичної температури".

Отже середовище зачне при материях послушних законови Анрія впливати на рівновагу в що й но згаданім змислї аж тодї, коли концентрация розпущених частинок буде дуже велика, коли їх активність взросте аж до тої границї, що они самі або зачнуть між собою полїмеризуватись, або входячи в сполуки з розчинком зачнуть впливати сильно на свої молярні відношеня до него і т. д.

Як бачимо, маємо ту дві противні сили, що ненастанно ділають на материю в противних напрямах. Кожда з них стремить зовсім независимо від другої до якоїсь собі питомої критерії. При крайній побіді термічної енергії маса систему переходить в ґаз, в противнім случаю, при відпровадженю тої енергії через остуджене дістаємо сталї твори. Недалека вже здаєсь будучність зунїтаризує тії дві сили наскрізь та докаже, що тії дві сили мають зовсїм одноцїльний характер і природу, що они є по просту рухом космічного етеру, котрий ту інтерферує ся.

Я буду пробувати зазначити, що в дорозї до згаданої строго наукової унїтаризациї сил, що дїлають в природї наука про фази зробила вже великий крок наперед і то крок експериментальний.

Від коли іменно дістала наука в свої руки свобідне примінене тих двох собі противних сил в свої досліди, то є сили між-частинкового притяганя і термічної сили, від коли фізики навчили ся збільшати або степенно зменьшати вплив першої штучним тиском, отже зменьшуванем обєму тїл або концентрованем маси, а вплив другої сили обсервувати через штучне викликуване ріжних температур, від того доперва часу найшлась наука в дуже корисних условях розвою, якими нинї тїшить ся. Відтак треба ще було розмірно не довго чекати на рациональне студиєване тих обох сил в граничних областях, в полях, на котрих сильно переважує одна з них а друга є диференцияльно, зникаючо малою. До тепер фізика і хемія пережила вже одну добу правдиво майстерного аналїтичного перестудиєваня дїланя термічної енергії на материю, як що до єї поєму, так і напруженя через кінетичну теорию. Живемо в хвили найбільшого триумфу тої теориї. Ван Вальс (van der Waals) положив підвалину другій добі, котра тепер приходить і буде що раз більше розвиватись. Она вже тепер кидає ясне світло на дуже важну, але і дуже скомплїковану ролю середовища особливо плинного в хемічних перемінах.

Ван Вальс перший показав дорогу експериментальної аналїзи притягаючої сили маси частинок через степенне їх зближуване за посередництвом компресиї ґазів, через зменьшене свобідної дороги їх поступного руху аж на критичне віддалене, при котрім обі сили ідеально рівноважать ся. Иньшими словами виказав можливість переходженя ґазової маси в плинну і на відворот в тяглий спосіб, без наглих скоків. Коли лиш ослабимо термічну енергію достаточним зменьшенем температури, атракцийній енергії прийдемо в поміч внїшним тиском, тодї впадаємо дуже легко в поле тої характеристичної тяглости.

Отже в плинній фазї, як я вже мав нагоду висше згадати, панує дуже високий тиск, що виражуєсь в тисячах агмосфер. При тій самій температурі вартість того тиску буде змінятись для ріжних хемічно творів, бо кождий з них є збудований з відмінних, що до тягару атомного, атомів. На основі до тепер представлених законів хемічної рівноваги можна звідси витягнути такий висновок:

Кожда хемічна реакция, при котрій число частинок по обох сторонах знаку є тасама або що на тесаме виходить, при котрій молярний сочинник не зміняє своєї суми в часї переміни, буде заходити в тім самім квантитативнім степени в кождім плиннім, але индиферентнім розчиннику, коли лиш стала розчинюваня для всїх складових реакциї не змінить ся для відповідних середищ, наколи не повстають занадто легко улїтаючі продукти і т. д. Цїла ріжниця буде лиш в придавленю реакциї, ріжнім для ріжних розчинників, що далоби ся легко змірити та порівнати визначуванем скорости переміни в поодиноких случаях.

Таку дорогу експериментального студиєваня впливу плинного середовища можнаби назвати динамічною, а иншу запропонувану і примінену Нернстом, що лежить на визначуваню степеня р о з д ї л ю в а н я якоїсь материї між два або більше розчинників „статичною“ методою. Та друга метода основуєсь на перенесеню закона Дальтона і Анрія на дві поруч себе єствуючі плинні фази. При хвилинї застанови можна ту добачити можливість щораз дальшого розтяганя осмотичної теориї ван’т Гофа від одної плинної фази до другої враз зі всїма мериторичними і експериментальними консеквенциями.

Єсли тепер возьмемо під увагу другий случай, де при хемічних реакциях зміняє ся сума молїв, тодї вплив середовища буде дуже великий і осмотична теория стає ту безсильною.

Отже зовсїм анальоґічно до того як я згадав висше при зіставленю ґазової і плинної материї, правило роздїлюваня плинних фаз (Vertheilungs-satz) поставлене на основі кінетичної теориї Нернстом має дуже широке примінене при „тонких“ розтворах.

Нинї вже не сумнїваємо ся, що цїлий ряд дуже характеристичних явищ пр. стручуваня або розчинюваня материй має свою причину виключно тілько в вирівнуваню атракцийного спаду між дотичними фазами. Можна ту замітити про дотеперішні дивні будь що будь здогади, що при розчинюваню сталих материй маємо par excellence явища диссоциациї частинок на меньше зложені але між собою ідентичні комплєкси, крім звичайної сублїмациї супроти того, що диссоциация, як знаємо, є клясичним приміром тих крайних

случаїв, де внїшний тиск дїлає як раз в кондензуючім напрямі. Але коли тасама хемічна материя має в ріжних розчинниках всїлякий степень розчинюваня, то можна догадувати ся, що вже невелика ріжниця в тих тисках буде рішати напрям хемічної переміни або по відповіднім змодифікованю того постуляту, що середне міжчастинкове віддаленє входить ту на перший плян та викликує вже дуже маленькими ріжницями в тих віддаленях величезні ріжниці внутренних тисків.

Отже в розчинах маємо критерию борби тих двох собі противних сил в найвисшій та рішаючій фазї. Як в ґазових системах переважує виключно термічна енергія, в сталих атракцийна так в характеристичній посередній фазї видимо перехрещенє обох і степенне їх рівноваженє здовж цїлого поля екзистенциї плинної материї. Прогресивне пересуванє стану рівноваги між ними в границях згаданого поля проявляє ся нам цїлим рядом фізичних перемін в розчинї як пр. розчинюванєм або осаджуванєм сталих творів а дальше посередно через сотворенє нових фізичних умов в данім системі і досяглими нераз хемічними перемінами.

Тую квестию підніс Геен в своїй теориї плинів, де дотеперішні лиш здогади формулує математично

$$\frac{f}{f^1} = \frac{r^{1n}}{r^n}$$

В тім взорі, „r“ означує середну віддаль частинок гомоґенічного плину, „f^1“ атракцийну силу, або внутренний тиск середовища „n“ має ту досить велику вартість, бо =7. Отже ту маємо щось в роді ґравітациї Нютона.

Що той взір не має, як показало ся пізнїйше з досліду, точного, математичного значеня, то проте з того ще не виходить, щоби го з засади відкидати, бо якостно (кваліґативно) бодай в доволяючий спосіб толкує нам надзвичайно ріжнородні відношеня між течами а частинками инших творів.

Отже плинне середовище представляє найріжнїйші а заразом всї можливо найкорисніїйші условя до переведеня хемічних перемін в означених напрямах, що для нас можуть бути дуже пожадані. Там можуть повставати найздовільнїйші фізичні условя навіть такі, як неґативний тиск, через котрі моглиби ми перейти до метастабільних і лябільних, на мою гадку, станів, що мають, як легко догадаємо ся, принципіяльне значенє для розвою науки. Отже тїч є сотворена до того, щоби в собі переводити найосновнїйші та найбільше скомпліковані хемічні переміни, тим то не диво, що природа виконує при еї помочи архисинтези, про котрі нинїшна наука може лиш несьміло мріти.

В сїй розвідцї хочу звернути увагу на деякі висліди дотеперішної науки експериментальної, що йде в тім напрямі. Тому мушу бодай коротко згадати про теорию ван дер Вальса, а радше відповісти на питанє, як далеко дійшла кінетична теория в пояснюваню впливу плинного середовища на хемічні переміни. Учений сей використав анормальне заховане ґазів доконалих під високим тиском. — Він заключив, що тая компліkация мусить походити від самотворби притягаючого поля в серединї ґазового твору, сказати-б від кінетичного автомасованя ґазової фази. Отже ріжні вартости продукту pv вздовж табелї зростаючого компримацийного тиску уважає за скількостний вираз того внутренного притяганя і піддає єго математичній аналїзї. Тую анормальність можна помітити пр. на продукті PV для етилєну при 20° Цель. і сильнім тиску:

P =	31,58 Atm.	84,16 Atm.	398,71 Atm.
PV =	0,914	0,399	1,248.

Славна формулка PV = konst = RT, — що замикає в собі закони Боіля, Ґе-лїссака та іпотезу Avoґадри, котра ту тим виражує ся, що R є для всїх ґазів тесаме, коли порівнюємо їх ґрамово частинкові скількости, — відповідає отже дїйсним відносинам лиш при малім P а дуже великім V, бо тодї і міжмолєкулярне притяганє і беззглядний обєм ґазової материї „b“ не впливають на вартість RT.

Тодї PV — RT = o.

Но при зближуваню до критичного стану, як бачимо емпірично на поданім примірі PV — RT = O = F, де F представляє якусь загальну функцию, котра доперва для безконечно великої вартости V має вартість = O. Щоби тую функцию визначити впровадив van der Waals в те рівнанє єще внутренний тиск, що мусить бути відворотно пропорциональний в першім приближеню до квадрату обєму $\frac{a}{v^2}$, з другої сторони поправив сумаричний обєм V в той спосіб, що поменшив го о абсолютний обєм материї ґазової зв. коволюм „b“ через що дістав формулку

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(V - b) = RT.$$

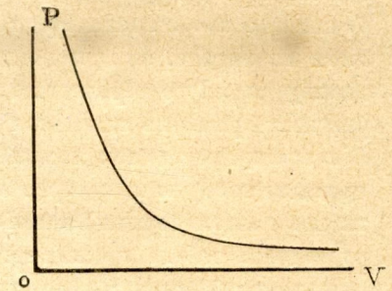
Як видимо те рівнанє із згляду на V є вже рівнанєм третого степеня, отже при здовільно вибраній а незмінній вартости T, крива лїнїя, що представляє зависимість P від V перестає бути реґулярною іперболїчною ізотермою що мала форму слїдуючу (fig. 1. стор. 34)

і переходить на иньшу форму*). Обчислім іменно

$\frac{dP}{dV}$ при сталій температурі

отже:

$$\frac{dP}{dV} = \frac{2a}{V^3} - \frac{RT}{(V-b)^2}.$$



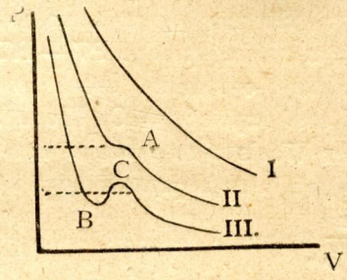
При великих вартостях на T має той диференцияльний квот неґативну вартість отже кривина має менше більше визір I.

Дальше при малих вартостях на V, де $V - \delta$ зближує ся до O маємо також $\frac{dP}{dV}$ неґативне, отже ліва сторона ізотерми II. і III. перебігає як I.

Але як: $\frac{2a}{V^3} - \frac{RT}{(V-b)^2} = O$

то на ізотерні II, мусить вже в якімсь місци пр. в A наступити мале вигнене рівнобіжне до V, а коли возьмемо ще низшу температуру то вже будуть слїдувати позитивні вартости $\frac{dP}{dV}$ отже наступають вже вигинаня в гору на право пр. BC.

Але ніж приступлю ще до закінченя тої дуже очевидно поверховної характеристики теорії van der Waals'a, зверну увагу на студию Arthur'a A Noyes'a, що в дуже простий спосіб толкує анормальність ґазових законів в розчинах кінетичною теориєю**).



Коли ван't Гоф розтягав закони Боіля і Авоґадри на рідкі розчини, то ясно зазначив, що тії закони відносять ся лиш до дуже многих случаїв в дїйсности, що при солях, сильних засадах і квасах подибує ся значно більше обниженє пружности температури цїпненя розчину, ніж того теория Авоґадри вимагає.

*) J. H. van't Hoff. Vorlesungen über theoretische und physikalische Chemie. 1900. Drites Heft. S. 9.

**) Über die Abweichungen von den Gasgezetzen in Lösungen. Von Arthur A. Noyes. Zeitschr. f. physik. Chemie. B. V. 53. 1889.

Тую атомалїю вияснив не довго потім Аргенїюс іпотезою елїктротичної диссоциациї. Але крім тих виїмків, котрі вже тепер вповні годять ся з теориєю van't Hoff'a, є ще другі далеко численнїйші. Як далеко именно сягає експериментальне визначуваня температури цїпленя густїйших розчинів — яка-б не була материя або розчинник — нїгде не подибує ся сталої вартости на частинкову вагу при ріжних концентрациях, тілько раз менші а раз значно більші вартости. Тії аномалії можна з одної сторони без сумніву толкувати повставанем більших молекулярних комплексів в таких условях, але з другої сторони такі случаї треба знов за виїмки уважати, а головної причини треба шукати в анальогії до поведеня ґазів під дуже високим тиском.

На таке пояснюване звертали увагу — як пише Noyes — Ostwald, (Zeitschrift für physik. Chemie 2, — 280), Arhenius, (ibid. 2, 499), Beckmann, (ibid. 2 734), — а він піддає еї математичній аналїзї о скілько ему стає експериментального материялу.

В розчинах треба отже як при ґазах від цїлого обему відчислити обем частинок розпущеної материї, а замічений тиск осмотичний треба збільшити о вартість, що представляє притяганє між частинками. Но при розчинах тії відношеня много більше скомплїковані ніж в ґазах. Ту обем розчину треба зменшити не лиш о обем частинок розпущених, але ще о обем частинок розчинника, бо оба скорочують в той сам спосіб свобідну дорогу руху частинок. Дальше крім взаїмного міждробинного притяганя розпущеної материї треба ще взяти в рахубу притяганє між ними а частинками розчинника, котре впрочім, ясна річ, перевишає дуже много попередне. Отже як означимо собі через p осмотичний тиск, v обем розчину в літрах, в котрім маємо розпущений один моль материї, B обем того моля, b обем частинок в однім молю материї, c обем частинок в однім літрі розчинника, то обем розчину треба зменшити о $[b + (v - B)c]$. Міждробинне притяганє між материю а розчинником є пропорциональне до простірної концентрациї кождого з них або до $\frac{1}{v}$ resp. $\frac{v-B}{v}$. Тому, як стала „a" представляє питоме притяганє, то осмотичний тиск треба з м е н ш и т и о вартість $\frac{a}{v} \cdot \frac{v-B}{v}$ а тодї місто формулки van der Waals'a

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \text{konst.}$$ одержуємо:

$$\left(p - \frac{a.}{v}\,\frac{v-B}{v}\right)(v - [b + (v-B)c] = \left(p - \frac{a.}{v}\,\frac{v-B}{v}\right)$$

$$(1-c)\left(v - \frac{b-B}{c}\right) = K.$$

Вартість $\frac{a}{v}$ в порівнаню з p і таксамо вартість B в порівнаню з v є взагалї дуже мала, отже за $\frac{v-B}{v}$ можна в приближеню поставити 1. Подїлїм ще крім того рівнане через сталу $(1-c)$ то дістанемо.

$$\left(p - \frac{a}{v}\right)\left(v - \frac{b-Bc}{1-c}\right) = pv - a - p\,\frac{b-Bc}{1-c} + \frac{a.}{v}\,\frac{b-Bc}{1-c} = \frac{K}{1-c}$$

Тоє рівнане стає ще простійшим при розваженю, що $\left(\frac{a.}{v}\,\frac{b-Bc}{1-c}\right)$ є дуже мале отже можемо заложити v відворотно пропорциональне до p.

Нехай a_1 буде новою сталою, то формулка так представить ся:

$$pv - p\,\frac{b-Bc}{1-c} + pa_1\,\frac{b-Bc}{1-c} = p\left(v - (1-a_1)\,\frac{b-Bc}{1-c}\right) = \frac{K}{1-c} + a$$

або коротше $p(v-d) = K_1$

де $K_1 = \frac{K}{1-c} + a$, $d = (1-a_1)\frac{b-Bc}{1-c}$

По такім розвиненю теориї виказує Noyes на цїлім рядї обчисленій, котрі примінив до широкого материялу поданого Бекманом [Zeitschr. f. phys. Ch. 2, 715], що така теория знаменито годить ся з обниженем температури цїпненя доволї згущених розчинів.

З цїлого ряду визначуваній Бекмана обчислив d після рівнаня $p(v-d) = p_1(v_1 - d)$ або $d = \frac{p_1 v_1 - pv}{p_1 - p}$

елїмінуючи заразом в той спосіб блуди експериментальні, що з такої пари вартостий на „d“ брав середну. Потім для кождого окремого визначеня обчисляв вартість $p(v-d)$, котра після наведеної теориї мусить бути незмінною для якої небудь концентрациї. Щоби читателеви показати, як така теория добре годить ся, обчислив середну

вартість із всїх $p(v-d)$, а в найблизшій колюмні представив відношенє кождої з них до середної.

Я подам ту кілька табель, котрі він уложив.

Над кождою з них є напис материї, еї формулка, тягар чистинковий і обчислена середна вартість d. В першій колюмні є подане обниженє температури цїпненя p (що є майже просто пропорциональне до осмотичного тиску), в другій обем розчину v, в котрім є розпущений моль, в третій pv продукт обох, в четвертій вартости на $p(v-d)$, а в послїдній їх відношенє до середної.

I. В розчинї бензолю

p	v	pv	$p(v-d)$	відношенє
1. Ацетон $(CH_3)_2$ CO (58) d = — ·064.				
1.220	4.594	5.606	5.684	1.001
3.615	1.507	5.448	5.679	1.000
5.365	0.9921	5.322	5.666	0.998
8.470	0.6088	5.157	5.686	1.001
		Середна:	5.679	
2. Бензальдегид C_6H_5. CHO (106) d = — ·027.				
1.000	5.846	5.846	5.873	1.000
3.130	1.850	5.789	5.873	1.000
5.245	1.093	5.732	5.873	1.000
		Середна:	5.873	
3. Ацетофенон C_6H_5. $COCH_3$ (120) d = + ·0122.				
1.650	3.526	5.817	5.797	1.000
3.235	1.804	5.835	5.795	1.000
5.425	1.079	5.857	5.791	0.999
8.370	0.705	5.902	5.800	1.000
		Середна:	5.796	
4. Бензофенон $(C_6H_5)_2$ CO (182) d = + ·069.				
0.960	6.120	5.876	5.809	1.002
2.480	2.408	5.971	5.800	1.001
4.440	1.371	6.087	5.781	0.997
6.140	1.010	6.197	5.773	0.996
8.420	0.7604	6.401	5.820	1.004
		Середна:	5.797	

Дальше наводить праву камфору $C_{10}H_{16}O$ (152) $d = +0{\cdot}1154$, хльораль $d = +.0276$, ацеталь, квас оцтовий, фенетоль, нафталїну і т. д. разом 14 материй. Потім подає 21 таких табель для ріжних материй розпущених в квасї оцтовім і 6 табель для материй розпущених в водї. Всюди та сама згідність.

Отже формулка $p(v - d) = konst.$ дає добре вираз тій аномалії супроти закону Боіля.

Дальше ставить Noyes питанє, чи обчислене з табель Бекмана „d“ має справди значенє сталої „d“ випровадженої в теорет. формулцї. Як видимо она складає ся з многих иншихъ чинників і є так скомплїкована, що він не сподїє ся, щоби ю можна докладно кількостно доказати. Але деякі заключеня, які туть дають випровадити ся, справджують ся з дійсностию дуже добре.

З рівнаня $d = \frac{1 - a_1}{1 - c}(b - Bc)$ виходить, що 1) чинник $\frac{1 - a_1}{1 - c}$ є все позитивний, отже 2) d мусить бути раз позитивне раз неґативне після того, чи „b“ є більше чи меньше від Bc — иньшими словами — чи обєм розпущених частинок є більший, чи менший від обєму частинок розчинника при рівних з другої сторони обємах, А дальше сумаричний обєм частинок в обох случаях (b resp. Bc) є рівний продуктови обєму одинокої частинки і числа частинок, котре знов є просто пропорциональне до питомої, — а відворотно до молекулярної ваги. Означім через b_0 і b_1 обєми одної частинки розчинника resp. розпущеної материї, а через A_0 і A_1 відповідні квоти пропорциональні до числа частинок і наконець зберім всї незнані чинники в X, то дістанемо:

$$d = \frac{1 - a_1}{1 - c}(b - Bc) \text{ або } \frac{d}{B} = \frac{1 - a_1}{1 - c}\left(\frac{b}{B} - c\right)$$

рівне $\frac{d_1}{B_1} X = A_1 b_1 - A_0 b_0$ ..... (1)

Для иншої субстанциї $\frac{d_2}{B_2} X = A_2 b_2 - A_0 b_0$.

Через получене тих двох рівнаній

$$\left(\frac{d_1}{B_1} - \frac{d_2}{B_2}\right) X = A_1 b_1 - A_0 b_0 \text{ ..... (2)}$$

З рівнаній (1) і (2) можна в деяких случаях обчислити зглядні розміри ріжних частинок. X є позитивне. Отже після того чи вираз при нїм є позитивний чи неґативний, буде $A_1 b_1$ більше або менше від $A_0 b_0$ (або $A_2 b_2$). Дальше по розваженю ще того, що лиш тодї можна робити слїдуючі обчисленя, як $A_1 - A_0$ (або $A_1 - A_2$) має знак противний як вираз при X, подає знов табелю, в котрій є обчислені взглядні розміри ріжних частинок, що були розпущені в бензолю.

назва	символь	A × 100	$\frac{d}{B}$	частинка більша від	а менша нїж
бензоль	b_0	1.13	+·105	b_6	$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_9\ b_{10}$
ацетофенон	b_1	·86	+·565	$b_0\ b_6\ b_7\ b_8$	$b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_9\ b_{10}$
ацеталь	b_2	·70	+·∧	$b_0\ b_1\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8\ b_{10}$	$b_3\ b_4$
камфора	b^3	·65	+·750	$b_0\ b_1\ b_2\ b_4\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8\ b_9\ b_{10}$	b_3
бензоан етильовий	b_4	·70	+·606	$b_0\ b_1\ b_2\ b_3\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8\ b_{10}$	$b_2\ b_3\ b_4\ b_4\ b_{10}$
нафталїна	b_5	·90	+·428	$b_0\ b_1\ b_6\ b_7\ b_8$	$b_0\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_7\ b_8\ b_9\ b_{10}$
ацетон	b_6	1·40	−·896		$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_9\ b_{10}$
бензальдетид	b_7	·99	−·267	$b_7\ b_8$	$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_9\ b_{10}$
нїтробензоль	b_8	·98	−·490	b_6	b_3
бензофенон	b_9	·60	+·414	$b_0\ b_1\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8$	$b_2\ b_3\ b_4$
фенетоль	b_{10}	·80	+·566	$b_9\ b_1\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8$	

З того видимо, що ві всїх случаях, де конституция позваляє судити о зглядних розмірах ріжних частинок, доходить ся до такої самої оцїнки з обчисленої вартости що до d —. Noyes розбирає дальше подрібно ті відношеня і відповідає на евентуальні закиди, особливо на квестию анормального в тім змислї поведеня оксимів і материй алькогольних. Але в те входити нам непотрібно.

Замітне лиш се, що в плинній фазї компліґує ся закон дїланя має головно обємами частинок, що дїлають на себе і то в мірі без порівнаня більшій, нїж питомими притяганями між ними.

Так в той спосіб дійшли ми за думками Noyes'a до відношеній в плиннім середовищи, що є цїлком анальоґічні до стисненої ґазової фази, котру теоретично обробив ван дер Вальс. Видимо ту, що найвизначнїйшу ролю при тих перемінах відграють абсолютні зміри частинок материї. Стоячи доперва на тій точцї, можна оцїнити, як слїд працю ученого Ph. A. Guye оголошену в Compt. rend. 110 141. 1890 [Ref. Ostwald, Zeitschr. f. ph. Ch. V. 275], де він реасумуючи свої розважування над теориєю ван дер Вальса, виказує, що стала „b“ в рівнаню $\left(p + \frac{v}{a^2}\right)(v - b) = RT$ мусить бути пропорциональна до молекярної рефракциї хемічної материї. Як прийме ся $R = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2.}\ \frac{1}{d,}$

то $\frac{MR}{K}$ буде рівне konst. K представляє ту відношене критичної температури (в беззгляднім численю) до критичного тиску, котре з другої сторони є пропорциональне до сталої „b“ згаданого рівнаня.

Видимо з того ясно, що оптика може віддати неоціненні услуги кінетичній теорії плинів і взагалї хемії. Для цїлости скажу ще пару слів про критичні стани. В місци (A) на лїнії П, фіг. 2. на сторонї 34., материя знаходить ся в критичнім станї, отже температура, тиск і обєм називають ся критичними (Tk), (Pk), (Vk). Обчислїм условя того стану, отже вперед рівнанє ван дер Вальса напишім в формі

$$V^3 - \left(b + \frac{RT}{P}\right) V^2 + \frac{a}{P} V - \frac{ab}{P} = o$$

При температурах низше A маємо три корінї $V = V_1$, $V = V_2$, $V = V_3$, чому відповідає $(V-V_1)(V-V_2)(V-V_3) = o$. При самім A тій корінї є рівні: $V_1 = V_2 = V_3 = Vk$ а тодї $(V - Vk)^3 = V^3 - 3Vk^2 + 3Vk^2 V - Vk^3 = o$, отже $b + \frac{RTk}{Pk} = 3Vk$ (1), $\frac{a}{Pk} = 3Vk^2$ (2) $\frac{ab}{Pk} = Vk^3$ (3), наконець:

$Vk = 3b$ з (2) і (3) | $a = 3Vk^2 Pk$

$Pk = \frac{a}{27b^2}$ з (2) | $b = \frac{1}{3} Vk$

$Tk = \frac{8a}{27bR}$ з (1) | $R = \frac{8Vk\ Pk}{3Tk}$

Коли тепер в рівнаню $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$ тиск, обєм і температуру будемо виражати у відповідних критичних вартостях як одиницях, отже: $P = \alpha Vk$, $V = \beta Vk$, $T = \gamma Tk$, а відтак вилїмінуємо a, b, і R то дістанемо

$$\left(\alpha Pk + \frac{3Pk}{\beta^2}\right)\left((\beta Vk - \frac{Vk}{3}\right) = \frac{8\gamma\, Vk\, Pk}{3} \text{ або}$$

$\left(\alpha + \frac{3}{\beta^2}\right)(3\beta - 1) = 8\gamma$ рівнанє зредуковане.

Оно представляє систем зредукованих критичних ізотерм, що є ідентичні для кождої материї без зглядy на еї хемічну будову (хоч з другої сторони для тої самої материї не є правдиве).

На кождий случай видимо, що всяка хемічна сполука є збудована після того самого ідеального пляну. Що відповідаючі собі місця на такій кривинї для ріжних утворів є в звичайних условях окружаючої нас природи, лиш ріжно супроти себе положені, в слїд за чим мають ріжні аґреґатні форми на нашім обсерваційнім нїво, котрим перетнемо систем із всїх знаних материй. Місця переходу тих форм в себе для кождої материї з окрема є в звичайнім укладї сорядних p, v, t, ріжно положені, через зміну условій обсервації ми їх можемо здовільно пересувати.

Пригадаймо собі тепер з примірів давнїйше наведених, що кождий з основних трех аґреґатних форм, має відповідно до перемоги будь то аттракційної, будь то термічної енерґії цїлком иншу ролю в хемічнім реаґованю.

I. Що в ґазовій фазї можуть мішати ся з собою фізично найріжнїйші материї, що еї поле еґзистенції в порівнаню з тамтими двома є дуже широке, бо від тиску O аж до ∞ як лиш температура буде висша від критичної. Дальше, що тая фаза є одна одинока, хочби як много містила в собі хемічних складнїв, отже по поводу свого питомого енерґетичного темпераменту потрафить ействувати з найріжнїйшими гетероґенїчними системами, а ново впроваджена в них викликати нераз основні переміни.

II. Що відношеня рівноваг компліkують ся найбільше в плинних фазах, де обі енерґії перехрещують ся. Число тих плинних фаз, що навіть поруч себе ействують, може бути вже доволї велике, а активна вартість складнїв не є незмінна, як при сталих творах (Horstmann), анї навіть не є пропорциональна до концентрації як при ґазах (див. теория Noyes'a), з виключенєм рідких розчинів (теория van't Hoff'a).

З того видимо, що на внїшний вигляд хемічної рівноваги впливають найбільше два чинники енерґетичні то є температура і тиск, бо від їх укладу та зміни буде в першій лїнії залежати всякий міжмолекулярний та міжатомний рух материї та еї системів, бо всяка хемічна материя має в їх укладї своє поле ействованя обмежене (крім хемічних елементів) віддїлене різко аґреґатними та альотропними (або ізомерними) фазами.

Видимо також, що при чисто ґазових системах зміна атмосферного тиску, має найбільше значенє, при сталих та плинних висотах температури (бо в них міждробинний тиск обчисляє ся в тисячах кільоґрамів на 1 cm^2). Як з тої точки погляду розберемо славну реґулу фаз, випроваджену термодинамічно Джібсом з рівнаня $d\varepsilon = \tau d\eta - p dv + \mu_1 dm_1 + \mu_2 dm_2$ [де $d\varepsilon$ означує зміну цїлої

енергії, $\tau d\eta$ ентропії (припустїм енергії термічної), $- pdv$ зміну праці а $\mu_1 dm_1 + \ldots\ldots$ і т. д. зміну хемічної енергії,] то видимо, що там оба роди енергії, про котрі ту цїлий час говорено є поруч себе зіставлені з противним знаком.

Отже вплив температури і тиску (або енергії притяганя) є ту зіставлені поруч впливу хемічного середовища і зсумовані разом. Але найцїкавійше, що при деяких системах можна один з механічних впливів навіть хемічним заступити.

Пр. етер мішає ся з водою і дає дві фази плинні, що верствують ся одна на другій. В міру того, як їх взаїмний сочинник розчиняваня підносить ся враз з температурою, зникають обі, та зближують ся до критичної точки, в котрій цїлком змішають ся. Але зовсїм те саме явище можна викликати при сталій температурі степенним додаванєм алькоголю, котрий розпускаючись в обох фазах, побільшує в них оба попередні сочинники способом тим самим.

На таке сповидне, поки що, з'унїтаризованє сил, котре в реґулї фаз видимо, а навіть як в тім случаю міримо, хотїв я звернути увагу.

Юлїян Гірняк.

Відношенє ґеометриї метричної до метової.

НАПИСАВ

Др. Володимир Левицкий.

1. В ґеометриї можливі в дві точки виходу; або опираємо ся на незмінности т. зв. **метричних** власностий фіґур (пр. незмінність віддаленя двох точок, постійність кута, замкненого двома простими і т. п.), або можемо станути на становиску загальнїйшім і опертп ся на незмінности т. зв. **метових** власностий фіґур (пр. постійність відношеня подвійного поділу). Звичайно робять ся так, що вперед розслїджує ся власности метричні фіґур, а від них переходить ся до власностий метових; но та дорога не конче є потрібна. Можна здвигнути цїлу будівлю ґеометриї метової при помочи виключно їй питомих аксіомів без відкликуваня ся до помочи ґеометриї метричної.[1])

В так построєній ґеометриї метовій остають без зміни усякі власности метові при якій-небудь колїнеациї (посвоячню), якої виразом в формули (в сорядних однородних):

$$\left.\begin{aligned} \varrho x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 \\ \varrho x_2' &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 \\ \varrho x_3' &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 \\ \varrho x_4' &= a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 \end{aligned}\right\} \quad 1).$$

Ту маєм 15 сочинників, значить ся маєм в трирозміровім просторі ∞^{15} посвоячень, отже **ґеометрия метова займаєсь такими відношенями фіґур, які остають без зміни для 15-частної ґрупи** G_{15}.

[1]) Пор. Enriques: Geometria projettiva. Bologna 1897.

2. Приймім отже, щосьмо здвигнули вже ґеометрию метову і спитаймо, як тепер на відворот від тої загальнїйшої ґеометриї перейти до спеціяльнїйшої т. є метричної ґеометриі.

В ґеометриї метовій не робить ся нїякої ріжниці між поодинокими площами, бо они всї є рівноважні, за се ґеометрия елєментарна вирізняє площу безконечно далеку. Наколи отже хочем перейти від ґеометриї метової до елємментарної, мусимо вперед *долучити до неї площу безконечно далеку*. Через се мусимо з поміж усїх ∞^{15} посвоячень вибрати такі, що площі безконечно далекої не нарушають, при яких отже площа та сама в себе переходить. Будуть се — в звичайних простокутних сорядних — посвояченя подібні:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \end{aligned}\right\} \quad 2).$$

Сочинників є тут 12, отже посвоячень маєм ∞^{12}, а ґрупа G_{15} спаде через долучене безконечно далекої площи на G_{12}.

Але через се ми не дійшли ще до ґеометриї елємментарної, в якій Фіґури уважаєм тодї за рівноважні, наколи они переходять в себе через рух (отже є пристайні), або через відбите (пристайність відворотна), або через перетворення подібні (подібність). Тї всї перетворення дають ґрупу G_7 (т. є. ∞^6 рухів, ∞^1 відбить і перетворень подібних); наколи до неї хочемо дійти, щоби ся найти в царинї ґеометриї елємментарної, мусимо долучити до ґеометриї метової попри площу безконечно далеку ще *якийсь утвір з 5 сталими*; сей утвір остати мусить без зміни при усяких колїнеаціях. Твором з 5 сочинниками є *крива другого степеня* (перерiз стіжковий; значити его будем через C_2). Понеже ми долучили до ґеометриї метової безконечно далеку площу, то і долучена крива C_2 лежати мусить в тій безконечно далекій площи і бути уявна (мнима). Таку криву C_2 називає Кляйн і Lie *колом кулистим* (Kugelkreis). Щоби его дістати, треба перерізати кулю, дану в сорядних однородних:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a_{11}tx + 2a_{12}ty + 2a_{13}tz + a_{14}t^2 = 0$$

(t звичайно = 1, наколи берем сорядні неоднородні) площею безконечно далекою; дістанем тодї рівнанє кола кулистого:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \qquad t = 0. \qquad 3).$$

В сорядних Plücker'a (площи) u v w дістанемо — як Кляйн доказує — рівнанє сего утвору:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Наколи отже хочемо перейти від ґеометриї метової до елєментарної, мусимо долучити до неї площу безконечно далеку і кулисте коло.

В ґеометриї на площи річ о стілько упрощує ся, що місто безконечної площи треба брати просту безконечно далеку $t = 0$ і утвір $x^2 + y^2 = 0$; оба они разом дають т. зв. мнимі точки колові; прості $x + iy = 0$ та $x - iy = 0$ перетинають ся проте в двох, безконечно далеких точках колових. Ті точки колові відповідають кулистому колу в просторі.

[Ту мусимо додати, що сам утвір $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ є стіжком мінімальним (стіжок, що з него остав лиш вершок); его творячі є простими мінімальними. На площи є $x + iy = 0$ і $x - iy = 0$ простими мінімальними, а кут між двома простими на площи є рівний:

$$\varphi = \frac{1}{2} \log DV \qquad 4),$$

де DV є стосунок подвійного поділу між тими двома простими, а мінімальними, що ідуть з вершка сего кута — як се Laguerre[1]) доказав. Се вираженє на кут буде нам дальше потрібне].

Загальнїйше можна розвязати квестию переходу від ґеометриї метової до елєментарної в площи, долучаючи не мнимі точки колові, але долучаючи після Cayley'a[2]) який небудь переріз стіжковий C_2, який назвем абсолютним перерізом стіжковим. Дістанемо тодї три ріжні евентуальности:

1) берем абсолютний C_2 мнимий.
2) „ „ C_2 дїйсний.
3) „ мниму пару точок.

Ґеометрию з долученим мнимим C_2 назвем за Кляйном елїптичною, з долученим дїйсним C_2 гіперболїчною, з долученою парою точок мнимих параболїчною. Та послїдна є, як се відразу видко, ідентична з ґеометриєю, що повстала з метової через долученє точок колових.

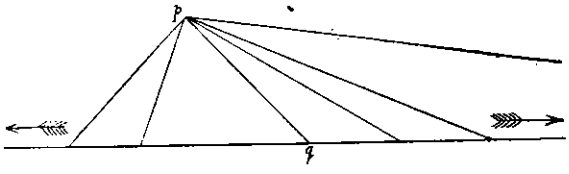
3. Побачимо тепер, яка заходить звязь між тими трома рядами ґеометриї Cayley'a а т. зв. ґеометриєю неевклїдовою; підем ту дорогою, вказаною через Кляйна в его викладах про ґеометрию метову в зимовім семестрі р. 1900/01 в Ґетінґен.

Як відомо, в ґеометриї евклїдовій на перший плян висуваєсь т. зв. аксіом лїнїй рівнобіжних.

---

[1]) Пор. Nouvell. Annal. 1853.
[2]) Пор. Philos. Transact. 1859.

Возьмім якусь лїнїю і получім точку q на нїй з якоюсь точкою p; най же та точка q посуваєсь постійно на право, то тодї граничне положенє луча pq назвем положенєм рівнобіжним. Чи можливе є тілько одно таке положенє? В дїйсности точка q може посуватись і на лїво до положеня граничного і тодї можливе є друге положенє рівнобіжне. Заходить отже квестия, чи оба ті положеня є одним і тим самим, чи нї, т. є. чи через точку p переходять дві, чи одна рівнобіжна. Ґеометрия евклїдова приймає лиш одну рівнобіжну; наколи однак приймем дві рівнобіжні ідучі через p, не станемо в суперечности з льоґікою, а дійдем до ґеометриї, якої висліди будуть відмінні від висліїдів ґеометриї евклїдової. Тою дорогою пішли J. Bolyai[1]) і Лобачевский[2]) і сотворили перший рід ґеометриї неевклїдової, де через кожду точку переходять дві рівнобіжні.



Але можлива є ще і друга евентуальність, на яку звернув увагу Riemann[3]). Заложенє, що істнує граничне положенє для лїнїї, що іде через точку p, містить в собі заложенє, що дана лїнїя є безконечно довга. В дїйсности (пр. в сьвітї фізичнім) не повинно ся говорити про лїнїю безконечно довгу; можна говорити, що лїнїя є необмежена, дуже, дуже довга, але не нескінчена (так пр. в ґеометриї метовій кожда проста є замкнена). В виду сего не може істнувати і положенє граничне, але що найбільше асимптотичне; нема отже і лїнїй рівнобіжних.

Приходим через се до другого рода ґеометриї неевклїдової, вповнї льоґічної, як і перша; ту в просторі нема зовсїм лїнїй рівнобіжних, а кожда проста є замкнена і скінчена. А що анальоґічний случай заходить на кулї, де кожда лїнїя вертає сама в себе, проте ґеометрия Riemann'a носить також назву ґеометриї сферичної; можемо собі з'явити певну кулю о лучу R, де виступають анальоґічні відносини, як в ґеометриї Riemann'a; тодї є $\frac{1}{R^2}$ мірою кривини кулї, а разом мірою кривини простору

[1]) Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens etc. (пор. W. Bolyai: Tentamen 1832).

[2]) Exposition des principes de la géométrie, Kasan 1826. недруковане; опісля 1829.

[3]) Über dle Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen (Riemann's Werke) надруковане по смерти R.

Riemann'a. (В дійсности є два роди сеї геометрий, на що увагу звернув доперва Klein[1]); один рід, де дві прості перетинають ся в одній точці, а через дві точки переходить одна проста; се п о в д и н ь ч а г е о м е т р и я. Другий рід, де дві прості перетинають ся в двох точках, де отже через дві точки переходить безконечно много простих, в т. т. зв. п о д в і й н о ю г е о м е т р и є ю R. Та в се близше не входимо). Анальоґічно перший рід геометрий неевклїдової назвати можем г е о м е т р и є ю п с е в д о с ф е р и ч н о ю; їй відповідає куля о лучу iR, отже мірою кривини сеї геометриї є $-\frac{1}{R^2}$; та о тім далї буде обширнїйше бесїда. – Очевидно для геометриї евклїдової є $R = \infty$, отже міра кривини виносить 0.

4. Верньмом тепер до геометриї метовоі, то побачимо, як тїсна звязь заходить між нею, а трома що-йно наведеними родами геометриї метричноі. Покаже ся, що геометрия параболїчна відповідає звичайній геометриї евклїдовій, гіперболїчна геометриї Лобачевского, а елїптична геометриї Riemann'a. На се перший звернув увагу Кляйн[2]).

Переходу довершимо в слїдуючий спосіб. Наколи маєм два лучі о сорядних лїнїових $(x_1\ x_2\ x_3)$ і $(x_1'\ x_2'\ x_3')$, то кут між ними виражує ся, як відомо, формулою:

$$\omega = \arccos \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}} \qquad 5),$$

а кут між двома площами о сорядних площи $(u_1\ u_2\ u_3)$ і $(u_1'\ u_2'\ u_3')$ виражує ся формулою:

$$\varphi = \arccos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2}} \qquad 6),$$

де $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ представляє в сорядних лїнїйних, а $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$ в сорядних площ рівнанє стїжка мінімального.

Місто мінімального стїжка приймім за підставу після теориї Cayley'a а б с о л ю т н и й п е р е р і з стїжка C_2 в сорядних однородних; через се обмежимо ся до площи.

Наколи сорядні $x_1 : x_2 : x_3$ представляють в площи точку, або в точці луч, а сорядні $u_1\ u_2 : u_3$ на площи просту, або в точці площу, то рівнанє безглядної кривої C_2 буде:

$\Omega(x_1\ x_2\ x_3) = 0$ в сорядних точкових, а

$\Phi(u_1\ u_2\ u_3) = 0$ в сорядних лїнї простої.

---

[1]) Math. Annal. 4. p. 604.

[2]) Math. Annal. 4. 6.

Узагальняючи за Кляйном рівнання 5) та 6) дістанемо на відступ двох точок $(x_1\ x_2\ x_3)$ і $(x_1'\ x_2'\ x_3')$ форму:

$$\omega = c.\arccos \frac{1}{2} \frac{x_1' \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + x_2' \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} + x_3' \frac{\partial \Omega}{\partial x_3}}{\sqrt{\Omega(x_1\ x_2\ x_3)}\ \sqrt{\Omega(x_1'\ x_2'\ x_3')}} \qquad 7),$$

де в чисельнику виступає пів бігунової; стала c є довільна, бо від нас зависить вибір одиниць мірничих. Кут між двома простими означимо рівнанем:

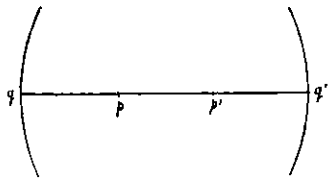
$$\varphi = \arccos \frac{1}{2} \frac{u_1' \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + u_2' \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + u_3' \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}}{\sqrt{\Phi(u_1\ u_2\ u_3)}\ \sqrt{\Phi(u_1'\ u_2'\ u_3')}} \qquad 8).$$

Місто формул тригонометричних впровадимо формули Lagnerre'a:

$$\omega = c\,\frac{i}{2} \log DV, \qquad \varphi = \frac{i}{2} \log D_1 V,$$

де DV є відношене подвійного поділу. Се відношене означимо в слїдуючий спосіб:

$$DV = \frac{pq \,.\, p'q'}{pq' \,.\, p'q}$$

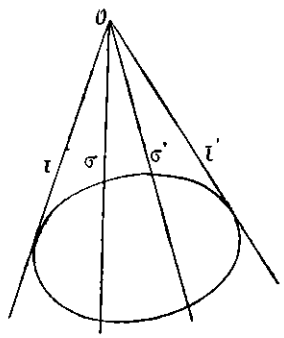


де $p(x_1\ x_2\ x_3)$ і $p'(x_1'\ x_2'\ x_3')$ є точки дані, що їх відступу шукаємо, а q і q' точки, де лінія pp' перетинає безглядну криву C_2.

Анальоґічно є:

$$D_1 V = \frac{(\sigma\tau)(\sigma'\tau')}{(\sigma\tau')(\sigma'\tau)},$$

де σ і σ' є дані прості, а τ і τ' стичні, поведені до C_2 з точки, з якої ідуть прості σ та σ'. Очевидно значать $(\sigma\tau)$, sinus'и відповідних кутів.



Перейдїм тепер до поодиноких случаїв.

5. Най крива C_2 буде мнима, отже маєм случай ґеометриї еліптичної.

Наколи криву C_2 віднесемо до трикутника спряженого з самим собою, дістанемо:

$$\Omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
$$\Phi = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

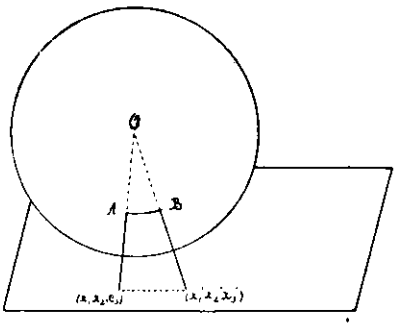
(сорядні однородні). Тоді дїстанемо після формул 7) і 8) на відступ двох точок:

$$\omega = c \arccos \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}}$$

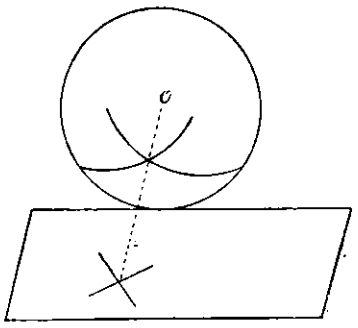
а на кут між двома простими:

$$\varphi = \arccos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2}}.$$

В порівнаню з формулою 5) бачимо, що відступ двох точок є c рази так великий, як кут між простими, що ідуть через точку O, а кут між двома лучами є рівний кутови між двома площами, що ідуть через O. Наколи отже з O (поза площею Cayley'a) зачеркнемо кулю лучом $R = c$ і з O поведемо лучі до даних точок $(x_1\ x_2\ x_3)$ і $(x_1'\ x_2'\ x_3')$, то відступ точок, в яких лучі тї перебивають кулю, є c рази так великий, як кут середоточний, що тї лучі его замикають. Можна проте сказати: Відступ двох точок на площи Cayley'a є рівний елементарному відступови їх образів A і B на кулї о лучу c.



Друга формула порівнана з 6) каже нам, що кут Cayley'a між двома простими на площи є рівний кутови, який творять відповідні найбільші кола на кулї о лучу c, зачеркненої довкола точки O.



В загалї можна сказати: Відношення метричні геометриї елїптичної в впрост метом відповідних відношень, які істнують на кулї, зачеркненої з точки O. Тямити при тім треба, що відношенє метове між кулею а площою є дво-однократне, бо два кінцї проміру дають все на мет лиш одну точку.

Проста в геометриї елїптичній є с к і н ч е н а, бо їй відповідає на кулї найбільше коло, а се має довготу $2R\pi = 2\pi c$; проста має проте довготу о половину меньшу, т. є. $\pi c = \pi R$. Як з сего бачимо, R є сталою характеристичнею, стисло звязаною з одиницею довготи (c).

Понеже проста є скінчена, тому в ґеометриї елїптичній нема граничного положеня, нема проте рівнобіжної. — Як з сего видко, ґеометрия елїптична Cayley'a веде просто до ґеометриї неевклідової Riemann'a о просторі необмеженім, але не нескінченім.

6. Возьмім случай другий, т. є. криву беззглядну C_2 дїйсну; через се маєм ґеометрию гіперболїчну.

Наколи і ту рівнане кривої C_2 віднесемо до трикутника спряженого з самим собою, дістанемо:

$$\Omega = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$
$$\Phi = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2.$$

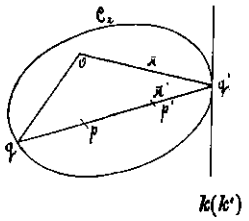
Відступ двох точок є ту:

$$\omega = c \arccos \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2' - x_3 x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2}\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2}}$$

а кут між двома простими:

$$\varphi = \arccos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' - u_3 u_3'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 - u_3^2}\sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 - u_3'^2}}.$$

C_2 є дїйсне, можна проте ї нарисувати; тодї всї наші операциї відбувати ся будуть в серединї C_2. Що дотикає кута φ між двома простими, то і ту остає то само, що передше, бо стичні, що ідуть з точки перетинаня ся обох простих (а прості берем в внутрі кривої) до кривої C_2, є мнимі. — Иньша річ є з відступом обох простих.



Понеже:

$$\omega = c \frac{1}{2} \log DV,$$

а

$$DV = \frac{pq \cdot p'q'}{pq' \cdot p'q}$$

має дїйсну вартість, а кромі сего відступ обох точок має бути дїйсний, то мусить бути конче:

$$c = -iR,$$

де $-\frac{1}{R^2}$ буде мірою кривини ґеометриї гіперболїчної.

Що ся дїє в безконечности? Покажемо, що обвід кривої C_2 представляє безконечно далеке, що проте проста має дві безконечно далекі точки, або що через одну точку ідуть дві віддїльні рівнобіжні.

І справді в внутрі C_2 є $DV = \frac{pq' \cdot p'q'}{pq' \cdot p'q}$, а $\omega = \frac{R}{2} \log DV$. Як довго находить ся p' в внутрі C_2, так довго є DV дійсне. Наколи p' паде в q або q' (отже на C_2), то DV станесь рівне 0 або ∞, $DV = \pm \infty$, отже віддалене $pp' = \pm \infty$. Наколи p' вийде поза C_2, то $DV < 0$, отже відступ pp' стане мнимий. Кожда проста має проте дві дійсні безконечно далекі точки, а се точки пересічи еї з C_2. Наколи возьмемо в C_2 точку O і получимо еї з p', то наколи p' стремить до q і q', дістанемо дві рівнобіжні Oq і Oq' до pp'. В ґеометриї гіперболїчній називаємо проте рівнобіжними такі лїнії, які ся перетинають в точках обводу кривої безглядної C_2.

Бачимо проте, що ґеометрия гіперболїчна вяже ся з ґеометриєю Лобачевского.

Який кут замикають дві рівнобіжні?

Наколи тї рівнобіжні є π і π', а через їх точку пересїчи поведем стичні k і k' до C_2, то тї стичні спадають разом ($k = k'$). Тодї:

$$DV = \frac{\sin \pi k \cdot \sin \pi' k'}{\sin \pi k' \cdot \sin \pi' k} = 1, \quad \log DV = 0,$$

отже: дві рівнобіжні перетинають ся в точках безглядної кривої C_2 під кутом зеро.

З сего слїдує дуже цїкаве свійство трикутників вписаних в криву C_2; в кождім такім трикутнику всї кути рівнають ся зеру, а боки є до себе рівнобіжні.

Бачили ми, що ґеометрию еліптичну можна інтерпретувати на кулї, або в загалї на поверхні о сталій додатній кривинї в звичайнім нашім просторі. Завважити треба, що і ґеометрию гіперболїчну можна інтерпретувати в звичайнім просторі на певних поверхнях псевдосферичних зі сталою кривиною відємною. Поверхні такі розслїджував перший Minding[1]), на їх значінє для ґеометриї неевклїдової звернув однак увагу доперва Beltrami[2]). Він доказав, що ґеометрия на таких поверхнях зовсїм зґоджує ся з ґеометриєю Лобачевского. Вже Minding[3]) постеріг, що наколи на таких

[1]) Crelle's Journal Bd. 19. 20. 1839. 1840.

[2]) Saggio di Interpretazione della Geometria non-Euclidea (Giorn. di Matem VI. 1868). Иньші працї про тї поверхні є: Dini: Comptes rendus I. 1865, Enneper: Götting. Nachr. 1868. Bianchi: Dissertat. (Pisa 1879). Lie: Nouv. Archiv für Math. Bd. 4—5. 1879—1880. Backlund: Math. Annal. 19. (1882). Bianchi: Lezioni di Geomet. differenziale (1886).

[3]) loc. cit.

поверхнях уважати будем трикутники утворені через лінії геодетичні, то в тих трикутниках будуть мали значінє усї форми тригонометриї сферичної, наколи в них місто луча R вставимо — iR. Такі форми дістав сучасний до Minding'a Лобачевский в своїй геометриї, але схожість їх з геометриєю на поверхнях псевдосферичних постеріг доперва Beltrami.

7. Возьмім тепер третий случай геометриї Cayley'a т. є. геометрию параболїчну, де абсолютна крива C_2 деґенерує ся в мнимy пару точок.

Пара точок колових є:

$$u_1^2 + u_2^2 = 0,$$

но ми ідучи за Кляйном, напишемо се рівнанє в загальнїйшім видї:

$$u_1^2 + u_2^2 + \lambda u_3^2 = 0,$$

де λ може принимати вартости додатні, відємні та зеро. Для $\lambda > 0$ є абсолютна крива C_2 мнима (случай геометриї еліптичної), для $\lambda < 0$ є C_2 дїйсна (геометрия гіперболїчна); $\lambda = 0$ дає случай граничний, який тепер розбираємо.

В сорядних точок напишім рівнанє загальне абсолютної кривої C_2 в видї:

$$\lambda(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = 0.$$

Для $\lambda = 0$ є $x_3^2 = 0$, т. є. маємо подвійну безконечно далеку площу.

Кут між двома простими в розуміню Cayley'a буде тепер:

$$\varphi = \arccos \frac{u_1 u_1' + u_2 u_2' + \lambda u_3 u_3'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \lambda u_3^2}\,\sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + \lambda u_3'^2}};$$

з відси випаде для $\lambda = 0$:

$$\varphi = \arccos \frac{u_1 u'_1 + u_2 u_2'^2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,\sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}}$$

т. є. дістаєм відразу вираженє на кут таке саме, як в геометриї евклїдовій.

Розслїдїм, чи і на відступ двох точок випаде для $\lambda = 0$ таке саме вираженє, як в геометриї евклїдовій.

Для $\lambda = 0$ випаде на віддалене двох точок:

$$\omega = c \arccos \frac{u_3 u_3'}{u_3 u_3'} = c \arccos 1 = 0;$$

то само дає і $\log DV$. Но побачимо, що річ випаде інакше, наколи в иньший спосіб перейдем до границї. Возьмім именно: місто $\arccos$ $\arcsin$ на основі рівнанє:

$$\arcsin = \arccos\left(\sin = \sqrt{1 - \cos^2}\right);$$

тодї дістанемо на відступ двох точок взагалї:

$$\omega = c \arcsin \sqrt{\frac{(\lambda x_1^2+\lambda x_2^2+x_3^2)(\lambda x_1'^2+\lambda x_2'^2+x_3'^2)-(\lambda x_1 x_1'+\lambda x_2 x_2'+x_3 x_3')^2}{(\lambda x_1^2+\lambda x_2^2+x_3^2)(\lambda x_1'^2+\lambda x_2'^2+x_3'^2)}}.$$

Приймім λ дуже мале і розвиньмо повисшу форму після степений λ; дістанемо:

$$\omega = c \arcsin \sqrt{\frac{\lambda(x_1^2x_3'^2+x_2^2x_3'^2+x_1'^2x_3^2+x_2'^2x_3^2-2x_1x_1'x_3x_3'-2x_2x_2'x_3x_3')+\lambda^2(\cdots)}{x_3^2x_3'^2+\lambda(\cdots)}}.$$

Наколи пропустимо вирази з λ^2 в чисельнику, а з λ в знаменнику, дістанемо:

$$\omega = c \arcsin \sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{(x_1x_3'-x_1'x_3)^2+(x_2x_3'-x_2'x_3)^2}{x_3^2x_3'^2}}.$$

Перейдїм до сорядних неоднородних, отже положім:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = x_3' = 1,$$

то дістанемо:

$$\omega = c \arcsin \sqrt{\lambda} \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}.$$

Для $\lambda = 0$ перейшов би сей вираз в зеро, наколиб не стала c, якої вибір лежить в наших руках. Виберім проте c так, щоби все $c\sqrt{\lambda} = 1$, а кромі сего положім за sinus сам лук (се можливе з огляду на безконечно мале λ); тодї дістанемо:

$$\omega = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},$$

а се є відступ двох точок, виражений взором ґеометрії аналїтичної.

Бачимо проте, що ґеометрия параболїчна Cayley'a відповідає ґеометриї евклїдовій.

З причини висше подачих відношень між ґеометриями Cayley'a а трома родами ґеометриї елементарної перенїс Кляйн назви: ґеометрия параболїчна, гіперболїчна і елїптична на ґеометрию Евклїда, Лобачевского і Riemann'a.[1])

Тернопіль, в лютім 1903.

---

[1]) Пор. літературу (крім висше поданої): W. Killing: Die nichteuklidischen Raumformen 2 Bde (Paderborn); Clebsch-Lindemann: Geometrie Bd. 2. 1 Leipzig 1891. F. Klein: Nichteuklidische Geometrie (автографоване) Göttingen 1893 (I. II). F. Klein: Projective Geometrie (в манускриптї в бібліотеці семінара математичного в Göttingen) 1901.

Фізична ґеоґрафія при кінци XIX. століття.

(Наукова хроніка за 1898, 1899 і 1900 р.).

Написав *Др. Стефан Рудницкий.*

Нинїшня розвідка не хоче бути нїчим иньшим, як лиш *наукою хронїкою* в области фізичної ґеоґрафії за пару послїдних лїт минувшого що-йно століття. Рік тому рішив ся я приступити до зладженя огляду важнїйших праць в тій царинї. Я почав роботу, але она за пару місяцїв так у мене під руками выросла, що я вагувавсь навіть поміщати єї в „Науковій Хронїцї“ Збірника.

Але через осібний титул моя теперішня праця не затратила цїх наукової хронїки, хоч я подекуди старавсь єї нагнути до загально прийнятого шабльона розвідки. Сей хронїкарский характер треба менї виразно зазначити.

Я старавсь ту обняти і коротенько зібрати всї важнїйші поступи фізичної ґеоґрафії в лїтах 1899 і 1900, узгляднивши при тім що найважнїйші прояви з 1898 р. Що цїлковите вичерпанє лїтератури було менї не можливе — не подивує ся нїхто, бо у львівских бібліотеках дуже малу лиш скількість ґеоґрафічних і споріднених публїкацій мож було найти. Часто мусїв я брати материял з другої руки, що впрочім в того рода розвідках, як теперішня, невеликою ще є провиною.

Зібраний материял я поділив на кілька ґруп після частий фізичної ґеоґрафії. Ідучи за приміром многих підручників я поставив на передї метеорольоґію та клїматольоґію разом з земским маґнетизмом, дальше океаноґрафію, а потім вже динаміку та морфольоґію суші. Ґеоґрафії ростин і звірят в нинїшній хронїці я не узгляднив, бо ті два дїли радше зачисляти належить до біоґеоґрафії, як до фізичної ґеоґрафії в тїснїйшім значіню.

Заки приступимо до метеорольоґічної части, належить менї подати звістку про підручники обіймаючі цїлість фізичної ґеоґрафії. На згадку заслугують ту передовсїм два: Wagner'a і Günther'a.

Компендия фізичної ґеоґрафії Ваґнера находить ся в першім томі єго „Lehrbuch der Geographie (Hannover und Leipzig, Hahn, 1900)“, де обнимає книгу II. (ст. 228—561). Вправдї не так знаменито, як математична ґеоґрафія в тім самім підручнику, є все таки і фізична ґеоґрафія ту дуже добре, а іменнож оригінально оброблена. Вплив Richthofen'a, Supan'a і Penck'a особливо в морфольоґічній части є виразний, але зовсїм самостійний погляд на цїлість предмету надає творови Ваґнера дуже велику вартість. Хоч оно до річи не належить, додам, що перший том Lehrbuch'a, обнимаючий загальну ґеоґрафію, є дїйсно епохальним явищем і буде з певностию на цїлі десятки лїт підставою ґеоґрафічних студий. Головно цїкавий є методитичний вступ, а вже по вік остане характерною для розвитку науки ґеоґрафії (особливож єї фізичної части) величезна ріжниця, яка заходить між теперішним обробленєм Ваґнера загальної ґеоґрафії (1900) а такимже обробленєм в послїднїм виданю (1883) сего підручника, де ще попри імя Ваґнера фіґурувало імя Ґутого. Ту наглядно видимо, як змінивсь цїлий характер ґеоґрафічної дисциплїни в нецїлих 20-ох лїтах, як скоро она поступила від сухої топоґрафічної систематики до ґенетики.

Другою дуже знаменною для поступу ґеоґрафії фізичної книжкою є Günther: Handbuch der Geophysik II. Aufl. Stuttgart, Enke. I. Bd. 1897, II. Bd. 1899.

Се в своїм роді без сумнїву chef d'oeuvre і підручник конечний для того, що хоче в ґеофізиці працювати. В історичнім вступі автор дуже уміло розграничає ґеофізику від споріднених з нею наук: фізики, астрономії та ґеольоґії, призначаючи їй землю на поле дїланя. Перша книга обрабляє космічне становиско землї, друга єї величину, вид, ґустоту і рухи в просторі та картоґрафію; трета внутрішне тепло землї, вулканїзм і землетрясеня; четверта маґнетні за електричні явища; пята атмосферольоґію: шеста океаноґрафію; сема відносини моря і суші між собою, послїдна морфольоґію земской кори. Очитане автора велике, отже звід лїтератури величезний. І ту порівнане другого видання сеї книжки з першим (1884/5) як не мож лїпше поучує, як сильно в послїдних лїтах зросла фізична ґеоґрафія і як розширивсь єї обсяг.

З иньших книжок, що обнимають цїлість або більші уступи з фізичної ґеоґрафії, треба згадати про другі видання знаменитих підручників французского ґеольоґа Lapparent'a. Єго Traité de géologie (тепер II. ed. Paris Masson 1899, 1900) визначуєсь тим, що на кождім кроцї узглядняє потреби ґеоґрафа і їх нераз дуже уміло заспокоює. Leçons de géographie physique Paris, Masson 1898. того самого автора

збогатились в другім виданю новими роздїлами: про море і (дуже важним) про кляснфікацию гір.

Занотувати належить також друге видане фізичної ґеольоґії Мушкетова (Ст. Петербург, Єрлих, 1899), що важна з огляду на росийскі і азийскі відносини там представлені (часто на підставі автопсиї).

В звісній збірцї Göschen'a вийшла коротенька книжочка Günther'a Physische Geographie (Leipzig, Göschen 1899), що в 11 роздїлах подає елементи нашої науки в досить приступний спосіб.

В Анґлії виходить від 1899 р. дуже широко закроєний атляс до фізичної ґеоґрафії: Bartholomew's Physical Atlas. Вийшов дотепер лиш IV. том: Atlas of Meteorology, Westminster, Constable 1899, 35 карт. Однак, хоч публїкация ся дуже коштовна і на позір дуже поважна, то не може бути навіть для р. 1899 вважана останним словом науки, бо не узглядняє дуже многих і важних новійших метеорольоґічних праць. Проте і карти сего атлясу в многих місцях остають поза наукою.

В серпни 1899 відбувсь в Берлинї VII-ий міжнародний конґрес ґеоґрафів. Ту обмежусь лиш згадкою, що занимавсь він дуже многими квестиями фізичної ґеоґрафії. Про головнїйші реферати сего конґресу подам звістку на иньшім місци Збірника.

I. Метеорольоґія і клїматольоґія*)

Склад і обсяг атмосфери.

Відкрите незнаного дотепер ґазу арґону, що входить попри кисень і азот в склад нашої атмосфери, навело учених на думку, чи нема в нїй ще иньших незнаних дотепер ґазових складників. І дїйсно вже в 1898 р. удало ся Ramsay'еви і Travers'ови відкрити три нові ґази, що входять в склад воздуха: Криптон, Неон і Метарґон[1]). Відкрите послїдувало дорогою спектроскопічною. В дальших розслїдах показало ся, що метарґон властиво не істнує, натомість відкрили згадані учені ще один ґаз, а се ксенон. Всї ті ґази є одно-

---

*) [Пор. Meinardus, Bericht über die Fortschritte der geographischen Meteorologie. Geographisches Jahrbuch XXIV. 1901. I. H.].

[1]) Zeitschrift für phys. Chemie XXXVI. 564.

атомні. Криптон і ксенон відзначують ся значним атомним тягаром (81·6 згл. 128·0, Neon має лиш 20·0). Скількість їх всїх разом в воздусї є так мала, як скількість золота в морскій водї, не може отже практично в рахунок входити[1]). Киснем воздуха занимавсь Leduc і найшов, що скількість єго в атмосферї в ріжних підсонях і висотах колибаєть ся лиш між 23·11 а 23.23% тягару[2]). Дослїди над тимсамим ґазом робив Stoney і порівнуючи скількість кисня в атмосферї зі скількостию єго в земскій корі дійшов до результату, що на $2^1/_2$ m. груба верства земскої кори має тількож само кисня, що цїла атмосфера[3]). Stoney думає, що водень і гель в наслїдок рухливости своїх частинок втїкли з земскої атмосфери, але се є мабудь неправдиве, бо істноване геля є доказане, а сьвіжо найшов Gautier, що на 10.000 частий сухого воздуха при 0° э всегда $1^1/_2$ частий водня[4]).

Скількість квасу вугляного в воздусї означив St. Maurice de Thierry на двох стацыях в висотї 1080 m. і 3050 m. на склонах Монбляна і рівночасно в Парижи. Вислїд був: скількість вугляного квасу меньшає ідь горі, але дуже слабо[5]).

Levy і Henriet виказали, що по при квас вугляний є в воздусї ще і иньші ґази заключаючі вуголь пр. окис угля (CO)[6])

Gautier думає, що всї ті ґази заключаючі вуголь походять з процесів хемічних в ростиннім і зьвірячім сьвітї, бо аналїза морского воздуха нї слїду їх не показала[7]).

Тойсам учений виказав також, що в воздусї істнує йод, що правда не яко ґаз, а в видї сталім. Походить він мабуть з нисших орґанїзмів живучих в мори, бо морский воздух показав єго найбільшу скількість (на 1000 l — 0·167 mg). Воздух міський виказав єго 13 разів меньше, подібнож воздух гірский і лїсовий, з висотою зростає і скількість йоду, бо орґанічний пил, що єго заключає, іде горою[8]). Морский воздух заключає також сіль кухонну (0·022 g. на 1 m^3)[9]).

---

[1]) Пор. Proceedings of Roy. Soc. LXIII. 405. LXVII. 329. Comptes Rendus CXXVI. 1610. Nature LVIII. 127. Annuaire pour l'an 1900 publié par le Bureau des Longitudes. 1899 ст. 15.

[2]) Comptes Rendus CXXVI. 413.

[3]) Philosophical Magazine XLVII. 565. Met. Zeitschrift 1899. 371.

[4]) Comptes Rendus CXXVII. 693.

[5]) Comptes Rendus CXXIX. 315.

[6]) Comptes Rendus CXXIII. 125. CXXVI. 1651. CXXVII. 353

[7]) Comptes Rendus CXXXI. 13 і 86.

[8]) Comptes Rendus CXXIX. 9.

[9]) Ibidem CXXVIII. 715.

На підставі 20-лїтних обсерваций в Парижи сконстатував Albert Levy, що скількість озону виносить пересїчно 1·65 mg. на 100 m^3. Maximum припадає в червни (2·03), minimum в падолистї (1·34)[1]).

Паданями пороху пассатового занимаєть ся від певного часу нїмецка морска обсерватория[2]). В лїтах 1894 і 1895 їх майже не було, за се дуже часті були они в 1898 р.[3]).

Ту можнаб також примістити досліди над блукаючими огниками Müller'a[4]). В який спосіб они повстають, дотепер властиво незвісно. Є се фосфоризуючий воздух, але для чого він фосфоризує, не знаєм, чи в наслїдок примішки фосфорного водня, чи ньших ґазів.

Причинок до пізнаня висоти атмосфери подає Denning. Він находить, що лиш в дуже рідких случах запалюють ся метеорити висше чим в 240 km. від поверхнї землї[5]).

Промінюване.

Промінюване сонця є так трудне до близшого пізнаня, що мимо дуже довгих старань не удалось і до нинї докладно означити т. з. сталої сонїчної. Який є стан дослїдів над сею справою, найхарактернїйше показує конкурс, що єго розписала берлїньска академія наук тепер вже по раз другий. Задачию конкурсовою є: означити сталу сонїчну так докладно, щоби в єї обсервациях протягом року видний був вплив ріжного в афелї і перігелї віддаленя землї від сонця.

Актінометричні досліди на горі Monte Rosa навели Ricco на гадку, що з одної стацыї не можна докладно означити сонїчної сталої, а треба єї означити на кількох стацыях мало від себе віддалених в поземім напрямі, а значно в прямовіснім. На горі Roccia-melone над долиною Susa вибрав він отже 4 стацыї в висотах 501 m, 1722 m, 2834 m і 3537 m. Від 2—6 вересня 1898 роблено обсервациї актінометром Violle'a і Ricco найшов з них, що стала

---

[1]) Ciel et Terre XIX. 291.

[2]) Пор. Segelhandbuch für den Nordatlantischen Ocean. Hamburg 1899 133 sqls.

[3]) Annalen der Hydrographie XXVI. 1898. 246.

[4]) Gaea 1900. 541.

[5]) Ciel et Terre XIX. 158 д.

сонїчна виносить 2·5 кальорий на 1 cm^2 і мінуту[1]). Дещо пізнїйша дискусия иньших вислїдів і формул не змінила переконаня Ricco'a і він узнав за найлїпшу вартість на сталу сонїчну 2·5—2·6 кальорий[2]). Є се вартість без сумніву за мала. Pernter з обсерваций ріжних ученых на Монблянї і Monte Rosa приняв за сонїчву сталу 4 кальорий[3]).

Дотична розвідка Schreiber'a заключає лиш формули[4]); так само розвідка Steiner'a[5]).

