ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСЬКОЇ СЕКЦИЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

ТОМ XIV.

ПІД РЕДАКЦИЄЮ

ІВАНА ВЕРХРАТСКОГО, Дра ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦЬКОГО
і Дра СТЕФАНА РУДНИЦЬКОГО.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

BAND XIV.

REDIGIRT VON

JOHANN WERCHRATSKYJ, Dr. WŁADIMIR LEWYĆKYJ
u. Dr. STEPHAN RUDNYĆKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1910.

Накладом Наукового Товариства ім. Шевченка

З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка
під зарядом К. Беднарского.

ЗМІСТ.

INHALT.

Метациклїчні рівнаня і їх ґрупи.

(Über metazyklische Gleichungen und deren Gruppen).

НАПИСАВ

Микола Чайковський.

Теорія альґебраічних рівнань, се та частина альґебри, на якій і при якій розвинула ся цїла альґебра. Викликана потребами практичного житя (розвязка рівнань), дала вона почин до введеня дробів, відємних, невимірних та злучених чисел. З неї взяла початок теорія визначників і теорія форм.

Рівнаня чотирох перших степенів розвязано розмірно скоро; квадратні рівнаня знали вже Пітаґорейцї, з кубовими рівнанями стрічаємо ся при звіснім проблємі подвоєня куба (Плято, Менехм, 4. стол. пер. Хр.), а розвязку двоквадратного рівнаня завдячуємо Феррови († 1526 — оголошена друком 1545), Карданови (1501—1576), Тарталїї (1501—1557) і Ферарієви (1522—1565). Перед рівнанєм пятого степеня задержували ся найвизначнійші математики того часу і слїдуючих столїть, стрічаючися з непоборимими трудностями.

Lagrange (1736—1813) змагав ся розвязувати ті рівнаня і рівнаня висших степенів при помочи ресольвент (1771), але дійшов до переконаня, що рівнанє, від якого залежить ресольвента, є висшого степеня нїж дане рівнанє, отже тою методою не можна дійти до розвязки. В тім часї виринула квестія, чи рівнаня висших степенїв є взагалї рішимі; підніс її 1799 р. італїйський математик Ruffini відносно 5-го степеня, але не довів до нїякого вислїду. Тодї працювали математики над спеціяльними клясами рішимих рівнань; найповажнїйшу теорію сотворив Gauss (1777—1855) для рівнаня подїлу кола („Disquisitiones arithmeticae“, VII, 1801); він перший подав також доказ, що кожде альґебраїчне рівнане має бодай один корінь з обсяґу злучених чисел (основне твердженє альґебри, 1799).

Абель (1802—1820) знайшов доказ, що загальне рівнане пятого степеня не є альґебраїчно рішиме (1824), а два роки опісля (1826) доказав те саме для рівнань висших степенїв. Йому завдячуємо також відкритє одної спеціяльної кляси рішимих рівнань (1829), званих Абелевими. Сучасний йому Galois (1812—1832) подав умови, коли рівнане висшого степеня може бути рішиме; своєї теорії він не викінчив, подав тільки її загальний начерк — в передоднї своєї смерти.

Galois опер ся на теорії ґруп, якої початки подав Cauchy (1789—1857) в своїх викладах на полїтехнїцї в Парижі („Exercices d' analyse“). Від тої хвилї стає теорія ґруп підвалиною теорії альґебраїчних рівнань; на нїй опирають ся всякі дальші дослїди, ведені Kronecker'ом (1823—1891) і Камілем Jordan'ом (ур. 1838), двома найважнїйшими піонїрами теорії Galois. Перший з них подає свої вислїди в розвідках, поміщуваних в „Monatsberichte der Berliner Akademie“ почавши від 1853 р., а кінчить їх величавим твором „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen“ (Crelle's Journal, 1882), в якім зібрані результати його довголїтнїх дослїдів. Другий коментує від 1867 р. Galois'а („Mémoire sur la résolution algèbrique des équations“, Liouville's Journal, 1867; „Sur la résolution algèbrique des équations primitives de degré p^2“, ibid. 1868, і „Commentaire sur Galois“, Mathematische Annalen I, 1868) і подає дуже основну теорію ґруп і рівнань („Traité des substitutions et des équations algèbriqués“, 1870).

Побіч тих двох математиків заслужили ся ще для теорії рівнань Netto (ур. 1846) своїми творами, Weber (ур. 1842) першою строгою розвязкою рівнань первого степеня, Mertens (ур. 1840), Hölder, Wiman і богато инших. Нинї теорія рівнань являєть ся величавою будівлею, замкненою в собі, яка до своїх результатів потрібує тільки деяких дослїдів з теорії чисел (конґруенцій, степенних останків і т. д.). На жаль, зістає та теорія тільки теорією; вже Kronecker висказав ся раз принагідно, що такі рівнаня, про які говорить ся в теорії, не істнують в дїйсности.

Нашим змаганем буде, представити в головних начерках теорію Galois, доповнену пізнїйшими дослїдниками. В першій части подаємо основи, потрібні до теорії рівнань (теорію ґруп), в другій властиву теорію рівнань, а в третій приміненє тої теориї до ріжних типів рішимих рівнань: при рівнанях степеня p^2 подані деякі наші власні розсліди. — Жерелами, якими ми користували ся, були переважно твори Netto'на, Weber'а, Jordan'а й ин.; всї вони цитовані у відповідних місцях.

Тернопіль, вересень—падолист 1910.

Перша частина.

Основи.

I. Пермутациї і субституциї.

§. 1. Маємо даних n яких небудь елементів (предметів або річий), які означуємо

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \qquad x_n,$$

або тільки самими їх показчиками (індексами)

$$1,\ 2,\ 3, \qquad n.$$

Тим елементам не накладаємо нїякого иншого обмеженя, тільки те, що вони мають бути між собою ріжні; о їх величину не ходить нам зовсїм.

Уґрупуймо їх в такім порядку:

$$1,\ 2,\ 3, \qquad n;$$

таке уґрупованє елементів за кождим разом називаємо комплексією. Коли-б ми їх за другим разом уставили инакше нпр. в ряд

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \qquad a_n,$$

так що всї елементи з другого ряду мають рівні собі елементи в першім рядї, то перехід з першого ряду до другого вимагає виконаня якоїсь пермутациї (переставленя) тих елементів. Пермутацію означуємо так:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \end{pmatrix};$$

значить, що на місце елемента i прийде инший a_i, визначений докладно і однозначно. Елементи a_i є, як сказано, ті самі, що елементи i, отже коли заступимо $n-1$ елементів i $n-1$ елементами a_i, то тим самим знаємо вже однозначно і n-тий елемент. Нпр. маємо дані елементи

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

в тім самім порядку, що природний ряд чисел. Друга комплексія тих самих елементів нехай буде

$$2,\ 4,\ 3,\ 5,\ 1\ ;$$

перехід з першого упорядкованя до другого вимагає пермутації

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Коли знаємо, що елемент 1 маємо заступити елементом 2, 2 елементом 4, 3 собою самим, 4 елементом 5, — то тим самим вже знаємо, що позісталий елемент 5 мусимо заступити позісталим з другого ряду т. є 1.

Пермутація, яка не зміняє порядку елементів, називаєть ся **ідентична пермутація**, а означуємо її одинкою

$$1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & & n\\ 1 & 2 & 3 & & n\end{pmatrix}.$$

§. 2. Коли комплексію

$$1,\ 2,\ 3,\qquad n$$

перевести в

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\qquad a_n,$$

то ту другу комплексію можемо при помочи пермутації

$$\pi'=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & & .a_n\\ b_1 & b_2 & b_3 & & .b_n\end{pmatrix}$$

перевести знов в иншу комплексію, а саме в

$$b_1,\ b_2,\ b_3\qquad b_n\ ;$$

та комплексія буде містити ті самі елементи, що дві перші. Отже, щоби з першої комплексії перейти в третю, треба виконати дві пермутації π і π'. Символічно зазначуємо се як добуток: пермутація $\pi\pi'$ переводить першу комплексію в третю

$$\pi\pi'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & & n\\ b_1 & b_2 & b_3 & & b_n\end{pmatrix}.$$

Таке виконуванє двох пермутацій по черзі називаємо **множенєм пермутацій**. — Подібно можемо ще далї перейти до четвертої комплексії

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\qquad c_n$$

$(c_1,\ c_2,\qquad c_n$ є все ті самі елементи, що $1,\ 2,\qquad n$, тільки в иншім порядку) при помочи пермутації

$$\pi''=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & & b_n\\ c_1 & c_2 & & c_n\end{pmatrix},$$

так що

$$\pi\,\pi'\,\pi''=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & & n\\ c_1 & c_2 & c_3 & & c_n\end{pmatrix};$$

загально при помочи m пермутації дійдемо врешті до

$$m_1,\ m_2,\ m_3, \qquad m_n.$$

Множене пермутацій виконуємо або чергою, т. є до добутка двох перших примінюємо третю, до тої комплексії четверту і т. д., — або можемо відступити від того порядку в той спосіб, що перше скомбінуємо з собою які небудь пермутації з середини, а опісля ту вислідну пермутацію вважатимемо одним членом добутка і примінимо її як таку в дотичнім місці, нпр.

$$\pi\,\pi'\,\pi''=(\pi\,\pi')\,\pi''=\pi\,(\pi'\,\pi'')$$

З того слідує, що множенє пермутацій підлягає законови сполучуваня (асоціяції); закон переміни (коммутації) не має тут такого значіня, як при звичайнім множеню. Бачимо се на примірі:

$$\pi_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1\end{pmatrix},\quad \pi_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}.$$

Другу пермутацію можемо написати також ще так:

$$\pi_2=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3 & 5 & 1\\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix},$$

бо в ній так само, як в горішній формі сказано, 1 заступимо 4, 2 заступимо 3, 3 – 1, 4 – 5, а 5 - 2.

Їх добутки є:

$$\pi_1\,\pi_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & 3 & 5 & 1\\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix},$$

$$\pi_2\,\pi_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 1 & 5 & 2\\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix},—$$

отже два зовсім відмінні результати.

Виїмкові випадки, де добуток пермутацій не залежить від порядку, в якім пермутації виконуємо, будуть нас займати опісля; се т. зв. перемінні (kommutative, vertauschbare) пермутації.

§. 3. Добуток двох однакових пермутацій означуємо анальогічно до множеня як степень: $\pi\pi=\pi^2$. Нпр.

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1\end{pmatrix},$$

$$\pi^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & 3 & 5 & 1\\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Подібно означуємо також третю, четверту n-ту степень даної пермутації, π^3, π^4, π^n, нпр.

$$\pi^3 = \pi^2 . \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\pi^5 = \pi^3 . \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\pi^5 = n^4 . \pi = 1 . \pi = \pi, \text{ і т. д.}$$

Скількість всїх можливих уґруповань n елементів є $n!$, отже не є безконечно велика; длятого ряд степений мусить містити в собі і ідентичну пермутацію. Нехай буде

$$\pi^m = 1,$$

то маємо: $\pi^{m+1} = \pi^m . \pi = 1 . \pi = \pi$, $\pi^{m+2} = \pi^2$, ., $\pi^{m+n} = \pi^n$ і т. д., отже ряд степений пермутації π повторюють ся періодично по m членах:

$$\pi, \pi^2, \quad ., \pi^{m-1}; \pi^m = 1.$$

Сей ряд називаємо **періодою** (Periode) пермутації π, а виложник m її **порядком** (Ordnung).

Врешті називаємо скількість елементів, яка приходить в даній комплексії, її **степенем** (Grad). Коли m є порядком, а n степенем пермутації π, то m і n стоять до себе в реляції

$$m \leqq n,$$

а то з тої причини, що:

1. Коли π не переводить **кождий** елемент в инший, то що йно по n повторенях верне той елемент на своє місце; скорше вернути не може, бо π за кождим разом посуває його на инше місце, отже в тім разї є $m = n$.

2. Коли π не переводить одного або більше (k) елементів в инші (в нашім остатнїм примірі елемент 3), то наша пермутація відносить ся тільки до $n-k$ елементів, пересуваючи їх за кождим разом; длятого по $n-k$ повторенях вернуть всї вони на своє місце, отже $m = n - k$, т. зн. $m < n$.

3. Коли-б було $m > n$, то кождий з елементів перейшов би всї місця ще перед m-тим повторенем, отже m не могло би називати ся порядком пермутації. З того виходить, що $m \leqq n$.

§. 4. Коли

$$\pi^m = 1,$$

то з рівнаня

$$\pi^\alpha = \pi^\beta$$

виходить

$$\alpha \equiv \beta \ (\mathrm{mod}\, m)$$

т. є

$$\alpha = \beta + km,$$

бо

$$\pi^{\alpha} = \pi^{\beta+\mathrm{km}} = \pi^{\beta}\,\pi^{\mathrm{km}} = \pi^{\beta}(\pi^{\mathrm{m}})^{\mathrm{k}} = \pi^{\beta}.$$

Після того можемо все в виложнику степеня пермутації опустити многократь числа m. Звідси бачимо, що можна написати також так:

$$\pi^{\mathrm{m}-1} = \pi^{-1},$$

отже π^{-1} буде означувати таку пермутацію, яка множена першим степенем пермутації π дасть 1, бо:

$$\pi^{-1} . \pi = \pi^{\mathrm{m}-1} . \pi = \pi^{\mathrm{m}} = 1.$$

Взагалі $\pi^{-\mathrm{k}}$ означує таку пермутацію, яка множена пермутацією π^{k} дасть 1. Пермутацію $\pi^{-\mathrm{k}}$ називаємо **відворотною** (reziprok) до π^{k}, анальоґічно до звичайного множеня: $a^{-\mathrm{k}}$ і a^{k} є відворотні числа, бо $a^{-\mathrm{k}} . a^{\mathrm{k}} = 1$.

§. 5. Якунебудь пермутацію виконуємо так, що кождий елемент заступаємо котримось иншим по даному приписови. Сей припис називаємо загально **субституцією** (підставленем). Субституція або подає кождий елемент з окрема з його заступником, — і тоді вона є рівнозначна з пермутацією, — або вказує тільки на правило, по якому треба поодинокі елементи перемінювати. Тоді пишемо так:

$$\sigma = (i,\ a_{\mathrm{i}}),$$

т. зн., що елемент i заступаємо в загалї елементом a_{i}, — або також можемо се написати у виді функції

$$\sigma = \mid z \quad \varphi(z) \mid,\ (z = 1,\ 2 \qquad n)$$

де z і $\varphi(z)$ можуть приймати тільки вартости 1, 2, $\qquad n$.

Взагалі є субституція рівнозначна з пермутацією; ріжниця лежить в тім, що субституція подає припис переставлюваня, а пермутація означає саму операцію переставлюваня *).

§. 6. Субституцію називаємо **циклїчною** (коловою, cyklisch) або **циклем** (Zyklus), коли вона містить в собі припис, що кождий елемент заступаємо слїдуючим, а остатнїй першим. Циклїчну субституцію пишемо так:

---

*) Деякі автори відріжняють дуже точно пермутації і субституції (впр. Weber) инші (Net[illegible]) уживають тільки назви субституція, рівнозначно з понятєм пермутації.

$$c = (1\ 2\ 3 \qquad\qquad n);$$

вона рівнозначна з пермутацією

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \qquad\qquad & \overline{n-} & n \\ 2 & 3 & 4 & \qquad\qquad & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Циклїчна субституція n елементів має періоду о n членах так, що $s^n = 1$, а всї попереднї степенї є ріжні від n. Се видко з того, що в циклю є кождий член заступлений слїдуючим, а нї один собою самим, отже треба ту саму субституцію повторити n разів, щоби кождий член, перейшовши всї місця, вернув на первісне. Тому то є циклї такими субституціями, в яких степень є рівний порядкови.

Назва циклїчної субституції походить звідси, що коли би ми обвід кола подїлили на n рівних частий і в точках подїлу написали чергою елементи 1, 2, 3, $\quad$ n, то обертаючи коло о кут $\frac{2\pi}{n}$ накрили-б ми елемент 1 елементом 2, 2 елементом 3 і т. д., а остатнїй n першим. З того видко, що цикль можемо зачинати від котрогонебудь елемента (гл. §. 2).

§. 7. Кожду пермутацію можна заміняти на циклїчну, і то так, що розложимо її на один або більше циклів. Робимо се так: Нехай буде дана пермутація

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \qquad & n \\ a_1 & a_2 & a_3 \,.. & \qquad & a_n \end{pmatrix}.$$

На початку циклю пишемо елемент 1, а побіч нього a_1; се значить, що на місце 1 прийде a_1. Тепер шукаємо, який елемент стоїть під a_1; коли тим елементом є 1, то замикаємо цикль; коли-ж той елемент a_e є ріжний від 1, то виписуємо його побіч a_1 і шукаємо знов того, що стоїть під a_e. Коли там знайдемо 1, замикаємо цикль; в противнім разї шукаємо дальшого елементу, що стоїть під виписаним на остапку. Натрафивши врештї на 1, замикаємо цикль; се мусить конечно колись стати ся, бо 1 мусить прийти на місце котрогось з прочих елементів.

Коли ми тим чином вичерпали всї елементи, тодї вважаємо нашу задачу покінченою. Коли-ж нї, беремо один з тих елементів, яких в циклю ще нема, і зачинаємо від нього новий цикль. Сей другий цикль мусить також скінчити ся, а і скількість циклів взагалї є скінчена, бо елементи не є данї в безконечнім числї.

Один елемент не може повторяти ся в двох циклях, бо тодї сей елемент з другого циклю потягнув би за собою котрийсь елемент з першого, а тим самим і цїлий перший цикль знайшов би ся в другім, а се неможливе, бо в другім циклю по припасови помістили ми ті елементи, яких нема в першім.

Нпр. розложити на циклї

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 8 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зачинаємо від 0; під ним стоїть 5, отже пишемо початок (05. Елемент 5 має бути заступлений елементом 9, а 9 елементом 0, т. є тим, від якого ми цикль зачинали. Маємо проте перший цикль,

$$(0\ 5\ 9).$$

Тепер беремо один з тих елементів, яких в тім циклю нема, нпр. 1, і бачимо, що 1 заступлений 3, 3—6, 6—8, а 8 знова 1; проте другий цикль буде (1 3 6 8). Третий цикль зачнім від 2 2 — 7, 7 — 2, кінець: (2 7). Бракує ще 4 4 заступлене само собою, отже (4). Проте маємо:

$$\pi = (0\ 5\ 9)\ (1\ 3\ 6\ 8)\ (2\ 7)\ (4).$$

Одночленний цикль можемо опустити, бо він не змінює нічого в данім комплексї. Поодинокі циклї є перемінні, бо вони не мають спільних елементів; длятого нам байдуже, котрі з елементів будемо перше переставляти.

Загально пишемо:

$$\pi = c_1 \quad c_2 \qquad\qquad c_\lambda,$$

де c_1, c_2, $\qquad$ c_λ є поодинокими циклями. Порядок субституції π є найменшою спільною многократю степенїв поодиноких циклїв. Нехай n_1 буде степень цикля c_1, n_2 степень цикля c_2, $\qquad$ n_λ степень цикля c_λ, а v найменша спільна многократь чисел $n_1, n_2, \ldots n_\lambda$, то

$$\pi^v = (c_1{}^v)(c_2{}^v) \qquad .(c_\lambda{}^v).$$

а що кожде $c_i{}^v = c_i{}^{n_j \frac{v}{n_i}} = 1$ (бо $\frac{v}{n_i}$ є ціле число), то і $\pi^v = 1$.

В нашім примірі є v (2, 3, 4) = 12, отже $\pi^{12} = 1$.

Субституція називаєть ся правильною (regelmässig), коли всї її циклї мають рівну скількість елементів; тодї порядок цїлої субституції є рівний порядкови складових циклїв.

Дві субституції називають ся подібні (ähnlich), коли обі мають циклї тих самих порядків; порядки двох подібних субституцій є собі рівні.

§. 8. Коли хочемо обчислити квадрат цикля, то перескакуємо все один елемент і переходимо до слїдуючого, бо квадрат є рівнозначний з пересуненєм кождого елемента о два місця. При третїй степенї перескакуємо о два місця, при k-тій о $k-1$ елементів. Результат того такий, що при $(n-1)$шій степенї йдуть по першім елементї всї инші в противнім порядку нїж первісно.

Коли k є дїльником числа n, то k-та степень цикля розпадаєть ся на k циклїв по $\frac{n}{k}$ елементів, бо посуваючи ся від 1 все о k місць по $\frac{n}{k}$ кроках прийдемо знова до 1. Нпр. маємо цикль:

$$c = (\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)\ ;$$

в нїм є:

$$c^2 = (1\ 3\ 5)\ (2\ 4\ 6),$$
$$c^3 = (1\ 4)\ (2\ 5)\ (3\ 6).$$

Цикль зложений з двох елементів, називаємо транспозицією (переміщенєм)

$$\tau = (1\ 2)\ ;$$

його квадрат є 1, бо посунувши ся від 1 о два місця, вернемо до 1. З тої самої причини є:

$$\tau^{-1} = \tau.$$

§. 9. Кождий цикль можна дальше розкладати на циклї низших степенїв. Робимо се так; коли a, b, c, $\qquad n$, є елементами даного циклю

$$c = (1\ 2 \qquad a \qquad b \qquad c \qquad\qquad n),$$

тодї творимо

$$c_1 = (1\ 2 \qquad a),$$
$$c_2 = (1\ \overline{a+1} \qquad b),$$
$$c_3 = (1\ \overline{b+1} \qquad c),$$

$$c_\mu = (1\ \overline{m+1} \qquad n)$$

і маємо

$$c = c_1\ c_2\ c_3 \qquad c_\mu,$$

бо при множеню циклїв кінцевий елемент першого, a, заступаємо початковим 1, а той елементом $\overline{a+1}$ з другого цикля і т. д. Треба завважати, що добуток тих циклїв не є перемінний, як в §. 8, бо ті циклї мають один спільний елемент, 1.

Спеціяльно можемо розложити кожду циклїчну субституцію на $n-1$ транспозицій:

$$(1\ 2\ 3 \qquad n) = (1\ 2)\ (1\ 3) \qquad (1\ n).$$

§. 10. Нехай буде дана субституція

$$\pi = c_1\ c_2 \qquad c_n.$$

Обчислїм такий добуток:

$$\varrho = k^{-1}\ \pi k,$$

де

$$k = k_1\ k_2 \qquad k_m.$$

Передовсїм маємо ідентично:

$$\varrho = k^{-1}\ \pi k = (k^{-1}\ c_1\ k)\ (k^{-1}\ c_2 k) \qquad (k^{-1}\ c_n\ k)\,;$$

з того бачимо, що бажаний добуток одержимо, творячи анальоґічні добутки для кождого із складових циклїв.

Добуток

$$\varrho = k^{-1}\ \pi k$$

називаєть ся трансформованою, (transformierte) перетвореною субституцією з π при помочи k. Трансформацію виконуємо так, що в кождім поодинокім циклю виконуємо зміну, приписану в k.

Нпр. маємо трансформувати

$$\pi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$$

при помочи

$$k = (3\ 6\ 7)$$

отже виконати множенє

$$\varrho = k^{-1}\ \pi k = (3\ 6\ 7)^{-1}\ (1\ 2\ 3\ 4\ 5)\ (3\ 6\ 7),$$

а що

$$(3\ 6\ 7)^{-1} = (3\ 6\ 7)^2 = (3\ 7\ 6), \text{ то}$$

$$\varrho = (3\ 7\ 6)\ (1\ 2\ 3\ 4\ 5)\ (3\ 6\ 7) = (1\ 2\ 6\ 4\ 5).$$

Ужаваючи поданого правила, щоби в π виконати зміну по приписам k, одержимо рівно-ж

$$\varrho = (1\ 2\ 6\ 4\ 5),$$

бо k каже заступити елемент 3 елементом 6, 6 елементом 7, а 7 елементом 3; 6 і 7 відпадуть, бо їх нема в π, і звідси маємо такий самий результат.

II. Ґрупи.

§. 11. Нехай ряд

$$A, B, C, D, \qquad ., E \qquad (1)$$

представляє які небудь елементи: можуть се бути числа, операції, субституції, рухи і т. д. — називаємо їх загально операторами*). Коли ті оператори відповідають таким вимогам, що

1. комбінація двох яких небудь операторів є знов оператором з того самого ряду (комбінацію операторів значимо символїчно їх добутком), $AB = C$;

2. комбіноване більшої скількости нїж двох операторів не противить ся законови злучуваня

$$ABC = (AB)C = A(BC);$$

3. з $AC = BC$, згл. $CA = BA$ виходить однозначно

$$A = B,$$

тодї кажемо, що ряд операторів (1) творить ґрупу (Gruppe).

Ґрупа може бути скінчена або безконечна, відповідно до того, чи скількість операторів є скінчена, чи безконечна.

Понятє ґрупи має в математицї велике значінє і часте примінене. Розріжнюємо: ґрупи рухів, ґрупи трансформацій, а також ґрупи субституцій або пермутацій. Той остатнїй рід ґруп має примінене в теорії альґебраїчних рівнань, отже в нашій працї займемо ся тільки ґрупами субституцій.

В склад такої ґрупи входять проте тільки такі субституції, які скомбіновані з собою дають один із членів тої ґрупи. Скількість субституцій в ґрупі називаємо порядком ґрупи, а скількість всїх елементів степенем ґрупи. Порядок ґрупи є найменшою спільною многократю порядків поодиноких субституцій.

Кожда ґрупа мусить містити в собі всї степенї тої самої субституції, бо кожду субституцію можемо комбінувати з нею самою, а коли той процедер повторимо кілька разів, то одержимо всї степенї тої субституції. Так само і ідентична субституція є складовою частиною кождої ґрупи, бо повторюючи якусь субституцію тілько разів, кілько виносить її порядок, одержуємо 1.

На означенє ґрупи, зложеної з операторів 1, A, B, C, $\qquad E$, пишемо:

$$G = [1, A, B, C, \qquad .., E].$$

---

*) Netto, Gruppen- und Substitutionentheorie, Sammlung Schubert, Leipzig 1908, стр. 2.

§. 12. Перше питане, яке займе нас в теорії ґруп, буде очивидно, які ґрупи можна утворити з n елементів

$$1, 2, 3, \quad ., n.$$

Длятого рішім перше питане, кілько є можливих всїх пермутацій з n елементів.

Елемент 1 можемо ставити на всїх n місцях; тодї зістає для прочих $n-1$ елементів тільки $n-1$ місць до переставлюваня. Другий елемент, 2, може вже займити тільки одно з позісталих $n-1$ місць. Отже елементи 1 і 2 можуть бути комбіновані з собою на $n(n-1)$ способів. Тепер вже зістає тільки $n-2$ місць для елементів 3, 4, . ., n; отже елемент 3 може стояти на $n-2$ місцях, а се дає $n(n-1)(n-2)$ ріжних комбінацій з елементами 1 і 2.

Так сходимо по одному елементови аж до остатнього. З того бачимо, що n елементів дає $n! = 1.\ 2.\ 3 \quad n$ ріжних комбінацій.

Отсе число є максімальною границею для порядку ґрупи. В тих n операторах містять ся всї можливі комбінації з n елементів, навіть ті субституції, які переставляють менше ніж n елементів.

§. 13. Ґрупа порядку $n!$ є найбільшою зі всїх ґруп, які можна утворити з n елементів. Се т. зв. *симетрична ґрупа* (symmetrische Gruppe).

Крім неї є ще можливі й инші ґрупи з тих самих елементів. Нпр. періода циклїчної субституції

$$c = (1\ 2 \quad n)$$

творить ґрупу, бо кожде

$$c^k c^\lambda = c^{k+\lambda} = c^\mu$$

належить до періоди субституції v. Се т. зв. *циклїчна ґрупа* (zyklische Gruppe); вона характеристична тим, що її порядок (скількість членів в періодї) рівний степеневи (скількости елементів). — Всї її субституції містять ся в симетричній ґрупі, бо-ж симетрична ґрупа обіймає *всї можливі* субституції, утворені з n елементів. Длятого кажемо, що циклїчна ґрупа *містить ся* в симетричній, або що вона є *підґрупою* (Untergruppe) симетричної. Взагалї кожда можлива ґрупа містить ся в симетричній.

Кожда ґрупа може містити в собі також ще менші від неї підґрупи; кожда ґрупа мусить містити в собі підґрупу, зложену з ідентичної субституції (се також ґрупа, бо 1 комбіноване з собою дає все 1); отсю остатню ґрупу називаємо *ідентичною ґрупою* (identische Gruppe) і значимо її також 1.

Ґрупа, що не містить в собі инших підґруп, крім ідентичної, називаєть ся **поодинокою** (einfach); в противнім разї є ґрупа **зложена** (zusammengesetzt).

§. 14. *До порядків ґруп і підґруп відносять ся*

I. ***Тверджене*** *(Cauchy). Порядок кождої підґрупи є* **дїльником порядку ґрупи, в якій вона містить ся.**

Доказ. Нехай дана ґрупа G обіймає підґрупу H, зложену з субституцій

$$1,\ h_1,\ h_2, \qquad h_\mu, \tag{2}$$

отже порядок ґрупи H є μ. Возьмім яку небудь субституцію з G, якої нема в H, нпр. g_1, і утворім ряд

$$g_1,\ g_1h, g_1h_2, \qquad .,\ g_1h_\mu; \tag{3}$$

всї елементи того ряду є ріжні від елементів ряду (1). Коли ми ще не вичерпали всїх субституцій з G, беремо котру небудь з позісталих, нпр. g_2, і творимо знов подібний ряд, і т. д., аж вичерпають ся всї оператори з G. Таким чином одержимо слїдуючу таблицю:

$$\left.\begin{array}{l}
1,\ h_1,\ h_2, \qquad\qquad h_\mu; \\
g_1,\ g_1\,h_1,\ g_1\,h_2. \qquad\qquad .,\ g_1\ h_\mu; \\
g_2,\ g_2\,h_1,\ g_2\,h_2. \qquad\qquad .,\ g_2\ h_\mu; \\
\\
g_{\nu-1}, g_{\nu-1}h_1, g_{\nu-1}\,h_2, \ldots, g_{\nu-1}\,h_\mu.
\end{array}\right\} \tag{4}$$

Отся таблиця містить в собі як раз всї субституції з G. З неї слїдує безпосередно наше тверджене: коли r є порядком ґрупи G, то

$$r = \mu\nu,$$

отже

$$\mu = \frac{r}{\nu}. \tag{5}$$

Квот $\nu = \frac{r}{\mu}$ з порядків ґруп G і H називаємо **показчиком ґрупи** H **в віднесеню до** G (Index von H in Bezug auf G).

Таке роздїлюванє ґрупи G на рядки таблицї (4) називаємо **роздїленєм ґрупи** G **при помочи підґрупи** H (Verteilung von G mittelst H; Mertens); його значимо так:

$$G = (H,\ g_1H,\ g_2H. \qquad .,\ g_{r-1}\ H) \tag{6}$$

або за Weber'ом (Algebra I. стр. 544) символїчно

$$G = H + g_1 H + g_2 H + \qquad + g_{r-1} H; \tag{7}$$

члени тої суми називає він системою побічних ґруп до H (System der Nebengruppen zu H).

§. 15. З поміж всїх ґруп з n елементів виріжнюють ся т. зв. альтернуюча ґрупа (alternierende Gruppe). Вона складаєть ся зі всїх тих субституцій, які можна розложити на паристу скількість транспозицій, а що скількість транспозицій є о 1 менше ніж степень даної субституції (гл. §. 9), то альтернуюча ґрупа зложена зі всїх тих субституцій, що містять в собі непаристу скількість елементів. Ті субституції називаємо субституціями першого рода, а субституції, що мають паристу скількість елементів, субституціями другого рода.

II. Тверджене. Субституції першого рода творять ґрупу, субституції другого рода не творять ґрупи.

Доказ. Коли скомбінуємо дві субституції першого рода, отже дві паристі скількости транспозицій, одержимо паристу скількість транспозицій, т. є знова оператор першого рода. Коли-ж помножимо дві субституції другого рода, одержимо субституцію з паристою скількістю транспозицій, отже вийдемо поза межі комплексу субституцій другого рода.

Ґрупою субституцій першого рода є альтернуюча ґрупа, а її порядок є $\frac{1}{2} n!$, бо коли яку небудь з її субституцій скомбінуємо з одною транспозицією, одержимо субституцію другого рода; отже кождій субституції з ґрупи відповідає одна і тільки одна субституція другого рода, а що обі кляси мають разом $n!$ субституцій, то на альтернуючу ґрупу випадає половина з того, т. є $\frac{1}{2} n!$

§. 16. Нехай буде дана ґрупа G порядку m

$$G = [1, \ g_1, \ g_2, \qquad g_{m-1}],$$

а в нїй нехай містить ся підґрупа H порядку μ

$$H = [1, \ h_1, \ h_2. \qquad h_{\mu-1}].$$

Трансформуймо кожду субституцію з H кождою субституцією з G; тодї одержимо цїлий ряд ріжних від себе ґруп:

$$\left.\begin{array}{llll} 1, & h_1, & h_2, & \qquad h_{\mu-1}; \\ 1, & g_1^{-1} h_1 g_1, & g_1^{-1} h_2 g_1, & \quad ., \ g_7^{-1} h_{\mu-1} g_1; \\ 1, & g_2^{-1} h_1 g_2, & h_2^{-1} h_2 g_2, & \quad ., \ g_2^{-1} h_{\mu-1} g_2; \\ & & & \end{array}\right\} \tag{8}$$

Се є дійсно ґрупи, бо кожда комбінація двох субституцій з одного рядка мусить стояти знова в тім самім рядку, нпр.

$$(g_i^{-1}h_\alpha g_i)(g_i^{-1}h_\beta g_i) = g_i^{-1}h_\alpha(g_i g_i^{-1})h_\beta g_i = g_i^{-1}h_\alpha h_\beta g_i = g_i^{-1}h_\gamma g_i.$$

Що в двох рядках не можуть стояти однакові субституції, бачимо з того, що коли-б ми мали

$$g_i^{-1}h_\alpha g_i = g_j^{-1}h_\beta g_j,$$

то помноживши то рівнанє з лівої сторони субституцією g_i, а з правої субституцією g_i^{-1} одержали-б ми:

$$h_\alpha = (g_i g_j^{-1})\, h_\beta\, (g_j g_i^{-1});$$

отже або було би $i = j$, т. є обі субституції походили би з того самого рядка, а крім того мусїли би бути $\alpha = \beta$ т. є обі субституції були би ідентичні, — або для $i \neq j$ мусїла би субституція $g_j g_i^{-1}$ трансформувати кожде h з H в одну з субституцій таки з тої самої ґрупи, а се неможливе.

Ґрупи, що стоять в рядках таблиції (8), називають ся *трансформованими з H при помочи субституцій з G* (Transformierte von H mit Hilfe der Substitutionen von G. Їх означуємо так:

$$H,\ g^{-1}Hg_1,\ g_2^{-1}Hg_2,$$

Тих ґруп не може бути більше від m; зате може їх бути менше, бо деякі з них можуть бути між собою рівні.

Нехай між ними буде ϱ ріжних:

$$H,\ g_1^{-1}Hg_1,\ g_2^{-1}Hg_2, \qquad \ldots,\ g_{\varrho-1}^{-1}Hg_{\varrho-1}; \qquad (9)$$

всї ті ґрупи з ряду (9) називають ся *спряжені* (konjugiert) з ґрупою H. Коли вони всї ідентичні, тодї H називаємо *визначною* або *незмінною підґрупою* (ausgezeichnete, invariante Untergruppe). Визначна підґрупа є перемінна з субституціями ґрупи G.

§. 17. Нехай будуть дані дві ґрупи G_1 і G_2. Коли вони мають які спільні субституції, то ті субституції творять знова ґрупу R, звану *найбільшою спільною мірою* (grösster gemeinsch. Teiler; Jordan, Netto, Mertens) або *перекроєм* (Durchschnitt; Study, Weber) ґруп G_1 і G_2. R є дійсно ґрупою, бо всї її субституції

$$1,\ r_1,\ r_2, \qquad r_{\varrho-1},$$

а так само і всї їх комбінації $r_\alpha r_\beta$, приходять в обох ґрупах G_1, G_2.

Порядок перекрою двох ґруп є найбільшою спільною мірою порядків обох ґруп, бо ϱ мусить містити ся в m_1 і m_2, а R обіймає *всї* субституції, спільні обом ґрупам.

Так само говоримо про перекрій більшої скількости ґруп.

§. 18. Коли в двох даних субституцій

$$g, h$$

хочемо утворити ґрупу, то мусимо кождий член з періоди субституції g комбінувати з кождим членом періоди h, подібно як при множеню многочленів. Нехай будуть m_1, m_2 степені періодів субституцій g і h, а $v\ (m_1, m_2)$ означає їх найменшу спільну многократь, то порядок тої зложеної ґрупи буде $v\ (m_1, m_2)$.

Субституції g, h називають ся складовими (konstituierende) субституціями ґрупи

$$K = \{g, h\}\,;\text{*)} \tag{10}$$

то значить, що в ґрупі K поміщені всї можливі комбінації тих субституцій, які стоять в скобках. Ґрупа K називаеть ся похідною (abgeleitete) ґрупою операторів g і h (Mertens).

Подібно можемо утворити похідну ґрупу з кількох субституцій $g, h, \quad ., r$, а означимо її

$$K = \{g, h, \quad ., r\}\,;$$

її порядок е $v\ (m_1, m_2, \quad ., m_r)$, т. зн. е найменшою спільною многократю порядків складових субституцій.

Похідна ґрупа даних субституцій істнує все; в остаточнім разї буде нею симетрична ґрупа, утворена зі всїх елементів, які входять в склад даних субституцій.

§. 19. Кожда субституція з ґрупи $\{g, h\}$ має вигляд:

$$g^\alpha h^\beta\ (\alpha = 1, 2, \quad m_1\,;\ \beta = 1, 2, \quad m_2).$$

Розуміеть ся, що в тій ґрупі мусять бути також субституції тої форми:

$$h^\gamma g^\delta.$$

III. Твердженє. Все дадуть ся дібрати такі чотири виложники: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, що буде сповнена рівність:

$$g^\alpha h^\beta = h^\gamma g^\delta. \tag{11}$$

Доказ (по части за Netto'ном**). Субституції g і h е лиш виїмково перемінні, отже реляція $gh = hg$ не обовязує все.

Нехай буде $gh \neq hg$, тодї можемо знайти такий виложник λ, що буде сповнена реляція

$$gh = h^\lambda g.$$

---

*) Netto. Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra, Leipzig, (Teubner) 1882. стр 39, 40 (нота).