Peucker вказує на вагу тїни гір на клїматичні, біольоґічні і гиґієнїчні відносини місцевостий, положених в долинах. Именно ходить ту о се, що гори закриваючи части небозводу зменьшають час сонїчного проміньованя і его скількість. Для кількох місцевостий в Альпах і в Нїмеччинї P. обчисляє сей вплив[6]).

Ясність і поляризацию сьвітла неба в зенїтї обсервував 1894 1896 Jensen фотометром Вебера. Показало ся, що нормальний дневний хід поляризациї в зенїтї є функциєю висоти сонця. Minimum припадає на час кульмінациї сонця, maximum тодї, коли оно стоїть о 2° нисше овиду. Коло полудня і пізно пополудни хід поляризациї заколочуєсь. В лїтї поляризация є зглядно мала, в зимі зглядно велика. Дим, мрака і хмари дуже шкодять нормальному еї ходови[7]).

Абсорбцию зьвіздяного сьвітла розслїджували Müller і Kempf рівночасно в Катанїї і на Етнї. Дослїди не довели до рішучого результату, бо воздух в Катанїї був наслїдком довгої посухи і множества пороху так непрозорий, що зьвізди раз о 0·24, другий раз аж о 0·53 кляси показувались слабші, чим на Етнї[8]). Проміньоване сонця підчас цїлковитого затьміня 1898 I. 22. розслїдив на підставі 154 стацій в Індиях Eliot і найшов, що так натуга проміньованя, як і температура слїдували досить докладно за змінами величини сонїчного кружка[9]).

[1]) Memorie della società degli spettroscopisti italiani 1898. XXVII. 10

[2]) Memorie della Reale Accademia di Torino 1898. Ser. II. XLVII. 319.

[3]) Meteorologische Zeitschrift 1896. 105 д.

[4]) Abhandlungen des Sächsichen met Instituts. 1899. H. 4.

[5]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 193 д.

[6]) Verhandlungen des XII. deutschen Geographentages in Jena. 225 д.

[7]) Beiträge zur Photometrie des Himmels. Schriften des natur. Vereins f. Schleswig.-Holstein XI. 1899. H. 2. 281 д.

[8]) Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam XI. Nr. 38. 211.

[9]) Indian Meteorological Memoire XI. 1898. 1 д.

Цїкаві дослїди про абсорбцию сонїчного тепла в атмосфері робив Angström на трох стациях розміщених на ріжних висотах вулькана Pico de Teyde. Показало ся, що загальна сила проміньованя росте підчас дня від висоти 0—3700 m. близько о 30%, а прямовісна сила проміньованя о 22%. Той приріст проміньованя з ростучою висотою є тим скорший, чим більша зенїтальна віддаль сонця. Сочинник прозорости показавсь значним[1]). Müller[2]) найшов, що натуга проміньованя сонця є найменьша в липни. Кривина вказувалаб на minimum в грудни або сїчни. Другостепенного maximum в вересни не сконтатовано.

Заки покину справу проміньованя, мушу ще згадати теорию Svante Arrhenius'a. Він на підставі обсерваций проміньованя старає ся вияснити вікові клїматичні періоди[3]). Він обчисляє, що зменьшене скількости вугляного квасу о $^2/_3$, викликалоб під +55° ширини обниженє температури о 3°, під +20° о 4·1°. Побільшене скількости сего ґазу в атмосфері викликалоб підвисшене температури о 3·3°, зглядно 4·4° і ослабленє денних і річних колибань температури.

Температура воздуха.

а) Проміньованє, абсорбция і роздїл тепла.

Абсорбцию сонїчного тепла в атмосфері розслїджував математично Schreiber і обрахував для ріжних ґеоґрафічних ширин теплоту, яку дістають, коли приймем за сонїчну сталу 3 кальориї, а за вартість абсорбцийну 0·4. Висліди одержані є зовсїм відмінні від результатів Langley'a, Violle'a[4]) та иньших.

Liznar обчислив на підставі права проміньованя Stefan'a температури рівнобіжників морских і сухопутних[5]), котрі згоджують ся дуже близько з дїйсно обсервованими, а инакше обчисленими температурами.

Про роздїл температури в атмосфері уложив Köppen зовсїм оригінальні тези. Поземий роздїл температури робить Köppen зави-

[1]) Nova acta regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. 1900 Серия II.

[2]) Aktinometerbeobachtungen im Observatorium zu Katharinenburg, Извѣстія императорской Академіи наук. XI. 1899. 61.

[3]) Ciel et Terre XX. 389 g. 411 д

[4]) Abhandlungen des kgl. sächs. meteorol. Institutes 1899. H. 4.

[5]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 36 д.

симим від 1) ріжниць в промінюваню 2) термічних ріжниць моря і суші і 3) від вітрів та струй морских. З сего виводить він 9 головних засад: 1) Середні температури меньшають разом з сумою промінюваня від рівника до бігунів. 2) Ріжниці температурні пір року більшають в тім самім напрямі. 3) Захмарене в день, в літі і в низьких ширинах знижає, в ночи, в зимі і в високих ширинах підвисшає температуру. 4) Середні річні температури від рівника ко бігунам меньшають скорше на суші, чим на мори. 5) Ріжниці температурні пір року і дня є більші на суші чим на мори. 6) Вода покрита грубим ледом поводить ся як суша, а суша покрита снїгом показує свойства суші ексцессивно. 7) Вітри, наколи не віють постійно в одну сторону, вирівнують ріжниці температури, слиж віють постійно, то пересувають температурні відносини в своїм напрямі. 8) Таксамо пересувають морскі струї температурні відносини в тім напрямі, в котрім течуть. 9) Наколи гори стримують вітри, кліматдістає льокальні властивости.

До прямовісного розділу температури подає Köppen чотири тези: 1) Температура сухого воздуха обнижає ся о 10^0 на 1 km. зміни висоти, бо кождий ґаз остуджуєсь при меньшаню тиску. 2) Если воздух є вохкий, то при остудженю повстають хмари, теплота при тім увільнена зменьшає при дальшім взношеню остудженє о половину. Слиж впаде дощ, то він приносить з собою низшу температуру з гори, а сам паруючи єще єї обнижає. 3) Рухи прямовісні воздуха є досить рідкі — не ма їх, колн воздух в певній висотї є мало що зимнїйший або і теплїйший як на долинї. Тодї прямовісна зміна температури є не 10^0 а лиш $4—5^0$ на 1 km. 4) Абсолютна висота температури є означена тою температурою, при котрій на поверхнї суші або моря є рівновага між одержаним а виділеним теплом[1]). З нових ґрафічних представлень розділу температури згадати треба про новий „Physical Atlas“ Bartholomew'a і Herbertson'a, (Westminster 1899. Constable), котрий однак оригінальних карт не подає.

б) Температуру над ріжними родами ґрунту розслїджував Jaubert і виказав, що температура є висша над деревяним бруком або бітумінїчним ґрунтом, чим над муравою. Над камінним ґрунтом температурне колибанє є ві всїх порах року меньше[2]). Mellish виказав, що в легкім ґрунтї в глубинї 1 стопи є температура о 1^0 F

[1]) Köppen Klimalehre. Leipzig 1899. Meteorologische Zeitschrift 1900. 183 д.
[2]) Comptes Rendus CXXVI. 1405 д.

висша чим температура воздуха, в тяжкім же ґрунтї лиш о $0{\cdot}2^0$, що зависить мабуть від інсоляциї. Max. ріжниці випадає в жовтни, min. в марті[1]).

в) Вплив лїса на температуру воздуха і землї не перестає цїкавити учених, именно, що ся квестия до тепер не рішена. Schubert оголосив дуже цїкаву студию про температуру ґрунту і воздуха в лїсах[2]). В зимі є ґрунт лїсовий дещо теплїйший, як поза лїсом, в літї холоднїйший, середно також дещо холоднїйший. Подібно, лиш меньше виразно, поводить ся температура воздуха.

Не меньше знаменна є друга розвідка про сю справу, що впрост дотичить питаня впливу лїса на клїмат: Schreiber. die Einwirkung des Waldes auf Klima und Witterung. Dresden, Schönfeld 1899. S. розслїджував всї метеорольоґічні стациї Саксонії і прийшов до висліду, що ріжниці в клїматї між тими стациями походять лиш з ріжної висоти понад поверхнею моря. Анї ґеоґрафічна ширина та довжина, анї льокальне положенє не мають великого впливу. Лїс також впливає дуже мало на температуру, бо цїлком лїсиста околиця є річно лиш о $0{\cdot}4—0{\cdot}8^0$ холоднїйша як околиця цїлком позбавлена лїса. Ще меньший, ба навіть дуже сумнівний, є вплив лїса на вохкість і висоту опарів.

г) Температура снїговоï оболоки була предметом дослїдів В. Саткого в Тернополи (1896—1898). Взагалї є поверхня снїгова о $0{\cdot}4^0$ холоднїйша чим воздух, в 5 cm глубини температура є о $1{\cdot}9^0$, в 10 cm. о $2{\cdot}3^0$ висша чим на поверхни[3]).

д) Температура в містах є завсїгди висша чим в околици. Hann сконстатував в Ґрацу, що температура міста є середно висша о $1{\cdot}4^0$. Max. $1{\cdot}7^0$ припало в жовтни, min. $1{\cdot}0^0$ в цьвітни. Також колибаня температури є значно меньші в містї[4]).

е) Неперіодичні колибаня температури.

Про наглі приморозки і способи, щоби їх шкідливий вплив на веґетацию зменьшити, говорить Trabert на підставі студиї Hammon'a[5]). Головні средства є: зменьшенє промінюваня штучними заслонами, підвисшенє точки топленя через паленє гною та мокрої соломи,

[1]) Quarterly Journal of R. Met. Society. XXV. 1899. 238 дд.
[2]) Über den jährlichen Gang der Luft und Bodentemperatur im Freien und in Waldungen etc. Berlin 1900.
[3]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 97 д.
[4]) Sitzungsberichte der Wiener Academie. Math. nat. Cl. CVII. II a. 167 д.
[5]) Meteorolog. Zeitschrift 1899. 529 д.

доставлюване тепла воздухови через малі огники, відпроваджуване зимного воздуха з гори в долину через аспірацию викликану паленем огня в долинах.

Hazen розслїджував хід температури і вохкости перед приходом наглого зимна. Він найшов, що зглядна вохкість тоді сильно зменьшаєсь і осягає свій найнизший степень на пару годин, заки температура стане опадати. Чим низше спаде вохкість, тим низше спаде температура[1]).

Наглі і великі горяча в Австралії 1896 I. обговорює Todd. Їх причиною були знижки барометричні, що допроваджували до полудневої Австралії північні жаркі вітри. По переході знижки температура нагло опала. (Melbourne 1896 I. 23 : V^a 14·3°, IV^p 42·2°, V^p 26°)[2]).

Справа маєвих приморозків і т. з. зимних сьвятих займала знов многих ученых, именно, що повстаня тих приморозків дотепер не вияснено. Bezold, на підставі дослїдів Müttrich'a, сконстатував уже на певно, що дни 11—13 мая є завсїгди під зглядом температури анормально холодні[3]). Hennig пробує вияснити сю справу на підставі синоптичних карт. Характерне є для маєвих приморозків те, що сучасно на западї або північнім западї виступає високе тиснене. Спад температури слїдує по переході знижки, коли прийде антіцикльона[4]).

Зовсїм нову дорогу до вияснення сего явища подав найновійший час. Постановлено розслїджувати сей проблем (враз з многими иньшими) через рівночасне пускане в ріжних сторонах Европи бальонів з інструментами, що самі реєструють. Таке міжнародне пущене бальонів відбуло ся 1897. V. 13. і переконало всїх, що бодай в тім случаю обниженє температури в западній Европі походило з того, що 10 km. груба струя полярного воздуха дісталась аж туда. Над східною Европою віяла струя рівникового теплого воздуха. Hergesell думає отже, що маєві приморозки повстають наслїдком великих воздушних струй, що ідуть від бігуна[5]).

в) Прямовісний розділ температури є тепер дуже актуальним предметом розслїдів. Бальони і змії пускані в ріжних сторонах сьвіта показали, що відносини в горішних районах атмосфери є

[1]) Monthly Weather Review. XXVI. 1899. 291 д.
[2]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 518 дд.
[3]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 114 дд.
[4]) Wetter XV. 1898. 85 g. 105 g. 131 g. 145 д.
[5]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 15 g. Petermanns Mittheilungen 1900. 111 д.

нам майже незнані а дуже цїкаві. Обсервациї на дуже високо положених стациях також недавно лиш розпочато так, що цїла та вість метеорольогії є дуже молоденька. Тим не меньше єї розвиток поступає дуже скоро і каже надіятись щораз то красших результатів[1]).

Температура високих гір розслїджує ся в Европі головно в Альпах, де є кілька дуже високо положених стаций.

В долїшно австрийских Альпах (Raxalpe, Schneeberg) розслїджував Trabert меньшанє температури з висотою. Він найшов передовсїм велику ріжницю сторони під і за вітром. Між висотами 200 а 800 є сторона за вітром середно в роцї о 1° теплїйша — ріжниця росте з висотою і доходить именно в лїтї до 2°. В загалї малїє температура в найнизших реґіонах в лїтї дуже скоро, в зимі же дуже поволи. Чим висше йдем — тим скорше приходить лїтне maximum і зимове minimum[2]).

Температуру верхів Sonnblick (3106 m) і Obir (2140 m) обробив Hann. Замітна є ту аномалія денного ходу температури з другорядним maximum о 4^a а minima-ми о 11^p і 7^a. Дати річного ходу температури є: Obir рік —0·2°, сїчень —7·4°, липень +8·3°; Sonnblick рік —6·3°, лютий —12·9°, липень 1·2°. Середне убуване теплоти з висотою є середно 0·60° на 100 m., в грудни 0·51°, в серпни 0·69°. Цїкава є температурна ріжниця між Obir-ом а Целївцем. В лїтї є ту ріжниці 0·65° на 100 m., в зимі 0·1° на 100 m.[3]).

Прямовісний роздїл температури в середньонїмецких горах опрацював Kremser[4]). Температура малїє з висотою в тих горах (Гарц, Карконоші, Erzgebirge, Thüringerwald) значно скорше по полудневій чим по північній їх сторонї, именнож на весну. Середний річний убуток теператури є 0·57°.

На шпилю штрассбурской вежі (136 m) виносить денна амплїтуда температури 4·8°, на долинї 7°. Maximum приходить на горі $3^h\ 50^m_p$, на долї $2{\cdot}48^m_p$. Minimum $6^h\ 5^m_a$, зглядно $4^h\ 50^m_a$.

Результати сїмох міжнародних бальонових злетів 1897—1899, котрі дали 32 температурні ряди, опрацював Hergesell. Отсе его

[1]) Загальну орієнтацию що до тих розслїдів подає книжка Fonvielle: Les ballons sondes etc. Paris. Gauthier-Villars 1898.
[2]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 249 д.
[3]) Anzeiger der k. k. Akademie der Wisenschaften 1898. XIII.
[4]) Klimatische Verhältnisse des Elbstromgebietes, Berlin 1899. 26 д. SA. з Elbstromwerk.
[5]) Petermanns Mittheilungen 1900. 28 д.

висліди: 1) Денна кривина температури зі зростаючою висотою скоро пласне. Денні колибаня температури є вже в висоті 800 m. навіть в погідних днях ледви 3—4°. 2) Горішні верстви атмосфери не підлягають так сильному промінюванню як долішні, длятого в ночи температура в міру підношеня в гору росте. Атмосфера виказує ві всіх висотах аж до 10000 m. колибаня температури, котрі доходять або переходять 40°. Місцеві ріжниці в температурі є також дуже значні і в великих висотах навіть при малім віддаленю (100 km.) доходять до 30—40°. 4) Маєві приморозки повстають мабуть в наслідок великих рухів в атмосфері, що спроваджують обширні струї полярного походженя. Температура вільної атмосфери буде середно 8°4° 0° —7° —13° —18° —26° – 33° —40 —48° —54°

для вис. (в km.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10[1])

Ту згадати також належить праці: о убутку температури з висотою Assmann'a[2]), що займає ся его колибанем; і о положеню ізотерми 0° Illes'a v. Edvi jr.[3])

Teisserenc de Bort випускав від р. 1898 в Trappes много необсаджених бальоників, з тих декотрі дійшли до 14000 m. висоти. Висліди: Температура ріжних висот показує в протягу року значні колибаня, о яких дотеперішні бальонові злети не давали понятя. Пр. ізотерма —25° мала протягом 16 місяців колибаня, що доходили до 5000 m., ізотерма —50° колибалась о 4000 m. З сего показуєсь, що аж до висоти 10000 m. є тенденция до річного колибаня температури. Змінчивість теплоти не убуває, як дотепер думано, з висотою. Противно аж до найзначнійших висот повно ту коротких і довгих колибань[4]).

З тих обсерваций Teiserenc'a пробував обчислити Abbe середні відносини температури в атмосфері.

Они продставляють ся так:

Висоти	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 km.
Температура	9	5	0	—4	—9	—16	—21	—29	—38	—42	—51 °C
Убуток єї на 1 km.	4	5	4	5	7	5	8	9	4	9	°C[5]).

В Америці роблять досліди над горішними реґіонами атмосфери при помочи зміїв, що несуть в воздухи термо-і бароґрафи. Frankenfield опрацював розультати таких помічань на 17 стациях Сполучених держав. Прямовісний убуток температури після Abbe був на перших 1000 „feet" 3·7°, на слідуючих тисячках 3°, 2·8°, 3° і 5·6° F. Коли небо було захмарене, убуток тепла був значно менший, часом навіть підвисшалась температура[1])

Сей убуток температури з висотою є обчислений для літних місяців. (V—X). Середний убуток температури в році є 5° F. на 1000 feet. Ґрадієнт був найбільший до 1000 feet =7·4° F. Відси аж до 5000 f. зменьшавсь постійно аж до 3·8°, звідси в гору знов почав ся убуток збільшати[2]).

Убуток денного колибаня температури з висотою розслідував Clayton в Blue Hill Observatory при помочи зміїв. Коли в висоті 0 m. колибанє денне виносило 11·6°, то в висоті 500 m. оно спало до 2·4°, а в висоті 1000 m. до 0·2°.[3])

Після анальоґічних дослідів Hergesella для Штрасбурґа було колибанє температури на поверхні землї в ночи 4·6°, на висоті 800 m. (ballon captif) лиш 0·7°; в день 12·8°, зглядно 3·9°. Minimum температури було на долї між IV^h а V_a^h; в горіж межи I^h а II_a^h[4]).

Дуже важні замітки про зміни прямовісного ґрадієнта температури обнимає нова праця Bezold'a „die klimatologische Bedeutung der Lehre von den auf-und absteigenden Luftströmen"[5]) Она належить однак радше до теоретичної чим до геоґрафічної метеорольоґії.

Бібліотека

Тиснене воздуха.

Роздїл тисненя представлений в новім Atlas of Meteorology подібно як температура на підставі застарілих дещо праць Buchan'a.

Тиснене воздуха на 20 великобританьских стациях опрацювали всесторонно і дуже методично Pearson і Lee[6]).

Найвисше дотепер сконстатоване тиснене воздуха було 1900 I. 23. в Барнаулї в томскій ґубернії. Барометр показував о 7 годинї рано 789·2 mm, т. є. спровадивши сю вартість до поземy моря 808.7 mm. В Іркутску було вже в 1896 р. одно maximum лиш

---

[1]) Petermanns Mitheilungen 46. 1900. 97 д. Meteorol. Zeitschrift 1900. 1 дд

[2]) Meteorol. Zeitschrift 1899. 266 д.

[3]) Ibidem 157 д.

[4]) Comptes Rendus et CXXIX. 417 д.

[5]) Monthly Weather Review XXVII. 1899. 415 д.

[1]) U. S Weather Bureau Bulletin. 1899. 1 д. пор. Cleveland Abbe Monthly Weather Review XXVII. 1899. 413 д.

[2]) Nature 1900. LXIII. 199 д.

[3]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 25 д.

[4]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 49 д.

[5]) Sitzungsberichte der kgl. preuss. Akademie der Wisensschaften. Berlin1 900.

[6]) Philosophical Transactions Vol. 190. 1898. 423 дд.

дуже мало що меньше, бо 808·4 mm. Повідомляючи о тім подає Воейков також найвисші тиснення без редукції на поземъ моря. В депресиї Люкчун в середній Азиї одержано 796 mm. Для озера Боджанте-кул, що лежить там —130 m. низше поверхні моря, випадало-б яко maximum 812 mm, тількож для поземy Мертвого моря (—384 m)[1]).

В своїх розслїдах над температурою вільної атмосфери зайнявсь Hergesell також відносинами тиснення воздуха до роздїлу температури в значних висотах. Великі температурні ріжниці, що виступають в тих горішних реґіонах, викликують також великі ріжниці в тисненю, так що наслїдок динамічних впливів є в порівнаню з наслїдком температурних впливів мінїмальний. Злети бальонів доказали, що роздїл воздушного тиснення в поземі моря є зовсїм льокальним, другорядним явищем, що викликане великими температурними заколотами в горі[2]).

Про денний період *колибаня воздушного тиснення* оголосив обширну розвідку Hann[3]). Він розріжняє цїлоденне або терестричне колибане, т. з. південну осциляцию і трикратну денну осциляцию. Цїлоденне колибане підлягає великим місцевим і часовим заколотам, є сильнїйше в погідні дни, чим в хмарні, зависить мабуть від денного колибаня теплоти і має на мори меньшу амплїтуду, чим на суші. Амплїтуда меньшає, коли ширина ґеоґрафічна росте. Південна осциляция не стоїть під впливом погоди і є в амплїтудї та фазовім часї така як космічні явища, т. є., що єї зависимість від пори року і ґеоґрафічної ширини є дуже правильна. Причиною сеї осциляциї є щоденно повторюючі ся колибаня температури. Головні maxima припадають на еквінокциї, головне minimum на червень і сїчень. Є ще трикратна денна осциляция, котрої амплїтуда меньшає разом з ґеоґрафічною шириною. Про иньші поменьші праці над денними колибанями воздушного тиснення дивн Meteorologische Zeitschrift 1898 і 1899.

Довші чим денні, а коротші чим річні колибаня воздушного тиснення вже яід давна замічено і приписувано їх впливам місяця.

Börnstein зібрав значний матеріял обсерваційний з великого числа стацій, щоби найти звязь між тисненєм воздуха а деклїнациєю

[1]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 207 д.
[2]) Petermanns Mittheilungen 1900. 109 д.
[3]) Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien C. II. IIa. 1898. 63—159.

місяця. З бароґрамів берлиньских, маґдебурских і почдамских показало ся, що протягом сидеричного місяця підлягає тиснене воздуха одноразовому колибаню, котрого maximum припадає на 12-ий, а minimum на 23-ий день по північнім lunistitium. Не так виразне є згадане колибане в Відни, ще слабше в Upsala, San Fernando, і Port au Prince; зовсїм нема єго в Батавії. Колибане се є виразнїйше в зимі чим в лїтї і виступало властиво лиш в р. 1884—1898 не є отже постійним явищем. Подібне колибане відкрив Börnstein і для синодичного місяця[1]).

Вітри.

Hildebrandsson і Teisserenc de Bort видали книжку під т. Les bases de la meteorologie dynamique etc., де подають історичний, дуже основний огляд підстав нинїшної метеорольоґії — отже давнїйших розслїдів над загальною циркуляциєю атмосфери, пізнїйших над бурями тропічними і нашими. Дальше слїдують уступи про метеорольоґічну орґанїзацию межинародну, про дальші роботи над цикльонами і т. д.[2]).

Теориї рухів атмосфери не належать властиво до ґеоґрафії, тому вичислю лиш найважнїйші праці. Schreiber подає гидродинамічні рівнаня ріжничкові і термодинамічні формули з дотичними обсерваційними вислїдами[3]). A. Schmidt оброблює умови рівноваги тепла в атмосфері після кінетичної теориї ґазів[4]). Одна з головнїйших засад Schmidt'a є, що при підносячих ся струях воздуха головну ролю відграває праця підношеня. Bezold доказує знов, що найважнїйша ту є праця експанзиї[5]). Bjerknes впроваджує новий прінціп в теоретичну метеорольоґію, беручи в рахунок не тільки вже ріжниці тиснення, але ріжниці густоти[6]).

Загальна атмосферна циркуляция. Перегляд єї умов робить Köppen подаючи кілька нових гадок[7]). Davis занимає ся причинами загальної циркуляциї, а головно впливом воздушних струй на ти-

[1]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 420.
[2]) Paris, Gauthier-Villars 1898—1900.
[3]) Abhandlungen des kgl. sächs. Meteorol. Instituts III. 1898. 24.
[4]) Beiträge zur Geophysik. IV. 1899.
[5]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 441 д.
[6]) Svenska Weten. Akad. Handl XXXI. Nr. 4. 35 д.
[7]) Annalen der Hydrographie XXVII. 1899. 563 д.

снене[1]). Mägis представляє натугу загальної циркуляції воздуха яко функцию спадку температури від рівника до бігуна[2]).

Циклонічні і антициклонічні рухи атмосфери. Köppen розслїджує з теоретичного становища відносини припливу і відпливу воздуха в цикльонах і антицикльонах[3]).

Таксамо переважно теоретична є студія Polis'a про воздушні струї в цикльонах і антицикльонах на підставі 10-лїтних синоптичних табель. Причини пересуваня цикльонів є переважно механічні. Напрям посуваня ся спадає з найбільшим кутом відклоненя, котрий звичайно лежить висше чим 1000 m[4]).

Роздїл і колибанє температури в цикльонах розслїджував Dechevrens. Температура в цикльонах загалом підносить ся, в антицикльонах опадає. Високу температуру цикльонів треба приписати збіжности воздушних струй, що зійшовшись в центрі цикльони, підносять ся в гору; низьку температуру антіцикльонів тому, що воздух в їх центрі уступає і переходить в розбіжні струї[5]).

Van Bebber доказує, що погода в середній Европі є зависима від положеня барометричних максімів, причім розріжняє 5 головних типів[6]).

Kassner виказує для европейских стацій велике захмарене підчас цикльони, мале підчас антіцикльони. Азийскі стациї пр. Тифліс ведуть ся відмінно[7]).

Erk сконстантував, що поздовж підніжа баварских Альп лежить шлях малих знижок, що мають значний вплив на фени і бурі[8]).

На підставі оберваций зроблених на бальонах в Росиї вивів Поморцев важні заключеня про прямовісну зміну скорости і напряму вітрів в цикльонах і антіцикльонах. В антіцикльонах скорість вітру росте постійно від поверхні землї в гору. В цикльонах також росте з початку скоро, потім зменьшаєсь дужє в реґіонах хмар „cumuli“ 500—1500 m., потім же знов росте. Зміна напряму вітрів

[1]) Quarterly Journal of Meteorological Society XXV. 1890. 160 д. Wetter XVI. 1899. 201 д.

[2]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 157 д.

[3]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 161 д.

[4]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 337 д.

[5]) Memorie della Academia Pontificia dei Nuovi Lincei 1898. 14. На ті елюкубрациї впрочім трудно згодитись; диви Meteorologische Zeitschrift 1898. (59).

[6]) Archiv der deutschen Seewarte XXII. 1899. 26.

[7]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 242 д.

[8]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 173 д.

є також від долу найбільша, висше она зменьшає ся іменно в цикльонах і є звернена на право. Рух хмар „cumulus“ і напрям ізобари на земли є завсїгди в тривкій звязи. Визначна звязь є також між скоростию руху хмар пірястих (cirrus) а повстанєм і напрямом цикльонів. Чим скорше посувають ся хмари пірясті по небі, начинає барометр зараз опадати, так що їх скорий рух є признаком наближеня ся цикльони[1]).

Важні причинки до загального пізнаня цикльонів дали згадані вже дослїди, що роблять їх в Америцї при помочи паперових зміїв осмотрених самопишучими апаратами, що летять нераз до дуже значних висот (max. 3679 m.). Clayton вивів з тих дослїдів, що майже всї властивости цикльонів дадуть ся вивести з температурних відносин ріжних воздушних верств.[2]).

Про тропікальні западно індийскі *цикльони* з. з. Hurrican'и пише найлучший доселї їх знаток Vines, що в них є напрями вітрів в ріжних висотах дуже ріжні, в низших верствах майже рівнобіжні до ізобар, а в висших зовсїм розбіжні. Дальше розслїджує V. положенє вершка параболїчних доріг цикльонів. Оно пересуває ся, йдучи від червня до серпня, коли є maximum hurrican'ів, щораз дальше на північ (+18° ....33° ширини), а потім знов вертає ся на південь. Цїкавий є викритий V-ом закон, що hurrican'и ходять тими самими дорогами, що хмари cirrus, їх параболїчні дороги є отже наслїдком горішних воздушних струй[3]).

Про східноазийскі гураґани тз. *тайфуни* оголосив Doberck книжку: The Lawss of Storms. Hongkong 1898. Тайфуни повстають з слабих знижок, що появляють ся над Філїпінами і полудневокитайским морем. Першим їх признаком є легкі хмарки cirrus, що йдуть від сходу на північ. Красна погода і висока температура панують на побережах згаданого моря. Коли центр тайфуна наближить ся на 1000 km., зачинають показуватись хмари cumulus, на мори починаєсь місцями сильне фильованє, викликане сильними вітрами, що віють довкола тайфунового центра. На полудни від него виступають бурі з громами. Коли центр начне ся приближати, стає дуже парно і барометр паде (досить впрочім поволи 2·5 mm. на добу); колиж тайфун віддалений вже лиш о 500 km., повстають на

[1]) Annalen der Hydrographie 1898. 173 д.

[2]) Blue Hill Met. Obs. Bull. 1899. Nr. 1.

[3]) Vines. Investigation of the cyclonic circulation etc. Washington, Weather Bureau 1898.

мори сильні филї, потім небо зовсїм затягаєсь хмарами і разом з барометром опадає і температура. Коли тайфун вже лиш о 300 km. віддалений, начинає ляти дощ і вихор та морска буря зачинають щораз більшати, аж вкінци доходять до страшної сили. На кількаиацять km. довкола центра в тз. оцї тайфуна панує цїлковита тишина воздуха, але боввани морскі в ту страшні. Найнизше тиснене не припадає на саме „око“ тайфуна, але випереджує его пересїчно о 30 km. Часто є в тайфунї і поза его „оком“ значні простори, де зовсїм нема вітру. Взагалї більшу шкоду роблять филї чим вітер, так на берегах суші, як і на мори. Відносини впрочім не завсїгди є такі схематичні, як подано. Doberck представляє їх подрібно, годї однак докладнїйше ту ними зайнятись[1]). Важні подробиці про тайфуни подає також розвідка Froe'го[2]). Підчас тайфунів в вересни 1897 р. завважано раз, що в 75 мінутах опало тиснене воздуха о 31·8 mm., а потім в 40 мінутах піднеслось о 35·7 mm. Абсолютне maximum скорости вітра було 205·2 km. на годину. Дотепер найдені скорости вітра при бурях є значно меньші[3]). Тайфунами з р. 1895 і 1896 займаєсь Doyle[4]).

Звязь межи африканьскими „Tornados“ а припливом і відпливом моря припускає Oriola, замітивши, що властива торнадам конфіґурация облаків підчас припливу не зміняє свого виду на небозводї, а підчас відпливу з великою скористю посуваєсь вперед[5]).

Про *воздушні труби* (вертнї) стрічаєм в послїдних часах кілька розвідок. Jansson описує таку воздушну трубу, що знищила лїс коло Borås в Швециї 3. липня 1899 р.[6]). Haltermann помічав цїкаві малі вертнї в обсягу ґольфштрема[7]). Miethe, видів як повставали малі вертнї при пожарі торфяника ґіфгорнского і завважав і ту також, що вертїлись відворотно годинниковій вказівцї[8]). Russell подає відомісти про великі вертнї водні (промір при основі 100 стіп), що в маю 1898 р. появились на побережах Новоï Полудневої Валлїї[9]).

---

[1]) Пор. Meteorologische Zeitschrift 1898. 332 д.

[2]) Ibidem 1899. 145 д.

[3]) Пор. зіставлене Köppen'a в Archiv der deutschen Selewarte. XXI. Nr. 5. 17 д.

[4]) Tifones del archipiélago filipino y mares circunvecinos 1895 y 1896. Manila 1899. Petermanns Mittheilungen 1900 [82].

[5]) Annalen der Hydrographie 1900. 258 д.

[6]) Bihang till k. svenska Vet. Ak. Handlingar. 26. Afd. I. Nr. 3.

[7]) Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. 1900. März. 218 дд.

[8]) Prometheus X. 795 д.

[9]) Journal of Royal Society of New South Wales XXXII. 1898 18 с.

Льокальним вітрам присьвячує новійша метеорольоґія много працї. Особливо-ж вітрами, що є подібні до альпейского фену, займають ся учені дуже визначно і відкривають їх в ріжних околицях землї.

Billwiller доказує, що фен може повстати не тілько через те, що струя воздушна перейде через хребет ґірский і вступаючи долї, динамічно огріваєсь. Фен може також повстати через вступлене на поверхню землї одного з вітрів антіцикльональної системи[1]).

Фен, що приходить з півночи, обсервував Klein в Tragöss (Стирія)[2]).

Воєйков описує вітри зовсїм подібні до Фену в Кримі і на Кавказї[3]).

Анальоґічні з феном є також вітри Чінук (Chinook winds) в Скельних горах[4]).

Над явищем Гарматтана в нїмецкій кольонії Того робили в новійших часах дослїди Gruner, Mischlich, Seefried і Danckelman. Сей горячий вітер виступає в сухій порі року, що треває від жовтня до цьвітня. В часї, коли віє Гарматтан, наповняєсь воздух пилом і є дуже сухий. Ранками температура сильно обнижуєсь. Гарматтан походить мабуть з північного Судану і полудньово-західної Сагари[5]).

Помірами *сили вітрів* займаєсь Schreiber, порівнуючи ріжні анемометри. Köppen порівнує анемометричну скалю Beaufort'a з дійсною скоростию вітрів і становить редукцийну скалю для західної Европи[6]).

Прямовісний роздїл сили вітру пізнано в послїдних часах при помочи бальонів і зміїв значно докладнїйше, чим дотепер. Clayton уставив таку табелю приросту скорости вітру:

Висота	50 – 150 – 250	350 – 450 – 950 m.
Середний приріст скорости вітра	0·8 1·0 1·3	1·6 1·9 m. на секунду[7]).

Hellmann виказує, що денний хід анемометру є в значній мірі функциєю висоти уставленя сего приладу. Щоби отже збутись блудів і ріжниць, радить він приняти міжнародно уставлене ане-

---

[1]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 204 д.

[2]) Ibidem 1898. 61.

[3]) Ibidem 1898. ст. 430.

[4]) Ibidem 1898. 63.

[5]) Mittheilungen aus den deutschen Schutzgebieten XII. 1899. 1 д.

[6]) Archiv der deutschen Seewarte XXI. 1898. 21 с.

[7]) Meteorologische Zeitschrift 1898. (25) д

мометру на 20 m. над землею на осібнім руштованю[1]). Hann, оброблюючи обсервації денної періоди скорости вітра на штрасбурских вежах, редукує обсервації не на позем улиць, а на позем дахів 20 m. над землею[2]).

Coeurdevache найшов, що денний період скорости вітра в Perpignan є в прямім відношеню до прямовісного ґрадієнта температури між Perpignan a Pic du Midi (в Піренеях 2859 m. висоти)[3]).

Опади.

Про *пароване* води морскої робив дослїди Mazelle і найшов, що вода морска при 3·73% засолення парує повільнїйше, чим вода солодка, в відношеню меньшаючім враз зі скількостию парованя[4]).

Coeurdevache представляє пароване яко функцию температури, скорости вітру і зглядної вохкости. Зі зростом температури о 5° збільшає ся пароване о 1 mm, о тількож само більшає оно, коли зменьшить ся зглядна вохкість о 5%. Коли скорість вітру збільшить ся о 1 m., може збільшитись пароване навіть о 0·9mm.[5]).

З розвідок про *вохкість воздуха* згадаю працю про денний період зглядної вохкости в Полї, E. Mazelle[6]). Maximum зглядної вохкости припадає середно на 5. годину рано, minimum на першу по полудни. В погідних днях припадають екстреми скорше, в хмарних пізнїйше. Амплїтуда в погідні днї є в зимі 9 раз, в лїтї 3 разів більша, чим в хмарні.

Frankenfield на підставі обсерваций зібраних зміями найшов, що середна вохкість скорше меньшає в гору, чим випадалоб з теоретичних формул Hann'a[7]).

Про *хмари* дали послїдні роки XIX. столїтя велику лїтературу, бо власне тодї зачались публїкувати результати тз. міжнародного року хмар. (Internationales Wolkenjahr 1896 V. 1 до 1897. VI. 1.).

---

[1]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 546.
[2]) Ibidem 1899. 457 д.
[3]) Annales de la Société Meteorologique XLVII. 1899. 41 д.
[4]) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien CVII. 1898. 280 д.
[5]) Ann. Soc. Mét. de France. XLVII. 1899. 186 д.
[6]) Sitzungsberichte der Akad. Wien. II. a. CVIII. 1899. 42.
[7]) Monthly Weather Revier XXVII. 1899. 413 д.

Образи характеристичних хмар находимо в атлясї: Polis. Wolkentafeln. Karlsruhe. Braun 1899. Кілька цїкавих фотоґрафій хмар є поміщених в Monthly Weather Review XXVI. 1899. 59 д. Дуже красні фотоґрафії хмар пороблено на обсерваториї Фляммаріона в Juvisy[1]).

Цїкаві обсервациї хмар роблять ся в бальонах. Süring обсервував 1899. X. 3. динамічне повстане хмар „cumulus“ в розбурханих вихром верствах воздуха підчас своєї воздушної плавби[2]). Розличні хмари над Альпами бачив ґеольоґ Heim, коли переїжджав в жовтни 1898 бальоном Веґа понад Альпами. Єго помічаня є дуже важні для пізнаня загального захмареня над горами[3]).

З розвідок про *захмарене* назвем слїдуючі важнїйші:

Études internationales des nuages 1896—1897. Upsala 1898 і 1899. Hildebrandsson, Lundal і Westman обговорюють там форму, висоту, напрям, скорість і т. д. хмар. У всїх з виїмком „altocumulus“ і „Cirrocumulus“ при висшій температурі є і висота більша. Скорість росте особливо в зимі і напрям тодї є блисший взагалї до північного. В лїтї може завважати і денний період.

В часї міжнародного року хмар робив обсервациї в Manila Algué[4]).

Про вплив рік на хмари, що над ними находять ся, подає цїкаві замітки Erk. Підчас воздушної плавби бальоном замітив він, що на хмарах ясно рисувались напрями рік Інну і Сальцах[5]).

Kassner доказує, що коли в хмарах cirrus і cirrostratus повстають хмарні филї, то в 65 случаях на 100 слїдує по 24 годинах дощ, в 75 на 100 по 48 годинах[6]).

Про *дощ і єго розміщене* оголошено при кінци XIX. віку много праць.

Meissner подає на підставі почдамских обсерваций, що імовірність дощу і єго скількість є найбільші, коли тиснене воздуха перестає опадати, а начинає підноситись[7]).

---

[1]) Knowledge 1900. 174 д. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik XI. 1900. табл. V.
[2]) Meteorologische Zeitschrift. 1900. 177 д.
[3]) Die Fahrt der Wega, Basel. 1899. 66 д.
[4]) Las nubas en archipiélago Filipino. Manila 1899.
[5]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 216 д.
[6]) Das Wetter XVI. 1899. 265 д.
[7]) Das Wetter XVI. 1899. 129 д.

Написана ся розвідка на підставі 15-лїтних обсерваций (1887—1895) в 94 стациях. З доданих карт розділеня скількости снїгу виходить, що $^1/_3$—$^1/_5$ всїх опадів річно в Росиї становить снїг. Від грудня до марта снїг творить 75—100% опадів (з виїмком лиш полудневої Росиї). Maximum скількости снїгу припадає в північно-східній Росиї на жовтень, а чим дальше на південний захід, тим припізнюєсь аж до марта. В більшій части краю припадає однак maximum на грудень і сїчень.

Про густоту снїгу на Монблянї робив дослїди Vallot. В висотї 3020 m. була густота снїгу 0·48, в висотї 4350 m. 0·40. Фірн на висотї 4792 m. в 15 m. глубини мав густоту 0·86, лїд ледівцевий в висотї 3020 m.– 0·88, в висотї 1850 m—0·91. Щоби снїг перейшов в лїд ледівцевий, потреба 12—15 лїт[1]).

Про *град* оголосив Trabert розвідку, де представляє критично всї дотеперішні теориї про єго повстанє. Дві квестиї ставить він на передї 1) яка є причина спливу води, з котрої творить ся градове зерня 2) яка причина так сильного обниженя температури. Першою причиною є мабудь електричність, другої дотепер не знаємо. Є лиш гіпотези[2]).

1897. VII. 1—4 трафлялись підчас дуже сильних градів в Стириї і Каринтиї градові зерна до 1 kg. ваги, а до 15 cm. проміру[3]). Величина граду в Індиї є ще більша. 1894. I. 1. падали кусні леду до 2 kg. тяжкі[4]).

В послїднім десятку лїт XIX. столїтя уряджувано дуже численні проби, щоби розганяти градові тучі вистрілами з моздїрів. Именно в Стириї і Італиї занимають ся тепер сею справою дуже живо. Лїтература до сего вельми богато. Так пр. італїйский професор Бомбіччі публїкує що рік кілька статий про стріляне до туч.

Воздушна електричність і бурі.

Про розсїяне електричности в вільній атмосфері робили дослїди Elster і Geitel[5]). Оно є сильно зависиме від мраки, опаду і тоді

[1]) Meteorologische Zeitschrift. 1899. 294.
[2]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 433.
[3]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 29—32.
[4]) Indian Meteorological Memoire VI. 1899. Meteorol. Zeitschrift. 1900. 524 дд.
[5]) Versammlung deutscher Naturforscher in München 1899. Abth. für Physik und Meteorologie. 2. Sitzung am 19. September.

є меньше. Сила вітру і абсолютна вохкість не мають видного впливу. В горах в ясних днях росте розсїяне електричности зі зростом висоти. Загальний погляд на воздушну електричність у обох учених такий: Воздух містить в собі частинки самостійно наладовані додатною і відємною електричностию в майже рівнім числї. Електричні напруги воздуха повстають, коли більше частинок є наладованих одною з двох електричностий[1]).

Причинок до теориї воздушної електричности подає Trabert[2]) обговорюючи проби Pellat'a виказати втрату електричности у парючої води[3]). Trabert перечить висліdам Pellat'a, що вода тратить електричність до своєї пари при парованю. На тій тезї, котру хотїв Pellat боронити, опираєсь в значній мірі теория електричности воздушної Exner'a. Trabert доказує рахунком, що скількість електричности, котра би прийшла в земску атмосферу з парою водною тодї, коли би ціла земля була покрита одностайно водою, є дуже маленька в порівнаню зі скількостию електричности земскої поверхні. Після теориї Exner'a мусїлиб обі скількости бути рівні.

Le Cadet робив цїкаві дослїди над атмосферною електричностию при земли і в бальонї. Він замітив, що понад 1000 m. висоти хід густоти додатної електричности воздуха і хід абсолютної вохкости є зовсїм згідні. В низших реґіонах тої згідности нема. Le Cadet вважає впрочім не водяну пару, а вугляний квас розносчиком додатної електричности[4]).

Elster і Geitel найшли, що воздушні опади містять в собі значні дози додатної або відємної електричности питомої. Коли так нераз оден рід електричности з опадами сплине на землю, приходить в воздусї другий рід до переваги[5]).

Денні колибаня воздушної електричности обсервував Chauveau вже від 1891 на вежи Ефля і в иньших кількох французских місцевостях; він найшов два типи сего колибаня: лїтний і зимовий, анальоґічні такимже лиш сильнїйшим періодам відкритим в зимнім і горячім підсоню[6]).

[1]) Пор. Terrestrial Magnetism. 1899. IV. 213 д.
[2]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 377 д.
[3]) Journal de Physique. III. Ser. 8. 1899. 253 д.
[4]) Ref. Meteorologische Zeitschrift 1898. (67 д.).
[5]) Terrestrial Magnetism IV. 1899. 15 д.
[6]) Ciel et Terre. XX. 523 д.

Coeurdevache виказує на обсервациях в Perpignan і на Pic du Midi, що денний хід атмосферної елєктричности має тим більшу амплїтуду, чим меньша ріжниця температури[1]).

Про *огонь св. Ельма* написав Arendt ґрунтовну студию. Се явище є взагалї частїйше підчас бурливої, чим підчас супокійної погоди, але природа єго ще не досить вияснена[2]).

Лискавки удалось в послїдних лїтах кілька разів відфотоґрафувати. Rümker відфотоґрафував стяжкову лискавку в Гамбурзї і найшов єї дїйсну ширину 10 m. Вітер має на форму таких лискавок великий вплив[3]).

Статистику перунів опрацьовують тепер в ріжних краях дуже пильно і она дала вже много цїкавих вислїдів. Bezold, що працює над сим предметом від довшого часу, найшов, що пр. в Баварії від 1833. до 1897. число перуном трафлених будинків зросло шість разів. Що цїкавійше — число таких домів підлягає певним колибаням, що є згідні в своїм ході з зглядними числами сонїчної дїяльности (Вольфа). В лїтах мінїмів сонїчних плям перуни роблять меньше шкоди, ще меньше в лїтах максімів[4]). Подібну статистику зробив Kassner для пруської Саксонії та Ангальту в лїтах 1887—1897. Вислїди анальоґічні — зріст небезпеченьства від перунів винїс в 10 лїтах 33·7%[5]). Zeller виказує подібний зріст числа перунів в Віртемберґії, але думає, що сей зріст є лиш позірний, викликаний лиш чисто технїчними та соціяльними причинами: будованєм високих домів, збільшенєм їх простору і т. д.[6]).

Так само значний зріст небезпеченьства перунів сконстатував Arendt в північній Нїмеччинї, але виказав заразом, що сей зріст має свою причиву в зростї числа бурий в загалї[7]). Притім доказали Arendt і Hellmann, що число бурий не є найбільше підчас припливу моря, як загально думають над північним морем[8]).

Stearns опрацював річний період бурий на островах і побережах, іменно в западній та полудневій Европі. Бурі трафляють ся ту частїйше в зимі, чим в лїтї, та приходять звичайно в ночи[1]).

Бурю без громів обсервовано 1899. VIII. 14. в Шанґаю. Була она дуже сильна і відразу по кілька лискавок являлось на небі, а грому не чути було нїякого[2]).

---

[1]) Ann. de la Société météorol. de France. XLVII. 1899. 43 д.
[2]) Wetter XV. 1898. 2. 37. 49.
[3]) Himmel und Erde. XI. 134.
[4]) Sitzungsberichte der kgl. preuss. Akad. der Wiss. Berlin. 1899. 291 д.
[5]) Über Blitzschläge in der Provinz Sachsen und Hzm. Anhalt 1887—97. Merseburg 1898.
[6]) Gaea. 1900. 663.
[7]) Wetter. XVI. 1899. 1. 32.
[8]) Veröffentlichungen des Preussischen Meteorol. Instituts. Berlin 1899. Meteorologische Zeitschrift 1898. 85 д.

Оптичні явища в атмосфері.

Про *барву сонця* при горизонтї на пустинї і на мори пише Franceschi. В пустинї, коли є мрака або сильний вітер, сонїчний кружок є цїлком білий без проміня. Колиж нема вітру ні мраки, є сонїчний кружок червонявий і то звичайно горішня єго часть є слабше, долїшна сильнїйше червона. Иньших барв не бачив Fr. ніколи. Такіж самі барви має сонце і на мори. Т. з. зелений промінь є на думку Fr. явищем „інтраоптичним“, що викликане контрастом між жовтою чи оранжевою фарбою сонця, а синявою неба[3]).

Блиманє зьвізд толкує See фильованєм воздуха. Оно є викликане атмосферними струями. Ті воздушні филї дїлають подібно як сочки, відклонюють та розкладають білі лучі на барвні. Коли довжина фильок меньша, чим промір сочки телєскопа, тодї блиманє зьвізд меньшає або і зовсїм гине[4]).

Дуже цїкаві є звістки, що їх збирає Maurer про т. з. *земне сьвітло* (Erdlicht)[5]). Оно проявляєсь в тім, що деякі ночи є нерівно яснїйші чим другі, хоч атмосферні і космічні відносини є зовсїм однакові. В такі ясні ночи мож бачити вздовж цїлого горизонта слабше чи міцнїйше сяєво, що ідь зенїтови щораз слабне. Бачили се сьвітло вже Saussure, Humboldt і Bessel, котрий вважає се сьвітло анальоґічним до сьвітла нічної сторони плянети Венери. 1871. XI. 14. було се сьвітло в Halle так ясне, що мож було на дворі коло півночи навіть звичайний друк читати, хоч місяця не було, а небо було захмарене. В загалї се сьвітло є найсильнїйше звичайно в пізній осени, але від 1895–99, коли єго в Швайцарії докладнїйше обсервують, припадали єго maxima на ріжні пори року. В лютім

---

[1]) Monthly Weather Review. XXVI. 1898. 452.
[2]) Wetter 1899. 264.
[3]) Bulletin de l' Institut égyptologique. Serie 3. Nr. 7.
[4]) Astronomische Nachrichten Nr. 3450.
[5]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 257.

1899 р. явилось се сьвітло в невиданій доси силї. Дуговини єго дотепер не знаєм, тож трудно сказати дещо певного про натуру земного сьвітла.

Незвичайну *воздушну ману* бачив Mack 1890. XII. 3. На західнім небі близько горизонту була вузка смуга хмар cumulostratus. Сонце находилось понад нею, а під нею появилось друге позірне сонце в тім самім прямі. Оно було якийсь час яснійше, чим дійсне сонце, потім однак се послїдне пояснїйшало. По кількох мінутах явище щезло. Мана ся повстала наслїдком воздушних верств з сочинником зломаня, що меньшав ідь долови[1]).

Про *круги досонїчні і домісячні* говорить розвідка Messerschmitt'a[2]). Від часу заведеня самопишучнх апаратів по стациях метеорольоґічних не обсервуєсь тих явищ так докладно, як давнїйше. М. розріжнює два роди кругів 1) малі круги, інакше звані сьвітлянними вінцями, 2) великі круги або перстенї. Світляні вінцї окружають сонце, місяць, або і яснїйші зьвізди барвистими кругами аж до віддали 1—6°. Они суть діфракцийними явищами — сьвітло угинаєсь в водних баньочках і показує дуговинні барви. Великі круги мають 22° луча і виступають часто в товаристві ще більших кругів з лучем 46° і 90°, позірних сонць зглядно місяцїв, прямовісних стовпів і т. д. Дуговинні барви є при тім більше або меньше виразні. Великі круги повстають через зломане сьвітла в ледових хрусталиках. Виразистість їх є ріжна — в загалї домісячні круги лекші до замїченя, чим досонїчні. В загалї що до місцевого роздїленя видно більше кругів досонїчних і домісячних в висших ґеоґрафічних ширинах, чим в околицях близьких рівника. Що до часового роздїлу, найбільше сонїчних кругів є на весну, а місячних в зимі. Денне maximum досонїчних кругів припадає коротко перед полуднем, домісячних же по півночи та (другостепенне) о 8-ій вечером. М. находить також певну звязь між виступованєм кругів, а 11-лїтним періодом сонїчної дїяльности.

Цїкаве явище пятикратної дуги обсервував Berger в Schweidnitz. Дві верхні дуги були зовсїм нормально впорядковані після фарб. Трета, четверта і пята мали барви так само уложені, як друга від гори[3]).

[1]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 187.
[2]) Annalen der Hydrographie. 1900. 32.
[3]) Gaea 1900. 122.

Про зміни і колибаня клїмату.

Ekholm виходить з заложеня, що теплота сонця є від найдавнїйших починів житя орґанїчного постійна, а всякі зміни клїматичні мають иньші причини. Для виясненя колибань ґеольоґічних клїматів уживає він ґіпотези Arhenius'a, що приписує колибаня теплоти в ґеольоґічних епохах колибаням скількости вугляного квасу в воздусї. Обниженє температури підчас ледової епохи бачить Ekholm в тій обставинї, що скількість вугляного квасу в атмосферї тодї значно зменьшилась. Колибаняж знов в тій скількости Е. виводить з постепенного корченя ся землї. З початку земска кора скорше корчилась, чим земске ядро, тому попукала і вулькани, що виросли на прогалинах, ввели в атмосферу много вугляного квасу. Той квас маючи власність задержувати сонїчне тепло, підвисшив температуру атмосферы а також і земскої кори, так що та послїдна знов розтяглась. Анорґанїчні і орґанїчні процеси в дальшім розвитку землї знов проглинули много вугляного квасу (именно в карбонї) і температура знов обнижалась аж до пермскої ледової епохи. Тепер знов кора корчилась сильнїйше як ядро, знов попукала і цїлий круговорот почавсь на ново. В кенозоічній епосї знов було найтеплїйше, потім прийшла ледова епоха, а тепер знов скількість вугляного квасу, а з ним і температура росте.

Другорядні колибаня клїмату приписує Е. ріжному в часї наклоненю земскої оси до еклїптики. Оно зміняєсь в періоді 40000 лїт. Про треторядні колибаня в історичних часах виражає ся Е, що цїла ріжниця полягає в більшім континенталїзмі клїмату в давнїйших часах[1]).

З між всїх вікових колибань клїмату найбільшу лїтературу має тз. *ледова епоха*. До величезної скількости істнуючих вже теорий сеї епохи прибуває що рік кілька нових, більше або меньше імовірних. Подам ту лиш пару найновійших.

Harboe шукає причини ледової епохи в великій вулканїчній дїяльности при кінци кенозоічної епохи, котра множеством викиненої водної пари викликала сильні опади і остуженє поверхнї землї[2]).

Hull приписує все Gulf-Stream'ови. При кінци плїоцену наступило в Америцї винесене поверхнї землї, котре відтяло ґольфову

[1]) Ekholm: Om klimatets ändringar i geologisk och historisk tid samt deras orsaker. Ymer 1899. 353.
[2]) Zeitschrift der deutschen Geol. Gesellschaft. 1898. 441.

струю від мексиканьского моря. Она стратила в наслїдок того 10° теплоти, а крім того прибрала иньший напрям і не обливала так як тепер берегів Европи, що також значно ся була піднесла.

Chamberlin хотївби майже усе приписати винесеням і западаням земскої кори з узглядненєм ріжних метеорольоґічних елєментів як: відмінного складу атмосфери, ріжного розкладу воздушного тисненя etc.[1]).

В 1891 р. поставив Dubois теорию, після котрої колибаня клїмату в послїдних тисячках лїт є наслїдками відповідних змін сонїчної температури. Scheiner, славний гелїольоґ найновійших часів, доказує, що ся теория є імовірна. Обниженє середної температури земскої атмосфери о 10° вимагалоб обниженя промінь ования сонця о $^1/_9$. Scheiner приймає після найновійшнх дослїдів, що температура сонця лежить межи 5000° а 10000°, отже після права промінь ования Stephan'a зменьшенє промінь ования сонця о $^1/_9$ значилоб обниженє єго температури о 3% т. є. 150°—300°. Такі зміни температури не могуть бути зовсїм дивні, коли зважимо, як великі зміни що хвилька відбувають ся в фотосфері. По думцї Scheiner'a скорше належить дивуватись, що при таких обставинах температура землї є так постійна. Слиб отже завели телюричні теориї, теория Dubois'a може їх місце заступити[2]).

Про *зміни клїмату в історичних часах* і про малі періоди клїматичні прибуло в послїдних роках богато нових матеріялів.

Zumoffen потверджає єще раз вислїди Fischer'a і иньших, що в історичних часах воздушні опади ві всїх краях над середземним морем (також в Сирії і Палєстинї) значно ся зменьшили[3]).

35. лїтний період клїматичний Брікнера потверджуєсь в такім проценті випадків, в якім і не потверджуєсь. Mac Dowall потвердив єго істнованє в вирівнаних обсервациях воздушного тисненя в Льондонї (від 1876), в тім напрямі, що зимно-воххі періоди мають низше, теплі і сухі висше тисненє[4]). Натомість Кремзер не найшов в температурі і опадах ельбского бассейна 35 лїтних періодів[5]).

11. лїтний період сонїчних плям находить все многих приклонників. Frank Very виводить з него період промінь ования сонця,

[1]) Petermanns Mittheilungen. Bd. 46. LB. 81.
[2]) Astronomische Nachrichten. CXLIX. (1899) Nr. 3561. 161.
[3]) Bulletin de la Société de géographie. XX. 344 д.
[4]) Nature 1898. LIX. 175.
[5]) Klimatische Verhältnisse des Elbstromgebietes. Separatabdruck aus dem Elbstromwerk. Berlin, 1899, 48. 87.

заворушень в енерґії загальної циркуляциї та остаточно період маґнетний і клїматичний[1]).

Mac Dowall працює над 11-лїтним періодом від кількох лїт дуже витревало, на жаль оброблюючи материял обсервацийний лиш немногих стацій. Він находить, що для Greenwich 1841—96. припадають на minima плям холодні лїта і острі зими, на maxima теплі лїта і лагідні зими[2]). Люстри коло maxim'ів плям є загалом теплїйші чим повинні бути, люстри коло мінїмів холоднїйші[3]). В роздїлї опадів 11-лїтний період меньше виразний[4]).

André находить, що в роках 1864—71 і 1879—95 maxima температури Lyon'y припадають на maxima сонїчних плям, minima на minima. В часї між 1771—1879 річ має ся зовсїм відворотно[5]).

Flammarion порівнуючи період сонїчних плям з температурою Парижа, фенольоґічними явищами тамже і поворотом перелетних птиць до середної Франциї 1853—98, прийшов до заключеня, що на maxima плям випадають: висша температура, скорший розвиток ростин і скорше прибутє птиць[6]).

Взагалї погоня за періодами в метеорольоґії тепер процвитає. Mac Dowall замічає, що в Greenwich 1841—99 теплі лїта припадають на другу половину десятилїть, холодні на першу[7]). Rocquigny Adanson находить, що в середній Франциї наступають що року XI. 24—30. дуже сильні атмосферні заворушеня[8]). Hazen „відкриває“ температурну періоду 12·96 дневну в Omaha[9]). Рибкін завважав, що атмосферні явища в Росиї повторюють ся з великою правильностию що 3—7 днїв[10]). Royer пробує поставити тижневий і місячний період бурий[11]).

Хоть *вплив місяця на погоду* є від довшого часу як здавалось „ein überwundener Standpunkt“, то все таки находять ся учені, що старають ся місяцеви єго значінє для погоди знов реституувати.

[1]) Astrophysical Journal. VII. 1898. 255.
[2]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 473.
[3]) Nature LIX. 77.
[4]) Ibidem 583.
[5]) Ciel et Terre XIX. 45.
[6]) Ciel et Terre XIX. 342.
[7]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 381.
[8]) Ciel et Terre XVIII. 497.
[9]) Report of Chief Weather Bureau 1897/8. 323.
[10]) Bulletin de l' Academie des Sciences de St. Pétersbourg 1898. 5 sér. IX. 273.
[11]) Annales de la Société météor. de France XLVI. 1898. 76.

Barthe доказує, що в Нїмеччинї температура коротко перед повнею є о 2° низша, чим перед новом[1]). Mac Dowall прямо противний виславід дістав з Ґринїцких обсерваций, Helm Clayton згідний[2]).

Börnstein доказує, що в сидеричнім місяци тиснене воздуха відбуває виразний (в Берлинї, Маґдебурґу і Почдамі) період з максімами 10. і 17. дня[3]).

Ekholm і Svante Arrhenius доказавши істноване впливу місяця на воздушну електричність, старають ся доказати его вплив на полярне сяево і бурі. Бурі виказують в Швеции 1880—95 виразний період рівний тропічному місяцеви з maximum на 5 днїв перед, minimum 6 днїв по полудневім lunistitium[4]).

Про *звязь кліматольоґічних елементів між собою* і їх вплив на погоду призбируєсь що року щораз більше матеріялу, бо ся справа має велику вагу для предсказуваня погоди.

Дуже важні дослїди над впливом метеорольоґічних відносин над північним атлянтийским океаном на зимову температуру западної і середної Европи поробив Meinardus[5]).

Виславіди ось такі: Сли в місяцях XI—I. температура Gulf-Stream'a є висока (низька), то температура в Европі буде в місяцях II—IV. висока (низька). Також: сли ріжниці в тисненю між північно-атлянтійским minimum, а контитентальним maximum тодї є великі, то температура Европи буде висока; слиж малі — низька.

Lesshaft займаєсь впливом колибань теплоти ґольфштрема на дороги і виступуване знижок в Росиї. Коли є в ґольфштремі maximum температури, знижки ідуть понад Росию на SO, в иньших зимах на NO. Істнує також дволїтний період, именно в зимах років паристих (пр. 1873/4) йшли знижки на SO і температура була лагідна, в непаристих противно. Причини тих явищ належить шукати в температурних відносинах ґольфштрема та колибанях великої воздушної струї полярної[6]).

Hellmann займаєсь лагідними зимами з нагоди, що послїдними часами зими в середущій Европі були дивно лагідні. Зиму зовем лагідною, коли грудень і сїчень є теплїйші чим середно. Тодї звичайно вже падолист і лютий є теплі та мала імовірність (0.15%), що марець буде зимний. Зате такі зими є вохкі і бурливі. Лїто потім звичайно горяче[1]).

[1]) Wetter XVI. 61.
[2]) Symons Monthly Meteor. Magazine XXXIV. 1899. 20. 68.
[3]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 420.
[4]) Kong. Svenska Veten. Ak. Handlingar XXXI. 2. 1899.
[5]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 85. i Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde 1898. 183.
[6]) Meteorologische Zeitschrift 1899 539.

Причини холодних лїт Европи середної і западної шукає Madsen в ледових горах, що являючись від часу до часу на Атлянтийскім океанї сильно остуджують воздух. В 1890. роцї їх число було дуже велике, тож і липень сего року належав до дуже зимних[2]).

Справа *проґнози погоди* на кілька днів наперед занимає від 1896, коли van Bebber написав про се книжку, учених. Bebber винайшов в погодї середної Европи 5 головних типів і після них хоче проповідати погоду на кілька днів наперед головно для хлїборобів. Свої погляди розвинув він на ново в часописи Wetter, 1899. 217 д. і позискав собі приклонника в Grossmann'ї, що теоритично доказує можливість таких проґноз. Натомість Klein рішучо виступає против тих проґноз, що на его думку можуть лиш ще більше здискредитувати метеорольоґію в очах ширших кругів. Він доказує, що Bebber властиво нїчого нового не подав, а обсервациї навіть льокальні, сли узглядняють відносини висших реґіонів атмосфери, дають лїпші результати, чим проґнози на підставі засад Bebber'а[3]).

Спеціяльна кліматольоґія.

Не може она бути предметом нашої хронїки, бо виказує множество матеріялу, що лиш для льокальних відносин ріжних країв може мати вагу. Тому то і я відсилаючи до XXIV. тому часописи Geographisches Jahrbuch, де на ст. 120 дд. є цїла важнїйша лїтература подана та в части обговорена, ограничу ся лиш на деяких річах важнїйших, та на деякі матеріяли важні для кліматольоґії русских земель.

В полярнім підсоню треба згадати обсервациї Фену в западній Ґренляндиї і дуже низьку температуру, яку найшла бельґійска експедиция в полудневім полярнім підсоню. Абсолютне minimum виносило $-43{\cdot}1^0$, середна температура лїта лиш $-1{\cdot}5^0$.[4]).

[1]) Wetter XV. 25. Meteorologische Zeitschrift 1899. 58.
[2]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 125 д.
[3]) Annalen der Hydrographie 1900. 273. Gaea 1900. 258. 475.
[4]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 75.

Воєйков вивів з порівнаня обсерваций бельґійских і обсерваций Нансена, що морский клїмат під полудневим бігуном є значно зимнїйший, чим морский клїмат арктичний. Supan вносить з тих низьких температур лїта, що коло полудневого бігуна є ледом покрита суша, з котрої вітри в лїтї несуть зимно на море[1]).

В клїматольоґії Европи заслугують на згадку дальші праці Mohn'a над клїматом Норвеґії, Hamberg'a над воздушним тисненєм в Швеции, Dickson'a про температуру морскої поверхні і єї вплив на клїмат В. Британії, Scott'a над числом опадів тамже і Mellish'a про температуру почви в Анґлії і Шкоции, вкінци Buchanan'a над клїматом гори Ben Nevis. У Франции Plumandon зібрав висоту опадів і число днїв з опадами в краю. Появилось велике число льокального матеріялу. В Нїмеччинї заслугують на увагу праці: du Mont'a над роздїлом воздушної вохкости в північній Нїмеччинї, Grossmann'a про бурі на берегах нїмецких морий, публїкация дощевих карт пруских провінций Hellmann'a, робота Kremser'a про клїмат ельбского бассейна і т. д.

З австрийского клїматольоґічного матеріялу мусим згадати кілька новійших праць, що в части відносять ся до клїматольоґії руских земель.

Про повени 1897 р. поміщена в „Beiträge zur Hydrographie Österreich-Ungarns herausgegeben vom k. k. hydrographischen Centralbureau II. Heft. 1898. 170 ст." обширна розвідка.

K. Szulc. Ogólny zarys stref klimatycznych Galicyi. Lwów. (Nakładem wydziału krajowego 1898. 24+29 ст. 1. карта) пробує подати начерк клїматольоґії Галичини, головно оглядаючись на потреби хлїборобства. Нарис є дуже побіжний і не грішить орияінальностию методи. Матеріял ужитий сягає лиш до 1894 р. і браний часто з другої руки. Автор розріжнює в Галичинї, 5 головних клїматичних стреф. I. стрефа обнимає північно-западний кут Галичини на полудне аж по Підгірє, на схід аж меньше більше по полуденник устя Сяну, II. стрефа области Сяну, Бута і Стира, III. стрефа північне Поділє, Опіле і область горішного Днїстра (виключаючи гори і Підгірє) на схід аж по усте Стрия. IV. полоса обнимає полудневе Поділє і Покутє, V. полоса галицкі Карпати від Шлеска аж по Буковину і є подїлена на три підрядні округи.

До клїматольоґії угорскої Руси подають угорскі публїкациї в новійших часах значні причинки, сїть метеорольоґічних стаций

[1]) Petermanns Mittheilungen 1899. 283 д.

значно зростає. Raum опрацьовуючи опади Угорщини найшов в Мармароских Карпатах опад до 1520 mm. річно[1]). Hegyfoky обробив захмарене угорских країв 1871–95[2]), Hejas бурі в тімже періоді[3]).

Для клїматольоґії украïньских земель під росийским панованєм важні є гидро-метеорольоґічні обсервациї видані метеорольоґічним віддїлом гидроґрафічного уряду в Петербурзї 1898 р. Они обнимають місячні і річні вартости стану води, напряму і сили вітру та температури моря 1890—1896 в 10 стациях над Чорним і Азовским морем. Дуже важна є також публїкация Клоссовского[4]), що подає весь клїматольоґічний матеріял Украïни і Запорожа (для Кієва пр. від 1812 р.).

З матеріялів до *клїматольоґії Азиї* згадаєм праці: Воєйкова і Івіцкого над середними температурами східного Сибіру, Тілля над клїматом люкчунскої депресиї, Elliot'a про гради в Индиї і Ганна про клїмат маляйского півострова.

В *Африцї* збиране клїматольоґічного матеріяла йде дуже швидко вперед і число (хоч коротких нераз) обсервацийних рядів щораз зростає. Danckelmann відкрив в Камеруні (Bibundi) друге по Чера Пунджі місце з незвичайно високом опадом (10486 mm. річно), de Martonne обробив обсервациї опадів над горішним Нїлем, Struben також обсервациї в Каплянді і краю Oranje.

В *Америцї* — як легко зрозуміти — найбільше клїматольоґічного матеріяла достачують Сполучені Держави. Report of Chief Weather Bureau 1897/8. ст. 269. Washington 1899. приніс нове представленє середних температур Сполучених Держав на 14 картах. Riemer і Abbe обчислили число градових днїв, Henry видав карту середного часу осьвітленя сонїчного, Maryland Weather Service видало дуже красний нарис клїматольоґії сего краю. З клїматольоґічних матеріялів иньших частий Америки назву: розвідку Abbot'a про клїмат панамского істму, Bailey'a про клїмат Перу, Hanna про клїмат арґентиньских Андів.

[1]) A magyar korona országainak csapadek viszonyai. Витяг Meteorologische Zeitschrift 1898. 471.

[2]) Пор. Ibidem 1899. 559.

[3]) Пор. Ibidem 1899. 182.

[4]) Matériaux pour la climatologie du Sud.-ouest de la Russie. Одесса 1899. 32+336+104. 7. карт.

З *австралійского* матеріяла згадаю праці: Russel'a про опади в New South Wales, Hann'a про клїмат авклєндских островів і Danckelmann'a про клїмат Новоï Ґвінеï.

II. Земский маґнетизм.

Земский маґнетизм може похвалитись в послїдних лїтах XIX. столїтя досить значними поступами, хоч єго істота і до тепер не є напевно знана. Той дїл ґеофізики находить ся (як впрочім і деякі иньші) в періоді збираня матеріялів обсерваційних.

Збиране се відбуваєсь дуже пильно по ріжних сторонах земского ґльоба і поволи орґанїзуєсь в цивілїзованих державах цїла сїть обсерваторий. На кождім кроці констатують учені, що орґанїзация одноцїльноï системи обсерваторий маґнетних по цїлій земли зовсїм моглаб змінити вигляд науки про маґнетизм землї.

Маґнетний стан землї для епоки 1885·0 представив A. Schmidt[1]) опираючись на зведених Neumayer'ом маґнетних складових для 1800 місцевостий землї. Обсерваційний матеріял походить з ріжних часів і далекий є від повноти, треба було часто екстраполювати для великих частий землї, звідки не було обсерваций. Тому праця Schmidt'a може бути названа лиш пробою в тім напрямі, важною для будучих робітників.

Тілло розкладає земску кулю під маґнетним зглядом на дві гемісфери. Перша між 90° а 270° східноï довготи від Greenwich визначуєть ся додатним знаком на загальну натугу, позему натугу і ï північну складову. Знов півкуля між 130° а 310° східноï довготи має додатну деклїнацию і східну складову поземоï натуги. Порівнуючи по черзї півкулї між 0° а 180°, між 10° а 190°, 20° а 200° і т. д. між собою з огляду на маґнетні елємепти, середні річні температури та розміщенє на них землї і води, вислїдив Тілло, що всяка півкуля з низшою середною температурою року відзначуєть ся більшою натугою поземоï сили і деклїнациї. Зновуж півкуля океанічна, що обнимає між иньшими цїлий Тихий океан, визначуєть ся в виду континентальноï півкулї далеко меньшою загальною натугою[2]).

---

[1]) Archiv der deutschen Seewarte XXI. Nr. 2.

[2]) Terrestrial magnetism and atmospheric electricity 1899. IV. ст. 237 дд.

Зріст скількости маґнетних обсерваций виказав, що не всї в новійших часах обсервовані маґнетні явища дадуть ся витолкувати давними теориями. Liznar замітив пр., що сила земского маґнетизму зі зрóстаючою висотою малїє і то три рази скорше, як се виходилоб з теориї Ґаусса. З сего вносить Liznar, що маґнетні явища земскі не дадуть ся витолкувати самим намаґнетизованєм землї. Атмосфера земска мусить ту також грати визначну ролю[1]).

На звязь земского маґнетизму з елєктричностию в земскій атмосфері задивлюєсь в подібний спосіб і Trabert. Вислїд єго роботи над сим предметом[2]) є сей, що проти звязи земского маґнетизму з елєктричними проявами в атмосфері не мож навести нїякого важного арґументу.

Земский маґнетизм і атмосферна елєктричність найкрасше проявляють свою звязь в полярнім сьвітлї.

Праці про полярне сьвітло є в загалї численні в новійших часах, тому і при кінци XIX. віка не бракує цїнного материялу, щоб на него менї звернути увагу. Передовсїм мушу звернути єї на епохальну розвідку про полудневе полярне сьвітло:

Boller: das Südlicht[3]). Автор збирає і спрсує всї обсервациї полудневого сьвітла, які до тепер колинебудь зроблено і виводить з них слїдуючі висновки: 1) полудневе сьвітло, таксамо як і північне вказує своїм виступованєм на 11-лїтний період. 2) полудневе сьвітло виступає найчастїйше в обводї кола, що є 38° віддалене від полудневого маґнетного бігуна. 3) і в обсягу того кола є райони, де полудневе сьвітло частїйше виступає, іменно в Австралії і на полудне від неї.

Значні причинки до пізнаня полудневого сьвітла дали також обсервациї Арцтовского підчас бельґійскоï полярноï виправи. Мимо неприхильних атмосферних обставин обсервовано підчас зими 1898 сьвітло 62 рази. Оно представлялось звичайно яко одноцїльний лук 8—12° винесений понад овид. Денний період має maximum між 9 а 10ʰ р.; річний період невиразний — maximum натуги припадало на еквінокциї[4]).

Дуговину полярного сьвітла фотоґрафував Paulsen і відкрив та змірив 16 нових лїній[5]). Підчас росийскоï експедициї на Шпіцберґи

---

[1]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften IIa. CVII.

[2]) Meteorologische Zeitschrift XV. 1899. 401 д.

[3]) Beiträge zur Geophysik. III. 56 дд. 550 дд.

[4]) Comptes Rendus. CXXX. 1900. 1276.

[5]) Comptes Rendus CXXX. 1900. 653.

в цїли зміреня степеня полуденника фотоґрафував дуговину і саме сьвітло Сикора впрочім без важнїйших нових результатів[1]). Невеликі результати дали також фотоґрафії в Harvard College[2]).

Докладні помірки полярного сьвітла з 1898. IX. 9. зробив Reimann. Він найшов, що східний конець луку припадав дещо на схід від лїнїї Мемель-Лїбава ($\varphi = +56^0$, $\lambda = +39^0$), західний же на океан Атлянтийский на запад від Ірляндиї. Висота лучів доходила до 66 миль, ширина смуги 60 миль[3]).

Про періодичність в виступаню полярного сьвітла вже від давна знає наука. Є се однак справа не дуже ще вияснена, тому що року появляють ся працї в тім напрямі. Mossmann збирає всї обсервациї північної зорі в Анґлиї 1797—1895 і укладає їх табелярично. Вікова періодичність є невиразна і позваляє лиш розріжнити періоди з численними і нечисленними появами сьвітла. Річний період виказує maxima підчас еквінокций, minima підчас сольстіциїв[4]).

Про вплив місяця на полярне сьвітло робили дослїди Ekholm і Arrhenius. Дискусия матеріяла 1722—1896 виказала значний вплив деклїнациї місяця на розвиток полярного сьвітла. Межи тим тропічним періодом а періодом колибаня воздушної електричности показуєсь цїлковитий паралелїзм. Maxima, minima і амплїтуди припадають на той сам час. З тої згідности вносять автори, що при полярнім сьвітлї наступає електричне виладоване між висшими а визшими верствами атмосфери. Натуга сего виладованя є пропорціональна до атмосферного потенціялу. Місяць є подібно як і земля електрично наладований, а що найвисші верстви атмосфери мають електричність відемну, то она мусить підлягати колибанем в міру змін деклїнациї місяця. Maxima осягає она на північній півкулї тоді, коли місяць стоїть в найбільше полудневій деклїнациї, minima, коли місяць має найбільшу північну деклїнацию. Ті колибаня потенциялу воздушної електричности справляють тропічний період полярного сьвітла[5]).

Крім того місячного періоду виказали Ekkolm і Arrhenius ще істноване дещо коротшого періоду полярного сьвітла, що виносить 25·929 днїв. Він є дуже виразний в Скандинавії і під полудневим

[1]) Astronomische Nachrichten Nr. 3649.
[2]) Ciel et Terre 1898. 144.
[3]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 230.
[4]) Пор. Meteorologische Zeitschrift 1898. 307.
[5]) Kongl. Svenska Vet. Ak. Handlingar. XXXI. Nr. 2.

бігуном. Сего періоду не вдалось вивести з періоду оборотового сонця і его причини тому трудно авторам дошукатись[1]).

Щоб винайти незнані до тепер причини маґнетних бур в загалї, виходить A. Schmidt від сконстатованя, що маґнетні бурі є се сильні і довготревалі заколоти маґнетних елементів. Они мають своє жерело в льокальних відносинах, бо такі бурі впливають що правда на маґнетні елементи по цїлій землї, але виразно виступають в більше або меньше ограничених полосах. Дальшою властивостию тих заколотів є їх поступовий рух. В виду того Schmidt держить ся що правда дотеперішної гадки, що токи електричні викликують такі колибаня, але вводить ту новість, що принимає істноване мандруючих вертнів, зложених з електричних токів, і пропонує таке саме синоптичне поступоване в царинї земского маґнетизму, яке водить ся вже від давна в метеорольоґиї[2]).

З льокальних обсерваций елементів земского маґнетизму заслугують на увагу: маґнетні елементи Почдаму обчислені Eschenhagen'ом[3]), обсервациї Schück'a в околицях гамбурского заливу[4]), означеня Moureaux'a маґнетних елементів в Parc St. Maur, Perpignan і Nizza[5]), маґнетну карту Сіцилїї Palazzo і Christoni'ого[6]), нові помірки льокального впливу вулканїчних скал на елементи маґнетні в Італиї[7]).

Маґнетні дослїди Eschenhagen'a в горах Гарц виказали значний паралелїзм між маґнетними аномаліями і відхиленями пряма. З того вносить Eschenhagen, що маґнетні дослїди можуть ґеольоґови дати немалі поясненя що до будови і складу глубших верств землї[8]).

Маґнетні дослїди в нїмецкій східній Африцї перевів Maurer. Они виказали, що денні колибаня в деклїнациї ростуть з ґеоґрафічною шириною, підчас коли колибаня поземої натуги і інклїнациї сильно малїють[9]).

Pochettino мірив в Італиї, як зменьшувалась натуга поземої складової земского маґнетизму і найшов на 1000 m. зменьшене

[1]) Пор. Meteorologische Zeitschrift 1899. 383.
[2]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 385 дд.
[3]) Wiedemanns Annalen der Physik 65. 951.
[4]) Magnetische Beobachtungen an der Hamburger Bucht. Hamburg 1898.
[5]) Comptes Rendus CXXVI. 234. CXXX. 65.
[6]) Terrestrial Magnetism and Atmospheric electricity 1899. June. 87.
[7]) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei. VIII. 2 Semestre. Seria 5 a. 1899.
[8]) Forschungen zur deutschen Landes und Volkskunde XI. H. 1.
[9]) Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. X. 1899. 170.

о 0·0005 C. G. S. т. є. дещо більше як теоретично найшов Liznar, а змірив на Monte Rosa Sella[1]).

На границях українъско-рускої териториї в ґубернії курскій найдено дуже цїкаві відносини в земскім маґнетизмі. Істнує ту льокальний маґнетний бігун в Кочетовцї, де інклїнация виносить 90°. Коли від того місця віддаляєм ся, зменьшає ся інклїнация що 20 m. о 1°. Ся точка є для деклїнациї індіферентна, але за те є дві иньші точки, що віддалені від себе о 2 km. мають деклїнацию —34° і +96°. В двох иньших точках віддаленых від себе о 422 m. виносять деклїнация —11° і +45°. Позема натуга доходила до 0·59, підчас коли на рівнику, де она є найбільша, доходить звичайно лиш до 0·40[2]).

В маґнетно-нормальних околицях Італії, именно над морем коло Fiumicino і понад фуциньским озером мірив Folgheraiter льокальні маґнетні заколоти. Він приписує їх вулканїчним шутрам і піскам, що містять між иньшими складовими частями також маґнетит[3]).

Денний хід змін земского маґнетизму в полярних сторонах розслїджував Lüdeling і виелїмінувавши ріжні льокальні і часові заколоти заключив, що денну зміну мож вважати наслїдком систему сил, що окружає правильно землю що 24 годин[4]). Згадані заколоти мають денний хід зовсїм відмінний від ходу в иньших полосах землї[5]).

Нові правильности в денній змінї елементів земского маґнетизму старавсь винайти Nippoldt на основі гармонїчної аналїзи. З результатів сеї цїкавої студиї наведемо хиба те, що дїлаючі ту другостепенні сочинники підлягають на цїлій землї одному законови і вказують на річний і чотиромісячний період, що походять безпосередно або посередно з положеня землї в всесьвітї[6]).

Малі колибаня земского маґнетизму обсервував Van Bemmelen в Батавії. Они виказують: 1) Піврічний період з maxim'ами в марті і вересни, minim'ами в червни і сїчни. 2) Денний період з maximum о 3-ій, а minimum о 13-ій годинї. 3) Звязь з сонїчними плямами. 4) Згідність з періодичними колибанями полярного сьвітла[1]).

Про річний період сили земского маґнетизму каже Schwalbe ось таке: Дотепер був річний період майже нерозслїджений по причинї малої своєї амплїтуди і конечного дуже докладного знаня сочинника температури маґнета. Длятого є обсервация річного періоду можлива лиш в дуже немногих великих обсерваториях.

Schwalbe вносить з почдамских обсервацій, що слїдує: 1) Істнує виразний річний період, так що складові маґнетної сили дадуть ся представити яко функция довготи сонця. 2) Прямовісна натуга має minimum на північній півкулї в лїтї, maximum в зимі. Западне відклонене і позема натуга виказують на північній півкулї maximum в лїтї, minimum в зимі, другорядне maximum безпосередно перед minimum т. є. в сїчни. На полудневій півкулї поводить ся позема натуга прямо противно, т. є. має maximum в часї, коли на північній півкулї зима, minimum в часї, коли на північній півкулї лїто. 3) Лїнії рівноваги мусять мати в лїтї тенденцию близшого присуваня ся до себе і по при се збільшаня нахиленя, яке мають в напрямі NO—SW.

За причину річного періоду можна вважати електромаґнетні токи, що порушають ся в зимній атмосферї понад поверхнею землї[2]).

Про довші періоди земского маґнетизму наведу слїдуючі розвідки:

Звязь періоду сонїчних плям з маґнетними колибанями ще раз розслїдив Ellis на підставі маґнетних обсерваций в Greenwich в лїтах 1841—1896. Результати тих дослїдів лиш потвердили істноване такої звязи. Ellis виказав, що навіть неправильности в довготї періоду плям виступають рівночасно з такими самими неправильностями в маґнетних періодах. Так само натуги maxim'ів і minim'ів, а навіть і епохи малих долинок в кривих зовсїм гармонїзують з собою[3]).

Опираючись на властивости гончарскої глини, що при випалюваню приймає під впливом маґнетизму земского питомий маґнетизм і задержує его на всегда, пробував Folgheraiter означити маґнетну інклїнацию в дуже давних часах. Він брав з італїйских музеїв старинні вази та мірив їх маґнетизм, щоби опісля з него

---

[1]) Atti della Reale Accademia dei Lincei 1899. VIII. Ser. V. 204.
[2]) Comptes Rendus 126. 138 дд. Nature 57. 323 дд.
[3]) Frummenti concernenti la geofisica dei pressi de Roma 1900. Nr. 9.
[4]) Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1898. 524.
[5]) Ibidem 1899. 236.
[6]) Annalen der Hydrographie 1898. 267 дд.

[1]) Kon. Akademie van Wetenschappen. Te Amsterdam 1899. 22 дд.
[2]) Meteorologische Zeitschrift 1898. 449 дд.
[3]) Proceedings of Royal Astronomical Society vol. 63. ст. 64 дд.

означити в приближеню елементи земского маґнетизму в тих часах, коли ті начиня випалювано. Висліди є дуже цїкаві. З дослїдів над начинями, що походять з пятого, шестого і семого столїтя перед Христом, виходить, що істнувала епоха, в котрій маґнетна інклїнация виносила в Греції 0. Епоха та припадає меньше більше на початок шестого столїтя. Перед тим т. є. в семім столїтю перед Христом була маґнетна інклїнация навіть полуднева. Від початку шестого столїтя інклїнация дуже скоро стає північною, а при кінци пятого столїтя виносить вже около 20°. Дослїдам своїм навіть сам Folgheraiter не приписує великої певности, бо хронольоґія начинь є дуже непевна, але виходить з них без сумнїву, що був час, коли маґнетний рівник переходив через Грецию, ба навіть на північ від неї[1]).

Fritsche обчисляє елєменти земского маґнетизму для епох 1600, 1650, 1700, 1780, 1842 і 1885 зі всїх можливих до ужитку обсерваций з того часу. На підставі того материялу обчисляє Fritsche таблиці основних величин для згаданих шести епох після теориї Gaussa, признаючи новійші теориї і формули недостаточними. З так обчислених основних величин заключає Fritsche, що в елєментах земского маґнетизму зайшли значні вікові зміни. І так пересунулись північний маґнетний бігун, точка maximum ідеального розміщеня земского маґнетизму в північній Америці і тамошна точка maximum цїлковитої натуги від NW до SO. Пересунене те виносило для лїт 1650—1836 8° в ширині, а 17° в довготї ґеоґрафічній. А знов полудневий маґнетний бігун і дві иньші анальоґічні до попередних максімальні точки полудневої півкулї відбули від 1650. до 1836. рух від SO на NW о 8° в ширині, а 27°—43° в довготї. Причини тих вікових змін шукає Fritsche в змінах температури[2]).

Wild: Über den säculären Gang der Inclination und Intensität des Erdmagnetismus in St. Petersburg-Pawlowsk. (Записки. Імп. Ак. Наук. по физ. мат. отдѣленію IX. Nr. 7).

Дотичні дати є перед 1828. р. так нечисленні і непевні, що проба Вільда розтягнути криву вікового ходу земскогою маґнетизму в зад аж до половини XVIII. столїтя граничить з мало імовірностию. Між 1828. а 1870, р. є обсерваций поземої і загальної натуги у земского маґнетизму також ще рідкі і неточні, так що крива Вільда, котра відносить ся до того протягу часу, зовсїм непевна. Доперва від 1870 р. можна вважати обсерваций вдоволяючими. Віковий хід маґнетних елєментів для Павловска є від того часу зовсїм напевно сконстатований і позволяє Вільдови на слїдуюче сформуланє своїх висліднв: Віковий хід маґнетних елєментів в Павловску, а мабуть і всюди инде, не є постійний, але звязаний з такою скількостию малих неправильностий, що представлене єго звичайною формулою можна вважати лиш грубим приближенем до дїйсности.

[1]) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei 1899. Seria 5. 8. (1) ст. 69, 121, 176, 269.

[2]) Die Elemente des Erdmagnetismus für die Epochen 1600, 1650, 1700, 1780. 1842 und 1885 ihre säkulären Aenderungen. Petersburg 1899.

III. Океаноґрафія.

З поміж ріжних частий фізичної ґеоґрафії одною з наймолодших є без сумнїву океаноґрафія. Она повстала властиво доперва в сїмдесятих роках девятнайцятого столїтя, коли то специяльні корабельні експедициї назбирали велику скількість материялу, що вперве роз'яснив найголовнїйші питаня науки про море. Сей материял опрацьовувано через кілька лїт з ріжних точок погляду і океаноґрафія за той короткий час з слабої вітки виробилась на дуже обширну галузь фізичної ґеоґрафії.

Від того часу океаноґрафія розвивалась досить статочно, хотяй заперечити не можна, що в відкритях океаноґрафічних слїдувала певна стаґнация. Именно морфольоґія морского дня остала на 20 лїт в головних чертах тасама, яка була в сїмдесятих роках уложена на підставі сондованьь кораблїв Challenger'a, Tuscarora, Gazelle'i. Доперва в девятьдесятих роках начали нові океаноґрафічні експедициї приносити множество нового, важного материялу. Від кількох лїт знов океаноґрафія швидко поступає в перед, бо не тілько специяльні експедициї збирають нові океаноґрафічні дати, але і всякі иньші наукові виправи бодай принагідно докидають камінець за камінцем до дальшого розвитку науки про океани. Рівночасно і лїтературна праця над проблємами океаноґрафії іде рівнобіжно в перед і начинає входити в ґенетичний напрям.

З представлень обнимаючих загал океаноґрафії згадаю короткий підручник Luigi Hugues: Oceanografia. Torino, Bocca 1901, відповідні уступи в: Köppen'a: Grundlinien der maritimen Meteorologie. Hamburg 1899, Willi Ule'a: Grundriss der allgemeinen Erdkunde,

Leipzig 1900, Milla The International Geography by seventy autors. London 1899, дальше начерк істориї океаноґрафічних дослїдів Gottschaldt'a[1]) і цїкаву книжку Chun'a: Aus den Tiefen des Weltmeeres Jena 1900.

В оглядї океаноґрафії за послїдні роки XIX. віку найперше поміщу працї загального змісту, потім перейду поодинокі океани та їх побічні моря.

В морфольоґії океанічних просторів є одною з найвизначнїйших праць незначна що правда об'ємом, але дуже богата змістом розвідка Supan'a: Die Bodenformen des Weltmeeres[2]). Она старає ся завести одноманїтність в клясифікациї та номенклятурі просторів морского дна. Автор виходить з чисто ороґрафічної основи, що релєф морского дна зависить в першій лїнії не від абсолютної, а від зглядної глубини. Дно всїх океанів складаєсь після Supan'a з двох частий; з континентальної полоси і з властивого дна моря. Континентальна полоса (Kontinentalrand) складає ся знов з двох частий: з континентальної площі (Kontinentalplateau), що є плоским слабо нахиленим продовженєм побережа і має над собою maximum 200 m. води, та з континентальної збочи (Kontinentalböschung), що опадає більше або меньше стрімко, а часто порогами до властивого дна морского.

Форми властивого морского дна є до тепер досить мало пізнані та розслїджені. Винесеня з положистими збочами назвати може підморскими порогами (Schwellen), винесеня, що мають збоча стрімкійші, зовем підморскими високорівнями (Plateaus), а если розпостирають ся поздовж, підморскими хребтами (Rücken). Підморскі високорівнї та хребти, если носять на собі острови, зовем островними хребтами чи високорівнями. Крім тих обширних винесень морского дна розріжнює Supan підморскі гори, що сховані зовсїм в глубинї, підморскі лави, що вже підходять під саму поверхню моря, і островні гори, що вистають вже понад поверхню моря.

Попри винесеня морского дна важні є і заглубленя в нїм. Найбільша часть дна морского є зовсїм плоска з мінїмальними ріжницями від площі. Таку часть дна зовемо плоским дном (Flachgrund). — Оно може лежати в більшій або меньшій глубинї. В тім

[1]) Progr. Realschule in Kiel. 1900.

[2]) Petermanns Mittheilungen т. XLV. 1899. ст. 177 дд.

плоскім днї можуть бути ріжні заглубленя тз. підморскі доли. З них без сумнїву найхарактернїйші є тз. рови (Graben, давнїйше звані Rinnen). Они всї лежать на краях континентів і то здовж фалдових гір та виказують найбільші глубини, які коли-небудь в морях висондовано. Запропонувавши в той спосіб одноманїтні назви ріжних морфольоґічних явищ морского дна пропонує Supan, щоби номенклятура підморских вивисшень і заглублень була також одноцїльна, щоби именно надавано їм чисто ґеоґрафічні назви, а не як до тепер імена кораблїв або осіб.

Друга часть розвідки Supan'a є властиво об'яснюючим текстом до виданої ним рівночасно оглядової карти будови дна морского. Подамо коротко єї зміст, бо она дуже добре дає нам пізнати, що предприняті в послїдних часах океаноґрафічні дослїди дають нам зовсїм иньший погляд на пластику дна океанів, як був сей, що панував доселї.

Після новійших дослїдів будова дна індийского океана не є така проста, як думали до недавна. Є ту в західній і полудневій части пять підморских вивисшень: Хребет островів Chagos, поріг Маскаренів, Мозамбіка, Crozet і Kerguelen. Найглубші місця є на полудни від малих Сундів (над 6200 m.) як се вже давно було звісно, але дуже значні глубини відкрито також на полудне від австралїйского континенту та між порогами Crozet a Kerguelen, в полудневій части океана, де давнїйше припускано незначні лиш глубини. Будова Великого океана натомість показує ся значно простійшою, чим давнїйше думано. Тихий океан має дві великі заглубини: властиву пацифічну заглубину і заглубину чілїйско-перуаньску. Дїлить їх від себе тз. поріг острова Великодного (Waihu). Заглубина пацифічна похиляє ся до западу і має найбільші глубини по окраїнах. Є се ідучи від півночи на полудне: рів алеуцкий, рів японьский з глубиною Tuscarora вважаною до недавна за найбільшу на земли (8513 m.), рів каролїньский, рів Tonga і рів Kermadec, де висондовано найбільшу до тепер знану глубину 9427 m. Чілїйско-перуанська заглубина опадає противно до сходу, де при самім побережу Америки лежить рів Atacama. Для пластики Тихого океана дуже важний також обширний поріг гавайский та численні заглубини, пороги і високорівнї в прибережних та середземних морях, що належать до того океана. Новійші дослїди в деяких місцях зовсїм обертають дотеперішні погляди. — Атлянтийский океан передїлений на цїлій довжинї т. н. атлянтийским хребтом і виказує проте дві заглубини. Они тягнуть ся від хребта, що лучить Ісляндию з британьскими островами аж мабуть далеко в антарктичний

океан. Незначна підморска набренїлість дїлить кожду з тих довгих заглубин на дві части, разом отже на чотири: північно-американьску (найглубшу, де висондовано найбільшу глубину в Атлянтийскім океанї 8341 m.), бразилїйску, північно-африканьску і полудневоафриканьску. На північ від ісляндского хребта лежить тз. північна заглубина, віддїлена тз. арктичним порогом від арктичної заглубини, що занимає в арктичнім океанї місце між Ґренляндиєю а Шпіцберґами. Дуже цїкаві кон'єктури подає Supan що до полудневого Атлянтика і дуже основно переходить всї належачі до него прибережні та середземні моря.

Термінольоґією і номенклятурою підморских форм терену занимавсь також міжнародний ґеоґрафічний конґрес в Берлїнї 1899. Однак внесене Wagner'a і Krümmel'a, щоб завести чисто ґеоґрафічну номенклятуру, не стрінулось з загальним признанем[1]).

Про підморскі долини річні, часті на западно-европейских побережах, пише Hull. Він вважає їх за ерозийні витвори рік ледової епохи, що в деяких прихильних відносинах вдержались перед замуленем. В многих разах однак їх істноване вважати належить проблєматичним задля малого числа сондовань[2]).

Такі підморскі долини відкрито в послїдних часах в многих околицях, де они були причиною ломаня ся підморских телєґрафічних каблїв.

Про відложеня на днї океанів працює від довшого часу Thoulet. На конґресї ґеоґрафів в Берлїнї подав він цїлу клясифікацию тих відложень[3]), представив їх розміщене картоґрафічно[4]) і займавсь ґрунтовно їх механічною аналїзою, котра може бути дуже важна для пізнаня давнїйших ґеольоґічних відложень[5]). Важне є також відкрите Thoulet'a, що пороваті скали пр. пумекс, вапняк втягають в себе дуже мілкі частинки ілів[6]), та єго досліди над впливом підморских вулканїчних вибухів на рід і форму глубинних відложень[7]).

Wrangell займаєсь відложенями річними при морских берегах росийских рік[8]).

[1]) Verhandlungen des 7. int. Geogr. Kongr. Berlin 1899. I. 164 д. II. 350 д.
[2]) Geographical Journal. XIII. 1899. 285 д.
[3]) Verhandlungen des 7. intern. Geogr. Kongresses II. 354.
[4]) Bulletin de la Société de géographie. XX. 1899. 182.
[5]) Annuaire des Mines 1900. avril.
[6]) Comptes Rendus CXXX. 1900. 1639.
[7]) Revue Maritime. CXLVI. 1900. 55.
[8]) Записки по гидрографіи 1900. т. XXI. 105.

Murray опрацював розміщене вугляну вапна ($CaCO_3$) на днї океанів і найшов, що 42·5% поверхнї дна всїх морий покривають відложеня заключаючі більше чим 25% сего вугляну[1]).

З хемічних дослїдів над морскою водою занотую розвідку Thoulet'a про примішки мінеральних і ґазових частий в морскій водї[2]), і Gautier'a про йод в водї морскій. В неорґанїчних сполуках є єго лиш 0·2—0·5 mg. в літрі води, в орґанїчних доходить він до 2·4 mg.

Brandt доказав, що бактериї, котрих є дуже в морскій водї, видїлюють з азотинів (MNO_2) і амоняку азот, що входить в воздух находячий ся в морскій водї[3]).

Про температуру моря в загалї оголосив важну розвідку Murray. Цїкавий є розділ температури при морскім днї. 5·2% поверхнї морского дна має температуру вишу чим 10°, 2·5% має 10° до 4·4°, 48·9% має 4·4° до 1·7°, 40·6% має 1·7° до 1·1°, меньше чим 1·1° виносить температура при днї на 2·8% поверхнї дна. Середна температура води при днї =2·6°.[4])

Ізотерми і ізаномалї морскої поверхнї розслїдив в послїдних часах Köppen головно зі згляду на знану симетрию, з якою держать ся на північній півкулї теплі струї західних берегів континентів, а зимні східних (на полудневій прямо противно)[5]).

Цїкаві дані про пароване води морскої та прісної дали досліди, що їх перевели в Терстї Mazelle і Faidiga евапоріметрами Wild'a. Вода морска мала соли 3·73%, солодку брали з омброметра. Показало ся, що вода солона і солодка не завсїгди однако ся заховують. Пароване води солодкої є правильно більше, чим солоної. Коли однак загальне пароване збільшаєсь, зменьшає ся рівночасно квот чисел виражаючих пароване солодкої і солоної води. Коли температура підносить ся, збільшає ся і пароване обосторонно, але скорше у солодкої, як у солоної води. Так само має ся річ, коли росте середна скорість вітру. Колиж середна вохкість воздуха росте, зменьшаєсь евапорация обосторонно, але вже зовсїм однаково[6]).

[1]) Geographical Journal XIV. 1899. 426.
[2]) Revue maritime CXLV. 1900. 37.
[3]) Über den Stoffwechsel im Meere. Kiel. 1899.
[4]) Geographical Journal XIV. 1899. 34.
[5]) Annalen der Hydrogaphie 1898. ст. 356 дд.
[6]) Anzeiger der kais. Akademie der Wiss. in Wien 1898. Nr. 7. Sitzungsberichte der k. k. Akad. d. Wiss. in Wien. Mat. nat. Klasse. т. 107. IIa. ст. 270. Annalen der Hydrographie 1899. ст. 469.

Про барву води морскої іде спір між Abbegg'ом, що переносить на море теорию Tyndall'a про синяву неба[1]) і Spring'ом, що синю барву моря виводить з ріжних хемічних причин[2]).

Прозорість морскої води також не є дотепер докладно пізнана. Цїкаве питане, як далеко заходить сьвітло в морскі глубини, не є дотепер рішене. Теоретично заходить оно в найбільші глубини, але практичні досліди показали, що так не є. Способом Secchi'ого т. є. через занурюване в море округлого білого кружка, найдено, що сьвітло сонця доходить лиш до 50 m. глубини, а при дуже великій прозорости до 100 m. В дуже многих морях сьвітло не доходить і до 50 m. Виправа австрийского корабля Pola доказала, що прозорість кінчить ся в Східнім Романьскім мори недалеко 40 m. під зеркалом, в Еґейскім 36 m., в Червонім вже 24 m. Далеко докладнїйша є фотоґрафічна метода. Плиту фотоґрафічну занурює ся до певної глубини і виставляє ся на дїланє сьвітла. Потім закриває ся єї знов, витягає ся і розсліджує. До недавна міродайні були в тім напрямі висліди Fol'a і Chun'a, що виказали останні слїди сьвітла в 400, зглядно 500 m. глубини. Luksch підчас виправи Pol'і найшов їх ще в 600 m., але нисше не виказували вже плити якої небудь зміни. Щож однак робити з обставиною, що н. пр. найдено многі ростини в глубинах більших чим 1000 m. Яка є натуга сонїчного сьвітла в глубинах моря, також нїчого не знаємо. Одні кажуть, що в глубинї 170 m. є лиш так ясно як у нас підчас зоряної ночи, другі твердять, що ще в 4000 m. глубини є так ясно, як підчас повнї. Дальше не знаєм, які роди сьвітляних лучів найглубше заходять. В поверхневих верствах найсильнїйші є фіолетні, але хто знає, як є в більших глубинах. Досліди над тою справою повинні бути тепер на ново підняті, коли відкрито лучі Röntgena[3]).

Рух филястий води морскої представлений аналїтично в книжцї Wien: Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig 1900.

Теорию повставаня филь Helmholtz'a популярно представив Baschin[4]).

---

[1]) Prometheus X. 1899. 305.

[2]) Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie 1899. II. 99.

[3]) Про висліди Luksch'a пор. Denkschriften der kais. Akademie der Wissensch. in Wien Bd. LXIX. 1900. Mittheilungen der kais. königl. Geogr. Gesellschaft in Wien т. XLIV. 1901. ст. 189 дд. пор. також Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1898. Nr. 30.

[4]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde. XXXIV. Berlin 1899. 408.

Vaughan Cornish хоче утворити під назвою кіматольоґії окрему науку, що занималаб ся нетілько океанїчними филями, але і всїми витворами подібними до филь зі снїгу, піску, навіть на земскій корі[1]).

На мареоґрафі в Sydney реґістровано часто високі филї з дуже довгою, майже півгодинною проміжкою між двома горами филї. Вважано їх за сейсмічні, бо є дуже до них подібні, але Russell виказав, що они є чисто метеорольоґічного походженя. Именно в часї барометричного minimum в тих околицях підносить ся зеркало моря дещо, а се вже справляє льокальні струї вздовж S і E побережий. Ті струї лучать ся в проливі Bass'a і витворюють там згадані великі стоячі филї, що відбивають ся на сиднейскім мареоґрафі[2]). Подібні стоячі филї обсервував Dawson на побережах Нової Шкоциї[3]).

Великі филї, що повстали 1896. VI. 15. в наслїдок землетрясеня в Kamaishi, обговорив Davison. Они перейшли в поперек весь Великий океан. На Гавайских островах доходили ті филї по висоти 2·5 m. понад звичайний позем припливу і наробили шкоди. В St. Francisco була їх висота ще доволї значна[4]).

Явище припливу і відпливу моря опрацював теоретично Lévy[5]). Представлене формул Newton'a з модифікациями льорда Kelvin'a, формул Laplace'a, Darwin'a і Airy'ого та гармонїчної аналїзи є дуже основне і ясне. Нових доріг однак Lévy не вказує.

Важні причинки до обчислюваня неправильностий филь припливу подав Boergen[6]) і Harris[7]).

Thoulet виказав експериментально в околиці Brest'a, що струї повстаючі при припливі і відпливі мають в ріжних глубинах ріжний напрям[8]).

---

[1]) Verhandlungen des VII. Internat. Geographen-Kongresses Berlin 1899. II. 207.

[2]) Revue Scientifique 1898. Nr. 24. Petermanns Mittheilungen 1899. LB. 862.

[3]) Proceedings of Royal Society of Kanada II. Ser. 5. Sect. III. 1899/1900. 23 д. Petermanns Mittheilungen 1900. LB. 484.

[4]) Philosophical Magazine. L. 1900. 579. Naturwissenschaftliche Rundschau 1901. 115.

[5]) Leçons sur la théorie des marées professées au College de France I. Paris 1898.

[6]) Verhandlungen des VII. Intern. Geogr. Kongresses in Berlin. II. 132.

[7]) Nature. LXII. 1900. 258.

[8]) Meteorologische Zeitschrift 1899. 313.

Перегляд розміщеня морских струй цїлої землї подає карта, видана британйским гидроґрафічним урядом.

Повставане морских струй представив теоретично Bjerknaes, вважаючи їх причиною ріжниці тисненя і густоти[1]).

Witte вияснюює появу зимної води при побережах морских відклонюючим дїланєм обороту землї та відосередної сили струй пливучих луком. Вітер по єго думцї має дуже малий на се вплив[2]).

Про подвійні струї в проливах робив Макаров пильні досліди в Босфорі, Bab el Mandeb, проливі Gibraltar'a, Formosa, La Pérouse. Перші три проливи мали дві струї, що ішли над собою. В проливі Формози ішли дві противні струї поруч себе, бо температура і питомий тягар морскої води є при китайскім березї значно меньші, як при формозаньскім. Подібно є в проливі La Pérouse'a, де рамя великої теплої струї Kuro-Siwo пливе на північ, а поруч него від NW—SE струя зимна[3]). Wharton противно приписує повставане таких струй впливам вітру і сильно полемізує з Макаровом[4]).

Pettersson виказав, що при топленю ся пливучих ледів повстають наслїдком обниженя температури і густоти води морскої прямовісні струї[5]).

Перегляд поодиноких океанів, їх середземних та прибережних морий начну від атлянтийского океана і зверну увагу на тз. Segelhandbuch виданий для него в друге інститутом Deutsche Seewarte.

Океан атлянтийский.

Північно-атлянтийский океан належить до найлїпше пізнаних морий. Від него начались властиві океаноґрафічні досліди і ведуть ся від пятьдесятих років минувшого столїтя постійно. Именно в 1895. і 1896. роцї працювали ту ріжні експедициї, що принесли много нового, хоч працювали без злуки, а тимсамим без спільного пляну.

Даньска експедиция на кораблї Ingolf мала головною цїлию зоольоґічні та хемічні досліди, які мають велике значінє для океаноґрафії. З важнїйших ґеоґрафічних здобутків вкажемо на сконстатоване підморскої вулканїчної лави на SW від Reykjanes (на Ісляндиї), що колись мабуть виставала понад поверхню моря. В 1578. р. бачив Frobisher в тім місци остров, що тепер не істнує[1]). Експедиция зібрала також важні дані про полярну струю, що йде на сходї від Ісляндиї на південь і стикаєсь з Golfstream'ом на підморскій лаві між Ісляндиєю а островами Faröer. Обі струї взаїмно спиняють ся в своїм бігу. Ґольфштрем бере завсїгди верх і лиш часами при сильних північних вітрях відклонюєсь в полудневу сторону. Полярна струя западає звичайно під єго теплі води і помішавшись з ними значно підвисшає свою температуру. Лишень в немногих місцях удає ся зимній бігуновій водї не змішавшись проникнути на полудне[2]).

Над тими відносинами робила досліди також анґлїйска експедиция на корабли „Research". Важні суть крім того досліди анґлїйского рибацкого уряду, що випустив кілька тисячів порожних фляшок і корків. Ті, що їх випущено між островами Faröer і Shetland більше до сходу, поплили на схід, а потім на полудне і були виловлені на Шетляндах, Оркадах та східних побережах Британиї. Ті, що їх випущено більше на захід, занїс Ґольфштрем на побережа Норвеґиї, але лиш в дуже малій скількости. Фляшки випущені на нїмецкім мори виказали, що водна циркуляция на тім мори є з малими виїмками цикльонїчна[3]).

Данїя вистачила ще одну виправу в ті сторони. Корабель „Diana" осмотрював в практичних цїлях важні для рибальства а небезпечні задля мраки і непевної погоди води Ісляндиї і Фарєерских островів. Пильними сондованями (1898 і 1899) вспіла експедиция докладно зняти всї нерівности морского дна тих околиць і спорудити докладні мапи[4]).

Карту глубин околиці Азорів головно після сондовань князя Monaco спорудив Thoulet. З глубини 3100 метрів видобуто під +47° ширини, а 29°40′ W довжини від Парижа кілька обломків каміня. Хемічна аналїза виказала, що се є рід базальтового скла тз. трахилїта — отже вулканїчну породу найдено в віддаленю 500 миль від Азорів в напрямі Ісляндиї[5]).

Новійші досліди переведені в заливі Fundy Bay, де як звісно приплив моря є найбільший на цїлій земли, бо доходить підчас ви-

---

[1]) Meteorologische Zeitschrift. 1899. 313.
[2]) Grogr. Gymn. Brieg. 1900.
[3]) Proceedings of Royal. G. Society Edinburgh 1899. т. 22. Nr. 4.
[4]) Nature LX. 1899. 261., 316., 544. LXI. 1900. 29.
[5]) Petermanns Mittheilungen 1900. 84.

[1]) Petermanns Mittheilungen Bd. XLVI. 1900 ст. 1 дд.
[2]) Про иньші результати „Ingolf'a" пор. Naturwiss. Wochenschrift 1900 ст. 249.
[3]) Ibidem. ст. 30 дд.
[4]) Geografisk Tidskrift. XV. ч. 3—4.
[5]) Comptes Rendus т. 128. ст. 849. 1471. Petermanns Mittheilungen 1900. Lb. 481.

сокого припливу середно до 27·1 m. виказали, що однак середня висота припливу є меньша, чим в заливі св. Лаврентия[1]).

Струям північно-атлянтийского океана присьвячені є дві спеціяльні розвідки: Wegemann'a і Pettersson'a. Wegemann опрацьовує головно історичну сторону предмету[2]), Pettersson поступає більше конструктивно і старається на підставі давнійших і новійших дослїдів завести лад в замотаних дотепер наших відомостях про струї сеї части океана. Розріжнює він отже наперед властивий Ґольфштрем, що заточує велике півколо довкола моря Sargasso і лучить ся з рівниковими струями від тз. Golfstromtrift, ґольфової струї, що виповнює своїми раменами північноатлянтийский океан.

Цїлий сей простор можна подїлити на чотири заглубини: дві західні 1) межи Labrador'ом а Ґренляндиєю 2) межи Ґренляндиєю а хребтом Reykjanes; та дві східні 3) між хребтом Reykjanes а хребтом Rockall 4) між хребтом Rockall а хребтом Wyville Thomson'a. Конфіґурация морского дна дуже впливає на циркуляцию води. Важнїйші вітви ґольфової струї є ось ті. В заглубинї першій іде одна галузь теплої води аж до 55° шириии верхом, потім пливе під водою аж в пролив Davis'a і топить там ледові гори, в другій заглубинї, званій Ірмінґерским морем, маєм лиш одну другорядну галузь теплої води, що прибувши з третої заглубини обливає зі заходу Ісляндию, а стрінувшись з зимною східно-ґренляндскою струєю в даньскім проливі, западає під ню і пливе дальше на північ.

Далеко більша є дїяльність ґольфової струї в обох східних заглубинах. Маємо ту два великі рамена, від котрих розходить ся много меньших галузий. Перше з тих двох рамен іде здовж хребта Reykjanes на північний схід і на лаві, що лучить Ісляндию з островами Faröer, стикає ся з зимною східно-ісляндскою струєю. Скручує отже на полудне, а повернувши круто довкола Faröer'ів іде на північ, переходить понад другим раменем східно-ісляндскої зимної струї та прямує просто до Шпіцберґів. На захід від них входить головна галузь сего рамени під воду і, як виказав Nansen, заходить дуже далеко на північ. Від сего рамени виходять на лїво три головні галузи, на право дві. З тих, що виходять на лїво, одна є згадана вже галузь, що входить в ірмінґерске море. Друга лїва галузь прямує до острова Ян Маєн, трета виходить під 72° на північний

[1]) Annalen der Hydrographie 1900. ст. 181 д.
[2]) Archiv der deutschen Seewarte т. XXII. ч. 4.

запад до берегів Ґренляндиї. З правих галузий одна виходячи під 68° обливає північні кінчини Европи і сягає аж до Нової Землї, друга обливає полудневі кінчини Шпіцберґів[1]).

Новійші дослїди про Ґольфштрем збирає Врангель[2]).

Звідки походить вода Ґольфштрема, розслїджував Cleve на основі обсерваций планктона і прийшов до висліду, що планктон іде тою самою дорогою, що і пливучі більші маси пр. дерево, і походить з тих самих місць[3]).

Для пізнаня струй океанїчних є дуже важні дороги ріжних предметів, відданих їм зовсїм на поталу. Найбільше користає океаноґрафія з решток розбитих кораблїв та з т. з. почт фляшкових. Пр. розбитий корабель Yale від 1899. X. 30. до 1900. III. 24. заточив круг від рога Hatteras попри острови Бермуди до островів Bahama. З фляшок, що їх в послїдних часах викинено, одна з $\varphi = -10^0$, $\lambda = -28^0 56'$ оплила ріг Roque і приплила до Haiti; друга від Канарийских островів через полосу пассатів і ґольфштрем заплила до Ірляндиї[4]).

Плаваючі ледові гори появлялись коло New Foundland в великім числї в р. 1898. Рік 1899. був специяльно богатий в ледові гори[5]).

Побічні т. є. середземні і прибережні моря атлянтийского океана піддаєть ся також дуже докладним розслїдам, так як они обливають культурні краї, що в інтересї безпеченьства плавби, рибальства, при закладаню підморских телеґрафів і т. д. не залишують нагоди розслїдити їх науково.

Струї заливу св. Лаврентия опрацював Bell Dawson[6]). В американьскім середземнім мори переведено при закладаню телеґрафів цїлу серию сондовань.

На европейскім середземнім мори маєм до занотованя також кілька робіт.

Каблевий корабель Amber найшов на схід від Сицилиї глубини до 3950 m., а на підморскій височинї Barka дуже неправильний профіль. Фляшковою почтою сконстатовано полуднево-західну струю

[1]) Petermanns Mittheilungen Bd. XLVI. 1900. ст. 61 дд. 81 дд.
[2]) Записки по гидрографии. XXI. 1900. 44.
[3]) Geographisches Jahrbuch. XXII. 1899. 19.
[4]) Geographisches Jahrbuch. XXIV. 173.
[5]) Ibidem 171.
[6]) The Currents in the Gulf of St. Lawrence. Ottawa 1900.

з лїоньского заливу до рога Пальос[1]). В проливі мессиньскім сконстатовано часами так сильні струї, що великі пароходи на слухали керми[2]).

Розслїди над Чорним морем переведені в р. 1890. і 1891. тепер доперва опрацьовуєсь. Шпіндлєр і Вранґель оголосили про сї дослїди обширну роботу в приложеню до 20 тома „Записокъ по гидрографіи“[3]). Обрахована ту на ново середна глубина Чорного моря на 1197 m. З фляшкової почти на Чорнім мори вносить Вранґель, що панує ту цикльонїчна циркуляция на поверхнї води, викликана пануючими вітрами[4]).

Видобуті підчас розслїдів проби відложень на днї моря Чорного і Азовского обробив Murray[5]).

Прямовісним подїлом температури в Чорнім і Каспійскім мори занимаєсь Köppen[6]). В Чорнім мори, як взагалї в слабо засолених середземних морях, що стоять в звязи з більше засоленими, є розклад температури в лїтї ось такий: Від поверхнї, що є тепла, зменьшаєсь температура дуже скоро, а осягнувши з невеликій (меньшій звичайно як 100 m.) глубинї своє minimum, зростає потім статочно, хоч поволи. В зимі температура від поверхнї статочно знижаєсь аж до згаданої глубини, потім же знов підвисшаєсь. Причини сего явища належить шукати в тім, що долїшні верстви води Чорного моря походять з моря Середземного, є отже більше солоні і густі. Верхні верстви води є в наслїдок великого числа впадаючих в се море великих рік сильно засолоджені, отже рідші. Між ними а долїшними верствами нема нїякої виміни, вода з долу не дістаєсь майже нїколи на поверхню, не має проте кисня, а натомість містить в собі великі скількости сїрководня. В зимі поверхнева вода остудившись неможе опасти на дно моря, а лиш до певної глубини — она то творить ту посередню, в лїтї найзимнїйшу верству. В Каспійскім мори є відносини зовсїм иньші. Оно не лучить ся з нїяким иньшим більше засоленим морем, проте опадає ту температура в лїтї одностайно аж до дна.

В каналї La Manche переведено також важні океаноґрафічні дослїди. Thoulet водав дуже цікаві лїтольоґічні карти сего

[1]) Annalen der Hydrographie 1899. 288. 1900. 498.
[2]) Ibidem 1899. 568.
[3]) Петербург 1899. 100 ст.
[4]) Записки по гидрографіи XX. 1899. 233.
[5]) Scottish Geographical Magazine XVI. 1900. 673.
[6]) Annalen der Hydrographie 1899. ст. 468.

каналу в розмірі 1:100000. Британийска комісия ґеодетична означила середний позем сеї части моря о 0·04 m. низший від означеного в 1859[1]).

Явища припливові і відпливові в Каналї і полудньово-западній части нїмецкого моря обговорює подрібно Börgen. Велика ріжнородність в часї і натузї тих явищ толкуєсь, як знаєм, інтерференцією припливових филь[2]).

Море нїмецке (північне) має бути в початкових лїтах XX. столїтя ґрунтовно розслїджене ві всїх напрямах після пляну поставленого на міжнародній конференциї морскій в Штокгольмі 1899.

Ледові відносини сего моря в р. 1899. і 1900 обробив Herrmann[3]). Крім того важні є дослїди над припливовими і відпливовими струями в тім мори Simpson'a, Buchan'a, Phaff'a.

Море балтийске представив коротко Rein з фізичного і біольоґічного огляду[4]). Прецизийна нївеляция переведена пруским ґеодетичним інститутом на побережах Балтийского моря показала, що давний погляд на неправильности зеркала сего моря є неоправданий. До недавна думали, що се зеркало лежить коло Клайпеди (Memel) 30 cm. висше, чим в Kiel. Тепер виказано, що та ріжниця виносить ледви кілька центиметрів і має своє жерело в постійнім віяню западних вітрів[5]).

Про струї балтийского моря оголосив розвідку Engelhardt. Він виказує в нїм цикльонїчний рух, именно при полудневім і східнім побережу струю на північ, при шведскім березї на полудне[6]). Струї в Белтах обробив Knudsen[7]).

Океан Индийский розслїджували в остатних роках XIX. столїтя численні кораблї анґлїйскі. Однак їх сондованя є меньше важні в порівнаню до висліїдів наукової експедициї нїмецкої, що плавала в р. 1898. і 1899. на кораблї Valdivia[8]).

[1]) Geographical Journal XIV. 1899. 571.
[2]) Annalen der Hydrographie 1898. ст. 414. 462.
[3]) Annalen der Hydrographie 1900. 536.
[4]) Sb. niederrh. Ges. f. Nat. Bonn 1899.
[5]) Veröffentlichungen des königl. Preuss. Geodätischen Instituts. N. F. Nr. 4. Postdam 1900. Пор. Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1899. Nr. 47.
[6]) Aus dem Archiv der deutschen Seewarte XXII. 1899. Nr. 6.
[7]) Пор. Petermanns Mittheilungen. 1900. LB. 482
[8]) Висліди сї представив більше популярно Chun в книжцї: Aus den Tiefen des Weltmeeres. Jena 1900. 550 c.

Valdivia під научним проводом Chun'a працювала (1898/9) наперед в північно-атлянтийскім океані, де стверджено звязь між питомим тягаром води морскої, а плавними знарядами ростинок планктону. В полудневоатлянтийскім океані відкрито цїкаву підводну лаву (25°S, 6°E) і глубину до 5000 m. на запад від лави рога Agulhas. Найважнїйшим результатом експедициї є однак відкрите значної глубини (над 5000 m.) на границях антарктичного та индийского океану, де перше припускано дуже незначну глубину. В тропічних частях индийского океана переконали ся океаноґрафи Valdivi'ї, що тз. австральско-индийска заглубина несягає так далеко на полудневий захід, як дотепер припускано. Температури глубинні в цїлім индийскім океанї показали ся дуже низькі. В глубинї 5000 m. температура нїгде не доходить до 2°C навіть під рівником, на границї антарктичного океана була всюди низша 0°. Дуже характерні є відносини температурні в полудневій части индийского океана (пр. 63°S, 54°E). На поверхнї води температура виносила —1° до —1·5°. Між 100 а 200-метровою ізобатою температура води підносила ся вище 0° і статочно підвищала ся в міру, як глубина росла. Аж меньше більше від 3000° m. глубини температура знов стала низшою від 0°. Цїкаве є також відкрите, що тропічне сонце успіває огріти лиш тонку зверхну верству моря, так що в глубинї 200 m. температура тропічних морий дуже мало ся ріжнить від температури морий умірковапої полоси. З тим получене є ще иньше цїкаве явище, яке трафляєть ся в більших озерах прісно-водних, а не в морях. Именно до глубини 50—100 m. маємо в тропічнім индийскім океанї температуру, що дуже мало ріжнить ся від температури поверхнї моря. Потім слїдує нагле (на просторі 20—25 m.) обниженє температури часто о 8°—9° і від тодї вже термометр аж до дна морского постійно опадає. Причина того цїкавого явища лежить на думку Chun'a в тім, що горішна верства моря є під впливом інсоляциї сильно огріта. Вода, що під нею лежить, підлягає сильним льокальним струям, але в загалї остає завсїгди в країнї монсунів і проте находить ся все в одній глубинї та має низьку температуру.

Крім тих важних відкрить поробила експедиция ще много иньших поменьших пр. розслїдила вплив морских струй на фізичні і хемічні відносини морскої води, наново віднайшла остров Bouvet'a і означила єго положенє, обсервувала антарктичні ледові гори і т. д.[1]).

[1]) Пор. також Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. Bd. XXXIV. 1899 Nr. 2. 75 дд.

Вийшла нова частина голяндского великого атлясу индийского океана. Она обнимає ізотерми поверхнї моря, температури воздуха, напрям струй і многі метеорольоґічні дані для червня, липня і серпня[1]). Анґлїйска урядова публїкация Meteorogical Charts of Southern Ocean etc. London 1899. представляє в 20 картах температури поверхнї моря і струй між 40° а 45° полудн. ширини, 10° а 180° східної довготи.

Побічні моря индийского океана.

Австрійска експедиция на кораблї „Pola“ (1897/8) розслїджувала Червоне море. Она занималась більше хемічними та біольоґічними дослїдами, але і морфольоґічні відносини сего моря були докладнїйше як дотепер розсмотрені. В полудневій части відкрито шість депресий, що ідуть рядом. З них найглубша є та, що лежить під 22° північної ширини. Там висондовано найбільшу глубінь Червоного моря (2190 m.). В проливі Bab el Mandeb найдено максимальну глубину 300 m. Температури і густота води є в тім мори дуже значні. Температура є висша в полудневій части моря, де найдено maximum =32·5°C, густота, т. є. скількість соли, більша в північній части, де найдено maximum =4·08% соли. Такі відносини вказували на істнованє в проливі Bab el Mandeb сильної струї поверхневої від океана до Червоного моря та глубинної струї в противнім напрямі. Такі струї і виказали анґлїйскі дослїди 1898. року[2]). Від глубини 700 m. аж до дна панує в Червонім мори температура 21·5°. Прозорість води є значно більша в північній, як в полудневій части. Занурена біла таблиця зникала для ока обсерватора там в 50 m. глубини, тут в 39 m. Замітна є велика скількість кисня в долїшних верствах води і нерівно значнїйша скількість орґанічних субстанций в намулї Червоного моря, чим пр. в намулї моря Середземного[3]).

Друга важнїйша океаноґрафічна експедиция в обсязї индийских морий плавала в лїтах 1899. і 1900. по морях австральско-азийского

Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. 1898. Nr. 10 ст. 517 дд. Petermanns Mittheilungen Bd. XLV. 1899 ст. 24, 48, 72, 128. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. Bd. X. 226 дд.

[1]) Waarnemingen in den Indischen Ocean etc. Amsterdam 1900. 22 карти.

[2]) Annalen der Hydrographie 1898. ст 520. дд.

[3]) Wiener Akad. Anzeiger 1898. 13. Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien Bd. XLII. ст. 47 д.

архіпеляґа на голєндерскім суднї „Siboga“ під научним проводом Weber'a. Властива єї ціль була розслїдити морску фауну і фльору того архіпеляґа; але і для ґеоґрафії є висліди сеї експедициї дуже важні.

Віддавна було вже знаною річию, що в згаданім архіпелязї находить ся між численними островами кілька значних заглубин. Але до близшого розслїдженя дуже замотаних в тих околицях відносин було ще дуже далеко. Длятого могла голяндска експедиция много нового принести. Сконстатовано наперед, що істнують ту дві независимі від себе заглубини: море Banda і Celebes'a. Море Banda не є так глубоке, як дотепер думано на підставі одного з давнїйших помірів, що виказав для него максимальну глубину 7800 m. Siboga не висондовала на тім місци анї в єго околици більшої глубини як 4000 m., найшла за те в иньшім місци 5684 m. Море Banda стоїть в звязи з глубоким (4000 m.) морем коло острова Ceram і заглубинами коло островів Halmahera, Flores, Bali і Savu, де висондовано також значні глубини. Експедиция відкрила також цїкавий підморский хребет, що названо хребтом Siboga. Він передїлює море Banda на дві части. Море Celebes є також розмірно дуже глубоке, бо виказує глубини понад 5000 m.

Знаною вже віддавна було річию, що море Banda від глубини 1600 m. аж до дна має температуру $+3^0$C, підчас коли пр. Індийский та Тихий океани на своїм днї мають температуру 1^0 зглядно $1{\cdot}8^0$. Витолковувано се вже давнїйше теоретичним припущенем, що між тими океанами а морем Banda є підморский вал, на котрім найбільша глубина виносить 1600 m. Правду сего припущеня сьвітло потвердили сондованя Sibog'і, доказуючи рівночасно, що зимна вода 3^0 в мори Banda не походить з Індийского океана, де віддїлюючий хребет значно висше ся взносить, але з Тихого через молюцкий пролив. Подібно море Celebes має від 1300 m. до дна температуру $3{\cdot}7^0$. І она походить мабуть з Тихого океана, але наглядно сего виказати не могла експедиция, бо не могла найти жаданого підморского хребта. Натомість стверджено, що пролив між островами Bali a Lombok не є глубокий, як давнїйше по недокладних сондованях думано, а плиткий. Тим самим сильно підтятий є роздїл Wallace'a, що з зооґеоґрафічних зглядів поклав тут границю між Азиєю а Австралїєю. (На Lombok найдено крім того одного Cyprinoid'a в солодкій водї, що також промовляє проти теориї Wallace'a).

Дуже важні є дослїди експедициї над складом морского дна і над біольоґією морских глубин. Ту піднесемо тільки те, що мимо

великої глубини тих середземних морий, дно не тільки не має океанїчного характеру, але навіть і пеляґічного годї єму признати. Навіть в найбільших глубинах подибувано прибережні осади, решткы ростин, ба навіть цїлі пнї дерев, овочі і листє пальми etc., що мабуть становлять поживу для жиючих там ростин і звірят. Океанічні осади т. є намул з форамініферами, діятомеами, Radiolaria'ми і т. д. були досить рідві. З характерних проявів глубинної фауни і фльори належить назвати Rhizamnina algaeformis (належить до Rhizopoda), зьвіря що своїми руровидними раменами покриває дно в великих глубинах (maximum в 2798 m. глубини) і гліи: Lithotamnium, що творить там цїлі лави в малих глубинах (2—40 m.)[1]).

Тихий океан і єго побічні моря.

Найбільшу дотепер знану глубину на тім океанї і на всїх морях висондував в осени 1899 р. американьский корабель Nero. В $+12^040'$ північної ширини та $145^040'$ східної довготы сонда трафила на дно доперва в 9636 m. глубини[2]).

Важна є також експедиция на Тихий океан, що в 1899. і 1900. роках підприйняв Agassiz. Виконала она дуже много сондовань, сконстатувала на північ від островів Marquesas депресию до 5770 m. глубоку, вимірила SO від островів Tonga глубину 8303 m. і найшла недалеко острова Guam (Лядрони) глубину 8802 m. Біольоґічні висліди були досить малі, дно моря в таких глубинах покривали одностайно грудки піролюзиту. Волоки не витягнули майже нїяких орґанїчних єств з тих глубин на поверхню моря. Agassiz каже, що найінтересиїйші результаты дали дослїди над коралевими островами, але належить сумнївати, чи потрафить Agassiz на їх основі захитати теорию Darwin'a в користь своєї теориї по славних верченях на острові Funafuti в 1897. р., що так сьвітло доказали єї імовірність[3]).

Agassiz найшов, що поодинокі атолї островів Каролїньских, Маршальских і Ellice підносять ся із значних глубин на ізольованих горах і хребтах. На увагу заслугує велике розповсюдненє на днї великих глубин бульб піролюзитових (MnO_2) в дуже значній скіль-

---

[1]) Petermanns Mittheilungen Bd. XLVI. 1900. ст. 182 дд.
[2]) Geographische Zeitschrift 1899. 509.
[3]) Petermanns Mittheilungen Bd. XLVI. 1900. ст. 72, 172.

кости. Піролюзит має дуже значний питомий тягар (=5·0), тому то і маятникові обсервації виказують таку надвижку маси в земскій корі під океанїчними глубинами[1]).

Важні сондованя і поміри денної температури виконано в лїтах 1898–1900 на кораблях Egeria, Penguin, Retriever і Pathfinder.

Bell Dawson опрацював табелї припливу і відпливу для побережий британйскої Колюмбії, Hegemann для Нової Зеляндиї. Врангель представив дотеперішні наші відомости про струю Kuro Shivo[2]).

Dinklage звернув увагу, що в лїтї 1897/8 і 1898/9 пливучі леди показувались часто під 48°—50° полудневої ширини на Тихім океанї[3]).

Також в прибережних морях сего океана роблено замітні досліди. Колчак оброблює обсервациї росийских кораблїв Рурик і Крейсер над питомим тягаром і температурою води в мори японьскім[4]).

В тім самім мори робив такіж самі досліди нїмецкий корабель Deutschland[5]).

Росийский гидрографічний уряд опублїкував обсервациї часу замерзаня і таяня в росийских пристанях над япаньским та охоцким морем.

В мори Behring'a роблено обсервациї над станом леду на весні[6]). Температуру в сїм мори опрацював Girard[7]).

Відносинами в тім мори займає ся також розвідка Lindenkohl'a[8]). В мори Behring'a пр. густота росте рівномірно аж до дна. Температура також опадає, але не рівномірно. Она обнижає ся скоро від поверхнї аж до 100 або 150 m., потім підносить ся незначно до глубини 400 m. Між 500 а 800 m. маєм майже однаку температуру, а звідси она знов опадає аж до дна. Тепла верства між 150 а 409 m. походить ту без сумнїву з північного Тихого океану, бо більша густота сеї верстви не позволяє припускати, щоб она походила з поверхнї моря. І в охоцкім мори густота стало росте з глубиною, але теплота є інакше розложена. Під тонкою (50 m.)

[1]) American Journal of Science. CLXI. 1900. 33, 109, 143, 369.
[2]) Записки по гидрографія. XX. 1899. 398.
[3]) Annalen der Hydrographie. 1899. 398.
[4]) Записки по гидрографіи. XX. 1899. 95.
[5]) Annalen der Hydrographie 1899. 226.
[6]) United States Hydrographical Office. Publ. Nr. 116.
[7]) Comptes Rendus de la Société Géographique 1899. 79.
[8]) Petermanns Mittheilungen т. XLV. 1899. ст. 4 дд.

поверхневою верствою теплої води є ту в лїтї температура між 50 а 200 m. низша від 0°, заразом є ту вода густїйша і більше солона. Сю зимну верству складає на думку автора вода, що в зимі була при поверхнї моря, ту остудилась, а через витворене ся леду, сильнїйше засолилась. Низше 1500–1800 m. аж до найбільшої глубини (3370 m.) констатовано всюди 2·2°, що вказувалоб на те, що нїякий з проливів, що лучать Охоцке море з океаном, не є глубший над 1500–1800 m.

Lindenkohl занимаєсь також температурою і густотою середної части Пацифіка. Густота в полудневій сторонї є ту більша, як в північній, бо ту впадає богато знатних рік. В загалї густота меньшає до +550 m., а звідси доперва росте. Се приписує L. в части воздушним опадам, в части струї зі сходу, що приносить рідшу та зимнїйшу воду. L. акцентує також важний факт, що коли стрінуть ся рівно густі маси води, з котрих одна є зимнїйша і меньше засолена, а друга теплїйша та більше засолена, то послїдна має тенденцию западати під першу.

Північний ледовий океан є именно в частях прилягаючих Европі постійно розслїджуваний, хоч більших екпедиций туда не висилано.

Weber представляє в своїй книжці про розвиток фізичної географії арктичних країв також розвиток їх океанографії[1]).

Nathorst виказав, що найдена Nordenskiöld'ом 1868. р. межи Шпіцбергами а Гренляндиєю глубина 4850 m. не істнує. Nathorst висондував там лиш 2697 m. а в сусїдстві 3145 m.[2]).

Hjort, Gran і Dahl робили 1898–1900 важні досліди на европейскій части Ледового океана. Брав в них участь також Nansen.

Росия кинулась в послїдних роках XIX. віку до використаня свого мурманьского побережа, що облите в части вітками Гольфштрома має вільні від леду пристани. Туди хоче Росия повести нову комунїкацийну лїнїю. Тому маєм завдячувати кілька важних праць про тутешне море.

Голицин подав розвідку про границї Гольфштрома, що після него сягає в лїтї аж до Нової Землї[3]).

---

[1]) Münchener Geographische Studien. 1898. IV. 250 ст.
[2]) Geographical Journal XIV. 1899. 64.
[3]) Записки Имп. Академіи наукъ. IX. 1898. 321.

Андреєв подає перегляд давнїйших праць над Ґольфштромом 1899 - 1893. і карту сеї струї в тих околицях в р. 1889[1]). Книпович на кораблї „Андрей Первозванний“ перевів дослїди над Ґольфштромом важні о стілько, що їх підприпимав в зимі. Та струя дїлить ся в тім мори на кілька рамен, між котрими є зимна полярна вода. В зимі тепла вода западає під поверхневі зимні верстви[2]).

На полудневім ледовім океанї поробила принагідно бельґійска антарктична експедиция досить важні океаноґрафічні дослїди. На полудне від Огняної землї найдено наглий опад дна з 300 на 1800 m., а потім на 4000 m., котра то глубина оставала постійною аж до берегів антарктичних островів. На днї тих глубин находились на диво численні камінцї, ба і більше каміне, без сумнїву террестричного походженя. Близші дослїди виказали, що сей матеріял був принесений ледяними горами з антарктичної суші. Те навело учених експедицій на думку, що ледові гори антарктичного океана мають те саме походженє, що ледові гори північного океана, а не витворились з морского леду, як припускає Heim. Близші розслїди антарктичних земель доказали вповнї, що ся думка оправдана. Граница вічного снїгу сягає ту аж до зеркала моря, не треба отже і гір, щоби ледівцї ся утворили[3]).

IV. Загальні математичні і фізичні свійства землї.

Про нові поступи в пізнаню математичного виду землї референував на VII. міжнароднім конґресї ґеоґрафів в Берлїнї 1898. Helmert. Новійші поміри показують місцями дуже великі ріжницї від обчислених елементів величини землї. Именно тз. поміри степенів довжини ґеоґрафічної виказали в новійших часах незгідність з вартостями для сплощеня землї, обчисленими Clarke'ом. Навіть вартість подана Bessel'ом показалась в виду поміру 52° рівнобіжника за великою.

---

[1]) Записки Имп. Русс. Географическаго Общества. XXXIV. Nr. 1.
[2]) Записки Имп. Акад. Наук. XII. 1900. 419.
[3]) Gaea 1900 ст, 754. Bulletin de l' Academie de Belgique. 1899. 642.

Тих ріжниць величин обчислених і обсервованих годї віднести до обсервацийних блудів. Они мають реальну дїйсність.

Дуже важне в тім напрямі є питанє: які зміни нормального виду землї повстають через контраст континентальних мас а океана і через вплив великих гірских мас пр. в Азиї? Listing приймав, що контраст континентів і океанів може довести до 1000-метрових депресий на океанї. Helmert вислїдив, що они доходити можуть лиш до ± 500 m. і пр. на островах океанїчних є явищами лиш льокальними. На єго думку сила тяжести землї є на океанах і на континентах в приближеню рівно велика в наслїдок підземної компензациї мас. Льокальні забуреня можуть бути дуже значні, именно при стрімких побережах. Таку дуже велику неправильність обсервовано на Гавайских островах.

В виду таких неправильностий має ґеоід дуже неправильний вид. Однак новійші дослїди показали, що пр. в Европі ріжниці прямовісні елїпсоіда і ґеоіда доходять в maximum до ±100 m.[1]).

В загалї добре обчислене величини землї буде можливе доперва по укінченю великих ґеодетичних робіт і їх докладнім обчисленю. З поміж помірів полуденника початих і проєктованих при кінци XIX. віку згадаю: шведско-роснйский помір на Шпіцберґах, новий помір полуденника коло Quito. Дуже визначний именно в наслїдок великих розмірів є 50-степеневий лук полуденника від полудневих берегів Мехика аж до берегів Ледового океана і в двоє більший лук африканьский, що після проєкту Gill'a має іти з Капляпду до Египту, а звідси через Малу Азию получитись з луком Struv'ого в европейскій Росиї. Лук сей обнимати буде отже над 100° ширини. З помірів рівнобіжників є важний докінчений вже помір рівнобіжника 39° в Сполучених Державах Америки північної[2]).

Добрий загальний погляд на міжнародні поміри землї дає розвідка Orff'a: Über die Hilfsmittel, Methoden und Resultate der internationalen Erdmessung. München 1899. Franz.

Новий спосіб означена проміру землї видумали Dufour і Groll, именно зі зміни положеня образів тїл земских або небесних відбитих в водї, котру то зміну викликує закривлене плинної поверхнї води[3]).

---

[1]) Geographische Zeitschrift. 1900. з. 1. Naturwissenschaftliche Wochenschrift. XIV. 505 д.
[2]) Geographisches Jahrbuch XXIV. 1901. 5.
[3]) Gaea 1900 с. 696.

З тих дослїдів виходить вже майже певно, що вартість на загальне сплощенє землї буде дещо більша як вартість Bessel'a ($^1/_{299}$), так що буде виносила меньше більше $^1/_{297}$. З тою ж вартостию згоджує ся також нова формула довжини маятника секундового обчислена Івановом:

$L = 99{\cdot}0997 + 0{\cdot}5240 \sin^2\varphi' - 0{\cdot}0016 (\sin\varphi' - \frac{5}{3}\sin^3\varphi')$, де φ' = ґеоцентричній ширині місця[1]).

Постійна сили тяжести землї не є ще на думку Krigar-Menzel'a достаточно означена, бо ріжні методи дають ту ріжні результати[2]).

Льокальні поміри сили тяжести землї ведуть ся при кінци XIX. віку з великою пильностию.

Sterneck сконстатував, що сила тяжести землі в австрійских копальнях росте в глубину мабуть рівномірно з температурою, т. є. коли прибуванє температури є інтензивнїйше, росте також і сила тяжести сильнїйше. Ся цїкава проява не є однак ще на певно розслїджена[3]).

На бажанє Janssena довершив Hansky на шпилю Монбляна помірів тяжести при помочи Sterneck-івского маятника.

В Meudon g=9·8099, на шпилю Монбляна g=9·7947[4]). Таким самим приладом означено силу тяжести в Копенгаґенї на 9·81579 і сконстатовано на острові Bornholm'i великі надвижку маси[5]). Для Христіянії одержано 9·81945, Гельсинґфорса 9·81992, Пулкови 9·81934[6]).

Відклонів пряма сконстатовано в послїдних часах дуже много. В Ферганї они викликують між ґеодетично а астрономічно одержаною ґеоґрафічною шириною ріжницї 50″[7]). Дуже великі є відклони в Льомбардиї, бо до 28·7″ в φ а до 35·9″ в λ. В Гарцу они є сорозмірно невеликі[8]), а в середній і північній Швайцариї показались они так малї, що ріжниця між ґеоїдом а елїпсоїдом є ту майже нїяка[9]).

---

[1]) Verhandlungen der Generalkonferenz der Erdmessung in Stuttgart 1898. Berlin 1899. пор. Petermanns Mittheilungen 1898. з. XII.

[2]) 72. Vers. deutscher Naturforscher in Aachen. 1900. IX. 17.

[3]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenchaften Bd 108.

[4]) Comptes Rendus t. CXXVII. 942.

[5]) Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. IX. 92.