**) op. cit. стр. 37. sqq.

Що таке λ дійсно істнує, виходить з реляції, ідентичної з попередним рівнанем

$$h^\lambda = ghg^{-1},$$

т. зн., що h^λ є трансформованою субституцією з h при помочи g^{-1}, отже таке λ дасть ся все знайти. Тому приймаємо ту рівність за доказану. Тоді є:

1. для $\beta = \alpha$:

$$\begin{aligned}
g^\alpha h^\alpha &= g^{\alpha-1}.gh.h^{\alpha-1} = g^{\alpha-1}.h^\lambda g.h^{\alpha-1} = g^{\alpha-2}.gh.h^{\lambda-1}.gh.h^{\alpha-2}\\
&= g^{\alpha-2}.h^\lambda g.h^{\lambda-1}.h^\lambda g.h^{\alpha-2} = g^{\alpha-3}.gh.h^{\lambda-1}.gh.h^{\lambda-2}.h^\lambda.gh.h^{\alpha-3}\\
&= g^{\alpha-3}.gh.h^{\lambda-1}.gh.h.^{2(\lambda-1)}.gh.h^{\alpha-3} = .\\
&= g^{\alpha-\mathrm{i}}.gh.h^{\lambda-1}.gh.h^{2(\lambda-1)}.gh \qquad h^{(\mathrm{i}-1)(\gamma-1)}gh.h^{\alpha-\mathrm{i}} =\\
&= g.gh.h^{\lambda-1}.gh.h^{2(\lambda-1)}.gh \qquad h^{(\alpha-2)(\lambda-1)}.gh.h\\
&= gh.h^{\lambda-1}.gh.h^{2(\lambda-1)}.gh\ldots h^{(\alpha-1)(\lambda-1)}\,gh = h^\lambda gh.h^{\lambda-1}.gh\ldots h^{\alpha(\lambda-1)}\,g\\
&= \ldots = h^\gamma g^\delta;
\end{aligned}$$

2. для $\beta > \alpha$:

$$g^\alpha h^\beta = g^\alpha h^\alpha.h^{\beta-\alpha} = h^\gamma g^\delta.h^{\beta-\alpha} = h^\gamma.g^\delta h^\delta.h^{\beta-\alpha-\delta} = \ldots = h^\varepsilon g^\zeta;$$

3. для $\beta < \alpha$ змінять тільки g і h свої ролї.

З того слїдує, що в формі $g^\alpha h^\beta$ містять ся всї субституції ґрупи $\{g, h\}$. — Подібно виказуємо, що кожду субституцію з ґрупи $\{g, h, \quad k\}$ можна представити в формі $g^\alpha h^\beta \quad k^\lambda$.

§. 20. Коли субституції g і h є з собою перемінні,

$$gh = hg, \tag{12}$$

ґрупа $\{g, h\}$ називаєть ся перемінною (kommutative) або Абелевою (Abel'sche Gruppe)*).

З реляції (12) слїдує

$$h = g^{-1}hg, \quad g = h^{-1}\,gh,$$

т. зн., що кожда субституція Абелевої ґрупи трансформує кожду иншу субституцію тої ґрупи в неї саму.

Кожда підґрупа Абелевої ґрупи є визначна, бо всї її субституції трансформують ся кождою субституцією Абелевої ґрупи в себе самих, отже всї спряжені ґрупи є ідентичні.

---

*) Weber, Algebra, Bd. I. Braunschweig 1898, стр. 517; Netto, Algebra, Bd. II. Leipzig (Teubner) 1900, стр. 539. — Деякі автори уживають назви „Абелева ґрупа“ в иншім значіню; пор. Pascal, Repertorium d. höh. Math. Bd. I. Leipzig (Teubner) 1900 стр. 37.

§ 21. **IV. Тверджене.** **Кожду субституцію Абелевої ґрупи G можна представити в формі**

$$s = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} s_3^{\alpha_3} \qquad s_\nu^{\alpha\nu}, \tag{13}$$

де $s_1, s_2, \quad ., s_\nu$ є перемінними субституціями, а виложники є менші від порядків тих субституцій. Порядок Абелевої ґрупи є добутком з порядків субституцій s

$$r = a_1 a_2 \qquad \alpha_\nu. \tag{14}$$

Доказ. 1. В формі (13) можемо представити кождий елемент Абелевої ґрупи. Елемент s_λ одержимо, кладучи всі $\alpha_i = 0$, з виїмком α_λ, яке кладемо $= 1$; кождий инший елемент одержимо через відповідну комбінацію виложників.

2. Коли субституції $s_1, s_2, \quad ., s_\nu$ ріжні, то в формі (13) можемо представити кождий елемент Абелевої ґрупи тільки один раз, згл. рівну скількість разів. Бо коли елемент 1 представимо так:

$$1 = s_1^{\mathrm{h}1} s_2^{\mathrm{h}2} \qquad s_\nu^{\mathrm{h}\nu}, \tag{15}$$

то s не змінить ся, коли ми в (14) виложники $\alpha_1, \alpha_2, \ . \quad \alpha_\nu$ заступимо сумами $\alpha_1 + h_1, \alpha_2 + h_2, \quad ., \alpha_\nu + h_\nu$. Приймім, що представлене (14) можливе на k способів; форма (11) подасть нам кождий елемент ґрупи G що найменше k разів.

Коли-б знова s можна було представити такими двома рядами виложників: $\alpha_1, \alpha_1, \quad ., \alpha_\nu; \beta_1, \beta_2, \quad ., \beta_\nu$, то будемо мати очивидно:

$$1 = s_1^{\beta_1 - \alpha_1} s_2^{\beta_2 - \alpha_2} \qquad s_\nu^{\beta\nu - \alpha_\nu},$$

а звідси слїдує: $\beta_1 = \alpha_1 + h_1, \beta_2 = \alpha_2 + h_2, \quad ., \beta_\nu = \alpha_\nu + h_\nu$, т. зн., коли-б ми мали дві ріжні форми для того самого елемента, то виложники тих форм могли би ріжнити ся тільки о h_λ; ми приймили, що є k можливих способів для представленя (14), отже форма (13) не може давати нам жадного елементу більше разів ніж k.

3. З того слїдує: $nk = a_1 a_2 \quad . \ a_\nu$, а що $k = 1$ (бо реляція (15) тільки тоді можлива, коли кождий елемент буде $= 1$), то тим самим доказана і реляція (13).

4. Коли ϱ є дїльником числа ν, то в G мусить бути субституція порядку ϱ, бо одно з чисел $a_1, a_2, \quad a_\nu$ в (13) мусить бути подїльне через ϱ, нпр. $a_k = k\varrho$: тодї субституція s_k^k буде порядку ϱ, бо $(s_k^k)^\varrho = 1$.

Коли m є найменшою спільною многократю чисел $a_1, a_2, \ldots a_r$, то в ґрупі G мусить приходити субституція

$$s' = s_1 s_2 \qquad s_\nu$$

порядку m, бо ми можемо написати:

$$(s')^m = (s_1 s_2 \qquad s_\nu)^m = s_1{}^m s_2{}^m \qquad s_\nu{}^m = 1.$$

отже порядок субституції s' є дїйсно m.

5. Коли $\varrho = gh$ (g і h зглядно перві), то ґрупа G обіймає рівно g елементів σ, яких порядок є дїльником числа h, так що кождий елемент ґрупи g можна представити в видї

$$s = \sigma\tau. \text{*)} \qquad (16)$$

Бо коли g і h є зглядно перві числа, то можна знайти все такі два числа x і y, які сповнять рівнане

$$gx + hy = 1;$$

всї елементи σ, яких порядок є дїльником числа g, творять очивидно ґрупу Σ, а так само всї елементи τ творять ґрупу T. Візьмім тепер елемент s з G, то будемо мати:

$$s = s^{gx} s^{hy}$$

(бо сума виложників $= 1$); а що $(s^{hy})^g = 1$, то субституція s^{hy} містить ся в ґрупі Σ, а з тої самої причини s^{gx} містить ся в T. Звідси слїдує, що s має дїйсно форму (16).

З того бачимо, що кожду субституцію ґрупи G можемо представити спершу як добуток двох субституцій, яких порядки є дїльниками чисел g і h. Коли далї числа g і h дадуть ся розложити на зглядно перві чинники, то кожду з субституцій σ і τ можна дальше представити як добуток двох субституцій ріжних порядків і т. д., аж врештї дійдемо до форми (13). Треба тепер ще тільки виказати, що форма (13) істнує дійсно, коли порядок ґрупи є степенем первого числа: $r = p^k$. Коли-б те не було можливе, то ми не могли би утворити добутка (16), отже мусимо доказати можливість релації

$$s = \sigma^\alpha \qquad (17)$$

в разї $r = p^k$. Возьмім за σ таку субституцію, якої порядок a є можливо найвисший; a мусить бути очивидно степенню числа p, а степенї всїх субституцій s подїльниками числа a. Періода субституції σ

$$1, \sigma, \sigma^2, \qquad , \sigma^{a-1} \qquad (18)$$

складаєть ся з самих ріжних субституцій. Коли сей ряд вичерпує цїлу Абелеву ґрупу порядку p^k, наше твердженє доказане; коли-ж

---

*) Weber, Algebra II. стр. 40.

нї, беремо одну з позісталих субституцій τ. Кожда з тих субституцій τ мусить мати такий виложник h, щоби τ^h містило ся в ряді (17); в остаточнім разї є h порядком субституції τ $\tau^h = 1$. Нехай буде b найменшим таким числом h, тоді маємо

$$\tau^b = \sigma^\lambda ;$$

b мусить бути дїльником числа a, отже також степенню числа p, а заразом і дїльником числа λ. Положім $a = qb + b'$, то

$$\tau^a = \sigma^{\lambda q}. \tau^{b'} = 1,.$$

отже $\tau^{b'} = \sigma^{-\lambda q}$, т. зн. $b' = 0$, бо $b' < b$, а b має ту прикмету, що є найменшим з виложників, для яких τ^b містить ся в рядї (17). Звідси маємо дальше

$$\sigma^a = \tau^{\lambda q},$$

а що $q = \frac{a}{b}$, то $\frac{\lambda a}{b}$ мусить бути многократю числа a, отже b мусить містити ся в λ.

6. Приймаючи за α і β ряди чисел

$$\alpha = 0, 1, 2, \quad ., a - 1; \beta = 0, 1, 2 \quad ., b - 1,$$

можемо кожду субституцію s написати в формі

$$s = \sigma^\alpha \tau^\beta. \tag{19}$$

Коли ми тою формою не вичерпали всїх субституцій Абелевої ґрупи, продовжуємо наше розумоване. Таким чином буде наше твердженє доказане.

III. Головні прикмети ґруп.

§. 23. **Дефініції.** 1) Ґрупу G називаємо переходною (transitiv), коли її субституції переводять кождий з елементів в кождий инший.

2). Ґрупа, яка не має тої прикмети, називаєть ся непереходною (intransitiv); в такім разї можна всї елементи подїлити на кляси так, що ґрупа буде переводити елементи тільки серед тої самої кляси, а нїколи елементів з одної кляси в другу. Нпр. ґрупа

$$G_1 = [1, (12)(34), (13)(24),(14)(23)]$$

є перехідна, бо її кождий елемент можна поставити на кожде місце, зате ґрупа

$$G_2 = [1, (12)(34)]$$

є неперехідна, бо не має субституції, яка могла би перевести 1 і 2 в 3 і 4; отже 1, 2 і 3, 4 є тими клясами елементів.

3). Перехідна ґрупа є непервісна (imprimitiv), коли її елементи можна поділити на такі кляси о рівнім числї членів, що субституції ґрупи або переставляють елементи в нутрі кождої кляси або тільки пересувають кляси поміж собою. Ті кляси елементів називаємо клясами непервісности (Imprimitivitätssysteme). Порядок непервісної ґрупи є добутком з числа кляс і числа елементів в кождій клясї; отже ґрупа, якої порядок є числом первим, не може бути непервісна.

4). Коли такий поділ елементів на кляси неможливий, ґрупа називаєть ся первісною (primitiv).

§. 24. Дві ґрупи

$$G=[1, g_1, g_2, \quad ., g_{m-1}],$$

$$\Gamma=[1, \gamma_1, \gamma_2, \quad ., \gamma_{\mu}-1]$$

називають ся ізоморфними (isomorph), коли стоять до себе в такім відношеню: до кождої субституції з G належить одна або більше субституцій з Γ так, що добуткови двох субституцій з G буде відповідати добуток двох приналежних субституцій з Γ.

Ґрупи можуть бути одностепенно ізоморфні (einstufig, holoëdrisch isomorph), коли кождій субституції з G відповідає одна тільки субституція з Γ, — або многостепенно (mehrstufig, meroëdrisch) ізоморфні, коли однїй субституції з G відповідає більше субституцій з Γ; многостепенний ізоморфізм є односторонний або взаїмний в міру того, чи тільки ґрупа G є многостепенно ізоморфна супроти Γ, а Γ супроти G тільки одностепенно, чи і навпаки.

При многостепеннім ізоморфізмі творять ті субституції з Γ, які відповідають однїй з субституцій в G, ґрупу Δ, бо добуток яких небудь з поміж них буде також відповідати тій самій субституції з G.

§. 25. Ми назвали ґрупу зложеною, коли вона містила в собі яку небудь підґрупу, ріжну від 1. Тепер мусимо змодифікувати ту дефініцію так, що ґрупа є тодї зложена, коли містить в собі визначну підґрупу; инакше назвемо ґрупу поодинокою.

Коли в G містить ся визначна підґрупа H того рода, що нема вже нїякої висшої ґрупи K, яка була би визначною підґрупою для G і містила в собі заразом H як визначну підґрупу, тодї H називаєть ся найбільшою визначною підґрупою ґрупи G (ausgezeichnete Maximaluntergruppe, Netto; Maximalnormalteiler, Weber). Ми будемо уживати коротшої назви: найбільша підґрупа.

Утворім найбільшу підґрупу H для G і шукаймо, чи ґрупа H не має зі своєї черги якої найбільшої підґрупи. Коли така ґрупа істнує, беремо її за основу до дальшого шуканя, аж врешті дійдемо до такої ґрупи M, яка не має вже ніякої найбільшої підґрупи крім 1. Тоді маємо ряд ґруп

$$G,\ H,\ K,\quad .,\ M,\ 1, \tag{1}$$

званий рядом зложеня для ґрупи G (Kompositionsreihe, Reihe der Zusammensetzung von G) або коротко рядом ґрупи G.

Назвім порядки поодиноких членів того ряду

$$r,\ r_1,\ r_2,\quad .,\ r_{\mu-1},\ 1, \tag{2}$$

тоді показчики слідуючих по собі членів ряду є цілими числами λ (твердженє Cauchy, §. 14)

$$\frac{r}{r_1}=e_1, \frac{r_1}{r_2}=e_2,\ \ldots,\ \frac{r_{\mu-2}}{r_{\mu-1}}=e_{\mu-1},\ r_{\mu-1}=e_\mu, \tag{3}$$

а їх добуток є рівний порядкови ґрупи G

$$r=e_1e_2\qquad e_{\mu-1}e_\mu. \tag{4}$$

Числа e_1, e_2, ., e_μ називаємо показчиками ряду ґрупи G або чисельними чинниками зложеня для ґрупи G (numerische Kompositionsfaktoren von G).

Ряд зложеня відзначаєть ся тим, що кождий його член є найбільшою підґрупою попереднього, отже є переміннай з ним, $GH=HG$, т. зн. $G^{-1}HG=H$. Довільна субституція з G трансформує субституцію h з H в якусь иншу субституцію з H: $g^{-1}hg=h'$, отже $hg=gh'$.

§. 26. **I. Твердженє.** Ряд ґрупи G відзначаєть ся тим, що кождий член того ряду є ґрупою перемінною аж по субституції слідуючої ґрупи.

Доказ. Нехай в ряді ґрупи G по K слідує L; назвім k субституцію з K, l субституцію з L, а σ нехай буде також субституцією з K, якої нема в L; тоді можемо написати:

$$k=l\sigma^\lambda, \tag{5}$$

т. зн. довільну субституцію з K одержимо, комбінуючи з l таку субституцію, якої нема в L. Возьмім дві субституції з K

$$k_\alpha=l_\alpha\sigma^\alpha,\ k_\beta=l_\beta\sigma^\beta$$

і творім добутки (§. 19)

$$k_\alpha k_\beta = l_\alpha \sigma^\alpha l_\beta \sigma^\beta = l_\alpha (\sigma^\alpha l_\beta \sigma^{-\alpha}) . \sigma^{\beta+\alpha} = l_\alpha l_\gamma \sigma^{\alpha+\beta} = l_\gamma \sigma^{\alpha+\beta};$$

$$k_\beta k_\alpha = l_\beta \sigma^\beta l_\alpha \sigma^\alpha = l^\beta (\sigma_\beta l_\alpha \sigma^{-\beta}) . \sigma^{\alpha+\beta} = l_\beta l_\varepsilon \sigma^{\alpha+\beta} = l_\zeta \sigma^{\alpha+\beta};$$

звідси слїдує

$$k_\alpha k_\beta = k_\beta k_\alpha . l_\mu. \tag{6}$$

Ту прикмету ґрупи K висказуемо так, що її субституції є *перемінні аж по субституції ґрупи* L (bis auf Substitutionen von L vertauschbar). Те саме відносить ся до кождої ґрупи в ряді зложеня, отже наше тверджене доказане.

§. 27. **II. Тверджене.** *Одна ґрупа може мати кілька ріжних рядів зложеня; в кождім ряді будуть приходити ті самі показчики і що найбільше будуть ріжнити ся тільки упорядкованем.*

Доказ.*) Нехай будуть можливі такі два ряди ґрупи G:

1). G, G_1, G_2, $G_3, \ldots$; порядки: r, $r_1 = \frac{r}{e_1}, r_2 = \frac{r_1}{e_2}. r_3 = \frac{r_2}{e_3}, \ldots$;

2). G, G_1', G_2' $G_3', \ldots$; порядки: r $r_1' = \frac{r}{e_1'}, r_2' = \frac{r_1'}{e_2'}, r_3' = \frac{r_2'}{e_3'}, \ldots$;

в обох разах є:

$$e_1 e_2 e_3 \quad . = r \text{ і } e_1' e_2' e_3' \quad = r.$$

Утворім ґрупу Γ, яка буде перекроєм ґрупи G_1 і G_1'; її порядок ϱ буде дїльником чисел r_1 і r_1': $\varrho = \frac{r}{k} = \frac{r_1}{k'}$. Назвім σ_α субституції ґрупи Γ; тодї можемо уложити для ґруп G_1 і G_1' такі роздїленя:

$\sigma_1 = 1, \sigma_2, \sigma_3, \quad \sigma_\varrho;$ $\quad\quad \sigma_1 = 1, \sigma_2, \sigma_3. \quad \sigma_\varrho;$

$s_1 \sigma_1, s_1 \sigma_2, s_1 \sigma_3, \ldots, s_1 \sigma_\varrho;$ $\quad\quad s_1' \sigma_1, s_1' \sigma_2, s_1' \sigma_3 \ldots, s_1 \sigma_\varrho;$

$s_k \sigma_1, s_k \sigma_2, s_k \sigma_2; \ldots, s_k \sigma_\varrho;$ $\quad\quad s_{k'}' \sigma_1 . s_{k'}' \sigma_2, s_{k'}' \sigma_3, \ldots, s_{k'}' \sigma_\varrho.$

Таким чином можемо представити всї субституції обох ґруп в видї:

$$t_\alpha = s_\beta \sigma_\gamma, \text{ згл. } t_\alpha' = s_\beta' \sigma_\gamma.$$

Утворім тепер субституцію

$$\tau = t_a^{-1} t_b'^{-1} t_a t_b';$$

вона буде належати до ґрупи Γ, бо є спільна обом ґрупам: в видї $^{-1}(t_b^{-1} t_a t_b)$ належить до G_1, а в видї $(t_a^{-1} t_b^{-1} t_a) t_b$ до G_1'. Та

---

*) Netto, Substitutionentheorie, стр. 87.

сама субституція належить рівно-ж до ґрупи $\{G_1, G_1'\} = \mathfrak{G}$; та ґрупа є перемінна з G і містить ся в G. Вона є більша від G_1 і від G_1', отже є ідентична з G.

Порядки ґруп G_1 і G_1' є $r_1 = \frac{r}{e_1}$ і $r_1' = \frac{r}{e_1'}$; порядок ґрупи G є r, а що $r_1 = \varrho k$; $r_1' = \varrho k'$ отже

$$r = \varrho k e_1 = \varrho k' e_1', \text{ то}$$
$$k' = e_1,\ k = e_1'.$$

Звідси бачимо, що ґрупа Γ має порядок $\varrho = \frac{r_1}{e_1'} = \frac{r_1'}{e_1} = \frac{r}{e_1 e_1'}$; вона мусить стояти в ряді ґрупи G, бо є найбільшою підґрупою G_1 і G_1'.

Таким чином можемо написати такі ряди для G:

3). $G, G_1, \Gamma, \Delta,$ порядки: $r,\ r_1 = \frac{r}{e_1},\ r_2' = \frac{r_1}{e_1'},$.

4). $G, G_1', \Gamma, \Delta,$ порядки: $r,\ r_1' = \frac{r}{e_1'},\ r_2 = \frac{r_1}{e_1},$

звідси слїдує, що ряди 1) і 2) мають в перших трьох членах ті самі показчики, що 3) і 4) разом. Дальший доказ лежить в тім, що творимо ряди;

5). $G, G_1. G_2. \mathfrak{G},$ порядки: $r,\ r_1 = \frac{r}{e_1},\ r_2 = \frac{r_1}{e_2'},\ r_3'' = \frac{r_2}{e_2'}, \ldots$;

6). $G, G_1, \Gamma, \mathfrak{G},$.; порадки: $r,\ r_1 = \frac{r}{e_1},\ r_2' = \frac{r_1'}{e_2'},\ r_3'' = \frac{r_2'}{e_2}, \ldots$;

попереднє розумованє зачинаємо від члена G_1, і так поступаємо аж до кінця. З того слїдує остаточно також, що й скількість членів в кождім ряді є однакова.

§. 28. Netto*) впроваджує ще т. зв. головний ряд (Hauptreihe) зложеня ґрупи G, або коротко: головний ряд. Повстає він так, що з ряду зложеня ґрупи задержуємо тільки ті члени, які є перемінні з ґрупою G.

Ряд зложеня є взагалї обширнїйший від головного ряду; нехай буде головний ряд:

$$G,\ H,\ J, \qquad M,\ 1 \qquad (7)$$

---

*) Substitutionentheorie, стр. 92; Weber, Algebra II. стр. 31.

тодї між кождими двома його числами будуть стояти ґрупи, які належатимуть до ряду зложеня, нпр. між H і J нехай стоїть

$$H_1,\ H_2,\qquad .,\ H^{\nu-1}. \tag{8}$$

З дефініциї виходить, що H є перемінне з G; так само J, але члени ряду (22). Длятого коли будемо ґрупу H_2 трансформувати субституціями з G, одержимо цїлий ряд подібних і ізоморфних ґруп

$$H_1,\ H_1',\ H_1'',\qquad .;$$

показчик всїх тих ґруп з огляду на H буде однаковий, нпр. q.

Утворім перекрої ґруп H_1 і H_1'; H_1 і H_1''; H_1 і H_1'''; . .; і поставмо їх в ряд (22) по H_1. Будуть се знова ізоморфні і подібні ґрупи о тім самім показчику q. Коли істнує тільки одна така ґрупа, то вона є членом головного ряду, J, а її показчик з огляду на H є q^2.

Коли-ж тих перекроїв є більше, творимо дальше перекрої ґруп H_1, H_1, H_1'' і т. д.; вони будуть мати знова такий самий показчик q.

По ν кроях дійдемо врештї до J; показчик ґрупи J з огляду на H буде q^ν; той показчик буде належати вже до головного ряду (21).

Звідси слїдує

III. Твердженє. Коли ряд ґрупи G є обширнійший від головного ряду, то члени, які стоять між двома по собі слїдуючими ґрупами головного ряду, мають ті самі показчики.

Тільки такі ґрупи можуть мати головний ряд, яких порядок має в собі деякі або всї рівні чинники ґрупи, які стоять перед J побіч себе (не по собі), $H_{\nu-1}$, $H'_{\nu-1}$, $H''_{\nu-1}$, ., є перемінні, а скомбіновані з собою дають ґрупу H:

$$H = \{H_{\nu-1}.\ H'_{\nu-1},\ H''_{\nu-1},\qquad .\}. \tag{9}$$

IV. Твердженє. Остатня ґрупа головного ряду складаєть ся з одної або більше подібних ґруп, які не мають перекрою більшого від 1, і є Абелевою ґрупою.

Виходить се з того, що субституції кождої з тих ґруп мусять бути перемінні з собою аж по субституції слїдуючого члена, а що ним є 1, то ті субституції є перемінні.

§. 29. Шукаймо ряду зложеня для симетричної ґрупи G. Безпосередно бачимо, що другим членом того ряду буде альтернуюча ґрупа. Коли степень ґрупи $n>4$, тоді з альтернуючою ґрупою кінчить ся ряд симетричної ґрупи, бо альтернуюча ґрупа є поодинока для $n>4$.

До того результату доходимо при помочи таких тверджень:

I. Перехідна ґрупа, яка містить в собі одну яку-небудь транспозицію, є ідентична з симетричною.

Приймім, що тою транспозицією є (12). В разї перехідности ґрупи мусять містити ся в нїй всї такі субституції, які переводять котрий небудь елемент, нпр. 1, в кождий инакший, отже мусить їстнувати такий ряд транспозицій:

$$(12),\ (13),\ (14),\qquad .,\ (1n).$$

Комбінуючи ті транспозиції на всї можливі способи, одержимо симетричну ґрупу.

II. Перехідна ґрупа, яка містить в собі один тричленний цикль, є ідентична з альтернуючою або з симетричною ґрупою.

З огляду на перехідність ґрупи мусить в нїй поруч циклю (123) їстнувати такий ряд циклів

$$(124),\ (125),\qquad .,\ (12n);$$

кождий з тих циклів можна розложити на дві транспозиції

$$(12k)=(12)(1k),$$

а добуток таких двох циклїв також на дві транспозиції або стягнути на один тричленний цикль:

$$(12k)(12l)=(12)(1k)(12)(1l)=(1k)(1l)=(\ kl),$$

отже все одержуємо субституції першої кляси. В такім разї маємо альтернуючу ґрупу. Коли-ж в ґрупі містить ся ще одна поодинока транспозиція (ab), то одержимо субституцію другої кляси, комбінуючи її з тричленним циклем, отже наша ґрупа складає ся зі всїх субституцій обох кляс, т. зн. є симетрична.

III. Альтернуюча ґрупа висшого степеня нїж четвертий є поодинока*).

Приймім, що альтернуюча ґрупа H не є поодинока, тільки що по нїй слїдує в рядї симетричної ґрупи G ще инша, K, отже K мусить бути найбільшою підґрупою для H.

---

*) Доказ гл. Weber, Algebra I. стр. 649.

Нехай K містить в собі субституцію k; коли один з тричленних циклів ґрупи H назвемо c, то K мусить містити в собі субституцію

$$c^{-1}kc,$$

бо K є найбільша підґрупа для H, отже також і субституцію

$$\lambda = k^{-1}c^{-1}kc.$$

Розберім, які форми може мати λ; се залежить від форми субституції k.

1. k містить в собі один більше нїж тричленний цикль:

$$k = (1\ 2\ 3 \qquad m).$$

Возьмім $c = (1\ 2\ 3)$; утворім λ:

$$\lambda = (1\ 2\ 4)$$

отже в K приходить один тричленний цикль; K є ідентичне з альтернуючою ґрупою.

2. k має два тричленні циклї $(1\ 2\ 3)$, $(4\ 5\ 6)$. Приймім $c = (1\ 3\ 4)$, тодї $\lambda = (1\ 2\ 5\ 3\ 4) \quad . \, .$; K має проте одну субституцію другої кляси, отже не може бути підґрупою для H.

3. k має транспозицію і тричленний цикль $(1\ 2\ 3)\ (4\ 5)$. Беручи $c = (1\ 2\ 4)$, маємо $\lambda = (1\ 2\ 5\ 3\ 4)$, — анальоґічно як в 2.

4. k має дві транспозиції $(1\ 2)\ (3\ 4)$. Коли $n > 4$, то в ґрупі мусить бути крім 1, 2, 3, 4 ще бодай один елемент, нпр. 5. Тодї кладемо $c = (1\ 2\ 5)$, а звідси $\lambda = (1\ 5\ 2) \quad .$, як в 1.

5. k має три транспозиції $(1\ 2)\ (3\ 4)\ (5\ 6)$. Беремо $c = (1\ 3\ 5)$; звідси є $\lambda = (1\ 3\ 5)\ (2\ 6\ 4)$ отже в K містить ся субституція, яка має два тричленні циклї, як в 2.

Инші комбінациї дво-, три- і більше членних циклїв неможливі. З того виходить, що K є ідентичне з H, отже альтернуюча ґрупа є поодинока. — Отсе є причиною, що загальних рівнань степеня висшого як четвертий не можна альґебраїчно розвязувати.

§. 30. Евентуальність 4. вказує, що коли $n = 4$, то альтернуюча ґрупа є зложена, іменно її найбільша підґрупа буде містити субституцію $k = (1\ 2)\ (3\ 4)$. Шукаймо тої підґрупи.

Коли k є субституцією шуканої ґрупи K, то вона мусить містити в собі також всї трансформовані з K при помочи инших субституцій k з ґрупи H. Возьмім $h_1 = (1\ 2\ 3)$, тодї

$$h_1^{-1}\, k\, h_1 = (1\ 2\ 3)^{-1}\ (1\ 2)\ (3\ 4)\ (1\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2)\ (1\ 2)\ (3\ 4)\ (1\ 2\ 3) = (1\ 4)\ (2\ 3),$$

дальше возьмім $h_2=(1\ 2\ 4)$, отже

$$h_2^{-1}kh_2=(1\ 3)\ (2\ 4).$$

Дальші тричленні циклї не дадуть вже ніяких нових субституцій для K, бо кождий з них можемо зложити з h_1 і h_2:

$$h_3=(2\ 3\ 4)=(\ 1\ 2\ 3)\ (1\ 4\ 2)=h_1h_2^2,$$

$$h_4=(1\ 3\ 4)=(1\ 2\ 4)\ (2\ 3\ 4)=h_2h_1h_2^2.$$

Таким чином вичерпані вже всі субституції, і K складаеть ся з:

$$1,\ k_1=k, k_2=h_1^{-1}kh_1, k_3=h_2^{-1}kh_2.$$

Шукаймо дальше найбільшої підґрупи L для K. Коли вона має в собі одну транспозицію, впр. $l=(12)$, то мусить мати всі трансформовані з l при помочи всїх k:

$$k_1^{-1}lk_1=((12)(34))^{-1}(12)((12)(24))=(34)^{-1}(12)^{-1}(12)(12)(34)$$

$$=(34)^{-1}(12)(34)=(12)=l_1;$$

$$k_2^{-1}lk_2=((14)(23))^{-1}(12)((14)(23))=(23)^{-1}(14)^{-k}(12)(14)(23)$$

$$=(23)^{-1}((14)^{-1}(12)(14))(23)=(23)^{-1}(24)(23)=(34)=l_2:$$

$$k_3^{-1}lk_3=((13)(24))^{-1}(12)((13)(24))=(24)^{-1}((13)^{-1}(12)(13))(24)$$

$$=(24)^{-1}(23)(24)=(34)=l_2;$$

отже L складаеть ся з 1, (12), (34), (12)(34),

Коли-б ми взяли замість (12) иншу транспозицію, впр. (13), то одержали би зовсїм відмінну ґрупу L_2, зложену з (13) і (24), а беручу (14), одержали-б L_3, зложену з (14) і (23).

Кожда з ґруп L є вже поодинока.

Загалом виглядае ряд зложеня симетричної ґрупи G так:

1). $G, H, K, L_1, 1$;
2). $G, H, K, L_2, 1$;
3). $G, H, K, L_3, 1$.

Ті три ряди ріжнять ся тільки передостатнїми членами. Кожда з тих ґруп складаеть ся з таких субституцій:

$G=[1;$ (12), (13), (14), (24), (34); (123), (124), (134), (234), (132), (142), (243); (1234), (13)(24), (1432); (1243), (14)(23), (1342); (1324), (12)(34), (1423)];

$H=[1;$ (123), (124), (134), (234), (132), (142), (143), (243); (12)(34), (13)(24), (14)(23)];

$K=[1,$ (12)(14), (13)(24), (14)(23)];

$L_1=[1,$ (12)(34)]; $L_2=[1,$ (13)(24)]; $L_3=[1,$ (14)(23)].

Порядки тих ґруп є: $(G)=4!=24$; $(H)=\frac{4!}{2}=12$; $(K)=4$, $(L_1, L_2, L_3)=2$. Ряд порядків виглядає так:

$$24,\ 12,\ 4,\ 2,\ 1,$$

а ряд чинників зложеня:

$$2,\ 3,\ 2,\ 2.$$

§. 31. Дотепер вважали ми показчики ряду зложеня звичайними числами; звідси їх назва: чисельні чинники зложеня ґруп. За приводом Hölder'а*) можемо одначе надати їм значінє ґруп.

Роздїлїм ґрупу G при помочи визначної підґрупи H (§. 14). отже одержимо ряд:

$$G=(H,\ g_1H,\ g_2H). \qquad (10)$$

Побічні ґрупи можемо дальше вважати елементами, з яких можна утворити нову ґрупу; отже та нова ґрупа буде складати ся не з субституції, але з ґруп. Що система (2) творить дійсно ґрупу, переконуємо ся примінюючи крітерії ґруп (§. 11).

1. Маючи два елементи з системи (2), творимо новий з тої самої системи; нпр. з $g_\alpha H$ і $g_\beta H$ творимо

$$g_\alpha H g_\beta H = g_\alpha g_\beta H H = g_\alpha g_\beta H = g_\gamma H$$

бо $Hg_\beta = g_\beta H$ (визначна підґрупа є перемінна з елементами головної), а $HH=H$ (очивидно).

2. Закон асоціяції справджуєть ся:

$$g_\alpha H.g_\beta H\, g_\gamma H = g_\alpha g_\beta g_\gamma H = g_\alpha H.g_\alpha g_\gamma H = g_\alpha g_\beta H.g_\gamma H.$$

3. З

$$g_\alpha H\, g_\beta H = g_\beta H.g_\gamma H$$

слїдує однозначно:

$$g_\alpha H = g_\beta H,$$

бо

$$g_\alpha g_\gamma H = g_\beta g_\gamma H,$$

а множачи обі сторони відворотністю елемента $g_\gamma H$, маємо

$$g_\alpha = g_\beta,$$

отже і

$$g_\alpha H = g_\beta H.$$

---

*) Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen. Mathematische Annalen, Bd. XXXIV, 1889. стр. 29—56. — Пор. також Weber, Algebra II. §. 4.

З того бачимо, що система елементів в (10) є дійсно ґрупою. Ту ґрупу називаємо *доповняючою ґрупою до G в віднесеню до H* (komplementäre Gruppe zu G in Bezug auf H) і означуємо її:

$$G/H;$$

в тім означеню містить ся деяка анальоґія звичайного діленя з наведеною тут операцією.

Порядок ґрупи G/H є рівний ν, отже рівний показчикови ґрупи G з огляду на H. Звідси анальоґія поміж чинниками зложеня а доповняючими ґрупами.

IV. Ґрупи в віднесеню до альґебраічних функцій.

§. 32. Переставляючи в якійсь альґебраічній функції поміж собою змінні, одержуємо взагалї иншу вартість, нїж мала первісна функція. З тої точки погляду дїлимо функції на *одновартісні* (einwertig) і *многовартісні* (mehrwertig). Коли при всїх можливих переставленях змінних функція буде мати m ріжних вартостий, називаємо її *m-вартісною* (m-wertig).

Переставлюване змінних відбуваєть ся при помочи субституцій; субституція дає тут приписи, в який спосіб має відбути ся те переставлене. Виконуючи між змінними функції F переставлене, приписане субституцією σ, кажемо, що ми *ужили субституції σ до функції F* (die Substitution σ auf F anwenden) або *виконали субституцію на функції* (die S. ausüben).

Означім функцію n елементів

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

знаком $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; тодї ужитє субституції σ на φ означимо так

$$[\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)]\sigma \text{ або } \varphi\sigma(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n). \quad (1)$$

Після того можемо означити первісну вартість тої функції знаком $\varphi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$; се значить, що на функції φ виконали ми ідентичну субституцію 1.

Нпр. нехай буде дана функція чотирох елементів

$$\varphi = x_1x_2 + x_3x_4;$$

виконаймо на нїй всї субституції симетричної ґрупи чотирох елементів.

Одержимо з того три ріжні вартости:

$$\varphi_1 = x_1x_2 + x_3x_4,$$
$$\varphi_2 = x_1x_3 + x_2x_4,$$
$$\varphi_3 = x_1x_4 + x_2x_3;$$

инших вартостий та функція не може приймати. Нпр. при субституціях: (12), (34), (13)(24), (14)(32) і т. д. Її вартість не може змінити ся, отже φ є тривартістна функція.

Коли якась субституція не змінює вартости функції, тодї кажемо, що функція φ допускає субституцію σ (die Funktion φ gestattet die Substitution σ). Всї субституції, які допускає дана функція, творять ґрупу, бо коли кожда з окрема не змінить вартости функції, то й їх комбінація не зможе змінити вартости. Ґрупу всїх тих субституцій називаємо ґрупою функції φ (die Gruppe der Funktion φ, або die zur Funktion φ gehörige Gruppe).

Нпр. ґрупа функції $\varphi_1 = x_3x_2 + x_3x_4$ складає ся з таких субституцій:

$$\Gamma_1 = [1,\ (12),\ (34),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23),\ (1324),\ (1423)];$$

добираючи до Γ_1 транспозицію (23), одержимо ґрупу $\Gamma_2 = (23)\,\Gamma_1$, яка не змінює функції $\varphi_2 = x_1x_3 + x_2x_4$, а через дібране (24) одержимо $\Gamma_3 = (24)\,\Gamma_1$ ґрупу функції $\varphi_3 = x_1x_4 + x_2x_3$.

Кожда з тих ґруп є осьмого порядку.

§. 33. Функція n змінних може мати найбільше $n!$ вартостий; тодї кожда субституція з яких небудь елементів змінить її вартість, отже ґрупою $n!$-вартісної функції є ідентична субституція 1. — Навпаки така функція, яка має тільки одну вартість, має симетричну ґрупу, бо ніодна з субституцій не може змінити її вартости. Така функція називає ся симетричною (symmetrisch). Симетричними функціями є нпр. сума або добуток n змінних; сочинники рівнаня є симетричними функціями корінїв і т. д.

Двовартісна функція називає ся альтернуючою функцією, бо її ґрупа є альтернуюча. Альтернуючою функцією є нпр. квадратний корінь з т. зв. діскрімінанти т. є виражене

$$\sqrt{\Delta} = \Pi(x_i - x_j),\ i \neq j. \qquad (2)$$

Кожду альтернуючу функцію можна представити в формі

$$\varphi = S_1 \pm S_2 \sqrt{\Delta}, \qquad (3)$$

де S_1 і S_2 є симетричними функціями даних елементів, а $\sqrt{\Delta}$ є дво-

вартісний; се зазначуємо при помочи знаку $\pm$. Назвім обі вартости функції φ_1 і φ_2, тоді маємо:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2S_1,$$
$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2S_2\sqrt{\varDelta},$$

отже їх сума є симетрична, а ріжниця альтернуюча.

§. 34. **I. Твердженє.** Ґрупа ϱ-вартісної функції n змінних є порядку

$$\nu = \frac{n!}{\varrho}.$$

Доказ. Назвім ϱ вартостий функції φ:

$$\varphi_1, \varphi_2, \quad ., \varphi_\varrho,$$

а її ґрупу G_1; вона нехай має ν субституцій

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2, \sigma_3, \quad ., \sigma_\nu.$$

Ґрупа G_1 є підґрупою симетричної S, отже ν є дїльником числа $n!$; вона має ϱ—1 побічних ґруп, які переводять φ_1 чергою в $\varphi_2, \varphi_3, \quad ., \varphi_\varrho$. Кожда побічна ґрупа має той сам порядок, отже:

$$\nu = \frac{n!}{\varrho} \qquad (4)$$

або

$$n! = \nu\varrho. \qquad (4')$$

В нашім примірі було $\nu = 8$, $\varrho = 3$, отже $\nu\varrho = 24 = 4!$

§. 35. Про функції, які мають ту саму ґрупу Γ, говоримо, що вони належать до рода ґрупи Γ (die zur Gattung von Γ gehörigen Funktionen). Скількість вартостий одної функції називаємо порядком рода ґрупи Γ, а знова всї ті вартости називаємо спряженими родами або спряженими вартостями (konjugierte Gattungen, Werte; Kronecker, Netto).

II. Твердженє. Функції одного рода можна представити раціонально при помочи якої небудь з поміж них.

Доказ. Нехай будуть дані дві функції, φ і ψ, які належать до рода ґрупи Γ, степеня n, порядку ν; вони мають $\varrho = \frac{n!}{\nu}$ ріжних вартостий, які одержимо, виконуючи на одній з них субституції, що не належать до Γ. Тим вартостям функцій φ і ψ, які одержуємо при помочи тої самої субституції, даймо однакові показчики, отже одержимо такі два ряди ріжних функцій:

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3, \quad .,\ \varphi_\nu: \qquad (5)$$
$$\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3, \quad .,\ \psi_\varrho.$$

Напишім тепер функцію:

$$\Phi_\lambda = \varphi_1 \psi_1{}^\lambda + \varphi_2 \psi_2{}^\lambda + \qquad \varphi_\varrho \psi_\varrho{}^\lambda \qquad (6)$$

де λ може приймати ріжні цілочисельні вартости. Функція Φ_λ є з огляду на всі φ і ψ симетрична, бо переставляючи якінебудь φ, мусимо так само переставити і відповідні ψ.

Надаваймо виложникови λ вартости 0, 1, $\varrho-1$; таким чином одержимо систему ϱ лїнійних рівнань для φ:

$$\left.\begin{array}{llllll}
\varphi_1 & +\varphi_2 & +\varphi_3 & + & +\varphi_\varrho & =\Phi_0 \\
\varphi_1\psi_1 & +\varphi_2\psi_2 & +\varphi_3\psi_3 & + & +\varphi_\varrho\psi_\varrho & =\Phi_1 \\
\varphi_1\psi_1{}^2 & +\varphi_2\psi_2{}^2 & +\varphi_3\psi_3{}^2 & + & +\varphi_\varrho\psi_\varrho{}^2 & =\Phi_2 \\
 & & & & & \\
\varphi_1\psi_1{}^{\varrho-1} & +\varphi_2\psi_2{}^{\varrho-1} & +\varphi_3\psi_3{}^{\varrho-1} & + & +\varphi_\varrho\psi_\varrho{}^{\varrho-1} & =\Phi_{\varrho\ -1}
\end{array}\right\} \quad (7)$$

Розвяжім ту систему для φ_1

$$\varphi_1 = \begin{vmatrix} \Phi_0, & 1, & 1 \\ \Phi_1, & \psi_2. & \psi_\varrho \\ \Phi_2, & \psi_2{}^2, & \psi_\varrho{}^2 \\ & & \\ \Phi_{\varrho-1}, & \psi_2{}^{\varrho-1} & \psi_{\varrho\ -1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \psi_1, & \psi_2, & .,\ \psi_\nu \\ \psi_1{}^2, & \psi_2{}^2, & \psi_\varrho{}^2 \\ & & \\ \psi_1{}^{\varrho-1} & \psi_2{}^{\varrho-1}, & .,\psi_\varrho{}^{\varrho-1} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

Знаменник того вираженя є коренем діскрімінанти функцій $\psi_1, \psi_2,$ $.,\ \psi_\varrho$; розширім чисельник і знаменник тою діскрімінантою, то одержимо в знаменнику $\Delta(\psi)$, отже симетричну функцію, а в чисельнику кождим разом цїлу функцію

$$\varphi_1 = \frac{G_1(\Phi.\psi)}{\Delta(\psi)}. \qquad (9)$$

Виконуючи на тій функції ту субституцію, яка переводить φ_1 в φ_2, одержимо в чисельнику якусь иншу функцію $G_2\,(\Phi;\psi)$; G_2 є ріжне від G_1, бо розвязуючи систему (7) для φ_2 уживемо вартости φ_1 замість φ_2, а крім того ще детермінанта, яка стоїть в чисельнику як чинник, змінить знак. Переходячи на лївій стороні до φ_3, φ_4, φ_ϱ, одержимо на правій ріжні від себе функції G_3, G_4, $.,\ G_\varrho$; отже загально:

$$\varphi_i = \frac{G_i(\Phi; \psi)}{\Delta(\psi)}, \ (i = 1,\ 2, \qquad ., \ \varrho). \qquad (10)$$

Отже наше твердженє доказанє.

§. 36. **III. Твердженє** (відверненє II. твердженя). **Всї функції, які можна раціонально представити одною з них, належать до того самого рода.**

Доказ. З заложеня маємо для двох функцій, φ і ψ:

$$\varphi = R_1(\psi); \ \psi = R_2(\varphi).$$

φ є незмінне для всїх тих субституцій, які змінюють ψ, а так само ψ незмінне для ґрупи функції φ. Всї инші субституції, які змінять ψ, мусять змінити і φ, і навпаки, отже наше твердженє доказанє.

§. 37. **IV. Твердженє. Ріжні вартости функції φ є коріннями рівнаня ϱ-того степеня, якого сочинниками є симетричні функції змінних.**

Доказ. З $\varphi_1, \ \varphi_2, \qquad ., \ \varphi_\varrho$ і неозначеної величини φ можемо утворити таке рівнанє

$$F(\varphi) = (\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2) \ldots (\varphi - \varphi_\varrho) = \varphi^\varrho + A_1 \varphi^{\varrho - 1} + \ldots + A_\varrho = 0; \ (11)$$

величини $A_1, \ A_2, \qquad A_\varrho$ є симетричними функціями величин φ, отже і змінних $x_1, \ x_2, \qquad ., \ x_n$.

Нпр. з функції $\varphi = x_1 x_2 + x_3 x_4$ одержували ми три вартости, а творячи з них рівнанє (10), одержуємо:

$$\varphi^3 - c_2 \varphi^2 + (c_1 c_3 - 4 c_4) \varphi - (c_1{}^2 c_4 - 4 c_2 c_4 + c_3{}^2) = 0,$$

де $c_1, \ c_2, \ c_3, \ c_4$ є елементарними симетричними функціями величин $x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4$, т. є

$$c_1 = x_2 + x_2 + x_3 + x_4,$$

$$c_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4,$$

$$c_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4,$$

$$c_4 = x_1 x_2 x_3 x_4.$$

§. 38. **V. Твердженє. Істнує все така функція, якою можна раціонально представити довільну скількість даних функцій; та функція є лїнійною функцією даних.**

Доказ. Нехай будуть дані функції $\varphi; \ \psi, \ \chi, \ . \ . \ .; \ \alpha, \ \beta, \ \gamma,$ означують довільні параметри. Тодї можемо написати:

$$\omega = \alpha\varphi + \beta\psi + \gamma\chi +$$

Ґрупа функції ω містить всі ті субституції, які не змінюють функцій $\varphi, \psi, \chi,$ рівночасно, отже є перекроєм ґруп функцій $\varphi, \psi, \chi,$ тому то можна ω виразити лїнійно тими функціями.

Коли перекрій ґруп функцій $\varphi, \psi, \chi,$ є ідентичною ґрупою, тодї ω має $n!$ вартостий; функцією ω можна виразити кожду з даних функцій. В такім разї називаєть ся функція ω **функцією Galois***).

V. Циклїчні й метациклїчні функції.

§. 39. Періоди n-членного цикля

$$g = (123 \ldots n)$$

є ґрупою n-того степеня і n-того порядку. Субституції тої ґрупи можемо писати також в такій формі:

$$g = | \, z \quad z+1 \, | \; (\text{mod. } n), \tag{1}$$

т. зн., що субституція g посуне кождий показчик о 1; остатнїй показчик заступить вона першим. На се вказує означенє (mod. n), бо воно значить, що ми не беремо повних вартостий величини $z+1$, тільки все той останок, який лишить ся по відділеню всїх цїлочисельних многократий величини n.

Квадрат субституції g посуне кождий показчик о два місця, т. є.

$$g^2 = | \, z \quad z+2 \, | \quad (\text{mod. } n)$$

взагалї

$$g^k = | \, z \quad z+k \, | \quad (\text{mod. } n);$$

ті всї означеня містять ся в формулцї (1).

Ґрупа субституцій g називаєть ся **циклїчною ґрупою** (zyklische Gruppe), а належна до неї функція **циклїчною функцією**. Коли за n приймемо перве число p, тодї кожда субституція циклїчної ґрупи буде мати тільки один цикль, а циклїчна функція буде

$$\varphi = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \cdot \quad \cdot + \omega^{p-1} x_p)^p, \tag{2}$$

де ω є первісним p-тим коренем з одиниці. Що φ є дійсно циклїчною функцією, бачимо з того, що за ужитєм субституції g_α переходить φ в

$$(\varphi)_{g^\alpha} = (x_{\alpha+1} + \omega x_{\alpha+2} + \cdot \quad \cdot + \omega^{p-1} x_{\alpha+p})^p$$
$$= \omega^{\alpha p}(x_1 + \omega x_2 + \quad \cdot + \omega^{p-1} x_p)^p = \varphi,$$

бо $\omega^p = 1$, отже зовсім не змінить ся.

---

*) Vogt, Leçons sur la résolution algèbrique des équations, Paris 1895, стр. 23.

§. 40. Коли $n = pq$, де p і q є перві числа, тоді можемо всі змінні представити так, що вони мають по два показчики, отже можемо їх уложити в прямокутник:

$$\left.\begin{array}{l} x_{11},\ x_{12},\ x_{13}, \qquad .,\ x_{1q}, \\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23}, \qquad .,\ x_{2q}, \\ \\ x_{p1},\ x_{p2},\ x_{p3}, \qquad .;\ x_{pq}; \end{array}\right\} \quad (3)$$

репрезентанта тої системи означуємо x_{hk}. Щоби зазначити, що субституція g буде змінювати оба показчики, пишемо так:

$$g = | h, k \quad h + \alpha, k + \beta | (\mathrm{mod.}\ p;\ \mathrm{mod.} q); \qquad (4)$$

т. зн., що c замінить перший показчик h на $h + \alpha$ (mod. p), а другий k на $k + \beta$ (mod. q). Субституцію (4) можна назвати **двосторонною** (zweiseitig). Коли субституція змінює тільки один показчик, т. є коли $\beta = 0$ або $\alpha = 0$, назвемо її **односторонною** (einseitig). Порядок двосторонної субституції є $n = pq$, односторонної p або q, в міру того, чи $\beta = 0$, чи $\alpha = 0$. Коли $\beta = 0$, субституція g змінює тільки перші показчики, отже пересуває змінні x_{hk} тільки в прямовісних рядках таблиці (3); таку субституцію назвемо g_1 і зазначимо її як (1); для $\alpha = 0$ будемо мати субституцію g_2, яка пересуває тільки кожду змінну серед того самого поземого рядка. Супроти того можемо кожду двосторонну субституцію представити при помочи двох односторонних

$$g = g_1{}^{\alpha} g_2{}^{\beta} \begin{pmatrix} \alpha = 0,\ 1, & .,\ p - 1 \\ \beta = 0,\ 1, & .,\ q - 1 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Субституції g_1 і g_2 є очивидно перемінні, бо обсяги їх ділання є зовсім инакші: g_1 пересуває перші показчики, g_2 другі, отже нам байдуже, чи ми змінимо перше той чи другий показчик; ґрупа субституцій g є проте **Абелева**, а звідси форма (5) (§. 21).

Ґрупа субститутуцій g_1 є непервісна, бо всі її субституції g_1 переставлюють тільки елементи серед того самого прямовісного рядка або прямовісні рядки між собою; клясу непервісности становлять тут за кождим разом елементи

$$x_{1k},\ x_{2k},\ x_{3k}, \qquad .,\ x_{pk}\ (k = 1,\ 2, \qquad .,\ q).$$

Так само ґрупа субституцій g_2 є непервісна; клясами непервісности є елементи:

$$x_{h1},\ x_{h2},\ x_{h3}, \qquad .,\ x_{hq}\ (h = 1,\ 2, \qquad .,\ p).$$

Коли $p=q$, маємо p^2 елементів, а таблиця (3) стає квадратом

$$\left.\begin{array}{llll} x_{11}, & x_{12}, & ., & x_{1p}, \\ x_{21}, & x_{22}, & ., & x_{2p}, \\ & & & \\ x_{p1}, & x_{p2}, & ., & x_{pp}; \end{array}\right\} \quad (3')$$

тодї субституція (4) має тільки один модул

$$g = | \, h, k \quad h+\alpha, k+\beta \, | \text{ (mod. } p). \qquad (4')$$

§. 41. Коли n складаєть ся з більшої скількости перших чинників (однакових або нї), $n=pq \quad r$, можемо елементам x надати тільки показчиків, кілько є в n перших чинників

$$x_{hk} \quad 1;$$

в такім разї кожду субституцію, яка буде циклїчно пересувати ті показчики, напишемо в формі

$$g = | \, h, k, \ldots, l \quad h+\alpha, k+\beta, .. \; , l+\gamma \, | \text{ (mod. } p\text{; mod. } q\text{; mod. } r) \quad (6)$$

або приймаючи

$$n = p_1 p_2 \quad \cdot p_\nu,$$

$$g = | \, h_i \quad h_i+\alpha_i \, | \text{ (mod. } p_i; \; i=1, 2, \quad ., \nu), \qquad (6')$$

а означуючи субституцію, яка посуває λ-тий показчик о 1, а всї прочі лишає без зміни, g_λ — маємо

$$g = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \ldots g_\nu^{\alpha_\nu} (\alpha_i = 0, 1, 2, \ldots, k-1; \; i=1, 2, \ldots, \nu) \qquad (5')$$

Порядок субституції (5′) є $p_1 p_2 \quad p_\nu = n$.

Субституції (4) і (6) називаємо *зложеними циклїчними*.

Коли $p_1 = p_2 = . \quad . = p_\nu$, отже $n = p^\nu$, субституція g називаєть ся *аритметичною* (aritmetisch) *порядку* p^ν, а ґрупа, утворена з тих субституцій, *аритметичною**).

Ми бачили, що порядок циклїчної ґрупи (1) був p, отже рівний степеневи ґрупи; так само порядок аритметичної ґрупи буде p^ν, отже рівний її степеневи, бо добір показчиків α_i в (5) допускає p^ν комбінацій.

§. 42. Анальоґічно до циклїчних функцій, можемо творити *зложені циклїчні функції*. До тої цїли потрібуємо двох або більшої скількости первісних корінїв з одиниці, p_1-ого, ω_1, p_2-ого, ω_2, ., p_ν-ого, ω_ν. При їх помочи творимо прості циклїчні функції таких елементів, яких всї показчики з виїмком першого є однакові, нпр. для $n = p_1 p_2$:

---

*) Отсю назву впровадив Cauchy, Exercices d' Analyse III. стр. 232.

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 = (x_{11} + \omega_1 x_{21} + \omega_1{}^2 x_{31} + . \quad . + \omega_1{}^{1p-1} x_{p_1 1}) p_1, \\ \varphi_2 = (x_{12} + \omega_1 x_{22} + \omega_1{}^2 x_{32} + . \quad . + \omega_1{}^{1p-1} x_{p_2 2}) p_1, \\ \quad . \\ \varphi_{p2} = (x_{1p2} + \omega_1 x_{2p2} + \omega_1{}^2 q_{3p2} + \ldots + \omega_1{}^{p-1} x_{p1p2})^p{}_1; \end{array}\right\} \quad (7)$$

Ґрупа кождої з тих функцій обіймає тільки такі субституції, які не змінюють других показчиків, отже g_1.

Тепер творимо циклїчну функцію величин φ_λ; їх є p_2, отже мусимо до того ужити коріня ω_2

$$\psi = (\varphi_1 + \omega_2 \varphi_2 + \omega_2{}^2 \varphi_3 + . \quad . + \omega_2{}^{2p-1} \varphi_{p_2})^{p_2}; \qquad (8)$$

до тої функції належить така ґрупа, яка пересуває циклїчно величини φ, отже ґрупа субстатуцій g_2. Величини φ є незмінні для ґрупи g_1, отже ціла ґрупа, утворена з субституцій

$$g = g_1{}^{\alpha 1} g_2{}^{\alpha 2} (\alpha_1 = 0, 1, 2, \ldots, p_1 - 1; \alpha_2 = 0, 1, 2, \ldots, p_2 \quad 1) \quad (5'')$$

не може змінювати функції ψ; проте зложена циклїчна ґрупа є ґрупою функції ψ.

Коли маємо більше первих чинників в n, творимо нові циклїчні функції при помочи корінїв $\omega_3, \quad ., \omega_\nu$.

§. 43. Циклїчні субституції пересувають кождий з показчиків о одно або більше місць, отже не лишають нї одного елємента без зміни. Шукаймо тепер такої субституції, яка переводить кождий з показчиків в його многократь; для $n = p$ будемо мати

$$t = | z \ az | \ (\mathrm{mod.}\ p). \qquad (9)$$

Що ті субституції творять ґрупу, виходить з їх комбінації

$$t_a t_b = | z \quad az \ . | z \quad bz | = | z \quad abz | = t_{ab};$$

порядок тої ґрупи є $p-1$, бо за a можна класти всї числа від 1 до $p-1$; вартість $a = 0$, а так само $a = p$, не має значіня.

Ґрупа субституції t є перемінна, бо

$$t_a t_b = t_{ab} = t_{ba} = t_b t_a.$$

Комбінуючи ґрупу субституцій g з ґрупою субституції t, одержуємо ґрупу порядку $p(p-1)$, якої кожду субституцію можна представити в формі

$$s = | z \ az + b | \ (a = 1, 2, \quad ., p-1; b = 0, 1, \quad ., p-1). \quad (10)$$

Отсю ґрупу називаємо лїнїйною (linear; Jordan) або метациклїчною ((metazyklisch; Kronecker).

Трансформуючи яку небудь циклїчну субституцію субституцією лїнїйної ґрупи, одержимо иншу циклїчну субституцію

$$s^{-1}gs = g', \qquad (11)$$

або

$$gs = sg'; \qquad (12)$$

з огляду на те, що g і g' є субституції циклічної ґрупи, можемо написати:

$$GS = SG; \qquad (13)$$

тут означує G циклїчну ґрупу, а S лінійну. З того бачимо, що лїнійна ґрупа є перемінна з циклїчною. З рівнаня (11) виходить дальше, що циклїчна ґрупа є визначною підґрупою лінійної.

§. 44. Функція, яка належить до ґрупи S, називаєть ся метациклїчна. Її можемо утворити так: при помочи ω творимо просту циклїчну функцію

$$\varphi = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \qquad . + \omega^{p-1} x_p)^p \qquad (2)$$

яка позваляє на всї субституції g, але під впливом t переходить в

$$(\varphi)_t = (x_a + \omega x_{2a} + \omega^2 x_{3a} + . \qquad . + \omega^{p-1} x_{pa})^p;$$

показчики при незвісних мусимо скорочувати для (mod. p); приймім, що

$$ka \equiv 1 \text{ (mod. } p),$$

тоді маємо:

$$x_a + \omega x_{2a} + \ldots + \omega^{p-1} x_{pa} = \omega^{k-1}(x_1 + \omega x_{1+a} + \omega^2 x_{1+2a} + \ldots + \omega^{p-1} x_{1-a}),$$

а звідси

$$(\varphi)_t = \varphi_a = (x_1 + \omega x_{1+a} + \omega_2 x_{1+2a} + \ldots + \omega^{p-1} x_{1-a})^p;$$

кладучи за a вартости: 1, 2, .. $p-1$, одержимо ряд функцій

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \qquad + \omega^{p-1} x_p)^p, \\
\varphi_2 &= (x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_5 + \qquad + \omega^{p-1} x_{2p-1})^p, \\
\varphi_3 &= (x_1 + \omega x_4 + \omega^2 x_7 + \qquad + \omega^{p-1} x_{3p-2})^p, \\
\\
\varphi_{p-1} &= (x_1 + \omega x_p + \omega^2 x_{2p-1} + \ldots + \omega^{p-1} x_{p+1})^p,
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

симетрична функція тих величин буде вже незмінна для всїх субституцій t, бо буде переводити тільки кожде φ в инше.

Отже функція

$$\Phi = (\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2) \qquad (\varphi - \varphi_{p-1})$$

є метациклїчною функцією.

§. 45. Подібно як перше, можемо і тут творити лінїйні ґрупи для зложених степенїв. Обмежимо ся тільки до того випадку, де $n = p^{m}$. В такім разї має субституція t вигляд:

$$t = | \, h, k, \ldots, l \quad a_1 h + a_2 k + \ldots + a_m l, b_1 h + b_2 k + \ldots + b_m l, \ldots,$$
$$c_1 h + c_2 k + \ldots c_m l \, | \pmod{p} \qquad (16)$$

можемо її назвати **однородною лінїйною субституцією**, бо вона заступає кождий показчик однородною лінїйною функцією всїх инших. Cauchy називає її **ґеометричною субституцією** (geometrische S.).

Твердженє. Щоби виражене t представляло (ґеометричну) субституцію, є конечне і вистарчаюче, щоби визначник, утворений з сочинників при показчиках, був зглядно первий до модулу p.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & & a_m \\ b_1 & b_2 & & b_m \\ & & & \\ c_1 & c_2 & & c_m \end{vmatrix} \equiv\!|\!\equiv 0 \pmod{p}. \quad (17)$$

Доказ. Коли t має представляти субституцію, тодї мусить істнувати система рівнань

$$\left.\begin{array}{l} a_1 h + a_2 k + \ldots + a_m l \equiv h' \\ b_1 h + b_2 k + \ldots + b_m l \equiv k', \\ \\ c_1 h + c_2 k + \ldots + c_m l \equiv l' \end{array}\right\} \pmod{p}, \qquad (18)$$

отже буде:

$$t = | \, h, k \ldots, l \quad h', k', \ldots, l' \, | \pmod{p}$$

і навпаки:

$$t^{-1} = | \, h', k', \ldots, l \quad h \, k, \ldots l \, | \pmod{p}.$$

Щоби з t можна перейти до t^{-1} при помочи рівнань (18), мусить бути визначник (17) зглядно первий до модулу p, бо тодї система (18) не мала би нїякого значіня.

§. 46. Скомбінувавши ґеометричні субституції з аритметичними, одержуємо **повну лінїйну ґрупу степеня** p^{m} (volle lineare Gruppe або lineare Kongruenzgruppe).

Її порядок є

$$(p^{m} - 1)(p^{m} - p)(p^{m} - p^{2}) \qquad (p^{m} - p^{m-1})^{*}).$$

---

*) Пор Netto, Substitutionentheorie, стр. 155.

Повна лїнїйна ґрупа є перемінна з аритметичною. З того виходить, що аритметична ґрупа є визначною підґрупою повної лїнїйної.

Повна лїнїйна ґрупа степеня p^2 складаєть ся з двох родів субституцій:

$$\left.\begin{array}{l} g = \mid h\,k \quad h+a.\ k+\beta \mid, \\ t = \mid h,k \quad ah+bk,\ ch+dk \mid \end{array}\right\} (\text{mod. } p). \quad (19)$$

Та ґрупа містить в собі як підґрупу т. зв. метациклїчну ґрупу степеня p^2, якою займемо ся в дальшій части нашої працї.

Друга частина.

Теорія рівнань.

VI. Альґебраічні рівнаня.

§. 47. Альґебраічне рівнанє називаємо рішимим (auflösbar), коли його можна розвязати в альґебраічнім змислї, т. є представити його корінї як альґебраічні функції сочинників. Що розвязка рівнаня істнує все, виходить з основного твердженя альґебри, яке каже, що кожде рівнанє, якого сочинники є дїйсними або сполученими числами, має один корінь з обсягу дїйсних або сполучених чисел, а тим самим як раз стільки корінїв, кілько одиниць є в степеню рівнаня*).

Помимо того не вміємо розвязати кождого даного рівнаня в альґебраічнім значіню; можемо радше сказати, що рішимі рівнаня є виїмками з поміж усїх, які-б ми могли утворити зі всїх можливих дїйсних і злучених чисел.

Теорія ґруп дає спромогу вибирати з поміж всїх рівнань рішимі.

---

*) Доказ основного твердженя альґебри не належить сюди, тільки до теорії функцій. Гл. впр. Gauss, Vier Beweise für die Zerlegung ganzer alg. Funktionen in reelle Faktoren ersten und zweiten Grades. Ostwald's Klassiker der exakt. Wiss. Leipzig, 1898.

§. 48. Нехай буде дане альґебраічне рівнане n-того степеня

$$f(x)=0; \qquad (1)$$

коли воно має корінь α, тодї є воно подїльне через $x-\alpha$, а квот того діленя є новим рівнанем, але вже степеня $n-1$.

Коли корінь рівнаня (1) α є вимірним числом, рівнане називають ся *зведимим* (reduktibel); в противнім разї є рівнане *незведиме* (irreduktibel). Незведимого рівнаня не можна розложити на чинники першого степеня з вимірними сочинниками.

Загал всїх вимірних чисел називаємо *природним обсягом вимірности* (natürlicher Rationalitätsbereich; Kronecker). Той загал має таку характеристичну прикмету, що чотири головні операцїї, виконувані на числах з того обсягу, дають опять вимірні числа на вислїд. Таку систему чисел, якої елєменти не змінюють ся (т. є не виходять поза межі системи) через чотири головні операції, називаємо *тїлом* (Körper; Dedekind).

Коли до обсягу вимірности доберемо якесь число з поза него, нпр. невимірне або мниме, одержимо новий обсяг; в тім обсягу мусять приходити всї комбінації того долученого числа з числами первісного обсягу. Таку операцію називаємо *долучуванем природних невимірностий* (Adjunktion natürlicher Irrationalitäten), а нове тїло називаємо *розширеним обсягом вимірности* (erweiterter R.) або *розширеним тілом*. Функції, яких сочинники належать до даного тїла, називають ся *функціями того тїла* (обсягу) або *функціями в тім тїлї* (обсягу) (Funktionen im Körper).

Функцію називаємо *незведимою в данім обсягу*, коли вона не має дїльника в видї функції того обсягу. В тім самім значінню говоримо і про незведимість рівнань.

Незведиме рівнане стає зведимим, коли розширимо первісний обсяг долученем відповідної невимірности. Нпр. квадратне рівнане

$$x^2-2x-2=0$$

є в природнім обсягу вимірности — будемо його називати стало обсягом (R) аботїлом (R) — незведиме; зате стає воно зведиме, коли до (R) долучимо невимірне число $\sqrt{3}$; бо тодї є:

$$x_1=1+\sqrt{3},\ x_2=1-\sqrt{3},$$

отже наше рівнане є подїльне через $x-x_1$ і $x-x_2$.

Розширений обсяг (R) значимо так, що в скобку замикаємо також долучену невимірність, (R,ω); в нашім примірі буде $(R, \sqrt{3})$.

З тої точки погляду бачимо, що розвязка рівнань буде полягати на відповіднім розширюваню обсягу вимірности; через те буде ставати рівнанє зведиме, і ми одержимо дільники того рівняня, $x - \alpha$, обнижуючи рівночасно його степень.

§. 49. Щоби дійти до приміненя теорії ґруп до альґебраїчних рівнань, мусимо перше здати собі справу з того, який вплив мають субституції на рівнаня.

Утворім функцію Galois з корінїв даного рівнаня (1); те рівнанє не підлягає ніяким иншим обмеженям, тільки що воно не може мати многократних корінїв. В такім разї ґрупа функції Galois даного рівнаня буде ідентична, а сама та функція матиме $n!$ вартостий. В приміненю до рівнань називаєть ся функція

$$\xi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \quad . + \alpha_n x_n \tag{2}$$

ресольвентою Galois, а рівнанє $n!$-того степеня, утворенє з неозначеної величини ξ і всїх вартостий ресольвент (2)

$$F(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \qquad (\xi - \xi_n) = 0 \tag{3}$$

рівнанєм ресольвенти. Знаючи один корінь рівняня (3), можемо знайти всї инші, бо всї вони мають ту саму ґрупу, т. є 1. Отже наш проблем, розвязати рівнанє n-того степеня, т. є знайти всї n корінїв, заступаємо иншим, а саме, знайти один корінь рівнаня степеня $n!$.

§. 50. Рівнанє (1) вважаємо загальним, коли його корінї і сочинники є зовсїм від себе независимі. Приймім тепер, що між корінями даного рівнаня є якась звязь; нпр. вже корінї рівнаня (3) не є независимі, тільки підлягають звязи (2). Таке рівнанє називаємо спеціяльним. Отже корінї спеціяльного рівнаня є все ще звязані з собою якоюсь реляцією

$$\Phi(x_1, x_2, \qquad ., x_n) = 0 \tag{4}$$

або

$$\Phi(x_1, x_2, \qquad ., x_n) = c; \tag{4'}$$

чи дана реляція Φ лучить сочинники рівнаня, чи його корінї, се виходить на одно*). Коли даних більше таких реляцій, тодї методою неозначених сочинників можна їх замінити в одно одиноке рівнанє:

$$\Phi = \Phi_1 \alpha + \Phi_2 \beta + \qquad = 0.$$

Кожду з реляцій (4) або (4') можна заступити иншою функцією з того самого ґатунку, бо тодї можна ті дві реляції виражу-

---

*) Netto, Substitutionentheorie, стр. 161—164.

вати взаїмно одну другою. В такім разї кажемо, що ми долучили до рівнаня (1) ґатунок функції (4). До того самого результату дійдемо, коли замість ґатунку функцій введемо ґрупу тої функції. Ґрупа функції Φ називаєть ся ґрупою даного рівнаня.

Нпр. в рівнаню четвертого степеня:

$$x^4+ax^2+b=0,$$

якого коріні є x_1,x_2,x_3,x_4, маємо таку зависимість між корінями: $x_1+x_2=0$, $x_3+x_4=0$, отже

$$\Phi_1=x_1+x_2=0,\ \Phi_2=x_3+x_4=0.$$

Ґрупа першої функції є:

$$G_1=[1,\ (12),(34),\ (12)(34)];$$

добираючи субституцію

$$\sigma=(13)(24)$$

одержуємо ґрупу $G=G_1\sigma$ осьмого порядку, яка рівно-ж не змінить вартости тої функції. Отже ґрупа

$$G=[1,(12),(34),(12)(34),(13)(24),(1423),(1342),(14)(23)]$$

є ґрупою нашого рівнаня.

§. 51. **I. Твердженє.** Коли дане рівнанє $f(x)=0$, якого коріні є всї ріжні, а сочинники є числами з тїла (R), то все можна знайти таку ґрупу, що кожда функція корінїв рівнаня, яка позволяє на ту ґрупу, дасть ся виразити вимірно знаними величинами, — і навпаки, що кожда функція корінїв, яку можна виразити знаними величинами, позволяє на ту ґрупу*).

Доказ. Рівнанє ресольвенти (3) є симетричною функцією корінїв рівнаня (1). Розложім його на чинники, які є в тїлї (R) незведимі, нехай отже буде:

$$F(\xi)=F_1(\xi)F_2(\xi)$$

приймім, що

$$F_1(\xi)=(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\qquad(\xi-\xi_\nu).$$

Коли субституції $s_1=1$, s_2, s_3, ., s_ν переводять в себе величини ξ_1, ξ_2, ., ξ_ν, то ґрупа G, зложена з тих субституцій не змінить величини $F_1(\xi)$.

---

*) Serret, Cours d' Algèbre, Paris 1885, II. стр. 639. — Vogt, Leçons etc. стр. 76.

Кожду функцію корінїв, незмінну для ґрупи G, можеме виразити вимірно при помочи ресольвенти Galois ξ_1

$$\varphi_1\ (x_1,\ x_2, \qquad .,\ x_n) = \psi(\xi_1).$$

Виконуючи в тім рівнаню субституції ґрупи G, не змінимо лївої сторони, а права перейде чергою в

$$\psi(\xi_2),\ \psi(\xi_2), \qquad \psi(\xi\nu)$$

отже будемо мати

$$\varphi_1 = \psi(\xi_1) = \psi(\xi_2) = \qquad = \psi(\xi\nu)$$

або

$$\varphi_1 = \frac{1}{\nu}\left[\psi(\xi_1) + \psi(\xi_2) + \qquad + \psi(\xi\nu)\right]. \tag{5}$$

Сума в гранчастій скобцї є симетрична в величинах $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi\nu$, отже можна її представити вимірно при помочи $F_1(\xi)$. Звідси виходить, що φ_1 має вимірну вартість в обсягу (R).

Навпаки, коли φ_1 можна представити величинами обсягу (R) то та функція позволяє на ґрупу G. Нехай буде

$$\varphi_1\ (x_1,\ x_2,, \qquad .,\ x\nu) = \chi(R),$$

отже вимірна функція величини обсягу R; представмо її ліву сторону як функцію ресольвенти Galois. Коли

$$\varphi_1 = \psi(\xi_1),$$

то і

$$\psi(\xi_1) = \chi(R).$$

Коли те рівнанє має один корінь рівнаня $F_1(\xi)$, то воно мусить бути справджене і для всїх инших корінїв того рівнаня, отже

$$\psi(\xi_i) = \chi(R) = \varphi_1.$$

Звідси бачимо, що функція φ_1 не змінюєть ся, коли ξ_1 заступимо иншими вартостями: $\xi_2,\ \xi_3, \qquad \xi\nu$, отже ґрупа G не має на неї впливу.

Ґрупу G називаємо *ґрупою рівнаня* (1).

§. 52. **II. Твердженє.** *Ґрупа незведимого рівнаня є перехідна, і навпаки: рівнанє, яке має перехідну ґрупу, є незведиме.*

Доказ. Приймім, що ґрупа G рівнаня (1) є неперехідна; нехай вона переводить в себе $x_1,\ x_2 \qquad x\nu$, тодї функція

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \qquad (x - x\nu)$$

є незмінна для G. φ належить до ґатунку ґрупи G або до низшого ґатунку, отже кождим разом дасть ся представити вимірно. Тодї є $\varphi(x)=0$ дїльником функції $f(x)=0$.

Коли $f(x)$ є зведиме, тодї можемо знайти таке $\varphi(x)$, про яке була бесїда. G не може тодї мати нї одної такої субституції, яка переводила би x_1 в $x_{\nu+1}$, бо тодї звісна функція $\varphi(x)$ не була би незмінна для всїх субституцій з G; отже G мусїло би бути непереходною ґрупою.

З того слїдує, що незведимість рівнаня і переходність ґрупи є рівнозначні понятя.

§. 53. Перейдїм тепер до рівнань чотирох низших степенів, звертаючи увагу на те, що інтересне зі становиска теорії ґруп. Тому то будемо вишукувати дво-, три- і чотиро-вартісні функції і представляти їх вимірно при помочи знаних величин; до тої цїли послужить нам розслїджуванє ґруп даних рівнань.

Квадратне рівнанє

$$x^2-c_1x+c_2=0 \qquad (6)$$

є все загальне, хиба що наложимо йому умову:

$$x_1+x_2=c_1=0;$$

тодї рівнанє стає спеціяльне. Знані величини в тім рівнаню є c_1 і c_2, основні симетричні функції коріньів. При їх помочи можна виразити кожду функцію корінів, отже передовсїм квадрат їх діскріміванти:

$$\Delta=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=c_1^2-4c_2;$$

се є, як видко, симетрична функція корінїв. Квадратний корінь з неї:

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{c_1^2-4c_2}$$

є двовартнісний, але вже знаний в величинах c_1 і c_2.

Возьмім тепер яку небудь лінїйну функцію корінїв

$$\varphi=a_1x_1+a_2x_2,$$

яку можемо написати також так:

$$\varphi=\frac{a_1+a_2}{2}(x_1+x_2)+\frac{a_1-a_2}{2}(x_1-x_2),$$

отже

$$\varphi=\frac{a_1+a_2}{2}c_1+\frac{a_1-a_2}{2}\sqrt{c_1^2-4c_2}$$

Спеціяльно маємо для:

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0:\ \varphi_1 = x_1 = \frac{c_1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{c_1{}^2 - 4c_2}\,;$$

$$\beta_1 = 0,\ \alpha_2 = 1:\ \varphi_2 = x_2 = \frac{c_1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{c_1{}^2 - 4c_2}.$$

Таким чином виразили ми коріні рівнаня знаними величинами.

Ґрупа квадратного рівнаня є $g = [1, (12)]$; вона змінить тільки вартість коріня з діскрімінанти $\sqrt{\Delta}$.

§. 54. Маючи кубічне рівнане

$$x^3 - c_1 x^2 + c_2 x - c_3 = 0, \qquad (7)$$

знаємо передовсїм основні симетричні функциї корінїв, c_1, c_2 і c_3, а далї двовартісну функцію, якої квадрат є симетричний, т. є

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2.$$

Представляючи її симетричними функціями, одержуємо звісний результат:

$$\Delta = -(c_2{}^3 + 27c_3{}^2) + 18c_1c_2c_3 + c_1{}^2c_2{}^2 - 4c_1{}^3c_3\,; \qquad (8)$$

квадратний корінь того вираженя, $\sqrt{\Delta} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$, є альтернуючою функцією. До тої функції належить альтернуюча ґрупа 3-го степеня:

$$G = [1, (123), (132)].$$

Ресольвента Galois має три вартости для субституції тої ґрупи; отже є вона корінем кубічного рівнаня, якого сочинники є двовартісними функціями. Щоби те друге кубічне рівнане було о скільки мога найпростїйше, приймаємо за ресольвенту Galois функцію

$$\xi_1 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3, \qquad (9)$$

де ω є третїм коренем з одиниці (се т. зв. ресольвента Lagrange'a). Альтернуюча ґрупа переводить її в ξ_1, $\omega^2\xi_1$, $\omega\xi_1$; третя степень з (9) є проте незмінна для альтернуючої ґрупи; знаючи, що

$$\omega = \tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),$$

маємо

$$\xi_1{}^3 = \tfrac{1}{2}(+2c_1{}^3 - 9c_1c_2 + 27c_3 + 3i\sqrt{3\Delta})$$

або

$$\xi_1{}^3 = \tfrac{1}{2}(S_1 + 3\sqrt{-3\Delta}).$$

Змінюючи знак при $\sqrt{-3\Delta}$, одержимо $\xi_2 = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3$, і

$$\xi_2{}^3 = \tfrac{1}{2}(S_1 - 3\sqrt{-3\Delta}).$$

Таким чином маємо:

$$\xi_1 = x_1 + \omega x^2 + \omega^2 x_3 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\, S_1 + 3\sqrt{-3\Delta})},$$

$$\xi_2 = x_1 + \omega^2 x_3 + \omega x_3 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S_1 \quad 3\sqrt{-3\Delta})},$$

а добираючи ще до того знану реляцію

$$\xi_0 = x_1 + x_2 + x_3 = c_1,$$

маємо:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{1}{3}[c_1 + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S_1 + 3\sqrt{-3\Delta})} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S_1 \quad 3\sqrt{\quad 3\Delta})}\,],\\
x_2 &= \tfrac{1}{3}[c_1 + \omega^2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S_1 + 3\sqrt{-3\Delta})} + \omega\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S_1 - 3\sqrt{-3\Delta})}],\\
x_3 &= \tfrac{1}{3}[c_1 + \omega\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S_1 + 3\sqrt{-3\Delta})} + \omega^2\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(S_1 - 3\sqrt{\quad 3\Delta})}].
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Се т. зв. метода Lagrange'a.