[6]) Astronomische Nachrichten. Nr. 3547 i 3583.

[7]) Comptes Rendus т. 124. 815.

) Gaea, 1900. 541.

[9]) Das Schweizersche Dreiecksnetz etc. VIII. bearb. v. Messerschmitt. Zürich 1898.

Справа колибаня земскої оси, що занимала свого часу так дуже учених астрономів і ґеофізиків, не є ще дотепер належито вияснена. Дорогу, яку земский бігун заточив в часї від 1890—1898, показує наглядно рисунок Albrecht'a[1]). З него видимо, що амплїтуда явища значно змалїла, але ще не дійшла до зера[2]). В виду тих фактів, виведених безсторонно з обсерваційних рядів, трудно прилучитись до думок: Gonnessiat'a, що бачить в змінности ґеофрафічної ширини дві періоди 14. і 12. місячну[3]), або Chandler'a, що принимає 14-місячну але змінну періоду, або Van de Sande Backhuyzen'a, що числить 431 днїв[4]). На думку Albrecht'a[5]) істнованє таких періодів трудно припустити, бо сконстатовано, що кривина сего руху земскої оси не вертає в себе по 7 лїтах, як думано.

До прихильників 14-місячного періода колибаня земскої оси належить також Doolittle. Найважнїйшим результатом єго працї є однак лиш нове означенє постійної вартости для обсервациї (20·580″), що є значно більша від принятої Struve'м і парискою астрон. конференциєю[6]).

Всї дотеперішні методи і результати дослїдів над густотою землї збирає Wawrzik[7]).

Ріжні теориї про стан внутра землї збирає Toula[8]).

Wiechert обчисляє, що земля складаєсь з желїзного ядра проміру 10,000.000 метрів, котре є окружене корою скальною на 1,500.000 метрів грубою. Обєми ядра і кори є майже рівні, відношеня їх мас =5 : 2[9]).

Про внутрішну температуру землї пише в тім часї много учених. Дуже важні висліди для пізнаня денної виміни тепла між землею а небом і ві внутрі почви дала розвідка Homén'a[10]). Не меньше значінє мають і дослїди Вільда над температурою почви

---

[1]) Jahrbuch der Astronomie und Geophysik IX. табл. 4.

[2]) Astronomische Nachrichten Nr. 3333.

[3]) Comptes Rendus т. 126. 710.

[4]) Astron. Journal Nr. 406. ст. 446. Bulletin de l' Akademie des Sciences d'Amsterdam 1898.

[5]) Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation am Schlusse des Jahres 1899 Berlin 1900.

[6]) Results of observations with the zenith telescope of the Flower astronomical observatory. Philadelphia 1899.

[7]) Gymn. Progr. Oppeln 1898.

[8]) Verschiedene Ansichten über das Innere der Erde. Wien 1899.

[9]) Naturwissenschaftliche Rundschau 1898. 215.

[10]) Пор. реф. Маурера в Meteorologische Zeitschrift 1898. Lb. 31.

і єї поверхнї, коли она покрита ростинностию або снїгом, чи нї[1]). Але обширнїйше заниматись ту ними не можу, бо обі сї епохальні працї вийшли ще в 1897. р.

При будові сибірскої желїзницї розслїджував Сергѣевъ теплоту почви і найшов, що в Чітї 1. линня почва розмерзла до глубини 2·45 m., а звідси аж до глубини 6·30 була замерзла. В Трансбайкалії замерзає почва в зимі на 0·70—4·26 m. глубоко. Під тою верствою, котра в лїтї розмерзаєсь, є стало замерзла верства до глубини 3·28—9·28, що зависить від ґеольоґічних відносин і висоти положеня. Снїжна покрива дїлає на почву дуже отепляючо[2]).

Підземні відложеня леду в Америцї описує Balch. В териториї Yukon'a найдено замерзлу землю в верстві 30 m. грубій, в славних мінах Klondike є почва на 8—10 m. в глубину замерзла. В Огняній земли найдено ляву і лїд в попереминних верствах аж в великі глубини, на горі Chimborasso є великі маси леду покриті піском значно низше лїнії вічних снїгів. Друга часть розвідки присьвячена ледовим печерам, котрих є в Америцї значна скількість[3]).

Scheimpflug і Holler зміривши докладно температури в копальнях ртути в Ідриї потвердили дотеперішні здогади, що там панує анормально висока температура. Але лиш простір 450—600 m. висоти визначуєсь температурою до 27° C.; всюди довкола виносить температура 10—14° C[4]).

Денний хід температури почви в Тифлїсї 1891—1895 обчислив Hann[5]).

VI. Вульканїзм.

Ся царина, спільна в цїлости фізичній ґеоґрафії і ґеольоґії, не може однак повеличатись в послїдних роках XIX. віку якоюсь більшого значіня роботою, що змінялаб погляди і отвирала нові дороги. Всї майже дотичні розвідки займають ся більше або меньше льокальними відносинами, тому-то я зґрупую материял після частий сьвіта.

---

[1]) Пор. реф. Naturwissenschaftliche Rundschau 1898. Nr. 8.
[2]) Извѣстія имп. русс. геогр. Общества XXXIV. 463.
[3]) Petermanns Mittheilungen 46. LB. 215.
[4]) Sitzungsberichte der k. Ak. der Wissenschaften in Wien. Math. phys. Klasse. CVIII. 950.
[5]) Meteorologische Zeitschrift 1900. 281.

Загальних праць про вулканїзм маю до записаня лиш дві важнїйші. На взір иньших французских ученых, що конечно хотять в розміщеню вулканів і дислокаций бачити фіґури ґеометричні, старає ся Michel Lévy (впрочім досить довільно) великі вулканічні пояси землї спровадити на 6 великих колес, що відповідають гранам вписаного в кулю землї чотиростїнника[1]).

Ґеоґрафічне розміщенє вулканів представив Wägler[2]).

Він розріжняє три головні реґіони вулканїчної дїяльности: пацифічний, індийско-антарктичний і атлянтийский.

Пацифічний реґіон є ограничений: американьскими Кордилєрами, Алєутами, Камчаткою, Курилями, японьскими островами, Філїпінами, Молюками, Новою Ґвінеєю, островами Сальомонами, Новими Гебридами, Viti, Tonga, Kermadec, Новою Зеляндиєю. Подїлити може сей простір на дві части: північну і полудневу, а кожду з них дїлить автор на поменьші вулканічні країни. Індийско-антарктичний реґіон обнимає індийский і антарктичний океан, східну Африку по центрально-африканьский рів, Абісинїю, Палєстину і Арменію, Іран і Індию. Цїлу решту землї обіймає третий реґіон: атлянтийский.

Що до загального погляду на вулканїзм вважає автор єго за наслїдок виключно корченя ся землї. Чи ядро землї є цїпке, пластичне чи плинне — цїпкі маси земскої кори тиснуть на него. Коли в наслїдок корченя ся кори она пукне, підземні маси увільнені від тисненя, розширяють ся і підносять викликуючи вулканічні явища.

Вулькани Европи є зовсїм природно найлїпше знані зі всїх вулканів. Ісляндскі вулькани, що лежать в околицях майже незаселених, не часто виступають в періодичних наукових публїкациях, зате італїйскі вулькани остають під тревалим доглядом ученых.

Над вулканїзмом Везувія роблять ся в послїдних часах постійні дослїди, котрих головним центром є обсерваториа збудована під шпилем гори. Результати тих дослїдів є для ґеофізики дуже важні і що хвиля приносять наукові часописи розвязку давно вже поставлених в вулканїзмі проблемів або ставлять нові, власне на основі помічань дїяльности Везувія.

---

[1]) Bulletin de la Société Géologique de France 1898. XXVI. 105.
[2]) Mittheilungen des Vereins für Erdkunde in Leipzig 1900. 1.

Послїдна дещо більша ерупция того вулькана випала на 1895. рік, коли на північно-західній сторонї повстали нові прогалини, з яких зачала випливати в великих скількостях лява з множеством ґазів.

Підчас того вибуху Везувія обсервував Matteuccі вулканїчні огнї, що виходили з великим шумом з одної з повставших прогалин та вистрілювали і до 50 m. висоти. Того явища дотепер не обсервовано на Везувію, хиба лиш малі, супокійні огники, що є зате дуже тревалі. Згадані великі огнї, потрівавши кільканацять день, також перейшли в стадію малих і супокійних. Дуговина того полумя, що без сумніву походить з ґазів, що містять ся в маґмі, є дивним робом тягла[1]).

Се одна цїкава проява. Другою ще цїкавійшою є отся. Вже в липню 1895. року перестала лява виходити зі всїх прогалин з виїмком одної, що находить ся у стіп головного стіжка вулькана в т. з. Atrio del Cavallo. Ту витворила ся з ляви гарна копула, що заєдно росла під впливом щораз нових струй ляви, що над єї вершком ся розпростирали. Коли беззглядна висота копули дійшла до 835 m. (лютий 1898. р.), не могли вже струї ляви досягнути єї вершка і зачали бочити на право і на лїво. Сама копула представлялась досить імпозантно і значно вже зміняла загальний вид Везувія. В серединї она ще не цїлком простигла, та від часу до часу добувалась з єї боків горяча маса і творила нові струї. Але висота копули не остала на диво незмінною, хотяй лява не могла вже по єї вершку розливатись та єго висоту збільшати. По місяци постережено зі здивованєм, що копула зросла в висоту о 15 m., а близші розслїди Mateuccі'ого показали, що причиною того побільшеня висоти є внутрішне піднесенє цїлої маси ляви через інтрузию справдїшнього лякколїта. Сей лякколїт піднїс верхні верстви ляви, так само як американські лякколїти піднесли седіментарні верстви, які спинили ляву, щоби ся не розплила. Таке вулканїчне явище обсервовано ту вперве; оно показує, що теория Buch'a не зовсїм є хибна.

В другій половинї 1898. р. мав Везувій другостепенний вибух. З під згаданої копули виплили нові струї ляви, при чім головний кратер в части запавсь і зачав викидати попіл та жужелицї, а потім і ляву. Своє maximum осягнув вибух в другій половинї вересня,

[1]) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei. 1898. Ser. 5. 7. (1). ст. 314 дд.

але нїяких шкід не зробив. Від того часу стала дїяльність вулькану меньшати і вказувала взагалї тип дїяльности, котрий Mateuccі зве типом Stromboli[1]). Середину головного кратеру займала лява озерцем на 10 метрів широким, а коли задля великого опору під копулою не могла тамтуди вийти, піднеслась в кратері до 100 m. понад свій давнїйший позем і в тій висотї (1060 m.) виплила та зараз значно опала. Висота Везувія по новійших вибухах виносить 1240 m. — Semmola розслїджував звязь дїяльности Везувія з фазами місяця протягом двох лїт, від липня 1895. до липня 1897. Показало ся, що підчас тих самих фаз вулкан зовсїм ріжно ся заховував, з чогоб виходило, що притяганє місяця зовсїм на вулканїчні явища не впливає[2]).

Крім Везувія нї один з полудневo-европейских вулканів не мав в послїдних часах більшого вибуху. На Етні може було помічати лиш невеликі огнї в кратері, що повстали зі спаленя ґазів, та дещо димів. Volcano є тепер лиш сольфатарою. Stromboli має тепер сїм кратерів; з них виходять раз жужлї і пари, то знова дим з піском або і малі струї ляви. В мартї 1899. р. два кратери з сїмох получились в один. На острові Santorin приготовлює ся на думку Mateuccі'ого новий великий вибух, подібний до сего, що приключивсь перед трицятьма роками. Хотяй головний кратер все лиш пару видїляє, наступили ту значні обниженя терену, именно того, що в часї послїдного вибуху виринув над морску поверхню. Порт св. Юрія розширивсь, а недалеко него цїлий островець зник під водою[3]).

Дослїди над вулканами в иньших частях сьвіта поза Европою є більше принагідні, хоч в послїдних лїтах ведуть ся в дуже многих місцях.

В Азиї відкрито в 1898. р. новий вулканїчний терен, збудований з базальтових ляв в полудневій Арабії[4]). Попри европейскі вулкани розслїджують ся тепер докладно вулкани на острові Яві (Java), головно завдяки там осїлому голєндерскому ґеольоґови Verbeek'ови. Він і представив їх коротким начерком[5]).

[1]) Пор. Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1899. ст. 425. Gaea 1898. ст. 752.

[2]) Comptes Rendus т. 126. ст. 926.

[3]) Пор. Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei. 1899. Ser. V. 8. ст. 168.

[4]) Wiener akademischer Anzeiger 1898. ст. 277.

[5]) В Petermanns Mittheilungen 1898 р. 25 д.

Вулкани се найвисші гори острова і їх ряд становить скелет Яви. У більшости запавсь кратер, є се отже вже руїни вулканів нераз дуже великі. Найбільший Ringgit має кратер 21 km. проміру. Зате вулкани, що в них задержавсь первісний невеличкий кратер, є висші. Найвисші є Sëmeru (3676 m.). Число всїх вулканів на Яві є 121, з них однак мабуть лиш 14 вибухало в історичних часах. Лява являлась у них досить рідко. Вулкани Яви розміщені звичайно на одній лїнії поздовж острова. Є також поперечні та і рівнобіжні до головного напряму побічні лїнії. Уклад місцями дуже замотаний, бо в западених вже руїнах вулканів повставали нові вибухові стіжки, а ерозия сильно позмінювала зверхний вид руїн. Замітив ту Verbeek і те цїкаве явище, що лявіни з каміня повидовбували в збочах вулканів широкі долини зі стрімкими стїнами. Петроґрафічний склад дуже однозначний. Вулканїчні скали, богаті ортоклязом, дали по звітріню дуже плідну почву. Подрібно описав один з вулканів Яви званий Lamongan, визначний своїми правильними, в ночи дуже гарними вибухами Fürst[1]).

З иньших вулканїчних околиць полудневої Азиї розслїджували в послїдних часах Bücking і Rinne півострів Minahassa на острові Celebes. Є се край сильно вулканїчний і від XVII. до першої половини XIX. віку нераз траплялись вибухи з тамошних численних вулканів, що зрештою сягають ледви 2000 m. висоти. Тепер дїяльність їх всїх зійшла до сольфатарового стану. Много в краю фумароль, болотних вулканів і горячих жерел[2]). Niemeyer описує вулкани височини Idjen ві всхідній Яві, де довкола великого кратерового перстеня взносять ся численні вулкани понад 2000—3000 m. висоти. Відносини дуже цїкаві. Ріки пливуть нераз попід струями застиглої ляви, є много земних пірамід в мягкім туфі, стїни кратерів зложені з пестрих порід скальних[3]).

Вулкани австралїйских островів, хоч дуже численні, є сорозмірно мало розслїджені з виїмком хиба вулканів на островах Hawaii. В найновійших часах відкрили цїкаве вулканїчне явище братя Friedländer'и на лявах острова Ninafo'ou в ґрупі Tonga. Є се

[1]) Пор. Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1898. ст. 112 дд.

[2]) Пор. Petermanns Mittheilungen aus J. Perthes geographischer Anstalt. Bd. XLV. 1899. ст. 249 дд, Zeitschrift der deutschen Geologischen Gesellschaft т. LII 1900. ст 327.

[3]) Tijdschrift van het Kon. Nederl. Aardrijkskundig Genootschap 1900. Nr. 5—6.

рури з ляви, висоти до 2 m. зі стїнами грубими на 8—15 cm. з отвором в серединї, на 25 cm. широким. Повстали они мабуть тодї, коли тамошня дуже рідка лява облила пнї кокосових пальм[1]).

Середноамериканьскі вулкани розслїджував зі згляду на їх розміщенє Sapper, причім відкрив много нових вулканів і виказав, що кілька гір вважаних давнїйше вулканами, ними не є. Середноамериканьскі вулкани не є розміщені на одній поздовжній прогалинї, але на більшій скількости коротших прогалин, що є зглядом себе попересувані; се іменно нїкараґуаньска зглядом костаріканьскої. Нїяка з тих прогалин не є прямолїнїйна, всї є більше або меньше позаломлювані. Кожда прогалина тягне ся в напрямі істнуючих вже молодих вибухових пасм і то або на їх хребтї, або на збочи, або й здовж підніжий. Вулкани дотепер дїяльні лежать або на згаданих поздовжних прогалинах, або на коротких поперечних; вулкани, що лежать на боцї від головної прогалини, є вже вигаслі. Число коротких поперечних прогалин є в північній части (San Salvador, Guatemala) більше, в полудневій части (Nicaragua, Costarica) меньше. Там є вулкани також тїснїйше коло себе розміщені, ту рідше. Там, де много поперечних прогалин, а вулкани близько себе стоять, видає ся, що они є розкинені ґрупами. Найвисші зглядні і беззглядні висоти подибуєм на обох кінцях цїлої вулканїчної системи[2]).

Sapper оголосив також специяльні розвідки про поодинокі вулкани в Guatemal'i, San Salvador і Nicaragua, що їх сам розслїдив 1897. р. Між иньшими ходив він на вулкан Pacaya, що визначуєсь своєю дуже скомплїкованою будовою, вулкан Las Flores, майже виключно збудований з ляв, вулкан Suchitan з червоним жужлевим стіжком Cerro Colorado і великаньским ($2^1/_2$ km. проміру) мааром Retana. На вулканї San Miguel замітив Sapper значні зміни в порівнаню з его описом з 1866. року. Великі партиї кратеру запались мабуть наслїдком вибуху, що склався в початках девятьдесятих років. На увагу заслугує також богатий в кратери вулкан Las Pilas в Nicaragua, що мав вибухи 1850. і 1867. року[3]). Досліди Sappera в 1895. і 1897. роцї подвоїли майже число знаних

[1]) Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1898. ст. 413 дд.

[2]) Zeitschrift der deutschen Geologischen Gesellschaft. т. 49. ст. 672 дд.

[3]) Petermanns Mittheilungen Bd. XLVI. 1900. ст. 149 дд. Zeitschrift der deutschen Geologischen Gesellschaft LI. ст. 578 дд.

вулканів в тамтих сторонах. На вулканї Popocatepetl в Мехику сконстатовано істнованє сїмох сольфатар і озера, що повстало зі скондензованя фумарольових пар[1]).

В околицях золотих рудників Klondike над озером A-Tlin вибух в осени 1898. р. незнаний доселї вулкан. Ясність в ночи була притім так сильна, що помагала при роботї гірнякам[2]).

VII. Землетрясеня.

Наколиб хто порівнав нинїшні способи розслїджуваня землетрясень і випливаючі з того погляди на їх істоту з поглядами, що панували трицять лїт тому назад, найшов би дуже велику ріжницю. Ріжниця походить головно з того, що перше майже лиш самі ґеольоґи розслїджували землетрясеня і то лиш значнїйші, тепер же взялась до того предмету ґеофізика з так точними і чулими знарядами, що не лиш сильнїйші, але і дуже навіть слабі землетрясеня, можна тепер розслїджувати. Ті знаряди, що як й давнїйше зовуть ся сейсмометрами, показали, що поверхня землї находить ся властиво в постійнім дроганю[3]). Славний анґлїйский сейсміст Milne подїлив ті дрогання землї на чотири головні кляси: 1) Властиві землетрясеня з великою амплїтудою і скорим наслїдством по собі по одиноких товчків. 2) Пульсациї землї з великою амплїтудою, але повільним наслїдством товчків. 3) Властиві дрогання землї з малою амплїтудою та скорим наслїдством. 4) Довготревалі осциляциї почви з малою амплїтудою і великими проміжками часу. Дуже многі методичні уваги подав в тім зглядї Gerland[4]), що розслїджує кожде землетрясенє з трех сторін: 1) з прояв упругости т. є. з огляду на рід, вид, творенє і рух филь землетрясеня, 2) з наслїдків филь на земскій корі і 3) що до єго властивого походженя і причини єго повстаня.

---

[1]) Memorias de la Scientifica Sociedad Antonio Alzate Mexico. X. ст. 185.

[2]) Geographische Zeitschrift. V. 1899. ст. 53.

[3]) Всї що важнїйші сейсмометри описані і критично розсмотрені Ehlert'ом в обширній розвідцї, що добре орієнтує про сю квестию. Beiträge zur Geophysik т. III ст. 350 дд.

[4]) Verhandlungen des 12. deutschen Geographentages ст. 101 дд.

Тремтїня землї з малою амплїтудою походять після згідної думки многих ученых від рухів в атмосфері, і то почасти від вітрів, почасти від змін в тисненю воздуха. Пульзациї землї не є дотепер достаточно вияснені. Milne і Rebeur приписували значний вплив льокальним барометричним ґрадієнтам, Ehlert виказав, що они являють ся тільки в тім часї, коли земля находить ся в перігелї, і то в ночи. Тому то він думає, що оселя тих пульзацій находить ся в найвисших верствах земскої маґми. Ehlert розслїджував також довготревалі осциляциї і сконстатував у них істнованє ріжних періодів. Є ту іменно 1) денний період, ще має maximum коло 7-ої години рано, а minimum коло 6. вечером. Єго причиною є бодай в части інсоляция, що розширяє і випучує поверхню землї, коли тимчасом внутрішні верстви поволїйше ся огрівають. Другий період є місячний і повстає під впливом притяганя місяця. Є ще і иньші періодичні рухи пр. рух тзв. точки зерової в поземім маятнику, що дадуть ся звести до впливу річних змін сонїчного тепла[1]).

Про землетрясеня властиві, що мають велику амплїтуду, має Gerland зовсїм відмінні погляди, як учені, що виключно з ґеольоґічної точки погляду хотїлиб їх вияснити. Він констатує вперед, що коли пр. в якійсь дуже віддаленій околицї, що може лежати і по противній сторонї земскої кулї, лучить ся землетрясенє, то надовго, заки ще властива його филя дійде до обсерватора і заколибає єго інструментом, замітити можна маленький рух в інструментї, з дуже слабкою амплїтудою, але зовсїм того самого виду, що великий рух інструменту, як се можна переконатись з фотоґрамів. Такі маленькі рухи (tremors) переходять землю зі скоростию 10—20 km. на секунду. Виходячи з того і опираючись на теориї A. Schmidt'a думає Gerland, що головною причиною землетрясень не є тектонїчні заворушеня в сусїдстві земскої поверхнї, а експльозиї на границях 1) сталої земскої кори з маґмою і 2) маґми з ґазовим ядром землї. Так думали вже Zöppritz, а по части Daubrée, думка Gerland'a не є проте зовсїм нова, але дуже віродостойна. Головною слабою точкою т. зв. тектонїчних теорий землетрясень є те, що навіть в такій Японії, де щорічно лучаєся тілько землетрясень, не видно додатного руху морского поземy. А преціньтак великі землетрясеня, наколиб мали тектонїчну причину, мусїлиб мати такий наслїдок. Так само не бачимо додатного руху поземy адрійского моря, хоч Hörnes приписує всї землетрясеня в єго око-

---

[1]) Beiträge zur Geophysik III. 131 дд. IV. 68 дд.

лицях тз. періадрійским обломам, т. є. западаню ся кусніѣв земскої кори над згаданим морем[1]). В загалї тепер морям приписують великий вплив на землетрясеня. Milne думає, що більшість японьских землетрясень походить з пересувань тиснень на сусїднім морскім днї[2]).

З дальших загальних дослїдів над землетрясенями згадаємо слїдуючі:

Mazelle обсервував денні періодичні колибаня ґрунту в Терстї. Вийшли для трох обсервованих маятників одиничні колибаня лиш з одним maximum і minimum в місяцях лїтних (цьвітень — жовтень) і подвійні денні колибаня з двома деннами maxim'ами і minim'ами в зимових місяцях (падолист — марець). Mazelle найшов також періодичні рухи у камяного стовпа, на котрім стояв прилад. Ті рухи показують в своїх амплїтудах згідність з річним ходом колибань температури[3]).

Про підземні шуми, що їх чути в часї землетрясень, написав дуже поважну річ Davison[4]). Супроти думки многих учених, пр. Gerland'a думає Davison, що з тих голосових явищ при землетрясенях мож буде витягнути важні дати для пізнаня самого землетрясеня. Ті шуми видають на думку Davison'a підземні скальні маса пересуваючись попри себе.

T. Suess старає ся вияснити, чому підчас великого землетрясеня в Лїсбонї 1755 р. перестали плисти теплицкі терми. Він толкує се впливом филь земскої кори на зеркало заскірної води[5]).

Теориєю землетрясень займає ся Rudzki в двох розвідках[6]). В першій автор розслїджує позірну скорість, з якою розширяють ся землетрясеня, розпроваджуючи математично теорию Schmidt'a про криволїнійні лучи землетрясень, причім висліди математичні автора цїлком згоджують ся з обсервованими фактами. В другій R. дослїджує вид пружних филь в камени і доходить до результату, що він є дуже скомплїкований. Вислїд практичний: Один удар ві внутрі землї може викликати кілька потрясень на ей поверхнї. В рухових явищах при землетрясенях відкрив R. явище анальоґічне до оптичного розщіпленя.

---

[1]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik т. XX. ст. 565 д.
[2]) The Geographical Journal X. ст. 129 д.
[3]) Wiener akademischer Anzeiger 1900. ст. 149.
[4]) Philosophical Magazine 1900. Ser. V. т. XLIX. ст. 31 дд.
[5]) Mittheilungen des k. k. geologischen Reichanstalt 1900. 2. ст. 55.
[6]) Поміщені в Gerland'a Beiträge zur Geophysik 1898. Ш. 495 дд. і 519 дд.

Montessus de Ballore пробує подїлити цїлу земску поверхню на сейсмічні реґіони і їх після ріжних точок погляду склясифікувати[1]).

Заворушеня поземого маятника в Николаєві над Богом в лїтах 1897, 1898. і 1899. списує Кортаззи, не виводячи однак з сих обсерваций нїяких загальних висновків[2]).

Rudolph: über submarine Erdbeben und Eruptionen[3]) описує і розслїджує наслїдки штучних вибухів під морскою поверхнею, щоби вивести з тих дослїдів обясненя проявів природних вулканїчних вибухів та землетрясень на мори і его побережах.

На думку Harboe'го було велике землетрясенє в Загребі (1880. XI. 9.) викликане секулярним обниженєм і поземим здавленєм земскої кори. Те здавленє було причиною землетрясеня[4]).

Gerland описує цїсарско-нїмецку головну стацию для розслїдів над землетрясенями, обговорюючи при тім загальні задачі сучасної сейсмольоґії[5]).

Новий прилад до обсервованя землетрясень винайшов японьский ученый Omori[6]).

Про уряджене власної взірцевої обсервациї в Гамбурзї з поземем маятником Ehlert'a реферує Schütt[7]).

Спеціяльну сейсмічну лїтературу, що є в теперішнім вже часї дуже богата, перейдем лиш в загальнім оглядї після частий сьвіта, в котрих лучались обговорювані в лїтературі землетрясеня.

В Европі було в послїдних лїтах досить мало значнїйших землетрясень. Одним з европейских країв, де найрідше они приключають ся, є без сумнїву україньско-руска територия. В Галичинї пр. від кількох лїт нїякого хочби слабшого землетрясеня не сконстатовано. Взагалї цїла Австрия з виїмком хиба Країни є тереном дуже супокійним[8]). Два австрийскі землетрясеня з послїдних лїт були науково оброблювані: землетрясенє в Grasslitz (1897. X. 25 — 1897. XI. 7.) і в Sinj (1898. VII. 2.). Із землетрясень сусїд-

---

[1]) Beiträge zur Geophysik IV. 331 дд.
[2]) Beiträge zur Geophysik. IV. 383 дд.
[3]) Beiträge zur Geophysik III. 273 дд.
[4]) Beiträge zur Geophysik IV. 406 дд.
[5]) Beiträge zur Geophysik IV. 427 дд.
[6]) Гл. Petermanns Mittheilungen 1900. 46. LB. 8.
[7]) Beiträge zur Geophysik IV. 220 дд.
[8]) Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft. XLI. ст. 757.

них країв европейских розслїдив саксоньскі землетрясеня (1889—1897) Credner. Він замітив, що їх причина не є горотворче тисненє, а щось иньше і сконстатував, що землетрясеня підлягають двом періодичним змінам: 1) виступають частїйше в зимових місяцях, а іменно в жовтни, падолистї і грудни, 2) трафляють ся частійше в ночи 8^h — 20^h, чім в день; найчастїйше від 12^h — 20^h. Виясновати тої періодичности не береся ще однак Credner[1]). Ся осторожність зовсїм на місци, бо пр. грецкі землетрясеня з лїт 1893.—1898. мають maximum в весняних місяцях, именно в маю, а minimum в жовтни. Деяке maximum ту також припадає в ночи над раном; сю обставину приписує Eginitis тому, що в часї денної працї многі землетрясеня проходять незамїченими. Місячне maximum припадає на повню, minimum на нів зовсїм противположно теориї Perrey'a; періґей і апоґей місяця мало що вплинули на ті землетрясеня. Они до того були частійші в афелю, чім в перігелю землї.

З иньших европейских країв лише Ісляндия в послїдних роках потерпіла від землетрясень. Всї они є вулканїчного походженя. Дуже сильне було землетрясенє 1896. VIII. 26 — IX. 10. Много гір обвалилось, земля в многих місцях сильно потріскала[2]). Меньшу натугу мало землетрясенє 1899. II. 27. в околицях Reykjavik[3]). Землетрясеня в Норвеґиї з лїт 1894. і 1895, хоч досить численні, були що до натуги дуже слабі[4]).

В позаевропейских частях сьвіта є Японїя клясичним краєм землетрясень. Чужі та за ними в новійших часах і японьскі учені розслїджують пильно численні землетрясеня сего краю. Головно заслужився коло студий над тим предметом Sekiya, що зладив катальоґ японьских землетрясень від 416. до 1867. року. Начислив він їх 1898, з них 222 було дуже сильних, що справили великі спустошеня. Найбільша скількість тих тзв. руйнуючих землетрясень припадає на лїтні місяцї, найменьша на зиму. Maximum всїх землетрясень разом взятих припадає однак на весну. Руйнуючі землетрясеня виступали в Японії залюбки ґрупами, так що нераз в кількох лїтах було їх много, а потім протягом певного часу не було їх зовсїм. Являлись они головно на внїшній пацифічній сторонї лука, що становить головну морфольоґічну лїнїю японьского

[1]) Abhandlungen der königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften т. XXIV.

[2]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. Nr. 5.

[3]) Jahrbuch der Astronomie und Geophysik X (1899) ст. 195 дд.

[4]) Пор. Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik XX. 1898. ст. 369.

архіпеляґа[1]). З сильнїйших землетрясень, що в послїдних часах навістили Японію, описує Yamasaki те, що приключилось 1896. VIII. 31.[2]).

З иньших країв Азиї може хиба лиш нїдерляндска Індия порівнатись з Японїєю так що до числа землетрясень, як і що до їх обсерваций. Montessus de Ballore ще в 1896. р. розслїдив, як часто землетрясеня являють ся в ріжних околицях нїдерляндскої Індиї, і найшов, що найбільше землетрясень явилось пересїчно в околицях островів Aru. Від довшого часу ведуть ся ту в Батавійскій обсерваториї докладні дослїди над землетрясенями. В 1898. замічено там, що найбільше число (71), ба більше чим $^1/_3$ всїх землетрясень, лучилось в падолистї[3]). Землетрясеня 1899. р. є значно рівномірнійше на місяцї роздїлені і не виказують нїякого так сильного maximum. Найсильнїйше землетрясенє в тім роцї було в ночи IX. 29—30 на острові Ceram. До 4000 людий тодї погибло, а тремтїня дійшли аж до Европи і обсервовано їх на маятниках в Штрассбурзї та на острові Wight[4]).

В Азиї обсервовано поза тими теренами значні землетрясеня на малоазийскім півострові в 1895 і 1896[5]). В 1899. р. IX. 21. було сильне землетрясенє в околицях Смирни, що наробило великої шкоди[6]). Але найбільше яиха накоїло велике індийске землетрясенє 1897. VI. 12., що мало звязь з дальшим образованєм ся Гімаляїв і було без сумнїву тектонїчне. Потрясений терен обнимав 4 мілїони km^2, між иньшими і середну Европу, де сейсмоґрафи сильно его відчули.

В Африцї і Австралії не записано в послїдних лїтах нїяких більших землетрясень. В Америцї були більші землетрясеня на острові Гаіті 1897. XII. 29., що обізвалось аж в Николаєві над Богом, що віддалений о цїлий квадрант обводу землї[7]), та в Калїфорнії 1898. III. 30. значно меньше[8]).

[1]) The Journal of the College of Science, Imperial University of Tokyo 1899. XI. ст. 389 дд.

[2]) Petermanns Mittheilungen XLVI. 1900. ст. 249 дд.

[3]) Naturkundig Tijdschrift voor Nederl. Indië LIX. 1899.

[4]) Ibidem т. LX. 1900.

[5]) Beiträge zur Geophysik III. 337 дд., 541 дд., IV. 118 дд.

[6]) Gaea 1900 ст. 57.

[7]) Atti della Reale Accademia dei Lincei. 1898. S. V. 7. 316 дд.

[8]) Petermans Mittheilungen XLIV. 1898. ст 117.

VIII. Будова земскої кори взагалї і дислокациї.

Участь ріжних хемічних елементів в складї доступних для нас частий земскої кори представив в процентах Rosenbusch[1]). Margmann старавсь експериментальною дорогою розслїдити повставанє верствованих скал. Єго досьлїди яиказали: 1) Коли піддамо вохкі або і плинні скальні маси, що містять ґази, тисненю, так що ґази не можуть зовсїм уходити або лиш дуже поволи, тодї плинна маса робить ся верствована або лупаковата. 2) В природї можуть верствовані скали повстати в той спосіб, що або осадові верстви дістають ся під тисненє ґазове і зміняють ся в лупаки або вулканічні ляви стають цїпкими під сильним тисненєм ґазів і тодї творять ся кристалїчні породи пр. ґнайс, лосняковий лупак, амфіболїт і т. д. 3) З експериментів показуєсь, що верствованє може повстати і у скал вулканїчних[2]). В загалї ґеольоґія експериментальна виказує в послїдних часах поступи важні для фізичної ґеоґрафії[3]).

Середну висоту суші означив в 1891. р. Heiderich на 744 m., а в роцї 1894. на 735 m. Wagner означаючи єї в 1895. р. скритикував остро методу і роботу Heiderich'a та означив середну висоту суші на 709, оклуґло 700. Heiderich відповів аж 1899 р.[4]). узнаючи вартість найдену Wagner'ом рішучо низькою, а проте нездалою. Тимчасом Wagner, опершись на розвідцї Haack'a, що найшов середну висоту полудневої Америки значно меньшою, як принимано дотепер (580 m. супроти 650 і 760 m.), виказав наглядно, що середна висота континентів виносить 701 m[5]).

Підношеннями і опаданями земскої кори занимаєсь Lapparent[6]) і полємізує з теоремом Suess'a, що опаданє земскої кори є первостепенним явищем, а фалдованє та льокальні піднесеня другостепенним і подає численні приміри піднесень ві Франциї, Скандинавії та Мелянезиї, причім однак пересаджає знов вагу підношень.

Найлекше обсервувати такі підношеня і опаданя земскої кори над морем. Кількома дотичними працями займемось в уступі про побережа.

---

[1]) Elemente der Gesteinslehre 1898.
[2]) Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1898. 441.
[3]) Пор. новий підручник: Meunier, La géologie experimentale. Paris 1899. Alcan.
[4]) Beiträge zur Geophysik IV. 26 дд.
[5]) Beiträge zur Geophysik IV. 116.
[6]) Soulevements et Affaissements. Revue des questions scientifiques 1898.

Дуже цїкаву справу порушив Kahle. З ріжних місць Нїмеччини доношено, що предмети з даної місцевости давнїйже невидимі нагло ставали видні. Kahle радить докладно фотоґрафувати околицю і винаходить ріжні способи виясненя віродостойних фактів, щоби не бути зневоленим прийняти льокальних обнижень або підвисшень земскої кори[1]).

Таксамо завважав Repkewitz маленькі колибаня в беззглядній висотї деяких сталих точок уміщених в Шарльотенбурзї[2]).

Messerschmitt порівнуючи зі собою ріжні прецизийні нївеляциї приходить до переконаня, що такі зміни безглядної висоти дїйсно істнують[3]). І так знак висоти в Bregenz обнижився в послїдних часах о 0·1 m. Подібні лиш дещо меньші обниженя (max. 37 mm.) констатовано на східних побережах женевского озера. Ті обниженя легко витолкувати укладанєм ся сипкого материялу нанесеного над озера ріками. Цїкавійші є зміни висоти в околицях, де лиш тектонічні зміни можуть їх вияснити. А є вказівки, що такі зміни істнують пр. в французкій та швайцарскій Юрі, в Турингії, Віртемберзї і т. д. Пізнано се з виразного розширеня овиду деяких місцевостий. Такі зміни є наслїдком тектонїчних рухів земскої кори, іменно при землетрясенях.

Про рухи земскої кори появилось в Journal of Geology Chicago 1898. VI. кілька розвідок. Powell звертає увагу на ріжні услівя тисненя, під котрим остають маси каміня і розважає, що коли в однім місци слїдує винесенє, то слїдуюча зараз денудация справляє на данім місци зменьшенє тягару, а потім винесенє, підчас коли опаденє земскої кори потягає за собою через седімантацию збільшенє тягару і дальше опаданє. Van Hise старає ся придумати спосіб обчисленя, о скільки скорчилась земля через повстанє гір, причім вказує на ріжні чинники, які конечно належить узгляднити, а котрих при дотеперішних обчисленях не узгляднювано. Slichter занимає ся тисненєм ві внутрі землї і находить, що зміна часу обороту викликалаби великі зміни в тім тисненю.

Тектонїчну карту полуднево-західної Нїмеччини (1:500.000) видав горішно-реньскій ґеольоґічний кружок[4]). Карта виказує два головні дислокацийні напрями: SO—NW т. з. герциньскій і SW—NO т. з. варисцийскій[5]).

---

[1]) Petermanns Mittheilungen 45. 1899. 218 дд.
[2]) Zeitschrift für Vermessungswesen 1898. 16.
[3]) Schweizerische Bauzeitung XXXIV. Nr. 8—10.
[4]) Gotha, Perthes 1898.
[5]) Petermanns Mittheilungen 1899. Lb. 19.

Знана від 1890 р. депресия Люкчун в середній Азиї має від кількох лїт свою метеорольоґічну стацию. З ей обсерваций Тілло вивів в послїдних часах, що найнизше в тій депресиї положені місця Бояптетура і Таштура лежать 112, зглядно 130 m. під поземом моря[1]).

IX. Вітрінє і праця вітру.

Реґіони, де переважає вітрінє над механїчною деструкциєю, зовем як відомо пустинями. Проблєм повставаня і розвитку пустинь не так то дуже давно близше розслїджений. Доперва в послїдних десятках лїт XIX. віку наука близше пізнала механїчні і хемічні процеси, що відбувають ся в таких околицях.

В послїдних лїтах XIX. віку розпочав професор єненьский Walther ґрунтовні свої студиї над проблємами повставаня пустинь і їх морфольоґиї. Дві важні працї були овочем его дослїдів: про форми азийскої пустинї і про закон повставаня пустинь.

Форми азийскої пустинї помічав Walther підчас своїх подорожий в закаспійский край і Бухару. Тамошня пустиня представляє цікаві явища вітріня і ерозиї вітру. Що хвиля подибуєсь там великі каменюкі в серединї зовсїм порожні, що складають ся лиш з кори кілька центиметрів грубої. В скалах творять ся заглубини, про котрі напевно знаємо, що не є водою вимиті. Ізольовані скали прибирають по певнім часї форму великаньских грибів. Поодинокі камінцї мають форму заокруглену і часто зміняють ся прямо в правильні кулї.

Всї ті явища є випливом вітріня. Веґетация не хоронить почви перед палячим промінєм сонця. Скальне підложе нагріваєсь тому дуже сильно. В ночи наслїдком дуже сильного проміньованя температура обнижаєсь значно, часто низше зера і наслїдки є великі. Поверхня каміня огрівшись сильно розширяєсь так, що відлупуєсь як кусник кори. Є се тз. лущене каміня або десквамация. Колиж камінь нагрітий в день остудить ся в ночи, тодї пукає его зверхня кора, або і цїлий камінь. Великий вплив має ту обставина, чи скала містить в собі сіль, чи нї.

Вітрінє достарчає материялу, вітер пустинї бере сей материял і переносить его з місця на місце. Его працю зве Walther дефляциєю. Всї куснички каміня, які лиш під его силу, порива вітер, гре їх о себе на пісок або і порох і мете его потім, підносячи великаньскі до 300 m. високі хмари пороху і піску. Де лиш є на земли яка мала перепона, творить ся зараз плоска купа піску в видї перевернєного щита. Є се засновок будучої піскової видми. Нагромаджена купка піску становить іменно значну перешкоду для летячого з вітром понад землю піску і задержуючи его в дорозї росте щораз більше. По певнім же часї видма прибирає вид серпа вигнутого проти вітру. Видма ся підносить ся в профілю дуже слабо по сторонї вітру (max. 10°), але за вітром творить стрімкий (до 35°) гребінь і маємо типового туркестаньского бархана. Часто лучать ся такі бархани в довгі ряди. Але їх істнованє не довге. Найбільше творить ся їх в лїтї при вітрі північно-північно-східнім. Колиж в жовтни настане вітер полудневий, обертають ся серпи барханів на північ. Але лїтний вітер все таки є сильнїйший і жене бархани що року о кілька метрів на південь, засипуючи закаспійску желїзницю. Найбільше барханів є в славній пустини Каракум. Они переходять навіть ріку Амударию в той спосіб, що ріка підриває видми правого берега і осаджує пісок на лївім, де его вітер знов хватає.

На полудни вздовж спаду іраньскої височини уложились значні маси ріни і каміня, нанесеного дощевими водами з гір. На північ від сего пояса тягнесь пояс пустинї з глиняним підложем. Ту губить ся значна часть спливаючих з гір потоків і осаджують ся розпущені в їх водї соли. Солених озерець, мокляків, типових солончаків і солоних степів повно в тій полосї. До якости почви приноровлюєсь і веґетация. Поза тою другою полосою простягаєсь на північ безмежна піскова пустиня[1]).

Свої студиї зроблені за Каспієм розширив Walther на иньші пустинні простори і узгляднивши обсервациї иньших ученых видав обширну книжку п. т. Das Gesetz der Wüstenbildung in Gegenwart und Vorzeit. Berlin 1900. Займавий спосіб представленя, ясність і точність знаменують сю дуже визначну роботу Вальтера. Автор обговорює ту передовсїм вітрінє в его ріжних проявах кладучи великий натиск на значінє розчинів сільних, що роблять камінь в серединї крихким. Дефляция є після W. головним чинником, що моделює поверхню пустинї. В перших стадиях розвитку має пустиня гори і долини з часів, коли більше було вохкости і вода могла ще дїлати. Потім лишаєсь вітрінє, котре з найбільшою силою

[1]) Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. XI. 1900. 15

[1]) Naturwissenschaftliche Wochenschrift. 1898. Nr. 21.

дїлає в долинах. Рідкі але сильні хмароломи прятають від часу до часу нагромаджений вітрінєм материял, а в проміжках часу дїлають з повною силою вітрінє і дефляция. Через доокружну денудацию зміняєсь височина пустинна порізана ярами в рівнину засїяну відосібненими горами — неначе „сьвідками“. Також депресиї, в котрих лежать оази, вважає W. продуктом дефляциї.

Наслїдком малої скількости опадів позем ґрунтової води є дуже низький і она є солона. При кождім більшім дощи збираєсь вода в депресиях і розпускаючи в собі сіль, що вицвила на поверхню землї, стаєсь солоною. Такі озера є періодичні і періодично зміняють ся в солончаки. Осаджане соли в таких безвідпливових озерах ріжно відбуваєсь і добре пізнавши єго можна би многі проблєми повставаня покладів соли вияснити.

Відложеня, що повстають в пустинях, є ріжні. В депресиях громадять ся великі скількости піску, ілу, шутру, каміня і т. д. і творять конґльомерати. Найважнїйшим однак продуктом дїланя сил природи в пустини є піски, що творять видми і засипуючи часто солені озера витворюють попереміннїсть покладів соли і пісківця, знану з многих залежий соли.

Осібні уступи посьвячає W. ростинности і зьвірячому сьвітови пустинь.

Египетско-арабску пустиню між Нїлем а Червоним морем розслїджував 1897. р. Fraas. Широка полоса кристалїчних гір тягнесь поздовж Червоного моря, переходячи на западї в крейдову і еоценьску полосу, що складаєсь головно з пісковцїв. В кристалїчних горах замітив Fraas, що вітер малу ту відгриває ролю — більшу вода. Натомість на високорівнях західних збудованих з нубійского пісківця панують неподїльно: вітрінє і вітер, хоч Fraas замітив у вітру дуже слабу силу зглядом піску[1]).

До реґіонів, де дїяльність вітру доходить до великого значіня, зачислити належить деякі надморскі околиці покриті пісковими видмами. Дві такі надморскі околиці власне в кінцевих лїтах XIX. віку описано: куроньску косу і побережа Ґасконїї.

Куроньска коса пересїчно $1-1^1/_2$ km. широка, а недалеко 100 km. довга, є в цїлости вкрита білими мов снїгові заспи видмами. Всї ті видми мандрують постійно від моря на схід до куроньского ґафу, котрий поволи засипують. Многі видми мають форму півмісяця, подібно як бархани. Річний поступ видм виносить пересїчно

[1]) Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft. LII. 569 д.

до 5 m. Численні лїси і селитьби людий пали жертвою піску і по пересуненю вітром видми дальше знов показують ся в руїнах. Лиш нечисленні села вспіли удержатись і щоб їх ратувати, обсаджено ряд надморских видм ріжними пісковими травами, щоб задержати пісок в руху, а потім обсадити лїсом видми, що лежать одалїк від берега[1]).

Подібні явища, лиш в значно більших розмірах, подибуємо на берегах біскайского заливу в Ґасконїї. Видми тягнуть ся від устя Адура на північ 240 km. далеко і доходять до висоти 89 m. Простір занятий ними обчисляють на 85000 ha, місцями занимають полосу лиш 100—200 m. широку, але місцями ширина сеї полоси доходить до 8 km. Поза полосою видм надморских, що до тепер мандрують, тягнуть ся нераз прямовісно до них уложені старі видми порослі лїсом. В старинности лїс стояв на видмах аж до моря, але в перших початках середних віків винищено лїси, видми заворушились і зачали йти в глубину краю. Численні заливи, що були ту від давних часів, пісок віддїлив косами від моря і замінив наперед на ґафи, а потім на прибережні озера. Ті озера перті видмами цофались щораз то дальше в глубину суші, заливаючи села. Потім приходив пісок і засипував усе. В той спосіб много місцевостий погибло. Видми, заступаючи Адурови усте, викликували часті зміни русла сеї ріки роблячи через те також много шкоди. Доперва в XIX. столїтю задержано видми в походї і обсаджено в части лїсом[2]).

X. Підземна дїяльність води: жерела і печери.

Про вплив лїсів на підземні води і жерела оголосив обширну студию Отоцкий[3]) Він відкрив вже в р. 1891, що верченя в лїсї не давали води навіть тодї, коли вільний простір окружаючий лїси, однаково збудований під зглядом ґеольоґічним, всюди давав воду. 1893. р. сконстатував О., що лїс не тілько є біднїйший в підземну воду, як доокружні степи, але також позем заскірної води лежить в лїсах значно глубше, чим в степах.

---

[1]) Zweck, Litauen, Stuttgart 1900.

[2]) Le Mang в Deutsche Geographische Blätter XXII. 235. Gaea 1900. вош. 5 і 6.

[3]) Annales de la Science agronomique francaise et étrangère. II. 1898. пор. Meteorologische Zeitschrift 1898. Lb. (70).

Осібна гидрольоґічна експедиция вислана 1895. р. в ґубернії воронежску, херсоньску і саратівску, потвердила ті обсервациї. Показалось, що пр. в воронежскій ґубернії (лїс Шипова) число жерел і керниць є в лїсї значно меньше, як в околичнім степі. Глубина водоносних верств була в лїсї 2 до 3 разів більша, як в поли. В т. з. Чорнім лїсї херсоньскої ґубернії показали верченя такий самий результат. Цїкаве, що під невеличким полем, лежачим в глубинї лїса, висота підземної води значно піднеслась, в центрі поля стала найвисше, а в напрямі ідь лїсови на всї сторони опадала.

При устю Рейна до Боденьского озера відкрито жерела болотного ґазу, що є зовсїм анальоґічні знаним Mudlumps в дельтї Mississippi та сьвідчать про творенє ся в тих місцях торфу[1]).

В теплих жерелах Італії відкрито в послїдних часах арґон і гель. Скількість арґону доходить місцями до 3%, геля до 1·5%[2])

Над рікою Songwe (доплив Sambesi) відкрили Fülleborn і Glauning в вульканічній околиці кілька дуже богатих горячих жерел. Температура їх доходить до 70°. Красні тераси білого жерелинця окружають ті жерела, в котрих живуть численні гліни. Крім пяти великих горячих жерел є ту ще кілька поменьших, яких температура доходить лиш до 43°. Вода і містить зате в собі велике число алькалїїв і вугляного квасу. В околиці дуже много великих печер з красними сталяктитами і сталяґмітами[3]).

Jaggar переводить клясифікацию ґейзирів на стоячі і переливаючі ся. В ті послїдні напливає деколи з верхних верств зимна вода і справляє, що їх вибухи є неправильні[4]).

Наука про п е ч е р и від'окремилась вже на осібну спеціяльну дисциплїну. Новий єї підручник вийшов власне п. з. Martel, La spéléologie ou science des Cavernes. Paris, Carré 1900. Ся наука будить великий інтерес не тілько у ґеольоґів і палеонтольоґів, але і археольоґів та туристів вже від давна. В Парижи виходить осібна часопись п. т. Spelunca, Bulletin de la Société de spléoléogie, котра містить розвідки про жерела, вертепи, безоднї і печери.

Т. з. замкову печеру в долинї Пункви (Морави) описав Trampler. Она дуже богата звіринними скелетами з четверторядної епохи[5]).

[1]) Natur 1898. ст. 202.
[2]) Chemisches Centralblatt 1898. I. 917.
[3]) Mittheilungen aus deutschen Schutzgebieten 1900. 18.
[4]) American Journal of Science 1898. V. 323.
[5]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XX. 529 д.

Печеру Wind-Cave в південній Дакотї описала Miss Owen. Єї довжина — о скілько дотепер пізнана — виносить 97 англ. миль. Зміни стану барометру викликують великі протяги. Печера повстала мабуть через витворенє ся численних прогалин в скалах при піднесеню гір Black Hills[1]).

Печеру Сибіллї кото Кірхгайм в Віртемберзї розслїдив ґеольоґічно і палеонтольоґічно Fraas. Она повстала через вимитє водою лїясових вапняків швабскої Юри[2]).

1891. відкрито велику бічну печеру в знаній постойненьскій печері. Она творила після дослїдів Müllera (1899 р.) давнїйше ложище ріки Пивки і має дуже богато красних сталяктитів[3]).

Дуже цїкаву методично і річево розвідку оголосив Crammer про деякі ледові печери долїшної Австриї. Спеціяльну увагу звернув С. на печеру звану Tablerloch і витягнув з тих дослїдів ось які загальні замітки:

Температура печери зависить від єї будови. Сли печера западає постійно своїм напрямом в діл, воздух в нїй буде дуже холодний, в зимі творить ся лїд, котрий топить ся в лїтї та осени, але звичайно не в цїлости. Сторона сьвіта, до якої обернений вхід до печери, та єго висота беззглядна не мають значіня, зате мають єго льокальні відносини. Дуже часто купи каміня, що обсипалось з гори і в части заслонило вхід до печери, роблять зі звичайної печери ледову. В лїтї росте температура в ледових печерах в наслїдок підвисшеня температури земної поверхні і заскірної води. Печери, котрі підходять в гору, мають все високу температуру. Температура вітрових ям, що є по обох сторонах отверті, є в лїтї зглядно низька, бо струя воздуха, що переходить крізь печеру, віддає єї стїнам своє тепло, в зимі зглядно висока, бо стїни знов своєю чергою віддають воздухови своє тепло. І ту відносини льокальні дуже много значать[4]).

В Мехику з давна знані дуже численні печери в дуже там розповсюднених кретацейских вапняках, що викликують в многих околицях краю чисто красові явища[5]).

Нову голубу печеру, подібну до Капрейскої, лиш дещо меньшу, відкрито на острові Занте[6]).

[1]) Bulletin de la Société de Spéléologie. III. Nr. 9. і 10.
[2]) Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft. LI. 1899. 75 д.
[3]) Mittheilungen des deutschen und österreichischen Alpenvereines 1899. Nr. 20.
[4]) Eishöhlen und Windröhren-Studien. Abhandlungen der k. k. Geographischen Gesellschaft in Wien. Band. I. Heft. 1 д 15—76.
[5]) Beiträge zur Geologie und Paläontologie der Republik Mexico. 1899.
[6]) Globus т. LXXVII. ст. 134.

XI. Ріки.

Загальний перегляд праць про ріки і иньші области гидроґрафії подає Ule[1]).

Вплив ростинної покриви на стан води в ріках опрацював Wollny[2]). Висліди его праці ось які: 1) Поверхні покриті рістнею допроваджують рікам в загалї меньше води, чим простори безростинні. 2) Живучі ростини управильняють доплив води до рік, здержуючи ей ріжними способами в дорозї. 3) Ростини спиняють в дуже значнім розмірі розмиване землї, шутру, піску і т. д. вяжучи корінєм сипкі маси і здержуючи сучасно струю води допливаючої до ріки. В рівнинах вплив рістнї на стан води в ріках не є значний, хиба лиш на дуже пропускальнім ґрунтї. Зате в околицях нерівних вплив сей є великий і збоча гір треба конечно залїсити або замінити в пасовиска, щоби доплив дощевої води до рік управильнивсь і она терену не розмивала. Рільну культуру в таких околицях треба рішучо закинути, бо она є там мало видатна, а терену не хоронить, бо рільні ростини лиш короткий час веґетують.

Области позаевропейских рік обчислив планіметрично Bludau[3]).

Belloc виказав, що Ґаронна не випливає під шпилем Малядетти, лиш в долинї Aran, що значно зміняє положене головного дїлу европейских вод в тих сторонах[4]).

Густотою річної сїти в Шварцвалдї занимає ся Neumann, і находить в загально методичнім розслїдї, що она прямо зависить від воздушних опадів, крім того від пропускальности почви, беззглядної висоти, від часу, як довго лежить снїг, дуже много від будови гір, а також від способу вітріня, ерозиї і денудациї скал[5]).

Цїкаві прояви річної ерозиї дослїдив Brunhes на однім з реґуляційних каналів ріки Savine, часово порожнім. Витворились там в місцях, де були вири, глубокі дїри в литій скалї місцями понад 1 m. глубокі[6]).

Гидроґрафічні відносини горішного Нїля опрацював по найновійшим відкритям de Martonne, виказуючи, що горішний Нїль складає ся з кількох самостійних річних системів, подібно як і многі иньші африканьскі ріки. Є се наслїдком браку ороґрафічного виобразованя африканьского континенту[1]). В цїлій Африцї в загалї міняють ся навіть в тій самій ріцї пороги і водопади з місцями, де спадок ріки є мінїмальний, та через те повстають острови і озера. Кожда нова виправа в незвісні околиці Африки приносить правильно вісти про нові пороги і озера. І так розслїджуючи головну жерельну ріку Kong'a Luapula, найшов Weatherley величаві водопади, названі ним водопадами Johnston'a[2])

Великі водопади ріки Lule-Elf, подабаючі в дечим на Няґару в зменьшеню, описав Lorenzen[3]).

Дуже цїкавим проблємом зайнявсь J. Walther. Розслїдив він іменно, чи Oxus (Амудария) висилав коли одно своє рамя до каспійского моря, як се до недавна припускано, рисуючи навіть на мапах ложбище, що его колись сей рукав мав занимати. Результат є зовсїм неґативний. Walther виказує наперед історично, що звістка з XVI. віку про сей рукав є фальшива, а потім ґеольоґічно доказує, що мниме старе ложбище Амудариї є звичайним пустинним wadi, що не мало нїколи нїчого спільного зі згаданою рікою[4]).

Повстало оно як і всї wadi через нагальні зливи, переобразував его вплив вітру, витворюючи топоґрафічну звязь, там де причинової нїколи не було. Найлучшим доказом сего є цїлковитий брак відложень річного намулу взцовж мнимого ложбища Оксуса та его мнимого устя в Каспій. Амудария є незмірно богата в намул і всюди, куди тече, осаджує его в великій скількости. Тимчасом навіть глубші верченя не показали й слїду сего намулу над Каспійом.

Від давна було знаною річию, що Дунай в своїм горішнім бігу коло місточок Immendingen і Möhringen тратить много води, що западає ся ту в землю. Пересїчно 77 днїв на рік, головно в лїтних місяцях (VII– X), вся вода Дунаю западає тут в глубину землї, так що доперва нові допливи творять на ново ріку. Помічано вже віддавна навіть отвори лїйковатого виду, котрими вода витїкає. Околичні мешканцї припускали, що дунайска вода показує ся на поверхню землї в великім жерелї річки Hegauer Aach, що впливає до Боденьского озера. Опирались они на тім, що коли на Дунаю

---

[1]) Die Gewässerkunde im letzten Jahrzehnt. Geographische Zeitschrift. VI. 97 д. 148 д.

[2]) Meteorologische Zeitschrift. 1900. 187 д.

[3]) Petermanns Mittheilungen 1898. 107 д.

[4]) Globus LXXIII. 19.

[5]) Beiträge zur Geophysik IV. 219 д.

[6]) Naturwissenschaftliche Rundschau 1898. 255.

[1]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin. XXXII. ст. 303 дд.

[2]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik т. XXI. ст. 381 д. Globus т. LXXVI. ст. 343 дд.

[3]) Natur 1898. 152.

[4]) Petermanns Mittheilungen т. XLIV. ст. 204 дд.

повінь, тоді з того жерела пливе мутна вода. Виказали се наглядно досліди Knop'a, що велів кинути до Дунаю велику скількість соли і невдовзі замітив засолене в згаданім жерелі. Endriss припускає отже істноване підземного каналу, що однак дуже поволи задля численних перешкод проводить дунайску воду в область Рейна[1]).

На взір недавно перед тим явившої ся моноґрафії ріки Одри видала комісия реґуляційна Ельби в Маґдебурзі велику книгу про сю ріку[2]). Щоби запобічи грізним повеням Ельби, постановила згадана комісия розслідити всесторонно клїматичні, ґеольоґічні і орографічні відносини бассейна сеї ріки. Книга нею видана обнимає много важного материялу для ґеоґрафа. Именно много нового приносить Elbstromwerk про відносини ділювіяльних рік північної Нїмеччини до нинїшної Ельби, про повені на тій ріці і вплив припливу та відпливу моря на стан води в ей устю. Усте Ельби, що з властиво дельтою, описує Henz[3]). Водопади судетских рік, що належать в значній части до области Ельби, описав Herden[4]).

Marinelli розслїджував дельту ріку Po і прийшов до висліду, що зріст сеї дельти виносить річно 76 гектарів, а від 1300 р. зросла она о 513 квадратових кільометрів. З сего слїдує, що по 12000 лїтах триестиньский залив буде озером[5]). Дельта Міссісіпі натомість, хоч значно розширяєсь на простір, то рівночасно западаєсь пересїчно о 1 стопу на 20 лїт під поверхню моря. Причина тому є вибудоване вздовж рукавів ріки там і гробель. Они не позволюють ріці заливати своєї дельти і підвисшати ей ровени осадками, підчас коли істнуюча вже дельта зложена з нетривкого материялу постійно западаєсь.

Ріку Madeira описує Lamberg[6]).

Ольсуфіев подає обширну опись ріки Анадир[7]).

Ріку Hwang-Ho розслїджував Gaedertz головно з огляду на реґуляційні праці, підняті китайским урядом[8]).

---

[1]) Naturwissenschaftliche Wochenschrift. 1900. ст. 320.

[2]) Der Elbstrom, sein Stromgebiet und seine wichtigsten Nebenflüsse. Berlin 1899, Reimer. 3 томи і атляс.

[3]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik 1900. XXII. 24 д.

[4]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik 1900. XXII. 202.

[5]) Rivista geographica italiana т. V. ст. 24 дд, 65 дд.

[6]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XXIII. 20.

[7]) Витяг в Petermanns Mittheilungen 1899. 26.

[8]) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. ст. 402 дд.

XII. Озера.

Серед ріжних галузий гидроґрафії дуже красно розвинулась в послїдних часах лїмнольоґія. З невеликих початків, які виказувала ще перед пару десятками в тім взглядї ґеоґрафічна наука, зросла лїмнольоґія до дуже значних розмірів. Найлїпший примір, що вказує, як далеко вже зайшла та галузь ґеоґрафії, дає двотомовий опис женевского озера, що зладив в девятьдесятих роках XIX. столїтя Forel. І як вже той єго твір, хоч спеціяльно одному лиш озеру присьвячений, мав величезний методичний вплив на пізнїйші лїмнольоґічні праці, так теперішна видана ним книжка п. т. Handbuch der Seenkunde. Stuttgart, 1900. обіцює стати підставовим ділом лїмнольоґії на довший час. Опираючись на дослідах над озерами умірковапої полоси в Европі і Америці, обговорює Forel озера зі всїх можливих точок погляду. Не ту місце подавати хочби в скороченю численні здобутки для лїмнольоґії, що виходять з мітких помічань Forel'a. Належить однак згадати, що Forel попри загальні ґеоґрафічні впливи добачує велике значіне також льокально-клїматичних елементів. Дуже важні замітки подав Forel до історії чи життеписи озер, дїлячи час істнованя кождого озера на фази: молодости, зрілости, старости, та дві послїдні фази, коли озеро стає калужею, а опісля багном. Потім переводить Forel клясифікацію озер по ріжним точкам погляду. Хемічні і термічні відносини озер оброблює Forel дуже основно, присьвячуючи потім дуже цїкавий устуи теренови, до тепер майже нетиканому т. є. явищам рефракційним над озерами. Forel найшов иньші рефрекційні явища, коли вода озера є зглядом воздуха зимна, а иньші, коли она є тепла. Коли температура води є висша від температури воздуха, видаєсь нам, що овид став вузший і стоїть низше та близше нас; поверхня озера видаєсь сильно випуклою. Филї озера видають ся висші, як є дійсно. Часто повстає міраж. Коли температура води є зглядно низша від воздушної, тоді: овид є піднесений високо і здає ся ширшим, поверхня озера видаєсь вглубленою, висота филь виглядає меньша, як є.

Forel розслїдив також загально колибаня температури озер европейских і порівнавши їх приходів до переконаня, що річне колибане температури озерної води є під рівником найменьше, під бігунами найбільше. Озера солодководні ведуть ся в тім взглядї далеко правильнїйше, чим моря, бо є замкнені і не мають струй[1]).

---

[1]) Comptes Rendus. CXXXII. 1089.

Взірцеву лїмнольоґічну моноґрафію подав Lorenz v. Liburnau описуючи Ґальштатске озеро[1]). Є се майже типічне озеро між озерами Salzkammergut'a; цїкаві є лиш прибережні жерела, що в часї дощів значними водопадами спадають до озера. Взаґалї в Австриї лїмнольоґія процвитає. На озері Травнскім (Traunsee) викрив Richter т. зв. Seiches т. є. колибаня цїлого зеркала озера[2]). Озера ческого лїса опрацював Wagner[3]) і подав значний причинок до розвязки т. зв. Kar'ового проблєму т. є. як ледівцї витворили під вершками ґір заглубини нинї покриті озерами. Плодом ледникової ерозиї є в значній части також альпейскі озера коло провала Reschenscheideck, котрі розслїдив Müller[4]). Угорске ґеоґрафічне товариство покінчило вже розслїджуване Болотного озера, що виказало дуже малу ґо глубину (пересїчно 3—5 m. maximum 11 m.) і притім Seiches. Деякі озера поменьші в полудневих Альпах описав Damian[5]). Озеро Sviča в Хорватиї, описане Граниловичем, є озером красовим майже циркницкого типу і показує цїкаві температурні відносини[6]). Того самого типу є озера Плїтвіцкі, також в Хорватиї положені, які опрацював Umlauft[7]). Красові озера в Хорватиї, Істриї і Дальматиї вимірив Gavazzi і оголосив результат своїх помірів[8]).

Періодичні колибаня зеркала штарнберского озера відкрив і розслїдив Ebert. Стоячі филї (Seiches) істнують в тім озері безсумнївно і відбувають ся зовсїм гармонїчно як рух маятника після права сінусів. Головна филя має час періоду рівний 25 мінутам і є одноузлова. Через ті стоячі филї повстають сильні підводні струї. Крім головної стоячої филї є ще друга, що приходить що 15·75 мінут. Через інтерференцию тих филь повстають ріжні филеві рухи поверхнї. Метеорольоґічні відносини, а іменно наглі зміни воздушного тисненя, мають на явище стоячих филь великий вплив[9]).

---

[1]) Mittheilungen der k. k. Geogr. Gesellschaft in Wien 1898. Bd. 41. ст. 1 дд
[2]) Petermanns Mittheilungen Bd 45. 1899 ст. 41.
[3]) Wissenschaftliche Veröffentlichungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig. 4. 1899.
[4]) Pencks Geographische Abhandlungen т. 1900. зош. 1.
[5]) Abhandlungen der k. k. Geogr. Gesellschaft. I. ст. 79 дд.
[6]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. Bd. 23. ст. 108.
[7]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik Bd. 21. ст. 22.
[8]) Mittheilungen des k. k. Geogr. Gesellschaft in Wien XLI. 1891. ст. 315.
[9]) Sitzungsberichte der Münchner Akademie der Wissenschaften. 1900. 435 д.

Про французкі озера написав славний лїмнольоґ Delebecque більшу книжку, відзначену академією наук[1]), що приносить дуже много нових даних. Поділ Delebecque'a є независимий від поділів Forel'a; за критерию приймає він, чи озеро є заглублене в родимій скалї, чи повстало через природну греблю. Узгляднено всї озера в цїлій Франциї і замітити належить, що автор відкрив і розслїдив в самих Піренеях 22 озер, дотепер в науцї незнаних.

Для озер Шварцвальда виказав Halbfass, що они є наслїдком ледової епохи[2]). Озеро Eichen, що там лежить, показує явища красових озер пр. циркницкого. Після Knierer'a дїє ся се з тої причини, що оно лежить в полосї тріясового вапняка, могли ся отже красові явища розвинути[3]). Halbfass розслїдив також озеро Dratzig на Поморю, що є озером мореновим, отже також полишкою ледової епохи[4]).

Дослїди над озерами ведуть ся також в Італїї дуже пильно. Стан розслїдів подає Agostini[5]).

Мертве море розслїдив в послїдних роках XIX. віку Gautier. Хибна є думка, що вода сего озера є в вічнім супокою. Підчас бурий піднимають ся на нїм великаньскі боввани. Не правдиве є також оповіданє, що птахи не можуть пролїтати над озером, або що ростини над ним рости не можуть. Де лиш є троха солодкої води, там корінить ся буйна веґетация. Що околиці Мертвого моря є пустинні, винна тому лиш велика спека і посуха тамошнього клїмату. Півостров Ель Мезра'а дїлить Мертве море на дві части, північну більшу до 399 m. глубоку і полудневу плитку (3—4 m). Цїла гора соли і численні соляні стовпи находять ся на полудневім побережу. Місцями добуваєсь тут сїрководень, а на днї моря лежать поклади ріжних бітумів — головно асфальту, що по бурях пливають кригами по поверхни озера[6]). В послїдних часах начинаєсь уровень Мертвого сильно підносити. Значна часть дельти Йордану і сусїдні острівцї залиті вже водою. Уровень не обнижає ся в лїтї, тому мож вияснити те явище або сильнїйшим допливом води в остатних часах, або піднесенєм дна озера[7]).

---

[1]) Les lacs français. Paris 1898.
[2]) Petermanns Mittheilungen Bd. 44. 1898. ст. 241.
[3]) Monatsblätter des badischen Schwarzwaldvereines Bd. 2. з. 11.
[4]) Globus 1900. ст. 1.
[5]) Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1899. ст. 490.
[6]) Le Globe 1900. Natur 1901. 210.
[7]) Geographical Journal, 1900. 10.

Озеро Кукунор і єго околиці описав Futterer, котрий розслїджував се озеро підчас своєї подорожи поперек Азиї. Він думає, що на тім місци в дуже недавній ґеольоґічній минувшинї було велике озеро ділювіяльне. Найнизше місце низини, окружаючої Кукунор, не занимає се озеро, се місце є не далеко него над невеличкою річкою без відпливу (висота н. п. м. 3110 m. Кукунор 3300.)[1]).

Берґ і Іґнатов занимались колибанями поземy озер середної Азиї і западної Сибіри. Загалом він опадав від найдавнїйших історичних часів. Однак від 1880. р. даєсь замітити дуже значне підвисшенє поземy. Озеро Араль, що до сего року стало опадало, піднеслось дотепер загалом о 3 m., так що на рік випадає пересїчно 178 mm. Ріка Сирдария несе тепер значно більші маси води, чим давнїйше. Також иньші озера кірґіских степів, а іменно в ґубернїях Омскій і Акмолиньскій, піднесли свій позем досить значно. Чи се, як думають автори, є викликане другостепенним періодом вохкости, чи яким більшим ґеольоґічним періодом, що власне розпочавсь, годї сказати[2]).

Моноґрафію солоних озер з околиць Омска подали Берґ, Ельпатевский і Іґнатов[3]). Є їх три більших, а кожде з них инакшого характеру. Озеро Селети-Денніс, два рази більше від женевского, є дуже плитке (3 m.), гірко-солоне, з водою дуже прозорою зеленої краски. Озеро Кизиль-как є зовсїм насичене солею і має від одного наливочника червону барву. І озеро Теке є насичене, а на днї видїлюють ся постійно великі шестистїнні кристали соли; має оно брудно-молочну краску і заносить фіялками.

Озеро Урмія — також солоне — є тим замітне, що єго зеркало в послїдних часах зачало дуже сильно підноситись, так що залило околичні урожайні землї. В виду того, що западний берег сильнїйше зістав залитий, чим східний, припускає R. Günther, що маєм ту до дїла з льокальним западанєм земскої кори[4]).

В Гімаляях повстало значне озеро через пересипанє долини великаньским обвалом сусїдної гори[5]).

Африка була завсїгди клясичним краєм озер і що хвиля відкривано там незнані дотепер, а замітні чи то величиною, чи положенєм, чи і иньшими обставинами озера. І тепер не мине рік, щоби чого цїкавого про африканьскі озера не появилось в научній літературі. Послїдні літа XIX. столїтя принесли новість, що два значні африканьскі озера зникли з поверхнї землї. І так озеро Леопольда або Rikwa, що лежить на схід від озера Tanganyika, замінилось в лїсистий степ, що лиш в дощевій порі місцями покриває ся водою[1]). Є се звістка впрочім не в цїлости правдива. Другим згаданим озером є часто згадуване в ґеоґрафії озеро Ngami в полудневій Африцї. Єго доплив затканий пливучими островами очерету зовсїм обмілїв і на місци давного великого озера простягаєсь рівнина поросла шуваром[2]).

З поміж иньших африканьских озер розслїджувано послїдними часами озеро Nyassa. Як вже давнїйше думали, повстало те озеро через западенє ся земскої кори. Озеро Nyassa становить полудневу часть великого африканьского рова. Сьвіжі слїди того западеня земскої кори видно на обривистих берегах озера. За сим сьвідчить і єго значна глубина. Morre висондував ту 785 m. Краска вод озера голуба, прозрачність дуже значна. В околици находить ся много иньших озер, впрочім зовсїм иньшого характеру і походженя. Лежить там згадане вже висше озеро Rikwa (Rukva, Rukuga, озеро Леопольда), котре в 1899. р. Fülleborn найшов плитким, але не ствердив постереженя Langheld'a, що те озеро від 1891. р. цїлком висохло. Fülleborn відкрив ще кілька вулканїчних озер в краю Konde[3]). В озері Tanganyika сконстатовано істнованє деяких морских мякунів, що вказувалоб на колишне передюрайске полученє того озера з Червоним морем[4]). Розяснено тепер також, чому содові озерця Лїбійскої пустинї мають червону краску. Dewitz найшов именно в їх водї велике число бактерий, що видїлюють червону орґанїчну субстанцию[5]).

Топоґрафію египетских содових озер опрацювали Schweinfurth і Lewin. Они лежать в депресиї, що повстала через западенє плити нумулїтового вапняка. В рові, що повстав через сей залом, лежать

---

[1]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1900. XXXV. 297 далї
[2]) Извѣстія Имп. Русс. Геогр. Общ. XXXVI. 111.
[3]) Извѣстія императорскаго русскаго географическаго общества. т. 35. 1899.
[4]) Petermanns Mittheilungen Bd. 45 1899. ст. 297.
[5]) Nature 1898. ст. 70.

[1]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik т. 20. ст. 283.
[2]) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1899. ст. 198.
[3]) Пор. Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. 1899. (24) ст. 197 і 441. 1900 (25). ст. 332. Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. т. 20. ст. 283.
[4]) Geographische Zeitschrift V. 109.
[5]) Zoologischer Anzeiger Bd. 32. ст. 53.

ті озера. Скількість їх вод періодично змінюєсь і зависить від стану води в Нїлю і від дощів в околици[1]).

Великі австралїйскі озера Lake Eyre і Lake Amadeus находять ся від певного часу в стадиї цїлковитого висиханя. Причиною є брак більших притоків і великі маси піску, котрі вітер постійно в них навіває[2]).

Велике озеро солоне в Utah хотїв американьский уряд зарибити, але показало ся, що скількість соли навіть для морских риб і устриць за велика[3]).

Озера Патаґонїї описує Hatcher. Він розріжняє три роди тих озер: тектонїчні, ґляціяльні і решткові. H. твердить, що послїдний рід озер повстав через значне піднесене суші при кінци треторядної епохи. Тодї значні простори соленої води віддїлились від моря і зістали по нинїшний день озерами[4]).

Про б о л о т а і б а г н а занотувати можем з послїдних років XIX. столїтя лиш кілька розвідок меньшого значіня. Є се царина, де много ще лишаєсь робити.

Опис торфяного багна Ecsed над Самошем і Красною та єго осушеня подав Czirbusz[5]). Осушене Полїских болот є вже фактом довершеним[6]). Про використуване нїмецких торфяників подав Immendorff дуже цїкаву статю[7]). Вказавши на їх великий простір, радить I. використувати торфяники, через заміненє їх в плодовиту почву, а противить ся копаню торфу.

Болотний вулькан доселї незнаний відкрив Ludwig на Llanos Венецуелї[8]). Він належить до цїкавших явищ серед болотних вулканів в загалї.

Славні, а до недавна лиш дуже мало знані болота Фльориди, звані Everglades, розслїдив Willonghby. Є се великаньскі багна поросли кипрійскою травою. Вода стоїть в них пересїчно 1—2 стопи глубоко. Біфуркациї відпливів дуже часті, тому W. говорить про плинний дїл водний в тих багнищах[9]).

---

[1]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. 33. 37 д.
[2]) Petermanns Mittheilungen Bd. 44.1898. ст. 7.
[3]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XX I. ст. 333.
[4]) Bulletin of the Geographical Society of Philadelphia. 1900. вош. XII.
[5]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. Bd 21. ст. 503.
[6]) Огляд підриятих там робіт в Geographische Zeitschrift VI. 222.
[7]) Deutsche geographische Blätter т. 33. 1900. ст. 71 дд.
[8]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. Bd. XX. ст. 394.
[9]) Petermanns Mittheilungen. 1899. LB. 61.

Т. з. глиняні панви Австралїї розслїдила експедиция Horn'a Се плиткі заглубини в глинястім підложи звичайно округлого виду без нїякої веґетациї докола. Їх промір лежить межи пару стопами а 12 km.; глубина найбільша $1^1/_2$m. Они повстають через сплив води з околичного терену до плоских заглубин. Вода зразу всякає в підложе, але потім, коли шпарки затикають ся намулом, остаєсь пару місяців в панві, поки не випарує. Відпливу не має нї одно з тих болотнистих озерець[1]).

XIII. Л е д і в ц ї.

Який є загальний стан наших відомостий про ледівцї і які нові проблєми висувають ся для ґеоґрафії на тім полї, представляє Richter[2]), переходячи коротким загальним поглядом роботу кількох послїдних десятків лїт. Заявившись за теориєю реґеляциї вважає Richter теперішними проблємами науки в тій царинї 1) означене відносин між пробігом посуненя ся в перед ледівця а скоростию руху леду, 2) оброблене фізично термічних питань, а іменно виясненє ріжних термінів дотичних пр. оґів, білих і синих полос в ледї і т. д.

В 1894. р. повстала на цюрихскім ґеольоґічнім з'їздї міжнародна ледникова комісия, що постановила собі за головну задачу розслїджувати колибаня ледівцїв. Вже трилїтні, спільними силами ведені, дослїди дали деякі результати, котрі доповняють давнїйші висліди. Коротко збирає їх Richter[3]) Ледівцї альпейскі найлїпше дотепер пізнані держать ся досить виразно 35-лїтних періодів Brückner'a, причім однак многі ледівцї перескакують нераз цїлий період колибаня, щоби аж в слїдуючім його тим сильнїйше зазначити. І так перескочили альпейскі ледівцї мокрі роки коло 1880. Ледви деякі ледівцї в западних Альпах зачали рости, а по десятьох або і 20 лїтах і деякі в східних, але многі тимчасом дальше зменшились.

Є се явище дуже цїкаве — Richter вважає зго важним проблємом.

Таксамо невиразно як альпейскі заховувались в послїдних часах також і піренейскі ледівцї. Натомість ледівцї країн полярних,

---

[1]) Petermanns Mittheilungen 1898. 8.
[2]) Neue Ergebnisse und Probleme der Gletscherforschung. Abhandlungen der k. k. Geogr. Gesellschaft in Wien т. I. ст. 1 дд.
[3]) Petermanns Mittheilungen т 45. 1899.

Скандинавії, Кавказу і центральноазийских гір загально подають ся в зад. З того заключає Richter: Понеже в континентальних просторах ледівці тепер виразно уступають, а в океанічних стоять на місци або заховують ся неясно, то легко буде мож ті їх колибаня вияснити за Brückner'ом. По его теорії на тепер т. є. на конець XIX. столїтя випадає період посухи, отже уступаня ледівців. Слиж они тільки в континентальних просторах виразно уступають, то потверджає се вповні теорию Brückner'a. Она голосить, що всякі колибаня клїмату лиш в континентальних околицях виразно можуть виступати, в океанічних лиш невиразно.

Межинародна ледникова конференция зібралась в серпни 1899. р. і розслїдивши ледники Родану і Unteraar, впорядкувала класифікацию і номенклятуру морен та подала многі методичні уваги для дальших дослїдів над ледниками[1]).

Götz розслїджував центральний Балкан в цїли сконстатованя там ледівцевих слїдів. Дослїди показали, що ледівців ту ніколи не було, хотяй є много слїдів, подабаючих на ледівцеві слїди. Götz виказує, що слїди ті дають ся без натяганя звести до ерозиї і вітріня. Доперва по ледовій епосї з причини значної висоти опадів наступили в пластицї тутешнього терену значні зміни[2]). Натомість в горах тз. динарскої системи в западній части балканьского півострова сконстатував Cvijić значні слїди давних ледівців, як моренові вали і кари. Находять ся они на горах Treskavica, Prenj, Čvrsnica, Volujak, Durmitor і иньших, що лежать в Боснї, Герцеговинї і Чорногорі[3]). Гори Rila розслїджувані тим самим ученим виказали також много карів, моренових озерець, а навіть малих фірнових просторів[4]).

Положенє ледівців ґляцияльної епохи в долинах рік Mur і Mürz розслїджував Böhm. По его думці цїла долина ріки Mur аж по Judenburg була покрита одним великим ледівцем до 800 m. грубим, що стояв в звязи з иньшими ледівцями, наповняючими долини горішної Анїзи і горішної Драви. Гори над річками Liesing і Mürz були також покриті ледом, але їх долини були від него

[1]) Petermanns Mittheilungen 46. Bd. 1900. 77.

[2]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. 35. 1900. ст. 127.

[3]) Abhandlungen des k. k. Geographischen Gesellschaft in Wien. II. 1900. 195 дд. III. 1901. Nr. 2. ст. 1 дд.

[4]) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. Nr. 7. 331. дд.

свобідні. Висота фірнової лїнії припадала, між 1300 m. а 1600 m. і подібно як нині більшала, чим дальше до середини гір[1]).

Kerp в подорожи до скандинавских країв замітив, що ледова епоха мала для тих країв велике морфольоґічне значінє впливаючи моренами і абразією на єї пластику. Єї вплив належить однак вважати корисним, бо власне на ледникових наносах розвинулась в полудневій Швециї і в Данії дуже плодовита почва[2]).

Цїла північно-нїмецка низина є — як звісно — покрита ґляцияльними відложеними, подібно як і значна часть східної Европи. Ті відложеня пізнано досить пізно. Коло половини XIX. столїтя Agassiz перший поставив здогад, що находжені на ерратичних камінях риси походять від ледівців, що колись покривали цїлу північну Европу, виходячи від самого північного бігуна. Але ту здорову гадку закинено невдовзї, а то задля тз. дріфтової теориї Lyell'a. Она припускала істнованє моря на місци північної Нїмеччини, по котрім плавали ледові гори відорвавшись від скандинавских ледівців. Каміня, шутер і пісок, що находились на тих ледівцях при їх топленю ся опадали на дно моря і потворили дуже великі відложеня піску, глини, шутру, що зовсїм змінили характер пластики тих околиць.

Та теория, принята задля великої наукової поваги єї творця, не сприяла дальшому розвиткови науки. Мимо того льокальні дослїди поступали скоро вперед і добували щораз то більше даних, котрі знов щораз труднїйше було дріфтовою теорию вияснити. Коли проте Torrell, найшовши ледівцеві шрами на материх скалах, висказав 1875. р. теорию, що ледівці скандинавскі сягали в ледовій епосї аж на північно-нїмецку рівнину, та що ґляцияльні відложеня є лишень рештками ґрунтових, начільних або бокових морен, значінє дріфтової теориї заколибалось. Виказано дальші шрами на материх скалах та ідентичність ґляцияльних відложень північно-нїмецких з моренами нинїшних ледівців, помічано заворушеня в горішних верствах під впливом напору леду. Що найголовнїйше звернено увагу на ерозийну дїяльність так самих ледівців, як вод, що з їх стопленя повстали, відкриваючи щораз то нові системи долин, куди ті води спливали до моря. Дальші дослїди, головно стратиґрафічні, довели — як звісно — до виказаня трох ледових а двох інтерґляцияльних епох і занимались тим проблємом протягом дуже

[1]) Abhandlungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. Bd. II. 1900. ст. 91 дд.

[2]) Geographische Zeitschrift VI. 128 дд.

довгого часу. Доперва недавно звернулись нїмецкі ґеольоґи до розслїджуваня моренних та гидроґрафічних системів ледової епохи. Відкрито великий систем кінцевих морен від Шлесвиґу до східних Прус, що є продуктом довготревалої епохи супочинку ледів, і виясненo тепер повстанє озеровин надбалтийских ерозиєю або насипанями. Досліди над моренами вияснили також дуже много точок з ґляціяльної гидроґрафії, поясняючи витворенє ріжних великих східно-західних долин річних ріжним станом леду[1]).

Студиями над ледовими відложенями в північній Нїмеччинї занимає ся від певного часу невпинно Keilhack, що поставив собі задачею розслїдити напрям ділювіяльних рік. Опираючись на давнїйших відкритях вносить Keilhack, що великі системи плитких долин, що тягнуть ся в північній Нїмеччинї від сходу на захід, служили в ледовій епосї до того, щоб воду зі стоплених ледівців відпровадити до нїмецкого моря. Ті долини повстали при граници ледів, можемо отже з їх положеня вивести, де ледовець на довший час позістававав в незмінним положеню. До сих виводів маєм три критерії: 1) кінцеві морени т. є. вали шутру і ерратичних камінїв 2) ґрунтові морени, сильно погорблені, повні озер і мочарищ 3) верствовані, верхом рівні річно-ледові відложеня тз. Sandr, осаджені струями зі стоплених ледників.

Найбільшою на полудне висуненою долиною пливуть до нинї горішна Одра і долїшна Лаба. Друга долина йде від Калиша через Берлїн до західного Меклєнбурґа. Трета значнїйша долина зовесь Берлїньско-варшавскою. В нїй пливуть до нинї по части Варта, Обра, Одра, Спрея і Гавеля. Четверту головну долину зове Keilhack торуньско-еберсвальдскою. В нїй пливе Нотець, долїшна Варта, Одра в т. з. Oderbruch і находить ся Фіновский канал. В тій долинї місцями потворились значні озера в наслїдок заставленя води масами леду. Такі були коло Торуня і коло Франкфурта над Одрою.

Коли ледівці ще дальше на північ поступили і ще раз задержались на довше, повстала послїдна більша ділювіяльна долина тз. pommersches Urstromthal. Она йшла зовсїм рівнобіжно до нинїшного балтийского побережа в віддаленю пару миль від него. І в тій долинї потворило ся кілька озер, але не велике лиш число води збирало ся в тій долинї. Леди зачали ся знов подавати в зад, лишаючи на Поморю кілька окрайних долин, нинїшне усте Одри стало вільне і води східної части нїмецкої рівнини поплили туди

[1]) Zeitschrift der deutschen geolog. Gesellschaft 50. 1899. ст. 54 дд.

в Балтик. Одра стала самостійною від Лаби, потім визволилась і Висла[1]).

Zache припускає, що велика долина Нотець-Варта-Одербрух повстала наслїдком льокального западеня старших верств в тім місци. Повсталий рів послужив догідним відпливом для стоплених вод уступаючого ледівця скандинавского[2]).

Типічною ґляціяльною околицею північної Нїмеччини є т. з. Fläming. Се є височина покрита мов кертовинами безладними горбками, що доходять лиш до 200 m. висоти. Все покриває пісок повний наметняків. Місцями показують ся видми і характерні безводні долини. На границї Лужиць є много безвідпливових ставів і озерець[3]).

Т. з. сухопутні леди арктичних сторін є в послїдних часах предметом пильних розслїдів, щоб на підставі одержаних результатів мож було лїпше порозуміти рухи ледів европейских підчас ледової епохи. Берлїньске ґеоґрафічне товариство нарочно вислало наукову виправу в Ґренляндию, котра розслїджувала рухи, будову і зміни великого ледівця, що сей остров вкриває, єго температуру, творенє гір ледових і т. д.[4]).

Drygalski найшов підчас згаданої експедициї в ґренляндских ледниках великі анальоґії з ледами, що колись вкривали цїлу північну Европу. Ледники ґренляндскі повстають на горах східного побережа і посувають ся на запад, як се виказали помічаня при вистаючих понад лїд скалах (nunatak). Крім того поземого руху сконстатовано і прямовісний; лїд підносить ся іменно при зіткненю з вистаючими горами. Власне сей рух ділювіяльних ледників полишив такі слїди з европейских землях. Всякі рухи леду стремлять завсїгди до вирівнаня тисненя, так що пр. з місця, де лїд є грубший, йде рух туда, де він є тоньший, хочби се друге місце висше лежало, чим перше. Дуже важні замітки подає Drygalski також про жолобленє озер ледниками. Після него ледники головно вичищують істнуючі вже заглубленя і можуть їх розширити. Найлїпші услівя для тої роботи ледників є при їх сходженю з гір, де ріжниці в грубости леду великі[5]).

[1]) Jahrbuch der k. preuss. geol. Landesanstalt Berlin 1899. ст. 90. дд. Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft. 51. ст. 77 дд.

[2]) Naturwissenschaftliche Wochenschrift v. Potonié. 1898. 313.

[3]) Schöne, der Fläming. Leipzig 1898. Duncker & Humblot.

[4]) Richter, Geographische Zeitschrift. V. 126. д.

[5]) Petermanns Mittheilungen т. 44. 1898. ст. 55 дд.

Про колибаня ледників в північних реґіонах землї робив критичні досліди Rabot[1]). Обняв він Скандинавію, Jan Mayen, Ісляндію, Ґренляндию, Шпіцберґи і край Франц-Йосифа. Rabot замітив, що перед XVIII. віком ледівцї від кількох століть вже були меньші. Підчас XVIII. століття і в початках XIX. зачали они дуже сильно рости і дійшли до такого розвитку, якого не мали від ледової епохи. В XIX. столїтю трудно рішити, чи слїдував зріст чи зменьшенє ледівцїв, бо ріжні околиці ріжно ся поводять. В Альпах послїдувало велике меньшанє, в Скандинавії мале, в арктичних сторонах поводились ледівцї нерішучо. Не можна ту було також відкрити таких кількадесять-лїтних періодів, як в Альпах. Натомість виразні є у арктичних ледівцїв короткі осциляциї та колибаня в звязи з порами року. Звязи колибань арктичних ледівцїв з колибанями клїмату неможа було задля браку материялу виказати, коли для Альп зроблено се вже давно.

Який вплив можуть мати такі маси леду на вид землї, застановлювались Hergesell, Drygalski, Woodward і Rudzki. Ділювіяльні морскі бережні лїнії доказують, що позем моря був тодї висший. Дослїди H., D. і W. виказали, що трудно сего підвисшеня позему моря в цїлости приписати льокальному притяганю мас леду. D. виказав, що верстви остуджуючись під ледом мусїли скорчитись і заняти низше положенє. Rudzki обчислив для обниженя температури о 15° обниженє позему суші о 7·21 стопи. Колиж возьмем під увагу охолоджуючий вплив води натопленої з ледівця, котра входить в землю, одержим після R. 21·3 стіп обниженя суші. Rudzki взяв крім того в рахунок великий тягар леду і принявши землю за так цїпку і ізотропну, як сталь, найшов рахунком, що она могла під тягаром ледів ледової епохи так здеформуватись, що наступити могли льокальні обниженя о 500 m. (докладно 497·8 m.) в разї, єсли тілько одна гемісфера переходила ледову епоху. Коли обі півкулї мали єї рівночасно, деформация могла сягнути лиш до 347·1 m. Підчас істнованя ледових оболок докола бігунів деформация землї і зміни поверхні моря, викликані притяганем ледових мас, невтралїзували ся, але коли лїд начав ся топити і много стратив на масї, тодї деформациї ще не уступили і море залило здеформовані простори сягаючи до великих висот[2]).

[1]) Розвідки в Archives des sciences physiques et naturelles. 1899, 1900. 7. 8. 9.

[2]) Bulletin International de l' Académie des sciences de Cracovie 1899. Avril. Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. XI. 1900. 232.

Вже давно знані були ледівцї на горі Kilima-Ndscharo, однак великі маси леду відкрив допєрва 1898. р. H. Meyer на західнім склонї сего вулькану. Є там великаньске фірнове поле, а з него спускають ся ледові язики. Крім того відкрив Meyer значні слїди давних ледівцїв і припускає, що і в екваторияльній Африцї була колись епоха великих воздушних опадів, відповідаюча ледовій епосї Европи. Тодї і ледівцї були значно більше розвинені, як тепер, коли они находять ся в стадиї постійного меньшаня[1]).

Великаньский ледовець Malaspina розслїдила експедиция князя Савойского на горі сьв. Ілиї в північній Америцї. Шпирина єго доходить до 100 km., але єго величина значно зменьшилась від XVIII. віка[2]).

Буш розслїдив до 190 ледівцїв Кавказа і найшов, що всї ледівцї з північної сторони гір находять ся в рішучім відворотї від 20 лїт[3]).

XIV. Морфольоґія країн плосковерствованих.

Про велику росийску площу заноґувати треба в послїдних лїтах XIX. віку дві важні роботи Philippsona і Павлова.

Philippson призбирав материял до своєї розвідки, будучи в Росиї підчас ґеольоґічного конґресу 1897. Хоч єго замітки зраджують подекуди недокладність, то прецїнь загальний погляд Philippson'a на морфольоґічні відносини росийскої площі має значну вартість.

Майже на цїлім просторі европейскої Росиї є верстви уложені поземо або дуже мало нахилено. Від дуже давних ґеольоґічно часів нїякі заколоти не змінили сего поземого положеня. Процес фалдованя карбоньских гір над Донцем не відбувсь — як думають многі росийскі ґеольоґи — при кінци мезозоїчної, а з початком кенозоїчної епохи, а (після Phil.) перед пермскою. Лиш зверхні впливи моделювали від найдавнїйших часів сю великаньску скибу.

Властиві низини значних розмірів є досить рідкі в Росиї, бо всюди річна ерозия вспіла вже порізати терен на горбовату-фалисту

[1]) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin т. 26. 1899. д. 88 дд.

[2]) Die Forschungsreise S. K. H. des Prinzen Ludwig Amadeus von Savoyen nach dem Eliasberge etc. Leipzig 1900.

[3]) Извѣстія Имп. Русскаго Географическаго Общества XXXIV. 1898. ст. 519 дд.

рівнину винесену 200 до 300 m. понад позем моря. В загалї однак ся рівнина не є властивою тафлею. Ріжні формациї виходять в ріжних місцях на поверхню землї, вказуючи, що вид рівнини завдячує Росия ерозиї і денудациї. Ріки і сухопутні леди давнїйшої ледової епохи сего довершили. В північній части Росиї заслонюють ледівцеві відложеня властиве підложе цїлковито, так що ледви в деяких річних долинах мож єго добачити. В полудневій Росиї ролю покривала відграває лєс, значно впрочім тонше осаджений, як ґляцияльні відложеня. На ґляцияльних відложенях розвинулась худа пісковата почва: подсол, а на лєсовім підложи південної Росиї славний чорнозем. Природною ростинною формациєю подсола є лїс, чорнозему степ.

Північна часть росийскої площі, грубо покрита ледниковими відложеними і полуднева часть, що є без сумнїву лиш деструкцийною поверхнею, переходять в себе незамітно і мають меньше більше ту саму беззглядну висоту. Річні долини є молодші як сама площа і завдячують своє повстане лиш ерозиї. Показують се: 1) рівна висота площі по обох сторонах долини, 2) значні кітловини, що переривають долини річні, 3) асиметрия річних долин, що показуєсь в високих правих берегах великих рік пручих на право.

Дальші елюкубрациї Р. не нові для всякого, хочби дещо лиш обізнаного з ґеоґрафією Украïни-Руси, а часто хибно поняті і переведені, поминаю, а згадаю лиш про єго погляди на повстане лиманів. Се є долини рік і річок впадаючих до Чорного моря. В найновійших ґеольоґічних часах обнизивсь берег моря так, що оно залило долини глубоко ві внутро суші. Филї морскі висипали при вилетї сих долин піскові коси і так витворились лимани. Лиш більші ріки змогли пробити собі через косу дорогу до моря. Лимани меньших рік є зовсїм замкнені і через паруване вода морска сильно сконцентрувалась[1]).

Дещо інакше представляє собі проблєм морфольоґії рівнин Павлов. На всїх рівнинах, а не найслабше на росийскій, виступає яко дуже важний динамічний елємент жолобляча дїяльність підземної води, котру то дїяльність зове П. суффозиєю. Она викликує льокальні западаня поверхні, отже нерівности різьби. Другу важну дїяльність води на рівнинах зове П. аккумуляциєю — ріки заповнюють нерівности своїми алювіями. Аккумуляцийним материялом

[1]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. XXXIII. 37 дд. Petermanns Mittheilungen XLV. 269 дд.

є в північній Росиї головно пісок. Осібне становиско визначує П. т. з. делювіум, що повстало лиш під впливом вітріня і дїланя атмосферичних опадів і лиш під їх впливом зміняє своє положенє, стараючись рівнож вирівнати нерівности терену. Се делювіум протиставляє П. алювієви і елювієви.

Як алювіум і делювіум працюють над вирівнанєм терену, так ерозия працює над витворенєм і вибразуванєм нерівностий. Ерозийні явища представляє П. дуже обширно, занимаючись між иньшим докладно ярами. Так часту асиметрию долин в Росиї поясняє П. не правом Бера, а тектонїчними причинами. Він звертає увагу на частий ізоклїнїзм верств, через що одно збоче долини є стрімке, а друге положисте. Між иньшими сконстатував П. такі відносини у рік в околицях Курска і Харкова[1]).

Нову хронольоґічну одиницю вводить Davis під назвою „ґеоґрафічний цикль“. Є се час потрібний на се, щоби ново утворена височина змінилась під внїшними впливами в низину[2]).

Важні причинки до ґеоґрафії балтийского щита дали праці Hult'a і Immanuel'a.

Hult описує країну Nyland в полудневій Фінляндиї. Цїла та околиця складаєсь з високорівнин і врізаних в них долин. Високорівнї складають ся з ґранїту і стрімко стоячих кристалїчних лупаків, але поверхнї високорівнин є плоскі і більше або меньше вкритї ґрунтовою мореною. Збоча долин є 30—50 m. високі і дуже стрімкі. Долини є по обох кінцях отверті і лучать ся з собою в своєродну сїть. Їх підошва рівна, не дасть ся нїяк витолкувати ерозиєю рік, хиба лиш леду. Але їх напрям вказує також на те, що они повстали з давних щілин в скалї, котрі розширились під дїланєм леду в ледовій епосї. Другий рід долин має збоча дуже положисті і неправильні черти. Се є мабуть преґляцияльні заглубленя, повсталі через вітрінє. Третий рід долин узкий зі значно нахиленою підошвою вказує на нормальне ерозийне повстанє, але ще перед ледовою епохою. Різьба Nyland'у є отже передледникова. Леди лиш забрали або замінили в ґрунтову морену продукти вітріня і ерозиї, а поверхню по свому змоделювали[3]).

Дещо відмінна, але в загальних чертах анальоґічна, є будова півострова Kola описаного Immanuel'ом. Є є високорівня з ґранїту

[1]) Землевѣдѣніе 1898. 91 дд. Ref. Petermanns Mittheilungen 1900. ст. 7.
[2]) Geographical Journal 1899. 481.
[3]) Meddelelser Geogr. Förening. Finnland. IV. 1899.

і ґнайсу, яка є однак місцями попереривана слабо розвитими ланцюхами горбків і скал, що є звичайно заразом вододїлами. Лиш Хибиньский хребет взносить ся дещо висше, бо до 760 m. Впрочім є Коля фалистою високорівнею 100—150 m. високою з численними заглубинами. В тих заглубинах находять ся плитки озера, багна, торфяники і тундри. Побереже зване мурманьским є стрімке, скалисте, богате в заливи і острови. Клїмат тутешний, досить в зимі лагідний, і вплив Ґольфштрема справляють, що кілька тутешних пристаний зовсїм не замерзає. Тому звернула Росия на мурманьский берег в послїдних часах пильну увагу[1]). Ґеольоґічну будову сего пів'острова розслїджував Ramsay і найшов, що ту так само, як і в Фінляндиї, ерозийні форми походять з часів перед ледовою епохою[2]).

По північній части Лябрадору подорожував Low. Морфольоґічний характер сего півострова дуже подібний до характеру описаних власне країн: височина досить низька з слабими пасмами горбків і скал. Підложе ґранїтове лявренгийской формациї, місцями виступає кварцитовий дольоміт і ілолупак камбрийский. Шрами ледівцеві виразні[3]).

Бібліотека наукового товариства імени ШЕВЧЕНКА

XV. Масові і фалдові гори.

Північну півкулю уважає Suess асиметричною. Є именно значна відмінність в структурі Азиї а північної Америки. Азийскі фалди уложились луками, котрих вигнене є звернене на полудне і схід. Фалдуючий рух йде з нутра континенту на внї і почав творити ті луки вже в камбрийскім періодї. В північній Америцї є рух фалдовий звернений проти старинної маси канадийского щита. Фалди окружають сей щит докола, звернені своїми вигненями на внї. Европейскі фалдові гори творять перехід від американьскої до азийскої будови. Сей фалдовий рух в Америцї доосередний, в Азиї відосередний вказує на асиметрию північної півкулї[4]).

[1]) Petermanns Mittheilungen 1899. 134.
[2]) Fennia. XVI. Nr. 1. 1898. Petermanns Mittheilungen 1899. Lb. 38.
[3]) Nature 1899. 301. Globus 75. 435.
[4]) Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften. Math. nat. Klasse. LVII. 89.

Паралелїзмом в напрямах гір занимає ся Gukassian і старає ся его виказати для деяких гірских пасм герциньскої системи[1]).

Майже всї нинїшні високі гори походять в другої половини кенозоїчного періоду, коли вулканїчні вибухи і морщеня земскої кори були дуже сильні. Перша половина того періоду і цїлий мезозоїчний період були під тим зглядом спокійні, натомість при кінци палеозоїчного періоду виступили дуже сильні заворушеня в земскій корі. Тим творенем гір в палеозоїчнім періодї занимає ся Frech і находить, що істнує безпосередна звязь між ґеоґрафічним положенем і иньшими власностями вугляних залежий, а розкладом і часом повстаня сучасних фалдових гір. Рівночасно з фалдами повстали дислокациї, а з ними вулканїчні вибухи і випливи ляви. Повстали тодї 1) гори арморикаиьскі, що ішли від NW—SE через північно-західну Францию і пд. зах. часть Анґлиї 2) гори варисцийскі що тягнуть ся від середно-французскої височини на NE, окружаючи великим луком нинїшну ческу кітловину 3) гори палеокарпїйскі, котрі прямо на всхід продовжувались аж над Донець яко 4) гори полуднево-росийскі. Рівнобіжно з 4) йшли 5) гори арменьскі, віддїлені від полуднево-росийских обширним заглубленем, де пізнїйше витворивсь Кавказ. Високі гори повстали тодї також в центральній Азиї (Kwen-lun), на Суматрі, тодї піднеслись Ураль і Alleghanies, а також значна часть гір полудневої Африки[2]).

Добру моноґрафію найвисшого гнїзда гір Hart тз. Kalmit'у подає Mehlis[3]). Є то ґрупа гірска, що належить до маси Воґезів, лежить в їх продовженю і складаєсь з пестрого пісківця.

Французский „Massif central“ описує Friederichsen[4]). Се є в значній части властиво лиш решткa двох, кілька тисяч метрів високих гір, що сходились в тім місци в карбоньскій епосї. Море поступаючи від западу проти сих гір стерло їх майже зовсїм з лиця землї і утворило великаньску абразийну поверхню. Центральний масив французский треба отже зачислити до кадовбових гір.

В часї, коли Альпи фалдувались, пережила ся верховина великі зміни. Цїлі системи обломів і прогалин перерізали єї, а з щілин видобулись вулканїчні маси, котрі до нинї остали важним динамічним і морфольоґічним елементом сеї околицї. Вигаслі вулкани

[1]) Wiss. Veröffentlichungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig 1899. 195.
[2]) Geographische Zeitschrift V. 563 дд.
[3]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XXII. 255.
[4]) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1900. 514.

Оверньї походять з тих часів. Два великі вулкани Mont Doré і Cantal, що лежать на полудне від оверньского вулканїчного реґіону, не мають з ним нїчого спільного, повстали нерівно давнїйше і визначують ся промінисто уложеними долинами, над котрих виобразуванем працювали між иньшими чинниками також ледівцї. Они вкривали два рази верхи тих двох гір.

На полудни массива лежать т. з. Causses — вапнякова верховина майже поземо верствована з численними ярами і красовими явищами.

Про британйский массив занотую працї Hull'a і Codrington'a. Они розслїдили запалі під зеркало моря долини в Уельсї, Девонї і Корнуельсї, котрих дно покрите ледниковими відложенями. З сего виносить Hull, що в треторядї і при початку ледовоі епохи британйский массив був сильно винесений і сягав аж до Ісляндиї[1]).

Для ґеоґрафиї Альп мала дуже велике значінє подорож бальоном, що єї відбув понад сими горами цюрихский ґеольоґ Heim 1898. X. 3.[2]). Він сконстатував, що релїєф гір представляєсь дуже слабим, коли находим ся в бальонї високо понад ними. Гори видають ся дивно плоскими, так що наші мапи представляючі гори нерівно виразнїйше представляють пластику терену, чим погляд з бальона. Пр. гори Юра не виглядали зовсїм на гори і тілько смуговате уложенє лук і лїсів вказували на ріжницю висот. Зате, коли бальон перелетїв понад Альпами і находивсь значно на північ, розвинулась перед воздушними пловцями чудова панорама Альп. Виглядали як заледенїлі филї велитенного моря, гори Юра зате лиш як незначні морщини. Головні черти ґеольоґічної будови були на причуд виразні, але подробицї зовсїм затирались.

Моноґрафію Віденьского лїсу подав Paul. Будова сих гір така сама, як в більшости пасем в східних Карпатах фльїшевих: долїшна крейда, горішна крейда, гіероґлїфові верстви старого треторяду[3]).

До многих давнїйших подїлів Альп прибув тепер новий, знов на чисто ґеольоґічних підставах опертий Diener'a. Дїлить він именно Альпи східні і то на пять головних полос. Від півночи перша є фльїшова полоса, сильно пофалдована, подібна до карпатскоі. Друга полоса, що без визначної ороґрафічної границі припирає до тамтоі

[1]) Quarterly Journal of the Geological Society. 1898. LIV. 251. Geological Magazine 1898. V. Nr. 8. 353 дд

[2]) Die Fahrt der Wega. Basel 1899. 55.

[3]) Jahrbuch der k. k. Geologischen Reichsanstalt 1898. XLVIII. 53 д.

від полудня, є північна вапнякова полоса, також значно пофалдована, обмежена від полудня довгими поздовжними долинами. Слїдуюча центральна полоса виказує пару тектонічних лїній; коло неї ґрупують ся старокристалїчні маси. Від полудня окружає ту полосу т. з. періадріятийский окрайний лук (periadriatischer Randbogen) зложений з вибухових скал. Вздовж ріки Драви тягне ся четверта полоса т. зв. дравска, що складаєсь з двох поменьших. Найбільше на полудне висунена і заразом найширша є полуднева вапняна полоса, що переходить в Крас і стикаєсь там з босаньско-герцеґовиньскою фльїшовою полосою. Відносини в східних Альпах є отже досить скомбіновані і про симетричність їх не може бути мови[1]).

Ґеотектоніčну загадку будови ґларненьских Альп, де як звісно молодші верстви лежать під старшими, вияснив Heim лежачою подвійною фалдою. Rohtpletz по 20-лїтних дослїдах дійшов до гадки, що сей проблем дасть ся вияснити лиш тим, що при фалдованю сеї части Альп верстви попукали і повсталі кусні пересунулись оден на другий. Місцями і три такі плити збудовані нормально з юри, крейди і еоцену, положились одна на другій[2]).

Річні проломні долини в північних Альпах вапняних обговорює Diener[3]). Первісно дїлила одноцїльна поздовжна долина північні вапняні Альпи від центральних. Нинї она подїлена на кілька частий проломами рік: Inn, Chiemseer Ache, Saalach, Salzach, Enns. Всї ті проломи є ерозийні і сягають ще в крейду, але початок всїх був все таки тектоніčний. І так пр. пролом Інну повстав там, де фалди троха відхилились на північ. Пролом Салях і Сальцах лежить на тектоніčній лїнії, а Анізї зробили дорогу гакуваті обломи в верствах.

В босаньских, герцеґовиньских і чорногорских горах робив дальші морфольоґічні дослїди Cvijić. Головні елементи пластики динарского систему зводить він до трех головних елементів. Се є 1) широкі хребти і високорівні, що переходять з динарского напряму (NW—SO) до т. з. метохійского (NO—SW). Їх поверхня є сильно порізана красовими явищами і ґляціяльними впливами 2) Яри подібні до каньонів, що повстали наслїдком ерозиї рік Піва, Тарра, Неретва і їх допливів. 3) Т. з. polja, великі зі всїх сторін ограничені кітловини — спеціяльна властивість динарского систему[4]).

[1]) Petermanns Mittheilungen т. 45. p. 1899. ст. 204 дд.

[2]) Rothpletz, das geotektonische Problem der Glarner Alpen Jena 1898. Fischer. Naturwissenschaftliche Rundschau 1899. 286.

[3]) Mittheilungen der k. k. Geogr. Gesellschaft in Wien 1899. XLII. 140.

[4]) Abhandlungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien 1900. II. 149 дд.

Свої досліди над Балканом (від 1895. р.) укінчив Toula 1899. р. і подав докладний образ морфольоґії сих гір[1]). Поділити може їх на дві части. Западну і північно-западну часть творять чисто фалдові гори, східну часть тектонічні. Значну анальоґію має будова Балкану з будовою Карпат. По полудневій стороні Балкану маєм такі самі обломи, як на полудне від Карпат (і Альп). Таксамо в східній части тих обломів виплили великаньскі маси вибухові, як се видим у Карпат. Як на північ від Карпат, так і на північ від Балкану лежить велика крейдова тафля.

Істория розвитку Балкану є на думку Тулї така: Був ту старокристалїчний континент, що обломавсь і запавсь майже в цїлости в палєозоїчнім періодї. В тріясї було ту плитке море, а по перерві, ріжно в ріжних місцях довгій, глубше море, що від лїясу аж по еоцен заливає сї околиці. Вже при кінци крейди начинають ся ту андезитові вибухи. Від оліґоцену є Балкан і єго околиця сушею а в старшім міоценї відбуває ся головне фалдованє єго верств.

Гори Sierra Nevada були предметом дослідів і опису Rein'a. Характеристичними моментами морфольоґії сих гір є: Остре відграниченє на півночи і полудни, рамена виходять від виразного острого хребта в той спосіб, що рамени відповідає всегда з другого боку хребта кітловата долина. Тутешні кари мають дуже стрімкі збоча, а в серединї малі плитькі озерця. Їх відпливи спершу пливуть між плоскими берегами, потім стають береги дуже стрімкі і долина переходить в форму звану Barranco. Повстанє тутешних карів не приписує Rein ледівцевій ерозиї, а вітріню і дїяльности пливучої води. Цїлі гори дїлить Rein з чисто ороґрафічних засад на три части: західну, центральний массив з найвисшими шпилями і східну[2]).

З поїздки в Угаль підчас ґеольоґічного конґресу в Росиї 1898. повстало пару розвідок: Credner'a, Frazer'a, Friederichsen'a Tietze'ого і Philippsona, що вийшли в 1898. р. Всюди констатують ся: односторонність і асиметрия. Tietze вважає єї тектонічною, Philippson позірною, викликаною абразийними явищами[3]).

В Кавказї маєм до занотованя три працї ученых, що робили ту досліди в р. 1897. і 1898. Dechy подорожував по східнім Кавказї, а именно в дотепер майже незнаних Хевсурийских горах. Они складають ся головно з лупака ілового. Долини каменисті безлїсні, ледівців майже нема, бо гори, хоч і високі та стрімкі, так що нема місця на утворенє фірну[1]). Буш розслїджував північно-західний Кавказ, именно склони ґрупи Elbrus. 190 ледівців, між тим 100 незнаних, розслїдив Буш і сконстатував, що ледівцї північного склону від 20 літ постійно меньшають. Ботанїчні дослїди показали велику ріжницю між веґетациєю полудневого а північного склону; на полудневім в наслїдок більших опадів веґетация буйнїйша[2]).

Найважнїйші висліди дала однак найкоротша, бо лиш 4 дни треваюча подорож поперек Кавказу по грузиньскій військовій дорозї Heim'a. Сей, найбільший може знаток Альп, зладив на підставі своїх заміток порівнуючий образ Кавказу і Альп. Кавказ не може мірятись з Альпами красотою і імпозантностию видів, хоч є висший. Кавказкі пригіря є дуже монотонні, бо верстви підносять ся лиш поволи ідь горам, а в Альпах фалди є перевернені на північ — проте пригіря є стрімкі і мальовничі. Західна а східна часть Кавказу дуже ся ріжнять в своїм зверхнім виглядї. Східні кінцї гір є каменистою, сильно порізаною горбовинною. Западні окраї гір є лїсисті, зближені видом до Апенінів. Долини слабо розвинені, дїяльність моря випереджує ту значно ерозню пливучих від. Лишень середок гір, а особливо ґранїтова полоса, має альпейский вигляд, но і ту недостає ріжнообразности Альп. Долини середної части гір є подібні до альпейских, але не так мальовничі. З причини браку долинових ступенїв мало є водопадів. Брак озер в долинах також зменьшає красоту видів Кавказу.

Впрочім тектонічні і ерозийні явища представляють много анальоґій. Такі самі ту потоки, явища вітріня, форми хребтів і верхів, ледівцї, морени, насипи і т. д., а именно в центральній части гір.

Що до ґеольоґічного складу верств є Кавказ тим цїкавий, що нема ту зовсїм кристалїчних лупаків і тріясу. Підложе палєозоїчне складаєсь головно з ілових лупаків. Юрайскі відложеня подібні як в Альпах; крейда слабо заступлена, зате треторяд, а в нїм сарматскі верстви, займають много місця.

Найзначнїйше ріжнить ся Кавказ від Альп тим, що в єго центрі появляють ся вулькани. Є ту еруптивний дуже старий ґранїт. Найновійші вибухові скали, що творять черен велитнїв — вулканів

[1]) Denkschriften der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien. Math. nat. klasse LXIII.

[2]) Abhandlungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. I. зош. 2 і 3.

[3]) Petermanns Mittheilungen 1899. Lb. 39.

[1]) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. Nr. 7. ст. 331.

[2]) Извѣстія имп. русскаго географическаго Общества. XXXIV. 1898. 519 дд.

Ельбруса і Казбека, є андезитами. Оба они вже вигасли і в історичних часах не чувати про їх вибухи, але струї лави тих вулканів походять що найвчаснїйше з ледової епохи або і початків алювіяльної. Ті вулканїчні прояви зближають Кавказ до Андів.

Тектонїка Кавказу значно простїйша, як Альп. Є одна центральна кристалїчна полоса, а по обох єї боках йдуть симетрично: палеозоїчні лупаки, лїяс, доґґер, мальм, треторяд. Нема ту пр. кількох центральних кристалїчних массивів, кількох крейдяних і юрайских полос, треторядом виповнених кітловин і т. д. Тектонїчні явища, як фалди, обломи і т. д. значно меньших розмірів. Головне фалдованє припадає на плїоцен і було одноразове — Кавказ є отже того самого віку, що Альпи. Але пізнїйші судьби обох гір були инші. Підчас дилювіяльної епохи Альпи дещо запались і їх долини затопили озера, підчас коли сучасно в Кавказї вибухли андезитові вулкани. Кавказ має проте вищі шпилї, але Альпи є стратиґрафічно, петроґрафічно і тектонїчно далеко ріжнороднїйші і величнїйші. Они повстали через далеко сильнїйший фалдовий рух, як Кавказ[1]).

Морфольоґію Тіен шану обробив Friederichsen. Здогад Richthofen'a, що істнує цїлий тіеншаньский систем, новійші дослїди в тих околицях вповнї виправдують. Властивий Тіеншан ограничити треба після Friederichsen'a від півночи пасмом Тарбаґатай, а від полудня памірским Аляєм, котрий однак враз з Гіндукушем і памірскими хребтами без сумнїву належить зачислити до Тіеншаньской системи в ширшім значінню[2]).

Richthofen займаєсь рядом східно-азийских обломів, що тягнучись від місця, де Янґтсекянґ виступає з гір, через останні вирости Квенлюна, вздовж западного спаду високорівнї Шансі, а в кінци вздовж Хінґану мають для морфольоґії східної Азиї велике значінє[3]).

В Манджурії відкрив Cholnoky базальтову тафлю велику як Галичина, много базальтових решток вулканів і велику абразийну площу, що обнимає мабуть простір від Мукдена аж поза Гоанґго. Продукта колишньої абразиї змішані з воздушними утворили після Ch. китайский лятерит[4]).

Дуже важні причинки до ґеольоґії і ґеоґрафії полудневої Сибіри дали дослїди підприняті роснйскими інженерами і гірняками

[1]) Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich 1898. XLIII. 25 д.
[2]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. 1899. 1 дд.
[3]) Sitzungsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1900. XL. 888 дд.
[4]) Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. 8 дд.

при нагодї будови великої сибірскої желїзниці. Именно в Трансбайкалії відкрито множество цїкавих тектонїчних явищ[1]).

Ґеотектонїчні відносини Трансваля і близьких ему країн представив Schenck на підставі своїх трилїтних дослїдів в тім краю. Південну Африку порівнує він з переверненою миской, якої краї становлять: ґнайсова плита краю Дамара і Намаква, Каплянд і височини Oranje і Трансваль; середину занимає пустиня Kalahari. Schenck звернув увагу на се, що Zwarte Berge є властиво фалдовими горами. Тафлї Karroo дає S. дуже великий простір, зачисляючи до неї цїлий східний і північний Каплянд і цїлу височину Oranje. Він є також приклонником теориї Rehmann'a, що на побережу Наталю наступив в юрайскій епосї великий облом западного краю полудневo-африканьскої височини. Подїл Трансваля на морфольоґічні країни тойсам, що у Ремана: Hooge Veld, Boshveld, височина над Лїмпопо, долина Лїмпопо[2]).

Високорівню (puna) Atacama в Кордилєрах південної Америки розслїдив Darapsky. Она не має відпливу, тому єї річки гублять ся, є много солончаків і соленых озер. Цїкаві є кітловини зовсїм висохлі. Від сходу припирає та височина до Кордилєрів, що в тих околицях є сильно вулканїчні. І сама височина (в найнизшім місци 2400 m. висока) є перерізана многими рядами відосібнених гір часто вулканїчних і має много термів. Слїди колишних ледівців досить значні[3]).

Верховину Antioquia в північно-западній Колюмбії розслїдив Regel. Она складаєсь головно з кристалїчних скал. Ґнайси і кристалїчні лупаки є сильно пофалдовані, а часто зметаморфізовані. Від півночи і сходу ограничають верховину обломи, від заходу она припирає до Кордилєрів, котрих будова є дуже в тім місци замотана[4]).

XVI. Дїяльність моря — береги і острови.

1. Бігун т. з. континентальної півкулї означив новою методою Krümmel'a Beythien. Лежить він після него при устю Льоари під

[1]) Petermanns Mittheilungen 1899. Lb. 42.
[2]) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1900. 60 дд
[3]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. XXXIV. 281.
[4]) Sitzungsberichte der phys. med. Gesellschaft zu Würzburg. 1900. Nr. 4.

$\varphi = +47{\cdot}5^0$, $\lambda = -2{\cdot}5^0$. З того виходить для сеї континентнльної півкулї 47·8% суші, 52·2% води. Для океанїчної півкулї вийшло 6·4% суші, 93·6% води[1]). Завважати належить, що Penck є за тим, щоби прийняти два бігуни для континентальної півкулї, які можуть припасти на Бретанію або Foix після того, чи Японію зачислимо до морскої чи сухопутної півкулї землї.

Про морфольоґію побережий взагалї написав обширну студию Gulliver[2]).

Побережа нїмецкого моря, о скілько належать до нїмецкого цїсарства, описав Haage. Підчас олїґоцену була цїла північна Нїмеччина покрита морем — оно відтягнулось підчас міоцену так, що в пліоценї лиш низина над устєм Рену була під водою. В ледовій епосї части північно-західної нїмецкої низини були від часу до часу заливані морем. В алювіяльній епосї сконстатувати можна лиш додатні пересуненя берегу, дотепер пр. над Доляртом досить значні. Дуже цїкаві дані наводить H. про вплив припливу і відпливу на побережа та про замерзане моря при березї і річних усть. Що до квестиї повстаня маршів і ваттів занимає H. посередне становище припускаючи значний вплив річним осадам, але головну ролю віддаючи хемічній та механїчній працї моря, що витворює намул і пісок та єго громадить. Що до повстаня фризийских островів і т. з. галлиґів думає H., що колись суша сягала на захід аж поза нинїшні острови і була вкрита пісковими видмами. Поза видмами лежали депресиї, подібно як днесь в Голяндиї. Наслїдком додатного пересуненя берегу море вдиралось в устя рік. Они вливали і утворили ляґуни прибережні. Поволи наслїдком западаня ся набережа розширились горла річні, ляґуни получились разом і з давнїйшого края суші остали лиш острови і острівцї[3]).

Докладні обсервациї, підприняті на нїдерляндскім побережу, виказали для північної Голяндиї пересуненє лїнії високого, а головно низького стану води в некористь моря, хоча филї значно підгризли підніже берегової видми. На острові Texel і побереже і видма значно пересунулись ідь морю і зискали на просторі. І хоч

[1]) Beythien. Eine neue Bestimmung des Pols der Landhalbkugel. Kiel 1898. Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. LB. ст. 3.

[2]) Proceedings of the American Academy XXXIV. 151 дд.

[3]) Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1898. 35 дд. Petermanns Mittheilungen 1899. 269–271.

в деяких місцях показавсь убуток суші, то в переважнім числї случаїв суша приростає постійно[1]).

Що утрата суші може наступити не тілько в наслїдок додатного руху моря, але і під впливом незвичайно сильних филь морских, свідчать найлїпше западні береги Франциї. Ту море посуваєсь що року в деяких околицях о 1 метер. Побережа зложені з більше відпорних скал пр. з вапняка меньше підлягають абразиї, але все таки кілька дециметрів здобуває щорік море. Лекше прийдесь нам вірити в се, коли возьмем на увагу великаньску силу поодиноких бовванів. Один такий вспів в млї ока перевернути желїзну сиґналову вежу коло Biarritz 45 m. високу[2]).

Ще один дуже важний доказ, що східне побереже Італиї щораз то приростає, прибув в послїдних часах. Коло місточка Adria — 31 km. від берега морского — найдено було при копаню два староримскі кораблї з многими иньшими старинностями[3]).

Дуже важну розвідку про розвій побережий полудневої Америка оголосив Arldt. Она визначуєсь головно тим, що увзгляднює дуже визначно вплив ґеольоґічного розвитку континенту на єго контури. Порівнуване Пешля Африки з південною Америкою є зовсїм неумістне, бо контури побережий полудневої Америки зависимі є пр. на западї від фалдових гір, яких в Африцї майже нема. Найбільше анальоґій має полуднева Америка з північною: На западї великі фалдові гори, на сходї старі масові гори, в серединї низина. Така будова має великий вплив на контури континенту. Західні побережа полудневої Америки відповідають в повнї правилам пацифічного типу побережий, східні показують тип атлянтийский — обломів, що стають більші і обширнїйші ідь полудневи. Тим обломам належить приписати заострене континентів до полудня[4]).

Западно-патаґоньске фйордове побереже представив на підставі власних подорожий Steffen[5]). Від 41° полудневої ширини аж до свого кінця є побережні Кордилєри Патаґонїї порозривані фйордами, тим більшими і виразнїйшими, чим дальше на полудне. Під $46^1/_2{}^0$ ширини сягають ледівцї аж до поземy моря, вливаючи значно на

[1]) Tijdschrift K. Ned. Aardrijkskundig Genootschap Amsterdam 1898. XV. 760. Petermanns Mittheilungen 1899. 40.

[2]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. Bd. XXII. 1900 ст. 425.

[3]) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1900. ст. 290.

[4]) Mittheilungen des Vereins für Erdkunde zu Leipzig. 1900. 32 дд.

[5]) Veröffentlichungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin 1900. 204 д.

морфольоґію побережа. Вже Darwin виказав, що оно поволи підносить ся і явища підношеня ся суші є в многих місцях дуже виразні, хоч місцями можна їх віднести до дїяльности води і ледівців, що своїми моренами підвисшили в многих місцях побереже і утворили численні мілини в морю.

2. Досліди над островами мають для ґеоґрафії дуже велику вартість, так з морфольоґічного, як і біольоґічного боку. До того ще дотичній части ґеоґрафії досить далеко до систематичности і суцїльности. Досліди в тім напрямі ведуть ся досить пиняво.

В послїдних часах дуже заслужився коло тої занедбаної галузи ґеоґрафічної науки архикнязь Людвиґ Сальватор, що об'їжджає Середземне море і описує острови дотепер в науцї мало знані. Про кождий з них видає він опісля осібну моноґрафію. І так в р. 1898. видав описи островів Alboran (на схід від проливу Ґібральтар між Іспанїєю а Африкою) і Ustica (на Тиреньскім морі на NE від Палєрмо) і в 1900. р. остров Giglio (SE від острова Ельби). З них Ustica є збудована з вулканічних скальних пород, Alboran є молодою решткою колишнього континентального мосту між Африкою а Іберийским півостровом, а Giglio складаєсь майже виключно з ґраніту[1]).

Остров Bornholm описав Goerke[2]), не подаючи однак нїчого нового про цїкаві тамошнї відносини ґеольоґічні. Остров Медвежий розслїджував недавно Kessler шукаючи там камінного угля. Але поклади угля є там за малі, щоб виплатились[3]).

З описів азийских островів можна згадати про опис Філїпінів Le Monnier'a[4]) і островів Batan і Babuyan (між Люзоном а Формозою) Blumentritt'a[5]), що є тим важне, що ті в части вулканїчні острови були дотепер дуже мало знані. Остров Різдвяний (Christmas Island на полудне від Яви) є тим цїкавий, що повстане своє він рівночасно завдячує і вулканїзмови і коралям[6]). На увагу заслугує також опис острова Formos'и Японця Yamasaki[7]) з тої причини, що подає нові клїматольоґічні дати вже за японьского панованя зібрані в 5 ріжних обсерваториях острова.

[1]) Пор. Mittheilungen der k. k. geogr. Gesellschaft. Wien 1899. ст. 105 д. 107 д.
[2]) Himmel und Erde 1898 ст. 225.
[3]) Geographische Zeitschrift. VI. 1900. ст. 176.
[4]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XXI. ст. 1 дд.
[5]) Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien XLI. ст. 593.
[6]) Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. ст. 292.
[7]) Petermanns Mittheilungen XLVI. 1900. ст. 221 дд.

Celebes прибув важний причинок в розвідцї про его ґеольоґічні відносини[1]). Ся розвідка відносить ся головно до тамошних вулканів. В тій розвідцї описані є також острови Sangir, славні страшним вибухом тамошнього вулькана в 1892. р., що розмірами нагадував Krakatau'ску катастрофу. Близько лежить остров Miangas, вважаний через довший час неістнуючим. Тепер Wichmann доказав его істнованя[2]).

Острови Океанії були від довшого часу предметом розслїдів, яко головний клясичний терен коралевих лав. В 1897. р. був на островах Fiji Agassiz, щоби зібрати на тамошнїх атолях нові дані на поперте своєї нової теориї повстаня таких коралевих рифів. Він виступив був ще давнїйше проти теориї атолів Darwin'a, приписуючи їх повстане не западаню ся суші, як сей, але дїяльности прибоя. Тої теориї обширнїйше представляти ту не будем, лиш завважаєм, що она є занадто скомплїкована. Єї недостаточність підносить Dahl головно що до коралевих лав архіпеляґа Бісмарка, обговорюючи загально коралеві теориї[3]). А вже найсьвітлїйше задокументували правдивість теориї Darwin'a верченя на коралевім острові Funafuti, де в глубинї 300 м. ще верчено в коралевих скалах, котрі могли в виду того повстати лиш при западаню ся підстави, на якій поселили ся коралї[4]). В теперішних часах трудно є на островах Океанії безпосередно сконстатувати їх западане під поверхню моря (по Suess'івскій термінольоґії: додатний рух моря). Bülow мав в послїдних часах відкрити такий рух додатний моря на островах Samoa[5]), але Krämer доказує, що він помилився, та що на певно такого руху там сконстатувати не можна[6]).

З африканьских островів описаних послїдними часами є острови Aldabra типовим атольом[7]). Они лежать рядом з Маскаренами, Амірантами, Seychell'ами на найвисших шпилях підморского хребта, що є рештою давного великого континенту на Індийскім Океанї. Seychell'ї описав Zaffauk[8]) яко оден з найкрасших закутків землї.

[1]) Bücking в Petermanns Mittheilungen XLV. 1899 ст. 249. дд. 273 дд.
[2]) Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. ст. 290 дд.
[3]) Naturwissenschaftliche Wochenschrift 1900. ст. 136.
[4]) Mittheilungen der k. k. geogr. Gesellschaft in Wien XLII. 1899. ст 44 Petermanns Mittheilungen XLV. 1899. 46 д.
[5]) Globus т. LXXV. ст. 198 дд.
[6]) Petermanns Mittheilungen XLVI. ст. 8 дд.
[7]) Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik. XX. 1898. ст. 319.
[8]) Mittheilungen der k. k. geogr. Gesellschaft in Wien 1899. ст. 163 дд.

Они складають ся з старих кристалїчних скал і западають поволи під поверхню индийского океана. До вичислених архіпеляґів можна би також зачислити вулканїчні Комори, з котрих одну: Mayotte описав Couarde[1]). Обширну монографію східно-африканьских островів подав Keller[2]).

Вулканїчний архіпеляґ Marquesas описує Steinen[3]).

З американьских островів описав Barbados (Острови за вітром) Mayer[4]), а Бермуди Verill[5]) виказуючи, що они не є коралевого походженя, а складають ся з вапняка, що повставав з інфільтрованого піску з мушлями. Опісля остров в наслїдок додатного руху морского зеркала прийняв вид подабаючий на атоль.

Тернопіль, в грудни 1902.

---

[1]) Ibidem т. XLII. 1899. ст. 263.

[2]) Die ostafrikanischen Inseln. Berlin. Schall 1898. в Bibliothek der Länderkunde.

[3]) Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin т. XXV. ст. 489 дд.

[4]) Annalen der Hydrographie 1900. ст. 6.

[5]) American Journal of Science Ser. IV. т. IX. ст. 399.

Очні хиби у новобранців*).

Написав

Др. Михайло Кос.

Хочу подати зіставленє очних хиб у новобранців в 655 случаях, про які я особисто видав ореченє за посьлїдні три роки. Сам материял походить в части ($^1/_6$) з військового шпиталю в Ярославі, де залога виносить около пять тисячів людий, по части з великого військового шпиталю в Перемишли, де залога сягає до десять тисячів жовнїрів. Найбільша частина новобранців, підданих ореченю, прийшла була до шпиталю виразно в тій цїли, щоби означити у них рефракцию ока і бистроту зору; незначна частина прийшла була з иньшими хибами, але про них запало остаточне ореченє на підставі очної хиби, котра була міродайною до адмінїстрацийної клясифікациї. Зовсїм не згадує ся в отсих стрічках про тих хорих, що прийшли до шпиталю лїчити ся зі своєї очної недуги.

Передовсїм треба мати на увазї те, що означити функцию очий у новобранців є значно тяжше, чим у клїнїчних хорих, де можна брати всї вискази огляданих хорих майже все за правдиві. Противно новобранцї мають важні причини робити такі вискази, що вони часто зовсїм не годять ся з дїйсностию. Вони мають вже наперед готовий плян туманити лїкаря, ще заки він почав їх оглядати; вони рішили причинювати справдїшну хибу або удавати таку, якої зовсїм не мають або знова зменчувати тоту хибу, яку мають. Проте мусить оглядаючий лїкар все тямити на се, що новобранець не піде єму на руку при огляданю очий, але противно він буде

*) Виклад виголошений 3. цьвітня 1902 в науковім товаристві військових лїкарів в Перемишли.

старати ся робити лїкареви всякі трудности. Тому треба й справдї назвати користним і лехким такий случай, де огляданє і означенє очної хиби скінчить са в протягу одної години, хотяй така робота у кліпічних хорих може покінчити ся вигідно в 10—15—20 мінутах. У новобранців мусить лїкар провірювати найпростїйші справи, щоби через контролю знайти потвердженє раз найдених фактів. Коли два або три методи означуваня певних змін в оцї дадуть лїкареви той самий вислід, то аж тодї він сьміє сам собі завірити. З тим усїм нераз такой годї собі в повнї довіряти та треба полишити остаточне порішенє на пізнїйше; аж в той спосіб переконає ся лїкар, на жаль, не один раз, що така осторожність не була злишна. Тодї хвалить ся пословиця: ὁ χρόνος βέλτιστος ἰατρός.

Огляданє кліпічних пациєнтів відбуває ся звичайно в той спосіб, що найперше означує ся функция ока. При тім дізнає ся лїкар, щó око видить і яка єго рефракция, на підставі особистих висказів оглядапого. Опісля дивимо ся до ока очним зеркалом і означуємо обєктивно рефракцию і тоті можливі патольоґічні зміни, які суть причиною найденої обниженої бистроти зору. Така дорога у наших новобранців була би занадто довга! Бо новобранцї мають звичайно собі властивий спосіб поведеня при допитах їх очий, от менче більше такий: коли емметроп має замір удавати, що не довиджує, то каже, що не видить добре без окулярів, або ще радикальнїйше, що „нїчого“ не видить. Вгнуте скло або й вигнуте о силї 1·0 діоптриї нїби-то не має впливу на єго око, єму „всьо одно“. Скло о силї +2·0 D або —2·0 D нїби-то збільшає де-що бистроту зору; через скло о силї +3·0 D або —3·0 D нїби-то видить новобранець ще лїпше, але дивним дивом бистрота зору не є нїколи лїпша, чим $^{6}/_{24}$! Коли новобранець слабо приготовив ся до кампанії дуреня, то лехко дає ся зловити і каже, що видить добре окулярами, коли ся зложить два скла противного дїланя а однакової сили рефракційної, пр. +3.0 D і —3.0 D, так що їх дїланє зносить ся взаімно і око дивить ся наче крізь віконне скло. Загально держать ся оглядані тої засади, що скла малої вартости діоптричної нїби-то не дїлають на їх око, а скла висшої вартости аж до певної границї, котрими очевидно гірше видять, нїби-то поправляють їх бистроту зору. Коли подасть ся їм ще висші окуляри то вони не видять „нїчогісїнько“. Майже все вистерігають ся они видїти більше, чим $^{6}/_{24}$, або сказавши ще простїйше, вони старають ся своїм поведенєм вмовити в лїкаря, що вони годні читати лишень три горішні рядки букв на таблицях Снеллєна. Тут очевидно мусїв їх хтось поучити, — ще заки вони прийшли до військового

шпиталю, — що такий новобранець неспосібний до військової служби, коли він в силї читати не більше, як три горішні рядки букв на таблицях, уживаних звичайно до означуваня бистроти зору. Коли такому новобранцеви каже ся читати букви Снеллєна з рїжних віддалень, то покаже ся, що єго мудрість тут вже кінчить ся. Тодї дістає ся в протягу кількох мінут нераз вартости для бистроти зору, котрі рїжнять ся від себе в десятеро. Такі висліди осягаємо найчастїйше тодї, коли огляданє повторяємо через кілька днїв, слїдуючих по собі. Ледви чи треба осібно о тім згадувати, що такі досліди забирають дуже багато часу і вимагають від оглядаючого лїкаря нераз надлюдської терпеливости. Деякі новобранцї суть в силї витревати навіть десять неділь при своїм фанатичнім замірі!

Короткозорий приходить звичайно з показьними, грубими окулярами на носї о силї 10·0 — 13·0 — 14·0 D, навіть тодї, коли єго короткозорість сягає ледви 1·0 — 3·0 D. Можна подибати й емметропів з окулярами —13.0 D, і то не так дуже рідко. Той род новобранців присягає ся, що без окулярів не видить „нїчогісїнько“, але зато видять нїби-то лїпше через скло о силї +1·0 D, або +2·0 D а навіть +3·0 D; кажуть, що висшими склами не видять „нїчогісїнько“. Так само не видять „нїчогісїнько“ або дуже слабо вгнутими склами о силї 1·0 до 8·0 або 10·0 діоптрий. Через тото скло, до якого навикли через вправу, видять навіть $^{6}/_{6}$, а суть тому так неосторожні, бо вони очевидно тої гадки, що не спосібні до військової служби вже тим самим, що видять через „таке грубе“ скло. Бідні дурисьвіти ще не знають, що лїкарі означують рефракцию незалежно від новобранця, без єго помочи а навіть против єго волї, між тим вони подали на „своє лихо“, що видять дуже добре або бодай на стілько, скілько потрібно до військово-адмінїстрацийних цїлий. Однако такі случаї належать ще до добрих. Звичайно старають ся короткозорі не показувати лїпшої бистроти зору, чим непоколибимі $^{6}/_{24}$, а лїкар мусить тодї взяти до помочи рїжні віддаленя, щоби дійти до цїли, бо межи новобранцями ледви котрий розуміє ся ва численю дробами.

Надзорі поводять ся так само, як емметропи.

Астиґматики держать ся найчастїйше недалеко правди; деякотрі робять навіть бездоганні кліпічні уваги і вискази, котрі годять ся з прикметами ока, які можна теоретично предвидїти. Всьо то пояснює ся тим робом, що висші степепї астиґматизму вже самі собою обнижають бистроту зору так сильно, що новобранцї з нею не суть спосібні до оружної служби. Малі степепї астиґматизму не впливають на поведенє новобранців, котрі поступають відповідно

до своєї рефракції. При означуваню астиґматизму давала менї скіяскопія так добрі результати, що вони зближали ся найбільше до субєктивних але певних висказів оглядaних новобранців.

Головні меридіяни дають ся означити тим методом вже після кілька секундового огляданя і тому повторюю увагу, яку я зробив вже на иньшім місци[1]), що кождий військовий лїкар повинен присвоїти собі той метод огляданя ока. Означенє степеня астиґматизму при помочи скіяскопії вагає ся в тїсних границях з причини мимовольної аккомодациї оглядaного підчас скіяскопованя; коли оглядaний нарочно аккомодує, що впрочім також лучає ся, то границї вагають ся ще більше. Тому-то обходжу ся дуже нерадо без кератоскопу Javal'a і Schiötz'a, котрий дає результати функционально вправдї троха за високі але за те дуже точні. Але тим знаменитим інструментом не суть наразї випосажені навіть більші військові шпиталї, до яких безперечно належить і ґарнізоновий шпиталь в Перемишли. Означуванє рефракциї головних меридіянів в прямім образї дає при короткозорости де-що за високі вартости, а при надзорости за низкі в порівнаню з вартостями осягненими через функциональне означенє, бо оглядаючий дає ся легко звести на манівцї і аккомодує, приневолений до того в загалї не точним образом дна ока. Тим часом виключенє аккомодациї є при огляданю в прямім образї беззглядним услівєм.

При скаламученях прозорки стрічаємо ся часто з такими висказами, котрі можна опрокинути лишень через велику терпеливість і часте оглядане ока. Особливо не треба вірити висказам новобранця, коли обєктивне слїдженє дна ока при помочи очного зеркала не находить поважнїйших перепон в заломлюючих частях ока а оглядaний каже, що є цїлком сьлїпий. Лїкар мусить научити ся оцїнювати в приближеню бистроту зору після степеня точностн, з якою видить дно сьлїдженого ока, а опісля нехай старає ся, піднести субєктивну бистроту зору новобранця до означеної висоти. Лехко зрозуміти, що засада „$^{6}/_{24}$“ бистроти зору має на скаламученій прозорцї дуже широке поле до попису.

Недуги і зміни в сочцї, в склянім тїлї, в нервівцї, в судинници і в зоровім нерві суть майже не знані у новобранців. Ту годить ся по найбільшій части висьлїд обєктивного сьлїдженя з субєктивними висказами оглядaного, котрий звичайно і сам не знає, чому не видить добре. Новобранцї з недугами тих частий ока жалують ся зовсїм поважно та справедливо на свою недолю.

[1]) Лїкарський Збірник, 1899. Про скіяскопію.

Новобранцї, яких менї лучало ся оглядати, поводились всїляко відповідно до того, чи належали до тутешного (галицького) сїльського населеня, чи до інтелїґенциї; дальше, чи се були Русини та Поляки або знова Жиди.

Коли Русин або Поляк удає якусь очну хибу, котрої не має, то поступає звичайно при тім так наївно, незручно і примітивно, що і без значнїйшого труду можна висліґдити правду і поділитись нею з новобранцем. Коли то зробить ся, то новобранець приходить звичайно вскорі до переконаня, що ему проба не удала ся, що єго приловили на удаваню і він перестає удавати. Але не так робить Жид-новобранець! Він попадає з одного противеньства в друге, твердить діяметрально противні річи, на пр., що нїби-то видить, хотяй емметроп, найлїпше через окуляри о силї +3·0 D або – 3·0 D підчас того самого сьлїдженя, він видить очевисто, що пізнали ся на нїм, а мимо те не відступає нераз цїлими тижнями від свого тверджеия. Такого новобранця може поконати лиш такий лїкар, котрий є так певний в обєктивнім сьлїдженю ока, що може сам собі завірити і котрий має на стільки терпеливости, що нею переможе навіть найзавзятїйшу упертість новобранця.