§. 55. Звичайно уживаємо иншої дороги, а то тому, що обчислюванє величини $\sqrt{-3\Delta}$ є доволї невигідне. Найбільше знана метода Hudde'a*) веде до т. зв. Карданської формулки.

Передовсім мусимо увільнити ся від квадратного члена при помочи підставленя

$$x = y + \tfrac{1}{3}c_1;$$

те поведе нас до рівнаня

$$y^3 - Ay - B = 0, \qquad (11)$$

де

$$A = \tfrac{1}{3}c_1{}^2 - c_2,$$
$$B = \tfrac{2}{27}c_1{}^3 - \tfrac{1}{3}c_1 c_2 + c_3.$$

---

*) Serret, Algèbre II. стр. 493.

Кладучи

$$y = \alpha + \beta$$

визначуємо ті дві нові незвісні з рівнань

$$\alpha^3 + \beta^3 = B,$$

$$\alpha\beta = \frac{A}{3},$$

або:

$$\beta = \frac{A}{3\alpha}, \quad \alpha^6 - B\alpha^3 + \frac{A^3}{27} = 0. \qquad (12)$$

Се рівнане є шестого степеня; коли його корінем буде α_1, то прочі пять корінїв будуть: $\omega\alpha_1$, $\omega^2\alpha_1$; β_1, $\omega\beta_1$, $\omega^2\beta_1$, де $\beta_1 = \frac{A}{3\alpha_1}$.

Переходячи до даного рівнаня, одержимо:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}[c_1 + 3(\alpha_1 + \beta_1)], \\ x_2 &= \tfrac{1}{3}[c_1 + 3(\omega^2\alpha_1 + \omega\beta_1)], \\ x_3 &= \tfrac{1}{3}[c_1 + 3(\omega\alpha_1 + \omega^2\beta_1)]. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Тепер можемо переконати ся, що

$$x_1 + x_2 + x_3 = c_1,$$

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = 3\alpha_1$$

$$x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 = 3\alpha_2,$$

т. зн., що $\xi_1 = 3\alpha_1$, $\xi_2 = 3\alpha_2$, отже обі розвязки є ідентичні. — Згадану формулу **Кардана** одержимо, розвязуючи (12) для α і β:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{B}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}},$$

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{B}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}},$$

$$x_1 = \tfrac{1}{3}\left[c_1 + 3\sqrt[3]{B + \sqrt{B^2 - 4\left(\frac{A}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{B - \sqrt{B^2 - 4\left(\frac{A}{3}\right)^3}}\right];$$

порівнуючи те вираженє з

$$\xi_1{}^3 = \tfrac{1}{2}(S_1 + 3\sqrt{-3\Delta}),$$

переконаємо ся рівно-ж, що $S_1 = 27B$, а

$$3\sqrt{\ \ 3\Delta} = 27\sqrt{B^2 - 4\left(\frac{A}{3}\right)^3}$$

§. 56. Маючи рівнанє четвертого степеня

$$f(x) = x^4 - c_1x^3 + c_2x^2 - c_3x + c_4 = 0, \qquad (14)$$

знаємо передовсїм основні симетричні функції його корінів, а дїскрімінанту можемо легко обчислити. Розгляньмо ся тепер в ріжних ґрупах четвертого степеня і добираймо до них відповідні функції. До тої цїли ужиймо означень з §. 30.

Наше рівнанє є загальне, отже його ґрупа є симетрична G, порядку 24.

Ґрупою дїскрімінанти є альтернуюча ґрупа H порядку 12.

З симетричної ґрупи G можемо ще утворити три спряжені ґрупи Γ_1, Γ_2, Γ_3 порядку 8 (§. 32): ґрупу

$$\Gamma_1 = [1,\ (12),\ (34),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)],$$

яка не змінює функції

$$\varphi_1 = x_1x_2 + x_3x_4\,;$$

трансформуючи її транспозицією (23) одержуємо ґрупу

$$\Gamma_2 = [1,\ (13),\ (24),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)],$$

належну до функції

$$\varphi_2 = x_1x_3 + x_2x_4,$$

а через трансформацію (24) доходимо до

$$\Gamma_3 = [1,\ (14),\ (23),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)]$$

з функцією

$$\varphi_3 = x_1x_4 + x_2x_3.$$

Ті три ґрупи є підґрупами симетричної, а не альтернуючої; тому то не можна функціями φ виразити квадратного коріня дїскрімінанти.

Перекрій тих трьох ґруп дає ґрупу порядку 4:

$$K = [1,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)],$$

якої функцію одержимо, комбінуючи всї три φ:

$$z_1 = \varphi_1 + \omega\varphi_2 + \omega^2\varphi_3 \quad \left(\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right), \qquad (15)$$

Третя степень тої функції е двовартісна, і її можна представити при помочи $\sqrt{\Delta}$.

Кожда з ґруп Γ містить в собі ще підґрупу порядку 4:

$$J_1 = [1,\ (12),\ (34),\ (12)(34)],$$
$$J_2 = [1,\ (13),\ (24),\ (13)(24)],$$
$$J_3 = [1,\ (14)\ \ (23),\ (14)(23)];$$

Їх функції е:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \\ g_2 &= x_1 - x_2 + x_3 \quad x_4, \\ g_3 &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Крім того маємо ще чотири циклічні ґрупи порядку 4

$$C_1 = [1,\ (1324),\ (12)(34),\ (1423)],$$
$$C_2 = [1,\ (1234),\ (13)(24),\ (1432)];$$
$$C_3 = [1,\ (1243),\ (14)(23),\ (1342)];$$

їх функції е очивидно теж циклїчні. До C_1 належить

$$\xi = (x_1 + \varepsilon x_3 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_4)^4,$$

де ε е корінем двочленного рівнаня четвертого степеня, т. е $\pm i$. Приймаючи раз $\varepsilon = i$, другий раз $\varepsilon = -i$, маємо:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= [(x_1 - x_2) + i(x_3 - x_4)]^4, \\ \xi_1' &= [(x_1 - x_2) - i(x_3 - x_4)]^4; \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

до C_2 і C_3 належать:

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= [(x_1 - x_3) + i(x_2 \quad x_4)]^4, \\ \xi_2' &= [(x_1 - x_3) - i(x_2 - x_4)]^4, \end{aligned}\right| \left.\begin{aligned} \xi_3 &= [(x_1 - x_4) + i(x_2 - x_3)]^4, \\ \xi_2' &= [(x_1 - x_4) - i(x_2 - x_3)]^4. \end{aligned}\right\} \quad (17')$$

Приходимо тепер до ґруп другого порядку:

$$L_1 = [1,\ (12)(34)],\ L_2 = [1,\ (13)(24)],\ L_3 = [1,\ (14)(23)];$$

ті ґрупи е квадратами субституцій з ґруп C; до них належать функції, які е квадратними корінями функцій ξ.

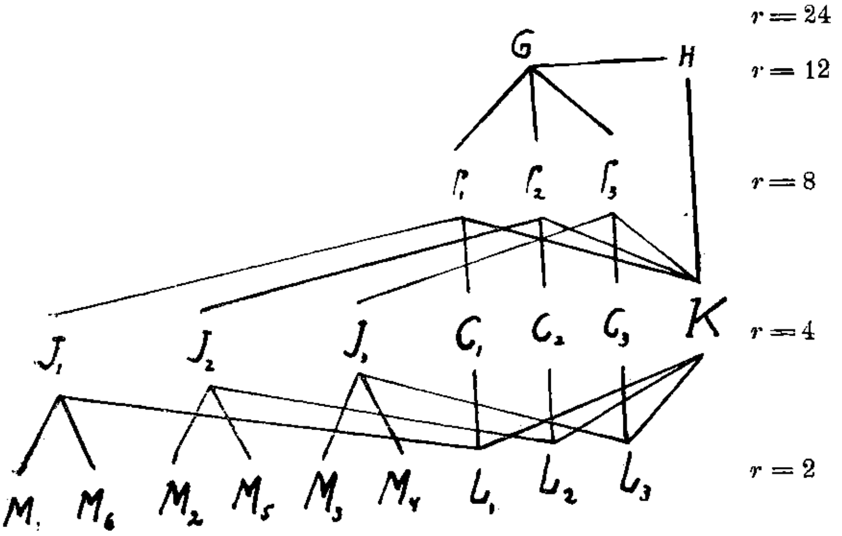
Крім L маємо ще инші ґрупи другого порядку:

$$M_1 = [1,\ (12)],\ M_2 = [1,\ (13)],\ M_3 = [1,\ (14)],\ M_4 = [1,\ (23)],$$
$$M_5 = [1,\ (24)],\ M_6 = [1,\ (34)];$$

до них можемо дібрати такі функції, як

$$u_1(x_1 + x_2) + u_2 x_3 + u_3 x_4.$$

В тім розсліді не увглядняли ми підґруп шестого порядку, які є неперехідні, бо змінюють тільки три елементи. — Підґрупи симетричної ґрупи G можемо представити такою таблицею:



§. 57. Після тої таблиці укладаємо розвязку нашого рівнаня. Метода **Lagrange'a** вимагає, щоби шукати функцій, які належать до ґруп Γ_1, Γ_2, Γ_3. Ті функції є коріннями кубічного рівнаня

$$\varphi^3 - c_2\varphi^2 + (c_1c_3 - 4c_4)\varphi - (c_1{}^2c_4 - 4c_2c_4 + c_3{}^2) = 0 \qquad (18)$$

(гл. §. 37). Знаючи один з них, можемо обчислити функції, належні до ґрупи J_1, J_2, J_3, бо ті ґрупи є визначними підґрупами для Γ_1, Γ_2, Γ_3; до тої ціли треба тільки розвязати одно квадратне рівнанє. Потім можемо представляти кождий ґатунок функцій одною з поміж них.

Нпр. функція $t_1 = x_1 + x_2$, що належить до J_1, переходить через Γ_1 в $t = x_3 + x_4$, отже t_1 і t_2 є коріннями квадратного рівнаня

$$t^2 - c_1t + (\varphi_2 + \varphi_3) = 0,$$

а що $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = c_2$, то $\varphi_2 + \varphi_3 = c_2 - \varphi_1$, отже

$$t^2 - c_1t + (c_2 - \varphi_1) = 0.$$

Визначім тепер один корінь того рівнаня, нпр. t_1, а будемо мати другий: $t_2 = c_1 - t_1$, отже взагалі маємо такі реляції:

$$x_1 + x_2 = t_1, \qquad x_3 + x_4 = t_2,$$

$$t_2x_1x_2 + t_1x_3x_4 = c_3. \qquad x_1x_2 + x_3x_4 = \varphi_1.$$

З двох долішнїх рівнань виходить:

$$x_1x_2=\frac{c_3-\varphi_1t_1}{t_2-t_1},\quad x_3x_4=\frac{c_3-\varphi_1t_2}{t_1-t_2},$$

а комбінуючи їх з горішнїми, одержуємо вже корінї даного рівнаня.

Провідна думка методи Lagrange'а є та, щоби визначити один корінь рівнаня третого степеня і корінї трьох квадратних рівнань. — Ми посували ся від функцій φ до t і до x; дотичні ґрупи були: Γ, J, M, 1; кожда з тих ґруп була визначною попередньої, а ряд сочинників зложеня був: 3, 2, 2, 2. Звідси бачимо, що порядок ґрупи r спадає відразу на $\frac{r}{m}$, коли ми розвяжемо помічне рівнанє m-того степеня.

§. 58. Модіфікація тої методи лежить в тім, що виходимо від функцій ґруп J, і при їх помочи представляємо всї другі. Функція ґрупи J_1

$$g_1=x_1+x_2-x_3-x_4$$

має для Γ_1 дві вартости, g_1 і $-g_1$. Легко переконати ся, що

$$g_1{}^2=c_1{}^2-4\,(c_2-\varphi_1).$$

Звідси можна обчислити x_1+x_2, x_1x_2; x_3+x_4, x_3x_4 через g_1, але лїпше поступити так:

Функція g_1 має шість вартостий, з того три ріжні, а другі три ріжнять ся від тамтих тільки знаками, отже g_1 є корінем рівнаня шестого степеня; кладучи $g_1{}^2=\vartheta$, маємо те рівнанє:

$$(\vartheta-\vartheta_1)(\vartheta-\vartheta_2)(\vartheta-\vartheta_3)=\vartheta^3+(8c_2-3c_1{}^2)\vartheta^2+(8c_1{}^4-16e_1{}^2c^2+16c_2{}^2$$
$$+16c_1c_3-64c_4)\vartheta+(c_1{}^3+4c_1c_2-8c_3)^2=0$$

Нехай будуть ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 його корінями, тодї маємо:

$$\left.\begin{aligned}
x_1&=\frac{c_1+\sqrt{\vartheta_1}+\sqrt{\vartheta_2}+\sqrt{\vartheta_3}}{4},\\
x_2&=\frac{c_1+\sqrt{\vartheta_1}-\sqrt{\vartheta_2}\quad\sqrt{\vartheta_3}}{4},\\
x_3&=\frac{c_1-\sqrt{\vartheta_1}+\sqrt{\vartheta_2}\quad\sqrt{\vartheta_3}}{4},\\
x_4&=\frac{c_1-\sqrt{\vartheta_1}-\sqrt{\vartheta_2}+\sqrt{\vartheta_3}}{4}.
\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

§. 59. Метода Euler'а полягає на тім, що йдемо рядом зложеня G, Γ, C, L, 1. Функції, які належать до ґрупи C, є корінями рівнаня шестого степеня; але тому, що C є вичначною підґрупою ґрупи Γ з показчиком 2, одержимо функцію ґрупи C, добуваючи другий корінь з функції ґрупи Γ. Функції $\xi_1+\xi_1'$ або $(\xi_1-\xi_1')^2$ належать до ґрупи C_1, отже можна їх представити при помочи φ.

Маємо:

$$\begin{aligned}\xi_1+\xi_1' &= 2[(x_1-x_2)^4-6(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2+(x_3-x_4)^4]\\ &= 4[(x_1-x_2)^2-(x_3-x_4)^2]^2-2[(x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)]^2\\ &= 4\vartheta_2\vartheta_3-2(c_1{}^2-2c_2-2\varphi_1)^2;\end{aligned}$$

$\vartheta_2\vartheta_3$ можна представити при помочи ϑ_1 т. є при помочи φ_1, бо

$$\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3=(c_1{}^3+4c_1c_2-8c_3)^2=(c_1{}^2-4c_2+4\varphi_1)\vartheta_2\vartheta_3,$$

отже

$$\vartheta_2\vartheta_3=\frac{(c_1{}^3+4c_1c_2-8c_2)^2}{c_1{}^2-4c_2+4\varphi_1}=Q.$$

Дальше маємо:

$$\xi_1\xi_1'=(c_1{}^2-2c_2-3\varphi_1)^2,$$

отже ξ і ξ_1' є корінями рівнаня:

$$\xi^2-[4Q-2(c_1{}^2-2c_2-2\varphi_1)^2]\,\xi+(c_1{}^2-2c_2-2\varphi_1)^2=0. \quad (20)$$

З того рівнаня можемо обчислити кожду функцію корінів, а навіть самі коріні, як фукції величини $\sqrt[4]{\vartheta_1}$; лекше однак поступити в инакший спосіб. В функції

$$\sqrt{\xi_1}=x_1+ix_3+i^2x_2+i^3x_4$$

заступаємо i раз через i^2, другий раз через i^3; субституції ґрупи C не змінять тих нових функцій,

$$g_1=x_1-x_3+x_2-x_4,$$

$$\sqrt[4]{\xi_1'}=x_1-ix_3-x_2+ix_4,$$

отже можна їх всі представити в ξ_1. Добираючи до них ще

$$c_1=x_1+x_2+x_3+x_4,$$

маємо:

$$x_1=\tfrac{1}{4}(c_1+\sqrt[4]{\xi_1}+g_1+\sqrt[4]{\xi_1'})$$

і подібні виражeня для других корінів. Величина

$$\left.\begin{aligned}A&=\frac{g_1\sqrt{\xi_1}}{\xi_1}\\ B&=\frac{\sqrt[4]{\xi_1}\sqrt[4]{\xi_1'}}{\xi_1}\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

і

належать до ґрупи C_1, отже можна їх виразити при помочи ξ_1; звідси слїдує:

$$x_1 = \tfrac{1}{4}\left[c_1 + \sqrt[4]{\xi_1} + A\left(\sqrt[4]{\xi_1}\right)^2 + B\left(\sqrt[4]{\xi_1}\right)^3\right].$$

§. 60. Найвигіднїйша до практичного численя є слїдуюча метода:*) Позбувши ся в рівнаню (14) члена з x^3,

$$y^4 - py^2 - qy + r = 0, \tag{22}$$

кладемо:

$$y = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta + \gamma\sqrt{\alpha}}; \tag{23}$$

через двократне квадроване доходимо до

$$y^4 - 2(\alpha + \beta)y^2 - 4\alpha\gamma y + (\alpha - \beta)^2 - \gamma^2 = 0, \tag{24}$$

а порівнуючи сочинники обох рівнань, (22) і (24), одержуємо:

$$\alpha + \beta = \frac{p}{2},\ \alpha\gamma = \frac{q}{4},\ (\alpha - \beta)^2 \quad \gamma^2 = r,$$

а звідси

$$\beta = \frac{p}{2} - \alpha,\ \gamma = \frac{q}{4\alpha},\ \left(2\alpha - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{16\alpha} - r = 0,$$

т. є

$$\alpha_1{}^3 - \frac{p}{2}\alpha^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right)\alpha - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Нехай буде u_1 корінем того рівнаня, тодї маємо, коли заступимо сочинники рівнаня величинами α, β, γ:

$$u^3 - (\alpha + \beta)u^2 + \left(\alpha\beta + \frac{\alpha\gamma^2}{4}\right)u - \frac{\alpha^2\gamma^2}{4} = 0.$$

Подїлїм тепер те рівнанє через $u - \alpha$; квот буде:

$$u^2 - \beta u + \frac{\alpha\gamma^2}{4} = 0;$$

корінї того нового рівнаня є:

$$u_2 = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \frac{\alpha\gamma^2}{4}} = \tfrac{1}{2}(\beta + \sqrt{\beta^2 \quad \alpha\gamma^2}),$$

$$u_3 = \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \frac{\alpha\gamma^2}{4}} = \tfrac{1}{2}(\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma^2}).$$

Звідси:

$$\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3} = \sqrt{\beta + \gamma\sqrt{\alpha}},$$

---

*) Метода Euler'а, інтерпретована моїм Вп. професором Тадеєм Цвойдзїнським, тепер проф. ґімназії у Львові.

отже

$$y = \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3},$$

а корінь первісного рівнаня:

$$x = \frac{c_1}{4} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}$$

Функції $\sqrt{u_2}$ і $\sqrt{u_3}$ є двовартісні; отже добираючи всї комбінації знаків + і —, одержуємо чотири корінї рівнаня (14).

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{c_1}{4} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3} \\ x_2 &= \frac{c_1}{4} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3}. \\ x_3 &= \frac{c_1}{4} + \sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} \quad \sqrt{u_3}. \\ x_4 &= \frac{c_1}{4} + \sqrt{u_1} \quad \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

§. 60 а. **Метода Дивільковського***). Рівнане, увільнене від кубічного члена,

$$y^4 - py^2 - qy + r = 0, \tag{22}$$

можемо розвязувати також при помочи підставленя

$$y = \alpha z + \beta; \tag{26}$$

через те одержимо нове рівнане в z, якому хочемо надати форму відворотного:

$$Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Bz + A = 0. \tag{27}$$

Вставляючи вартість (26) в (22), одержимо такі реляції:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^4 &= \beta^4 - p\beta^2 - q\beta + r. \\ 4\alpha^3\beta &= 4\alpha\beta^3 - 2p\alpha\beta - q\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

а звідси

$$\alpha^2 = \frac{4\beta^3 - 2p\beta - q}{4\beta}. \tag{28 a}$$

Вставивши те остатне вираженє в перше рівнанє (28), одержимо кубічну ресальвенту для β

---

*) Отсю методу прислав ш. автор до редакції „Збірника“.

$$-8q\beta+(16r-4p^2)\beta^2-4pq\beta-q^2=0, \qquad (29)$$

з якої одержимо β. Знаючи його, знаємо легко і α, а тодї вже маємо і сочинники відворотного рівнаня (27)

$$A=\alpha^2,$$

$$B=4\alpha\beta,$$

$$C=6\beta^2+\alpha.$$

§. 61. Спеціяльні рівнаня третого і четвертого степеня мають ґрупи, менші від симетричної. Їх пізнаємо по тім, що котрийсь один з сочинників (або їх більше) є 0; т. зн., що між коріями того рівнаня панує вже якась зависимість.

Спеціяльне кубічне рівнане має ґрупу $G=[1, (123), (132)]$ третього порядку; се циклїчна ґрупа, отже і приналежна функція буде теж циклїчна. Тодї рівнане належить до типу т. зв. Абелевих рівнань; до його розвязки треба витягнути тільки один третїй корінь.

Спеціяльні рівнаня четвертого степеня можуть мати тільки ті підґрупи симетричної ґрупи, які є перехідні, т. зн.

1. альтернуючу ґрупу H;
2. одну з ґруп осьмого порядку Γ_1, Γ_2, Γ_3;
3. ґрупу K;
4. одну з циклїчних ґруп C_1, C_2, C_3.

Рівнаня з альтернуючою ґрупою мають як діскрімінанту повний квадрат функції з вимірними сочинниками в тїлї (R); отже функції φ_1, φ_2, φ_3 одержимо, витягаючи один третїй корінь. — Коли рівнане має одну з ґруп Γ, то рівнане $(\vartheta-\vartheta_1)(\vartheta-\vartheta_2)(\vartheta-\vartheta_3)=0$ має один вимірний корінь; сюди належать двоквадратні і відворотні рівнаня. Їх розвязуємо, витягаючи два рази квадратний корінь. — Ґрупа K вказує на те, що рівнане (14) має три вимірні корінї, отже ті рівнаня розвязують ся також двократним витяганєм квадратного корінл. — Врештї рівнаня з циклїчними ґрупами є Абелеві*).

§. 62. Рівнань висших степенів не можемо розвязувати тими методами. Розвязка рівнаня полягала тут на тім, що ми творили якусь нову функцію, звану взагалї ресольвентою, долучуючи до пер-

---

*) Розділ про рівнаня 2—4 степеня оброблений по части на основі Vogt'a: Leçons etc.

вісного обсягу вимірности що раз то нові невимірности. Початкове рівнане мало симетричну ґрупу, а кожда з ресольвент належала вже до низшої ґрупи. Таким чином ми доходили до одновартісних функцій корінів, т. зн. до самих корінїв, яких ґрупа була 1. Отже обсяг вимірности що раз то розширював ся, а ґрупа рівнаня зменшала ся. Дійшовши з ґрупою до краю, мали ми корінї представлені вимірно в величинах того найширшого обсягу.

Lagrange пробував розвязувати загальні рівнаня при помочи ресольвент. Нехай буде дане рівнане

$$f(x)=0 \tag{1}$$

степеня n, де $n=m.p$, p — перве число. В такім разї ділимо всї корінї на p кляс по m корінїв і творимо суми тих поодиноких кляс: коріням надаємо по два показчики, як ми се вже робили, §. 40

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= x_{11}+x_{12}+x_{13}+\ldots+x_{1m}, \\ X_2 &= x_{21}+x_{22}+x_{23}+\ldots+x_{2m}, \\ & \\ X_p &= x_{p1}+x_{p2}+x_{p3}+\ldots+x_{pm}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Кожде X_i є незмінне для таких субституцій, які пересувають тільки другі показчики; отже ґрупа, яка не змінить ні одного X, є неперехідна, порядку $(m!)^p$. Инші субституції, які змінюють тільки перші показчики, пересувають лише величини X поміж собою, не змінюючи їх вартостий. Отже кожда симетрична функція величини X зістане незмінна для тої другої ґрупи, порядку $p!$, а тим самим і для комбінації обох ґруп, т. є для ґрупи порядку $p!(m!)^p$. Проте скількість всїх ріжних вартостий тих симетричних функцій величини X є

$$\varrho=\frac{n!}{p!(m!)^p},$$

а всї вони будуть корінями рівнаня степеня ϱ. Знаючи один з корінїв того рівнаня, можемо обчислити всї инші, бо вони всї належать до тої самої ґрупи.

Розширім тепер наш обсяг вимірности p-тим корінем з одиниці ω і утворім вирази:

$$\xi_1 = (X_1 + \omega X_2 + \omega^2 X_3 + \ldots + \omega^{p-1} X_p)^p,$$

$$\xi_2 = (X_1 + \omega^2 X_2 + \omega^4 X_3 + \ldots + \omega^{2(p-1)} X_p)^p,$$

$$\xi_{p-1} = (X_1 + \omega^{p-1} X_2 + \omega^{2(p-1)} X_3 + \ldots + \omega^{(p-1)^2} X_p)^p;$$

се т. зв. ресольвенти Lagrange'a; вони повстають в той спосіб, що в ξ_1 напишемо на місци ω чергою: $\omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{p-1}$. Кождий з тих виразів є незмінний для тих субституцій, які збільшують показчики величин X; се аритметичні субституції. Коли-ж утворимо симетричні функції тих величин, то вони будуть незмінні ще й для тих субституцій, які множать кождий показчик тим самим числом; їх є $(p-1)$, отже симетричні функції величин X мають ґрупу порядку $p(p-1)$, а їх всїх буде $\frac{p!}{p(p-1)} = (p-2)!$, т. зн., що з рівнаня того степеня можна обчислити кожду таку симетричну функцію. З того рівнаня потрібуємо взяти тільки один який небудь корінь і ним потрафимо представити всї симетричні функції величини ξ:

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{p-1} = \sigma_1 = r_1\ \sigma_1)$$

$$\xi_1\ \xi_2 + \cdot\ \ \cdot + \xi_{p-2}\xi_{p-1} = \sigma_2 = r_2(\sigma_1)$$

$$\xi_1 \xi_2 \cdot\ \ \cdot \xi_{p-1} = \sigma_{p-1} = r_{p-1}(\sigma_1);$$

ті величини є коріями степеня рівнаня $p-1$:

$$\xi^{p-1} - r_1 \xi^{p-2} + \ldots + r_{p-1} = 0. \qquad (3)$$

Знаючи знов тільки один корінь того нового рівнаня, можемо обчислити всї инші вимірно, бо всї вони мають ту саму ґрупу: $\xi_1 = R_1(\xi_1)$, $\xi_2 = R_2(\xi_1) \ldots$, $\xi_{p-1} = R_{p-1}(\xi_1)$. Далї знаємо ще величину ξ_0, яку одержимо, коли ω заступимо 1, т. є:

$$\xi_0 = (X_1 + X_2 + \ldots + X_p)^p = a^p,$$

де a є першим із сочинників рівнаня (1) (сума всїх корінїв).

Тепер треба нам тільки витягнути один n-тий корінь з величин ξ_i; також і ті всї корінї дадуть ся обчислити одним з них, бо всї мають ту саму ґрупу порядку $(m!)^p$, отже

$\sqrt[p]{\xi_1} = u_1$, $\sqrt[p]{\xi_2} = \varphi_2(u_1)$, $\sqrt[p]{\xi_3} = \varphi_3(u_1), \ldots, \sqrt[p]{\xi_{p-1}} = \varphi_{p-1}(u_1)$, т. зн.

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_p = a$$

$$X_1 + \omega X_2 + \ldots + \omega^{p-1} X_p = u_1 = \varphi_1(u_1)$$

$$X_1 + \omega^2 X_2 + \ldots + \omega^{p-1} X_p = \varphi_2(u_1)$$

$$X_1 + \omega^{p-1} X_2 + \ldots + \omega^{(p-1)^2} X_p = \varphi_{p-1}(u_1).$$

Розвязка тих рівнань з огляду на X дає

$$X_k = \frac{1}{p}\left[a + \sum_{i=1}^{p-1} \omega^{-ki} \varphi_i(u_1) \right]$$

Отже, щоби розвязати рівнанє (1) степеня $n = mp$, мусимо:

1. розвязати одно рівнанє степеня $\varrho = \frac{n!}{p!(m!)^p}$ і взяти з нього один корінь;

2. розвязати рівнанє степеня $(p-2)!$, яке дасть ся утворити з вимірних функцій коріня попереднього рівнаня, і взяти з нього знов один корінь;

3. розвязати рівнанє степеня $(p-1)$, яке утворить ся з попереднього рівнаня;

4. витягнути p-тий корінь з величини ξ_1, т. зн. розвязати рівнанє степеня p: $y^p - \xi_1{}^r = 0$.

Добуток степенів тих всїх рівнань є $\frac{n!}{p!(m!)^p} \cdot (p-2)!(p-1)p = \frac{n!}{(m!)^p}$, т. зн., що розвязка рівнаня степеня n залежить від рівнаня степеня $\gamma = \frac{n!}{(m!)^p}$: через відповідний розклад числа n на чинники можемо знайти найменшу вартість числа γ.

§. 63. Коли степень рівнаня є первий, т. є $n = p$, $m = 1$, тодї відпадає перше рівнанє степеня ϱ, бо $\varrho = 1$, отже величини X є ідентичні з корінями даного рівнаня. Для $n = p$ маємо проте розвязати рівнанє степеня $(n-2)!$, степеня $(n-1)$ і витягнути один n-тий корінь. Коли $n > 4$, то $(n-2)! > n$ для кождого первого числа, отже фактично приходимо до рівнаня висшого степеня, замість зблизити ся до розвязки. Для $n = 3$ є $(n-2)! = 1$, отже відпадає й друге рівнанє, і ми маємо тільки розвязати одно квадратне рівнанє і витягнути один кубічний корінь, як се дійсно ми виконували.

Коли n є зложеним числом, і ми остаточно дійшли до розвязки четвертого рівнаня, отже знайшли вже всї X, тодї рівночасно з кождим

$$X_i = x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_i$$

знаємо й всї симетричні функції величини x_{i_1}, x_{i_2}, x_{im}, бо вони всї мають ту саму ґрупу. Длятого вже маємо до дїла з проблємом низшого степеня, бо з розвязкою рівнаня степеня m, яке має коріні $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{im}$. Коли m є перве число, розвязуємо рівнанє, як показано висше; коли-ж $m = m_1 p_1$, де p_1 є первий чинник з m, творимо нові ресольвенти вказаним способом. Подїлїм тих m корінїв знов на p_1 ґруп так: коли приймемо, що $x_{ik} = x^{(i)}_{rs}$, то пишемо таблицю:

$$\overset{(i)}{x}_{11}, \overset{(i)}{x}_{12}, \ldots, \overset{(i)}{x}_{1m_1},$$

$$\overset{(i)}{x}_{21}, \overset{(i)}{x}_{12}, \ldots, \overset{(i)}{x}_{2m_1},$$

$$\overset{(i)}{x}_{p_1 1}, \overset{(i)}{x}_{p_1 2}, \ldots, \overset{(i)}{x}_{p_1 m_1},$$

і творимо:

$$\overset{(i)}{X}_1 = \overset{(i)}{x}_{11} + \overset{(i)}{x}_{12} + \ldots + \overset{(i)}{x}_{1m_1},$$

$$\overset{(i)}{X}_2 = \overset{(i)}{x}_{21} + \overset{(i)}{x}_{22} + \ldots + \overset{(i)}{x}_{2m_1},$$

$$\overset{(i)}{X}_{p_1} = \overset{(i)}{x}_{p_1 1} + \overset{(i)}{x}_{p_1 2} + \ldots + \overset{(i)}{x}_{p_1 m_1},$$

анальоґічно як спершу, — аж дійдемо до $m_{\lambda-1} = p_\lambda m_\lambda$, де p_λ і m_λ є вже перві числа.

При зложених степенях мусимо проте добирати найдогіднїйшу комбінацію числа m і p, щоби γ вийшло minimum. Для $n = 4$ маємо: $m = 2$ і $p = 2$, т. зн. $\varrho = \frac{4!}{2!(2!)^2} = 3$; отже при рівнанях четвертого степеня маємо розвязати рівнаня степенів: 3, 2, 1, 2,

Для $n = 6$, маємо: $m = 2$, $p = 3$, або $m = 3$, $p = 2$. Перше дає: $\varrho = \frac{6!}{3!(2!)^3} = 15$, друге дає: $\varrho = \frac{6!}{2!(3!)^2} = 10$, отже маємо розвязувати рівнаня таких степенів:

а) 15, 1, 2, 3; б) 10, 1, 1, 2, Кождим разом маємо тут ресольвенту висшого степеня ніж дане рівнане.

VII. Альґебраічна розвязка рівнань.

§. 64. Альґебраічне рівнане

$$f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n = 0, \qquad (1)$$

якого сочинники є величинами з обсягу (R), незведиме в тім обсягу, назвали ми **рішимим**, коли його коріні можемо представити як функції сочинників при помочи скінченого числа таких операцій: додаваня, відниманя, множеня, діленя, степенованя й корінованя.

Виконуючи пять перших операцій (степеноване тільки цїлочисельним виложником) не виходимо поза обсяг (R); зате при корінованю одержуємо числа, які не належать до обсягу (R). Тодї одержуємо розширений обсяг (R').

Можна обмежити ся все на добуваню таких корінїв, яких виложники є первими числами, бо зложений корінь, $m.n$-тий, можна розложити на добуване m-того й n-того коріня.

Функції, які одержуємо через коріноване, називаємо **альґебраічними функціями** величин з обсягу (R). Отже щоби з вимірної функції одержати альґебраічну, мусимо добути з неї якийсь p-тий корінь (p перве число). Нехай буде $F(R)$ тою вимірною функцією, а V величиною, яку одержуємо через добуте коріня, тодї маємо:

$$V^p = F(R). \qquad (2)$$

а звідси

$$V = \sqrt[p]{F(R)}.$$

Долучуючуючи до обсягу (R) величину V, одержуємо новий обсяг $(R; V)$.

Рівнане (1), яке було в обсягу (R) незведиме, може по долученю величини V стати зведимим; бо коли нпр. $x^n - \varphi$ є в (R) незведиме, т. зн. φ не є повною n-тою степенню, то приймаючи $\varphi = V^n$ і долучивши V до (R) одержимо рівнане зведиме, бо $x^n - V^n$ є подільне через $x - V$.

Обсяг (R') можна знова розширити новим невимірним числом; назвавши першу невимірніть V_ν:

$$V^{\rho}{}_{\nu} = F_\nu(R)$$

одержимо дальшу невимірність:

$$V_{\nu-1}^{\rho\nu-1} = F_{\nu-1}(R; V_\nu);$$

те саме можемо повторити дальше:

$$\left.\begin{aligned} V_{\nu-2}^{\rho\nu-2} &= F_{\nu-2}(R; V_\nu, V_{\nu-1}), \\ \\ V_1^{\rho 1} &= F_1(R; V_\nu, V_{\nu-1}, \ldots, V_2). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Таким чином дійдемо ми до ν разів розширеного обсягу $(R^{(\nu)}) = (R; V_1, V_2, V_3, \ldots, V_\nu)$; в тім обсягу можемо представити кождий з корінїв x як функцію

$$x_1 = F_0(R; V_\nu, V_{\nu-1}, \ldots, V_2, V_1) \qquad (4)$$

§. 65. I. **Тверджене**. Коли рівнаня

$$f_1 x^{p-1} + f_2 x^{p-2} + \,.\,.+ f_p = 0, \qquad (5)$$

$$x^p - F = 0 \qquad (6)$$

істнують рівночасно, а F; $f_1, f_2,$ f_p є вимірними функціями в якімось обсягу (R), то

1. або $f_1 = f_2 = \ldots f_p = 0$,

2. або один з корінїв рівнаня (6) належить до того самого обсягу (R).

Доказ. Приймім, що не всї сочинники рівнаня (5) є зерами, то рівнаня (5) і (6) мусять мати якийсь спільний чинник

$$x^k + \varphi_1 x^{k-1} + \cdot \quad \cdot + \varphi_k,$$

якого сочинники є вимірними функціями величин f. Коли сей чинник є первого степеня, то порівнаний з зером дає корінь рівнаня (6) в вимірній функції; коли-ж степень k є зложений, а x_1 є одним із спільних корінів, то виші спільні коріні будуть мати вигляд $x_1 \omega^{\alpha}$, $x_1 \omega^{\beta}, \ldots$, де ω є p-тим корінем з одиниції. Добуток спільних корінів буде:

$$\pm \varphi_k = x_1{}^k \omega^{\alpha+\beta+\cdot} = x_1{}^k \omega^{\lambda}; \qquad (7)$$

тимчасом можна все знайти такі два числа u і v, для яких буде сповнена реляція $ku + pv = 1$; підносячи (7) до степені u, одержимо

$$\pm \varphi_k{}^u = x_1{}^{1-pv} \omega^{\lambda u} = x_1 \omega^{\lambda u} F^{-v},$$

а звідси слїдує

$$x_1 \omega^{\lambda u} = \pm \varphi_k{}^u F^{v},$$

т. зн., що ліву сторону рівнаня (7), яка є одним із спільних корінїв рівнань (5) і (6), можна представити вимірно в величинах $F; f_1, f_2, \quad f_p$.

§. 66. Ряд функцій (3) можемо звести до одної цілочисельної функциї, зложеної з елементів V, якої сочинники є вимірні в R. Коли нпр. $F_{\alpha-1}$ не є цілочисельною функцією, то можна її представити як квот двох таких функцій:

$$F_{\alpha-1} = \frac{G_0 + G_1 V_\alpha + \ldots}{H_0 + H_1 V_\alpha + \ldots},$$

де $G, H, \ldots$ є цілочисельними функціями величин $V_{\alpha+1}, V_{\alpha+2}, \ldots, V_\nu$. Потім можемо з чисельника й знаменника усунути всї степені величини V_α, висші від $(p_\alpha - 1)$-тої при помочи реляциї

$$V_\alpha{}^{p_\alpha} = F_\alpha (R;\ V_\nu,\ V_{\nu-1}, \ldots, V_{\alpha+1}). \qquad (8)$$

Коли V_α зістало ще в знаменнику функції $F_{\alpha-1}$, то назвім прочі коріні рівнаня (8) V_α', $V_\alpha'' \ldots$; вони сповнять рівнанє:

$$\frac{X^{p_\alpha} - V_\alpha{}^{p_\alpha}}{X - V_\alpha} = X_\alpha^{p-1} + V_\alpha X_\alpha^{p-2} + \ldots + V_\alpha^{p-1} = 0. \qquad (9)$$

Добуток

$$\Pi = (H_0 + H_1 V_\alpha' + \ldots)(H_0 + H_1 V_\alpha'' + \ldots) \ldots$$

не може бути зером, бо коли-б так було, то один із корінів рівнаня (8) вдоволяв би рівночасно рівнанє (8) і рівнанє степеня $(p_\alpha - 1)$; відповідно до попереднього твердженя були би коріні рівнаня (8) вимірні в обсягу $(R;\ V_{\alpha+1}, V_{\alpha+2}, \ldots, V_\nu)$, а се суперечить з заложеним.

Помножім рівнанє (8) добутком Π; знаменник буде симетричний з огляду на величини V_α, V_α', V_α'',... і можна буде його представити цілочисельно при помочи $V_{\alpha+1}, \dots, V_r$. Також і чисельник буде можна представити як добуток цілочисельної функції величини V_α і симетричної функції корінів рівнаня (9), отже можна обчислити його в величинах V_α. Огже $F_{\alpha-1}$ представить ся нам як цілочисельний многочлен з огляду на V_α: коли його сочинники є дробами з огляду на $V_{\alpha+1}$, поступаємо подібним способом, аж вкінцї дійдемо до результату, що $F_{\alpha-1}$ буде цілочисельною функцією величин $V_\alpha, V_{\alpha+1}, \dots, V_\nu$ з вимірними сочинниками в обсягу (R).

Коли в такім представленю появить ся величина V_α в степенї висшім як $p_{\alpha-1}$, редукуємо її при помочи реляції $V_\alpha^{p_\alpha} = F_\alpha$ до низших степенів, так що вкінцї можемо написати:

$$F_{\alpha-1} = J_0 + J_1 V_\alpha + J_2 V^2\alpha + \dots + J_{p_{\alpha-1}} V_\alpha^{p_\alpha-1} \tag{10}$$

де $J_0, J_1 \dots$ є цілочисельними функціями величин $V_{\alpha+1}, V_{\alpha+2} \dots, V_r$.

§. 67. Ту редукцію можемо ще дальше продовжити і довести до того, що сочинник при першій степени V_α буде 1.

Нехай буде J_k одним із сочинників функції (10), ріжним від 0; положім

$$J_k V_\alpha^k = W_\alpha. \tag{11}$$

Можна знайти все такі два числа u і v, які сповнять реляцію

$$ku + p_\alpha v = 1,$$

Піднесім (10) до u-тої степенї

$$J_k^u V_\alpha^{1-p_\alpha v} = W_\alpha^u,$$

т. зн.

$$V_\alpha = W_\alpha^u F_\alpha^v J_k^{-u}, \tag{12}$$

бо $V_\alpha^{p_\alpha v} = F_\alpha^v$. З рівнань (11) і (12) бачимо, що величини V_α і W_α, можемо представити вимірно одну другою і елементами $V_{\alpha+1}, \dots V_\nu$, так що обсяги $(R; V_\alpha, V_{\alpha+1} \dots)$ і $(R; W_\alpha, V_{\alpha+1})$ є ідентичні. Звідси слїдує, що рівнане (10) можемо написати так:

$$F_{\alpha-1} = J_0 + W_\alpha + L_2 W_\alpha^2 + \dots + L^{p_\alpha-1} W_\alpha^{p_\alpha-1}, \tag{13}$$

якого сочинники є функціями величини $V_\alpha, V_{\alpha+1}, V_{\alpha+2}, \dots, V_\nu$.

В нашім представленю не змінить ся нїчо, коли замість W_α напишемо V_α, отже будемо врештї мати:

$$F_{\alpha-1} = J_0 + V_\alpha + J_2 V_\alpha^2 + \dots + J_{p_\alpha-1} V_\alpha^{p_\alpha-1} \tag{13a}$$

Таку редукцію можемо посунути аж до $\alpha = 1$, і тодї одержимо:

$$x_1 = G_0 + V_1 + G_2 V_1^2 + \dots + G_{p-1} V_1^{p_1-1}. \tag{14}$$

Коли за V_1 підставимо в тім рівнаню всї инші вартости, які та функція може приймати, т. є

$$V_1,\ \omega_1 V_1,\ \omega_1{}^2 V_1, \ldots\ \omega_1{}^{p_1-1} V_1,$$

де ω_1 є p_1-тим корінем з одиниції, то ті суми будуть справджувати теж рівнанє (1), значить, вони будуть прочими його корінями:

$$x_2 = G_0 + \omega_1 V_1 + G_2 \omega_1{}^2 V_1{}^2 + \ldots + G_{p_1-1} \omega_1{}^{p_1-1} V_1{}^{p_1-1},$$

і загально

$$x_{k+1} = G_0 + \omega_1{}^k V_1 + G_2 \omega_1{}^{2k} V_1{}^2 + \ldots + G_{p_1-1} \omega^{(p_1-1)k} V_1{}^{p_1-1} \qquad (14a)$$

$$(k = 0,\ 1, \ldots,\ p_1 - 1).$$

§. 68. Перенесїм отсе поступованє на примір конкретного рішимого рівнаня, нпр. кубічного

$$x^3 + px + q = 0,$$

яке розвязане дає (Карданський взір)

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Звідси маємо такий ряд реляцій:

$$V_3{}^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$V_2{}^3 = -\frac{q}{2} + V_3,$$

$$V_1{}^3 = -\frac{q}{2} - V_3.$$

$$x_1 = V_1 + V_2.$$

Підставивши ті вартости в дане рівнанє, одержуємо:

$$3 V_2 V_1{}^2 + (3 V_2{}^2 + p) V_1 + p V_2 = 0$$

і друге рівнанє

$$V_1 + \left(\frac{q}{2} + V_3\right) = 0.$$

З огляду на те, що

$$(V_1 + V_2)(3 V_1 V_2 + p) = 0$$

маємо $V_1 V_2 = -\frac{p}{3}$, т. є

$$V_1 = \frac{-\frac{p}{3}}{V_2} = \frac{-\frac{p}{3} V_2^2}{V_2^3} = \frac{V_2^2\left(-\frac{q}{2} - V_3\right)}{\left(\frac{p}{3}\right)^2},$$

отже в знаменнику нема вже невимірних чисел. В такім разї ряд рівнань (3) зводить ся до

$$V_3^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$V_3^3 = -\frac{q}{2} + V_3,$$

$$x_1 = V_2 + \frac{V_3^2\left(-\frac{q}{2} - V_3\right)}{\left(\frac{p}{3}\right)^2}.$$

Користуючи ся кінцевою заміткою попереднього §., т. є заступаючи V_1 величинами ωV_1 і $\omega^2 V_1$, маємо:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \omega^2 V_2 + \frac{\omega V_2^2\left(-\frac{q}{2} - V_3\right)}{\left(\frac{p}{3}\right)^2}, \\ x_3 &= \omega V_2 + \frac{\omega^2 V_2^2\left(-\frac{q}{2} - V_3\right)}{\left(\frac{p}{3}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \left(\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$$

§. 69. II. **Твердженє.** Величину x_1, яка сповнює рішиме альґебраїчне рівнанє $f(x) = 0$, можна представити в видї цїлочисельної функції невимірних величин

$$V_1, \ V_2, \qquad V_\nu;$$

якої сочинники є числами з обсягу (R). Величини V є з одної сторони функціями корінїв рівнаня $f(x) = 0$ і корінїв з одиницї; з другої сторони можна їх обчислити з ряду рівнань

$$V_\alpha^{p_\alpha} = F_\alpha(R; V_\nu, V_{\nu-1}, \qquad V_{\alpha+1})$$

$(\alpha = \nu, \nu - 1, \qquad 1)$, де p_α є первими числами, а F цїлими функціями величин V_ν, $V_{\nu-1}$, . $\qquad V_{\alpha+1}$ і вимірними функціями величин з обсягу R*).

---

*) Netto, Substitutionentheorie, стр. 244. Vogt, Leçons, стр. 116.

Доказ. 1. Помножім кожде з рівнань (14а) величиною ω_1^{-k} і додаймо їх; з того одержимо:

$$p_1 V_1 = \sum_{k=1}^{p_1} \omega_1^{-k} x_{k+1},$$

$$V_1 = \frac{1}{p_1} \sum_{k=1}^{p_1} \omega_1^{-k} x_{k+1}. \tag{15}$$

т. зн., що V_1 є лінійною функцією коренів рівнаня (1) і корінів з одиниці.

2. Коли рівнане (1) є незведиме, то його корінї мусять бути поміж собою ріжні. Викажемо, що корінї x_1, x_2, ., x_{p_1}, дані рівнанями (14а), є ріжні.

Добуток

$$f_1(x) = (x - x_1)(x - x_2) \quad .(x - x_{p_1})$$

є симетричний з огляду на величини V_1, $\omega_1 V_1$, $\omega_1^2 V_1$, ., отже можна його представити вимірно в обсягу (V_1, V_2, V_3, .); той добуток мусить бути незведимим. Коли-б він був зведимий, то можна-б його розложити на незведимі чинники

$$\varphi_1(x;\ V_2,\ V_3, \ldots) = (x - x_1)(x - x\alpha) \ldots,$$
$$\varphi_2(x;\ V_2,\ V_3, \ldots) = (x - x\beta)(x - x\gamma) \ldots,$$
$$. ;$$

ліві сторони не заключують в собі величини V_1, отже по виконаню множеня на правих сторонах мусїло би випасти V_1 і звідтам. Значить, що ті рівнаня не змінили-б ся, коли-б V_1 заступити вартостями $\omega_1 V_1$, $\omega^2 V_2$, ., т. є коли-б кождий з корінів x заступити иншим. Звідси слїдувало би, що всі чинники φ_1, φ_2, є ідентичні, отже $f(x)$ є повною степенню якогось многочлена; а що степень функції $f(x)$ є первий, то вона могла би бути тільки p_1-шою степенню ріжниці $(x - x\alpha)$, а се неможливе, бо $x - x\alpha$ не є вимірне в V_2, V_3,

З того, що $f_1(x)$ є незведиме, слїдує, що всі корінї $x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}$ є ріжні; $f_1(x)$ є незведимим чинником функції $f(x)$ в обсягу (R; V_2, V_3, .).

3. Тепер творимо добуток зі всїх можливих виражень форми

$$y - \left[\frac{1}{p_1} \sum \omega_1^{-k} x_{k+1}\right]^{p_1},$$

т. зн., виконуємо в тім вираженю всї можливі субституції величини x; се дасть нам рівнанє

$$\varphi(y) \equiv \Pi(y - y\lambda) = 0,$$

анальоґічне до (1), якого сочинники є вимірні в обсягу R.

Нехай буде y_1 корінем того рівнаня:

$$y_1 = \left[\frac{1}{p_1}\sum_{k=1}^{p_1} \omega_1{}^{-k} x_{k+1}\right]^{p_1} \qquad (16)$$

то можна його представити з одної сторони як

$$y_1 = V_1{}^{p_1} = F_1(R;\ V_\nu, \qquad V_2)$$

з другої сторони як

$$y_1 = L_0 + V_2 + L_2 V_2{}^2 + \qquad . + L_{p_2-1} V_2{}^{p_2-1}.$$

Заступаючи V_2 чергою величинами $\omega_2{}^k V_2$ $(k=0,\ 1, \ldots, p_2-1;$ $\omega_2{}^{p_2}=1)$ одержимо загально:

$$y_{k+1} = L_0 + \omega_2{}^k V_2 + L_2 \omega_2{}^{2k} V_2{}^2 + \ldots + L_{p_2-1} \omega_2{}^{(p_2-1)k} V_2{}^{p_2-1}.$$

4. З величинами y поступаємо так само, як перше з x; звідси одержуємо нове рівнанє $\psi(z)=0$, степеня p_3, якого корінї виразимо як функції величин V_3, і т. д.

Таким чином наше твердженє доказане.

§. 70. В добутку $f_1(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{p_1})$ можуть часами величини V_2, V_3, ., $V\lambda_{-1}$ випасти в рахунку рівночасно з V_1; назвім першу невимірність, яка в $f_1(x)$ дійсно приходить, $V\lambda_{+1}$, тоді маємо:

$$f(x) = f_1(x;\ V\lambda,\ V\lambda_{+1}, \qquad .)\psi_1(x;\ V\lambda,\ V\lambda_{+1}, \qquad .); \quad (18)$$

чинник ψ_1 є цілочисельний з огляду на ті V, які в ньому заходять.

Сочинники величин $V\lambda^0$, $V\lambda$, $V\lambda^2$, $\qquad V\lambda^{p_\lambda-1}$, мусять бути по тих сторонах рівнаня (18) рівні т. є мусять бути 0, бо $f(x)$ належить до обсягу (R); отже рівнанє (18) буде незмінене, коли за $V\lambda$ напишемо $V\lambda$, $\omega\lambda V\lambda$, $\omega\lambda^2\ V\lambda$, . ., $(\omega\lambda^{p\lambda}=1)$. Утворім добуток тих всїх чинників, які одержимо через таке підставленє

$$f_2(x) = f_1(x;\ V\lambda, \ldots) f_1(x;\ \omega\lambda V\lambda, \ldots)\ldots f_1(x;\ \omega\lambda^{p\lambda-1} V\lambda, \ldots); \quad (19)$$

сей добуток є незведимий в обсягу $(R;\ V\lambda_{+1},\ V\lambda_{+2})\ldots)$. Доказ незведимости переводимо анальоґічно як в попереднїм §. для $f_1(x)$.

Приймім, що в $f_2(x)$ разом з $V\lambda$ випадають ще инші невимірности: $V_{p+1}, \ldots$, V_{k-1}, а V_k вже дійсно знов там приходить. Тепер творимо добуток:

$$f_3(x)=f_2(x;\ V_k,\ldots)\ f_2(x;\ \omega_k V_k,\ldots)\ldots;$$

се буде знова один із незведимих чинників рівнаня (1) в обсягу $(R;\ V_{k+1},\ldots)$, і т. д.

З того бачимо, що при кождім такім розумованю випадає що найменше одна з величини V, отже по кількох таких операціях позбудемо ся всіх невимірностий V. Таким чином дійдемо врешті до добутка $f(x)=0$, який має n лінїйних ріжних чинників $x-x_\alpha$ і є в обсягу (R) незведимий. Число n можна представити як добуток: $n=p_1 p_\lambda p_k\ldots$

Звідси слїдує

III. Твердженє. Всї корінї рівнаня (1) одержимо, коли в незведимім добутку степеня p_1

$$f_1(x)=(x-x_1)\,(x-x_2)\ldots(x-x_{p_1})$$

заступимо невимірність $V\lambda$ величинами $V_\lambda, \omega_\lambda V_\lambda, \omega_\lambda{}^2 V_\lambda,\ldots, \omega_\lambda{}^{p\lambda-1}V_\lambda$, і утворимо добуток

$$f_2(x)=f_1(x;\ V\lambda,\ldots)\ f_1(x;\ \omega_\lambda V_\lambda,\ldots)\ f_1(x;\ \omega_\lambda{}^2 V_\lambda,\ldots);$$

дальше коли в $f_2(x)$ невимірність V_k заступимо анальоґічно величинами $\omega_k{}^\lambda V_k$ і утворимо добуток

$$f_3(x)=f_2(x;\ V_k,\ldots)\ f_2(x;\ \omega_k V_k,\ldots)\ldots$$

і т. д.; невимірности $V\lambda$, $V_k,\ldots$ є першими, які дїйсно заходять в даних чинниках, а величини $\omega_\lambda, \omega_k,\ldots$, є $p\lambda$-тим, p_k-тим, корінем з одиниці. Степень рівнаня є $n=p_1 p_\lambda p_k\ldots$

Порядок, в якім втягаємо в рахунок невимірности $V_1, V_2,\ldots$, є довільний; коли V_α, $V_{\alpha+1}$, $V_{\beta-1}$ є визначені величинами V_β, $V_{\beta+1}$, V_ν при помочи рівнань

$$V_k{}^{p_k}=F_k(V_\beta\quad V_{\beta+1},\qquad V_\nu;\ R),\ (k=\alpha,\ \alpha+1,\qquad ., \beta-1)$$

то порядок елементів V_α, $V_{\alpha+1}$, є довільний.

§. 71. **IV. Твердженє.** Коли степень рівнаня (1) є первим числом, $n=p_1$, то до визначеня x треба нам тільки одної невимірности степеня p_1:

$$x_1=G_0+V_1+G_2V_1{}^2+.\qquad .+G_{p_1-1}V_1{}^{p_1-1}.$$

Виходить се з попереднього твердженя, коли обмежимо ся до першого вказаного там кроку; добуток $f_1(x)$ мусить бути ідентичний з $f(x)$, отже в нїм випадають рівночасно з V_1 всї прочі невити V_2, V_3, V_ν.

Таке рівнанє можемо представити добутком:

$$f(x)=\prod_{k=0}^{p_1-1}[x-(G_0+\omega_1{}^k V_1+.G_2\omega^{2k}V_1{}^2+\ldots+G_{p_1-1}\omega^{p_1-1}V_1{}^{p_1-1})]=0,$$

де $\omega^{p_1}=1$.

§. 72. **V. Твердженє.** Загальне рівнанє степеня висшого над четвертий не є рішиме альґебраічно.

Доказ *). Нехай буде дане загальне незведиме рівнанє степеня n

$$f(x)=x^n+c_1x^{n-1}+ \qquad .+c_n=0 \qquad (1)$$

якого сочинники є числами обсягу (R), а корінї $x_1, x_2, \qquad ., x_n$ не мають нїякого иншого обмеженя, як тільки те, що є між собою ріжні; ми корінїв не знаємо, тільки їх основні симетричні функції.

Коли рівнанє (1) має бути рішиме, то його кождий корінь можна представити в формі (14a), т. є в видї функції величин $V_1, V_2, \qquad V_\nu$. Остатня величина з того ряду сповнює реляцію

$$V_\nu{}^{p_\nu}=F_\nu(c_1, c_2, \qquad ., c_\nu)=F_\nu(c), \qquad (20)$$

отже є цїлочисельною функцією корінїв рівнаня (1):

$$V_\nu=\varphi(x_1, x_2, \qquad x_n)=\varphi(x),$$

якої p_ν-та степень є симетрична; сама-ж функція $\varphi(x)$ не є симетрична, т. зн., мусить змінити ся, коли на корінях x виконаємо якунебудь пермутацію, але її p_ν-та степень зістане незмінена:

$$\varphi^{p_\nu}=F_\nu. \qquad (21)$$

З того слїдує, що всї вартости функції $\varphi(x)$ є корінями рівнаня (19), т. зн. мають такі чисельні вартости:

$$\varphi, \ \omega_\nu\varphi, \ \omega_\nu{}^2\varphi,$$

Виконаймо на φ транспозицію (12), то одержимо:

$$\varphi(x_2, x_1, x_3, \qquad .)=\omega_\nu\,\varphi(x_1, x_3, x_3, \qquad .);$$

коли повторимо ту транспозицію, одержимо:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \qquad .)=\omega_\nu(x_2, x_1, x_3, \qquad .);$$

помноживши оба рівнаня, маємо: $\omega_\nu{}^2=1$, т, зн. $p_\nu=2$. Звідси слїдує, що перша невимірність, яку мусимо долучити до первісного обсягу (R) при розвязці загального рівнаня (1), мусить бути другої степени. Функція φ зістане незмінна для субституцій трьох і пяти елементів, бо ті субституції можна розложити на паристу скількість транспозицій.

---

*) Доказ того твердженя подав Абель (Crelle's Journal, I. 1826.) Wantzel упростив сей доказ. Пор. Serret, Algèbre, II. стр. 512; Vogt, Leçons, стр. 187.

Тепер беремо слідуючу невимірність, $V_{\nu-1}$, даву рівнанем

$$V_{\nu-1}{}^{p\nu-1} = F_{\nu-1}(V_\nu;\ c_1,\ c_2, \qquad c_\nu); \qquad (22)$$

функція $F_{\nu-1}$ мусить мати в собі елемент V_ν. бо в противнім разї була би вона вимірна в V_ν і величинах з R — проти заложеня. Подібно як перше кладемо:

$$V_{\nu-1} = \psi(x_1,\ x_2, \qquad x_n)$$

$V_{\nu-1}$ є функцією, якої $p_{\nu-1}$-ша степень є двовартістна, отже має ту саму ґрупу, що φ, т. зн. є незмінна для кождої поодинокої транспозициї. Але для тричленних циклїв ψ не може зіставати без зміни, бо тоді була би се альтернуюча функція, і можна би її виразити вимірно при помочи V_ν. Отже з

$$\psi^{p\nu-1} = F_{\nu-1} \qquad (23)$$

виходить, що ψ має такі вартости: $\psi, \omega_{\nu-1}\psi,\ \omega^2{}_{\nu-1}\psi, \qquad .,$ $({}_{\nu-1}{}^{p\nu-1} = 1)$. Виконуючи на ψ цикль (1 2 3) три рази, одержимо:

$$\psi(x_2,\ x_3,\ x_1,\ x_4, \qquad .) = \omega_{\nu-1}\ \psi(x_1\ x_2,\ x_3,\ x_4, \qquad .),$$
$$\psi(x_3,\ x_1,\ x_2,\ x_4, \qquad .) = \omega_{\nu-1}\ \psi(x_2,\ x_3,\ x_1,\ x_4, \qquad .),$$
$$\psi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \qquad .) = \omega_{\nu-1}\ \psi(x_3,\ x_1,\ x_2,\ x_4, \qquad .).$$

Вимноживши ті рівнаня, одержуємо: $\omega_{\nu-1}{}^3 = 1$, т. зн. $p_{\nu-} = 3$, отже друга з черги невимірність мусить бути кубічна.

Коли скількість незвісних є > 4, т. зн. коли степень рівнаня є висший від четвертого, ψ мусить змінити ся для пятичленного циклю; анальоґічно як перше одержимо $\omega_{\nu-1}{}^5 = 1$, т. є $p_{\nu-1} = 5$. З того виходить суперечність, отже рівнаньє висшого степеня нїж четвертий не може бути рішиме.

§. 73. Заступім в загальній формі коріня рішимого рівнаня (§. 67)

$$x_\lambda = G_0 + \omega^{\lambda-1} V_1 + G_2 \omega^{2(\lambda-1)} V_1{}^2 + \ldots + G_{p_1-1} \omega^{(p_1-1)(\lambda-1)} V_1{}^{p_1-1}, \qquad (14')$$

де ω є p_1-им корінем з одиниць, а $\lambda = 1,\ 2, \qquad .,\ p_1$, кожду з невимірностий V_α величиною $\omega_\alpha{}^k V_\alpha$, де ω_α є p_α-им корінем з одиниці. Означім, що через ту заміну перейде

$$V_\nu,\ V_{\nu-1}, \qquad V_1;\ G_0,\ G_1, \qquad G_{p-1},$$

в

$$v_\nu,\ v_{\nu-1}, \qquad v_1;\ g_0,\ g_1, \qquad g_{p_1-1},$$

отже x_λ в

$$\xi_\lambda = g_0 + \omega^{\lambda-1} v_1 + g_2 \omega^{2(\lambda-1)} v_1{}^2 + \qquad . + g_{p_1-1} \omega^{(p_1-1)(\lambda-1)} v_1{}^{p_1-1}. \quad (24)$$

Загал корінїв не може через те змінити ся, бо додане величини $\omega\alpha$ як сочинника не змінить обсягу вимірности величини α, отже $x\lambda$ може що найвисше перейти в $x\mu$, т. зн.

$$\xi\lambda = x\mu.$$

Зазначимо се так:

$$\left.\begin{aligned} g_0 + v_1 + g_2 v_1{}^2 + \ldots &= G_0 + \omega^{k-1} V_1 + G_2\omega^{2(k-1)} V_1{}^2 + \ldots, \\ g_0 + \omega v_1 + g_2\omega^2 v_1{}^2 + \ldots &= G_0 + \omega^{l-1} V_1 + G_2\omega^{2(l-1)} V_1{}^2 + \ldots, \\ g_0 + \omega^2 v_1 + g_2\omega^4 v_1{}^2 + \ldots &= G_0 + \omega^{m-1} V_1 + G_2\omega^{2(m-1)} V_1{}^2 + \ldots, \\ & \end{aligned}\right\}(25)$$

В тих рівнанях вичерпаний загал корінїв; додаючи їх проте, одержимо

$$g_0 = G_0$$

(бо $\omega + \omega^2 + \ldots = 0$, а те саме мусить бути і по правій стороні). Воно значить, що G_0 є вимірною функцією тих величин, які не змінюють ся через ту заміну; отже коли рівнане (1) є первого степеня, де V_1 є невимірністю степеня p, а инших виложників там нема, G_0 буде числом з обсягу (R).

Множачи ліві сторони рівнань чергою через 1, ω^{-1}, $\omega^{-2}, \ldots$ одержимо

$$p_1 v_1 = G_0(1 + \omega^{-1} + \omega^{-2} + \ldots) + V_1(\omega^{k-1} + \omega^{l-2} + \omega^{m-3} + \ldots)$$
$$+ G_2 V_1{}^2(\omega^{2k-2} + \omega^{2l-3} + \omega^{2m-4} + \ldots) + \ldots;$$

сочинник першого додатника є 0, инші ні; назвім їх в скороченю $p_1\tilde{\omega}_1$, $p_1\tilde{\omega}_2$, отже

$$v_1 = \tilde{\omega} V_1 + G_2\tilde{\omega}_2 V_2 + \qquad (26)$$

піднесїм те рівнане до степени p_1, то се дасть

$$v_1{}^{p_1} = (\tilde{\omega}_1 V_1 + G_2\tilde{\omega}_2 V_2 + \ldots)^{p_1} = A_0 + A_1 V_1 + A_2 V_1{}^2 + \ldots;$$

всї $\tilde{\omega}$ містять ся в A. З огляду на те, що

$$V_1{}^{p_1} - F_1(R;\ V_v, \ldots,\ V_2) = 0,$$

маємо такі дві евентуальности:

1. V_1 вимірне в V_2, v_2; V_3, v_3; $\ldots$, — або
2. $v_1{}^{p_1} - A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0, \ldots$, (§. 64).

Перша евентуальність неможлива, друга дає

$$v_1{}^{p_1} = A_0,$$

т. зн. права сторона рівнаня (26) є одночленом з огляду на V_1

$$v_1 = \tilde{\omega}_\mu G_\mu V_1{}^\mu, \qquad (27)$$

отже

$$\xi\lambda = g_0 + \omega^{\lambda-1}(\tilde{\omega}_\mu G_\mu V_1{}^\mu) + g_1 \omega^{2(\lambda-1l)} \tilde{\omega}_\mu{}^\mu G_\mu V_1{}^\mu)^2 + \ldots$$
$$+ g_{\rho_1-1} \omega^{(p-1\ (\lambda-1)} (\tilde{\omega}_\mu G_\mu V_1{}^\mu)^{p_1-1}; \qquad (28)$$

отсе виражене є заразом корінем рівнаня (1), отже мусить мати форму якогось x_k

$$\xi\lambda = G_0 + \omega^{k-1} V_1 + G_2 \omega^{2(k-1)} V_1{}^2 + \ldots + G_{p_1-1} \omega^{(p_1-1)(k-1)} V_1{}^{p_1-1}. \qquad (29)$$

Порівнуючи сочинники обох правих сторін при рівних степенях величини V_1, маємо

$$\omega^{\lambda-1} \tilde{\omega}_\mu G_\mu = G_\mu \omega^{(\mu-1)(k-1)},$$

т. є $\omega^{\lambda-1}\tilde{\omega}_\mu = \omega^{(\mu-1)(k-1)}$, а врешті

$$v_1 = \omega^{(\mu-1)(k-1)-(\lambda-1)} G_\mu V_1{}^\mu.$$

З того слїдує, що коли величини V помножити ріжними p_ν-тими корінями з одиниці, $V_1{}^{p_1}$ перейде в

$$(G_\mu V_1{}^\mu)^{p_1}$$

VIII, Рівнаня подїлу кола *).

§ 74. Найпростїйшим типом рішимих рівнань є т. зв. чисті рівнаня (reine Gleichungen), звані також двочленними (binomische) або рівнанями подїлу кола (Kreisteilungsgleichungen).

Двочленне рівнане має форму

$$x^n = a + bi;$$

коли-ж одначе за незвісну x ввести $\frac{x}{|\sqrt{a+bi}|}$, одержимо:

$$x^n = 1. \qquad (1)$$

Назва „рівнаня подїлу кола“ походить звідси, що їх розвязку одержуємо з формули Moivre'a

$$x_k = cos \frac{2k\pi}{n} + i\, sin \frac{2k\pi}{n} \; (k = 1,\ 2, \ldots, n); \qquad (2)$$

коли-ж представимо ті корінї ґрафічно, відтинаючи дїйсні вартости на оси XX', мнимі на оси YY', то точки, які відповідають корінам,

---

*) Пор. знаменитий твір: P. Bachmann, Die Lehre von der Kreisteilung, Leipzig, Teubner, 1872.

будуть лежати на обводі кола в рівних відступах, отже поділять обвід кола на n ріжних частий.

Підносячи рівнане (2) до l-тої степени, одержимо

$$(x_k)^l = \left(cos\frac{2k\pi}{n} + i\,sin\,\frac{2k\pi}{n} \right)^l = cos\frac{2kl\pi}{n} + i\,sin\,\frac{2kl\pi}{n} = x_{kl},$$

отже знов корінь того рівнаня. Отсе характеристична прикмета рівнань поділу кола, що кожда степень одного з поміж його корінїв є знова коренем рівнаня, отже корінї рівнаня (1) можемо представити рядом:

$$\omega,\ \omega^2,\qquad .,\omega^{n-1},\ \omega^n = 1, \tag{3}$$

де $\omega = x_1$.

Рівнане (1) має один вимірний корінь: $x_0 == 1$; поділивши проте (1) двочленом $x - 1$, одержуємо незведиме*) рівнане степеня $n - 1$

$$f(x) = x^{n-1} + {}^{n-2} + \qquad . + x + 1 = 0. \tag{4}$$

§. 75. Розвязуючи рівнане (1), одержимо

$$x = \sqrt[n]{1};$$

звідси виходить, що n-тий корінь з одиниці має як раз n вартостий; отже корінї рівнаня (1) будемо називати також n-тими коріннями з одиниці (n-te Einheitswurzel); розвязку $x_0 = 1$ назвемо головною вартістю (Hauptwert) n-того коріня з одиниці,

Безпосередно з рівнаня (1) виходить такий результат:

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = 0,$$
$$x_0{}^2 + x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x^2{}_{n-1} = 0,$$

$$x_0{}^{n-1} + x_1{}^{n-1} + x_2{}^{n-1} + .. + x_{n-1}^{n-1} = 0,$$
$$x_0^n + x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{n-1}{}^n = n,$$

бо сума всіх корінїв рівнаня (1) мусить бути = 0, суму квадратів можемо з огляду на згадану характеристичну прикмету рівнаня представити як суму других степений корінїв і т. д., але вже

---

*) Про докази незведимости гл. нпр. Weber, Algebra I. стр. 596; Netto, Substitutionentheorie, стр. 174; Bauer, Vorlesungen über Algebra, Leipzig, Teubner 1903, стр. 131.

кожда n-та степень коріня є $= 1$, отже їх сума $= n$. Взагалї маємо:

$$\Sigma x_i^k = 0, \text{ коли } k \equiv\!|\!\equiv 0 \ (mod.\ n), \qquad (5).$$
$$= n, \text{ коли } k \equiv 0 \ (mod.\ n),$$

бо коли $k = nq$, то

$$x_i^k = x_i^{nq} = (x_i^n)^q = 1,$$

а коли $k = nq + r$, $(r < k)$, то

$$x_i^k = x_i^{nq} . x_i^r = 1 . x_i^r =\!|\!= 1.$$

§. 76. Коли ω є рівночасно m-тим і n-тим корінем з одиниції, то є також і $\Delta(m, n)$-тим корінем з одиниції, де $\Delta(m, n)$ означує найбільшу спільну міру чисел m і n. Приймім $m > n$, тоді є

$$\omega^m = \omega^{nq+r} = (\omega^m)^q . \omega^r ;$$

коли $\omega^m = 1$ і $\omega^n = 1$, то мусить бути і $\omega^r = 1$.

Коли ω є n-тим корінем з одиниції, то ω^t (t — цїле число) є також n-тим коренем, бо з дефінїциї маємо $\omega^n = 1$, а тим самим $(\omega^t)^n = (\omega^n)^t = 1$. Длятого можемо утворити ряд (3), якого члени будуть повторювати ся періодично. Два вирази з того ряду не можуть бути рівні, бо коли би було

$$\omega^\alpha = \omega^\beta,$$

то з того слїдувало би $\omega^{\alpha - \beta} = 1$; се суперечить з заложенєм, що α і β є менші від n, отже і їх ріжниця є менша від n, а число n є першим виложником в рядї (1), для якого $\omega^n = 1$.

Величину ω називаємо **первісним n-тим корінем з одиницї** (primitive Einheitswurzel), коли нїякий попередний член з ряду (3) перед ω^n не є $= 1$; в противнім разї називаємо **непервісним корінем** (imprimitive E). Скількість всїх первісних корінів з одиниції обчисляємо так:

1. Коли n є перве число $n = p$, тодї всї члени ряду (3) є первісними корінями з одиниції, з виїмком $\omega^p = 1$, отже її скількість є $p - 1$. Зазначім ту скількість символем $\varphi(p)$, то маємо;

$$\varphi(p) = p - 1 = p\,(1 - \frac{1}{p}).$$

2. Коли $n = p^\mu$, тодї маємо такий ряд:

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{p-1} ; \ \omega^p, \ldots, \omega^{p^2-1} ; \omega^p, \ldots, \ldots ; \omega^{p^{\mu-1}}, \omega^{p^{\mu-1}+1}, \ldots, \omega^{p^\mu-1} \ (3a).$$

зложений з p_μ членів. Вирази ω^p, $\omega^{p^2}, \dots \omega^{p^{\mu-1}}$, і не є первісними корінями, бо для довільного $i < \mu$, $k < p$ є

$$(\omega^{kp^i})^{p^{\mu-i}} = 1,$$

отже вже $p^{\mu-i}$-та степень такої величини є $= 1$, а $p^{\mu-i} < m$. Таких величин є $p^{\mu-1}$, отже скількість первісних корінів є

$$\varphi(p^\mu) = p^\mu - p^{\mu-1} = p^\mu \left(p - \frac{1}{p}\right).$$

3. Для $n = r.s$, де r і s є зглядом себе перві, назвім r-тий корінь α, а s-тий β; тоді є:

$$\omega = \alpha^k \beta^l;$$

в тій формі можемо представити кождий первісний n-тий корінь, коли n є зложене число, бо

$$\omega^m = (\alpha^k)^m . (\beta^l)^m = (\alpha^r)^{ks} . (\beta^s)^{kr} = 1.$$

Дальше є всі корінї того виду ріжні, бо коли би було

$$\omega = \omega',$$

то мусїло би бути

$$\alpha\beta = \alpha'\beta',$$

а також і

$$\omega^r = \alpha^r\beta^r = \beta^r; \; \omega'^r = \alpha'^r\beta'^r = \beta'^r,$$

отже було би $\beta = \beta'$, а анальогічно й $\alpha = \alpha'$; отже до $\omega = \omega'$ ми брали би рівні величини з рядів для α і для β.

Легко обчислити $\varphi(rs)$. Маємо $\varphi(r)$ r-тих і $\varphi(s)$ s-тих первісних корінїв. Кожда комбінація одного r-того й одного s-того первісного кориня дасть первісний rs-тий корінь, бо треба її підносити аж до степени rs, щоби одержати 1. Таких комбінацій є $\varphi(r)\varphi(s)$, отже

$$\varphi(rs) = \varphi(r)\varphi(s).$$

4. Подібно знайдемо $\varphi(rs\dots t) = \varphi(r)\varphi(s)\dots\varphi(t)$, а вважаючи числа $r, s, \dots, t$ первими між собою, т. є

$$r = p_1^{\mu_1}, \; s = p_2^{\mu_2}, \dots, \; t = p_\lambda^{\mu_\lambda}.$$

маємо

$$n = p_1^{p_1} p_2^{p_2} \dots p_\lambda^{p_\lambda},$$

отже:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_\lambda}\right). \qquad (6)$$

Се т. зв- взір Gauss'а з теорії чисел; він подає скількість всїх чисел, менших від n, які є зглядом n перві *).

§. 77. Розвязку рівнань подїлу кола подав в альґебраїчний спосіб перший Gauss **). Він доказав, що рівнане виду (1) можемо все розвязати альґебраїчними (т. є непереступними) величинами, а в деяких разах також подати ґрафічну розвязку такого рівнаня при помочи лїнеалу й циркля.

Метода Gauss'а (змодіфікована Бахманом) полягає на такім поступованю (для короткости приймаємо, що n є перве число, $n = p$; коли n є зложене число, зводить ся задача до кількох простїйших проблємів).

До кождого первого числа p дасть ся знайти таке число g, що в рядї

$$g,\ g^2,\ g^2,\qquad .,\ g^{p-1} \qquad (7)$$

нї одно з чисел дїлене через p, не дасть останка 1, аж тільки g^{p-1}; таке число g називає ся **первісним корінем** p (primitive Wurzel von p). Числа ряду (7), дїлені через p, дадуть останки 1, 2, 3, ., $p-1$, — розуміє ся, не в тім самім порядку. Що так є, виходить із слїдуючого:

1. Всїх чисел в рядї (7) є $p-1$, отже стілько буде останків з дїленя; всї вони будуть менші від p;

2. Два останки не можуть бути рівні, бо тодї було би ($\alpha > \beta$)

$$g^\alpha = kp + r,$$
$$g^\beta = lp + r,$$

отже: $g^\alpha - g^\beta = g^\beta(g^{\alpha-\beta} - 1) = (k-l)p$: тодї мусїло би бути або g^β або $g^{\alpha-\beta} - 1$ подїльне через p, а обі ті евентуальности є виключені.

§. 78. Знайшовши перісний корінь g, розкладаємо число $p-1$ на два чинники: $p - 1 = a.b$, де a є перве число; уживаючи скороченя

$$\omega^m = [m],$$

творимо такі періоди:

$$(b,\lambda) = [\lambda] + [\lambda g^\alpha] + [\lambda g^{2\alpha}] + \qquad . + [\lambda g^{(b-1)a}], \qquad (8)$$

де λ може мати вартости: $g^0 = 1$, g^1, g^2, $\qquad g^{a-1}$; для $\lambda = 0$ або $= g^\alpha$ одержимо $(b, \lambda) = b$, т. зв. **невластиву періоду**.

---

*) Нпр. P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie, Sammlung Schubert, Leipzig, Göschen 1907, стр. 24.

**) Disquisitiones arithmeticae, sectio VII; Werke, т. 1. Göttingen, 1876.

Таким чином маємо:

$$\left.\begin{aligned}
(b,\ 1) &= [1] + [g^{a}] + [g^{2a}] + \ldots + [g^{(b-1)a}]. \\
(b,\ g) &= [g] + [g^{a+1}] + [g^{2a+1}] + \ldots + [g^{(b-1)a+1}], \\
(b,\ g^{2}) &= [g^{2}] + [g^{a+2}] + [^{2a+2}] + \ldots + [g^{(b-1)a+2}]. \\
& \\
(b,\ g^{k}) &= [g^{k}] + [g^{a+k}] + [g^{2a+k}] + \ldots + [g^{(b-1)a+k}], \\
& \\
(b, g^{a-1}) &= [g^{a-1}] + [g^{2a-1}] + [g^{3a-1}] + \ldots + [g^{ab} - 1];
\end{aligned}\right\} \quad (8a)$$

отже маємо a період, кожду по b членів, разом ab членів. Ті періоди одержуємо по просту так, що упорядкувавши корінї рівнаня (1) по виложниках ряду (7):

$$\omega^{g},\ \omega^{g^2},\ \omega^{g^3},\qquad \omega^{g^{p-}} \qquad (7a)$$

вибираємо чергою по однім членї до кождої із a період і т. д.