Сьлїдуюча таблиця на стор. 6. і 7. дає перегляд загального числа оглядaних, з неї видно якість очних хиб і їх клясифікацию після урядового „припису для лїкарських оглядин новобранців“.

Неправильности на зовнїшних частинах ока суть дуже скупо заступлені (6 людей = 0.9%), бо їх можна лехко дозріти вже підчас бранки; як раз противно має ся річ з хибами в рефракциї, котрих не можна провірити без очного зеркала, а на се нема часу підчас бранки. Хиби в рефракциї становили проте більшу частину оглядaних, числом 369 людий (56.3%). Найбільшу сьлїдуючу позицию чисельно становлять скаламученя прозорки і єї скалки (115 людий, 17.5%), потому слїдують внутрішні части ока: проминниця, нервівка, судинниця і зоровий нерв, разом 97 людий (14.8%), дальше сочка (35 людий, 5.3%). Зизоокість і дрожанє очий (Nystagmus) мало 32 людий (4.8%), помежи зизуючими на внї було троє люда з надзорою рефракциєю, коли противно анї оден короткозорий не зизував до середини. В кінци був оден анофтальмус.

Із загального числа 655 сьлїджених новобранців мало найбільше з них (313 людий) короткозорість, що відповідає 47.7%; емметропію мало 247 людий (37.7%), а надзорість 95 людий (14.5%).

Загальне число	Е	Му	Ht	Часть ока	Род хиби	Спосібний до всякої військової служби
1	3	—	—	Внішні части ока 6	Ectropion	—
3	1	—	—		Blenorrhoe sacci lacr.	—
1	1	—	—		Ptosis oc. utr.	—
1	—	—	1		Symblepharon posterius	—
115	84	25	6	Прозорка 115	Maculae corneae et leucoma adherens	29
4	3	1	—	Сочка 35	Membra pupillaris perseverans	3
11	8	1	2		Cataracta traumatica	—
9	4	5	—		C. corticalis partialis	1
5	2	1	2		C. polaris anter., poster., fusiformis	—
1	1	—	—		Cataracta mollis	—
5	4	1	—		Luxatio lentis	—
14	11	1	2	Проміннича, Нервівка, Судинниця і Зоровий Нерв 97	Iridocyclitis	1
2	2	—	—		Arteria hyaloidea perseverans	—
7	3	2	2		Retinitis pigmentosa	—
2	2	—	—		Retinitis proliferans	—
8	6	2	—		Ablatio retinae	—
4	2	—	2		Neuropapillitis	1
34	23	6	5		Atrophia Nervi optici	1
8	5	2	1		Retinochorio ditis	1
4	3	1	—		Ruptura chorioideae	—
1	—	1	—		Colobома chorioideae	—
13	1	10	2		Colobома при вступі N. opt.	3
63	63	—	—	Рефракция 369	Emmetropia	63
223	—	233	—		Myopia	51
49	—	—	49		Hypermetropia	21

Спосібний до запасової служби помічної	Неспосібний до оружної служби	Неспосібний до пішкої служби у війську	УВАГИ
—	1	—	—
—	3	—	1 раз з фістулою (слизьною)
—	1	—	—
—	1	—	—
18	64	4	—
1	—	—	1 раз також retino-chorioiditis
—	11	—	—
—	6	2	1 раз також Microcornea o. u. 1 „ „ Astigmatismus mixtus
—	5	—	1 раз також Strabismus convergens 1 „ „ „ divergens
—	1	—	—
—	5	—	1 раз також Nystagmus horizontalis
—	13	—	1 раз виконано enucleatio bulbi
—	2	—	1 раз також Cataracta polar. ant. et post. тай membrana pupil. persev.
—	6	1	1 раз також Cataracta polaris posterior
—	2	—	—
—	8	—	—
2	—	1*)	*) Abscessus cerebri
1	27	5	13 разів на однім оцї 21 разів на обох очах; між тим було еще 1 раз Cataracta polaris anterior 1 раз пораженє 3 прямих мяснїв 2 рази Strabismus convergens 2 „ „ divergens
—	5	2	1 раз після уразу, з полишенєм зеленавих слїдів з кровотоку 1 раз також пораженє всїх мяснїв порушаючих очну галину, тай Atrophia N. optici
—	4	—	1 раз також Ablatio retinae
—	1	—	також Strabismus divergens
3	7	—	—
—	—	—	1 раз нервові волокна з товщом
19	148	15	1 раз Insufficientia M. M. rect. ext.
7	20	1	19 разів до 5·0 D { 1 раз microcornea o. u.; 1 раз нервові волокна з товщом 26 разів до 10·0 D. 4 рази до 12·0 D

Загальне число	E	My	Hy	Часть ока	Род хиби	Спосібний до всякої військової служби
9	—	9	—	Refraction 369	Astigmatismus myopicus simplex	3
5	—	5	—		Astigmatismus myopicus compositus	2
1	—	—	1		Astigm. hypermetropicus simplex	—
7	—	—	7		Astigm. hypermetropicus compositus	2
2	—	1	1		Astigmatismus mixtus	1
11	3	—	8	Хиби положення 32	Strabismus convergens	—
8	2	3	3		„ divergens	2
13	9	3	1		Nystagmus	—
1	1	—	—	Брак ока 1	Anophthalmus	—
655	247	313	95	655	—	185

Дотично клясифікациї треба те піднести, що більшу частину всїх сьлїджених треба було признати неспосібними до військової служби, а именно було 385 новобранців (58.7%) неспосібних до оружної служби, а 31 (4.7%) неспосібних до нїякої служби, разом 416 новобранців (63.4%) неспосібних. Супротив того стоїть 185 людий (28·2%) зовсїм спосібних до служби і 54 (8.2%) спосібних до запасової служби помічної (Ersatzreserve), разом проте було спосібних 239 оглядaних новобранців (36.4%).

Про найбільшу частину сьлїджених 63 емметропів, признаних спосібними, треба сказатя, що вони позволили собі на зовсїм злишне означенє функциї і рефракциї ока в надії, що притім омануть лїкаря і на тім дещо скористають. Велика частина сих новобранців належала до почитателїв сакраментальної бистроти зору $^{6}/_{24}$. Ще певнїйше дасть ся то само сказати про тих „короткозорих“ (51 + 19 = 70), котрих признано спосібними до служби, бо вони

Спосібний до запасової служби помічної	Неспосібний до оружної служби	Неспосібний до нїякої служби у війську	УВАГИ
1	5	—	1 раз також Strabismus divergens
—	3	—	1 раз також Coloboma при вступі N. optic.
—	1	—	—
1	4	—	1 раз також Strabismus convergens 1 „ „ Microcornea o. u.
—	1	—	—
—	11	—	1 раз paralyticus
1	5	—	—
—	13	—	9 разів horizontalis 1 раз verticalis 1 раз rotatorius et horizontalis; притім було: 1 раз також Atrophia N. optici 1 „ „ Strabismus convergens 1 „ „ „ divergens
—	1	—	—
54	385	31	—

мали в малім степени своєї хиби неначе сказівку, як мають поступати, щоби не мусїли познакомити ся близше з військовою службою, то є: наложити окуляри о силї —13·0 D замість —1·0 або —3·0 D і того тримати ся постійно!

У короткозорих неспосібних до військової служби (148+15=163, т. є 69.9% всїх сльїджених міопів) була міродайною при клясифікациї головно високість короткозорости, котра переходила 5·0 D; найбільша частина з них мала кромі того ще ось які хиби: вигнутє заднього бігуна ока (Staphyloma posticum Scarpae), зміни в нервівці і судинници задля запаленя (retino-chorioiditis), скаламученя скляного тїла — і тоті-то хиби були власне причиною, що 15 сьлїджених короткозорих (6.4%) мали так ниську бистроту зору, що вона не досягала навіть $^{1}/_{6}$ на лїпшім оцї, через що тих новобранців треба було признати неспосібними до нїякої служби у війску.

В переділці „Увага“ є записані деякі значнійші хиби, найдені на очах по-при других більших і міродайних до клясифікациї, ось деякі з них: 3 рази microcornea, 2 рази волокна зорового нерву з товщом (markhaltig), 2 рази поражене мяснів, порушаючих очну галину, 1 раз ослабленє (інсуффіціенция) простих мяснів внїшних при короткозорости з подвійними образами лежачими по тім самім боцї.

Переміна матерії при акромеґалії.

Написав

Др. Вячеслав Морачевський.

Помимо дуже численних розправ[1]) про акромеґалію находимо розмірно мало даних про переміну матерії при тій недузї. Праця A. Schiff'a[2]) подає нам вправдї найбільше що о тім звістно, однак не може мати значіня досліду над переміною матерії в стислім значіню того слова. Проте підняв ся я за принукою ВП. Пр. А. Ґлюдзїнського випрацьовати білянс найважнїйших складових частин видїлюваня, аби подати причинок до пізнаня тої інтересної недуги.

Досліджуване корму і видїлюваня переводив я в спосіб мною все примінюваний, що є описаний обширно в моїх попередних працях над переміною матерії.

Всї складники корму аналїзовано наново, а введені в рахунок числа суть середні вартости з добре згоджуючих ся означень.

В першім рядї дослїдів обсервувалисьмо недужого через 18 днїв, потім наступила перерва на один місяць, а опісля ми почали другий ряд дослїдів що тревав 24 дни.

З анамнези недужого треба піднести, що він походить з околиці, в якій панує волє (struma). Перед 4 роками почув він сильні болї голови, а рівночасно зауважав він значну пухлинину кінчин, лиця і язика. То побільшене мало тревати через 3 роки.

---

[1]) Pineles Fr. Sammlung klinischer Vorträge Nr. 242. — Sternberg M. Spezielle Pathol. u. Therapie von Nothnagel, Band VII 1897.

[2]) A. Schiff. Wiener klin. Wochenschrift 1897 Nr. 12 pag. 279.

Коли хорий перестав працювати (він є сїльский робітник), пухлинина уступила, але остало згрубленє кінчин. В короткім часї по тім зауважав хорий, що єго зір погіршив ся, здавало ся єму, що поле видженя зменьшило ся. Спрага щораз більшала. Він пив 8 лїтрів води денно і їв дуже богато. Мимо того єго сили ставали що раз меньші а наклін половий зовсїм заник.

Status praesens подає значне побільшенє носа, уст і язика, а також ніг і рук. Також обобічна геміянопсія. Моч виказує 2—3% цукру, денна скількість єго виносить 2—4 лїтри. Внутрішні орґани кров і зміст жолудка не виказують нїчого неправильного.

Дієта складала ся з:

		N	Cl	P	Ca
1 лїтра молока, що відповідає		5·050 gr	0·912 gr	1·286 gr	1·628 gr
450 gr булки	„	6·117	1·535	0·565	0·182
250 cm булїону	„	0·499	0·816	0·310	0·053
298 gr beafsteak-у	„	13·329	5·096	0·884	0·078
304 gr бульби	„	0·784	0·156	0·214	—
81 gr яєць (2 шт.)	„	1·707	0·134	0·188	0·048
65 gr масла	„	0·142	0·012	0·051	0·021
800 gr содової води	„	—	0·028	—	0·025
4 gr кухонної соли	„	—	2·430	—	—
		27·635 gr	11·415 gr	3·478 gr	1·606 gr

Ми поставилисьмо собі за задачу в першім рядї дослїдів зобразити відносини видїлюваня. Тому увзгляднено в мочи побіч азоту, хльору, фосфору і вапу, котрих білянє обраховано, ще і найважнїйші складники мочи. Означилисьмо проте мочник, кислоту мочову, ксантинові засади, амоняк, мінеральну сїрчану кислоту, орґанїчну сїрку, сїрчану кислоту естрів, орґанїчний фосфор, звязаний з алькалїями, і з квасними фосфатами, вкінци соли потасові, содові і маґнезіові.

З огляду, що денне означуваня усїх складників вимагало богато часу, ми означали деякі з них лиш від часу до часу, так що на кождий період випадало що найменьше одно означенє.

Крім того зволив ВП. студ. мед. Райхенстайн виконати під моїм проводом означенє амідового азоту, а також монамінового і діамінового в мочи методом впровадженим Hausmann'ом[1]) а приміненим Pfandler'ом[2]) до мочи.

[1]) Hausmann: Zeitschr. f. physiol Chemie B 27 p. 95.
[2]) Pfandler: Idem B. 30 p. 75.

Перший ряд дослїдів подїлив я на 6 періодів: Перший, що тревав 6 днїв, служив до орієнтациї і виказав видїлюванє 3.325 cm^3 мочи денно з 24.108 gr азоту.

Азот в калї 0·532 gr pr. d.:
- 22·442 мочник
- 0·4293 мочова кислота
- 0·0978 ксантинові засади
- 0·9275 амоняк

Роздїл азоту після Pfandler'a (l. c.):
- 1·277 N. що дає ся тяжко віддїлити (осад
- 12 961 F. „ „ „ „ „ (процїд)
- 1·307 n. що дає ся легко віддїлити (осад)
- 7·589 f. „ „ „ „ „ (процїд)

Хльораки в калї 0·006 gr Сульфати:
- 8·991 хльораки обчислені як Cl
- 1·434 мінеральна сїрчана кислота як S
- 0·4656 орґанїчна S
- 0·1094 сїрчана естрова кислота як S

Фосфати 0·244 gr в калї:
- 1·7037 мінеральний фосфор як P
- 0·8474 квасний „ „ P
- 1·3802 алькалїчний „ „ P

Металї 0·526 в калї 0·037 gr:
- 6·442 соли потасові як K
- 7.334 соли содові як Na
- 0 3295 вап
- 0·1941 маґн

З того видно, що в мочи не знайдено сильно впадаючих в око змін. Орґанїчна сїрка виходить троха за високо 24.5% а так само і соли потасові значно побільшені. Порівнаймо видїлений азот, хльор, фосфор і вапно з тими в спожитім кормі, то помітимо дуже значне затриманє в орґанїзмі усїх названих складників а іменно:

азот	2.947	11% спожитого
хльораки	2.754	26%
фосфор	2.530	45%
вап	0·751	47%

Відношенє азоту до иньших складників в кормі представляло ся як:

N : Cl : P : Ca = 100 : 41.3 : 12.6 : 5.9
в видїлинах = 100 : 36.5 : 7.9 : 3.5

Видїлена в калї скількість виносила для фосфору 8%, для вапу 30%, підчас коли 50% фосфору з корму а 20% солий вапнових відійшло через нирки.

Подане відношенє остало незмінне підчас першого ряду обсерваций.

Подане таблєт тироідину не спровадило навіть збільшеня вилювання азоту. Обсервоване A. Schiff'ом видїлюванє фосфору в калї моглисьмо вправдї констатувати, але лише в дуже малім ступни. Аж подаванє 9 таблєт денно справдило збільшенє видїлюваня азоту, так що тепер орґанїзм затримував лиш 1.3 до 0.8 gr pro die, що виносить 5—3% спожитої скількости.

Зменьшенє задержаня фосфору можна було нотувати як при 3 таблєтах денно так особливо при 9 таблєтах, але зато росла через цїлий час подаваня тироідину скількість задержуваного вапна аж до 60% спожитої скількости. — При подаваню тироідину занотовано зменьшенє тяжко віддїляючого ся азоту і то даючого ся здрулити фосфоро-вольфрамовою кислотою і не даючого ся; значно збільшений був тоже легко віддїляючий ся не даючий ся здрулити фосфоро-вольфрамовою кислотою азот (мочник etc.). Легко віддїляючий ся даючий ся здрулити остав без зміни.

При подаваню таблєт з гіпофізи моглисьмо вправдї спровадити утрату азоту, що йшла рівнобіжно з збільшеним видїлюванєм води і хльору, але фосфати і вапневі соли остали при тім незмінені. Збільшене видїлюванє азоту відносило ся до усїх сполук азоту рівномірно: так було видїлюванє амоняку, мочової кислоти і т. д. без зміни в відношеню до азоту. Числа Pfandler'a показували те характерне, що тепер тяжко розкладаючий ся, не даючий ся здрулити PWr кислотою азот ішов в гору в противеньстві до видїлюваня фосфору, підчас коли прочі оставали без зміни. — Видїлюванє цукру ішло рівнобіжно з скількостию мочи.

З першого проте ряду дослїдів, довідалисьмо ся, що акромеґалїя побіч азоту і хльору затримує фосфор і вап; перші два дають ся видїлити через таблєти тироідину і гіпофізи, але фосфор а особенно **вапневі** соли упірно задержують ся.

По сконстатованю того звернулисьмо нашу увагу на вапневі соли і старалисьмо спровадити їх видїлюваня. З наших попередних досьвідчень[1]) пізналисьмо кисень і азотан срібла як середники, що побуджують видїлюванє вапна і старалисьмо ся дослїдити тут їх

[1]) W. Moraczewski: Virchow: Archiv f. all. Path. B 151 p. 22 u. 50 Zeitschrift f. klin. Med. 5/6 B 33 p. 1.

вплив. Побіч тих середників дослїджувалисьмо фосфор на єго дїланє, що як звісно має значінє для зросту костий, і пробувалисьмо тоже недавно впровадженого aphrodisiacum Yochinbin Дра Зінґера. Послїдного примінювалисьмо тому, що акромеґалїя майже все провадить до імпотенциї, а також і в нашім випадку половий наклін заник зовсїм.

Цїкаво було видїти, який буде мати вплив та побуджуюча субстанция на переміну материї. — А що головним предметом наших дослїдів були вапневі соли, то ми переводилисьмо аналїзу калу з найбільшою старанностию. Єго дослїджувано зовсїм сьвіжо, а в кождім періоді ряду дослїдів роблено одну аналїзу калу.

Означенє ограничилисьмо в мочи і калї до 4 складників N, Cl, P і Ca.

В першім періодї сконстатувалисьмо ще раз, що хорий оказує сильне задержанє всїх названих складників: N 16% P 46% Ca 60%. Притім видїлено 50% P через нирки, 7% з калом, Ca 8% через нирки, а 35% з калом.

Коли ми опісля далисьмо хорому через три днї вдихати кисень, задержанє всїх складників зменьшило ся. Соли вапневі видїлювали ся як через нирки (15% спожитої скількости) так і з калом обильнїйше. Видїлюванє фосфору з калом зменьшило ся, але з мочию видїлило ся кілька % більше так що білянс фосфору випав иньший.

О много скуточнїйшим оказав ся азотан срібла, подаваний в дозах 0.03 gr 6 разів денно, отже 0.18 gr pro die. При тім збільшило ся видїлюванє азоту і хльору (ретенция азоту виносила тепер 7%). Фосфати являли ся 60% в мочи а 8% в калї, вапневі соли 26% в мочи а 60% в калї. Через нирки видїлювана скількість вапна досягла в тім періодї своє maximum.

Дїланє фосфору було о стілько несподїване, що можна було надїяти ся нагромадженя вапна і фосфору в орґанїзмі. Тимчасом єго дїланє оказало ся дещо подібним як азотану срібла а в деякім взглядї ще сильнїйшим. Подаванє 0.005 gr фосфору денно споводувало збільшене видїлюванє калу, що мало рішаюче значінє для білянсу фосфору і вапна, а також страту азоту, що виносила 5% спожитої скількости, подібно і страта хльору виносила 24%. Ретенция фосфору спала до 20%, вапневі соли були в рівновазї, підчас коли досї жаден середник до того не допровадив. Так відходило в тім періодї 18% фосфору з калом, а 60% через нирки, а з вапневих солий 80% з калом, а 20% через нирки; отже при вапневих солях виходить виразне зменьшенє.

По кількох днях, в котрих видїлюване вернуло до давного типу, подавано через два днї 5 пастильок Yochinbin'y. То справдило значне збільшене видїлюваня води а заразом і хльору, азоту і фосфору з мочию, — а соли вапневі остали ненарушені.

Пересїчні числа видїлюваня в часї названих 5 періодів пояснюють те що сказалисьмо:

	I.		II.		III.		VI.		V.	
	Моч	Кал	Моч	Кал	Моч	Кал	Моч	Кал	Моч	Кал
Азот	25.87	0.70	26.37	0.78	28.76	0.84	29 27	2.08	28.57	0.49
Хльор	9.79	0.01	10.76	—	10.72	—	11.76	0.01	11.43	—
Фосфор	2.02	0.287	2.167	0.209	2.39	0.311	2.56	0.70	2.39	0.58
Вап	0.178	0.710	0.321	0.776	0 57	1.24	0.45	1.72	0.38	1.54
					З а д е р ж а н є					
	+		+		+		—		—	
Азот	5.47	16%	4.89	15%	2.44	8%	1.74	—5%	0.64	—2%
							—		—	
Хльор	2.07	18%	1.11	9%	1.06	8%	2.68	—20%	2.38	—20%
							+		+	
Фосфор	1.98	46%	1.89	40%	1.59	39%	0.91	+20%	1.18	+30%
							—		+	
Вап	1.27	60%	1.07	50%	0.35	17%	0.0005	—	0.228	+11%

З того видно, що подаване кисеня а особенно азотану срібла має великий вплив на видїлюване вапневих солий а особенно азотан срібла не дає ся нїякому середникови перевисшити. Хотяй навіть білянс вапна при подаваню фосфору випав майже неґативний, то всеж таки учить погляд на табличку, що видїлюване вапна через нирки при подаваню срібла дійшло до maximum.

Ті спостереженя повинні давати причинок до лїченя акромеґалїї і ствердити факт, що через кисень, фосфор і азотан срібла в видїлюваню наступають змінн, котрі повинно спровадити т. зв. специфічне лїчене але часом не спроваджує. В тім однак нїчо нема сказано о клїнічнім значіню ужиткованих нами середників.

Наші досліди тревали лиш що 4 днї і мали лиш оказати хемічне дїланє. Про вплив на нервові забуреня на субєктивне почуванє, що може головно має за ціль подаване тироїдину і гіпофізи не можемо при уживаних нами середниках висказати ся.

Найважнїйші висліди коротко зібрані суть ось які: 1⁰ при акромеґалїї затримує орґанїзм в собі азот, фосфор і вапневі соли; 2⁰ таблєти тироїдину побуджують збільшене видїлюване азоту, хльору і фосфору; 3⁰ таблєти гіпофізи лиш — азоту і хльору; 4⁰ кисень і азотан срібла всїх названих складників.

Лїченє трахоми і других запалень злучниці іхтарґаном.

Написав

Др. Михайло Кос.

Від часів Еберсового папіруса, се є від 16. віку до Христа, шукають люди за лїком на трахому — все безуспішно, або бодай не з таким успіхом, як би того бажалось, так що ще й нині найлїпшими суть ляпіс і синий камінь. Сей послїдний згадує ся вже в папірусї, отже перетревав півчверта тисяча лїт. Послїдні десятки лїт принесли нам лїченє трахоми сублїматом, витисканєм зерен фоллїкулів) пенсетою Кнапа або нїхтями, дальше витинанєм переходової фалди злучниці тай йодовою тинктурою. Очевидно уживає ся також ляпісу, всяких вод з борною кислотою, з цинковими солями і багато дечого другого. До послїдних проб треба зачислити лїченє трахоми ларґіном, протарґолем і іхтарґаном. Всї ті три лїки суть солями срібла з білковиною і суть ніби-то покликані заступити ляпіс. Про іхтарґан висказав ся дуже похвально Фальта[1]) і задля того поручило міністерство війни перевести пробне лїчен трахоми сим лїком в військових шпиталях.

Іхтарґан є злукою срібла з іхтіолем, представляє брунатний порошок зі слабим запахом іхтіолю; в нїм є 30% срібла, коли пр. в ларґінї срібла є всего 11%. Іхтарґан розпускає ся легко в водї і дає брунатно-червонаву течу; по довшім часї (4—6 неділь) творить ся чорний осад в течі, се знак, що треба зробити на ново

---

[1]) Dr. Marczel Falta: Trachomhehandlung mit Ichthargan; Knapp und Schweigger's Archiv für Augenheilkunde, XLIII Band 1901.

розчин іхтарґану. Після Авфрехта[1]) ділає іхтарґан на тканину глубше, чим ляпіс; також більша є спосібність іхтарґану забивати бактерії, чим ляпісу.

Від цьвітня до кінця вересня 1902 р. переводив я проби з іхтарґаном на очнім відділі ґарнізонового шпиталю в Перемишли при слідуючих недугах:

1. при трахомі,

2. при запаленю злучниці з сильним розвитком кульочок (фолїкулів) (conjunctivitis follicularis),

3. при звичайнім нежиті злучниці (conjunctivitis simplex),

4. при своєроднім острім нежиті злучниці, при чім злучниця була сильно почервоніла, опухла і видїлювала багато слизи. Цїлий процес тревав звичайно лишень кілька днїв і був властивий минувшому лїтови. В шпитальних записках ведено єго окремо пі іменем Ophthalmia catarrhalis,

5. при запаленях злучниці з витворенєм ґузків (conjunctivitis eczematosa, phlyctaenulosa, scrophulosa),

6. при Blenorrhoea neonatorum.

Я уживав 1% і 2% розчинів іхтарґану, ті розчини держались в темних фляшках і запускали ся до очий інстіллятором по одній капли на горішні повіки, обернені попередно злучницею на верх; надмір течі обсушовало ся ватою. При тім вистерігав ся я терти ватою по поверхни злучниці, щоби не зривати механічно поверховних верстов наболони, як се роблю також при стосованю ляпісу при очних недугах. З тої-то причини не уживано пензлїв, лишень інстіллятора і сему маю завдячити, що злучниця не підпадає темному закрашеню (argyrosis) навіть по кількамісячнім лїченю ляпісом або іхтарґаном. Розчин іхтарґану пече значно менше, чим одвітний розчин ляпісу і значно коротше. Можна сказати, що іхтарґан пече шість разів коротше, чим розчин ляпісу. Межи 1% а 2% розчином іхтаґану нема в тім згляді значнїйшої ріжниці. Однакож деякі хорі відчувають печенє іхтарґану як раз міцнїйше, чим ляпісу; сї виємки суть індівідуальні і рідкі.

Діланє іхтарґану при одиноких формах запаленя злучниці було ось яке:

1. При трахомі з pannus'ом і сильно розвиненим видїлюванєм слизи дїлав іхтарґан нераз дуже корисно і то в короткім часі, бо в протягу кількох днїх. Pannus з численними і добре розвиненими

[1]) Dr. Aufrecht, Ueber Ichthargan; Deutsche med. Wochenschrift 1900, n. 31.

кровяними судинами блідів за 3—5 днів а виділюване слизи уставало або бодай зменшувало ся дуже значно. Але таке корисне діланє не було постійне, бо навіть в однім случаю трахоми з pannus'ом обох прозорок був іхтарґан прямо шкідний, так що треба було по двох пробах перестати запускати іхтарґан. Іхтарґан показав взагалї слабший вплив в тих случаях трахоми, де ходило головно о погрубілу злучницю з бородавковатими наростями на ній, або знов, де були дуже розвинені кульочки (фоллїкули). Коли кульочки дали ся витиснути (все пальцями), то вплив іхтарґану на дальший перебіг трахоми був значно енерґічнїйший. Однако іхтарґан нїколи не вистарчав в тих случаях, щоби осягнути бажаний успіх, так що треба було перейти до других лїків, а іменно до ляпісу або синього каменя. Всїх лїчених трахомів було 37, межи ними було 7 з pannus'ом одного або обох очий, при чім навіть цїлї прозорки були заняті.

2. Нежит злучницї з сильно розвиненими кульочами (conjunctivitis follicularis), при чім однако кульочки були взагалї менше розвинені, чим при трахомі, підлягав корисному впливови іхтарґану лишень в тих случаях, де, так сказати-б, був наклін кульочок до уступленя, так що цїле лїчене не тревало довше, чим 2—3 неділї. Коли треба було довше уживати іхтарґану, то виступало розпухлене і увялене злучницї, так що цїлий образ недуги виглядав досить некорисно, хотяй з початку під впливом іхтарґану видно було значний добрий успіх.

3. При звичайнім нежитї (conjunctivitis simplex) без кульочок в злучници, де ходило головно о незначне виділюване слизи, о зачервенене і згрубіне злучницї, дїлав іхтарґан корисно також лишень в тих случаях, де цїле лїчене не тревало довго, бо інакше тратила злучниця гладкість і напруженє, властиве здоровій тканинї, пухлнїла і червонїла, так що треба було перейти до ляпісу.

4. Численні случаї острого запаленя (Ophthalmia catarrhalis) злучницї, зі значним виділюванєм слизи, значним зачервененєм злучницї і вразливостию на сьвітло, які були властиві лїтови 1902-ого року, були дуже мало приступні для лїченя іхтарґаном, так що треба було майже все перейти до ляпісу, а сей дїлав так корисно, що всї згадані прикрі прикмети уступали в протягу 3—5—7 днїв.

5. Conjunctivitis eczematosa, phlyctaenulosa, scrophulosa не давалася з успіхом лїчити іхтарґаном, з виємком одинокого случаю, де pannus обох прозорок виступав на ріжних частях прозорок, часто ступав і знов повертав, нераз занимав цїлі обі прозорки і уступав краще під впливом іхтарґану, коли противно всї иньші лїки,

як кальомель, ляпіс, zincum sulfuricum, acidum boricum і т. д., ділали некорисно.

Число всїх случаїв належачих до точки 2, 3, 4 і 5 виносило 316.

6. В одім случаю blenorrhoea neonatorum показав ся іхтарґан без впливу.

В загалї можна сказати, що іхтарґан є корисним приростом серед лїків в очних недугах, однако він не в силї зробити лишними иньші лїки, уживані до тепер при трахомі і при иншихъ запаленях злучниці. Особливо треба піднести, що дїланє ляпісу є енерґічнїйше, певнїйше і значно ширше, чим дїланє іхтарґану.

Начерк термінольоґії хемічної

владив

Др. Володимир Левицкий.

В твореню термінів хемічних треба узгляднити не лиш сторону язикову, але також і сторону мериторичну, се є треба звернути увагу на будову даної сполуки. Через се творять ся усякі трудности; запобічи їм не така легка справа, бо через се або одна або друга сторона термінольоґії хемічної може понести шкоду. З огляду однак на істоту даних сполук і на одноцїльність самої термінольоґії треба мериторичну сторону висунути на перший плян і послуговатись подекуди термінами штучно утвореними. В тім начерку подаєм пробу термінольоґії хемічної і то головно в части хемії, що зовесь неорґанїчною; в хемії орґанічній термінольоґія не представляє великих трудностий раз з огляду на більшу систематичність, а друге, що терміни є ту з малими винятками чужі і можна їх лишити без зміни (пр. метан, кетони, естри, етери, ґлюкози, алькальоіди і т. п., а навіть і терміни зложені, як пр. трихльорометан, трифенїльокарбіноль і т. д. можна оставити без зміни). Деякі знов терміни сеї хемії, що дадуть ся перекласти на руску мову (пр. углеводень, хльороуглеводень і т. д.), можна кождої хвилї утворити на основі термінів хемії неорґанічної. Важнїйші з тих термінів зазначені при відповідних елементах.

Для одноцїльности термінольоґії подаєм тут кілька основ, на яких треба ей оперти; основи ті приняла і затвердила секция мат. природ. лїк. Наук. Тов. ім. Шевченка.

Досить часто уживане слово „кислота“ заступити треба словом **квас**; анальоґічно сполуки окисів металїчних з водою назвати треба

засадами (нім. Base). Соли дїлити треба на **повні**, де вже H нема, **квасні** і **засадові**.

Ґрупу OH, що характеризує засаду, рішила секция назвати „**водне-кисень**“; анальоґічні ґрупи, як NH_4 (амон), CH_3 (метиль), C_2H_5 (етиль) і т. п. називати ся мусять **роднями** (sing. родень).

Як звісно, деякі елемснти творять цїлий ряд квасів і солий; кваси ті рішено означати так: кваси найвисші, де і O і H приходять в найбільшій скількости, означити треба прикметником, окінченим на **овий** (згл: евий), кваси низші прикметником, окінченим на **авий** [1]). Анальоґічно до того соли тих квасів дістануть окінченє **ан**, згл. **ин**.

Пр. $HClO$=квас підхльоравий; єго соли $MClO$=підхльорини [2]).

$HClO_2$=квас хльоравий; єго соли $MClO_2$=хльорини.

$HClO_3$=квас хльоровий; єго соли $MClO_3$=хльорани.

$HClO_4$=квас надхльоровий; єго соли $MClO_4$=надхльорани.

Лиш квас H_2SO_4 можна назвати сїрковим або сїрчаним, а ґіпотетичний квас H_2CO_3 квасом углевим або угляним.

Кваси без кисня означено через додаток **водень**; пр. HCl хльороводень, H_2S сїрководень. Соли тих квасів дістають окінченє **ак**; пр. FeS сїрчак желїзовий, AgCl хльорак срібловий.

Сполуку металю з киснем називати треба **окисом** (дву=, три=, над=) або **кисняком**; сполуку окису з елемснтом, що за додатєм води ставсь квасом, можна назвати або окисом або **безводником**. Де нема потреби робити подїлу на сполуки **ові** (**еві**) та **ави**, можна місто прикметника лишити genitivus відповідного елемснту.

Пр. BaO окис бару або баровий, CO окис угля, але NO окис азотовий (а не азоту), Hg_2O окис ртутавий, HgO окис ртутовий (ртутний); PbO окис оловавий, PbO_2 окис олововий (оловяний); N_2O_3 безводник азотавий, CO_2 безводник угля або двуокис угля (углевий).

Квас N_3H назвем квасом **азотоводевим**; єго соли є **азотаки** пр. N_3Na азотак соду або содовий.

Елемснт Ca назвати треба **вап**, Na **сод**, Al **глин**, Si **крем**.

Родень CN або Cy назвати треба **цианом**; єго сполуки є пр. CNH циановодень (квас пруский), соли того квасу є **цианяки** (пр. KCN = цианяк потасовий).

---

[1]) Такий сам подїл на сполуки „ави“ відносить ся до елементів, що творять два ряди солий і окисів.

[2]) M означає тут і дальше металї.

Елементи дїлимо на ґрупи: **хльорники** (Fl, Cl, Br, J), **кисневцї** (O, S, Se, Te), **азотники** (N, P, As, Sb, Bi), **угольники** (C, Si, Ti, Zr, Ce, Th), **хромники** (Cr, Mo, W, Ur), **ванадники** (Vd, Nb, Ta), **оловники** (Ge, Sn, Pb), **ґлинники** (B, Al, Ga, In, Tl) **скандники** (Sc, Y, Sa, Yb), **берильники** (Be, Mg, Zn, Cd, Hg), **вапники** (Ca, Sr, Ba), **мідники** (Cu, Ag, Au), **потасники** (Si, Na, K, Rb, Cs), **желїзники** (Mn, Fe, Co, Ni) і **платинники** (Ru, Rh, Pd, Os, Ir, Pt).

По тих загальних увагах перейдім до поазбучного перегляду усїх елементів та їх важнїйших сполук.

Азот *(Nitrogenium)* N.
амоняк NH_3.
амон (родень) NH_4.
хльорак амоновий (сальмяк) NH_4Cl; анальоґічно сїрчан, азотан і т. д. амоновий.
сїрководень амоновий NH_4SH.
трихльорак азотовий NCl_3.
безводник підазотовий N_2O; соли підазотини MNO.
окис азотовий NO.
двуокис азотовий NO_2.
безводник азотавий N_2O_3; він дає квас азотавий HNO_2, якого соли є азотини MNO_2.
безводник азотовий N_2O_4.
квас азотовий HNO_3; его соли азотани MNO_3.
квас азотоводевий N_3H; его соли азотаки MN_3.
гидроксилямін H_3NO.
киснехльорак азотавий NOCl.
киснехльорак азотовий NO_2Cl.
вода королївска (aqua regis) $HNO_3 + 3HCl$.
гидразін (двуамід) N_2H_4.
сїрчак азотовий N_2S_2.
циан CN (Cy).
циановодень (квас пруский) HCN; его соли є цианяки MCN, пр. KCN цианяк потасовий.
сїркоциановодень HCNS; его соли є сїркоцианяки MCNS, пр. KCNS сїркоцианяк потасовий.
квас циановий CONH; его соли цианяни MNCO.
квас циануровий $C_3N_3O_3H_3$; его соли цианурани пр. $C_3N_3O_3M_3$.
квас желїзоциановий H_4FeCy_6.
цианяк желїзовопотасовий K_4FeCy_6.
цианяк желїзавопотасовий K_3FeCy_6.
хлорак циановий CNCl; анальоґічно бромак і йодак.
цианяки орґанічні (нітрилї $C_nH_{2n+1}C\equiv N$).
хльорак цианавий $(CNCl)_3$; анальоґічно бромак.
сполуки нітрові (з ґрупою NO_2; пр. нітрометан $CH_3(NO_2)$, нітроуглеводень, нітроальдегид і т.п.).
сполуки нітрозові (сполуки орґанічні є ґрупою NO).
аміни (перворядні, другорядні, треторядні, многократні, ги-

дроаміни (з ґрупою OH і NH)), іміни, аміди, амідокваси, амідини і т. п.

мочник (карбамід) NH_2CONH_2.

анїлїна $C_6H_5NH_2$.

анїлїди; пр. $C_6H_5NH(COCH_3)$.

сполуки азові, пр. двуазові, гидроазові (з ґрупою N_2H_2), оксиазові (з ґрупою N_2O) і т. п.

азолї (друазолї, триазолї); пр.

піридина C_5H_5N і єї походні алькальоіди.

білок (альбумін), протеїни, протеіди.

Антимон *(Stibium)* Sb.

триводень антимоновий SbH_3.

безводник антимонавий Sb_2O_3.

соли антимонаві (пр. хльорак антимонавий $SbCl_3$).

безводник антимоновий Sb_2O_5; до него належить квас антимоновий (метаантимоновий $HSbO_3$ і пироантимоновий $H_4Sb_2O_7$); єго соли антимонани.

антимонїль (родень) SbO.

соли антимонїльові (з ґрупою SbO); пр. хлорак антимонїльовий SbOCl.

трисїрчак антимоновий Sb_2S_3.

пятисїрчак антимоновий Sb_2S_5.

сїркоантимонани M_3SbS_4.

Аргон A.

Арсен (*Arsenum*) As.

триводень арсеновий AsH_3.

трихльорак арсеновий $AsCl_3$.

безводник арсенавий (аршеник) As_2O_3; до него належить квас арсенавий H_3AsO_3, а єго соли є арсенини M_3AsO_3.

безводник арсеновий As_2O_5; єго квас арсеновий H_3AsO_4 (квас ортоарсеновий; квас метаарсеновий є $HAsO_3$, пироарсеновий $H_4As_2O_7$). Соли тих квасів є орто-, мета-, пироарсенани (M_3AsO_4, $MAsO_3$, $M_4As_2O_7$).

два-, три-, пяти-сїрчак арсеновий (As_2S_2, As_2S_3, As_2S_5).

сїркоарсенини M_3AsS_3.

сїркоарсенани M_3AsS_4.

Бар *(Barium)* Ba.

окис бару (баровий) BaO.

вадокис бару (баровий) BaO_2.

воднекисень баровий $Ba(OH)_2$.

хльорак бару (баровий) $BaCl_2$.

сїрчак бару (баровий) BaS.

сїрчан бару (баровий) $BaSO_4$.

углян бару (баровий) $BaCO_3$.

азотан бару (баровий) $Ba(NO_3)_2$

Бариль *(Berylium)* Be.

окис берильовий (берилю) BeO.

хльорак, сїрчан берильовий і т. п.

Бор *(Borium)* B.

триводень боровий BH_3.

трифлюорак боровий BFl_3.

квас флюороборовий $HBFl_4$; єго соли флюороборани $MBFl_4$.

трихльорак боровий BCl_3.

безводник боровий B_2O_3; тут належить квас боровий H_3BO_3 і єго соли борани, далї квас метаборовий HBO_2 (соли метаборани) і пироборовий $H_2B_4O_7$ (соли пироборани, пр. $Na_2B_4O_7$ = пироборан содовий або боракс).

азотак боровий BN.

сїрчак боровий B_2S_3.
трихльорак боровий BCl_3.
Бром *(Bromum)* Br.
бромоводень HBr; его соли бромаки MBr.
квас підбромавий HBrO; его соли підбромини MBrO.
квас бромовий $HBrO_3$; его соли бромани $MBrO_3$.
бромини $MBrO_2$.
бромоформ $CHBr_3$.
бромометан CH_3Br.
бромак метилену CH_2Br_2.
Ванад *(Vanadium)* V.
квас ванадовий H_3VO_4; его соли ванадани.
Вап *(Calcium)* Ca.
окис ваповий CaO.
воднекисень ваповий $Ca(OH_2)$.
флюорак ваповий $CaFl_2$.
хльорак, сїрчан і т. п. ваповий ($CaCl_2$ $CaSO_4$ і т. п.).
фосфоран триваповий $Ca_3(PO_4)_2$.
фосфоран двуваповий $CaHPO_4$.
углян ваповий $CaCO_3$.
Візмут *(Bismuthum)* Bi.
окис візмутавий Bi_2O_3.
соли візмутові (пр. хльорак візмутавий $BiCl_3$).
воднекисень метавізмутавий $HBiO_2$.
безводник візмутовий Bi_2O_5.
квас візмутовий (мета-, орто-) $HBiO_3$ і $H_4Bi_2O_7$.
сїрчак, трисїрчак візмутовий Bi_2S_2,Bi_2S_3.
засадові соли візмутові, пр. засадовий азотан візмутовий $Bi(NO_3)(OH_2)$.
Водень *(Hydrogenium)* H.
вода H_2O; вода окиснена (надокис водневий) H_2O_2.
Вольфрам *(Wolframium)* W.
безводник вольфрамовий WO_3; его квас вольфрамовий H_2WO_4, соли вольфрамани M_2WO_4.
Гель *(Helium)* He.
Глин *(Aluminium)* Al.
флюорак глину (глиновий) $AlFl_3$.
хльорак глину (глиновий) $AlCl_3$.
окис глину (глиновий) Al_2O_3.
воднекисень глину (глиновий) $Al(OH_3)$.
сїрчан, сїрчак і т. д. глиновий ($Al_2(SO_4)_3$,Al_2S_3 і т. д.).
алуни, пр. звичайний (сїрчан глинопотасовий) $K_2SO_4 + Al_2(SO_4)_3 + 24H_2O$.
амоновий, содовий і т. п.
кремани глину (глинові), пр. ортокляз, каолїн і п.
глинани пр. $KAlO_2$, $NaAlO_2$.
Ґадолїн *(Gadolinium)* Gd.
Ґаль *(Gallium)* Ga.
хльорак ґальовий (ґалю) $GaCl_3$.
Ґерман *(Germanium)* Ge.
окис ґерману (ґермановий) GeO
надокис ґерману (ґермановий) GeO_2.
сїрчак ґерману (ґермановий) GeS.
двусїрчак ґерману (ґермановий) GeS_2.
чотирохльорак ґерману (ґермановий) $GeCl_4$.
Ерб *(Erbium)* Er.
Желїзо (Зелїзо) *(Ferrum)* Fe.
окис желїзавий FeO.
окис желїзовий Fe_2O_3.

безводник желїзовий FeO_3.
надокис желїзовий Fe_3O_4.
сїрчан желїзавий $FeSO_4$.
сїрчан желїзовий $Fe_2(SO_4)_3$.
воднекисень желїзавий $Fe(OH)_2$.
воднекисень желїзовий $Fe(OH)_3$.
хльорак желїзавий $FeCl_2$.
хльорак желїзовий $FeCl_3$.
сїрчак желїзавий FeS.
двусїрчак желїзовий FeS_2.

Золото (*Aurum*) Au.
окис золотавий Au_2O.
окис золотовий Au_2O_3.
хльорак золотавий AuCl.
хльорак золотовий $AuCl_3$.
сїрчак золотовий Au_2S_3.
воднекисень золотовий $Au(OH)_3$.
золотани; пр. золотан потасовий $KAuO_2$, сїркозолотан содовий $NaAuS_2$.

Йод (*Jodum*) J.
йодоводень HJ; его соли йодаки (пр. йодак потасовий KJ.).
безводник йодовий J_2O_5; его квас йодовий HJO_3, соли йодани MJO_3.
квас підйодавий HJO; его соли підйодини MJO.
квас надйодовий HJO_4; его соли надйодани MJO_4.
йодометан (йодак метилю) CH_3J.
двуйодометан CH_2J_2.
трийодометан (йодоформ) CHJ_3.
чотирийодометан CJ_4.

Інд (*Indium*) In.
хльорак інду (індовий) $InCl_3$.

Ірид (*Irydium*) Ir.

Ітерб (*Ytterbium*) Yb.

Ітр (*Yttrium*) Y.

Кадм (*Cadmium*) Cd.
окис кадмовий (кадму) CdO.
воднекисень кадмовий $Cd(OH)_2$.
сїрчак, хльорак, йодак, сїрчан кадмовий і т. д.

Кисень (*Oxygenium*) O.
озон O_3.

Кобальт (*Cobaltum*) Co.
окис кобальтавий CoO.
надокис кобальтавий Co_3O_4.
сїрчан кобальтавий $CoSo_4$.
воднекисень кобальтавий $Co(OH)_2$.
арсенан кобальтавий $Co_3(AsO_4)_2$.
окис кобальтовий Co_2O_3.

Крем (*Silicium*) Si.
кремоводень (кремометан) SiH_4.
флюорак крему (кремовий) $SiFl_4$.
квас флюорокремовий H_2SiFl_6; его соли флюорокремани M_2SiFl_6.
хльорак кремовий $SiCl_4$.
двусїрчак кремовий SiS_2.
безводник (надокис) кремовий SiO_2.
кваси кремові: ортокремовий H_4SiO_4 (соли ортокремани M_4SiO_4), метакремовий H_2SiO_3 (соли метакремани M_2SiO_3).
много-кремани, пр. $Mg_3Si_2O_7$, $Al_2Be_2Si_2O_9$ і т. д.; тут належить і скло (ваповопотасове, ваповосодове, оловопотасове, вапоглинопотасове і т. д.).

Криптон Kr.

Ксенон Ks.

Лянтан (*Lanthanum*) La.
Літ (*Lithium*) Li.
окис літу (літовий) Li_2O.
воднекисень літу (літовий) Li(OH).
углян літу (літовий) Li_2CO_3
фосфоран літу (літовий) Li_3PO_4.
Маґн (*Magnesium*) Mg.
окис маґновий (маґну) MgO (маґнезия).
воднекисень маґновий $Mg(OH)_2$.
хльорак маґновий $MgCl_2$.
сїрчан маґновий $MgSO_4$.
фосфоран маґновий $Mg_3(PO_4)_2$.
фосфоран амономаґновий $(NH_4)MgPO_4$.
углян маґновий $MgCO_3$; углян маґновий засадовий $(MgCO_3)_n(Mg(OH)_2)_m$.
кремани маґнові (Mg_2SiO_4, $Mg_3Si_2O_7$ і т. п.).
фосфорак маґновий Mg_3P_2.
Маньґан (*Manganum*) Mn.
окис маньґанавий MnO.
сїрчан маньґанавий $MnSO_4$.
углян маньґанавий $MnCO_3$.
воднекисень маньґанавий $Mn(OH)_2$.
окис маньґановий Mn_2O_3.
воднекисень маньґановий $Mn(OH)_3$.
надокис маньґановий Mn_3O_4.
двуокис маньґановий (пиролюзит) MnO_2
безводник маньґановий MnO_3.
безводник надманґановий Mn_2O_7.
хльорак маньґанавий $MnCl_2$.
хльорак маньґановий $MnCl_4$.
маньґанити M_3MnO_3.
маньґанати M_2MnO_4 (пр. маньґанан потасовий K_2MnO_4).
квас надманґановий $HMnO_4$; его соли надманґанати (пр. надманґанан потасовий $KMnO_4$).
сїрчак маньґанавий MnS.
сїрчак маньґановий MnS_2.
соли маньґанові MnX_4.
Мідь (*Cuprum*) Cu.
окис мідавий CuO.
воднекисень мідавий $Cu(OH)_2$.
хльорак мідавий $CuCl_2$.
сїрчан мідавий $CuSO_4$.
азотан, креман і т. д. мідавий
окис мідавий Cu_2O.
хльорак мідевий Cu_2Cl_2.
воднекисень мідевий $Cu_2(OH)_2$.
Моліб'ден (*Molybdaenum*) Mo.
хльорак (дву-, три-. чотиро-, пяти-) молїбденовий $MoCl_2$, $MoCl_3$, $MoCl_4$, $MoCl_5$.
безводник молїбденовий MoO_3.
квас молїбденовий H_2MoO_4; его соли молїбденати M_2MoO_4.
Неодим (*Neodymium*) Nd.
Неон Ne.
Нїкель (*Niccolum*) Ni.
окис нїклявий NiO.
воднекисень нїклявий $Ni(OH)_2$.
сїрчан нїклявий $NiSO_4$.
хльорак нїклявий $NiCl_2$.
окис нїклевий Ni_2O_3.
Нїоб (*Niobium*) Nb.
Олово (*Plumbum*) Pb.
хльорак оловавий $PbCl_2$.
сірчак оловавий $PbSO_4$.
окис оловавий (глейта) PbO.
воднекисень оловавий $Pb_2O(OH)_2$.
сїрчак оловавий PbS.

воднекисень олововий (оловяний) $Pb(OH)_2$.
хльорак олововий (оловяний) $PbCl_4$.
углян олововий (оловяний) $PbCO_3$.
хроман олововий (оловяний) $PbCrO_4$.
окис олововий (оловяний) PbO_2.
оловани M_2PbO_3 (пр. олован потасовий K_2PbO_3).
чотирокис олововий (мінія) Pb_3O_4.
трикис олововий (оловяний) Pb_2O_3.
Осм (*Osmium*) Os.
чотирокис осмовий (осму) OsO_4.
османи M_2OsO_4.
Паляд (*Palladium*) Pd.
хльорак палядавий $PdCl_2$.
йодак палядавий PdJ_2.
хльорак палядовий $PdCl_4$.
хльоропалядани M_2PdCl_6 (пр. хльоропалядан потасовий K_2PdCl_6).
Платина (*Platinum*) Pt.
хльорак платинавий $PtCl_2$.
хльорак платиновий $PtCl_4$.
квас хльороплатиновий H_2PtCl_6; соли хльороплатинани M_2PtCl_6.
воднекисень платиновий $Pt(OH)_4$.
окис платинавий PtO.
окис платиновий PtO_2.
Потас (*Kalium*) K.
воднекисень потасу (потасовий) їдкий потаж KOH.
хльорак, бромак, йодак потасу (потасовий) KCl, KBr, KJ.
підхльорин потасу (потасовий) KClO.
хльоран потасовий $KClO_3$.
надхльоран потасовий $KClO_4$.
сїрчан потасовий K_2SO_4.
азотин потасовий KNO_2.
азотан потасовий (салїтра індийска) KNO_3.
углян потасовий (потаж) KCO_3.
метаарсенин потасовий $KAsO_2$.
Празеодим (*Praseodymium*) Pr.
Рад (*Radium*) Rd.
Род (*Rodium*) Rh.
окис родавий RhO.
окис родовий RhO_2.
Ртуть (*Hydrargyrum*) Hg.
окис ртутавий Hg_2O.
хльорак ртутавий (кальомель) Hg_2Cl_2.
йодак ртутавий Hg_2J_2.
окис ртутовий (ртутний) HgO.
хльорак ртутовий (ртутний) $HgCl_2$ (сублїмат)
йодак, сїрчак, сїрчан і т. д. ртутовий (ртутний) HgJ_2, HgS, $HgSO_4$.
Рубід (*Rubidium*) Rb.
Рутен (*Ruthenium*) Ru.
чотирокис рутеновий RuO_4.
рутенани M_2RuO_4.
Самар (*Samarium*) Sa.
Селен (*Selenium*) Se.
селеноводень SeH_2; его соли селенаки M_2Se (пр. селенак потасовий K_2Se).
безводник селенавий SeO_2; его квас селенавий H_2SeO_3, соли селенини M_2SeO_3.
квас селеновий H_2SeO_4; соли селенани M_2SeO_4.
Сїрка (*Sulphur*) S.
сїрководень H_2S, его соли сїрчаки M_2S.

многосі́рчак **водня** H_2S_n.
хльорак **сі́рки** S_2Cl_2.
двухльорак **сі́рки** SCl_2.
чотирохльорак **сі́рки** SCl_4.
безводник **сі́рковий** (сі́рчаний) SO_3.
триокис **сі́рки** S_2O_3.
квас **підсі́рковий** H_2SO_2; **его соли підсі́рчини** M_2SO_2 (повні і **квасні**: **пр. підсі́рчин содовий** Na_2SO_2).
квас **сі́рковий** H_2SO_3; **его соли сі́рчини** M_2SO_3 (повні і квасні).
квас **сі́рковий або** сі́рчаний H_2SO_4; **его соли** сі́рчани M_2SO_4 (повні і квасні).
квас **надсі́рковий або надсі́рчаний** HSO_4; **его соли надсі́рчани** MSO_4.
квас **нітрозильосі́рковий** (сі́рчаний) SO_5NH.
квас **пиросі́рковий** (сі́рчаний) $H_2S_2O_7$; **его соли пиросі́рчани** $M_2S_2O_7$.
квас **тіосі́рковий** (сі́рчаний) $H_2S_2O_3$; **его соли тіосі́рчани** $M_2S_2O_3$.
квас **дву-, три-, чотиро-, пяти-тіосі́рковий** (сі́рчаний) $H_2S_2O_6$, $H_2S_3O_6$, $H_2S_4O_6$, $H_2S_5O_6$; **їх соли дву-, три-, чотиро-, пяти-тіосі́рчани** $M_2S_2O_6$, $M_2S_3O_6$, $M_2S_4O_6$, $M_2S_5O_6$.
меркаптани (сі́ркоалькоголї) пр. $C_nH_{2n+1}SH$.
сі́ркоальдегиди і сі́ркокетони.
сульфони пр. $(C_nH_{2n+1})_2SO$.
воднекисень сулфіновий пр. $(C_nH_{2n+1})_3S(OH)$.
сульфональ $(CH_3)_2C(SO_2C_2H_5)_2$.
сі́ркокваси товщеві, пр. квас сі́ркооцтовий CH_3COSH.
квас трисі́ркоуглевий (угляний) H_2CS_3.
сі́ркофенолї пр. C_6H_5SH.
Сканд (*Scandium*) Sc.
Сод (*Natrium*) Na.
воднекисень соду (содовий, їдка сода) NaOH.
хльорак, бромак, йодак содовий NaCl, NaBr, NaJ.
підхльорин содовий NaClO.
сі́рчан содовий $NaSO_4$.
азотан содовий (салі́тра чілї́йска) $NaNO_3$.
фосфоран одно-, дву-, три-содовий NaH_2PO_4, Na_2HPO_4, Na_3PO_4.
пироборан содовий (боракс) $Na_2B_4O_7$.
углян содовий (повний, сода) Na_2CO_3.
углян содовий (квасний) $NaHCO_3$.
кремани содові і т. д.
Срі́бло (*Argentum*) Ag.
окис, хльорак, сі́рчак, сі́рчан, азотан (ляпіс) срі́бла (срі́бловий) Ag_2O, AgCl, Ag_2S, Ag_2SO_4, $AgNO_3$.
Стронт (*Strontium*) Sr.
окис стронту (стронтовий) SrO.
двуокис стронту (стронтовий) SrO_2.
воднекисень стронту (стронтовий) $Sr(OH)_2$.
хльорак стронту (стронтовий) $SrCl_2$.
Таль (*Thallium*) Tl.
хльорак талявий $TlCl_3$.

окис талявий Tl_2O_3.
хльорак талевий TlCl.
окис талевий Tl_2O.
Танталь (*Tantalium*) Ta.
Телюр (*Tellurium*) Te.
телюроводень TeH_2; его соли телюраки TeM_2.
безводняк телюравий TeO_2.
квас телюравий H_2TeO_3; его соли телюрини M_2TeO_3.
безводник телюровий TeO_3.
квас телюровий H_2TeO_4; его соли телюрани M_2TeO_4.
Тербь (*Terbium*) Tb.
Тітан (*Titanium*) Ti.
чотирохльорак тітановий $TiCl_4$.
двуокис тітановий TiO_2.
квас ортотітановий H_4TiO_4; его соли тітанани M_4TiO_4.
Тор (*Thorium*) Th.
Туль (*Thulium*) Tu.
Уголь (*Carbonium*) C.
ацетилен C_2H_2.
метан (ґаз болотний) CH_4.
окис угля (углевий) CO.
безводник (двуокис, двукисняк) угля (углевий) CO_2.
квас угляний або углевий H_2CO_3; его соли угляни повні M_2CO_3 і квасні $MHCO_3$.
двусїрчак угля (углевий, угляний) CS_2.
киснесїрчак угля (углевий, угляний) COS.
сполуки товщеві (ланцові, алїфатичні) і ароматичні (циклїчні, перстеневі).
углеводень (plur. углеводнї); пр. насичені C_nH_{2n+2} (метан, етан і т. д.), ненасичені (етени або етилени) C_nH_{2n}, ацетиленн (етіни) C_nH_{2n-2}, ароматичні (бензоль C_6H_6, і т. д.).
родиї: метиль CH_3, етиль C_2H_5, пропиль C_3H_7 і т. д.
алькоголї; одноатомові, двуатомові (ґлїколі), триатомові (ґлїцерини), чотироатомові і т. д., насичені, ненасичені, ароматичні, фенолї і т. д.
етери (прості і мішані); пр. етер етильовий (сїрчаний) $(C_2H_5)_2O$.
альдегиди (пр. муравельний HCOH, оцтовий CH_3COH і т. д).
кетони; пр. ацетон $(CH_3)_2CO$.
кваси товщеві і ароматичні (характеристична ґрупа карбоксиль COOH), одно-, дву-, засадові, насичені, ненасичені. пр.
квас муравельний HCOOH; соли муравляни MCOOH.
квас оцтовий CH_3COOH; соли оцтани (повні і квасні) пр. $MC_2H_3O_2$.
квас масловий $C_4H_8O_2$; соли масляни.
квас олїйний $C_{18}H_{34}O_2$; соли олїяни.
квас молочний; соли молочани.
квас щавовий $(COOH)_2$; соли щавани.
квас бурштиновий; соли бурштинани.
квас яблочний $C_4H_6O_5$; соли яблокани.
квас винний $C_4H_6O_6$; соли винани.

квас бензоесовий C_6H_5COOH; соли бензоесани.

квас салїцильовий; соли салїцилани.

квас мочевий $C_5H_4N_4O_3$; соли мочани.

квас фталевий і т. д. і т. д.

фенольокваси, двуфенольокваси, алькогольокваси, кваси кетонові, сїркокваси, оксисїркокваси, кваси сульфонові (соли сульфонати) і т. д. і т. д.

естри; неорґанічні (повні і квасні), пр. хльораки, бромаки, йодаки, сірчани (метильовий, етильовий і т. д.), азотани пр. азотан ґлїцерини або нїтроґлїцерина $C_3H_5(ONO_2)_3$) і т. д.; орґанічні (пр. муравлян етильовий, оцтан етильовий і т. д.).

хінони (оксихінони, антрахінони пр. алїзарина).

углеводани; ту належать ґлїкози $C_6H_{12}O_6$ (пр. цукор грозновий, ґаляктоза, сорбіноза), тростинники або сахарози $C_{12}H_{12}O_{11}$ (пр. цукор тростиновий, молочний і мучки $(C_6H_{10}O_5)_n$ (мучка, крохмаль, целюльоза, декстрина)[1]).

Уран (*Uranium*) Ur.

окис уранавий UrO_2.

окис урановий UrO_3.

уранїль (родень) UrO_2.

соли уранаві, уранові і уранїлеві (пр. хльорак уранїлевий UrO_2Cl_2).

уранани, пр. двууранани $M_2Ur_2O_7$.

живиця уранова (пехблєнда).

Флюор (*Fluorum*) Fl.

флюороводень HFl; его соли флюораки NFl (пр. флюорак ваповий $CaFl_2$).

Фосфор (*Phosphorus*) P.

триводень фосфоровий (фосфору) PH_3.

фосфон (родень) PH_4.

фосфазін P_2H_4.

пятихльорак фосфоровий PCl_5.

трихльорак фосфоровий PCl_3.

киснехльорак фосфоровий $POCl_3$.

безводник фосфоровий P_2O_5.

квас (орто) фосфоровий H_3PO_4; его соли фосфорани M_3PO_4.

квас пирофосфоровий H_4PO_7; его соли пирофосфорани (повні і квасні).

квас метафосфоровий HPO_3; его соли метафосфорани MPO_3.

безводник фосфоравий P_4O_6.

квас фосфоравий H_3PO_3; его соли фосфорини (однометалеві MH_2PO_3 і двуметалеві M_2HPO_3).

безводник фосфораво фосфоровий P_2O_4.

квас підфосфоровий $H_4P_2O_6$; его соли підфосфорани $M_4P_2O_5$ і $M_2H_2P_2O_6$.

Хльор (*Chlorum*) Cl.

хльороводень HCl (з водою квас сільний); его соли хльораки MCl (пр. хльорак глиновий $AlCl_3$, баровий $BaCl_2$, маґно-

[1]) Иньші сполуки орґанічні творити можна аналоґічно (після правил термінольоґії неорґанічної); всїх неможливо тут виписувати.

вий $MgCl_2$, сріблавий AgCl і т. д.).
безводник пїдхльоравий Cl_2O.
квас підхльоравий HClO; его соли пілхлорини MClO.
безводник хльораво-хльоровий Cl_2O_4.
квас хльоравий $HClO_2$; соли хльорини $MClO_2$.
квас хльоровий $HClO_3$; его соли хльорани $MClO_3$ (пр. хльоран потасовий $KClO_3$).
квас надхльоровий $HClO_4$; его соли надхльорани $MClO_4$.
хльороуглеводні пр. $C_nH_{2n+1}Cl$.
трихльорометан (хльороформ) $CHCl_3$.
хльорак етилену $(CH_2Cl)_2$.
квас хльоромуравельний ClCOOH.
квас трихльорооцтовий CCl_3COOH.
хльорак оцтовий CH_3COCl.
Хром (*Chromium*) Cr.
безводник хромовий CrO_3.
квас хромовий H_2CrO_4; соли хромани M_2CrO_4 і многохромани $M_2CrO_4+xCrO_3$.
квас двухромовий $H_2Cr_2O_7$; его соли двухромани M_2CrO_7 (пр. двухроман потасовий $K_2Cr_2O_7$).
окис хромовий Cr_2O_3.
хльорак хромовий $CrCl_3$.
сїрчан хромовий $Cr_2(SO_4)_3$.
воднекисень хромовий $Cr(OH)_3$
окис хромавий CrO.
воднекисень хромавий $Cr(OH)_2$
хльорак хромавий $CrCl_2$.
Цез (*Caesium*) Cs.
Цер (*Cerium*) Ce.
Цина (*Stannum*) Sn.
окис цинавий SnO.
воднекисень цинавий $Sn(OH)_2$.
соли цинаві, пр. хльорак цинавий $SnCl_2$.
окис циновий SnO_2.
квас циновий H_2SnO_3; соли цинани M_2SnO_3 (пр. цинан содовий Na_2SnO_3).
соли цинові, пр. хльорак циновий $SnCl_4$, флюорак циновий $SnFl_4$.
сїрчак цинавий SnS.
сїрчак циновий SnS_2.
Цинк (*Zincum*) Zn.
воднекисень цинковий $Zn(OH)_2$.
хльорак цинковий $ZnCl_2$.
сїрчан цинковий $ZnSO_4$.
углян цинковий $ZnCO_3$.
креман цинковий Zn_2SiO_4.
Циркон (*Zirconium*) Zr.
чотирофлюорак цирконовий (циркону) $ZzFl_4$.
двуокис цирконовий ZrO_2.
воднекисень цирконовий ZrH_2O_3.
сїрчан цирконовий $Zr(SO_4)_2$.
цирконани, пр. цирконан потасовий K_2ZrO_3.
креман цирконовий $ZrSiO_4$.

Тернопіль, март—цьвітень 1903.

Бібліографія і хроніка математично-фізична.

A. Kneser: Lehrbuch der Variationsrechnung (Braunschweig, Vieweg u. Sohn 1900. ст. XIV.+311).

Від часу видання книжки Moigno-Lindelöf'a не вийшов протягом 30 літ ані в Німеччині ані у Франції ніякий підручник рахунку варияційного. Та за сей час теория сего рахунку, завдяки Вейерштрасови і его ученикам (в першій мірі Zermelo), значно поступила в перед і тому то автор прислужив ся дуже публіці математичній через видане сего підручника. В книжці тій, що обіймає вісім розділів і численний спис літератури, автор стоїть вповні на становиску Вейерштрасса.

1. Шукане максімів та мінімів (або — як автор каже — екстремів) інтеґралів зводить ся до шукання екстремів інтеґралу:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x\ y\ x'\ y')dt \qquad \big(x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\big).$$

де F є однородною функциєю першого степеня що до x' і y', а ся характеристична власність є:

$$F(x, y, \alpha x', \alpha y') = \alpha\, F(x\ y\ x'\ y').$$

Конечною умовою, щоби істнував екстрем, є:

$$\delta J = 0.$$

това є рівноважна з рівнанями:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{dx'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{dy'}\right) = 0$$

Криву, що сповняє ті умови, називає автор „Extremale“ інтеґрала J.

Дальші істнованя екстрему дає друга варияция інтеґралу: $\delta^2 J$, яку можна написати в видї (після Вейерштрасса):

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[F_1 \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 + F_2 \omega^2 \right],$$

або:

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} F_1 \left[\frac{d\omega}{dt} + \frac{u\omega}{F_1} \right]^2 dt,$$

де:

$$\left(F_2 + \frac{du}{dt} \right) F_1 - u^2 = 0.$$

Звідси слїдує, що про знак другої варияцї $\delta^2 J$, отже про се, чи буде інтеґрал мав максімум або мінїмум, рішає знак на F_1.

Щоби однак всї ті умови були і конечні і достаточні, треба, щоби в інтервалї $(t_0 \cdots t_1)$ не було точок спряженых, т. є. таких точок, де в їх окруженю криві сусїдні перетинають первісну криву (умова Jacobi та Вейерштрасса). Умовою на се, є щоби певне рівнанє:

$$D(t_0\ t) = 0$$

в інтервалї $(t_0 \cdots t_1)$ не мало иньших корінїв, як лиш $t = t_0$.

2. Того рода дослїди (дослїди про безвзглядні екстреми) обнимають ст. 1.—116. книжки. Дальшу еї часть часть посьвятив автор т. зв. взглядним екстремам, т. є. найденю умов, коли інтеґрал:

$$J = \int F(x\ y\ x'\ y')\, dt$$

має максімум або мінімум, наколи другий інтеґрал:

$$K = \int G(x\ y\ x'\ y')\, dt$$

має приписану вартість (загальнїйша задача ізоперіметрична). Ту конечними умовами являють ся: 1) умова Jacobi, щоби рівнанє $D(t_0\ t) = 0$ не мало в інтервалї $(t_0 \cdots t_1)$ иньших корінїв, як лиш $t = t_0$, при чім:

$$\left. \frac{\partial D(t_0\ t)}{\partial t} \right]_{t=t_0} \leqslant 0$$

2) постійність знаку вираження:

$$E\left(x\ y\ x'\ y'\ \frac{dx}{dt}\ \frac{dy}{dt}\right),$$

де:

$$E\left(x\ y\ x'\ y'\ \frac{dx}{d\tau}\ \frac{dy}{d\tau}\right) = \frac{\partial F}{\partial x'}\ \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial F}{\partial y'}\ \frac{dy}{d\tau} - F\left(x\ y\ \frac{dx}{d\tau}\ \frac{dy}{d\tau}\right)$$

($x = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, τ параметр, що належить до дороги, по якій ся інтеґрує).

3) можливість т. зв. конструкції Вейерштрасса кривих екстремальних (ст. 132 sqts).

3. В дальшім тягу розбирає автор **нетяглі розвязки**, т. є. розбирає можливість, коли можна інтеґрал J привести до абсолютного екстрему при помочи кривої, що складаєсь зі скінченого числа кусників (лїнїя ломана), з яких кождий має свойства приписувані давнїйше цїлій кривій; т. є. x і y є здовж кождого кусника тягді функцій параметру t, а так само їх перші і другі походні. Показує ся, що і ту остають висліди виведені для безглядних екстремів.

Розслїди розширає автор дальше на случаї, коли в інтеґрал входять і вищі походні, т. є. коли інтеґрал має форму:

$$J = \int F\left(x\ x'\ x''\ \cdots\ x^{(n)},\ y\ y'\ y''\ \cdots\ y^{(n)}\right) dt.$$

В тім случаю криву екстремальну дають рівнання $P = 0$, $Q = 0$, де в загалї:

$$P_m = \sum_{\alpha}^{0,\,n-m} (-1)^{\alpha}\ \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\ \frac{\partial F}{\partial x^{(m+\alpha)}}$$

$$Q_m = \sum_{\alpha}^{0,\,n-m} (-1)^{\alpha}\ \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\ \frac{\partial F}{\partial y^{(m+\alpha)}}$$

при чім: $P = P_0$, $Q = Q_0$. Сї умови можна заступити в случаю, коли положимо:

$$x = t, \quad F\,dt = f\,[x\ y\ y'\ \cdots\ y^{(n)}]\,dx$$

рівнянєм:

$$f) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\ \frac{\partial f}{\partial y'} + \cdots\cdots + (-1)^n\ \frac{d^n}{dx^n}\ \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0,$$

яке ...тремальні криві також сповняти мусять.

...угу умову для екстрему дає знак функції E (аналоґічн ...к в горі).

І ту можна ввести загальну ізоперіметричну задачу, т. є. шукане взглядного екстрему інтеґралу J, наколи другий інтеґрал:

$$K = \int G(x\, x' \cdots x^{(n)}\, y\, y' \cdots y^{(n)})\, dt$$

має приписану вартість.

4. Опісля переходить автор до зовсім загальної задачі. Най $y_0\, y_1 \cdots y_{n-1}$ є незвісні функциї x, які сповняють $(r+1)$ рівнань:

$$\Psi_\alpha \left(x\, y_0\, y_1 \cdots y_{n-1}, \frac{dy_0}{dx}\, \frac{dx_1}{dx} \cdots \frac{dy_{n-1}}{dx}\right) = 0 \quad (\alpha = 0, 1, \cdots r)$$

Вартости величин $y_0\, y_1 \cdots y_{n-1}$ є дані для $x = x_0$, а деякі з них є дані і для $x = x_1$. Визначити незвісні функциї так, щоби вартість y_0 для $x = x_1$ була екстремом. — Очевидно, що квестия визначення екстремів є ту о много більше скомпліковане і вимагає більше умовних рівнань, як передше. Рівнання ті є типу:

$$\Omega = \sum_{\alpha}^{0,r} \varphi_\alpha\, \lambda_\alpha = 0$$

і:

$$\Omega_\gamma \Big|^{t_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_\beta} - \frac{d\Omega_\beta}{dt} = 0,$$

де:

$$\Omega_\beta = \frac{\partial \Omega}{\partial y'_\beta};$$

$\varphi_\alpha (y_0\, y_1 \cdots y_n, y_0'\, y_1' \cdots y_n') = 0$ є то рівнання Ψ_α, де місто x написано y_n, наколи x, y_0, y_1, $\cdots y_n$ є тяглі функциї параметру t здовж даного n-розмірового твору.

5. Послїдна часть книжки обнимає максіма і мінїма двократних інтеґралів:

$$J = \int_\sigma \int \Phi (x\, y\, z\, x_u\, y_u\, z_u\, x_v\, y_v\, z_v)\, du\, dv$$

здовж поверхні σ, де x y z є функциї двох параметрів u, v, де:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = x_v.$$

Конечною умовою істнованя екстремів є істнованє трох рівнань:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_v}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_v}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_v}\right) = 0.$$

Очевидно, що і ту кромі безузглядних екстремів істнувати можуть і екстремы узглядні, наколи інтеґрал J є звязаний з анальоґічним інтеґралом:

$$K = \int_\sigma \int \Psi(x\ y\ z\ x_u\ y_u\ z_u\ x_v\ y_v\ z_v)\, du\, dv.$$

Про достаточні умови рішав друга вариация; умови ті подав Brunacci. Ту выступав анальоґічна функция E, як в горі, якої знак рішав.

Так отже коротко подали ми зміст сеї книжки і дорогу, якої придержував ся автор. Для доповненя треба додати, що автор цїлий виклад ілюстрував численными примірами; з них опрацював він дуже обширно 15 задач, які представляють будь-то історичний, будь теоретичний інтерес. Згадаю приміром теорию найкоротшої лїнїї, чи то на площи, чи на поверхнях (лїнїї ґеодетичні) задачі ізоперіметричні, брахістохрону, лїнїю ланцову, фіґуру рівноваги пружини, вид каплї etc. Автор узглядняв численну літературу (аж до хвилї видання книжки); новійших дослїдів Гільберта і Osgood'a книжка ся не узглядняє, так само, як не згадує між численною літературою роботи Остроґрадского з р. 1834.

Книжка представляє ся під кождим зглядом дуже хорошо і надає ся дуже добре яко підручник, тим більше, що заповнює велику люку, яка істнувала в літературі математичній на поли рахунку варияційного через кілька десяток літ. Люку ту в части заповнив твір Pascal'a з 1899, а побіч него съміло стати може твір Кнезера (професора унїверзитету в Юрєві); за сей твір авторови належить ся зі сторони публїки математичної велика подяка. *В. Л.*

Hensel u. G. Landsberg. Theorie der algebrais
Funktionen einer Variablen (Leipzig, B. G. Teubnei
2. ст. XVI.+707).

значного числа підручників про функциї альґебраічні приlu
новий підручник; при оцїнї єго рішав в першій мірі ста-

новиско, на якім стоять автори та яке зазначують самі у вступі. В послїдних лїтах, завдяки працям Вейерштрасса, Кронекера т. в. взяв гору погляд, що теорию функций альґебраічних найлекше розслїджувати при помочи аритметичних розважань та при помочи результатів з теориї функций, яку Вейерштрасс і так зарітметизував; через сей погляд теория функций альґебраічних стала посвоячена з загальною теориєю альґебраічних чисел і поверхний. На такім функційно-чисельнім становиску станули в тій книжцї оба ві автори, беручи під увагу всї функциї алґебраічні одної Ріманновської кляси або тїла, а рівночасно уживаючи до помочи аналїтичних метод переведеня функций. Велику ролю має ту поняте подїльности, якого розширене позваляє в повнї опанувати збір всїх функций альґебраічних одного тїла.

Книжка складає ся з шістьох части: 1. розпросторене функций альґебраічних на поверхнї Ріманна (8 викладів). 2. тїла альґебраічних функций (5 викладів). 3. альґебраічні подїльники і теорем Ріманна-Роха (9 викладів). 4. альґебраічні криві і твори (5 викладів). 5. кляси альґебраічних творів (4 виклади). 6. альґебраічні реляциї між інтеґралами Абеля (6 викладів). На кінци книжки доданий коротенький начерк теориї функций альґебраічних від часів Абеля і Jacobi до аритметичних метод Дедекінда і Вебера. В середині представленя теориї функций альґебраічних, довкола якої цїлий виклад ся обертає, стоїть теория подїльників; з неї випливає чисто аритметичне узасаднене теорему Ріманна-Роха і пливуче з сего узасаднене теорему Абеля, теориї інтеґралів Абеля і їх періодів, уступи, що виповняють трету часть підручника; теорем Ріманна-Роха випровадженый раз на основі розслїдів тїла альґебраічного K(z u) і его родини, другий раз яко вислід реляций, що істнують між інтеґралами Абеля. Теорем Абеля і теория інтеґралів ведуть до проблемів відверненя тих інтеґралів т. в. до функций Абелевих, що — як легко ся догадати — творять послїдний уступ сеї дуже інструктивної книжки. Книжка ся не лишає анї одної квестиї і ві висліїдів, бо як самі автори зазначують, змаганем їх було представити цїлу теорию без нїяких т. зв. улекшень і подати такі методи, які би надавали ся і до случаїв загальних і до специяльних так, щоби в данім разї дїйсно можна було і рахунки перевести. Че ез се книжка стала обемиста, але і пожиточна, особливо до т. зв. „Selbststudium“.

В. Л

P. Barbarin. La géométrie non euclidienne. (Paris, C. Naud, 1902. ст. 79).

Книжка ся належить до видань т. зв. видавництва „Scientia", про яке була згадка в Збірнику мат. прир. VIII. 2. — Великий розвиток та значіне ґеометриї неевклїдової, яке завдячує она ученим тої міри, що Лобачевський, Bolyai, Riemann, Beltrami, Helmholtz, Tilly, Klein, Cayley, Lie, Poincaré т. н., та значіне, яке ґеометрия та має для нас під зглядом теориї пізнання, вимагає, щоби бодай в загальних начерках ей висліди стали власностию цїлої суспільности; подекуди, пр. в Швайцариї, є она предметом науки шкіл середних. Найбільше значіне ей в тім, що она показує, що догматичне понимане простору, яке до нині усюди панує, не є одиноке, та хто знає, чи оно є дійсно правдиве. Та подати в начерку погляд на метаґеометрию є дуже тяжко, а найбільша трудність є як раз у в тім, що чоловік так привик до нинїшного погляду просторного, до теориї лїнїй рівнобіжних, що не так легко дасть ся переконати, що і иньші погляди є можливі. В невеличкій своїй книжочці автор щасливо поборов сю трудність, показавши історично, яку судьбу переходила справа рівнобіжности лїнїй від часів ґенія старинного сьвіта Евкліда до великанів нинїшного математичного сьвіта, як Лобачевский та Riemann.

Сей трактат не є вправді так основний, як пр. великий трактат Кляйна, але яко елементарний трактат можна його ставити на рівні з трактатом Mansiona. Виклад дуже інструктивний, украшений відбиткою з „елементів" Евкліда та деякими портретами; одна лиш є хиба, а се, що автор підніс високо заслуги Tilly'ого (Француза), а промовчав імена такі, як Beltrami, Helmholtz та Lie, що немало причинили ся до поступу метаґеометриї. Місто тяжких термінів „géométrie lobatschewskienne" та „riemannienne" лїпше уживати термінів Кляйна „ґеометрия ґіперболїчна" та „елїптична" (ґеом. евклїдова = ґеом. параболїчна). *В. Л.*

G. Loria. Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. (Leipzig, B. G. Teubner 1902. XXI+744 ст.+17 таблиць); übers. von F. Schütte.

В прекрасній сїй книжці подав знаменитий італїйский ученый перегляд всїх кривих плоских, альґебраічних та переступних, які в протягу віків увійшли в ґеометрию. Книжка ся обіймає сїм великих розділів, з яких кождий розпадаєсь на кілька або й кількана-дцять уступів. Найкоротший є роздїл перший, що в трох уступах обіймає просту, коло та криві стіжкові, та і то більше з історич-

ного становиска; очевидно автор не думав тих творів розбирати ближше, тому, що до тих творів маємо нині множество усяких підручників. За се тим основнійше представив всї иньші криві, що звичайно в підручниках ґеометриї лиш принагідно є трактовані. Я не маю цїли розбирати основно цїлого змісту сеї книжки, згадаю лиш коротко, що розділ другий обнимає криві третого порядку (в 14 уступах), розділ третий криві четвертого порядку (16 уступів), розділ четвертий спеціяльні криві висшого порядку (6 уступів), пятий спеціяльні альґебраічні криві якого небудь порядку (19 уступів), шестий криві переступні (25 уступів), розділ семий криві виведені (12 уступів). Кождий розділ починаєсь загальною теориєю і поділом відповідних кривих, а опісля слїдують описи поодиноких кривих даної ґрупи та їх власности. Нема дословно кривої, яка-б не найшла в тій книжцї своєї моноґрафії, без огляду на се, чи крива та представляє математичний інтерес, чи лиш може фізикальний; тому то по при криві, що мають інтерес математичний, як пр. конхоіди (що виступають в квестиї поділу кута на три части), находимо ту криві Lissajous, ґерпольгодиї, криві електромаґнетні etc. Книжку кінчить короткий погляд на історичний розвиток теориї кривих плоских, шкіц справдї прекрасний, як в загалї всї історично математичні начерки заслуженого автора, та погляд на т. зв. криві панальґебраічні; так називає автор криві інтеґральні незведимого рівнаня ріжничкового першого порядку:

$$F(x\,y\,y') \equiv \sum_{r=0}^{r=n} f_r\,(x\,y)\,y'^{n-r} = 0.$$

Автор показує, що ті криві мають ряд свойств анальоґічних до свойств кривих альґебраічних.

Книжку кінчить спис імен та річий і збірка 17 таблиць з 174 хорошо викінченими фіґурами (з показчиком). Зверхна еї форма (з нїмецкім переводї увійшла она в збірку підручників математичних, видаваних звісною фірмою B. G. Teubner в Липску) дуже гарна. Взагалї книжка ся робить незвичайно миле і додатне враженє і подивляти треба працю автора, що підняв ся опрацьованя так обширного материялу і що так красно свою цїль осягнув. *В. Л.*

E. Borel. Leçons sur les séries à termes po[illegible] fs. (Paris, Gauthier-Villars 1902. VI+91).

Се з черги четверта книжка французского математика, [illegible] ідносить ся до теориї функцій (згадки про три попередні [illegible] ай

Збірник мат. пр. том VI. 2 et sqts); обіймає она в шістьох роздїлах виклади, що їх автор читав в р. 1900/01 в „Collège de France".

Роздїл перший говорить про збіжність рядів, зложених зі сталих членів (мова ту, як взагалї в цїлій книжочцї, виключно про ряди з членами додатними); автор розбирає ту критерия збіжности першого і другого виду (першого, де виступає лиш один член, пр. $\sqrt[n]{u_n}$ (Cauchy), другого, де виступають два члени $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (d' Alembert)) Cauchy, d' Alembert'a, Bertrand'a і теореми P. du Bois-Reymond'a та Hadamard'a; теореми ті показують, що наколи маєм ряд дуже слабо збіжний (розбіжний), то можна его все зробити дуже добре збіжним (розбіжним), наколи ся помножить его через величини, які необмежено ростуть (малїють). Щоби в случаю збіжности було:

$$\lim_{n=\infty} [\varphi(n)\, u_n] = 0,$$

де $\varphi(n)$ є величина необмежено ростуча, вистане (і се є необходима вимога збіжности), щоби було:

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Роздїл другий займаєсь збіжностию інтеґралів. Ту виступають слїдуючі критерия збіжности. Наколи маєм функцию малїючу $f(x)$ (все додатну), то щоби інтеґрал $\int_a^\infty f(x)\,dx$ був збіжний, є конечне, щоби:

$$\lim_{x=\infty} x\, f(x) = 0.$$

Дальші критерия подав Єрмаков. Інтеґрал $\int_a^\infty f(x)\,dx$ є збіжний, наколи для дуже великого x є постійно:

$$e^x f(e^x) < k f(x),\quad k < 1;$$

на случай $e^x f(e^x) > k f(x),\quad k > 1$

інтеґрал сей є розбіжний. З сего виходить далї теорем, який подав еще ...chy, а котрий звучить:

...ля сего, чи є збіжний чи нї інтеґрал:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx,$$

є збіжний, або ні, ряд:

$$f(1) + f(2) + \cdots\cdots + f(n) + \cdots\cdots$$

Розділ третім розбирає автор теорію **росту** функцій (croissance). Ту творить автор вперед функцію $g(x)$, що для безконечно много вартостий змінної дуже мало ся ріжнить від e^x, а для безконечно много иньших вартостий x дуже мало ся ріжнить від e^{e^x}. Функция така росте — як кажемо — дуже **неправильно**. Противно функция росте **правильно**, наколи ѣї вартости ростучі дадуть ся порівнати з функциями простими (прим. коли $e^{x^\varrho} > \varphi(x) > e^{x^{\varrho'}}$, $\varrho > \varrho'$, то $\varphi(x)$ росте правильно).

Розділ четвертий подає критерия збіжности рядів водвійних і інтеґралів многократних. І так ряд

$$\sum\sum v_{\alpha\beta}$$

є збіжний, наколи:

$$v_{\alpha\beta} < \frac{1}{(\alpha+\beta)^{2+\varrho}} \qquad \varrho > 0$$

а розбіжний, наколи:

$$v_{\alpha\beta} > \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}.$$

Критерию сю можна узагальнити в сей спосіб, що згаданий ряд буде збіжний для:

$$v_{\alpha\beta} < \frac{1}{\alpha^\sigma + \beta^{\frac{1}{2}\sigma}} \qquad \sigma > 3.$$

Для інтеґралів істнують такі критерия: інтеґрал

$$J = \int^\infty \int^\infty \frac{dxdy}{x^\alpha + y^\beta}$$

є збіжний тоді, коли:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1.$$

Для інтеґралу многократного:

$$K = \int^\infty \int^\infty \cdots\cdots \int^\infty \frac{dx_1\, dx_2 \cdots\cdots dx_n}{x_1^{\alpha_1} + x_2^{\alpha_2} + \cdots\cdots + x_n^{\alpha_n}}$$

звучить ся критерия (конечна і достаточна):

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{a_i} < 1.$$

Пятий розділ обіймає теорию збіжности рядів степенних з одною змінною.

Наколи маємо ряд:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (0 < x < 1)$$

та назначимо:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \varphi(n) = n^p \quad (p \text{ додатне, вимірime або ні})$$

де p називає ся степенем сочинників, то степень функциї f(x) є $\omega\left(\frac{1}{p}\right)_x$ (де ω є степень функциї e^x; степень $\log x$ є ω^{-1}[1]), символ $\left(\frac{1}{p}\right)$ значить число зближене до $\frac{1}{p}$, $\omega\left(\frac{1}{p}\right)$ є степень функциї $e^{x^{\frac{1}{p}}}$).

Відворотну квестию, зі знаного степеня функциї f(x) найти степень єї сочинників розвязали Poincaré і Hadamard; показує ся, що ріст сочинників функциї може бути дуже неправильний, хотяй сама функция росте правильно.

Наколи маєм ряд:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$ (a додатне, $0 < x < 1$)

а ряд: $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ є розбіжний, так що точка $+1$ є особлива для функциї f(x), а возьмем (після Cesàro та Apell'a) для порівнання другий такий ряд:

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots \quad 0 < x < 1,$$

де $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$ є рядом розбіжним, то всегда буде в окруженю точки особливої:

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha,$$

де

$$\alpha = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

— —

[1] Ірим. степень функциї $y = x^p$ є p, функциї $y = x^p \cdot x^q$ є $(p + q)$, функциї e^x є $(\omega + n)$.

Теорем сей узагальняє ся так, що берем ряди $\frac{f(x)}{1-x}$ і $\frac{g(x)}{1-x}$ і тодї:

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta, \quad \text{де} \quad \beta = \lim_{n=\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n}.$$

Hadamard творить далї слїдуючі операциї:

$$f(x) = D^0 f(x)$$

$$\int_a^x f(x)dx = D^{-1}f(x)$$

$$\int_a^x [D^{-1}f(x)]dx = D^{-2}f(x)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

а через інтеґроване випадє:

$$D^{-m}f(x) = \int_a^x \frac{(x-z)^{m-1}}{(m-1)!} f(z)\,dz$$

Друга операция є D; єї значінє є:

$$D^{\alpha}x^m = m^{\alpha}x^m$$

$$D^{\alpha}f(x) = \sum a_m m^{\alpha} x^m.$$

При їх помочи доходимо до твердженя: Наколи функция $f(x)$ є скінчена і тягла, то ряд утворений з єї сочинників є або безглядно зглядний, або (наколи би ряд не був збіжний) можна єго звести до збіжности, наколи місто $f(x)$ положимо $D^{-\varepsilon}f(x)$ (ε достаточно мале).

В розділї шестім розбирає автор ряди о більшій скількости змінних. Тут заслугують на увагу слїдуючі теореми: Порядком функциї цїлковитої $F(z)$ є число ϱ таке, що

$$|F(z)| < e^{r^{\varrho+\varepsilon}}$$

де ε достаточно мале, а $|r| = z$ достаточно велике. Порядї цїлковитим функциї

$$f(xy) = \sum_0^{\infty}\sum_0^{\infty} A_{mn}x^m y^n$$

є порядок функції $f(zz)$ в z; наколи сей порядок в x є для $f(xy_0)$ (y_0 дана вартість додатна) ϱ, то він остає і для $f(xy_1)$, де y_1 є також число цїлковите яке-небудь.

Наколи $f(xy_0)$ має порядок ϱ, а $f(x_0 y)$ порядок ϱ', то цїлковитий порядок для $f(xy)$ є що найбільше $\varrho + \varrho'$.

Роздїл сей кінчать деякі уваги про спряжені лучі збіжности (лучі r і r' є спряжені, наколи ряд $f(xy)$ є абсолютно збіжний для всїх вартостий (xy) таких, що x є взяті з кола r, y з кола r') і про ряди синтаїматичні (Cauchy). Щоби дати поняте про того рода ряди, возьмім ряд: $\frac{1}{1-x-y}$; він дасть ся упорядкувати три способи:

а) $1 + \cdots + \frac{n!}{p!\,q!} x^p y^q + \cdots \qquad (p+q=n)$

б) $1 + (x+y) + \cdots + (x+y)^n + \cdots$

в) $\frac{1}{1-x} + \frac{y}{(1-x)^2} + \cdots$.

а) є збіжне для $|x|+|y|<1$, б) для $|x+y|<1$,

в) для: $\left|\frac{y}{1-x}\right|<1$, $|x|<1$.

Ряди того рода є синтаїматичні; в обсягах, де они є збіжні в разї уґрупованя в), є они розбіжні на случай уґрупованя а) або б). Ся увага Cauchy має незвичайну вагу в найновійших розслїдах Mittag-Leffler'a. *В. Л.*

E. Borel. Leçons sur les fonctions méromorphes. (Paris, Gauthier-Villars, 1903. VI. + 122).

В пятій з черги книжцї, що належить до циклю „Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions", подає автор виклад теорії функцій аналїтичних мероморфних, с. є. функцій аналїтичних, що мають бігуни (точки особливі) не лиш в безконечности, як т. зв. функциї цїлковиті, але і в скінченім віддаленю. Книжка складає ся з чотирох роздїлів і чотирох нот.

Перший уступ подає загальні уваги про функції аналїтичні змінної зложеної, про точки особливі і про спосіб представленя тих функцій в окруженю точок особливих; головну часть сего уступу обнимає звісний теорем Mittag-Leffler'a про представленє функції аналїтичної з скінченим або безконечним числом точок особливих, т. є. форму:

$$f(z) = \varphi(z) + \sum R_i(z) \qquad (z = x + iy)$$

де:

$$R_i(z) = P_i\left(\frac{1}{z - a_i}\right) + Q_i(z)$$

наколи a_i є бігуни функції f(z). Наколи G(z) є функція ціла з місцями зеровими a_k, то представити її можна після теорему Вейерштрасса добутком функций первих:

$$G(z) = G(o)\, e^{\Gamma(z)} \prod \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k} + \cdots + \frac{z^p}{p a_k^p}}$$

наколи функция є порядку p, т. є. коли сума $\sum \frac{1}{|a_k^{p+1}|}$ є збіжна.

Звідси слідує важне твердженє, що кожду функцию мероморфну можна представити яко квот двох функций цілих:

$$f(z) = \frac{F(z)}{G(z)}.$$

Другий роздїл займає ся рядом Taylor'a. Подавши коротко теорию збіжности ряду:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

отже теорию Cauchy, Pringsheim'a, Lecornu (після якого відворотність границї $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ для $n = \infty$ дає луч збіжности) та Hadamard'a (луч збіжности є $\frac{1}{l}$, де l є горішна границя виражена $u_n = \left|\sqrt[n]{a_n}\right|$ для $n = \infty$, отже для функций цілковитих є $\lim_{n=\infty} u_n = 0$), переходить автор до студиованя функциї на самім колї збіжности. Наколи функция мероморфна, представлена рядом Taylor'a, має на своїм колї лиш один бігун α, то істнує тодї границя така, що

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{a};$$

наколи би істнували два бігуни $\frac{1}{\alpha}$ і $\frac{1}{\beta}$, то тодї границя:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha\beta.$$

Наколи функция має бігуни $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \cdots \frac{1}{\alpha_p}$, то тоді вираження $\sqrt[n]{\Delta_n^p}$ стремить до границі $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p$, де:

$$\Delta_n^p = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+p-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+p-1} & a_{n+p} & \cdots & a_{n+2p-2} \end{vmatrix}$$

Аналоґічно границя $\sqrt[n]{|\Delta_n^{p+q}|}$ є рівна $\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_p \varrho^q$, де:

$$\Delta_n^{p+q} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+p+q-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n+p+q-1} & \cdots & & a_{n+2p+2q-2} \end{vmatrix}$$

$\frac{1}{\varrho}$ луч кола, в якім функция має лише бігуни прості $\frac{1}{\alpha_1}, \cdots \frac{1}{\alpha_p}$, а $\varrho_1 = |\alpha_1|$, при чім:

$$\varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \varrho_3 \geqq \cdots > \varrho_p > \varrho.$$

Горішна границя:

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|\Delta_n^r|} = R$$

де:

$$\Delta_n^r = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+r-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n+r-1} & \cdots & & a_{n+2r-2} \end{vmatrix}$$

а: $R = \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{p-h} \varrho_p^{r-p-h}$, $p - h + 1 \leqq r < p$.

Ті твердження що до границь бігунів подав Hadamard. Теореми ті стосує автор до функций мероморфних з цілковитими сочинниками, при чім розслїджує по при функцию:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

функцию:

$$F(z) = E(a_0) + \frac{E(10a_1)}{10} z + \cdots + \frac{E(10^{n^2} a^n)}{10^{n^2}} z^n + \cdots,$$

де $E(\alpha)$ є число цїлковите, що містить ся в α. Наколи $f(z)$ напише ся в формі:

$$f(z) = \sum \frac{b_n}{c_n} z^n,$$

то показує ся, що:

$$\sum \frac{b_n}{c_n} z^n \quad \text{і} \quad \sum \frac{E(b_n)}{c_n} z^n$$

мають ті самі особливости.

Дальшим незвичайно важним застосованем висліджів Hadamard'a є шукане місць зерових функций цілих. Метода та опирає ся на звіснім твердженю Cauchy: „Наколи маєм многочлен і відворотність его розвяжемо на ряд Taylor'a (або возьмем походну льоґаритмічну), то луч збіжности сего ряду дає безглядну вартість найменьшого з корінів даного многочлена". Методу ту застосували Runge і Hadamard до функциї цілої:

$$G(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \qquad (c_0 \gtrless 0)$$

через розслїджуване відворотної функциї:

$$\frac{1}{G(z)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$

яка є мероморфна і якої бігуни є зерами функциї G(z).

Уступ третий присьвятив автор теоремови Picard'a, який — як звісно — звучить:

„Наколи маєм функцию цїлу G(z) і дві сталі a, b ($a \gtrless b$), то, наколи рівнаня:

$$G(z) = a \quad \text{і} \quad G(z) = b$$

не мають корінїв, G(z) зводить ся до сталої".

Теорем сей розширює Borel на функциї мероморфні. Наколи G(z) є функция мероморфна, а три рівнаня:

$$G(z) = a, \quad G(z) = b, \quad G(z) = c \qquad (a \gtrless b \gtrless c)$$

мають обмежену скількість корінів, то G(z) зводить ся до виміримого дроба. Рівнаня, що мають обмежену скількість зер, називає автор **виняткови**ми (exceptionel); показуєсь, що функция цїла має що найбільше одно, мероморфна два рівнаня виняткові. Далї доказує автор, що функция цїла має лишь одно рівнанє виняткове, наколи єї порядок є числом цїлим, наколиж порядок не є числом цїлим, нема рівнаня виняткового.

Наколи маєм функцию мероморфну:

$$f(z) = \frac{G(z)}{F(z)}$$

порядку ϱ, і яку небудь иньшу функцию мероморфну $\varphi(z)$ пор. у низшого і возьмем рівнанє:

$$f(z) = \varphi(z),$$

то взагалї не будем мати нїяких рівнань виняткових, а наколи они будуть, то не може бути їх більше, як два.

Роздїл пятий займаєсь рядами дробів вимірних. Автор розбирав вперед ряд дробів, розложених на елєменти прості, форми:

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n};$$

ряд сей представляє функцию мероморфну тодї, єсли a_n росте неозначено (т. є. не стремить до означеної границї) і єсли ряд $\sum \left| \frac{A_n}{a_n} \right|$ є збіжний. Наколи ряд $\sum \frac{A_n}{z - a_n}$ не є збіжний, то можна зробити его збіжним через долучене певного многочлену до кождого его члена. Через долучене многочлена, що повстає з перших виразів розвиненя функциї $f(z)$ після степеней z, дістанем ряд канонїчний (кождий его поодинокий елємент буде функциєю вимірною одного бігуна); в случаю бігунів однократних буде ряд канонїчний мати форму:

$$f(z) = \sum \left[\frac{A_n}{z - a_n} - \left(\frac{A_n}{z - a_n} \right)_{\lambda_n} \right],$$

де $\left(\frac{A_n}{z - a_n} \right)_{\lambda_n}$ значить перших λ_n членів розвиненя $\frac{A_n}{z - a_n}$;

або: $$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{\lambda_n}.$$

Як звісно, ряди такі мають перворядну ролю в теорию Mittag-Leffler'a. Ряд такий є збіжний для всїх вартостий z, ріжних від a_n.

Наколи маєм функцию мероморфну:

$$f(z) = \frac{G(z)}{F(z)},$$

де F і G є порядку ϱ, то кажем, що розміщенє зер функциї $F(z)$ є звичайне, наколи:

$$|F'(a_n)| > e^{-n^{1+\varepsilon}},$$

а надзвичайне, наколи:

$$|F'(a_n)| < e^{n^{1+\varepsilon}}.$$

Автор доказує, що на случай звичайного розміщеня, коли бігуни є a_n, а резідуа $A_n = \frac{G(a_n)}{F'(a_n)}$, можна представити функцию мероморфну $f(z)$ в видї:

$$f(z) = f_1(z) + H(z),$$

де $f_1(z)$ є ряд канонічний:

$$f_1(z) = \sum \frac{A_n z^{\lambda_n}}{(z - a_n) a_n^{\lambda_n}},$$

а $H(z)$ функция цїла порядку ϱ.

Методи, якої автор уживає, можна ужити і тоді, коли ряд дробів виміримих не представляє функції мероморфної (отже случай загальнїйший).

Автор вводить далї поняте т. зв. **кривих збіжности**. Наколи маєм функцию мероморфну:

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}$$

з однократними бігунами і заложимо $|a_n| = r_n$, то все буде можна утворити контур многокутний з ограниченою скількостию вершків, який по черзї перетинає скінчене число колес r_n, та якого всї точки є віддалені від певної кривої C о віддалене меньше, як дане число ε. Такий контур є кривою збіжности. Функция $f(z)$ є на такім контурі рівномірно збіжна і дає ся інтеґрувати член за членом.

Дальше переходить автор до дробів нерозложених на елєменти прості пр.

$$\sum \frac{A_n}{(z - a_n)(z - b_n)}.$$

Наколи маєм ряд таких дробів:

$$f(z) = \sum \frac{P_n(z)}{Q_n(z)},$$

де степень P є меньший, як Q, і наколи ряд є збіжний для $z = \alpha$, і положимо:

$$z = \alpha + \frac{1}{Z},$$

то все буде можна написати:

$$f(z) = \sum \left[\frac{P_n\left(\alpha + \frac{1}{Z}\right)}{Q_n\left(\alpha + \frac{1}{Z}\right)} - \frac{P_n(\alpha)}{Q_n(\alpha)} \right] + f(\alpha)$$

і покаже ся, що ряд дробів виміримих буде рівномірно збіжн

В решті переходить автор до случаю надзвичайного розм ня бігунів функциї мероморфної:

$$\frac{G(z)}{F(z)} \text{ порядку } \varrho.$$

Наколи a є бігуном сеї функциї, отже $F(a) = 0$, то істнує твердженє слїдуюче:

„Єсли маєм рівнанє форми:

$$\varphi(x) + \psi(x) = 0,$$

де:

$$\varphi(x) = F'(a) + \frac{x}{2} F''(a)$$

$$\psi(x) = \frac{x^2}{3!} F'''(a) + \frac{x^3}{4!} F^{IV}(a) + \cdots\cdots$$

і контур C, де є постійно:

$$|\psi(x)| < |\varphi(x)|,$$

то се рівнанє має в контурі C такуж саму скількість зер, що і рівнанє $\varphi = 0$."

Книжку кінчать чотири ноти:

1) про зера функциї цїлих, де автор подає теорем Lindelöf'a: Наколи сочинники ряду цїлковитого:

$$\Sigma c_n z^n$$

сповняють нерівність:

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{\left[A_n (\log n)^{\alpha_1} \cdots\cdots (\log_\nu n)^{\alpha_\nu}\right]^{\frac{1}{\varrho}}} \qquad (\log_\nu n = \underbrace{\log\log\log\cdots\cdots\log}_{(\nu \text{ разів})} n)$$

то почавши від певного індексу n, будемо мати (якенебудь буде ε):

$$M(r) < e^{\frac{1+\varepsilon}{A\varrho^{\alpha_1+1}} r^{\varrho} (\log r)^{-\alpha_1} \cdots\cdots (\log_\nu r)^{-\alpha_\nu}}$$

наколи r (луч збіжности) перейде певну границю.

2) про порядок суми двох функциї цїлковитих (теорем P. Boutroux).

3) про суму резідуїв функциї мероморфної; ту маєм теорем Helge von Koch'a: „функцию мероморфну можна представити рядом многочленів, збіжним на цїлій площи (кромі точок особливих)."

4) про функциї quasi-цїлі і quasi-мероморфні (після Maillet'a).

Наколи $\psi_1(t), \psi_2(t), \cdots\cdots \psi_n(t)$ є функциї цїлі t, то функция

$$f(z) = \psi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + \psi_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \cdots\cdots + \psi_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$$

називає ся (після Maillet'a) quasi-цїла з сущно особливими точками $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$; наколи $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots \psi_n$ є мероморфні, то f(z) є функция quasi-мероморфна.

До тих функций, як показав Maillet, можна віднести много свійств функций цїлих і мероморфних, спеціяльно теорем Picard'a і его узагальнення.

Так отже в скороченю подали ми перегляд тверджень і теорий, що ся містять в тій книжцї; не уступає она що до змісту і легкого та ясного представленя, властивого Borel'ови, попереднім чотиром частям викладів автора; тож з нетерпеливостию ожидаєм заповіджені вже шестої части, що містити буде виклады про ряды многочленів. *В. Л.*

Dr. Pl. Dziwiński. Wykład matematyki. Kurs I. Zasady geometryi analitycznej i analizy wyższej. Tom I. (Lwów 1902. XIX + 928).

Книжка ся є одним з томів видавництва п. заг. „Biblioteka politechniczna", що виходить у Львові заходом збору учительского школи політехнїчної. Подає она в 61 викладах, ілюстрованих численними примірами та вправами, материял математики висшої в тім обсягу, як его потребує молодїж технїчна. Тому-то книжка ся не подає одної якоїсь спеціяльної партиї аналїзи математичної, всесторонно обробленої, але подає головно ті уступи математики, які технїкови є потрібні в дальших его студиях чисто технїчних. Нинїшний том подає в головнім начерку теориї і методи геометриї аналїтичної в площи та просторі, початки аналїзи висшої, рахунок ріжничковий та теорию визначників; велику часть книжки обнимає теория кривих стіжкових та їх спеціяльні свійства. Виклад є незвичайно прозорий, ясний, попертий численними примірами, так що можна справдї винести з сеї книжки велику користь. Про вартість сеї книжки промавляє найбільше сей факт, що автор оголосив сю книжку яко вислід кільканацятилїтних викладів в львівскій політехнїцї, отже з досьвіду знав, які уступи і який спосіб викладу є для технїчної молодїжи найвідповіднїйші. Під зглядом зверхнім видана є книжка бездоганно. *В. Л.*

K. Weierstrass. Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten. (Mathem. Werke von Weierstrass. Bd. IV. bearbeitet von G. Hettner u. J. Knoblauch, Berlin, Mayer u. Müller 1902) ст. XIV. + 631.

Величезний сей том обіймає виклади покійного математика нїмецкого про функциї Абеля і їх основи (отже теорию об[illegible]ву альгебраічного, функциї виміримої пари (xy), теорию інтегралів

і функций Абеля, теорию функций Θ і ϑ). Цїлий виклад опирає ся на зовсїм оригінальних основах, як впровадженє і застосованє функций $H(xy)_\alpha$, $H'(xy)_\alpha$, $H(xy\,x'y')$, функций періодів $E(xy)$ і $E(xy\,x_1y_1\,x_0y_0)$, що при їх помочи дасть ся представити кожда вимірима функция $F(xy)$ та інтеґрали абелеві трох родів. Ідеї ті великого ґеометра нїмецкого до тепер звісні були лиш ученикам покійного і їх ученикам, а не були нїґде оголошені друком. Дещо свого часу оголосив був O. Biermann, а в послїдних часах опер проф. львівского унїверзитету Др. Пузина свій виклад двотомовий функций аналїтичних (особливо том другий) на теорії Weierstrass'a. Тому-то оба впорядчики сего тому (оба професори унїверзитету берлїньского) через видане сего тому прислужили ся дуже для науки, бо присвоїли загалови математичному ідеї вітця новійшої аналїзи. Великий in 4^0 виданий том подає цїлу теорию в 34 розділах; зазначити треба, що том сей почав ся друкувати еще за житя покійного, але зараз з розпочатєм друку (1897.) Weierstrass помер. — Книжка видана, як і попередні томи, бездоганно. *В. Л.*

B. Riemann: Gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausg. von M. Noether u. W. Wirtinger. (Leipzig. B. G. Teubner 1902. ст. VIII. + 116).

Від часу, коли перед 10 роками вийшло друге видане творів великого математика нїмецкого, найшло ся еще дещо нового материялу в видї додатків до его викладів. Сї материяли вийшли тепер друком; они обнимають виклади про загальну теорию інтеґралів альґебраічних рівнань ріжничкових (p. 1861/2), інтеґрали лїнійних рівнань ріжничкових другого порядку в точцї розгалуженя (нота з p. 1856/7), додатки до викладу про ряд ґіперґеометричний (p. 1858/9) і усякі математичні ноти (про форми тета, про періоди ґіперелїптичних інтеґралів etc.) *В. Л.*

Dr. Siegmund Günther, Astronomische Geographie, Leipzig, Göschen 1902. 170, 16^0.

Дуже добра книжочка зі знаної збірки маленьких компендиїв Gö[illegible]'a. Подає в коротцї всї важнїйші дані з астрономічної ґеоґра[illegible], всюди беручи огляд на історичний розвиток науки. Важнїйші три[illegible]етричні формули подані. На увагу заслугує коротке, але пог[illegible]бране метод означуваня ґеоґрафічної ширини і довжини, та [illegible]лякс тїл небесних. Неслїдні уступи посьвячені сьвітовим сил[illegible]м та праву ґравітациї. Книжочка грішить, подібно як і більші

книжки Günther'a тим, що представлене проблемів не є ані елементарне ані par excellence наукове, а таке посередне становисько, як у Günther'a звичайно, обнижає вартість матеріялу так совістно зібраного. *C. P.*

H. Andoyer, Théorie de la lune. Paris, Naud, 1902. (Scientia, Phys.-Math. 17.) 86, 8°.

Заключає она коротке представлене уступів небесної механіки, що відносять ся до місяця. Особливу увагу посьвячує автор т. зв. совітчній теорії руху місяця, де виходить ся з заложеня, що сьвіт складаєсь лиш з сонця, землі і місяця, а инші тіла небесні мають лиш другостепенне значіне. Вивівши рівнаня сего проблему трох тіл автор обчисляє геометрично головні неправильности довжини, ширини і паралякси місяця методою неозначених сочинників, подаючи коротко істоту рівнаня осередка, рівнаня річного, варияції, евекції і рівнинн параляктичного. В IV., V. і VI. уступі автор обговорює другостепенні нерівности руху місяця, его нерівности періодичні і нерівности вікові. Книжочка мабуть призначена лиш для орієнтації математикам, бо не подає нових теорій ані способів обчисленя, опираючись головно на працях Hansen'a, Newcomb'a Delaunay'a, Brown'a, Hill'a, Tisserand'a, Poincaré і т. д. *C. P.*

Dr. Wacław Laska. Astronomia sferyczna. Lwów, 1901. 87 вел. 8°.

Є се підручник уложений для слухачів політехніки. На увагу заслугує елементарне, але прозоре, представлене трансформації сорядних і велике число практичних вказівок до обчислювання обсервацій та уживаня ефемеридів. Уступ про час і его означене також ясний, лиш прим. на стор. 20. на жаль зовсім зле переведений, бо через недогляд введено одну злу вартість. Взагалі в книжці дещо більше похибок друкарских і недрукарских, як пристало на академічний підручник. Теория інструментів звязала і ясна, річ дуже добре представляєсь. Натомість автор не зібрав разом способів означеня довжини і ширини географічної, що дужеб ся придало. Разить дещо виписуване примірів зі старших підручників (прим. стор. 80), та хочби таке твердженє, що призматове колесо те ер майже виключно уживаєсь вміcто секстанта. Славний Jordan, великий практик, не дуже одушевляєсь прикметами сего кол а, а моряки по старому й до тепер в переважній більшости вжив ть секстанта. *C. P.*

A. Gleichen. Lehrbuch der geometrischen Optik. (B. G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern, Leipzig u. Berlin 1902). ст. XIV. + 511.

Книжка ся подає виклад геометричної оптики в 20 обширних розділах і то виклад не лиш теоретичний, але ілюстрований примірами практичними, як описом люпи, люнет, мікроскопів і знарядів фотографічних. Становиско автора найлекше пізнати з вступних его слів, де каже між иньшим ось-що: „я старав ся тримати правила, якого правдивість яко учитель стократно пізнав, а се, що погляд — то мати усякого знання; і тому-то я старав ся виходити все від простого конкретного случаю, а аж опісля навязував до сего загальну теорию". Через се вправді книжка стала більше обемиста, але зискала на вартости яко підручник науковий. Перейдім коротко зміст сеї книжки.

В перших чотирох розділах (ст. 1.–44.) виводить автор на основі теорий фильования права відбитя і заломаня сьвітла на случай, коли границна поверхня є плоска (під заложенем, що жмуток лучів сьвітла є астиґматичний[1])), та теорию призмату і системів призматів на случай, коли сьвітло є однородне (отже найменьше збочене, положене образу — теоретично і на примірах)

Слїдуючі чотири розділи (ст. 46.—109.) обнимають теорию та права відбитя на случай поверхний кулистих (одної або систему сконцентрованих поверхний) і теорию сочок (автор відріжняє сочки додатні і відемні); всї тї розділи опрацьовані дуже гарно і інструктивно.

Розділ девятий подає теорию аберацій першого порядку (аберация поверхні кулистої, тонької сочки, теорию Euler'a і Abbe, найменьша аберация), розділ десятий займає ся астиґматизмом і комою при заломаню на поверхнях кулистих, одинайцятий штучним розширенем царини відтворення (Abbildungsgebiet), дванайцятий ортоскопиєю (ідеальний і правдивий біг лучів), тринайцятий розщіпленем сьвітла, чотирнайцятий кривиною образів, пятьнайцятий правами фотометрії, а шіснайцятий оком людским.

Слїдуючі три розділи, що обнимають другу половину книжки (ст. 270.–511.) подають теорию і практику найважнїйших знарядів оптичних, а се теорию і практику люнет і люп, мікроскопів, обєктивів фотографічних (сей розділ залюбки через автора трактований), епі роскопів і фотометрів. В тих уступах подані уваги історичні

[1]) Астиґматизмом називаєм власність сьвітляної филї *не*концентрованя ся в одній точ ьна концентрация має пр. місце в филї кулистій).

та численні рахункові приміри, так що автора можна подивляти за величезний наклад праці, яку вложив в ту часть книжки; видно се особливо в роздїлї про обєктиви фотографічні, де автор розібрав велике число усяких знаних та уживаних системів.

Коли в кінци додамо, що до зрозуміня теоретичних виводів сеї книжки вистарчають початки рахунку висшого, що виклад усюди прозорий і педагогічно ведений, то можем сьміло сказати, що сю книжку можна поставити на рівнї з знаними підручниками Чапского, Heath'a т. п. — Зверхний вигляд книжки хороший. *В. Л.*

C. Arldt. Die Funkentelegraphie. (Leipzig, T. Thomas 1903. ст. 72).

В виду поступів, які зробила телєграфія без дроту від часу перших проб Marconi'ого, книжочка Арльдта є дуже актуальна. Є се властиво виклад, що єго автор читав в нїмецкім „Flotten-Verein" в Берлїнї, а попереджає єго (на 6 сторонах друку) вступ професора полїтехнїки берлїньскої Flamm'a про значінє сеї телєграфії для новійшої маринарки. Сам автор подає вперед теорию іскри електричної і єї дрогань, теорию конденсатора, індуктора, проривачів (проривач молотковий, ртутьний, турбіновий, Wehnelt'a), резонатора Гертца та рурки Branly'го, теорию математичну дрогань в дротї, далї описує перші проби Marconi'ого і складові части єго апарату, систем Braun'a та актуальний нинї систем Slaby-Arco, телєграфію многократну та переносну, а врештї уряджєня ріжних стацій нїмецких (Берлїн, Cuxhaven, Bremerhaven і т. п.) та кораблїв. Цїкаву книжочку кінчить погляд на теперішний стан телєграфії бездротної; єї вартість підносить 75 хорошо виконаних ілюстрацій. *В. Л.*

A. Voller. Elektrische Wellentelegraphie. (Hamburg, L. Voss 1903. ст. 52, 17 ілюстрацій).

Є се популярний виклад про ту саму квестию, яку розбирає попередна брошура; автор виголосив єго на 72. з'їздї лїкарів і природописцїв нїмецких в Гамбурзї. Виклад украшений 17 ілюстраціями. *В. Л.*

H. Kayser. Die Elektronentheorie. (Bonn, Röhrscheid u. Ebbecke 1903. ст. 32).

Є се виклад, що єго автор читав в авлї університету в — ві в день імяннн цїсаря Вільгельма (27. I. 1903.). В нїм подає ко ткий начерк теорії електронів і поглядів, що ся з сею новою теорією фізичною вяжуть. *В. Л.*

Dr. Karl Hofmann: Die radioactiven Stoffe nach dem gegenwärtigen Stande der wissenschaftlichen Erkenntniss. (Leipzig 1903. Verl. J. A. Barth стор. 1—54).

Сю невелику книжочку видав автор в тій цїли, щоби познакомити ширші круги з лучистими тїлами і їх дїланями. Вправдї до тепер не бракло в тім зглядї праць, що мали рівнож то само на цїли, однак були то працї, що займали ся тілько декотрими тїлами або доказували декотрі їх свійства. Длятого автор уважає за потрібне подати цїлість здобутків на тім поли і то тим більше, що ся наука в послїдних часах надзвичайно скоро поступила вперед. Відкрите лучів X дало спонуку дослїдникам до шукання за лучами, що не лишень суть виливом розбросня електричного, але що їх висилають якісь сталі тїла. Автор зіставляє коротко старання дослїдників і їх здобутки на тім поли. Відтак переходить по черзї відкриті лучисті тїла і описує їх свійства стверджені многими ученими. І так описує насамперед свійства урану, відтак вісмуту, раду, олова і тору. Відтак застановляє ся над лучистостию індукованою в загалї, а вкінци над лучистостию в воздусї атмосферичнім. Вкінци зіставляє всї дотеперішні гіпотези про причину дїланя лучистих тїл, а не заявляючи ся за жадною з них стверджує лишень то, що відкрите лучистих тїл становить важний крок на цїлком передтим незнанім поли Фізики і хемії. *С. М.*

Jan Biłyk: Soczewki jako podwójne zwierciadła. (Sprawozdanie c. k. gimnazyum w Kołomyi 1902 ст. 1—30).

В сїй розвідцї старає ся автор доказати, що погляд, який подекуди стрічав ся, якоби в просторі за сочкою лежачім з противної сторони предмету повставали виключно образи дїйсні, а по сторонї, де находить ся предмет, лишень образи мнимі, є неправдивий. Рівночасно виказує, що в першім і другім просторі могуть повставати так образи дїйсні, як і мнимі. Ся розвідка складає ся з трох частий; в першій розбирає автор теоретично залучаючи відповідні фіґури повставанє образів в зеркалах двуплоских, вгнутоплоских і випукло-плоских, в другій части є мова о зеркалах вгнутих, а в третій о зеркалах випуклих. Розвідка та доволї ясно написана; немило лиш ... вражає брак спису лїтератури, котрою покористував ся авт... Додати треба, що если ся розвідка вийшла накладом автора, то ...лше був би зробив автор, наколи-б був видав єї перевівши на язи... руский, бо тим збогатив би до нинї на жаль дуже убогу руску лїт...туру. *С. М.*

Д-р Іван Пулюй: Непропаща сила. (У Львові, літер. наукової бібліотеки ч. 5. ст. 53. р. 1901).

Є се передрук викладу звісного нашого вченого, проф. політехніки праскої, викладу, що давнїйше вийшов накладом тов. „Просьвіта“. Змінена лиш правопись, а подекуди язик (змінила се здавсь редакция літ. наук. бібліотеки). Про зміст не беру ся судити, раз тому, що се передрук, друге, що імя шановного автора само говорить про стійність сеї популярної книжочки. Завважу лиш ее, що ліпше місто терміну „непропаща сила“, що колись за причиною Гельмгольтца був в моді, ужити було загально принятого терміну „непропаща енергія“. Говорячи про „непропащу силу“ автор повинен був може також згадати про ей „тїнь“, енергію страчену (ентропію); та се очевидно ні троха не обнижає вартости сеї книжочки. Редакция літер. наукової бібліотеки видаючи в друге сю книжочку та змінюючи ей язик повинна була в першій мірі звернути увагу на наукову термінольогію; такі терміни, як „електрика“, „углерід“ (місто вуголь), „квасорід“ (місто кисень), „вугляний квас“, „пластинка“, „шпулька“, „ключовий дріт“, „електрико-магнетичний“, „роздає гук“ і и. не повинні являтись в другім виданю книжочки. На ст. 12. пояснює редакция слово „еквівалент“ словом „рівнобіжник“, що очевидно є зовсїм хибне (рівнобіжник = Parallelogramm, еквівалент = рівноважник). *В. Л.*

Михайло Рибачек. „Льогічна будова математичних доказів“. (Коломия 1902. стор. 26).

В звіті рускої гімназиї в Коломиї за 1901/2 р. шк. подає п. Р. по кількох замітках загальнїйших про науку математики, а особливо про геометрию Евкліда, подрібнїйші замітки про прикмети і роди доказів, а опісля основно поясняє будову доказів синтетичних і аналїтичних. При першій групі наведено і пояснено докази невпрост, а при другій докази зі схожости і через уначнене, а закінчено розвідку поясненями про формальну сторону математичних тверджень. Розвідка визначаєсь ясним викладом предмету і чистотою мови. *Я. М.*

Ю. Гірняк. Ненастанна деґрадация енергії — конечна проява і причина всякого руху і жита в природї. (Лїт. р. Наук. Вістник, том XXI. р. 1903. ст. 73.—83).

В короткім начерку говорить ту автор про переміни та деґрадацию енергії, сего „spiritus movens“ усего руху та житя в п і-

родї. Деґрадация енергії відбуваєсь без перерви, а єї вислїд, то перехід в тепло одностайно розміщене в просторі, т. зв. ентропію, що стало стремить до „maximum“. Та хотя автор в двох місцях говорить про ентропію, но не пояснює сего понятя як слїд; очевидно для фахового фізика справа ся вповні ясна, але чи нефаховий профан — а для таких статя ся писана — зрозуміє пр. уступ третий з долини ст. 82., річ бодай для мене сумнівна. Згадуючи на ст. 77. імена великих фізиків, що завдяки їм засада захованя енергії приняла ся загально і прибрала виразьну форму в цїлій фізицї, пропустив автор імя одного з найбільших, льорда Кельвіна. Автор опирає ся на ст. 80 et sqts. на перестарілих обчисленях Ремайса з р. 1881, де температура сонця подана на 50000° С.; та новійші поміри показують, що температура та, хоть і як висока, не досягає повисшого числа (пор. пр. J. Scheiner: Strahlung u. Temperatur der Sonne 1899. ст. 58. sqts). — Та по при сї хиби артикул написаний дуже живо і читаєсь его з заінтересованем; а що він збільшає у нас так мало еще розвинену популярну природописну лїтературу, то авторови за его труд належить ся щире признанє. *В. Л.*

„Деякі практичні правила подїльности чисел“ подав: Др. Володимир Левицкий. В 3. числї „Учителя“ з 1903. р. подав др. Вол. Лев. правила подїльности чисел через 7, 13, 17, 19, розумієсь не вдаючись в їх математичне виведенє і узасаднене, бо ходило о поданє лиш тих правил, які можуть віддати в практицї користні прислуги. — Для пізнаня, чи число подїльне через 7, наведено три правила, два перші з них, хотяй можуть бути примінені до більшецифернх чисел, оказують ся найнаручнїйшими при трицифернх, — третє, подане за італ. математиком G. Loria, примінити мож до чисел більших. — Для пізнаня подїльности через 13, 17 і 19 подано по одному правилу. *Я. М.*

„Проба девяткова“. Подав др. Володимир Левицкий. В семім числї тої самої часописи з 1903. р. подав др. Л. простий спосіб, як можна провірити, чи вислїд додаваня, відниманя, множеня або дїленя звичайними числами єсть вірний. Проба ся основуєсь на фактї, що кожде число подїлене через 9 дає таку саму решту, як єї поперечна сума, а в практицї надаєсь сеся проба особливо до пр вірюваня сум в касових книгах. — На тій самій засадї сказати м жна, яку цифру счеркнув хтось з ріжницї двох чисел уложених з яких самих цифр. *Я. М.*

Перегляд важнїйших журналїв математичних[1]).

Archiv der Mathematik und Physik. Серия трета, том II. зошит 1.—4. (1901. і 1902). Зміст: R. Schüssler: Про кола подвійно стичні до перерізів стіжкових. M. Hamburger: Новий вивід функций кулї. G. Mittag-Leffler: Про обсяг збіжности ряду Bernouilli. E. Phragmén: Про останки ряду Taylor'a в формі Cauchy та Lagrange'a. H. Heun: Значінє засади d' Alembert'a для системів цїпких та для механїзмів вязевих. R. Funck: Конфіґурация $(15_6, 20_3)$, єї аналїтичне представленє та відношенє до певних альґебраїчних поверхний. L. Matthiessen: Розвязка ґоніометрична альґебраїчних рівнань перших чотирох степенів. E. Czuber: Про обводню кривих і площий. P. Mansion: Доказ теорему Legendre'a. R. Lehman-Filhés: Аналїтичний вивід твердженя про рівнобіжник сил. L. Müller: Про твердженє Steiner'a і єго відношенє до конфіґурациї двох вписаних і описаних чотиростїнників. K. Zindler: Про скрут лїнїй ґеодетичних в точцї поверхні. W. F. Meyer: Доповненя до тв. Fermat'a і Wilson'a. C. Stephanos: Уваги до теориї сил осередних. E. Janisch: Увага до теорему п. Цвойдзіньского. O. Lummer: Нота до розвідки про важність права Дрепера. O. Lummer: Права чорного промінюваня і їх практичне значінє. W. Nernst: Значінє метод і теорий елєктричних для хемії. P. Stäckel: Про збіжність рядів триґонометричних. H. Hertzer: Період дроба десяточного для $\frac{1}{p}$, де p є число перве. E. Lampe: Два листи C. G. J. Jacobi. G. Loria: Про деякі елєментарні проблєми ґеометриї начеркової о 3 і 4 розмірах. A. Kneser: Додаток до питаня про найвлучнїйший вид кінцїв куль. H. Schubert: Умови рівноваги для чотирох сил, що дїлають прямовісно до цїпкої простої. K. Schwering: Скорочена розвязка задачі Ейлєревої: $x^3 + y^3 + z^3 + v^3 = 0$. K. Schwering: Застосованє теорему Абеля до розвязки рівнань діофантових: $x^3 + Ay^3 = z^3$ і $x^3 + y^3 = z^3$. G. Majcen: Про конструкцийне випроваджене цикльчних площ для стіжка і вальця. K. Hensel: Аритметичні свойства факториялів. T. J. I. Bromwich: Потенциял простої поверхні. S. Jolles: Синтетична теория моментів відосередних і безвладности плоского кусника поверхні. R. Müller: Історичні і критичні уваги про понятє подібних і подібно положених перерізів стіжкових. Ґ-цензиї, примітки.

---

[1]) Пор. Збірн. мат. прир. т. VIII. 2.

Яко додаток долучені до того тому звіти матем. берлїньского товариства. Їх зміст: J. Weingarten: Одно тверджене гидродинаміки. A. Kneser: Нове узасаднене науки про пропорциї та подібність незалежно від аксіому Архімеда і понятя неспівмірности. E. Lampe: Про одно питане з теорвї середних вартостий ґеометричних. F. Kötter: Доказ теорему Jacobi про зложене руху кружала з інверзий двох рухів Poinsot'a. K. Heun: Про механїку Гертца.

Серия трета, том III, зошит 1.—4. (1902). Зміст: V. Kommerell: Рівнане і свойства поверхний руровых. L. Grossmann: Нові звязи в царинї двочленних сочинників. Fr. J. Studnička: Додаток до науки про відворотні рівнаня. C. Koehler: Про кляспфікацию кривих і поверхний другого степеня. A. Rotth: Фізикальні проблєми машини з одностайним токомь. L. Ripert: Конструкция ґеометроґрафічна осий елїпси, наколи в звісні що до величини і положеня два проміри спряжені. J. Neuberg: Посвоячене між простою а ей метом в віднесеню до трикутника. C. Koehler: Про кляспфікацию кривих і поверхний другого степеня (конець). K. Vahlen: Про кубічні конструкциї. G. Hessenberg: Про докази тверджень о точцї перерізу. L. Heffter: До теорвї вислїдників двох лїнїйних однородних рівнань ріжничкових. F. G. Teixeira: Про криву вложничу. F. Fitting: Дальший додаток до узагальненої задачі коникової (в шахах). G. Landsberg: Одна задача пермутацийна. M. Hamburger: Промова в память І. Л. Фухса. P. Stäckel: До ґеометриї неевклїдової. A. Massfeller: Проста розвязка проблєму Апольонія в площи. R. Güntsche: Додаток до ґеометроґрафії. R. Sterneck: Про скількість розкладів цїлого числа на шість додатників. W. Ludwig: Про ϑ-криві гіперболь оіда з одною поволокою і гіперболїчного парабольоіда. P. Kokott: Теорем додаваня функций елїптичних в формі ґеометричній. E. Lemoine: Перетворене тягле в трикутнику. E. Lemoine: Перетворене тягле в чотиростїннику. C. Isenkrahe: Нові твердженя про корінї рівнань альґебраічних. O. Lummer: Правила чорного проміньованя і їх застосоване. Рецензиї, примітки.

Звіти мат. берлїньского товариства, долучені до сего тому, містять: F. Müller: Про значіне часописий для математичної літератури і для математично-історичних розслїдів. M. Hamburger: Предст влене двоперіодичних функций яко квоти функций тета. E. Budde: Ко отка увага до теорвї вирів Helmholtz'a. M. Koppe: Рух кружала. A. ler: До теорвї знарядів рисункових. Письмо привітне мат. тов. пр вілейнім обходї докторскім Дедекінда. K. Hensel: Про аналїтв і функциї і альґебраічні числа. G. Hauck: Про невластиві мети. H. issner: Механїчна анальоґія до пружности. E. Budde: Про

ґрупу звичайних рівнань ріжничкових другого порядку між двома змінними. R. Rothe: Уваги про спеціяльний криволїнійний систем сорядних. H. Opitz: Питане про огинищеві лїнії дуже тонкого астиґматичного жмутку лучів. G. Hessenberg: Про рівнане лїній ґеодетичних. R. Skutsch: Ґрафічний розклад сили на шість складових з приписаними лїнїями ділення. J. Knoblauch: Доказ співзмінности Christoffel'a.

Mathematische Annalen. Том 55. зошит 3. і 4. р. 1902. містить: M. Noether: Ch. Hermite. E. Weber: Теория систему рівнань Pfaff'a. H. Koch: Про Рімання функцию чисел первих. M. Dehn: Про обєм. E. Wendt: Про спеціяльну клясу ґруп. N. Nielsen: Нота про збіжність ряду Neumann'a функций вальцевих. E. Christoffel: Теория перерізів. F. Dalwigk: Уваги про твердженє о подвійних рядах Вейерштрасса і про теорию рівномірно збіжних рядів. L. E. Dickson: Ґрупи надортоґональні. D. Francesco: Рух тїла цїпкого в просторі з постійною кривиною. K. T. Vahlen: Про рухи і числа заложені. P. Muth: До ґеометричного значіня незмінників плоских посвоячень. J. Kürschák: Відмірюване довжин. M. Brendel: Увага до артикулу про інтеґроване частне.

Том 56. зошит 1. 2. 3. р. 1902. містить: P. Gordan: Співчасний систем двох квадратових чвіркових форм. E. Neumann: До інтеґрованя рівнання потенцияльного при помочи методи C. Neumann'a середної арптметичної. D. Mirimanoff: Корінї кубічні чисел первих і множене заложене в функциях елїптичних. W. Jacobsthal: Асимптотичне представлене розвязок лїнїйних рівнань ріжничкових. J. Kürschák: Про перетворене частних рівнань ріжничкових в рахунку варияційнім. S. Epsteen: Ґрупи, що спадають з їх ґрупами долученими. A. Kneser: Додатки до теориї і примінення рахунку варияційного (II. часть). A. Markoff: Про неозначені форми квадратові трійкові. W. Dyck: Промова C. G. J. Jacobi, найдена в паперах F. Neumann'a. H. Kühne: Співчасні незмінники двох до себе противзмінних системів і їх примінене до згинана множінний. G. Kolosoff: Про певне свійство рівнань ріжничкових обороту тяжкого тїла довкола сталої точки в случаю C. Ковалевскої. W. Anisimoff: Нота про інтеґроване рівнань ріжничкових при помочи заложених змінних. J. Mollerup: Наука про ґеометричні пропорциї. D. Hilbert: Про основи ґеометриї. J. H. Graf: Додаток до розвязки рівнань ріжничкових другого порядку. L. Lachtin: Розвязнык ріжничковий альґебраїчного рівнаня 6. степеня. E. Netto: Про заложене субституций з трансзиций. P. Stäckel: Лїнїйні громади лїній ґеодетичних. K. T. Vahlen: Про скінченорівні многостїнники. Примітки, література.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Том 46. зошит 4. (1901.) містить: A. Francke: Сила двигання стовпів при змінним перерізї. W. Kutta: Додаток до приближного інтеґрованя ціликовитих рівнань ріжничкових. S. Jolles: До ґеометричної теориї параболїчних двигарів. A. Grusinzew: Теория волосности і гидростатики. A. Denizot: Про певний проблем маятникович Ейлера. R. Mehmke: До обчисленя корінїв рівнань квадратових і кубічних при помочи звичайних абаків.

Том 47. зошит 1.—4. містить: V. Fischer: Анальоґії до термодинаміки. A. Francke: Лук з пруживо звязаними підпорами. A. Francke: Двигарі з острими луками з пруживо звязаними підпорами. E. Doležal: Проблем пятох і трох лучів в фотоґраметриї. R. Skutsch: Про ваги рівнань. K. Heun: Захованє віріялу і моменту постійного системи сил при руху цїпкого тїла. F. Rudio: До кубатури оборотового парабольоіду. L. Burmester: Кінематично-ґеометрична теория руху посвоячено-змінних системів. L. Krüger: До вирівнаня многокутників і вязки трикутників. C. Rodenberg: Про криву пересїчи двох пристайних поверхнин перстеневих і розпад еї на кола. C. Rodenberg: Про точки пересїчи елїпси в елїпсою або ґіперболею з нею співосевою. E. Zermelo: Гидродинамічні розслїди про рухи вирові в поверхні кулистій. F. Klein: До теориї шруби R. Ball'a. H. Timerding: Теория вартостий Bernouilli. D. Bobylew і T. Friesendorff: Про перїметричне точенє ся кружала. J. Kübler: Ещe раз правдива форма згибаня. F. Schuh: Крива гороптеру. J. Horn: До ґеориї малих скінчених дрогань системів зі степенем свободи. O. Fischer: Про зведені системи і головні точки членів механїзму вязевого. O. Unger: Про конструкцийний прінціп і єго застосованє при означеню тїни на поверхнях оборотових. R. Mayr: Про тїла з кінетичною симетриєю. R. Mehmke: „Rechenschieber" в Нїмеччинї.

Том 48. зошит 1. містить: R. Gans: Про індукциї в обертаючих ся провідниках. M. Radaković: Про рух мотору з узглядненєм пружности єго фундаменту. L. Matthiessen: Про безконечні множини місць діоптричних основних точок в сочках і в системах точок. A. Grünwald: Лінійні царини шрубові R. S. Ball'a. F. Jung: До ґеометричного розслїду вирівнаня маси в машинах корабельних з [illegible]ирома корбами. H. Heimann: Видержність плоских плит при но[illegible]альнім сталїм обтяженю. R. Mehmke: Давний примір анаморфо[illegible] Примітки, лїтератури.

[illegible]ta mathematica, том 25. зошит 1. 2. за р. 1901. і 3. 4. за [illegible]02. містить: P. Painlevé: Про рівнаня ріжничкові другого по[illegible]ку і вищих, яких інтеґрал загальний є правильний. E. Picard:

Дїяльність наукова Ch. Hermite'a. S. Kantor: Найбільший ряд кривих альґебраїчних в R_r. E. Picard: Рівнаня лїнїйні з частними походними і узагальнене проблему Dirichlet'a. Hj. Mellin: Звязь між лїнїйними рівнанями ріжничковими а ріжницевими. Hj. Mellin: Формула на льоґаритм переступних функцій скінченого ряду. U. Dini: Метода наступаючих по собі приближень в рівнанях з походними частними другого порядку. J. Hurwitz: Редукция двійкових квадратових форм зі зложеними сочинниками і змінними. W. S. Burnside: Про чотири обороти, що зміняють систем ортоґональний осий в инший. Ch. Riquier: Про степень якогонебудь систему ріжничкового. I. O. Bendixson: Про корінї рівнана основного. A. Hirsch: Про корінї рівнаня основного. P. Stäckel: Аритметичні свойства функцій аналїтичних.

Journal für reine und angewandte Mathematik (тепер під редак. Hensel'a) том 124. зошит 2. 3. 4. містить: S. Gundelfinger: Про віроятне повстане тверджень Аронгольда про незмінник S. S. Gundelfinger: До обчисленя льоґаритмів Ґаусса для малих вартостий B. V. Fischer: Примінене теорії кватерніонів до рівнань термодинамічних. P. Hoyer: Про дефінїцию і розслїди ґруп перехідних. E. Landau: Твердженє про розклад лїнїйних виражень ріжничкових на незведимі чинники. H. Kühne: Відношене між функциями більше незвісних, що ведуть до прав відворотности. F. Grünfeld: Додатки до теорії рівнань ріжничкових, долучених до рівнаня ріжничкового n.-ого порядку. H. Lemke: Про рівновагу космічних мас ґазових. L. W. Thomé: Про асимптотичне представленє функцій. J. B. Goebel: Розділ електричности на двох проводячих кулях. P. Kokott: Досліди над перетворенєм Ляндена. J. C. Fields: Теорем Ріманна-Роха і єго незалежність від долучених умов на случай певних кривих. L. Koenigsberger: Основи механїки для більшого числа независимих змінних. L. Fuchs: Про границї, в яких певні означені інтеґрали задержують приписаний знак. L. Schlesinger: До теорії лїнїйних рівнань ріжничкових в звязи з проблемом Ріманна (друга нота).

Monatshefte für Mathematik und Physik, том XIII. квартал 1. 2. 3. 4. (р. 1902) містять: C. Lorenz: Властиві трикратні інтеґрали. J. Plemelj: Про лїнїйні рівнаня ріжничкові з переміннов основою ґруп монодромічної. E. Janisch: Ґеометричні уваги. E. F l: Про розширене розвиненя Стефана рівнань Maxwell'a для ріжн. д них середовищ. A. Schwarz: Розслїди кривини стіжкових перер ів. E. Oekinghaus: Математична статистика в узагальненім розви ку і розширеню на формальну теорию населеня. O. Biermann: ро

умови, в яких цїла вимірима функция має многократні місця зерові. L. Klug: Деякі твердженя про посвоячені і подібні поля. — Перегляд бібліографічний математичної літератури.

Annales de l'école normale supérieure, серия 3. том 18. зошит 10.—12. (1901) містить: W. Anisimoff: О теорії кривих геодетичних. E. Picard: Про інтеграл цїлковитих ріжничок третого рода в теорії поверхний альгебраічних. Ch. Riquier: Про системи ріжничкові, яких інтегроване розтягає ся на інтегроване рівнань ріжничкових цїлковитих. Яко додаток: H. Hancock: Системи модулові Кронекера.

Том 19. зош. 1.—9 (1902) містить: P. Cousin: Про функциї періодичні. W. Anisimoff: Додаток до мемуара про криві геодетичні. E. Picard: Про періоди двократних інтегралів в теорії функций альгебраічних двох змінних. E. Picard: Про періоди двократного інтегралу функциї вимірмої. E. Picard: Про число умов, що виражають, що деякі двократні інтеграли є другого рода. M. Stauff: Уваги про деякі заложеня Hermite'a. E. Delassus: Про системи скісні. H. Padé: Нові досліди над розділом вимірмих дробів приближених функциї. W. A. Stekloff: Про основні проблеми математичної фізики. R. Alezais: Про певну клясу функций гіпер-Фухса і певні субституциї лїнїйні, що ся до них відносять. L. Bianchi: Про системи циклїчні, яких площі обводять кулю. R. le Vavasseur: Ґрупи ряду p^2q^2, де p є число перве, більше як число перве q.

Journal de l'école polytechnique, серия 2. зошит 7. (1902). L. Lecornu: Про пруживі волянти. O. Callandreau: Про рахунок чисельний сочинників в розвиненю функциї пертурбацийної. F. Combebiac: Рахунок трикватернїонів. Честь віддана через школу политехнїчну кольонельови Мангеймови.

Journal de Liouville, серия 5. том VII. (1901), зошит 2. і 3. Jouguet: Теорем вирів в механїцї. E. O. Lovett: Про геометрию n-розмірову. G. Brunel: Про два системи трійок трийцятох елементів. P. Duhem: Про сталість рівноваги зглядної плинної маси, вправленої в рух оборотовий. L. Autonne: Ґрупи чвіркові правильні скінченого порядку. G. Humbert: Про звичайну трансформацию функций абелевих. E. Maillet: Про корінї рівнань переступних з вимі ними сочинниками.

Том VIII. (1902). зошит 1.—3. P. Duhem: Про рівновагу сист y, що ся находить в руху оборотовім, на случай яких-небудь за лотів. E. Maillet: Про категорию функций переступних і рівнань рі: ликових вимірмих. S. Zaremba: Про інтегроване рівнаня $\Delta u + \xi u = 0$. P. J. Suchar: Про рівнаня ріжничкові лїнїові другого

порядку з сочинниками альґебраічними. A. Zoukis: Про повний гексакориф. H. Poincaré: Про циклї альґебраічних поверхнин. P. Duhem: Про сталість рівноваги зглядної. G. Pirondini: Симетрия стичних з огляду на поверхню оборотову. J. de Séguier: Про рівнання певних ґруп. H. Laurent: Про ряди многочленів.