Періоди (8а) можна представити як корінї рівнаня степеня a о вимірних сочинниках. Називаючи:

$$(b,\ 1) = b_0,\ (b,\ g) = b_1, \qquad .,\ (b,\ g^{k}) = b_k, \qquad (b,\ g^{a-1}) = b_{a-1},$$

маємо те рівнанє:

$$F(z) \equiv (z - b_0)(z - b_1)\ldots(z - b_{a-1}) = z^{a} - \sigma_1 z^{a-1} + \sigma_2 z^{a-2} - \ldots - \sigma_a = 0, \ (9)$$

де σ_i є симетричними функціями період. Ті симетричні функції можна легко обчислити:

$$\sigma_1 = \sum_{k-1}^{a-1}(b\, g^{k}) = -1 \text{ (перший сочинних рівнаня } f(x) = 0).$$

Щоби обчислити σ_2, творимо:

$$b_\lambda \,.\, b_\mu = \left\{[\lambda] + [\lambda g^{a}] + [\lambda g^{2a}] + \ldots + [\lambda g^{(b-1)a}]\right\}$$

$$\times \left\{[\mu] + [\mu g^{a}] + [\mu g^{2a}] + \ldots + [\mu g^{(b-1)a}]\right\};$$

множимо перше ті вирази, які стоять під собою; з огляду на те, що $[\lambda] + [\mu] = [\lambda + \mu]$, бо $\omega^{\lambda} \,.\, \omega^{\mu} = \omega^{\lambda+\mu}$, маємо таку суму:

$$[(\lambda + \mu) + [(\lambda + \mu)g^{a}] + [(\lambda + \mu)g^{2a}] + \ldots + [(\lambda + \mu)g^{(b-1)a}] = b_{\lambda+\mu}.$$

Тепер множимо кождий вираз λ тим μ, що стоїть під ним о одно місце на право і одержуємо:

$$[\lambda + \mu g^{a}] + [(\lambda + \mu g^{a})g^{a}] + [(\lambda + \mu g^{a})g^{2a}] + \ldots + [(\lambda + \mu g^{a})g^{(b-1)a}] = b_{\lambda+\mu g^{a}}$$

остатній вираз відповідає добуткови $[\lambda g^{(b-1)a}] \,.\, [\mu]$. Дальше множимо о 2 місця на право:

$$[\lambda+\mu g^{2a}]+[(\lambda+\mu g^{2a})g^{a}]+\cdot \quad \cdot=b_{\lambda+\mu g^{2a}},$$

вкінці о $(b-1)$ місць на право (т. є о одно місце на лїво):

$$[\lambda+\mu g^{(b-1)a}]+[\lambda+\mu g^{(b-1)a})g^{a}]+\cdot \quad ,=b_{\lambda+\mu g^{(b-1)a}},$$

отже:

$$b_\lambda \; b_\mu=b_{\lambda+\mu}+b_{\lambda+\mu g^{a}}+b_{\lambda+\mu g^{2a}}+\cdot \quad \cdot+b_{\lambda+\mu g^{(b-1)^{a}}}, \qquad (10)$$

т. зн., що добуток двох період є сумою $(b-1)$ період, утворених подібним способом, як періоди (8).

Творячи добутки ріжних період, одержуємо результат: *Кожду вимірну функцію, утворену в період, можемо представити сумою подібних період.* Таким чином є всі σ вимірними функціями період, т. зн. є вони сумами період. Ті суми можна обчислити в кождім окремім випадку.

Візьмім найпростїйший випадок, з яким маємо до діла при кождім такім рівнаню, а саме; $a=2$, бо $p-1$ є паристе число: $p-1=2b$. Тодї маємо дві періоди по b членів:

$$b_0=[1]+[g^2]+[g^4]+\ldots+[g^{2(b-1)}],$$
$$b_1=[g]+[g^3]+[g^5]+\ldots+[g^{2b-1}];$$

вони є корінями квадратного рівнаня $z^2-\sigma_1 z+\sigma_2=0$,

де $\sigma_1=b_0+b_1=-1$,

$$\sigma_2=b_0\,.\,b_1=b_1+b g^2+b g^{4b}+\ldots+b g^{2b};$$

ті періоди се нїчо инше, як тільки b_0 і b_1 на переміну, бо $b g^2=b_1$ і т. д., отже $b_0\,.\,b_1=\frac{b}{2}(b_0+b_1)=-\frac{b}{2}$. Звідси:

$$F(z)\equiv z^2+z-\frac{b}{2}=0 \qquad (9a)$$

т. є

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{1+2b}}{2}.$$

Знак при b_0 і b_1 добираємо після триґонометричних вартостий корінїв; маємо іменно

$$\omega=cos\frac{2k\pi}{p}+i\,sin\frac{2k\pi}{p};$$

$$b_0=\{[1]+[g^{2(b-1)}]\}+\{[g^2]+[g^{2(b-2)}]\}+\ldots$$
$$b_1=\{[g]+[g^{2b-1}]\}+\{[g^3]+[g^{2b-3}]\}+\ldots,$$

Вартість першої скобки $\{\ \}$ в b_0 є $[1]+[-1]$, бо $\omega g^{2(b-1)}=\omega^{-1}$, а $[1]+[-1]=\left(cos\frac{2\pi}{p}+i\,sin\,\frac{2\pi}{p}\right)+\left(cos\frac{2\pi}{p}-i\,sin\,\frac{2\pi}{p}\right)=2\,cos\,\frac{2\pi}{p}$;

аналоґічно буде друга скобка $[g^2]+[-g^2]=2cos\,\frac{4\pi}{p}$ і т. д., отже загалом:

$$b_0=2\left\{cos\frac{2\pi}{p}+cos\,\frac{4\pi}{p}+\ldots\right\};$$

після того, яка є вартість скобки $\{\ \}$, беремо при b_0 знак + або —, а при b_1 противний знак.

Кладучи $\varepsilon^2=1$, маємо врешті:

$$b_0=\frac{1+\varepsilon\sqrt{1+2b}}{2},\ b_1=\frac{-1-2\sqrt{1+2b}}{2}.$$

§. 79. Тепер розкладаймо b на два чинники: $b=cd$, де c є перве. З кождої періоди b_λ творимо c нових по d виразів так, що беремо з неї чергою по однім члені до кождої періоди.

I. b_0 дасть;

$$d_0=[1]+[g^{ca}]+[g^{2ca}]+\ldots+[g^{(d-1)ca}],$$

$$d_a=[g^a]+[g^{(c+1)a}]+[g^{(2c+1)a}]+\ldots+[g^{((d-1)c+1)a}],$$

$$d_{2a}=[g^{2a}]+[g^{(c+2)a}]+[g^{(c+2)a}]+[g^{(2c+2)a}]+\cdot\cdot\;[g^{(d-1)h+2)a}],$$

$$d_{(c-1)a}=[g^{(c-1)a}]+[g^{(2c-1)a}]+[g^{(3c-1)a}]+\ldots+[g^{(d-1)ca+1}];$$

кождий з виложників при g є многократю числа a.

II. b_1 розібємо на:

$$d_1=[g]+[g^{ca+1}]+[g^{2ca+1}]\ldots+[g^{(d-1)ca+1}]$$

$$d_2=[g^{a+1}]+[g^{(c+1)a+1}]+]g^{(2c+1)a+1}]+\qquad+[g^{((d-1)c+1)a+1}],$$

кождий з виложників є форми $ka+1$; і т. д. Вирази, що повстають з b_λ, будуть мати виложники $ka+\lambda$.

Члени першої ґрупи, d_0, d_a, $d_{2a},\ldots$, $d_{(c-1)a}$, залежать від рівнаня степеня c, якого сочинники є вимірними функціями тих період, а їх симетричні функції є періодами b.

Таких рівнань степеня c є a; всі вони є до себе подібні так, що з одного до другого можемо перейти через субституції показчиків d:

$$s=|\,z\quad z+1\,|\ (mod.\ a).$$

Тепер розкладаємо дальше: $d = ef$, де e є перве число; $f = gh$, g є перве число, і т. д., аж дійдемо до $k = lm$, де l і m є перві числа. Тодї маємо вже: $m = m.1$, отже будемо мати m одночленних період, а ними будуть самі корінї ω.

З того виходить, що рівнанє подїлу кола степеня n розвязуємо, розкладаючи $n - 1$ на перві чинники $n - 1 = aceg\ldots lm$. Коли всї ті числа є $= 2$, отже $p - 1 = 2^{\mu}$, тодї маємо самі квадратні рівнаня. В такім разї можемо перевести ґеометричну конструкцію корінїв даного рівнаня при помочи лінії й циркля.

Щоби $p = 2^{\mu} + 1$ було первим числом, мусить бути $\mu = 2^{\nu}$ (Gauss), бо коли-б μ мало ще инші перві чинники крім 2, нпр. $\mu = 2^{\nu}.t$, то p було би подїльне через $2^{2^{\nu}} + 1$; бо положім $2^{2^{\nu}} = A$, то маємо:

$$2^{2^{\nu}\cdot t} + 1 = (2^{2^{\nu}})^{t} + 1 = A^{t} + 1,$$

отже:

$$\frac{A^{t} + 1}{A + 1} = A^{t-1} - A^{t-2} + \qquad \pm 1,$$

т. зн. той квот є цїлим числом. З другої сторони переконано ся що не всї числа форми $p = 2^{2^{\nu}} + 1$ є перві. Для $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ одержуємо:

$$p = 3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65537,$$

самі перві числа; зате для $\nu = 5$ одержуємо число, подїльне через 641. Дальші числа тої форми зложені є для $\nu = 12$ і $\nu = 23$.

Для $p = 5$ і $p = 17$ можна легко виконати дїйсну ґеометричну конструкцію*).

IX. Рівнаня Абеля.

§. 80. Узагальнюючи прикмету, яка була характеристична для рівнань подїлу кола, приймім, що кождий корінь незведимого рівнаня

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

можна представити як вимірну функцію попереднього. Назвім перший корінь x_1, а ту функцію $\varphi(x)$, то одержимо ряд:

$$x_1,\ x_2 = \varphi' x_1),\ x_3 = \varphi(x_2), \qquad x_k = \varphi(x_{k-1}), \qquad (2)$$

---

*) Пор. нпр. Netto, Substitutionentheorie стр. 181., Serret, Algèbre II. стр. 565, etc.

Рівнане (1) має коріні: $x_1, x_2, x_3,$., отже коли ми величини (2) вставимо в те рівнане, то одержимо правдиві реляції

$$f(x_k) = f[\varphi(x_{k-1})] = 0. \qquad (1')$$

Ті коріні можемо представити також так:

$$x_3 = \varphi\{\varphi(x_1)\},\ x_4 = \varphi[\varphi\{\varphi(x_1)\}], \ldots, \qquad (2')$$

а уживаючи скорочень: $\varphi\{\varphi(x_1)\} = \varphi^2(x_1),$., маємо

$$x_3 = \varphi^2(x_1),\ x_4 = \varphi^3(x_1),\ .,\ x_k = \varphi^{k-1}(x_1), \qquad (2'')$$

Сей остатній ряд не може бути безконечний, бо скількість корінів рівнаня є скінчена; проте мусять деякі вирази того ряду повторювати ся. Приймім, що перші вирази, які є собі рівні, є $\varphi^k(x_1)$ і $\varphi^{m+k}(x_1)$; звідси виходить, що $k = 0$, і $\varphi^m(x_1) = x_1$, отже ряд (2) буде мати такі ріжні між собою члени:

$$x_1\ \varphi(x_1),\ \varphi^2(x_1),\ .,\varphi^{m-1}(x_1) \qquad (2a)$$

Ті члени є дїйсно ріжні; се слїдує з заложеня, бо перший член, який має повторити ся, є $\varphi^m(x_1)$.

Коли $n = m$, то ряд (2a) обіймає всї коріні рівнаня; коли-ж $n > m$, то лишили ся ще деякі коріні поза тим рядом. Приймім, що якесь x_2 є одним із корінів, необнятих рядом (2a); тодї можемо утворити другий такий ряд, в якім замість x_1 приходить елемент x_2, отже одержимо:

$$x_2,\ \varphi(x_2),\ \varphi^2(x_2),\ .,\ \varphi^{\mu-1}(x_1): \qquad (3)$$

μ мусить бути $= m$, бо функція φ є в обох разах та сама, отже по $(m-1)$ повтореннях мусимо прийти до первісного коріня.

Члени обох рядів є ріжні; бо коли би було нпр.

$$\varphi^a(x_1) = \varphi^b(x_2);$$

то виконуючи на обох сторонах операцію φ^{m-a}, одержали-б ми:

$$\varphi^{a+m-b}(x_1) = \varphi^m(x_2).$$

т. є

$$x_2 = \varphi^{a-b}(x_1)$$

а з того слїдувало би, що x_2 належить до першого ряду, отже суперечність.

Коли $n = 2m$, то ряди (2a) і (3) вичерпали вже всї коріні рівнаня (1); в противнім разї зістали ще дальші коріні, з яких можемо утворити третїй ряд

$$x_3,\ \varphi(x_3),\ \varphi^2(x_3),\ .,\ \varphi^{m-1}(x_3),$$

і т. д. аж вичерпаємо всї коріні.

Звідси виходить, що степень рівнаня (1) є многократю числа m.

Отже, коли корінї рівнаня (1) мають ту прикмету, що кождий корінь є функцією иншого коріня, то їх можна уложити в таблицю:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1, & \varphi(x_1), & \varphi^2(x_1), & \qquad \varphi^{m-1}(x_1), \\ x_2, & \varphi(x_2), & \varphi^2(x_2), & \qquad \varphi^{m-1}(x_2), \\ & & & \\ x_\nu, & \varphi(x_\nu), & \varphi^2(x_\nu), & \qquad , \varphi^{m-1}(x_\nu); \end{array}\right\} \qquad (4)$$

тут є: $\varphi^m(x_k) = x_k$ для кождого рядка. Степень рівнаня є $n = m\nu$.

§. 81. Ґрупа рівнаня (1) є непервісна. Нам вільно переставлювати елементи в кождім рядку, уживаючи циклїчної субституції

$$c_\lambda = | \; x_\lambda \;\; \varphi(x_\lambda) \; | \; ;$$

отже ті субституції творять ґрупу порядку m^ν, бо циклїв є ν, а кождий з них є m-того степеня. Кожда инша субституція, яка заступить x_1 елементами: $x_2, x_3, \; . \; ., x_\nu$, переведе цїлий перший рядок в другий, в третїй, ..., в ν-тий. Таких субституцій є $\nu\,!$, отже порядок цілої ґрупи буде $\nu\,! \; m^\nu$. Ґрупа є непервісна; вона має ν кляс по m елементів.

§. 82. Приймім, що степень рівнаня (1) є зложений: $n = m\nu$. Доказано, що тоді можна розвязку рівнаня (1) звести до розвязки ν рівнань степеня m, які мають корінї, відповідаючі рядкам таблиці (4).

Утворім ресольвенти Lagrange'а

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + \varphi(x_1) + \varphi^2(x_1) + \qquad + \varphi^{m-1}(x_1), \\ X_2 &= x_2 + \varphi(x_2) + \varphi^2(x_2) + \qquad + \varphi^{m-1}(x_2), \\ & \\ X_\nu &= x_\nu + \varphi(x_\nu\nu) + \varphi^2(x_\nu) + \qquad \varphi^{m-1}(x_\nu). \end{aligned}$$

Субституції ґрупи рівнаня (1) не змінюють поодиноких ресольвент, тільки або їх перемінюють поміж собою, або переставляють лише поодинокі додайники. Отже функція X_k є ν-вартісна; до X_1 належить ґрупа тих m^ν субституцій, які переставлюють елементи в нутрі поодиноких рядків, скомбінована з ґрупою, яка переставлює позісталих $\nu - 1$ рядків. Її порядок є проте: $(\nu - 1)\,! \; m^\nu$.

Симетричні функції величин X можна представити сочинниками рівнаня (1), бо вони мають ту саму ґрупу, що дане рівнане, отже є вони корінями рівнаня степеня ν:

$$\Phi(X) = (X - X_1)(X - X_2) \qquad (X \quad X_\nu) = 0. \qquad (5)$$

§ 83. Знаючи одну з тих ресольвент, можемо розвязувати рівнане дальше методою, поданою в попереднім розділї. Творимо циклїчні функції:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1 &= x_1 + \omega\psi(x_1) + \omega^2\varphi^2(x_1) + \ldots + \omega^{m-1}\varphi^{m-1}(x_1),\\
\psi_2 &= x_1 + \omega^2\varphi(x_1) + \omega^4\varphi^2(x_1) + \ldots + \omega^{2(m-1)}\varphi^{m-1}(x_1),\\
&\\
\psi_{m-1} &= x_1 + \omega^{m-1}{}_{,}\,(x_1) + \omega^{(2m-1)}\varphi^2(x_1) + \ldots + \omega^{(m-1)2}\varphi^{m-1}(x_1):
\end{aligned}\right\} (6)$$

коли утворимо функцію

$$\psi_a \,.\, \psi_1{}^{m-\alpha} = T_\alpha,$$

то та функція буде незмінна для ґрупифункції X_1, яка ставить $\varphi(x_1)$ замість x_1; отже функції T можна представити вимірно величиною X_1.

Для $\alpha = 1$ маємо

$$T_1 = \psi_\alpha{}^m,$$

а для инших є

$$\psi_\alpha = \frac{T_\alpha}{\psi_1{}^m}\psi_1{}^\alpha = \frac{T_\alpha}{T_1}\left(\sqrt[m]{T_1}\right)^\alpha \qquad (7)$$

Вставляючи ті вартости в лїві сторони рівнань (5) і узглядаючи, що

$$X_1 = x_1 + \varphi(x_1) + \varphi^2(x_1) + \ldots + \varphi^{m-1}(x_1),$$

одержимо:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{m}\left[X_1 + \sqrt[m]{T_1} + \frac{T_2}{T_1}\left(\sqrt[m]{T_1}\right)^2 + \ldots + \frac{T_{m-1}}{T_1}\left(\sqrt[m]{T_1}\right)^{m-1}\right],\\
\varphi(x_1) &= \frac{1}{m}\left[X_1 + \omega^{-1}\sqrt[m]{T_1} + \omega^{-1}\frac{T_2}{T_1}\left(\sqrt[m]{T_1}\right)^2 + \ldots + \omega^{(m-1)}\frac{T_{m-1}}{T_1}\left(\sqrt[m]{T_1}\right)^{m-1}\right],\\
&\\
\overset{m-1}{\varphi}(x_1) &= \frac{1}{m}\left[X_1 + \omega^{-(m-1)}\sqrt[m]{T_1} + \omega^{-2(m-1)}\frac{T_2}{T_1}\left(\sqrt[m]{T_1}\right)^2 + .\right.\\
&\qquad \left. + \,\omega^{-(m-1)^2}\frac{T_{m-1}}{T_1}\left(\sqrt[m]{T_1}\right)^m\right].
\end{aligned}\right\} (8)$$

З того бачимо, що корінї рівнаня (1) представили ми в тій формі, до якої дійшли в теорії рішимих рівнань.

Та ми тут не маємо ще всїх корінїв рівнаня (1), тільки один рядок таблицї (4). Заступаючи X_1 анальоґічними величинами X_2, ., X_ν, одержимо за кождим разом нових m корінїв, отже загалом $m\nu$ корінїв рівнаня (1).

§ 84. Коли степень рівнаня (1) є первим числом, то в поданій тут розвязці маємо повну розвязку рівнаня. Величина X_1 буде тут одинока того рода; буде вона сумою всїх корінїв рівнаня, отже першим сочинником рівнаня в противним знаком: $-c_1$. Звідси слїдує

I. Твердженє. Рівнанє первого степеня, якого кождий корінь є функцією попереднього, є рішиме.

Коли число m є зложене: $m = m_1, m_2$, мусимо зважити, що добуванє зложеного кореня розкладаєть ся на два кореньованя о виложниках первих. Заступім в рівнаню на ψ_1 ω корінем рівнаня $\omega_1{}^{m_1} = 1$:

$$\psi_1 = [x_1 + \varphi^{m_1}(x_1) + \varphi^{2m_1}(x_1) + \ldots + \varphi^{(n_1-1)m_1}(x_1)]$$

$$+ \omega_1[\varphi(x_1) + \varphi^{m_1+1}(x_1) + \varphi^{2m_1+1}(x_1) + \ldots + \varphi^{(n_1-1)m_1+1}(x_1)]$$

$$+$$

$$+ \omega_1{}^{m_1-1}[\varphi^{m_1-1}(x_1) + \varphi^{2m_1-1}(x_1) + \varphi^{3m_1-1}(x_1) + \ldots + \varphi^{n_1 m_1-1}(x_1)];$$

назвім вирази в гранчастих скобках: $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{m_1-1}$, то будемо мати:

$$\psi_1 = \chi_0 + \omega_1\chi_1 + \omega_1{}^2\chi_2 + \ldots + \omega_1{}^{m_1}\chi_{m_1-1}.$$

Функція $T_1 = \psi_1{}^{m_1}$ є незмінна для субституцій $| x_1 \quad \varphi(x_1) |$; таксамо функція $T_a = \psi_a \psi_1{}^{m_1-a}$ буде незмінна для тих самих субституцій, отже можна ті функциї представляти вимірно в X_1. Анальоґічно як перше маємо:

$$\chi_a = \frac{1}{m_1}\Big[[X_1 + \omega_1{}^{-a}\sqrt[m]{T_1} + \omega_1{}^{-2a}\frac{T_2}{T_1}\Big(\sqrt[m]{T_1}\Big)^2 + \cdot \quad \Big]. \quad (8)$$

Обчисливши одну з величин χ_i, можемо обчислити симетричні функції величин, які стоять в тім χ як додатники, бо всї вони мають ту саму ґрупу. Таким чином можемо обчислити всї m корінїв даного рівнаня, долучивши до обсягу вимірности m_1-ший і n_1-ший корінь з одиницї.

Те саме поступованє можемо примінити, коли m має більше перших чинників: $m = m_1 \; m_2 \qquad m_\lambda$. Тодї долучуємо m_1-ший. m_2-ий, ., m_λ-тий корінь з одиницї і маємо витягнути корінї з тими самими виложниками з величин, які можна представити вимірно сочинниками даного рівнаня і долученими величинами.

Коли $m = 2^p$, рівнанє зводить ся до витяганя p квадратних корінів.

Таким чином маємо доказанє

II. Твердженє. Рівнаня зложених степенїв, яких корінї можна роздїлити на кляси о рівній скількости членів так, що кождий корінь можна представити як вимірну функцію попереднього, т. є коли можна уставити корінї в таблицю

$$\left.\begin{array}{l} x_1, \ \varphi(x_1), \ \varphi^2(x_1), \ldots, \ \varphi^{m-1}(x_1) \ ; \ [\varphi^m(x_1) = x_1]; \\ x_2, \ \varphi(x_2), \ \varphi^2(x_2), \ldots, \ \varphi^{m-1}(x_2) \ ; \ [\varphi^m(x_2) = x_2]; \\ \\ x_\nu \ \ \varphi(x_\nu), \ \varphi^2(x_\nu), \ldots, \ \varphi^{m-1}(x_\nu) \ ; \ [\varphi^m(x_\nu) = x_\nu]; \end{array}\right\} \qquad (1)$$

є рішимі.

§. 85. Рівнаня, якими саме займаємо ся, мають ще одну характеристичну прикмету.

Напишім: $\varphi^\alpha(x_i) = \varphi_\alpha(x_i)$, $\varphi^\beta(x_i) = \varphi_\beta(x_i)$, $\varphi_\gamma(x_i) = \varphi_\gamma(x_i)$. Коли ми на x_i виконаємо з черги два ріжні функційні символї, нпр. φ_α і φ_β, одержимо символь, якого виложником буде $\alpha + \beta$, отже $\varphi_{\alpha+\beta}$; назвім його φ_γ, отже:

$$\varphi_\alpha[\varphi_\beta(x_i)] = \varphi_\alpha\varphi_\beta(x_i) = \varphi_\gamma(x_i).$$

Так само буде, коли ми змінимо порядок φ_α і φ_β:

$$\varphi_\beta[\varphi_\alpha(x_i)] = \varphi_\beta\varphi_\alpha(x_i) = \varphi_\gamma(x_i),$$

бо ми тут виконали в обох разах функційний символь $\alpha + \beta$ разів. Звідси слідує, що коли φ і ψ означують два які небудь функційні символї, які подають звязь між корінями рівнаня (1), то порядок виконуваня тих символїв є довільний:

$$\varphi\,[\psi(x)] = \psi[\varphi(x)] \qquad (9)$$

Рівнаня, які мають ту прикмету, називають ся Абелевими*). Всї рівнаня, про які ми тут говорили, є Абелевими, бо сповняють умову (9). Отже

III. Твердженє. Абелеві рівнаня є рішимі.

---

*) Abel, Mémoire sur une classe d' èquations resolubles algèbriquement. Crelle's Journal, 4 т. 1829; Oeuvres, т. 1. стр. 418. Назва походить від Jordan'a (Traité, §. 402) і Kronecker'a (Monatsberichte, Berlin, 1853).

Коли Абелеве рівнане є зведиме, то кождий з його незведимих чинників є опять Абелевим рівнанем*), отже ми будемо говорити виключно про **незведимі Абелеві рівнаня**.

Абелеве рівнане первого степеня називаємо **поодиноким** або також **циклїчним**. Отся друга назва походить звідси, що всї корінї того рівнаня можемо замкнути в один цикль, якого кождий член буде функцією попереднього. Ґрупа того рівнаня є **циклїчна**, бо тільки ті субституції не змінять функцій корінїв, які пересувають показчик о ту саму скількість місць.

Абелеві рівнаня зложених степенїв називаємо **зложеними** або **Абелевими рівнанями висших рядів** (höheren Ranges)**): число ν називає ся **рядом** (Rang) Абелевого рівнаня.

§. 86 **IV. Твердженє. Ґрупа Абелевого рівнаня є перемінна, якої порядок є рівний її степеневи.**

Доказ. 1. Кожду субституцію перемінної ґрупи представляли ми в виді

$$s = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \ldots s_\nu^{\alpha_\nu} \qquad (10)$$

Перемінну ґрупу G можемо розложити на части, які є опять Абелевими ґрупами, а порядок ґрупи G є добутком з порядків складових ґруп. Нехай одна із складових ґруп G_1, порядку r_1, має субституції форми

$$t_1 = s_a^{\alpha_a} s_b^{\alpha_b} \ldots,$$

друга ґрупа G_2, порядку r_2, субституції

$$t_2 = s_c^{\alpha_c} s_d^{\alpha_d} \ldots,$$

і т. д., то ґрупа G скомбінована в всїх тих частий, буде мати субституції

$$s = s_1^{\alpha_1} \; s_2^{\alpha_2} \; b_3^{\beta_3} \ldots;$$

її порядок буде $n = r_1 r_2 \ldots r_\nu$.

2. Нехай до ґрупи G_1 належить функція φ; коли на нїй виконаємо субституцію $s_c = s_a s_b$, то одержали-б ще иншу вартість φ_c, до якої могли-б ми дійти ще й так, що виконали-б перше s_b, а опісля s_a, бо ті субституції є перемінні.

Примінїм се до корінїв Абелевих рівнаня

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

степеня n. Корінї того рівнаня укладали ми в ν рядків по m членів

$$x_i, \; \varphi(x_i), \; \varphi^2(x_i), \ldots, \; \varphi^{m-1}(x_i); \; (i = 1, \; 2, \qquad \nu). \qquad (4)$$

---

*) Vogt, Leçons, стр. 140.

**) Netto, Algebra, II. стр. 273.

Доберім сей розклад так, щоби m було первим числом. Ґрупа Абелевого рівнаня може мати тільки такі субституції, які переводять члени тільки в нутрі того самого рядка, або перемішують рядки поміж собою. Субституції першого рода дадуть циклїчну ґрупу порядку m, субституції другого циклїчну ґрупу порядку ν. Скомбінувавши обі ґрупи разом, одержимо перемінну ґрупу порядку $n = m\nu$, отже порядок ґрупи Абелевого рівнаня є рівний степеневи рівнаня, а тим самим і степеневи ґрупи.

3. Що згадана ґрупа є перемінна, виходить з того, що кожда циклїчна ґрупа з окрема є перемінна; назвім субституції першого рода σ, а другого рода τ, то субституції скомбінованої ґрупи будуть

$$s = \sigma^{\alpha}\tau^{\beta} \ (\alpha = 0, 1, \ldots. m; \ \beta = 0, 1, \ldots, \nu). \qquad (15)$$

Звідси походить назва Абелевих ґруп.

§. 87. На основі того можемо значно зредукувати проблєм розвязки Абелевих рівнань.

V. Твердженє. Абелеве рівнанє степеня

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\nu^{\alpha_\nu} \qquad (16)$$

можна звести до розвязки цїлого ряду Абелевих рівнань степенів: $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_\nu^{\alpha_\nu}$.

Доказ. Приймім для прозорости $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$. Ґрупа Абелевого рівнаня степеня n матиме порядок n, отже буде мати в собі два роди субституцій такі, яких порядок є дїльником числа $p_2^{\alpha_2}$, отже можемо написати:

$$s = \sigma^{\beta_1}\tau^{\beta_2},$$

де σ й τ є тими двома родами субституцій; оба вони творять окремі ґрупи (циклїчні) Σ і T.

Назвім функцію, яка належить до циклїчної ґрупи Σ, φ, а функцію ґрупи T, ψ. Функція φ має тільки вартостий, кілько виносить порядок ґрупи Σ, т. є $p_1^{\alpha_1}$, отже залежить від рівнаня степеня $p_1^{\alpha_1}$; те рівнанє є Абелеве, бо його ґрупа Σ є перемінна. Так само функція ψ залежить від Абелевого рівнаня степеня $p_2^{\alpha_2}$.

Утворім тепер при помочи двох вимірних величин A і B нову функцію

$$X = A\varphi + B\psi, \qquad (17)$$

то та функція буде належати до ґрупи 1, отже всї функції корінів обох рівнань буде можна нею представити, а передовсїм самі корінї. Значить, що щоби знайти корінї рівнаня (1), треба розвязати одно рівнанє степеня $p_1^{\alpha_1}$ і одно степеня $p_2^{\alpha_2}$, а потім з корінів тих рівнань утворити лінїйні функції χ, якими можна представити корінї рівнаня (1).

Таким чином наше твердженє доказане; воно вчить, що вистарчить знати, як розвязувати Абелеві рівнаня степеня p^α, де p є перве число.

§. 88. **VI. Твердженє.** Розвязку Абелевого рівнаня степеня p^α можна звести на розвязку цїлого ряду незведимих Абелевих рівнань степеня p.

Доказ. Ґрупа Абелевого рівнаня має виключно субституції порядку p або порядку p^λ; назвім p^λ порядок тої субституції, яка має найвисший порядок. Всї ті субституції ґрупи G, яких порядок доходить тільки до $p^{\lambda-1}$, творять ґрупу H.

Коли порядок ґрупи H є p^a, то функція φ, яка належить до тої ґрупи, буде мати $p^{\alpha-a}$ вартостий, отже буде залежати від рівнаня такого степеня. Коли на φ виконаємо субституцію τ з поза ґрупи G, то одержимо тільки p вартостий тої функції, бо τ^p належить вже до ґрупи H, отже субституції ґрупи, до якої належить та функція φ, мають всї порядок p. Рівнанє для φ є Абелеве степеня p.

Коли знаємо φ, то ґрупа рівнаня редукуєть ся до H; з нею повторимо той сам процедер. Субституції, яких порядок є $< p^{\lambda-2}$, творять ґрупу J, до якої належить функція ψ; та функція є з огляду на ґрупу H p-вартісна, отже залежить від Абелевого рівнаня степеня p з ґрупою того самого порядку, і т. д.

Коли $\lambda = 1$, одержуємо α Абелевих рівнань степеня p, бо ґрупа G буде редукувати ся все на низшу о показчику p; отже по α кроках дійдемо до ґрупи 1. Назвім функцію, що належить до ґрупи H, φ, до слїдуючої ґрупи $\psi, \ldots$, а до передостатньої ґрупи, порядку p, ω; тодї маємо: функція

$$\xi = A\varphi + B\psi + \ldots + E\omega$$

належить до ґрупи 1; нею можемо представити всї корінї даного рівнаня (1), а щоби її знати, мусимо розвязати α рівнань степеня p.

§. 89. **VII. Твердженє.** Ґрупа Абелевого рівнаня степеня p^α є аритметичною ґрупою степеня p^α о α показчиках (*mod.* p).

Доказ. Корінї Абелевого рівнаня можна представити також так, що дамо їм по α показчиків:

$$x_{h_1 h_2 \ldots h_\alpha} = (h_1, h_2, \ldots, h_\alpha = 1, 2, \ldots, p). \qquad (18)$$

Нехай субституція

$$s_k = s_1^{k_1} s_2^{k_2} \,.\,. s_\alpha^{k_\alpha}$$

переводить згаданий корінь в

$$x_{k_1 k_2 \cdot \quad \cdot k_\alpha}$$

так, що кожда зі складових субституцій s_i буде змінювати тільки i-тий показчик коріня (18); тодї мусить субституція

$$s_k \,.\, s_l = s_1^{k_1+l_1} s_2^{k_2+l_2} \ldots s_\alpha^{k_\alpha+l_\alpha}$$

перевести корінь (18) в

$$x_{k_1+l_1,\; k_2+l_2, \cdot \cdot \quad k_\alpha+l_\alpha},$$

отже субституцію s можна написати так:

$$s = | \, z_1, \; z_2, \ldots, \; z_\alpha \quad z_1 + u_1, \; z_2 + u_2, \ldots, \; z_\alpha + u_\alpha \, | \; (mod \;\; p). \qquad (19)$$

Коли приймемо $u_\lambda^\eta = 1$, а всї прочі $u = 0$, одержуємо односторонну субституцію s_δ^η: отже кожду субституцію s можна написати як добуток односторонних

$$s_k = s_1^{k_1} s_2^{k_2} \ldots s_\alpha^{k_\alpha}.$$

X. Ґрупи рішимих рівнань.

§. 90. Ґрупою рівняня

$$f\,x) = 0 \qquad (1)$$

назвали ми таку ґрупу, яка не змінює нїякої вимірної (в R) функцїї корінїв того рівняня. З тої точки погляду панує між рівнянями а їх ґрупами тїсна звязь, яку ми можемо так виразити, що назвемо ґрупу рішимого рівняня рішимою, а рівнанє, якого ґрупа є первісна або непервісна, назвемо первісним чи то непервісним.

Ми вже доказали твердженє (§. 52), що ґрупа незведимого рівняня є перехідна, і навпаки: рівнанє, якого ґрупа є перехідна, є незведиме. Тепер розслїдимо вплив первісности й непервісности ґрупи на рівнанє.

Приймім, що ґрупа G рівняня (1) є непервісна; тодї можемо коріні розложити на ν кляс по m членів ($n = m\nu$):

$$\begin{array}{llll} x_{11}, & x_{12}, & \cdot, & x_{1m}, \\ x_{21}, & x_{22}, & \cdot, & x_{2m}, \\ & & & \\ x_{\nu 1}, & x_{\nu 2}, & & x_{\nu m}, \end{array} \qquad (2)$$

так, що субституції ґрупи G будуть або тільки пересувати елементи в кождім рядку, або рядки поміж собою. Возьмім тепер за ресольвенту яку небудь симетричну функцію корінїв першого рядка; під впливом ґрупи G перейде вона в симетричні функції всїх инших рядків. Тих всїх симетричних функцій буде рівно ν:

$$\begin{aligned} y_1 &= S(x_{11}.\ x_{12} \qquad x_{1m}), \\ y_2 &= S(x_{21},\ x_{22},\ldots,\ x_{2m}), \qquad (3) \\ & \\ y_\nu &= S\ x_{\nu_1},\ x_{\nu_2} \cdots,\ x_{\nu m}); \end{aligned}$$

вони є корінями рівнаня степеня ν:

$$\varphi(y) = 0, \qquad (4)$$

якого сочинники є незмінні для ґрупи G, отже можна їх представити вимірно. Розвязавши рівнанє (4), знаємо симетричні функції y_1, y_2, ., y_ν, а також і всї инші симетричні функції, утворені з поодиноких рядків (2). Нехай

$$\sigma_1(x_\alpha),\ \sigma_2(x_\alpha), \qquad \sigma_m(x_\alpha)$$

будуть основними симетричними функціями α-того рядка, то з них маємо рівнанє

$$\psi_\alpha = x^m - \sigma_1(x_\alpha)x^{m-1} + \sigma_2(x_\alpha)\,x^{m-2} - \ldots \pm \sigma_m(x_\alpha) = 0, \qquad (5)$$

яке дає всї корінї α-того рядка. Отже рівнанє (1) одержимо, коли виелімінуємо величину y з (4) і (5), т. є з:

$$f(x) = \prod_{\alpha=1}^{\nu} \psi_\alpha = 0 \qquad (6)$$

Звідси слїджує

Твердженє. Коли рівнанє (1) можемо одержати через елїмінацію величини y з рівнань (4) і (5), то ґрупа даного рівнаня буде непервісна, і навпаки: непервісне рівнанє можемо вважати результатом такої елїмінації.

З того виходить, що рівнаня, яких ґрупа є непервісна, можна все редукувати; отже в загальній теорії рівнань займаємо ся тільки первісними рівнанями.

§. 91. Займім ся тепер дальшими прикметами ґрупи даного рівнаня (1).

Коли утворимо ресольвенту Galois загального рівнаня,

$$\xi_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n, \qquad (7)$$

яка має $n!$ вартостий, то ґрупа рівнаня і ґрупа рівнаня ресольвенти

$$F(\xi_1) = 0 \qquad (8)$$

будуть ізоморфні. Коли рівнане (1) загальне (т. зн. нерішиме), отже його ґрупа симетрична, то ґрупа рівнаня (8) має порядок рівний степеневи, і всї коріні рівнаня (8) можна представити вимірно одним з поміж них, т. зн, розвязка рівнаня (1) є рівнозначна з розвязкою рівнаня (8).

Спеціяльне рівнане ріжнить ся від загального тим, що між його корінями панує реляція

$$\varphi(x_1, x_2, \quad x_n) = 0; \qquad (9)$$

нехай ґрупа функції φ буде G, порядку r, тодї коріні рівнаня (1) позволяють тільки на субституції ґрупи G, бо кожда инша субституція перевела би φ в відмінну функцію φ', а та функція змінила би вже характер рівнаня (1).

Виконаймо субституції ґрупи G на ресольвенті (7); через те одержимо r ріжних вартостий ξ_1, ξ_2, $\quad \xi_\nu$, які творять рівнане

$$F_1(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \quad (\xi - \xi_r) = 0. \qquad (10)$$

До того самого результату дійдемо, коли до обсягу рівнаня (8) долучимо реляцію (9); тодї рівнане $F(\xi) = 0$ стане зведиме і розпадеть ся на незведимі чинники степеня r; одним з тих чинників буде (10). Ґрупи тих всїх чинників будуть одностепенно ізоморфні до ґрупи G.

Звідси слїдує

I. Твердженє. За долученем функції $\varphi = 0$ рівнане ресольвенти розпадаєть ся на $\varrho = \frac{n!}{r}$ чинників степеня r. Всї коріні кождого з чинників можна представити вимірно одним з них, а ними можна представити коріні рівнаня (1).

Коли два рівнаня $f_1(x) = 0$ і $f_2(x) = 0$, схарактеризовані реляціями $\varphi_1 = 0$ і $\varphi_2 = 0$, які належать до тої самої ґрупи, то розвязка одного рівнаня подає заразом і розвязку другого рівнаня.

§. 92. Функція, яку треба долучити до обсягу рівнаня (1), дана звичайно в такій формі, що якась її степень,

$$\psi_\nu^m = A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (11$$

належить до обсягу рівнаня (1), т. зн., ми долучуємо не величину

ψ впрост, тільки корінь иншого рівнаня, яке вважаємо рішимим. В такім разї долучуємо всї коріні рівнаня (11):

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$$

т. зн. всі вартости функції ψ, які вона може в обсягу R приймати. Робимо се тому, що для вишуканя рівнаня

$$\psi^m = A \qquad (11a)$$

мусимо знати всї вартости функції ψ, які вона приймає під впливом ґрупи G. Тодї маємо:

$$g(\psi) = (\psi - \psi_1)(\psi - \psi_2) \ldots (\psi - \psi_m) = 0 \qquad (12)$$

є бажаним помічним рівнанєм.

Ґрупа G — зглядно функція φ, яка до неї належить — характеризує дане рівнане (1).

§. 93. Долучім до рівнаня (1) з ґрупою G всї коріні рівнаня (12) і утворім яку небудь функцію тих корінїв, Φ $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)$. Ґрупа, яка тепер буде належати до рівнаня (1), буде підґрупою ґрупи G, а заразом і перекроєм ґруп

$$H_1, H_2, \ldots, H_m, \qquad (13)$$

які належать до функцій

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m. \qquad (14)$$

Назвім той перекрій K, тодї знаємо, що K належить до функції $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)$.

Ґрупа G, виконувана на рядї функцій (14), може тільки пересувати їх поміж собою, бо ті вартости одержали ми, виконуючи субституції ґрупи G на функції ψ_1. З того слїдує, що K не змінить ся, коли його будемо трансформувати ґрупою G:

$$G^{-1}KG = K,$$

або

$$KG = GK.$$

Утворім тепер з тих субституцій, які є спільні ґрупам G і K, підґрупу Γ, то Γ буде так само перемінне з G, отже буде її визначною підґрупою.

Коли G не є зложеною ґрупою, то Γ мусить бути ідентичною ґрупою, отже за долученєм функцій ψ одержимо з G ґрупу 1, т. зн. рівнане (1) буде розвязане. Коли-ж G є зложене, то Γ може бути або 1, або ґрупою висшою від 1; тодї рівнане ресольвенти (8) розпадеть ся, що правда на чинники низших степенїв, але неконечно на лінїйні.

§. 94. Порядок ґрупи K рівний степеневи рівнаня, яке має коріні:

$$\chi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_m\psi_m; \qquad (15)$$

коли будемо вважати χ функцією величин x_1, x_2, x_m, то ґрупою тої функції буде K, а Γ буде перекроем ґруп G і K. Всї вартости χ одержимо, коли до тої функції приміниmo ґрупу G; звідси слїдує, що порядок ґрупи K є

$$\nu = \frac{r}{r'},$$

де r і r' є порядками ґрупи G і Γ. — Коли G є поодинокою ґрупою, є $r' = 1$, отже $\Gamma = 1$, а $\nu = r$, т. зн., що таке долученє не посуне розвязки рівнаня вперед.

Ґрупа К не може мати r субституцій, бо не всї вартости ψ є ріжні між собою; ті субституції, які творять ґрупу Γ, не змінюють їх, отже порядок ґрупи K є $\frac{r}{r'}$.

Виберім на ресольвенту таку функцію ξ, яка належить до ґрупи Γ, отже вона буде залежати від рівнаня степеня ν, а всї її коріні буде можна виразити вимірно одним з поміж них, бо всї вони будуть належати до тої самої ґрупи Γ.

Коли Γ є **найбільшою (визначною) підґрупою** ґрупи G, то ґрупа рівнаня

$$\lambda(\xi) = (\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_\nu) = 0 \qquad (16)$$

буде поодинока*), перехідна. Тодї можна рівнанє (16) розвязати вже за одним долученєм, отже тільки тодї можемо мати користь з долученя ресольвенти, коли ґрупа рівнаня ресольвенти буде проста, т. зн., **коли ґрупа Γ буде найбільшою підґрупою первісної ґрупи.** В такім разї ґрупа G редукуеть ся на Γ.

Тепер вважаемо Γ ґрупою рівнаня (1) і поступаемо з нею зовсїм так само, аж врештї дійдемо до ідентичної ґрупи. Отже розвязку рівнаня (1) можна повести такою дорогою:

Ґрупу G розкладаемо на ряд зложеня

$$G,\ G_1,\ G_2, \ldots,\ G_\nu,\ 1, \qquad (17)$$

т. зн., **кождий слїдуючий член є найбільшою підґрупою попереднього. Порядки членів того ряду є**

$$r\ r_1,\ r_2, \ldots,\ r_\nu,\ 1. \qquad (18)$$

---

*) Netto, Substitutionentheorie, стр. 268.

До обсягу R рівнаня

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

долучуємо чергою корінї рівнань степенїв

$$\varrho_1 = \frac{r}{r_1},\ \varrho_2 = \frac{r_1}{r_2}, \ldots,\ \varrho_{\nu+1} = r_\nu; \qquad (19)$$

сочинники кождого з тих рівнань належать до обсягу попереднього рівнаня. Кожде з тих рівнань є незведиме, і корінї кождого з них можна представити вимірно одним котрим небудь. Порядки ґруп, які належать до тих рівнань, є числами з ряду (19).

Рівнанє ресольвенти, яке зразу було незведиме і степеня r, розпадаєть ся чергою на

$$\varrho_1,\ \varrho_1\varrho_2,\ \varrho_1\varrho_2\varrho_3, \ldots,\ \varrho_1\varrho_2 \ldots \varrho_\nu = r$$

чинників. З остатньою операцією є рівнанє (1) розвязане.

§. 95. Шукаймо тепер дальше умов рішимости рівнаня 1). Назвім долучені рівнаня

$$\chi_1 = 0,\ \chi_2 = 0, \ldots,\ \chi_{\nu+1} = 0; \qquad (20)$$

вони мають ту прикмету, що всї їх корінї можна представлювати одним з них, отже се циклїчні рівнаня.

Степені тих рівнань мусять бути первими числами. Се конечна й достаточна вимога для рішимости рівнаня, отже:

II. Твердженє. Конечною і достаточною умовою для рішимости рівнаня (1) є те, щоби ряд чинників зложеня ґрупи G, т. є ряд (19), складав ся з самих первих чисел.

Та умова є конечна, бо тільки тоді можна розвязати рівнанє (1), коли рівнаня (20) будуть рішимі, а се можливе тільки тоді, коли вони є циклїчними первого степеня, — а заразом і достаточна, бо тодї дїйсно ґрупа G буде редукувати ся в згаданий спосіб.

§. 96. **III. Твердженє.** Другою конечною і достаточною умовою рішимости рівнаня (1) є, щоби ґрупа G складала ся з таких субституцій, що в рядї її зложеня

1. субституції кождої ґрупи G_1 є з собою перемінні аж по субституції слїдуючої ґрупи G_λ;

2. найнизша степень кождої субституції з G_λ, яка приходить в $G_{\lambda-1}$, має первий виложник.

Доказ. 1. Перша умова сповнена вже самою дефініцією ряду зложеня. Нехай в рядї зложеня по G слїдує G_1; назвім s субституції з G t з G_1, а σ нехай буде такою субстигуцією з G, якої нема в G_1; тоді є (§. 24).

$$s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha \, . \, t_\mu$$

2. Приймім, що m-та степень субституції σ приходить вже в G_1, отже $\sigma^m = t_a$; таке m істнує все; в найгіршім разї буде m порядком субституції σ. Коли m є зложеним числом, $m = pq$, напишім $\sigma^p = \tau$, отже τ^q буде містити ся в G_1

$$\tau^q = \sigma^{pq} = t_a.$$

Трансформуймо τ всїми субституціями з G_1; через те одержимо ряд субституцій τ_1, τ_2, τ_λ, з яких нї одної нема в G_1. Утворім ґрупу Γ з G_1 і з τ_1, τ_2, τ_λ; Γ є перемінне з G, бо

$$s^{-1}\Gamma s = s^{-1}\{G_1 \, . \, \tau_1{}^{\alpha_1}\tau_2{}^{\alpha_2} \ldots\}s = s^{-1}G_1 s \, . \, s^{-1}\tau_1{}^{\alpha_1}s \, . \, s^{-1}\tau_2{}^{\alpha_2}s \ldots$$
$$= G_1 . \tau_1{}^{\prime\delta}\tau_2{}^{\prime\delta} \ldots = \Gamma.$$

З того слїдує, що G_1 не може бути найбільшою підґрупою для G, бо Γ є висшою визначною підґрупою. Неможливе отже, щоби m було зложеним числом; наше твердженє доказане посередно.

§. 97. **IV. Твердженє.** Коли степень незведимого, рішимого рівнаня $f(x) = 0$ є зложеним числом, $n = i . m$ (де i і m є зглядно перві), то по долученю коріня одного рівнаня степеня m рівнанє (1) розпадеть ся на m рівнань степеня i

$$f\lambda(x) = 0 \ (\lambda = 1, \ 2, \qquad m),$$

яких сочинники належать до обсягу, розширеног коріннями згаданого рівнаня степеня m. Ґрупа рівнаня (1) є непервісна.

Доказ. Виходить се звідси, що ґрупа рівнаня зложеного степеня не може бути первісна. Поміж субституціями ґрупи G можна буде знайти такі, які будуть змінювати елементи тільки серед тої самої кляси, або будуть пересувати цїлі кляси, нерозриваючи їх. Коли-ж рівнанє непервісне, то його можна представити як результат елїмінації величини y з рівнань

$$y^i - k_1 y^{i-1} + \ldots \pm k_i = 0,$$

де кождий сочинник є величиною з розширеного обсягу.

Отся редукція показує, що коли маємо розвязувати рівнанє зложеного степеня, то той проблєм зводить ся до розвязки ряду рівнань степенів p^λ, де всї p є первими числами.

Третя частина.

Рішимі рівнаня.

XI. Рішимі рівнаня первого степеня.

§. 98. Остатнє твердженє попереднього розділу вказує, як можна зредукувати проблем розвязки альґебраічних рівнань. Іменно, коли степень рівнаня є зложений

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_\nu^{\alpha_\nu},$$

(p_1, p_2, ..., p_ν первi числа, ріжні між собою), то розвязку рівнаня степеня n можна звести до ряду рівнань степенів $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_\nu^{\alpha_\nu}$, — отже ми маємо займити ся типовим проблемом: знайти і розвязати рішимі рівнаня степеня p^ν, де p є числом первим.

Коли рівнанє

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

є рішиме, то його ґрупа G називаєть ся теж рішима; вона мусить сповнювати ось такі вимоги: 1) мусить бути перехідна, бо в противнім разї рівнанє було би зведиме; 2) мусить бути первісна, бо приймаємо, що рівнанє має найпростїйшу форму, отже не можна його вважати результатом елімінації, вказаної в §. 90; 3) мусить мати ряд зложеня о первих показчиках. Отсей ряд складаєть ся з таких членів, що кождий з них є найбільшою (визначною) підґрупою попереднього; кожда ґрупа є перемінна аж по субституції слідуючого члена, а остатня ґрупа є зовсїм перемінна, т. зн. Абелева.

§. 97. Найпростїйший є той випадок, що $\alpha = 1$, отже $n = p$, т. зн. степень рівнаня є первий. Ми бачили, що корінї такого рівнаня можемо представити при помочи невимірностий

$$\left.\begin{aligned} V_\nu^{p_\nu} &= F_\nu(R), \\ V_{\nu-1}^{p_{\nu-1}} &= F_{\nu-1}(R;\ V_\nu), \\ & \\ V_1^{p} &= F_1(R;\ V_\nu, V_{\nu-1}, \ldots, V_2) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

в формі:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= G_0 + V_1 + G_1 V_1^2 + \ldots + G^{p-1} V_1^{p-1}, \\ x_2 &= G_0 + \omega V_1 + G_2 \omega^2 V_1^2 + \ldots + G_{p-1} \omega^{p-1} V_1^{p-1}, \\ & \\ x_p &= G_0 + \omega^{p-1} V_1 + G_2 \omega^{2(p-1)} V_1^2 + \ldots + G_{p-1} \omega^{(p-1)^2} V_1^{p-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

де ω є p-тим корінем з одиниц'.

Заступаючи кожду з невимірностий V величвнами $\omega^\mu V$, одержимо замість V_1 виражене $G_\mu \omega^{k\mu} V_1^\mu$; примінюючи те до корінів рівнаня побачимо, що така переміна переводить тільки один корінь в другий, отже цїлости системи (3) не може змінити. З того слїдує, що всї такі субституції, які викликують згадану зміну, належать до ґрупи G рівнаня (1).

Ужиймо такої субституції, яка переводить V_1 в ωV_1, т. є

$$| \; V_1 \;\; \omega V_1 \; | \, ; \tag{4}$$

вона переведе x_1 в x_k, x_2 в $x_{k+1}, \ldots$, x_p в ${}_{k+p-1}$, отже є рівнозначна з субституцією

$$| \; x_\mu \;\; x_{\mu+k-1} \; | \; (mod. \; p), \tag{4a}$$

Беручи самі показчики незвісних, можемо написати ту субституцію в такій найпростїйшій формі:

$$g = | \; z \;\; z + 1 \; | \, , \tag{5}$$

бо кожду иншу субституцію виду (4а) можемо представити як степень субституції g. Субституція (5) є *циклїчна*; ми назвали її також *аритметичною*. Її періода дає *циклїчну ґрупу* порядку p, якої не можна вже розложити на підґрупи; назвім ту підґрупу M; вона пересуває всї корінї рівнаня. Вона є також *перемінна*, отже буде стояти в ряді зложеня ґрупи G на остатнїм місці перед 1. З того слїдує, що *кожда рішима ґрупа степеня p мусить містити в собі циклїчну ґрупу як підґрупу*.

§. 100. Шукаймо дальших субституцій ґрупи G. Можемо се робити на два способи; 1) або шукати субституції, які не пересувають всїх корінів, тільки деякі, 2) або брати під розвагу функції, що належать до ґрупи M, і їх ріжні вартости.

Субституції g пересувають всї корінї рівнаня (1). Шукаймо тепер таких субституцій, які змінюють $p - 1$ корінїв, а один лишають незмінний. Приймім, що якась переміна в V не змінює коріня x_α, а всї другі корінї пересуває, отже $x_{\alpha+1}$ переводить нпр. в $x_{\alpha+\beta}$ $(\beta =|= 1)$. Се значить, що коли

$$V_1 \text{ переходить в } G_\mu \omega^{k\mu} V_1^\mu, \text{ то}$$

$$\omega^{\alpha-1} V \text{ перейде в } G_\mu \omega^{k\mu+\alpha-1} V_1^\mu,$$

а з того виходило би, що виражене на x_α мусїло би містити в собі член $G_\mu (\omega^{\alpha-1} V_1)^\mu$, який переходить в инший член того самого коріня, т. є в $G_\mu \omega^{k\mu+\alpha-1} V_2^\mu$. Порівнуючи виложники при ω, маємо:

$$k_\mu + \alpha - 1 \equiv \mu(\alpha - 1) \text{ (mod. } p.),$$

або

$$k_\mu \equiv (\mu - 1)(\alpha - 1) \text{ (mod. } p.) \qquad (6)$$

Та сама переміна переведе $x_{\alpha+1}$ в $x_{\alpha+\beta}$, отже дають:

$$G_\mu \omega^{k+\alpha} V_{1\mu} = G_\mu \omega^{\mu(\alpha+\beta-1)} \; V_1{}^\mu,$$

т. зн.

$$k\mu + \alpha \equiv \mu(\alpha + \beta - 1) \text{ mod. } p) \qquad (7)$$

З обох тих конґруенцій виходить:

$$\beta\mu \equiv 1 (\text{mod. } p.),$$

і

$$k \equiv (\alpha - 1)(1 - \beta) \text{ (mod. } p). \qquad (8)$$

Рівної переміни мусить зазнати кождий инший корінь; нпр. x_γ перейде в таке x_δ, що член

$$\omega^{\gamma-1} V_1 \text{ перейде в } G_\mu \omega^{k\mu+\gamma-1} V_1{}^\mu = G_\mu \omega^{\mu(\delta-1)} V_1{}^\mu;$$

вставивши тут вартість на k, одержимо:

$$k\mu + \gamma - 1 \equiv \mu(\alpha - 1)(1-\beta) + \gamma - 1 \equiv \mu[(\alpha - 1)(1 - \beta) + \beta(\gamma - 1)] \equiv \mu[(\alpha - 1) + \beta(\gamma - \alpha)] \text{ mod. } p.),$$

а се має давати $\mu(\delta - 1)$, отже

$$\delta \equiv \alpha(1 - \beta) + \beta\gamma. \quad \text{(mod. } p.) \qquad (9)$$

Ту субституцію можемо написати так;

$$t_0 = | \; \gamma \quad \beta\gamma + \alpha(1 - \beta) \; | \; ;$$

помноживши її знаною вже субституцією $g^{-\alpha(1-\beta)}$, одержимо

$$t = | \; \gamma \quad \beta\gamma \; | \; ;$$

β може приймати всї вартости від 1 до $p - 1$; 0 і p є виключені, бо такі субституциї не мали би значіня. Можемо проте написати на місцї β первісний корінь з числа p; тодї субституція t матиме можливо найпростїйшу форму:

$$t = | \; z \quad \varrho z \; | \; ; \qquad (10)$$

Її порядок є $p - 1$. Вона змінює $p - 1$ корінїв: $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, а корінь x_p лишає незмінений.

101. Коли-б ми хотїли шукати дальше таких субституцій, які лишають більше ніж один корінь незмінений, то переконаємо ся, що такі субституції лишають всї корінї незмінені. Приймім, що якась субституція не змінює корінїв x_α і x_β; тодї побіч реляциї (6) мусить істнувати ще анальоґічна

$$k\mu \equiv (\mu - 1)(\beta - 1) \text{ (mod. } p). \qquad (6a)$$

Вони обі мусять істнувати рівночасно; $\alpha =|= \beta$. З того слїдує: $\mu' = 1$, $k = 0$, т. зн., що та субституція переводить V_1 в себе само, отже не перемінює нї одного коріня в инший. Так само заховували-б ся субституції, що не змінюють трьох, чотирох etc. корінів.

Инакших субституцій не можна брати під увагу, бо вони вже змінювали би вартости поодиноких корінїв. Отже ґрупа G складаєть ся з аритметичних і ґеометричних субституцій (5) і (10), т. зн. є метациклічна порядку $(p-1)p$. Длятого то називаємо рішимі рівнаня первого степеня також метациклїчними; те означенє перенесемо опісля на рівнаня зложених степенїв.

Метациклїчна ґрупа G є дійсно рішима, т. зн. сповнює вимоги §. 98. Вона є перехідна і первісна, бо неможливий є подїл p корінів на системи. Її ряд зложеня має самі перві показчики, а про се переконуємо ся так:

Найнизша ґрупа в рядї зложеня є M порядку p. Розложім число $p-1$ на перві чинники,

$$p - 1 = k_1 k_2 \ldots k_\nu; \tag{11}$$

числа k_1, k_2, ., k_ν можуть бути рівні або ріжні. Утворім тепер частинну ґрупу з субституцій

$$t_\nu = t^{\frac{p-1}{k\nu}} = | z \quad \varrho^{\frac{p-1}{k\nu}} z | \tag{12}$$

і з M; назвім ту ґрупу G_ν. Вона буде попереджувати ґрупу в рядї зложеня, бо її субституції є перемінні аж по g:

$$g^{-1} t_\nu g = | z+1 \quad z | \; | z \quad \varrho^{\frac{p-1}{k\nu}} z | \; | z \quad z+1 | = | z+1 \quad \varrho^{\frac{p-1}{k\nu}} z + 1 |$$

$$= | z \quad \varrho^{\frac{p-1}{k\nu}} z + 1 - \varrho^{\frac{p-1}{k\nu}} | = t\nu\, g';$$

$$t^{-1} t_\nu t = | \varrho z \quad z | \,.\, | z \quad \varrho^{\frac{p-1}{k\nu}} z | \; | z \quad \varrho z | = | \varrho z \quad \varrho^{\frac{p-1}{k\nu}+1} z | = | z \quad \varrho^{\frac{p-1}{k\nu}} z \quad | = t_\nu.$$

Порядок ґрупи $G_{\nu-1}$ є добутком з порядкових чисел складових субституцій; порядок субституції t_ν є k_ν, бо $t_\nu{}^{k\nu} = 1$, отже порядок ґрупи $G_{\nu-1}$ є $r_{\nu-1} = k_\nu \,.\, p$.

Показчик ґруп $G_{\nu-1}$ і M є k_ν, отже перве число.

Тепер творимо дальшу частинну ґрупу з попередньої і з нової субституції

$$t_{\nu-1} = t^{\frac{p-1}{k\nu k\nu-1}} = | z \quad \varrho^{\frac{p-1}{k\nu k\nu-1}} z | \tag{13}$$

порядку $k_\nu k_{\nu-1}$, бо $t_{\nu-1}{}^{k_{\nu-1}} = t_\nu$, $t_{\nu-1}{}^{k_{\nu-1}} = t_\nu{}^{k_\nu} = 1$. Ґрупа $G_{\nu-2} = \{G_{\nu-1}, t_{\nu-1}\}$ буде стояти в рядї зложеня перед $G_{\nu-2}$; її порядок буде $r_{\nu-1} = k_{\nu-1}\ k_\nu\ p$, а показчик $k_{\nu-1}$, отже знов перве число.

Поступаючи так дальше, творимо ґрупи:

$$G_{\nu-3} = \{G_{\nu-2}, t_{\nu-2}\}\,;\ t_{\nu-2} = t^{\overset{p-1}{\overline{k_\nu k_\nu k_{\nu-1} k_{\nu-2}}}}\,;\ r_{\nu-3} = k_{\nu-2} \,.\, k_{\nu-1} \,.\, k_\nu \,.\, p\,;$$

$$G_{\nu-4} = \{G_{\nu-3}, t_{\nu-3}\}\,;\ t_{\nu-3} = t^{\overset{p-1}{\overline{k_\nu k_{\nu-1} k_{\nu-2} k_{\nu-3}}}}\,;\ r_{\nu-4} = k_{\nu-3} \,.\, k_{\nu-2} \,.\, k_{\nu-1} \,.\, k_\nu p\,;$$

$$G_1 = \{G_2, t_2\}\,;\ t_2 = t^{\overset{p-1}{\overline{k_\nu k_{\nu-1} \ldots k_2}}}\,;\ r_1 = k_2\ k_3 \ldots k_\nu\ p:$$

$$G_0 = \{G_1, t_1\}\,;\ t_1 = t \qquad ;\ r_0 = k_1 k_2 \ldots k_\nu p = p\ (p-1)$$

Остатня ґрупа є нашою ґрупою G, отже її ряд зложеня виглядає так:

$$G,\ G_1,\ G_2, \qquad G_{\nu-1},\ M,\ 1, \tag{14}$$

а ряд показчиків є

$$k_1,\ k_2,\ k_3, \qquad .,\ k_\nu,\ p,$$

отже ґрупа G є **рішима**.

§. 102. Між корінями рішимого рівнаня первого степеня панує реляція, що **двома довільними корінями можна представити всї инші**. Бо коли до обсягу R долучимо два корінї, нпр. x_α і x_β, то ґрупа G зредукуєть ся до тої підґрупи, яка не змінює тих двох корінїв, т. є до 1. Отже по тім долученю є вже знана кожда функція тих двох корінїв; всї инші корінї будуть вимірними функціями в обсягу $(R;\ x_\alpha,\ x_\beta)$:

$$x_k = \psi_k\ (x_\alpha,\ x_\beta)\ \ (k = 1,\ 2, \qquad .,\ p). \tag{15}$$

Навпаки, коли між корінями панує така реляція, то **рівнане є рішиме**: α і β мусять бути два довільні корінї. З того слїдує, що ґрупа G того рівнаня є перехідна; вона не має крім 1 инших субституцій, які не змінювали-б α і β. Отже ґрупа, яка змінює всї елементи, має $p-1$ субституцій, а є вона циклїчна, бо в противнім разї деякі її степенї не змінювали би всїх елементів. Та циклїчна ґрупа є утворена з періоди субституції

$$g = |\ z \quad z+1\ |$$

Поза тим є в G $p-1$ таких субституцій, які пересувають тільки $p-1$ елементів; приймім, що субституція t не змінює елемента x_p, отже мусить бути $t^{-1} s t = s^\alpha$, т. зн., що t викликує таку зміну:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & & x_p \\ x_\alpha & x_{2\alpha}. & & x_p \end{pmatrix}$$

Такою субституцією є

$$t = | u \quad \alpha u$$

Отже ґрупа G є ідентична з нашою рішимою ґрупою.

Рівнаня першого степеня, які мають ту прикмету, що кождий з корінів можна представити як вимірну функцію двох котрих небудь инших, називають ся рівнанями Galois*). Кожде рішиме рівнане першого степеня є рівнанем Galois. Рівнаня Абеля є спеціяльним родом тих рівнань.

Коли в обсягу R є два коріні рівнаня (1), нпр. x_α і x_β дійсні, то з (15) слїдує, що всї инші коріні мусять бути дїйсні. Коли-ж маємо до дїла з одним сполученим (миимим) корінем, нпр. x_α, то одержимо всї злучені коріні з виїмком одного. Отже рівнане першого степеня має або один або всї коріні дїйсні.

§. 104. Тепер займемо ся розвязкою рівнаня першого степеня. Утворім ресольвенту Lagrange'а для рівнаня (1):

$$\xi = x_1 + \omega^2 x_3 + \ldots + \omega^{p-1} x_p;$$

для субституції g вона перейде в $\xi\omega^{-1}$, отже циклїчна функція $\xi^p = \varphi_1$ буде незмінна для аритметичної ґрупи M. Инші субституції ґрупи G переведуть φ_1 в спряжені вартости: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \qquad \varphi_k$. Виконуючи серед функцій φ субституції ґрупи G на корінях x, одержимо такі переміни вартостий φ, які дадуть ґрупу Γ, ізоморфну з ґрупою G; вона буде належати до рівнаня

$$F(\varphi) = \prod_{i=1}^{k} (\varphi - \varphi_i) = 0. \tag{16}$$

Рівнане (16) є циклїчне, бо Γ є циклїчною ґрупою. Коли уложимо субституції ґрупи G в таблицю

$$\begin{array}{lllllll} 1, & g,\circ & g^2, & g^3, & & & g^{p-1}, \\ t, & gt, & g^2t. & g^3t, & & & g^{p-1}t, \\ t^2, & gt^2, & g^2t^2, & g^3t^2, & & & g^{p-1}t^2, \end{array}$$

то до кождого рядка буде належати одна вартість функції φ:

$$\varphi_1 = \varphi, \ (\varphi)_t = \varphi_2, \ (\varphi)_{t_2} = \varphi_3, \qquad ., \ (\varphi)_{t^{k-1}} = \varphi_k. \tag{17}$$

---

*) Netto, Substitutionentheorie, стр. 226.

Субституції ґрупи Γ можуть пересувати величини φ тільки циклічно, бо субституції $t^{\lambda}g^{\alpha}$ мають для всіх λ форму $g^{\alpha\varrho^{\lambda}}t^{\lambda}$, отже ряд функцій

$$\varphi_{t^{\beta}g^{\alpha}},\ \varphi t^{\beta+1}g^{\alpha}, \qquad\quad ,\ \varphi t^{k\beta-1}g^{\alpha}$$

є ідентичний з рядом

$$\varphi_{\alpha},\ \varphi_{\beta-1} \qquad\quad ,\ \varphi_{k\beta-1}=\varphi_{\beta-1},$$

т. зв., що ґрупа Γ є дійсно циклічна. Проте розвязка рівнаня степеня p зводить ся до розвязки двох рівнань:

1. циклїчного степеня $p-1$ або $\frac{p-1}{\sigma}$, де σ є дїльником числа $p-1$, і

2. циклїчного степеня p.

§. 104. Розходить ся нам ще о означенє форми, яку мають мати коріні рішимого рівнаня степеня p. Напишім ті коріні в такій формі:

$$\left.\begin{aligned}
x_1&=G_0+\sqrt[p]{R_1}+\sqrt[p]{R_2}+\sqrt[p]{R_3}+\ldots+\sqrt[p]{R_{p-1}},\\
x_2&=G_0+\omega\sqrt[p]{R_1}+\omega^{\varrho}\sqrt[p]{R_2}+\omega^{\varrho^2}\sqrt[p]{R_3}+\ldots+\omega^{\varrho^{p-1}}\sqrt[p]{R_{p-1}}\\
x_3&=G_0+\omega^2\sqrt[p]{R_1}+\omega^{2\varrho}\sqrt[p]{R_2}+\omega^{2\varrho^2}\sqrt[p]{R_3}+\ldots+\omega^{2\varrho^{2p-1}}\sqrt[p]{R_{p-1}},\\
\\
x_p&=G_0\,\omega^{p-1}\sqrt[p]{R_1}+\omega^{(p-1)\varrho}\sqrt[p]{R_2}+\omega^{(p-1)\varrho^2}\sqrt[p]{R_3}+\ldots+\omega^{(p-1)\varrho^{p-1}}\sqrt[p]{R_{p-1}},
\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

де $\sqrt[p]{R_i}$ мають такі значіня:

$$\sqrt[p]{R_1}=V_1,\ \sqrt[p]{R_2}=G_{\varrho}V_1^{\varrho},\ \sqrt[p]{R_3}=G_{\varrho_2}V_1^{\varrho^2}$$

взагалї

$$\sqrt[p]{R_{\lambda}}=G_{\varrho}{}^{\lambda-1}V_1^{\varrho^{\lambda-1}}\quad(\lambda=1,\ 2,\qquad p\quad 1).\qquad(19)$$

З (18) слїдує:

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt[p]{R_1}&=\frac{1}{p}\left[x_1+\omega^{-1}x_2+\omega^{-2}x_3+\ldots+\omega x_p\right].\\
\sqrt[p]{R_2}&=\frac{1}{p}\left[r_1+\omega^{-\varrho}x_2+\omega^{-2\varrho}x_3+\ldots+\omega^{\varrho}x_p\right],\\
\sqrt[p]{R_3}&=\frac{1}{p}\left[x_1+\omega^{-\varrho^2}x_2+\omega^{-2\varrho^2}x_3+\ldots+\omega^{\varrho^2}x_p\right],
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

отже взагалі:

$$\sqrt[p]{R_\lambda}=\frac{1}{p}\left[x_1+\omega^{-\varrho^{\lambda-1}}x_2+\omega^{-2\varrho^{\lambda-1}}x_3+\ldots+\omega^{\varrho^{\lambda-1}}x_p\right]. \quad (20')$$

Субституція g переводить $\sqrt[p]{R_\lambda}$ в $\omega^{\varrho^{\lambda-1}}\sqrt[p]{R_\lambda}$, отже зовсім не змінює величин $R_1, R_2,$ R_{p-1}; вони є проте циклїчними функціями корінів $x_1, x_2,$., x_p. Зате субституція

$$t^{-1}=|\, z \quad \varrho^{-1}z \quad =|\, z \quad \varrho^{p-2}z \quad | \qquad (21)$$

переводить кожде $\sqrt[p]{R_\lambda}$ в $\omega^{-\varrho^{\lambda}+\varrho^{\lambda-}}\sqrt{R_{\lambda+1}}$, отже пересуває циклїчно величини R_λ.

§. 105. Утворім тепер функцію *).

$$Q=\sqrt[p]{R_1}\sqrt[p]{R_{p-1}}+\sqrt[p]{R_2}\sqrt[p]{R_{p-2}}+\sqrt[p]{R_3}\sqrt[p]{R_{p-3}}+\ldots+\sqrt[p]{R_{\frac{p-1}{2}}}\sqrt[p]{R_{\frac{p+1}{2}}}. \quad (22)$$

Отся функція належить до ґрупи G, бо кожда субституція переведе $\sqrt[p]{R_1}$ в $\omega\sqrt[p]{R_1}$, а $\sqrt[p]{R_{p-1}}$ в $\omega^{-1}\sqrt[p]{R_{p-1}}$, т. зн. не змінить добутка $\sqrt[p]{R_1}\;\sqrt[p]{R_{p-1}}$; так само не змінить вона всіх инших додайників суми Q. — Подібно субституція t^{-1} переведе в себе циклїчно додайники тої суми. Звідси слїдує, що функція Q є вимірна в сочинниках рівнаня (1). Отсю функцію можемо дїйсно обчислити.

Маємо:

$$\sqrt[p]{R_1}=\frac{1}{p}\left[x_1+\omega^{-1}x_2+\omega^{-2}x_3+\ldots+\omega^{-(k-1)}x_k+\ldots+\omega^{-(l-1)}x_l+\ldots+x_p\right]$$

$$\sqrt{R_{p-1}}=\frac{1}{p}\left[x_1+\omega x_2+\omega^2x_3+\ldots+\omega^{k-1}x_k+\ldots+\omega^{l-1}x_l+\ldots+\omega^{p-1}x_p\right].$$

Ті рівнаня множимо одно другим. Наперед множимо члени так, як вони стоять під собою, а опісля збираємо добутки о рівних показчиках в суми. Впровадьмо скорочене:

$$\omega^k+\omega^l=(k,\ l);$$

тепер маємо:

$$\begin{aligned}p^2\sqrt[p]{R_1}\sqrt[p]{R_{p-1}}=\Sigma x_i{}^2+(1,-1)x_1x_2+(2,-2)x_1x_3+\ldots+(p-1,\ 1-p)x_1\ \ x_p\\ +(1,-1)x_2x_3+\ldots+(p-2,\ 2-p)\ \ x_2\ \ x_p\\ +\ldots\qquad\qquad\\ +(1,-1)x_{p-1}x_p,\ \ x_2\ \ x_p\end{aligned}$$

---

*) J. Dolbnia, Sur la forme plus précise des racines des équations algêbriques resolubles par radicaux. — Darboux Bull. des sc. math. (2). XVIII/1. 1894. стр. 132.

т. зн.

$$\sqrt[p]{R_1}\sqrt[p]{R_{p-1}}=\frac{1}{p^2}\Big[\Sigma x_i{}^2+\Sigma(k-l,\ l-k)x_k x_l\Big]\ (k\not\equiv l\ (mod.\ p).\ (23)$$

Виконаймо на тім рівнаню субституцію t^{-1}; вона переведе ліву сторону в другий член суми Q. t^{-2} переведе її в третій член і т. д., а на правій стороні повстануть такі зміни:

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt[p]{R_1}\sqrt[p]{R_{p-1}}&=\frac{1}{p^2}\Big[\Sigma x_i{}^2+\Sigma(k-l,\ l-k)x_k x_l\Big],\\
\sqrt[p]{R_2}\sqrt[p]{R_{p-2}}&=\frac{1}{p^2}\Big[\Sigma x_i{}^2+\Sigma(k\ \ l,\ l\ \ k)\,x_{k\varrho^{p-2}}x_{l\varrho^{p-2}}\Big]\\
\sqrt[p]{R_3}\sqrt[p]{R_{p-3}}&=\frac{1}{p^2}\Big[\Sigma x_i{}^2+\Sigma(k-l\ \ l-k)\,x_{k\varrho^{p-3}}x_{l\varrho^{p-3}}\Big]\\
\\
\overline{\quad}_{\frac{p-1}{2}}\sqrt[p]{R_{\frac{+1}{2}}}&=\frac{1}{p^2}\Big[\Sigma x_i{}^2+\Sigma(k-l,\ l-k)x_{k\varrho^{\frac{p+1}{2}}}x_{\ l\varrho^{\frac{p+1}{2}}}x\Big]
\end{aligned}\right\}\ (24)$$

Додаймо всї ті вираженя:

$$Q=\frac{p-1}{2p^2}\sum x_i{}^2+\frac{1}{p^2}\sum(k-l,\ l-k)\sum_{\lambda=1}^{\frac{p-1}{2}}x_{k\varrho^{p-\lambda}}x_{l\varrho^{p-\lambda}}.\quad(25)$$

Сочинники рівних добутків $x_k x_l$ не можуть бути рівні; коли-б сочинники при $(m,-m)$ в членах

$$\sqrt[p]{R_\alpha}\sqrt[p]{R_{p-\alpha}}\ \text{і}\ \sqrt[p]{R_\beta}\sqrt[p]{R_{p-\beta}}$$

були рівні, т. зн.

$$x_\alpha x_{\alpha-m\varrho^{1-\alpha}}=xx_{\alpha\ \alpha-m\varrho^{1-\beta+\alpha}},$$

то з того виходило би $\beta\equiv 2\alpha$ $(mod.\ p)$, а се неможливе, коли $\alpha\leqq\frac{p-1}{2}$, $\beta\leqq\frac{p-1}{2}$.

Так само неможлива рівність сочинників при $(k-l,\ l-k)$, т. зн., Неможлива реляція

$$x_{k\varrho^{p-\lambda}}x_{l\varrho^{p-\lambda}}=x_{(k+m)\varrho^{p-\mu}}x_{(l+m)\varrho^{p-\mu}},\ (m\neq 0).$$

Тут можливі такі дві евентуальности:

$$\left.\begin{aligned}1.\ k\varrho^{p-\lambda}&\equiv(k+m)\varrho^{p-\mu},\\ l\varrho^{p-\lambda}&\equiv(l+m)\varrho^{p-\mu},\end{aligned}\right\}\ (mod.\ p.);$$

З них виходило би

$$(k-l)\ \varrho^{p-\lambda} \equiv (k-l)\varrho^{p-\mu}\ (mod.\ p\ ),$$

т. зн. мусіло би бути $\lambda \equiv \mu$ $(mod.\ p-1)$, а се не можливе.

$$\left.\begin{aligned} 2.\ k\varrho^{p-\lambda} &\equiv (l+m)\varrho^{p-\mu} \\ l\varrho^{p-\lambda} &\equiv (k+m)\varrho^{p-\mu} \end{aligned}\right\}\ (mod.\ p.),$$

або $\varrho^{\lambda} + \varrho^{\mu} \equiv 0$ $(mod.\ p.)$, т. зн. $\varrho^{\lambda} \equiv p - \varrho^{\mu}$, а се також неможливе на основі дефініції величини Q. З того слїдує, що всї сочинники в сумах (25) є ріжні поміж собою.

Обчислїм тепер суму сочинників кождого члена $x_k x_l$

$$\Sigma(k-l,\ l-k) = (1,-1) + (2,-2) + \ldots + \left(\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\right) = -1,$$

отже

$$Q = \frac{p\ \ 1}{2p^2}\sum x_i^{\ 2} - \frac{1}{p^2}\sum x_k x_l, \tag{26}$$

т. зн., що Q є величиною, вимірною в сочинниках рівнаня (1). Звідси слїдує, що при помочи величини Q можемо представити вимірно корінї рівнаня (1).