Bulletin de la Société mathématique de France. Том 29. зошит 4. (1901) обнимає праці: E. Cartan: Про інтеґроване певних системів Pfaff'a другого рода. M. Petrovitch: Уваги про зера рядів Taylor'a. J. de Séguier: Крива заповняюча шестистїнник о n розмірах. G. Combebiac: Про живу силу корисну. L. Rispert: Три свойства шістьох точок стіжкової кривої. A. Pellet: Метода приближень Нютона.

Том 30. зошит 1. і 2. (1902) містить: G. Combebiac: Про систем чисельний зложений, що представляє ґрупу перетворень частинкових простору. E. Goursat: Про проблєм, що ся відносить до лїнїй асимптотичних. M. Servant: Про деформацию квадрик. G. Humbert: Визначене кривих альґебраічних даного степеня, які можна повести на поверхні филястій. R. de Montessus: Про дроби тяглі альґебраічні. J. Clairin: Про певні рівнання з частними походними другого порядку. J. Hadamard: Про походні функций лїнїй. E. Delassus: Про уклади з точковим стиканєм ся. H. Poincaré: Про певні поверхні альґебраічні. L. Lecornu: Про малі рухи тяжкого тїла. M. d' Ocagne: Про барицентра циклїчні в кривих альґебраічних. M. Servant: Про розширене формул Ґаусса. J. Clairin: Про певну клясу перетворень рівнань з частними походними другого порядку. L. Raffy: Про деформацию поверхнин і певні перетворена рівнань з частними походними другого порядку. G. Combebiac: Про загальні рівнання пружности. J. Hadamard: Про умову, яку можна приписати поверхні.

American Journal of Mathematics. XXIV. зошит 1.—4. (р. 1902). L. E. Dickson: Циклїчні підґрупи простої трійкової лїнійної дробової ґрупи в тїлї Galois. J. G. Hardy: Криві з потрійною кривиною. H. Hancock: Перві функциї більше змінних і узагальнена важного теорему Дедекінда. R. A. Roberts: Певні свойства плоскої кубічної кривої в звязи з коловими точками в безконечности. H. E. Hawkes: Оцїнка ассоциятивної лїнїйної альґебри Peirce'a. G. A. Miller: Ґрупи здефінїовані через ряд двох ґенераторів і ряд їх добу [illegible] L. E. Dickson: Канонічна форма лїнїйного однородного перетвор[illegible] в довільнім обсягу вимірности. H. B. Newson: Нова теория посвоя[illegible] і їх ґрупи Lie. L. P. Eisenhart: Безконечна мала деформация [illegible] верхнин. S. Kantor: Типи лїнїйних комплексів кривих елїптич[illegible]

в R_r. R. E. Moritz: Узагальнене процесу ріжничкового. H. D. Thompson: Прості пари рівнобіжних поверхнин. W. M. Bôcher: Системи лінійних рівнань ріжничкових першого порядку. T. M. Putnam: Чвіркові лінійні дробові групи. A. N. Whitehead: Числа головні. G. A. Miller: Метода конструкції груп порядку p^m. H. E. Stecker: Неевклідові свойства плоских кубічних і їх перша і друга бігунова.

Transactions of the American Mathematical Society. II. зош. 4. (1901). E. J. Wilczynski: Геометрия сучасних системів двох лінійний однородних ріжничкових рівнань другого порядку. L. E. Dickson: Теория лінійних груп в довільнім тілї. W. H. Metzler: Певні агрегати підвизначників. A. Pringsheim: Примінене правила множеня Cauchy до рядів умовно збіжних або розбіжних. A. Pringsheim: Про доказ Goursat'a твердженя інтегрального Cauchy. O. Bolza: Новий доказ теорему Osgood'a в рахунку варияційнім. M. Bôcher: Певні пари переступних функцій, яких корінї можна віддїлити. J. H. Mc Donald: Систем двійкових, кубічних і квадратових і редукция гіпереліптичних інтегралів ряду другого на елїптичні інтеграли через перетворене четвертого степеня. E. H. Moore: Теория невластивих означених інтегралів. E. B. van Vleck: Збіжність і характер тяглого дроба $\cfrac{a_1 z}{1+\cfrac{a_2 z}{1+\cdots}}$

Том III. зошит 1.—3. (1902) містить: J. I. Hutchinson: Кляса автоморфних функцій. H. F. Stecker: Істноване поверхнин, що надають ся до частинкового відтвореня на площи того рода, де лінії геодетичні відтворюють ся на з гори означений систем кривих. O. Stolz: До вияснення довготи луку і обему кривої поверхні. L. E. Dickson: Групи Steiner'a в проблемі контакту. A. S. Hathaway: Простор кватерніоновий. E. J. Wilczyński: Відворотний систем лінійних рівнань ріжничкових. C. N. Haskins: Незмінники квадратових ріжничкових форм. E. Mc Clintock: Натура і примінене функцій ужитих в розпізнаню квадратових полишок. E. B. van Vleck: Означене числа дійсних і мнимих корінів ряду гіпергеометричного. G. A. Bliss: Друга варияция означеного інтегралу, де одна границя є змінна. E. H. Moore: Метові аксіоми геометрії. E. W. Brown: Малі дїльники в теорії місяця. J. W. Young: Гольоморфізм груп. F. R. Moulton: Нова не-desargues'ова плоска геометрия. M. Bôcher: Дійсні розв'язи системів двох однородних лінійних ріжничкових рівнань першого порядку. Ch. A. Scott: Нова метода поступованя при перерізах кривих плоских. E. V. Huntington: Повна збірка постулятів для

теорий додатних цїлих і додатних вимірних чисел. L. E. Dickson: Ґрупа означена для кождого даного тїла. O. Stolz: Додаток до артикулу „До вияснення довготи etc.“ O. Bolza: Доказ достаточности умов Jacobi для незмінности знаку другої варияцїї в проблемах ізоперіметричних. H. E. Hawkes: Надзложений систем чисел. W. B. Fite: Ґрупи метаабелеві. L. P. Eisenhart: Спряжені простолїнійні конґруенциї. D. N. Lehmer: Конструкцийна теория однобіжної кубічної методами синтетичними. L. E. Dickson: Ґрупа Steiner'a в проблемах контакту (друга нота).

Annals of Mathematics (Harvard University), серия 2. том 3. число 1.—4. (1901. і 1902) обнимає слїдуючі праці: E. B. van Vleck: Збіжність тяглого дробу Ґаусса і иньших тяглих дробів. M. B. Porter: Ріжничкованє безконечних рядів вираз за виразом. J. H. Whitemore: Нота про кола ґеодетичні. W. F. Osgood: Нота про функциї здефінїовані через ряди безконечні, що їх вирази є аналїтичними функциями змінної зложеної. Ch. L. Bouton: Певна ґра і єї математична теория. G. A. Miller: Ґрупи з двома операторами ряду третого, яких добуток є також третого ряду. W. A. Granville: Незмінники чотирокутника з найбільшою підґрупою, маючою точки сталі, загальної ґрупи метової на площи. M. Bôcher: Деякі примінена методи скороченого знакованя. M. B. Porter: Корінї функций, що є злучені лїнійними зворотними звязями другого порядку. F. S. Woods: Простор зі сталою кривиною (дві части). W. H. Roever: Ясні точки і їх місця. W. F. Osgood: Проблеми безконечних рядів і означених інтеґралів. H. B. Newson: Нота про добуток лїнійних субституций. H. S. White: Нота про криві оборотові піддані інволюциї пар точок на площи. R. E. Allardice: Деякі криві звязані з системом подібних стіжкових. J. Westlund: Нота про многократні совершенні числа. W. R. Ransom: Механїчна конструкция стіжкових співогнищевих. P. F. Smith: Представленє S. Lie мнимих в плоскій ґеометриї. G. A. Miller: Нота про ґрупи ізоморфні з ґрупою ряду p^m. L. D. Ames: Визначенє вартостий рядів дуже слабо збіжних.

Annali di matematica, серия 3. том VI. (1901.) містить: A. dall' Acqua: Теория конґруенций кривих в якійбудь тривимірові множіни. N. Nielsen: Нове обчисленє неозначених інтеґралів і рядів безконечних, що обнимають функцию вальцеву. L. Bianchi: Деформация конґруенций якоїнебудь кляси поверхний розвинив їх. G. Castelnuovo e F. Enriques: Про певну основну квестию з теориї альґебраічних поверхний. C. A. dell' Agnola: Ряд многочленів, що представляє галузь моноґенічної функциї аналїтичної. A. Pensa: о-

верхня вимірима 5. степеня. G. Lauricella: Деформація кулї пружвої рівнозворотної. N. Nielsen: Про клясу безконечних рядів, аналоґічних до рядів Schlömilch'a, ідучих після функцій вальцевих.

Том VII. (1902.) містить: E. Pascal: Вступ до теорії незмінників рівнаня ріжничкового цїлковитого загального типу другого порядку. E. O. Lovett: Перетворення стичні основних елементів простору. R. Marcolongo: Теорія тяжкого симетричного ґіроскопа. C. Somigliana: Про пруживий потенціял. M. Gebia: Типова деформація цїпкого пружевого тїла. H. Lebesgue: Інтеґрал, довгота, поле.

Том VIII. зошит 1. (1902.): E. Ciani: Скінчені ґрупи чвіркових посвоячень, ізоморфних з ґрупами правильних многостїнників. G. Fubini: Про простор, що допускає ґрупу тяглу рухів.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Том XVI. зошит 1.—5. (1902.) містить: U. Amaldi: Типи потенціялів, що подїлені через певну сталу функцію, стають залежні лиш від двох змінних. G. Loria: „Радіялї“ кривих плоских. G. Vitali: Про рівнаня ріжничкові лїнїйні однородні з альґебраічними сочинниками. U. Barbieri: Визначене всїх поверхний розвивних на дану поверхню. G. Torelli: Про певні теореми Poincaré про ідеали перві. L. Autonne: Про „гермітїян“. F. Gerbaldi: Про ґрупи 360 посвоячень плоских. Th. de Donder: Студия про інтеґральні незмінники. F. Giudice: Істнованє, обчисленє і ріжниця корінїв рівнань чисельних. C. Burali-Forti: Про „радїялї“. P. Paci: Узагальненє певного теорему Ґавсса. V. Martinetti: Уваги про конфіґурацию Куммера. G. B. Guccia: Про криву альґебраічну плоску. E. Veneroni: Про певні системи кубічних скісних. R Marcolongo: Про функцию Green'a степеня n. на кули. G. Ferretti: Про зведенє найменьшого порядку лїнїйного систему кривих плоских невидимих ряду p. D. Gigli: Про суму n ріжних додатників. G. B. Guccia: Про поверхню альґебраічну.

Prace matematyczno-fizyczne. Том XIII. 1902. обнимає розправи: A. Denizot: Про певний проблєм Ейлєра що до маятника. J. Zawidzki: Досьвіди над пружевостию і складом подвійних мішанин течий K. Żorawski: Про свойства певного інтеґралу многократного, що є узагальненєм двох тверджень з теорії вирів. G. A. Miller: Про ізоморфізм ґруп абелевих (по анґлїйски). A. Przeborski: Де які примінення теорії конґруенцій лїнїйних. S. Dickstein: Перепи:ка Коханьского і Лєйбніца (докінченє). R. Merecki: Обсервації мі ометричні мраковин (ч. I). M. P. Rudzki: Право розкладу темпера ,р в внутрі тїла небесного ґазового. Ł. E. Böttcher: Засади раху ту ітерацийного (ч. III). Справоздання бібліоґрафічні з польскої лїт тури матем. фіз. за рік 1899 (конець).

Wiadomości matematyczne. Том. VI. зошит 6. (1902): L. Sylow: Бесїда проголошена на обходї роковин Абеля в Християній (5. IX. 1902). M. T. Huber: З теорії визначників. W. F. Osgood: Функциї означені через безконечні ряди. — Перегляд літератури, хроніка.

Журнала бібліографічного Revue semestrielle des publications mathématiques (під ред. P. H. Schoute, Korteweg etc. Amsterdam) вийшов том X. часть I. і II. р. 1902. і том XI. часть I. 1903. Крім сего вийшов показчик до пятьох томів сего журнала (отже до томів за час 1898.—1902. р.).

Помер знаменитий математик англїйский George G. Stokes 1. лютого 1903. в 84. році життя. Его працї математичні та теоретично-фізикальні зробили его ім'я голосним в сферах математичних; епохальні є его роботи над флюоресценциєю, гидродинамікою і пружистию.

Нове унїруптованє ґеометриї Bolyai-Лобачевского.

Д. Гільберт виказав свого часу (в письмі „Grundlagen der Geometrie", Leipzig 1899.), що ґеометрию евклїдову можна оперти виключно на аксіомах, що ся відносять до площи, без помочи аксіомів тяглости (Архімеда). В найновійшій розправі п. з. Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie (Math. Annal. 57. том, зош. 2. 1903.) виказує знаменитий ґеометр ґетінґеньский, що можна і ґеометрию Bolyai-Лобачевского на площі оперти виключно на основі плоских аксіомів без помочи аксіомів тяглости, наколи лиш аксіом рівнобіжности заступимо через відповідні заложеня ґеометриї Лобачевского. Метода автора є зовсїм иньша, як у Bolyai і Лобачевского, що послугувались граничною кулею, та як у Клайна, що уживає метод метових.

Ідеї Д. Гільберта хочу в тій ноті коротко представити.

1. Вперед збирає автор разом чотири аксіоми, що ними послугував ся в письмі „Grundlagen der Geometrie". Є они слїдучі:

I. Аксіоми злученя. (Axiome der Verknüpfung).

I. 1. Дві ріжні точки A і B визначають всегда одну сту.

I. 2. Дві якінебудь ріжні від себе точки простої визнача. ь ту просту.

I. 3. На кождій простій находять ся що найменьше дві точки. Є що найменьше три точки, що не лежать на простій.

II. Аксіоми уложеня (Axiome der Anordnung).

II. 1. Наколи A, B, C є точки простої, а B лежить між A і C, то B лежить також між C і A.

II. 2. Наколи A і B є дві точки одної простої, що існує бодай одна точка C, що лежить між A і B, і бодай одна точка D така, що B лежить також між A і D.

II. 3. Між трома точками простої існує все одна і лиш одна точка, що лежить між двома останими.

Дефініция: Точки, що лежать між двома точками A і B, називаєм точками довжіни AB або BA.

II. 4. Най A, B, C є три точки, що не лежать на простій, а a проста, що не іде через ніяку з точок A, B, C; наколи та проста переходить через одну точку довжіни AB, то она переходить певно і через одну точку довжіни BC або довжіни AC.

III. Аксіоми пристайности (Axiome der Congruenz).

Дефініция: Кожду просту ділить яканебудь з ей точок на дві півпрості або половини.

III. 1. Наколи A, B є дві точки простої a, а A′ є точка простої a′, то можна на даній половині простої a′ від A′ все найти одну і лиш одну точку B′ таку, що довжінь AB (або BA) є пристайна або рівна довжіни A′B′:

$$AB \equiv A'B'.$$

Кожда довжінь є пристайна до себе, отже $AB \equiv AB$ і $BA \equiv AB$.

III. 2. Наколи $AB \equiv A'B'$, і $AB \equiv A''B''$, то є $A'B' \equiv A''B''$.

III. 3. Наколи AB і BC є дві довжіни без спільних точок на a, а далі A′B′ і B′C′ дві довжіни без спільних точок на a′, то если $AB \equiv A'B'$, а $BC \equiv B'C'$, то і $AC \equiv A'C'$.

Дефініция: Дві півпрості h і k, що ідуть з тої самої точки A не творять разом одної простої, називаєм кутом; знак на се є $\sphericalangle(hk)$ або $\sphericalangle(kh)$.

Точки площи, що з огляду на h лежать по тій самій сторонї, що k — з огляду на k лежать по тій самій сторонї що h, називаєм ...ол... кута $\sphericalangle(hk)$ (Winkelraum).

...4. Маємо кут (hk), просту a і означену сторону простої a′. Е... h′ означає півпросту простої a′, що іде з точки O; тодї ...стну...чна і лиш одна півпроста k′, така що:

$$\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h'k') \text{ (пристайні)}$$

і що рівночасно всї точки поля кута $\sphericalangle(h'k')$ лежать по даній сторонї a'.

Очевидно кут кождий в до себе пристайний ($\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(hk)$ і $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(kh)$.

III. 5. Наколи $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h'k')$, і $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h''k'')$, то і $\sphericalangle(h'k') \equiv \sphericalangle(h''k'')$.

III. 6. Наколи в двох трикутниках ABC і A'B'C' в:

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C' \text{ і } \sphericalangle BAC \equiv B'A'C',$$

то всегда в: $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$ і $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$.

З аксіомів I.—III. слїдують тверджена про пристайність трикутників, про трикутник рівнораменний і можливість конструкцій, як построєне прямовісної, подїл простої та кута на дві половини: а далї слїдує твердженє, що сума двох кутів в трикутнику в більша, як кут третий.

IV. Аксіом про прості, що перетинають ся і не перетинають ся (аксіом, що заступає в геометрії Bolyai-Лобачевского аксіом рівнобіжности).

Наколи $\mathfrak{b}$ в дана проста, а A точка, що на нїй не лежить, то через A ідуть все дві півпрості a_1 і a_2, що не творять одної і тої самої простої і простої $\mathfrak{b}$ не перетинають, наколи кожда півпроста, що іде через поле кута $(a_1\, a_2)$ з точки A, просту $\mathfrak{b}$ перетинає.

Дефініция: Най проста $\mathfrak{b}$ (Фіг. I.) розпадає ся (від точки B) на дві півпрості b_1 і b_2, і най прості a_1 b_1 лежать з одної, a_2 b_2 з другої сторони простої AB; тодї кажем, що півпроста a_1 є рівнобіжна до півпростої b_1, a_2 до b_2, а далї кажем, що півпрості a_1 і a_2 є рівнобіжні до простої $\mathfrak{b}$, як також і прості, яких половинами є a_1 і a_2.

З відси слїдує, що дві півпрості, рівнобіжні до третої, є до себе рівнобіжні.

Дефініция: Кожда півпроста визначає конець (Ende); всї півпрості, що до себе є рівнобіжні, визначають один конець. Проста має проте два кінцї; наколи они є α і β, то просту значимо знаком $(\alpha\ \beta)$.

Дефініция: Наколи з одної точки поведемо прям на просту і продовжимо его по за его основу о таку саму довжінь, то кінець сего продовженя називає ся образом первісної точки (Spiegelbild des ursprünglichen Punktes) в даній простій.

Образи точок простої лежать знов на простій, яка є образом первісної простої.

2. По тих засадничих аксіомах випроваджує Гільберт п я т ь п о м і ч н и х т в е р д ж е н ь (подамо їх ту без доказу):

Твер. 1. Наколи дві прості перетинають трету під рівними кутами, то они певно не є до себе рівнобіжні.

Твер. 2. Наколи маємо дві прості a і b, що ся анї не перетинають, анї не є до себе рівнобіжні, то істнує все трета проста, що до обох є рівночасно прямовісна.

Твер. 3. Наколи маємо які-небудь дві півпрості, то істнує все проста, що має два приписані кінцї α і β.

Твер. 4. Наколи маємо дві рівнобіжні прості **a** і **b** і точку O в части площи між ними (Фіг. II); наколи O_a є образ точки O в **a**, а O_b образ точки O в **b**, а M є середина довжіни $O_a O_b$, тодї півпроста построена в M, що є рівнобіжна і до **a** і до **b**, є прямовісна в M до простої $O_a O_b$.

Твер. 5. Наколи a, b, c є три прості, що мають той самий конець ω, а їх образи в тій самій простій є S_a, S_b, S_c, то все істнує проста d з тим самим кінцем ω така, що постепенне застосоване відбить (образів) в простих a, b, c є рівнозначне з відбитем в простій d, що значимо:

$$S_c S_b S_a = S_d .$$

3. З черги переходить Гільберт до д о д а в а н я к і н ц і в (Addition der Enden). В тій цїли бере просту $(0, \infty)$, отже з кінцями 0 і ∞, (Фіг. III) вибирає на нїй точку O і построює в O прям, якого кінцї називає $+1$ і -1; опісля дефінїює с у м у двох кінцїв в слїдуючий спосіб:

Наколи α, β є два кінцї, O_α є образ точки O в простій $(\alpha\,\infty)$, O_β образ точки O в простій $(\beta\,\infty)$, то наколи середину довжіни $O_\alpha O_\beta$ получимо з кінцем ∞, то другий конець так построєної простої буде с у м о ю о б о х к і н ц ї в α і β (знак на ту суму є: $\alpha + \beta$).

Наколи півпросту з кінцем α відібєм в простій $(0\,\infty)$, то повстає півпроста з кінцем $-\alpha$.

Дістаєм ту рівнання:

$$\alpha + 0 = \alpha$$
$$1 + (-1) = 0$$
$$\alpha + (-\alpha) = 0$$
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

ослїдне рівнанє є виразом п р а в и л а п е р е м і н и додавання
дво нцїв.

аколи S_0, S_α, S_β є відбитя в простих $(0\,\infty)$, $(\alpha\,\infty)$, $(\beta\,\infty)$,
то нові помічних тверджень випаде:

$$S_{\alpha+\beta} = S_\beta\, S_0\, S_\alpha$$

Наколи γ є також якийсь конець, то дістанем:

$$S_{\alpha+(\beta+\gamma)} = S_{\beta+\gamma}\, S_0\, S_\alpha = S_\gamma\, S_0\, S_\beta\, S_0\, S_\alpha,$$

$$S_{(\alpha+\beta)+\gamma} = S_\gamma\, S_0\, S_{\alpha+\beta} = S_\gamma\, S_0\, S_\beta\, S_0\, S_\alpha,$$

або:

$$S_{(\alpha+\beta)+\gamma} = S_{\alpha+(\beta+\gamma)}$$

або:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

т. є. право сполучування додавання кінців.

Наколи просту (α, ∞) відібєм в простій (β, ∞), то — як Гільберт виказує — дістанем просту $(2\beta - \alpha, \infty)$.

4. Перейдім тепер до добутку кінців. Ту вперед подає Гільберт дефініцию: Наколи конець лежить з тої сторони простої $(0, \infty)$, що конець $+1$, то сей конець назвем додатним, наколи лежить з тої сторони простої $(0, \infty)$, що конець -1, то сей конець назвем відємним.

Возьмім тепер два кінці α, β, ріжні від 0 і ∞ (Фіг. IV.). Обі прості $(\alpha, -\alpha)$ і $(\beta, -\beta)$ стоять прямовісно на простій $(0, \infty)$ і перетинають єї в A і B. Відітнім довжінь OA від точки B до C на простій $(0\,\infty)$ так, щоби на $(0\,\infty)$ напрям від O до A був той сам, що від B до C: опісля построїмо в C на простій $(0\,\infty)$ прямовісну і назвім додатний або відємний конець сеї простої добутком $\alpha\beta$ обох кінців α, β, після сего, чи оба кінці є додатні або оба відємні, або один додатний, а другий відємний. — Рівночасно закладаєм, що:

$$\alpha . 0 = 0 . \alpha = 0.$$

На основі аксіомів III. випадуть правила переміни і сполучування множеня кінців:

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

Також найдем формули:

$$1 . \alpha = \alpha,\ (-1)\,\alpha = -\alpha,$$

а коли α і β є кінці простої, що іде через O, то:

$$\alpha\beta = -1.$$

Ту можливе є і дїлене; до кождого додатного кінця π належить додатний (до відємного відємний) конець такий, що єго квадрат є рівний π; він сам є $\sqrt{\pi}$.

Врешті, як не тяжко доказати, істнує ту і третє правило (розлучування), а іменно:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma).$$

5. В послїднім уступі розбирає Гільберт рівнанє точки; при тім робить увагу, що наколи для рахунку кінцями випали нам такі самі правила, як для рахунку числами, то дальше построєнє ґеометриї не представить ніяких трудностий.

Коли ξ і η є кінцї якоїсь простої, то кінцї:

$$u = \xi\eta, \quad v = \frac{\xi+\eta}{2}$$

називає Гільберт сорядними тої простої. Ту істнує основне твердженє. Наколи α, β, γ є три кінцї такі, що конець $4\alpha\gamma-\beta^2$ є додатний, то всї прості, що їх сорядні u, v сповняють рівнанє:

$$\alpha u + \beta v + \gamma = 0$$

ідуть через одну точку.

Доказ сего твердженя переводить Гільберт в сей спосіб, що построює кінцї:

$$\varkappa = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}, \quad \lambda = \frac{\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}$$

і сим способом спроваджує повисше лїнїове рівнанє до форми:

$$(k\xi + \lambda)(k\eta + \lambda) = -1.$$

Опісля доказує, що форми:

$$\xi' = k\xi + \lambda$$
$$\eta' = k\eta + \lambda$$

представляють кінцї такої простої, яка повстає з простої о кінцях $\xi\eta$ через оборот площи, залежний лиш від k і λ. А що рівнанє $(k\xi + \lambda)(k\eta + \lambda) = -1$ дає $\xi'\eta' = -1$, то на основі правила, яке подали ми при множеню, мусять дотичні прості переходити через точку O, отже твердженє є доказане.

Бачимо отже, що рівнанє точки в сорядних лїнії є лїнїйне; звідси легко можна вивести тв. Pascal'a для пари простих і тв. Desargues'a для трикутників, положених перспективічно, як також всї инъші твердженя ґеометриї Bolyai-Лобачевского — а через се дїйсно можна оперти ту ґеометрию на чотирох ґрупах аксіомів, що їх Гільберт впровадив. *В. Л.*

новонайденім творі старинного математика египского Агмеса
нах ъ ся цїкаві вислїди: 1) находить ся таблиця, де дроби

$$\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \ldots\ldots \frac{2}{99}$$

виражені в яко сума дробів з чисельником 1, пр.

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$$

2) поверхня кола рівнає ся поверхні квадрату, якого бік є рівний $\frac{8}{9}$ проміру; звідси слїдує:

$$\pi = 3{\cdot}1605 \ldots\ldots$$

(Nouvel. Annal. de Mathémat. tome III. April 1903).

Поступи фізики і хемії в р. 1902. Хотяй р. 1902. не приніс нїяких нових епохальних відкрить, то однак опрацьоване материялу з лїт попередних починає кидати деяке нове сьвітло на основи науки. Головний імпульс дало до сего відкрите т. зв. лучів тїлесних (Körperstrahlen), які виходять від т. зв. лучистих тїл, лучів відкритих перед пару роками, а які все еще є предметом точних дослїдів. І так славний хемік Berthelot, що в послїдних часах посьвятив особливу увагу лучистим тїлам, а головно радови, постеріг, що лучі раду, подібно як лучі сьвітла, розкладають навіть в темноті (хотяй помалу) сполуки йоду і кисня та квас азотовий; дальше сконстатував факт, що хемічне дїланє тих лучів є иньше, як току електричного. Нїмецкий учений Giesel постеріг знов, що від впливом раду звичайна вода та воздух на якийсь час стають лучивочинні, щоби промовляло за сим, що лучі раду не є лиш виключно частинками материї.

Велике вражінє зробив реферат Vignon'a, предложений паризкій академії, про славне простирало туриньске, в яке мало бути завинене тїло Ісуса Христа, та на якім виступав образ Спасителя; Berthelot фантом сей вважав містифікацию, но Vignon пригадав звісний впрочім факт, що деякі тяжші олїї (а такими могло бути тїло Христа набальсамоване) мають власність висилання лучів.

Пізнанє ближше лучистих власностий деяких тїл в части заколибало теорию атомістичну, бо показує, що атоми в загалї не є найменьшими частинками тїл; після погляду деяких фізиків ті лучі є проявою якихсь „субатомістичних“ хемічних дїлань в материї. Rutherford іде еще дальше і висказує погляд, що лучистість, яка виступає у ріжних тїл, походить в дїйсности від одного, покій-ого незвісного первня, та сей погляд не має много приклонників. Більшість фізиків принимає істнованє електронів, що є підставою заданих лучів, а уліпшене метод досьвіду доходить до сего, що позваляє мірити величину тих електронів (в приближеню електрон є що до величини $\frac{1}{700}$ частиною атому водня).

По при праці над тілами лучистими заслугують на увагу праці над низькими температурами; ту важні є головно роботи J. Dewara, що в своїх дослідах над плинним воднем дійшов до температури 13° абсолютної скалї. Покищо один гель не дав ся привести до стану плинного, так що після погляду Ольшевского і Dewara его точка критична лежить пониже 9° абсолютної скалї. І ті досліди виказали цїкаву прояву, що наколи в температурі плинного воздуху і водня хемічні дїлання слабнуть, то вплив так низьких температур на бактерії та ріжні зародники є дуже невеликий, отже як раз противно, як можна ся було надїяти. На жаль J. Dewar не має надїї осягнути абсолютне зеро, хотяй осягнене его мало-би для науки первостепенне значіне. Осягнене що-раз то низших температур є так тяжке і коштовне, що погляд Dewar'a здаєсь вповнї оправданий. До того приймає Dewar, що хотя би навіть вдало ся гель замінити в плин, то найдуть ся еще лекші ґази, що їх еще тяжше буде замінити в стан плинний.

Важні є далї роботи над хемічними елементами, яких скількість в послїдних роках так значно зросла через відкрите арґону, гелю, криптону etc.; та ті роботи мають більше вже спеціяльний характер. За се з другого боку виринає квестия, чи много тїл, які ми до тепер вважали елементами, є ними, чи ні. Вже в р. 1900. висказав N. Lockyer на основі обсерваций спектральних зьвізд сталих сумнів, чи желїзо є елементом, чи ні, а тепер такий сам сумнів підвіс T. Gross що до другого, дуже в природї розповсюдненого елементу, крему (Si).

З иньших робіт р. 1902. заслугує на увагу праця американьского Фізика Niphera, що на основі обсерваций в часї вибухів вулканічних на Антилях стараєсь дошукати звязи між сильними потрясеннями воздуха а филями етеру.

(Central-Zeitung für Optik u. Mech. XXIV. 2).

Moissan і Dewar замінили Флюор в р. 1897. при температурі — 187° в теч; тепер удало ся его в температирі — 252·5° замінити в тїло цїпке. Наколи в тім станї зіткнув ся він з плинним воднем, то оба они лучили ся з собою серед сильної експльозиї, при чім цїл часа сильно ся розгрівала, так що водень ся запалював.

(Compt. rendus 136. 1903. ст. 641—643).

Traube заняв ся звісним законом van der Waals'a:

$$RT = (v-b)\left(p + \frac{v^2}{a}\right),$$

обчислив сталі a і b для великого числа елементів і найшов, що се рівнанє задержує своє значінє і для цїпкого стану. Дальші обчисленя автора показують, що наколи цїпкому чистому металю допроваджує ся тепло, то $\frac{1}{3}$-часть того тепла зуживає ся на побореня внутрішнього тиску, а $\frac{2}{3}$ підвисшає молекулярну енергію атомів. Далї показуєсь, що для одноатомових металїв (отже для всїх) і для многоатомових метальоідів (кромі гальоґенів) сочинник (v—b) має в приближеню вартість $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Обчислені зі сталих a і b рівнанє van der Waals'a середні довготи доріг атомів згоджують ся що до порядку величини з цифрами Meyer'a (т. є. 10^{-9}), які він обчислив при помочи дифузиї. А вкінци: внутрішнє молекулярне тепло улетученя є у всїх елементів пропорціональне до сочинника розширеня.

(Zeitschr. für Elektrochemie, IX. Jahrg. 1903. ч. 21).

H. T. Baanes обчисляє найімовірнїйшу вартість на механїчний рівноважник тепла [відносно до 16°-кальорнї (15,5—16,5°)] і находить єго вартість $= 4{,}1832 \times 10^7$ ерґів.

(Canada Transact. 8, sect. III. 1902. p. 141).

Поляризація лучів X. До тепер не можна було лучів X споляризувати; доперва R. Blondlot завдав собі питанє, чи лучі X не є вже відразу в хвилї, коли опускають рурку, сполярізовані. Здогад сей опер Blondlot на фактї, що луч X повстає з луча катодального, так що оба они творять одну площу; а через кождий луч X, що виходить з рурки, іде площа, в якій луч може мати спеціяльні свойства (була би отже диссиметрия, будуча умовою поляризациї). І дїйсно Blondlot'ови вдало ся виказати сю поляризацию, наколи ужив невелику іскру за аналїзатор. Знаряд ним ужитий був слїдуючий (Фіґ. V.):

P рурка Рентґена, до якої провадять дроти 1 і 2, обложені ґутаперхою, від індуктора; друга пара дротів, рівнож обложених ґутаперхою, має перерву в α, яку можна збільшати або зменьшати — дроти ті заложені в C і D на 1 і 2, віддїлені від них валочками шкляними. AB є плита з Al на се, щоби перерву α охоронити від впливу лучів Рентґена.

Берем уклад 3 осий: OY спадає з довготою рурки, отже напрямом лучів катодальних, OX спадає з напрямом луча X, O до них прямовісна. В часї вилядованя індуктора (отже повстаня лучів X) повстає через індукцию іскра в α; наколи напрям сеї іскри є рівнобіжний до OX, то іскра під впливом лучів X збільшає с за-

коли прямовісний до OY, вплив лучів X гине. Отже лучі X мають чинну площу, що іде через кождий луч X і луч катодальний, що єго витворює. Наколи перерву α обертаємо довкола оси OX (отже рівнобіжно до пл. YOZ), то маємо одно maximum в поземім, одно в прямовіснім положеню (анальоґічно, як коли обсервуєм сполярізований жмуток лучів через нїколь і нїколь обертаєм). Іскра в α відгрівав проте ролю аналїзатора, но она мусить бути коротка і слаба.

Кварц, цукор і ин. скручують площу поляризациї лучів X в тім самім змислї, що у сьвітла (Blondlot дістав скрученя до 40°); також і вторичні лучі S в сполярізувані — цукор і ин. скручують їх площу поляризациї в противнім змислї, як у сьвітла (Blondlot дістав скрученя до 18°).

(Comptes rendus 136, 284. 1903. p.).

Уґинане лучів Рентґена. H. Haga і C. H. Wind (Амстердам) сконстатували, що лучі P. підлягають угинаню так, як лучі сьвітла. Лучі P. переходили через дві шпари, першу широку на 15 μ, і другу (віддалену від першої о 75 cm), широку в горі на 25 mm до долини вузшу; за другою шпарою в віддаленю 75 cm находилась плита фотоґрафічна. Фотоґрафії, довершені при помочи лучів P., що мусїли переходити через ті дві шпари, мали на долїшнім краю, що відповідав звуженій части другої шпари, розширене в формі пендзля — проява, яку можна толкувати лиш угинанем лучів P.

(Elektrotechnische Zeitschr. 1903. № 25).

В послїдних часах розвинулась ширша дискусия на тему, чи тїла лучивочинні абсорбують в части енерґію ґравітациину чи нї. Приклонником погляду абсорбциї є R. Geigel, що оголосив в „Annalen der Physik“ в лютім 1903. р. розвідку експериментальну, де доказує, що мала куля з олова стає через осьвітлене лучивочинними тїлами лекша, і доказує, що причиною сего є абсорбция енерґії ґравітациної через тїла лучисті. Погляд сей викликав досить живу дискусию зі сторони иньших фізиків, як Forch і Kučera, що старають ся заперечити поглядом Geigel'a; дискусия та на разї ще не замкнена, отже і квестия піднесена Geigel'ом покищо не рішена.

(Physik. Zeitsch. 4. № 11. sqts).

A. Heydweiller розслїджував зміни тягару лучистих матерій. В тій цїли замкнув 5 g такої матерцї в рурцї шкляній і порівнував цїлими тижнями тягар сеї рурки з руркою наповненою кусниками шкла, яка мала такий сам тягар і обєм. Показала ся постійно зрастаюча ріжниця тягару, меньше більше 0·02 mg в 24 годинах. Так як після Becquerel'a 1 cm^3 поверхні лучистої матерії видїляє під видом лучів, які маґнет відклонює, 5 ерґів на секунду, то 5 g, які мав Heydweiller, о поверхні 20 cm^2 видїляти повинні 100 ерґів на секунду або 10^7 ерґів на добу (в таких лучах); сконстатована зміна тягару 0·02 mg відповідає $1{\cdot}2 \times 10^7$ ерґів потенцияльної енерґії ґравітацийної в поли земскім, отже число того порядку, що число Becquerel'a. Звідси насувала би ся гадка, що при лучистости наступає безпосередна переміна потенцияльної енерґії ґравітацийної в енерґію лучисту. (Що до сеї послїдної гадки пор. вище дискусию між Geigel'ом, Forch'ом а Kučer'ою).

(Physik. Zeitschr. Jahrg. IV. 1902. ст. 81).

S. J. Allen виказав, що сьвіжо впалий снїг є — так як і дощ — лучивочинний; но та лучистість дуже скоро уступає. Вже по 30 мінутах лучистість снїгу стає о половину меньша. Наколи такий снїг стопимо та воду відпаруємо, то остає полишка, то є лучивочинна. Рівночасно постеріг Mc Lennan, що дріт наряджений відмінно по впаденю снїгу є меньше чинний, як перед впаденем; здаєсь, що снїг в части усуває чинний складник атмосфери.

(Naturwiss. Rundschau. XVIII. 1903. № 16).

Між лучами, що виходять з тїл лучистих, виріжнювано т. зв. лучі α, що не підлягають маґнетному відклоненю та що мають велику спроможність проникання. В послїдних часах розслїджував ті лучі Rutherford і сконстатував, що і они підлягають відклоненю маґнетному та електричному і то в сей спосіб, що можна їх вважати (анальоґічно як лучі ситові — Kanalstrahlen) скорими двигарами додатних електричних нарядів. H. Becquerel потвердив своїми досьвідами над радом погляд Rutherford'a та порівнує лучі α раду з лучами ситовими, що уносять з собою додатні наряди з більшими масами, а меньшими скоростями, як лучі катодові.

(Comp. rendus 1903. т. 146. ст. 19[illegible]

Дальші дослїди H. Becquerel'a над польоном виказали, що ті лучі є імовірно ідентичні з лучами α раду, так що ріжні лучі ви-

силані лучистими тїлами, можна подїлити в сей спосіб: 1. уран висилає дуже сильні відемно наряджені і сильно проникаючі лучі. 2. польон висилає лиш лучі з додатною електричностию, які легко підлягають абсорбциї. 3. тор і рад висилають оба роди лучів. Кромі сего висилає рад ще лучі сильно проникаючі та не підлягаючі відклоненю, що доперва по довгій експозициї лишають слїд на плитї фотографічній; в они так слабі, що здавсь через се не можна їх було викрити у иньших тїл.

Кромі сего зробив Becquerel ще иньші постереженя на лучах раду. Вже давнїйше постеріг він, що через плиту Al грубу 0·1 mm переходять лучі раду, що мало підлягають відклоненю, без зміни (без огляду на кут падання), лучі, що троха більше підлягають відклоненю, переходять вправдї через плиту, але опускаючи ёї витворюють лучі вторичні; у лучів, що можуть ще більше відкланятись, вступає на їх місце жмуток лучів вторичних; а врештї лучі, що відклоненю найсильнїйше підлягають, плита задержує, а на їх місце повстають від сторони впадання дуже сильні вторичні лучі. То само виступає, коли місто плити Al возьмем плиту парафіни, грубу 2—8 mm.

(Comptes rendus 1903. т. 146 ст. 431).

Еманация фосфору. В послїдних часах висказав G. C. Schmidt гадку, що при повільній оксидациї фосфору не можна виказати присутности йонів в воздусї, бо хотяй він в часї оксидациї фосфору ставсь добрим провідником, то се дїє ся завдяки продуктам оксидациї, подібним до мраки. Погляд сей попер автор дослїдом над кусником фосфору, замкненім в начиню склянім; наколи введено силу електромоторичну, то хмари, окружаючі фосфор, підносили ся до гори і укладали ся здовж лїнїй сили. Се дїє ся тому, що продукти оксидациї фосфору наряджують ся на днї начиня і звідси на основі прав електростатичних підносять ся до гори. Досьвід сей толкує ся дуже просто, наколи приймем гїпотезу Schmidt'a, толкованє его на основі теориї електронів справляє велику трудність.

(Naturwissensch. Wochenschrift, том XVIII. ч. 33).

..авнїйші розслїди показали, що селен (Se) зменшає свій опір ел ..ричний під впливом лучів Рентгена і лучів раду (анальоґічно, як пі; впливом лучів сьвітла). Нові розслїди E. van Aubel'a показують, що клїтинка Se в темноті в присутности начиня з надокисом водня (H), а також в присутности олїйку терпентинового зменшає свій

опір електричний. Дїє ся то тому, що обі ті субстанції є також лучивочинні, анальоґічно як рад; вистане між клїтинкою Se а начинєм з одним з тих тїл вставити плиту металеву, щоби Se знов вернув до попереднього стану, т. є. щоби єго опір електричний зріс до попередної величини.

(Compt. rend. 1903. CXXXVI. p. 929).

Ogden N. Rood мірив при помочи спеціяльно збудованого електрометру опори електричні деяких дуже сильних діелектриків, і то окремо опір внутрішний, а окремо зверхний. Ось єго висліди (числа відносять ся до одиниці о перерізї 1 cm^2, а грубости 1 mm):

опір внутрішний:		опір зверхний (на 1 cm^2):	
кварц	$86.10^4\Omega$	звичайне скло (шиба в вікні)	$159.10^4\Omega$
ґутаперха	$60{\cdot}5.10^5\Omega$	скло кобальтове	$22.10^6\Omega$
ебоніт	$55.10^6\Omega$	міка	$5076.10^4\Omega$
міка	$133.10^6\Omega$	ґутаперха	$432.10^6\Omega$
		кварц	$521.10^6\Omega$
		ебоніт	$2.10^9\Omega$

(Americ. Journal of Science 1902. ser. 4. vol. XIV. 161).

Поміри електричного опору в діяманті робив A. Arton на 30 екземплярах при температурі 15°; питомий електричний опір випав між $0{\cdot}183177.10^{12}$ а $1{\cdot}280370.10^{12}\Omega$, отже є того самого раду, що опір скла ($0{\cdot}76.19^{12}\Omega$), а перевишшав 10^{15} разів опір ґрафіту. Опір сей меньшав під впливом лучів Рентґена о половину, по усуненю тих лучів зростав до первісної висоти.

(Atti della R. Academia di Torino 1902. XXXVII. 667).

Ртутьна лямпа Hewitt'a. В новій тій лямпі електричній жарить ся пара ртути; сьвітло сеї лямпи є дуже оригінальне, бо нема в нім червоних лучів. Уряджене сеї лямпи є слїдуюче: є се шкляна рура, довга пересїчно на 1·2 m, проміру 25 mm, з якої усунено воздух; катодою є кулька, наповнена Hg, втоплена в один конець рури, анодою є острий сталевий дріт на другім кінци рури. Лямпа ся є дуже тревала, бо ще по 2000 годинах не видко якої зміни в натузї сьвітла. Відповідно до розмірів лямпи (1·5 m — 4 m) треба уживати і відповідної ріжниці потенціялів і відповідної сили току; звичайно на сьвічку іде 0·3—0·5 ватів (при середній натузї сьвітла). Щоби лямпу розсьвітити, треба з по-му-

ужити більшої ріжниці потенциялів; в тій цїли залучує ся апарат індукцийний, а через перерване току наступає так сильна ріжниця потенциялів, що між електродами перескакує іскра. Hewitt найшов, що в его лямпі ток все іде від кінця сталевого до ртути, а нїколи противно; з сеї причини можна лямпи сеї уживати при токах переміннїх, наколи хочем, щоби ток ішов опісля в однім і тім самім напрямі. — Як здаєсь, буде можна лямпи сеї уживати з добрими результатами в фотографії та при лїченю хоріб скірних.

(Central-Zeitung f. Optik u. Mechanik. Jahrg. XXIV. Heft 7. 1903).

Нїяґара яко мотор. Сила води водопаду Нїяґари є майже необмежена, бо скількість спадаючої води виносить 300000 стіп^3 на секунду; а коли возьмем під увагу висоту спадання 165 стіп, то дістанем яких 10 мілїонів HP. Щоби той величезний запас енергії використати, заложено вже перед 11 роками величаві машини, що енергію сего водопаду перетворюють в енергію електричну. Тодї построєно там динамомашини з двофазовим током переміннїм, кожда о силї 5000 HP, 150 оборотів на мінуту, о ріжницї потенциялів 2200 Volt; зміна току наступала що 25 оборотів на секунду. Ті машини получено з прямовісними турбінами, осадженими на осях 136 стіп довгих, які поміщено в водї водопаду. Тепер приступлено до побільшеня тих закладів. На березї канадийскім мають утворити централю з силою до 100000 HP; в централї тій мають помістити три динамомашини, кожда о силї 10000 HP, отже два рази так сильні, як дотеперішні. Машини ті мають бути трифазові з ріжницею потенциялів 12000 Volt; ток електричний буде ся переносити з величезною напругою 60000 Volt (напруга та перевисшає о 10000 Volt найбільшу дотепер уживану напругу в Калїфорнії).

(Elektrochemische Zeitschr. Jahrg. X. 1903. ч. 2).

Вплив бурей на систем нервовий. Як відомо дїлає буря вже на великі віддаленя на систем нервовий вражливих осіб; ся обставина навела F. Larroque'a на думку, що се дїланє походить імовірно від филь Гертца, які повстають в місци розряджень електричних (отже там, де є буря) і розходять ся на всї сторони. Larroque ...онстатував сей здогад при помочи урядженя, анальогічного до ...дбирача при бездротнім телеграфі; в відбирачу виступали дїйсно іскрки, які можна було вирост обсервувати оком. Се явище промовляло на користь здогаду Larroque'a.

(Meteorol. Zeitschr. 1903. Heft 5).

Кататипія. Звісний хемік Ostwald (в Липску) і его асистент Dr. Gross винайшли спосіб репродукції фотографій на дорозі чисто хемічній **без помочи сьвітла**; спосіб сей назвали они „фотографованєм без сьвітла“ або „кататипією“. Сей спосіб оперли автори на знаній в хемії **каталїзї**, яка полягає на тім, що деякі реакції хемічні відбувають ся далеко скорше в присутности певних тїл т. зв. каталїзаторів, які самі однак не улягають нїякій зміні. І так пр. надокис водня (H_2O_2) в присутности делїкатного порошку срібного (каталїзатора) розкладає ся на водень і кисень. Наколи отже клїшу, покриту бромаком срібла і желятиною, на якій вже образ вхоплено, потягне ся 3%-овим розтвором етеру і надокису водня, то при улетученю ся етеру осяде H_2O_2 в рівномірній верстві на клїши і розложить ся на місцях насьвітлених, де отже видїлив ся делїкатний порошок срібний, а на місцях ненасьвітлених остане без зміни. Сим способом дістанемо невидний „додатний“ образ H_2O_2. Наколи тепер приложимо до клїши папір потягнений желятиною, то H_2O_2 всякає в него протягом кількох секунд, а образ так перенесений на папір можна в розтворі сїркану зелїза викликати. Сей образ зелїзний, що є слабо жовтавий, можна фарбувати на ріжний спосіб (в ріжних нюансах) в відповідних розчинах; пр. в квасї галюсовім на фіолетно, в бренцкатехіні на темнозелено, в зелязистім цианку потасовім на синьо і т. п. Сей новий кататипічний спосіб репродукції має кромі великої вигоди, дешевости і зиску на часї ще сю добру сторону, що копії так одержані є далеко більше тревалі, як копії отримувані давним способом. Всї подробиці оригіналу віддає копія дуже виразно, як се можна розпізнати при помочи люпи. Авторам вдало ся також тою дорогою одержати і иньші висліди, як пр. фотографію в трох краскаx (т. зв. Dreifarbendruck) і т. д., але близших подробиць про ті методи поки-що автори не оголосили.

(Himmel u. Erde, Jahrg. XV. 1903. зош. 8).

Скорість поступу гравітації означив теоретично P. Gerber; при тім вийшов він з заложеня C. Neumann'a при означеню потенцияла двох частин будучих в руху, що потенциял на одну масу мусить вийти від другої маси скорше о час $\frac{r}{c}$, - с. час потрібний до перебутя віддаленя обох мас. В виду сего :одить з обчисленя автора величина потенциялу рівна:

$$\frac{1}{r}\left\{1+\frac{2}{c}\frac{dr}{dt}+\frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\},$$

а дїлаюча сила випаде:

$$\frac{1}{r^2}\left\{1 - \frac{3}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{6r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right\}.$$

З порівнаня з заколотом, якого дізнав Меркур в перігелю, а який виносить 41″ (на 100 лїт), випадає з повисших формул на скорість ґравітациї:

$$c = 3.10^{10}\frac{c}{s},$$

отже величина того самого ряду, що скорість сьвітла, вислїд тим більше цікавий, що — як звісно — з обчислень Ляпляса виходило би c безконечно велике.

(Physik. Zeitschr. 4. № 12).

Про спосіб, в який повстають мітли комет, оголосив цїкавий артикул П. Лебедев з Москви; в коротцї подаємо его зміст. Вже Кеплєр висказав в р. 1608. погляд, що мітли комет завдячують своє походженє частинкам, що відриваються ся від єї ядра під впливом відпихаючої сили сонця; но погляд сей пішов скоро в забуте особливо завдяки теориї Нютона загального притяганя. Та в послїдних часах завдяки електромаґнетній теориї сьвітла Maxwell'a справа ся стала знов актуальна; теория Maxwell'a і Bartoli обчисляє, що лучі сьвітла сонїчного тиснуть з силою, яка в віддаленю землї виносить 0·5 mg на 1 m². Теоретичні ті вислїди стверднли в нових часах експериментально Лебедев, Nichols і Hull. Лебедев доказав, що наколи силу притяганя приймем за одиницю, то для тїла кулистого о лучу r cm, а густотї δ (густота води = 1), якого розміри є дуже великі в порівнаню до филь сонїчного промінюваня, випаде вислїдна притяганя і відпиханя:

$$F = 1 - \frac{1}{10000}\frac{1}{r\delta}$$

Для тїла о розмірах більших як 1 m є збоченє (послїдний дроб) від права Нютона зникаючо мале; але для ядра комет, зложеного з метеоритів, що є меньші як 1 cm, се збоченє є вже досить велике і дасть ся виказати. Наколи сї метеорити є маленькі, але нерівні, то у кождого з них збоченє є иньше; така громада що раз більше ся деформує і комета ся розсипує (пр. Белїди). — Після дослїдів Schwarzschild'a та відпихаюча сила осягає для певних розмірів тїла своє maximum, для розмірів меньших, пр. меньших як 0·001 mm, отж ряду того, що довгота филї, сила та що раз то більше меньшає.

(Physikal. Zeitschr. 4. Jahrg. № 1).

Що повстане мітли у комет дійсно вяже ся з тиском лучів сьвітла, ілюструє дослід E. F. Nichols'a і G. H. Hull'a. Оба ті автори взяли рурку, де воздух розріджено до можливих границь; рурка мала вид клепсидри (годинника піскового). Рурку наповнено порошком (мішанина шмірґлю і ростинних спорів); наколи порошок пересипує ся з одної части рурки до другої і на сей луч порошку пущено жмуток сьвітла лукового, то легонькі частинки порошку заховувались так, як би їх сьвітло відтручало; повстало явище зовсім подібне до мітли комет, а ділане було такої величини, як се, що теоретично з обчисленого тиску сьвітла випадало.

(Science, vol. XVII. p. 181. 1903).

Нову зьвізду відкрив фотоґрафічно Turner в Оксфорді дня 25. III. в Близнятах ($\alpha = 6^h\ 37^m 8$, $\delta = +30^0 2' 6$); ві дуговина показує ясні лїнії, головно H.

(Naturwissensch. Wochenschr. № 29. 1903).

В послїдних часах відкрито слїдуючі подвійні зьвізди при помочи методи спектроскопічної:

o Persei (Adams 1902) о періоді 4.29 днїв після Vogel'a; ві скорість з огляду на сонце колибавсь між +110 а −110 km.
η Orionis о періоді 8 днїв (Adams); скорість зглядом сонця між +180 а − 110 km.
ε Aurigae (H. C. Vogel); скорість між 30 а 40 km.
Θ Aquilae (Deslandres) о періоді 16·7 днїв.
φ Persei (Campbell).

δ Ceti 10 km
ν Eridani 24 km
π^5 Orionis 108 km
π^4 Orionis 15 km
ζ Tauri 32 km
η Virginis 10 km

Числа km означають найбільші обсервовані ріжниці скорости в лїнії видженя.

(Naturwiss. Wochenschr. № 30. 1903).

Часу обороту внїшних планет не можна було до тепер в нїякий спосіб означити, бо на поверхні Урана та Нептуна не можна було винайти точок, яких рух давав би якусь вказівку що до обороту самої планети. Тепер подав Deslandres в Meudon новий метод означеня часу обороту сих планет. Він обсервує ріжниці пересунень, які в спектроскопі показують противні кінці планета;

они пересувають напрям рівника троха зглядом нормального положеня, так що щит планети не виступає в дуговинї яко коло, але яко троха наклонена елїпса. Величина сего наклоненя є залежна від скорости обороту. Автор провірив сю методу вперед на Юпітері, а коли она оказалась вірна, застосував єї до Урана. Показало ся, що ся планета має рух вспятний, так як і єї місяцї, факт що стоїть в суперечности з теоривю Канта-Ляпляса.

(Himmel u. Erde XV. 1903. Heft 7).

Зьвізда 85 Pegasi є 6. величини і має в віддаленю 1″ товариша 11. величин; сю пару відкрив Burnham в р. 1878. і найшов час єї обігу 25·7 лїт. Тепер найшов G. C. Comstock на маси обох тих зьвізд стосунок 2 : 3, так що темнїйша зьвізда має більшу масу, хотяй єї сьвітло рівнає ся всего $\frac{1}{100}$ сьвітла яснїйшої зьвізди. Сей виснїд стоїть в суперечности з загальним поглядом, що темнїйший складник зьвізди подвійної є близший загасненя, як его товариш, бо він з причини меньшої маси скорше перейшов розвиток, що провадить до загасненя.

(Naturwiss. Rundschau XVIII. 1903. № 17).

B. Weinberg, доцент фізики в унїверзитеті в Одесї, зіставляє всї дотеперішні обчисленя паралякси сонїчної і випроваджує з них на основі теориї найменьших квадратів найімовірнїйшу вартість сеї величини. З обчислень его випадає величина паралякси:

$$p = 8''8004 \pm 0''00243.$$

(Astronom. Nachrichten т. 162. № 3866).

H. Liebmann оголосив розвідку п. заг. Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raume (Berichte der kön. Gesel. der Wiss. zu Leipzig Bd. 54.1902). З розслїдів его виходить, що наколи-б простор наш був гіперболїчний (Лобачевского), то:

1) Закон притягання Нютона треба би заступити через:

$$\frac{1}{\sinh^2 r}, \quad (\sinh = \text{sinus hyperbolicus})$$

но [illegible] від закону $\frac{1}{r^2}$ була-б лиш величиною другого порядку.

[illegible] перший закон Кеплєра, що планети порушають ся по перерізах [illegible] їжкових, де в огнищу находить ся сила осередна, остає без [illegible].

3) Закон збереженя поверхні піль не остаєсь тут, а місто него є:

$$\frac{d\varphi}{dt} \sinh^2 r = \text{const.}$$

но ріжниця є ту лиш другого порядку і то тим меньша, чим більше дорога зближаєсь ся до кола.

4) трете право Кеплєра також змінює свій вид на:

$$T = 2\pi \cosh a \, (\sin h\, a)^{\frac{3}{2}}$$

(T час обігу, a половина великої оси); але і та зміна є лиш зміною другого порядку.

Гелїоцентричні сорядні (довгота і ширина) планет в р. 1903 (що 30 днїв).

1903	Меркур	Венера	Земля	Марс	Юпітер	Сатурн
5. сїчня	336°2 −6°6	305°2 −2°6	104°0	150°9 +1°8	325°8 −0°9	299°7 −0°
4. лютого	142°9 +7°0	352°7 −3°4	134°5	164°0 +1°7	328°5 −1°0	
6. марта	248°6 −2°6	40°5 −2°0	164°7	177°2 +1°4	331°2 −1°0	
5. цьвітня	334°8 −6°2	88°8 +0°8	194°5	190°7 +1°1	333°9 −1°1	302°4 −0°
5. мая	153°0 +6°7	137°5 +3°0	223°8	204°5 +0°8	336°6 −1°1	
4. червня	254°2 −3°2	186°2 +3°2	252°7	218°9 +0°3	339°3 −1°1	
4. липня	353°9 −5°6	234°3 +1°2	281°3	233°9 −0°2	342°0 −1°2	305°2 −0°
3. серпня	162°5 +6°3	281°9 −1°5	310°0	249°7 −0°7	344°7 −1°2	
2. вересня	259°8 −3°8	329°4 −3°3	338°8	266°3 −1°1	347°4 −1°2	
2. жовтня	3°6 −4°8	17°1 −2°9	8°1	283°8 −1°5	350°1 −1°2	308°0 −0°
1. падолиста	171°3 +5°8	65°1 −0°6	37°9	302°1 −1°8	352°9 −1°3	
1. грудня	265°4 −4°3	113°6 +2°1	68°1	320°8 −1°8	355°6 −1°3	
31. грудня	13°9 −3°9	162°3 +3°4	98°6	339°9 −1°7	358°4 −1°3	310°7 −0°

Середне наклонене еклїптики на рік 1903,0 є: 23°27′6″60.
Перехід сонця (час середноевропейский) через:

точку рівноденну весняну
21. марта $20^h\ 15^m$

точку пересиленя лїтну
22. червня $16^h\ 5^m$

точку рівноденну осїнну
24. вересня $6^h\ 44^m$

точку пересиленя зи.
23. грудня $1^h\ 20^m$

(0^h = північ, 12^h = полудне).

(Zeitschr. für physik. u. chem. Unterricht XVI. Heft

Мраковини в окруженю Новоï Perseï. В р. 1901. (в вересню) відкрив Ritchey (обсерваторія Yerkes'a) фотографічно перстеневі мраковини в окруженю сеï зьвізди. Опісля постеріг Perrine (обсерваторія Licka'a) в падолистї 1901. такі зміни в тих мраковинах що до розмірів, положеня і вигляду, що з огляду на величезне віддаленє сеï зьвізди (паралякса 0"1) треба було принятн скорість тих мас рівну скорости сьвітла. В виду сего Kapteyn поставив гіпотезу, що Nova при своїм розсьвіченю вислала филї сьвітляні, які відбивають ся постепенно від щораз то дальше положених частий окружаючих мраковин; мали би ми отже т. зв. ехо сьвітляне. Гіпотезу сю попер математично Seeliger, а спосіб ёï переведеня є так інтересний, що в коротці его ту подамо.

Ніеля заложеня Seeliger'a розсьвіченє нових зьвізд походить звідси, що великі маси передирають ся через космічні хмари, через що їх рух трафляє на перепони і наступає анальогічне явище, як тодї, коли метеор передирає ся через земску атмосферу; ріжниця та, що при розсьвіченю зьвізди відбуває ся усе в величезних розмірах і кольосальних віддаленях. Наколи час розсьвіченя зьвізди є короткий (пару день, як у нової Persei), тодї місцем ґеометричним тих частинок окружаючої мраковини, від яких відбите сьвітло до нас рівночасно доходить, мусить бути парабольоід оборотовий (Фіґ. VI.); его огнищем є нова зьвізда S, а напрям его оси є звернений до нас. Зі звісних свойств параболї слїдує, що дороги сьвітла SP_1Q_1, SP_2Q_2, SP_3Q_3 і т. д. є всї рівні дорозї $SP = PR$. Наколи на луку начеркненоï параболї находять ся частинки маси, від яких сьвітло може ся відбити, то обсерваторови, що ся безконечно далеко находить, буде видавати ся, що всї ті частинки рівночасно ся розсьвітили, бо сьвітло відбите від точок сеï параболї рівночасно дістає ся до лїнїï PP', а звідси іде яко плоска филя до нас. Через оборот сеï параболї довкола лїнїï SE повстане згаданий парабольоід; для ріжних часів дістанем громаду співогнищевих парабольоідів, яких параметри є пропорціональні до часів, що минули від хвилї розсьвітленя зьвізди.

Возьмім під увагу плоску верству мраковинну, то она лиш тодї розсьвітить ся (в оцї обсерватора), наколи перетинає парабольоід, що даній хвилї відповідає; тим робом легко витолкувати собі повстанє перстеневих ясних лїнїй з пересуненєм відосередним, як се фотографія виказує. З розслїджуваня найдальше від осередка положених мраковинних перстенів заключає Seeliger, що найяснїйше місце нової лежить по сторонї відверненій від сонця, наколи противна мраковина зближає ся до нас. — Наколи приймемо в масї

мраковинний утвори подібні до поясів о переважно лінійній розтяглости, то поверхні перерізи тих поясів з ріжними (відповідно до часу) парабольоідами мусїли-б виступити яко ясні ізольовані плями, що не зміняли би свого виду, а за се від нової зьвізди віддаляли ся та показували скручене кута положеня (позицийного). Такі плями дїйсно найдемо в фотографіях нової. Теорию свою розвинув Seeliger в Astrophysical Journal Nov. 1902.

Рівночасно зібрав Perrine в тім самім зошитї Astrophysic. Journ. явища, які фотографія нової показує; ось его постереженя:

В лютім 1902. р. істнували дві виравьні области мраковинні, а се перстень о промірі 15′, і перстень слабший внїшний о промірі 30′. Луч внутрішного перстеня ріс що дня о 1″4, внїшного о 2″8, з чого слїдує, що оба они мусїли зачати розвивати ся в хвилї розсьвіченя нової т. є. в лютім 1901. р.

Найвиразнїйші місця в тих перстенях показують кромі сего рух оборотовий в части згідно, в части незгідно з рухом вказівки годинника; як раз ся обставина промавляє за правдивостию гіпотези Kapteyn'a-Seeliger'a. Внутрішний перстень взагалї став меньше, внїшний більше ясний.

В сьвітлї мраковини не викрив Perrine поляризациї; се є трудність, з якою гіпотеза Kapteyn'a-Seeliger'a зустрічає ся, но се можна приписати дуже слабому сьвітлу, так що трудно викрити в відбитім сьвітлї поляризацию.

(Zeitschr. für physik. u. chem. Unterricht XVI. Heft 2).

Інтересний планетоід. З поміж планетоідів, відкритих в р. 1902., найінтереснїйший є планетоід 1902. KX, відкритий через Вольфа в Гейдельберзї. Час его обігу тревав майже вісїм лїт, найбільше віддалене від сонця 4,84 лучїв орбіти земскої, відосередність майже четверту часть его середного віддаленя. В найбільшім віддаленю від сонця зближав ся сей планетоід на 60 мілїонів km до Юпітера; сонце представляє ся тодї на тім планетоіді під кутом 400″, а за се Юпітер під кутом 480″. Така позиция тревав більше як два роки, і в тім часї переходить Юпітер о півночи через полуденник і є 100 рази яснїйший, як у нас; по тім періоді він що раз більше меньшав і слабне. Чотири давні місяцї Юпітера видають ся на планетї KX першої, пятий (Барнарда з р. 1892.) с ної величини. Що таке зближене до Юпітера потягне і потягав з собою великі зміни в дорозї сего планетоіда, то річ очевидна ся має велике теоретичне значіне.

(Das Weltall, 3. Jahrg. 16. Heft

Величезний метеорит відкрив проф. H. A. Ward в Мехіку недалеко міста Bokubirito; він в довгий на 4·23 m, широкий 1·85 m, грубий 1·60 m, вага его 50800 kg. Его внутрішна будова показує структуру кристалїчну і дуже гарні фіґури Widmannstätt'a. Питомий тягар 7·69, склад хемічний 88% Fe з примішкою Ni і Co. Метеорит сей находить ся тепер в природописнім музею в Ню-Йорку.

(Die Umschau VII. 1903. № 8).

Періодичні прояви в неорґанічній материї. Періодичні прояви, що є дуже розповсюднені в сьвітї орґанічнім (сон, віддихане, рух серця etc.), виступають дуже рідко у материї неорґанічній. В своїм часї зробило велике вражінє постереженє Ostwalda, що хром металїчний розпускає ся в квасах з переміннною (періодичною) скоростию; через пару хвиль витворюють ся численні баньки ґазу, опісля витворюване ґазу уставало на пару хвиль, знову виступало сильно і т. д. Сеї власности не має кождий кусник металїчного хрому. — Анальоґічне поведене викрили недавно Bredig і Weinmayr у ртути. Наколи на чисте годинникове скло (о промірі 1·3—2 cm) наляти пару cm^3 Hg, а на Hg до 10 cm^3 10%-ового розтвору чистого двоокису двоводня (H_2O_2), то ртуть покриває ся в температурі звичайній дуже скоро болонкою барви бронзово-золотої, а H_2O_2 видїляє баньочки кисня; по 5 40 мінутах устає нараз видїлюване ґазу, а опісля по пару секундах зачинає ся на ново. Такі періодичні прояви виступають раз у раз нераз через цїлу годину. Явище те стоїть імовірно в звязи зі зміною напруги поверхневої, але покищо не є ще точно вияснене.

(Zeitschr. f. physik. Chemie 1903. XLII. 5).

В ґазах, що видобувають ся з вулькану Mont Pelée, викрив славнозвісний парискій хемік Moissan H, CO_2, CO, H_2S, CS, CH_4, C_2H_2, N, NH_3, A і He. Тепер же виказав Gautier, що наколи скалу в просторі безвоздушнім розігріти до червоного жару, то з неї видістають ся величезні маси повищих ґазів. Пр. шестистінник ґраніґовий о ґрани 1 km в тих обставинах дасть тілько ґазів, що через їх палене повстає 31 мілїонів тон води. З сего слїдує, що до вибу ів вулканічних не конче є потрібний приступ морскої води до ро леного внутра землї.

(Compt. rendus 136. 16).

Фірма F. Schmidt і Haensch в Берлїнї построїла дуже простий апарат проекційний, що не лиш служить до кидання на екран образів прозрачних предметів (діяпозитивів), як се роблять до тепер уживані скіоптикони і апарати проекційні, але позваляє також діставати на екрані образи непрозрачних предметів, як книжок, рисунків, металїв, анатомічних препаратів в начинях, кристалїзаційних прояв, лїнїй сили, фігур Chladni'ого (положених поземо) etc. Близший опис сего нового та пожиточного знаряду находить ся в

Deutsche Mechaniker Zeitung 1903. № 5.

Проф. Newcomb (Washington) оголосив недавно в книжцї: The Stars. A Study of the Universe. (London 1901. 8⁰ ст. 320 + 6 таблиць) свої погляди про вселенну; погляди ті, поперті і математичною аналїзою і фільозофічними спекуляціями, можна зібрати ось-так: Наколи приймем за одиницю просторну кулю, що єї промір рівнає ся 200000 віддаленям землї від сонця, то пересїчно випадає на 8 таких одиниць одна зьвізда. Наша вселенна є цариною, просторно обмеженою, але з сего ще не слїдує, щоби далеко за нею не істнували ще иньші „острови всесьвітні", про які ми нїчо не знаєм, бо там вже сила наших телескопів та фотографічних плит не сягає. Внїшна границя нашої вселенної є доволї неправильна; на нїй зьвізди є рідше розміщені, як у вселенній самій. Віддалене сеї границї від нас є більше, як 3000 лїт сьвітла; єї розміри в площі, визначеній через дорогу чумацку, є більші, як в напрямі до тої площі прямовіснім. Число зьвізд, що належить до нашої вселенної, виносить сотки мілїонів. — Ті погляди автора в істоті ріжнять ся де в чім від поглядів Seeliger'a, Kapteyn'a та Schiaparelli.

(Himmel u. Erde, Jahrg. XV. 1903. зош. 8).

Звідки взяв ся термометр Фаренгайта? Скаля сего термометру походить від Нютона, що в р. 1701. приняв температуру крови за точку вихідну своєї скалї; его термометр був руркою скляною, наповненою олїйом льняним, найнизшою его точкою була точка замерзаня. Точка, відповідаюча температурі крови, мала число 12 після тодї уживаного систему; відступ між точкою замерзаня а точкою температури крови був поділений на 12 часть, так що точка кипіня води випадала при 30 степенях. Опісля Fahrheit пересьвідчив ся, що степені Нютона за далеко від себе стоять, і тому з початку поділив кождий з них на дві части, так що температура крови виносила 24⁰. Пізнїйше взяв він озябляючу міс-

нину соли і леду, якої температура лежала після его скалї 8° під точкою замерзаня. Від сеї точки до точки температури крови подїлив скалю на 24 частий, так що точка замерзаня мала 8°, точка кипіня води 53°. А коли зайшла потреба мірити ще низші температурв, подїлив кождий степень на чотири части, так що точка замерзаня випала $4 \times 8 = 32^0$, точка температури крови $4 \times 24 = 96^0$, а точка кипіня води $4 \times 53 = 212^0$.

(Prometheus 4. 1903. ст. 16).

	корон
Барвінок Евген. Досліди над переміною матерії	0·20
— Про пропасницю	0·20
— Про уробілінну жовтачку	0·10
Вахнянин Михайло. Туберкульоза у людий і звірят	0·60
Вислоух Іван. Непропаща сила	0·20
— Нові і перемінні звізди	0·15
Гринчак Федір. Причинки до історії розвитку інволюції желези thymus у риб хістоскелетних	0·30
— Ще кілька слів про глезу риб хістоскелетних	0·20
Заковский Іван Вік нашої землі	0·10
— Вулькани	0·20
Здройовський Стефан. Про плями сонячні часть I.	0·30
— „ „ „ „ II	0·90
Здоровий Семен. Студия анатомічна над взаїмними відношеннями внутрішнього слухового і міхура плавного у риб шарувватих і вьюноватих	1·00
— Про ногастки зібрані в Галичині	0·30

АДРЕСА:

Наукове Товариство імени Шевченка.

Львів, ул. Чарнецкого 26.

ADRESSE:

Sevcenko-Gesellschaft der Wissenschaften, Lemberg, Carnecki-Gasse 26.

Ціна 5 корон.