§. 106. Творім тепер дальше такі функції при помочи величини ε, даної рівнанем:

$$\varepsilon^{\frac{p-1}{2}} = 1\,;$$

$$\left.\begin{aligned}
Q_1 = \Big(&\sqrt[p]{R_1}\sqrt[p]{R_{p-1}} + \varepsilon\sqrt[p]{R_2}\sqrt[p]{R_{p-2}} + \varepsilon^2\sqrt[p]{R_3}\sqrt[p]{R_{p-3}} + \ldots \\
&+ \varepsilon^{\frac{p-1}{2}}\sqrt[p]{R_{\frac{p-1}{2}}}\sqrt[p]{R_{\frac{p+1}{2}}}\Big)^{\frac{p-1}{2}}, \\
Q_2 = \Big(&\sqrt[p]{R_1}\sqrt[p]{R_{p-1}} + \varepsilon^2\sqrt[p]{R_2}\sqrt[p]{R_{p-2}} + \varepsilon^4\sqrt[p]{R_3}\sqrt[p]{R_{p-3}} + \ldots \\
&+ \varepsilon^{\frac{p-5}{2}}\sqrt[p]{R_{\frac{p-1}{2}}}\sqrt[p]{R_{\frac{p+1}{2}}}\Big)^{\frac{p-1}{2}}, \\
Q_{\frac{p-3}{2}} = \Big(&\sqrt[p]{R_1}\sqrt[p]{R_{p-1}} + \varepsilon^{\frac{p-3}{2}}\sqrt[p]{R_2}\sqrt[p]{R_{p-2}} + \varepsilon^{\frac{p-5}{2}}\sqrt[p]{R_3}\sqrt[p]{R_{p-1}} + \ldots \\
&+ \varepsilon\sqrt[p]{R_{\frac{p-1}{2}}}\sqrt[p]{R_{\frac{p+1}{2}}}\Big)^{\frac{p-1}{2}};
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

всї вони незмінні для ґрупи G, бо субституція g не змінить зовсїм додайників тих сум, а t^{-1} пересуне їх тільки циклїчно серед тої самої суми, так що надчисельні сочинники ε^{i} відпадуть при степенованю. З того слїдує, що всї ті величини Q_i можна представити вимірно величиною $Q = c$.

Доберім до тих рівнань ще

$$a = \sqrt[p]{R_1}\sqrt[p]{R_{p-1}} + \sqrt[p]{R_2}\sqrt[p]{R_{p-2}} + \dots + \sqrt[p]{R_{\frac{p-1}{2}}}\sqrt[p]{R_{\frac{o+1}{2}}}$$

і розвяжім їх як лїнійну систему рівнань з огляду на добутки величин R, то се дасть:

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt[p]{R_1}\sqrt[p]{R_{p-1}} &= \frac{2}{p-1}\Big(a + \sqrt[\frac{p-1}{2}]{Q_1} + \sqrt[\frac{p-1}{}]{Q_2} + \dots + \sqrt[\frac{p-1}{2}]{Q_{\frac{p-3}{2}}}\Big)\\
\sqrt[p]{R_2}\sqrt[p]{R_{p-2}} &= \frac{2}{p-1}\Big(a + \varepsilon^{-1}\sqrt[\frac{p-1}{2}]{Q_1} + \varepsilon^{-}\sqrt[\frac{p-1}{2}]{Q_2} + \dots \varepsilon^{-\frac{p-}{2}}\sqrt[\frac{3p-1}{2}]{Q_{\frac{p-1}{2}}}\Big),\\
\sqrt[p]{R_{\frac{p-1}{}}}\sqrt[p]{R_{\frac{p-1}{2}}} &= \frac{2}{p-1}\Big(a + \varepsilon^{-p\cdot}\sqrt{Q_1} + {}^{-\frac{\cdot\,-5}{2}}\sqrt[\frac{i}{\cdot}]{Q_2} + \dots + {}^{\cdot\,1}\sqrt[\frac{p-1}{}]{Q_{\frac{p-3}{2}}}\Big)
\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

Вираженя Q_i є вимірними функціями величини a.

§ 107. Тепер треба ще обчислити добутки $\sqrt[p]{R_\lambda}\sqrt[p]{R_{p-\lambda}}$.

Сума

$$b = (R_1 + R_{p-1}) + (R_2 + R_{p-2}) + \dots + (R_{\frac{p-1}{2}} + R_{\frac{p+1}{2}}) \qquad (29)$$

є функцією, яка належить також до ґрупи G, отже є знаною величиною. Так само функції

$$L_i = \Big[(R_1 + R_{p-1}) + \varepsilon^{i}(R_2 + R_{p-2}) + \dots + \varepsilon^{\frac{p-1}{2}i}(R_{\frac{p-1}{2}} + R_{\frac{p+1}{2}})\Big]^{\frac{p-1}{2}} \quad (30)$$

$$\left(i = 1,\ 2, .\quad ., \frac{p-3}{2}\right)$$

мають G за ґрупу, отже є вимірними функціями величини b. З (29) і (30) маємо:

$$R_1+R_{p-1}=\frac{2}{p-1}\left(b+\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_1}+\varepsilon^{-\lambda}\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_2}+\ldots\varepsilon^{\frac{p-3}{2}}\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_{\frac{p-1}{2}}}\right)$$

взагалі:

$$R_\lambda+R_{p-\lambda}=\frac{2}{p-1}\left(b+\varepsilon_{-}\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_1}+\varepsilon^{-\lambda}\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_2}\ldots+\varepsilon^{-}+\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_{\frac{p-3}{2}}}\right), \quad (31a)$$

$$\left(\lambda=1,\ 2,\ \ldots,\frac{p-1}{z}\right).$$

З (28) і (30) обчисляємо чергою R_1 і R_{p-1}, і R_2 і R_{p-2} і т. д.

Оба перші рівнаня дадуть R_1+R_{p-1} і $R_2\ R_{p-1}$, отже ті величини знаходимо як корінї квадратного рівнаня:

$$t^2-\frac{2}{p-1}\left(b+\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_1}\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_1}+\ldots+\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_{\frac{p-3}{2}}}\right)t+\left(\frac{2}{p-1}\right)^p\left(a+\sqrt[\frac{p-1}{2}]{Q_1}+\ldots\right.$$

$$\left.+\sqrt[\frac{p-1}{2}]{Q_{\frac{p-3}{2}}}\right)^p=0, \quad (31)$$

отже:

$$\left.\begin{aligned}
&R_1=\frac{1}{p-1}\left(b+\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_1}+\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_2}+\ldots\right)+\\
&+\ldots+\sqrt{\frac{1}{(p-1)^2}\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_1}+\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_2}+\ldots-\left(\frac{2}{p-1}\right)^p\left(a+\sqrt[\frac{p-1}{2}]{Q_1}+\ldots+\right)}\\
&R_{p-1}=\frac{1}{p-1}\left(b+\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_1}\sqrt[\frac{p-1}{2}]{}+\ldots\right),\\
&-\sqrt{\frac{1}{(p-1)^2}\left(b+\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_2}+\sqrt[\frac{p-1}{2}]{L_2}+\ldots\right)-\left(\frac{2}{p-1}\right)^p\left(a+\sqrt[\frac{p-1}{2}]{Q_1}+\ldots\right)^n}
\end{aligned}\right\}(32)$$

На тій самій дорозї обчислимо всі инші R. Знаючи вже всі R, вертаємо до x, і таким чином маємо розвязане рівнане (1).

XII. Рішимі рівнаня степеня p^2.

§. 108. Другою квестією в загальнім проблємі розвязки рівнань v_1 є рішимі рівнаня і ґрупи степеня p^2.

Нехай буде дане рішиме рівнанє первісне степеня p^2

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

з ґрупою G. Ґрупа G є зложена, а остатнїм членом її ряду мусить бути **аритметична Абелева ґрупа** M, утворена з субституцій

$$g = | \, h, k \quad h + \alpha, k + \beta \, | \; (mod. \; p), \qquad (2)$$

які можемо представити як добутки з односторонних аритметичних субституцій

$$g = g_1^{\alpha} g_2^{\beta}, \; (\alpha, \beta = 0 \; 1, \qquad ., p - 1) \qquad (3)$$

де

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= | \, h, k \; h + 1, k \, |, \\ g_2 &= | \, g, k \; h, k + 1 \, |. \end{aligned} \right\} \qquad (3a)$$

Прочі субституції ґрупи G **є ґеометричні, бо тільки ті субституції можуть бути перемінні з ґрупою** M. Щоби се доказати, покажемо, що **тільки субституції лїнїйної ґрупи** (§. 43) **можуть трансформувати аритметичну ґрупу саму в себе.**

Найзагальнїйша лінійна субституція степеня p^2 має форму

$$u = | \, h, k \quad ah + bk + \alpha, ch + dh + \beta \, | \; (mod. \; p). \qquad (4)$$

Тепер шукаємо такої субституції τ, щоби було

$$\tau^{-1} M \tau = M, \qquad (5)$$

як того вимагає наше твердженє. Кожду субституцію показчиків h, k можемо представити як функцію тих величин, уживаючи до тої цїли **інтерполяційного взору** Lagrange'а:*)

$$\tau = | \, h, k \quad \varphi(h, k), \psi(h, k) \, | \qquad (6)$$

Ґрупа M складаєть ся з субституцій g, отже рівнанє (5) можемо написати також так:

$$\tau^{-1} g \tau = \tau^{-1} g_1^{\alpha} \tau . \tau^{-1} g_2^{\beta} \tau = (\tau^{-1} g_1 \tau)^{\alpha} . (\tau^{-1} g_2 \tau)^{\beta} = g' \qquad (5a)$$

т. зн., маємо знайти таке τ, щоби $\tau^{-1} g_1 \tau$ і $\tau^{-1} g_2 \tau$ були опять аритметичними субституціями:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \tau^{-1} g_1 \; \tau = g_1^{\gamma} g_2^{\delta} \\ \tau_2 &= \tau^{-1} g_2 \, \tau = g_1^{\varepsilon} g_2^{\zeta}. \end{aligned} \right\} \qquad (7)$$

---

*) Netto, Algebra, II. стр. 329.

Субституція τ^{-1} переводить $\varphi\ (h,\ k)$ в h_1, субституція g_1 переводить h в $h+1$, а τ переводить h в $\varphi\ (h,\ k)$, отже $h+1$ перейде в $\varphi\ (h+1,\ k)$, т, зн., що під впливом τ_1 перейде $\varphi\ (h,\ k)$ в $\varphi(h+1,\ k)$; подібно τ_2 переведе $\psi\ (h,\ k)$ в $\psi\ (h,\ k+1)$.

Коли τ_1 і τ_2 мають бути аритметичними субституціями, то кождий показчик, представлений функціями φ і ψ, мусить збільшити ся о якесь стале число:

$$\left.\begin{array}{l|l} \varphi(h+1,\ k)=\varphi(h,\ k)+a', & \psi(h+1,\ k)=\psi(h,\ k)+c'. \\ \varphi(h,k+1)=\varphi(h,\ k)+b', & \psi(h,\ k+1)=\psi(h,\ k)+d'. \end{array}\right\}$$

Приймаючи, що

$$\varphi\ (0,\ 0)=m,\ \psi(0,\ 0)=n,$$

одержимо, коли будемо зменшувати показчики h і k чергою о 1:

$$\varphi(h,\ k)=a'h+b'k+m,$$
$$\psi(h,\ k)=c'h+d'k+n,$$

отже субституція τ є лінїйна. Наше тверджене є проте доказане, З того слїдує, що рішима ґрупа G є або лїнїйною ґрупою, або підґрупою лїнїйної ґрупи.

§. 109. Рішимі ґрупи висших (т. є зложених) степенів називає Weber*) рівно-ж метациклїчними. Вони ріжнять ся тим від метациклїчних ґруп першого степеня, що тамті є ідентичні з лїнїйними ґрупами степеня p, а тут можуть бути метациклїчні ґрупи тільки їх підґрупами.

Метациклїчні ґрупи степеня p^2 перший сконструував C. Jordan**); він виказав, що є три типи таких ґруп. Його метода лежить в тім, що перше зводить ся лінїйні субституції до найпростїйшої форми (канонїчної, Jordan; нормальної, Netto), а опісля добирає ся до Абелевої ґрупи M такі субституції, які є з собою перемінні по субституції попередньої ґрупи. Таким чином доходить Jordan вкінці до своєї найзагальнїйшої ґрупи.

Найпростїйша форма лїнїйних — а саме ґеометричних — субституцій є та, що така субституція переводить кожду функцію показчиків в її многократь***).

---

*) Weber, Algebra I, стр. 647.

**) C. Jordan, Sur la résolution algébrique des équations du degré p^2 (p—un premier impair) Liouville's Journal, (2):XIII. 1868, стр. 111—135. — Netto, Algebra II, стр. 444.

***) C. Jordan, Traité de substitutions et des équations algébriques, Paris 1870, стр. 114.

Нормальна форма субституції

$$t = | \, h, k \quad ah + bk, \; ch + dk \, | \quad (mod.\ p) \qquad (8)$$

переведе функцію

$$\varphi(h, k) = mh + nk \qquad (9)$$

в її многократь

$$\varrho\varphi = \varrho(mh + nk);$$

t переводить φ в

$$\varphi_t = m(ah + bk) + n(ch + dk) = \varrho\varphi,$$

отже величини m, n і ϱ мусять сповнювати отсі конґруенції

$$\left.\begin{matrix} m(a - \varrho) + nc \equiv 0 \\ mb + n(d - \varrho) \equiv 0 \end{matrix}\right\} \; (mod.\ p) \qquad (10)$$

Елїмінуючи звідси m і n, одержуємо т. зв. **характеристичну конґруенцію** (Jordan)

$$\begin{vmatrix} a - \varrho, & c \\ b, & d - \varrho \end{vmatrix} \equiv 0 \quad (mod.\ p), \qquad (11)$$

яка має три ріжні можливі розвязки, в міру того, чи її діскрімінанта

$$D = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 + 4bc \qquad (12)$$

є через p подїльна, є квадратним останком або не-останком $(mod.\ p)$. Перша евентуальність дає два рівні корінї конґруенції (11), друга два ріжні корінї, дїйсні, а третя два спряжені корінї.

§. 110. **Перша можливість.** $D \equiv 0$ $(mod.\ p)$. Тоді конґруенція (11) має одну розвязку ϱ, т. зн., що істнує тільки **одна** така функція φ показчаків, яка переходить в $\varrho\varphi$ під впливом субституції t; другої такої функції нема. Пишучи ту функцію на місцї показчика h, одержимо

$$t = | \, \varphi, \psi \quad \varrho\varphi, \; \psi_1 + \psi_2 \, |$$

одначе за φ і ψ можемо написати h і k:

$$t = | \, h, k \quad \varrho h, \; ch + dk \, |,$$

т. зн. маємо $a = \varrho$, $b = 0$. Вставивши ті вартости в (12), одержуємо: $(\varrho - d)^2 \equiv 0$ $(mod.\ p)$, отже $d = \varrho$, проте **перша нормальна форма субституції** t є

$$t = | \, h, k \quad \varrho h, \; ch + \varrho k \, | \qquad (13)$$

Друга можливість. D є квадратним останком $(mod.\ p)$, т. зн. конґруенція

$$z^2 \equiv D \; (mod.\ p)$$

є рішима в цїлих числах. Тодї істнують дві дїйсні розвязки конґруенції (11) $\varrho_1 = a$, $\varrho_2 = b$, так що можемо написати

$$t = | h, k \quad ah, bk | ; \qquad (14)$$

се друга нормальна форма субституції t.

Третя можливість. D є квадратним не-останком ($mod.\ p$), т. зн. конґруенція $z^2 \equiv D$ ($mod.\ p$) не є рішима; тоді маємо дві спряжені розвязки, так що в (14) можемо написати:

$$a = a_1 + b_1 j,$$
$$b = a_1 - b_1 j,$$

де $j^2 \equiv e$ ($mod.\ p$); e — не-останок ($mod.\ p$). Порівнуючи в субституції (14) дійсні і мнимі части з собою, одержимо як третю нормальну форму субституцію

$$t = | h, k \quad ah + bek, bh + ak | . \qquad (15)$$

§. 111. Тепер шукаємо ряду зложеня для ґрупи G, яка має складати ся з субституцій g і нормальних форм субституції t. Остатнім членом ряду буде Абелева ґрупа M порядку p^2. Дальшим членом L буде така ґрупа, яка побіч M буде містити в собі самі переміпні субституції t. Отся ґрупа мусить напевно складати ся з субституцій форми

$$s_a = | h, k \quad ah, ak | \ (a = 1, 2, \quad ., p - 1) ; \qquad (16).$$

ті субституції можна назвати рівнобічними (gleichseitig). Крім них може та ґрупа мати ще инші субституції, загальнїйшої форми t.

Ще висший член одержимо, коли до згаданої ґрупи L доберемо такі субституції, які з собою перемінні тільки по субституції попередньої ґрупи. Таким чином вичерпаємо цїлу ґрупу.

Шукаючи ґрупи L, мусимо розріжнити дві можливости:

1. субституціям t не накладаємо нїякого обмеженя (можливість A);

2. за субституції t беремо тільки рівнобічні s_a (можливість $Б$).

Можливість А.

§. 112. Перша нормальна форма. Субституція

$$t = | h, k \quad \varrho h, ch + \varrho k | \qquad (12)$$

має бути перемінна з кождою иншою субституцією форми

$$\tau = | h, k \quad \alpha h + \beta k, \gamma h + \delta k | ,$$

т. зн. має бути

$$t\tau = \tau t.$$

Звідси слїдує: $\beta = 0$, отже

$$\tau = | h, k \quad \alpha h, \gamma h + \delta k | . \qquad (17)$$

Возьмім субституцію σ з висшої ґрупи K,

$$\sigma = | \, h, \; k \quad mh + nk, \; qh + rk \, | ,$$

то вона мусить трансформувати субституцію t в якесь τ, бо $K^{-1}LK = L$, т. зн. $\tau\sigma = \sigma\tau$. Звідси слїдує: $n = 0$, отже

$$\sigma = | \, h, \; k \quad mh, \; qh + rk \, | .$$

Бачимо, що всї субституції ґрупи G мають форму τ. Така ґрупа є, правда, метациклїчна, але не є первісна, бо можна корінї x_{hk} рівнаня (1) роздїлити на p кляс по p членів так, що перші показчики будуть в кождій клясї рівні. Тодї субституції t не будуть могли роздїлити тих кляс, отже ґрупа G є непервісна.

§. 116. **Друга нормальна форма.** Возьмім субституцію

$$t = | \, h, \; k \quad ah, \; bk \, | , \qquad (14)$$

яка має бути перемінна з кождою иншою ґеометричною

$$\tau = | \, h, \; k \quad \alpha h + \beta k, \; \gamma h + \delta k \, | .$$

З $t\tau = \tau t$ слїдує $a\beta = b\beta$ і $a\gamma = b\gamma$. a і b є ріжні від 0, бо детермінанта субституції мусить бути $\equiv|\equiv 0$; отже мусить бути $\beta = 0$, $\gamma = 0$, т. зн., що субституція τ є тої форми, що t.

Субституція σ з ґрупи K мусить трансформувати кожде t в якесь τ; беручи знов

$$\sigma = | \, h, \; k \quad mh + nk, \; qh + rk \, | ,$$

одержуємо з $t\sigma = \sigma\tau$:

$$am = \alpha m, \; bq = \alpha q \, ; \; an = \delta n, \; br = \delta r.$$

Ті вимоги можна сповнити двома ріжними способами:

$$1. \; n = 0, \; q = 0 \, ; \; 2. \; m = 0, \; r = 0.$$

Перший спосіб дає

$$\sigma_1 = | \, h, \; k \quad mh, \; rk \, | , \qquad (18)$$

субституцію форми t, другий

$$\sigma_2 = | \, h, \; h \quad nk, \; qh \, | \, ;$$

ту другу субституцію можна звести до простїйшої форми, комбінуючи її з відповідним σ_1:

$$\sigma_1^{-1} = | \, h, \; k \quad qh, \; nk \, |^{-1} = | \, qh, \; nk \quad h, \; k \, | \, ;$$

се дає:

$$\sigma_1 = | \, h, \; k \quad k, \; h \, | . \qquad (19)$$

Таку субституцію, яка тільки переставлює показчики, можна назвати транспонуючою (transponierende Subst.).

Тими субституціями вичерпали ми цїлу ґрупу G. Маємо отже перший тип загальних, первісних, метациклїчних ґруп степеня p^2; назвемо їх ґрупами G_{I}. Ґрупа G_{I} складає ся з таких субституцій:

$g = g_1{}^{\alpha} g_2{}^{\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, p-1)$; порядок p^2;

$\sigma_1 = | h, k \quad ah, bk |$ $(a, b = 1, 2, \ldots, p-1)$; порядок $(p-1)^2$;

$$\sigma_2 = | h, k \quad k, h |; \text{ порядок } 2;$$

отже порядок ґрупи G_{I} є

$$r_{\mathrm{I}} = 2(p-1)^2 p^2. \tag{20}$$

§. 114. **Третя нормальна форма.** Вибираємо найвигіднійшу форму субституції t

$$t = | h, k \quad ah + bek, bh + ak |; \tag{15}$$

перемінна з нею субституція τ має таку саму форму

$$\tau = | h, k \quad \alpha h + \beta ek, \beta h + \alpha k |,$$

а субституція σ з висшої ґрупи K

$$\sigma_1 = | h, k \quad mb + nek, nh + mk | \tag{21}$$

або

$$\sigma_2 = | h, k \quad k, -h |. \tag{22}$$

Порядок субституції σ_1 є p^2-1, бо зі всїх можливих комбінацій m і n треба виключити $m = n = 0$.

Тут маємо отже **другий тип** шуканих ґруп, G_{II}. Вони складають ся з

$g = g_1{}^{\alpha} g_2{}^{\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$; порядок p^2;

$\sigma_1 = | h, k \; ah + bek, bh + ak |$ $(a, b = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$,

$a = b = 0$ виключене: e — не-останок $(mod.\ p))$; порядок p^2-1;

$$\sigma_2 = | h, k \quad k, -h |; \text{ порядок } 2;$$

отже

$$r_{\mathrm{II}} = 2(p^2-1)\ p^2. \tag{23}$$

Можливість Б.

§. 115. Тут маємо шукати таких ґруп K, яких субституції є з собою перемінні по субституції форми s, отже таких t і τ, що

$$t\tau = \tau t \,.\, s_l; \tag{24}$$

ґрупа L складає ся з самих s.

Перша нормальна форма дає також непервісні ґрупи, бо з виїмком субституцій s всї инші мають вид (13).

§. 116. **Друга і третя форма** ведуть до того самого типу, бо ріжниця між ними обома виступає що йно у висшім членї ряду зложеня, понад K. Тому можемо взяти

$$t = | h, k \quad ah, bk |, \tag{14}$$

де a і b є дїйсні або спряжені (мнимі) числа. Приймаючи знов

$$\tau = | \, h, \; k \quad \alpha h + \beta k, \; \gamma h + \delta k \, | \, ,$$

одержуємо з реляції (24).

$$a\alpha = a\alpha l, \; a\beta = b\beta l; \; b\gamma = a\gamma l, \; b\delta = b\delta l.$$

Се веде знов до двох можливостий:

1. $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha\delta \neq 0$; 2. $a = 0$, $\delta = 0$, $\beta\gamma \neq 0$; перша можливість дає $l = 1$ — т. зн., що t і τ належали би до чисто перемінної ґрупи; друга дає $a = bl$, $b = al$, отже $l^2 = 1$, $l = \pm 1$; тільки вартість $l = -1$ є придатна, а з неї маємо: $\alpha = 0$, $\delta = 0$, $b = -a$. Відповідно до того є:

$$t = | \, h, \; k \quad ak, -ak \, | = | \, h, \; k \;\; ah, \; ak \, | \quad | \, h, \; k \;\; h, -k \, | \, ,$$

або в найпростійшій формі

$$t = | \, h, \; k \quad h, -k \, | \, . \qquad (25).$$

Дальше є

$$\tau = | \, h, \; k \quad \beta k, \; \gamma h \, | \, ,$$

приймаючи детермінанту тої субституції ± 1, маємо $\beta = \gamma = 1$, і

$$\tau = | \, h, \; k \quad k, \; h \, | \, . \qquad (26)$$

§. 117. Одначе ті субституції не вичерпують ще цїлої ґрупи G. Є ще такі субституції, які стоять поза ґрупою К. Назвім одну таку субституцію

$$v = | \, h, \; k \quad Ah + Bk, \; Ch + Dk \, | \, , \qquad (27)$$

то вона мусить бути з субституціями t і τ перемінна аж по рівнобічні субституції s_i. Пригляньмо ся близше тим обставинам.

Впровадимо на хвилю такі означеня: T за одну з субституцій t або τ, $[T]$ за яку небудь їх комбінацію (отже t або τ само, або $t\tau$; бо вже квадрат котрої небудь з них дає 1). Зі всїх можливих комбінацій, які одержали-б ми з трансформації субституцією v, задержимо тільки ті, в яких ліва сторона рівнаня

$$v^{-1} T v = [T] . \; s_\pi \qquad (28)$$

не приходить ще в ґрупі K; всї инші комбінації відкидаємо. Мусимо тут розріжнити такі можливости:

1. По обох сторонах рівнаня (28) є таке саме T, отже або t, або τ. Порівнуючи сочинники при h і k, маємо $AC = 0$, $BD = 0$; з огляду на те, що детермінанта субституції v

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

має бути перва супроти модулу p, мусить бути або $A = 0$, $D = 0$, $BC \neq 0$, або $B = 0$, $C = 0$, $AD \neq 0$. Обі можливости дають на правій стороні $T . s_\pi$; така субституція приходить вже в K, отже ту комбінацію треба виключити.

2. Так само мусимо виключити ще й ту можливість, що v трансформує оба T в те саме $[T]$. s_π — розуміє ся, показчик π може мати ріжні вартости. В такім разі мусіла-б субституція v трансформувати добуток $t\tau$ в $t\tau.\,s_1$, або в $\tau.\,s_1'$, або в s_1'', отже була би перемінна з $t\tau$ аж по s_1.

3. Остають ще тільки такі випадки, що v трансформує одно T в $T_1.s_\pi$, а друге T в $t\tau.s_{\pi'}$; тодї v^2 мусить трансормувати перше T в $t\tau.\,s_\varphi$, а друге T в $T_2.\,s_\varphi'$, і навпаки. Тут треба ще розріжнити, чи перше T є ідентичне з T_1 — а очивидно друге T з T_2 —, чи нї. Ті дві можливости дають одинокі нові субституції, яких ще нема в ґрупі K. Їх можна написати так:

$$v_1^{-1}tv_1=\tau s_\alpha, \qquad v_2^{-1}tv_2=t\tau s_\gamma,$$
$$v_1^{-1}\tau v_1=t\tau s_\beta; \qquad v_2^{-1}\tau v_2=ts\delta,$$

або в вигіднійшій формі

$$tv_1=v_1\tau s\alpha, \qquad tv_2=t\tau s\gamma,$$
$$\tau v_1=v_1t\tau s_\beta; \qquad \tau v_2=v_2ts\gamma. \tag{29}$$

Обчислимо тепер v_1 і v_2.

§. 118. Приймім, що шукані субституції є такі:

$$\left.\begin{aligned} v_1&=\mid h,\ k \quad Ah+Bk,\ Ch+Dk\mid, \\ v_2&=\mid h,\ k \quad \mathrm{A}h+\mathrm{B}k,\ \Gamma h+\Delta k\mid. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

З (29) одержуємо такі системи лїнійних рівнань:

$$\left.\begin{aligned} &A=\alpha B,\ B=\alpha A;\ C=-\alpha D,\ D=\alpha C; \\ &C=-\beta B,\ D=\beta A;\ A=-\beta D=\beta C; \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

і

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{A}=-\gamma\mathrm{B},\ \mathrm{B}=\gamma\mathrm{A};\ \Gamma=\gamma\Delta,\ \Delta=-\gamma\Gamma; \\ &\Gamma=\delta\mathrm{A},\ \Delta=-\delta\mathrm{B};\ \mathrm{A}=\delta\Gamma,\ \mathrm{B}=-\delta\Delta. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Ні одна з тих величин не може бути зером, бо тодї субституції або не мали би значіня, або належали би до иншої ґрупи, або врештї вели би до непервісних ґруп.

З (31) і (32) слїдує в першій мірі

$$\alpha^2=1,\ \beta^2=-1,\ \gamma^2=-1,\ \delta^2=1; \tag{33}$$

оба середнї рівнаня треба радше вважати конґруенціями з модулом p, отже вони є тодї рішимі, коли $p\equiv 1\ (mod.\ 4)$, а нерішимі, коли $p\equiv -1\ (mod.\ 4)$. Назвім j корінь конґруенції

$$j^2\equiv -1 (mod.\ 4), \tag{34}$$

і шукаймо, коли вона має дїйсну, а коли мниму розвязку.

§. 119. Перша можливість. (Форма $\mathfrak{A}$). $p\equiv 1\ (mod.\ 4)$. Конґруенцію (34) можна розвязати в дїйсних числах, отже $\beta=j$. З двовартісного $\alpha=\pm 1$ (33) маємо дві такі системи розвязок для (31):

$$1.\ A = +B,\ C = -D;\ 2.\ A = -B,\ C = +D;$$

але що вони обі виходять на одно, бо треба в данім разї переставити тільки показчики, беремо $A = B$ і $C = -D$, і маємо дальше $C = -jB$, $D = jA$. Заступаючи ще тільки в v_1 показчик k величиною λk і визначуючи λ з конґруенції
$\lambda\gamma \equiv 1$ $(mod.\ p)$ маємо

$$v_1 = | h, k \quad A(h+h),\ A(h-k) | ;$$

чинник A можемо вилучити при помочи субституції s_A, отже найпростїйша форма буде

$$v_1 = | h, k \quad h+k,\ h-k | \qquad (35)$$

Подібно обчислюємо v_2:

$$v_2 = | h, k \quad h-jk,\ h+jk | . \qquad (36)$$

Таким чином одержуємо третїй тип (форму $\mathfrak{A}$) шуканих ґруп, $\mathfrak{G}_{\text{III}}\mathfrak{A}$. В їх склад входять:

$$g = g_1^{\ \alpha} g_2^{\ \beta},\ (\alpha,\ \beta = 0,\ 1, \quad .,\ p-1);\ \text{порядок}\ p^2 - 1;$$
$$s_a = | h, k \quad ah,\ ak | ,\ (a = 1,\ 2, \quad .,\ p-1);\ \text{порядок}\ p-1;$$
$$s = | h, k \quad h, -k | ;\ \text{порядок}\ 2;$$
$$\tau = | h, k\ k, h | ;\ \text{порядок}\ 2;$$
$$v_1 = | h, k\ h+k,\ h-k | ;\ \text{порядок}\ 2;$$
$$v_2 = | h, k \quad h-jk,\ h+jk | ;\ j^2 \equiv -1\ (mod.\ p);\ \text{порядок}\ 3;$$

отже

$$r_{\text{III}}\mathfrak{A} = 3.2.2.2.(p-1).\ p^2 = 24\ (p-1)\ p^2. \qquad (37)$$

§. 120. Друга можливість (Форма $\mathfrak{B}$). $p \equiv -1$ $(mod.\ 4)$. З огляду на те, що конґруенція (34) не має дійсних корінів, представляємо субституції t і τ в иншій формі. До того надаєть ся найлїпше третя нормальна форма у видї

$$t = | h,k \quad (m+nj)h,\ (m-nj)k | ; \qquad (38)$$

тут також і показчики є злученими числами:

$$h = h' + k'j,\ k = h' - k'j;$$

се дає

$$t = | h, k\ mh - nk,\ nk + mk | . \qquad (38a)$$

Субституція τ з ґрупи K

$$\tau = | h, k\ \mu h + \nu k,\ \xi h + \pi k |$$

є з t перемінна аж по s_{I}

$$t\tau = \tau . s_{\text{I}},$$

а звідси слїдує:

$$\left.\begin{array}{l|l} m\mu - n\xi = \lambda(m\mu + n\nu), & m\xi + n\mu = \lambda\,(m\xi + n\pi), \\ m\nu - n\pi = \lambda(-n\mu + m\nu); & m\pi + n\nu = \lambda(-n\xi + m\pi). \end{array}\right\} \quad (39)$$

Отся система є однородна й лінійна у величинах μ, ν, ξ, π, отже її детермінанта мусить бути зером:

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda)\,m, & -\lambda n, & -n, & 0 \\ \lambda n, & (1-\lambda)m, & 0, & -n \\ n, & 0, & (1-\lambda)m, & -\lambda n \\ 0, & n, & \lambda n, & (1-\lambda)m \end{vmatrix} = 0.$$

З неї одержуємо рівнане для λ, m, n. Її вартість є:

$$[(1-\lambda)((1-\lambda)m^2+(1+\lambda)n^2)]^2=0; \qquad (40)$$

се можливе тільки так, що або $1-\lambda=0$, або виражене в грубшій скобції є 0. Перше не має значіня, друге дає $m=0$, і або $n=0$, або $\lambda=-1$; $n\doteq 0$ є неможливе, отже зістає тільки $\lambda=-1$. Звідси дістаємо

$$t=|\,h,\ k\quad nh, -nk\,|$$

або в найпростійшій формі

$$t=|\,h,\ k\quad h, -k\,|; \qquad (41)$$

подібно маємо, з огляду на те, що $\xi=\nu$, $\pi=-\mu$,

$$\tau=|\,h,\ k\quad \mu h+\nu k,\ \nu h-\mu k\,| \qquad (42)$$

§. 121. Реляції (29) можемо тут приміняти без застереженя. З них маємо

$$C=\alpha(A\mu+B\nu),\ D=-\alpha(A\nu-B\mu);\ A=-\alpha(C\mu+D\nu),\ B=\alpha\,(C\nu-D\mu);$$

$$A\mu+C\nu=\beta(A\nu-B\mu),\ B\mu+D\nu=-\beta(A\mu+B\nu);$$

$$A\nu-C\alpha=\beta\,(C\nu-D\mu),\ B\nu-D\mu=-\beta\,(C\mu+D\nu); \qquad (43)$$

і

$$\Gamma=\gamma(\mathrm{A}\nu-\mathrm{B}\mu),\ \Delta=-\gamma(\mathrm{A}\mu+\mathrm{B}\nu);\ \mathrm{A}=-\gamma(\Gamma\nu-\Delta\mu),$$

$$B=\gamma\,(\Gamma\mu+\Delta\nu); \qquad (44)$$

$$\mathrm{A}\mu+\Gamma\nu=-\mathrm{B}\delta,\ \mathrm{A}\nu-\Gamma\mu=-\delta\Delta;\ \mathrm{B}\mu+\Delta\nu=\mathrm{A}\delta,\ \mathrm{B}\nu-\Delta\mu=\Gamma\delta.$$

З тих двох систем маємо насамперед:

$$\alpha^2(\mu^2+\nu^2)\equiv -1\ (mod\ \ p). \qquad (45)$$

Отся конґруенція є все рішима для $p\equiv -1$ ($mod.$ 4), коли тільки поставимо $\alpha^2=1$, т. зн. $\alpha=-1$ ($\alpha=+1$ мусимо виключити). Нехай μ, ν буде довільною парою чисел, яка сповнює конґруенцію (45), то ті два числа можна поставити в субституції τ; отже тепер μ і ν не є вже довільними числами, тільки вони звязані реляцією (45).

Рівнаня (43) дають

$$v_1=|\,h,\ k\quad \mu k+(\nu+1)k,\ (\nu-1)h-\mu k\,|;\ \text{порядок } 2; \qquad (46)$$

з (44) маємо

$$v_2 = | h,\ k \quad -(1+\mu\nu)h+(\mu-\nu^2)\ k,\ (\nu+\mu^2)\ h+(\mu\nu-\mu+\nu)k\ |\ ;$$
$$\text{порядок } 3. \qquad (47)$$

Таким чином доходимо до третього типу (форма 𝔅) $G_{\text{III}\mathfrak{B}}$ шуканих ґруп:

$$
\left.
\begin{array}{c}
g = g_1^{\ \alpha} g_2^{\ \beta};\ \text{порядок } p^2;\\
s_a = |\ h,\ k\ \ ah,\ ak\ |,\ (a=1,\ 2,\ \ \ .,\ p-1);\ \text{порядок } p-1;\\
t = |\ h,\ k\ \ k,\ -h\ |\ ;\ \text{порядок } 2;\\
\tau = |\ h,\ k\ \ \mu k+\nu k,\ \nu h-\mu k\ |\ ;\ \text{порядок } 2;\\
v_1 = |\ h,\ k\ \ \mu h+(\nu+1)k,\ (\nu-1)h-\mu k\ |\ ;\ \text{порядок } 2;\\
v_2 = |\ h,\ k\ \ -(1+\mu\nu)h+(\mu-\nu^2)k,\ (\nu+\mu^2)h+(\mu\nu-\mu+\nu)k\ |\ ;\\
\text{порядок } 3;
\end{array}
\right\}
\begin{array}{c}\mu^2+\nu^2\equiv-1\\ (mod.\ p)\end{array}
$$

порядок ґрупи є рівно-ж

$$r_{\text{III}\mathfrak{B}} = 24\ (p-1)p^2.$$

§. 122. Субституції тої ґрупи τ_1, v_1 і v_2 містять в собі довільну пару розвязок конґруенції (45); длятого мусимо ще доказати, що довільність в виборі чисел μ і ν не спричинює зміни ґрупи G_{III} $\mathfrak{B}$, т. зн., що дві субституції, утворені з двох ріжних пар розвязок, μ_1, ν_1; μ_2, ν_2 можна представити взаїмно як добутки з инших субституцій тої самої ґрупи, независимих від конґруенції (45).

Тут є дві можливости:

1. Конґруенція має тільки одну пару розвязок, $|\ a\ |$ і $|\ b\ |$; з тих чисел можна утворити вісїм комбінацій:

$$\begin{array}{ccc} \mu = \pm a, & \text{і} & \mu = \pm b,\\ \nu = \pm b; & & \nu = \pm a. \end{array}$$

Всї ті комбінації дають ту саму субституцію, а ріжнять ся тільки в показчику субституції форми s. Перемінїм μ і ν з $-\mu$ і $-\nu$, або числа μ і ν з собою, і введїм скорочене:

$$\tau = |\ h,\ k\ \ \mu h+\nu k,\ \nu h-\mu k\ | = (\mu,\ \nu).$$

Тодї є:

$$\begin{array}{l} \tau' = (-\mu,\ \nu) = \tau.\ s_i,\ \text{де } i = \mu^2 - \nu^2,\\ \tau'' = (\mu, -\nu) = \tau'.\ s_{-1};\\ \tau''' = (-\mu, -\nu) = \tau.\ s_{-1}; \end{array}$$

а так само

$$\tau_1 = (\nu,\ \mu) = \tau.\ s_l,\ l = -2\mu\nu.$$

2. Конґруенція має дві ріжні пари розвязок:

$$\mu_1^{\ 2}+\nu_1^{\ 2} \equiv -1\ (mod.\ p),$$
$$\mu_2^{\ 2}+\nu_2^{\ 2} \equiv -1\ (mod.\ p).$$

Коли $\tau_1=(\mu_1,\ \nu_1)$ і $\tau_2=(\mu_2,\ \nu_2)$, то

$$\tau_2=\tau_1 . u;\ u=(a,\ b),$$

де

$$a=-\mu_1\mu_2-\nu_1\nu_2$$

$$b=\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1,$$

отже також

$$a^2+b^2\equiv -1\ (mod.\ p).$$

XIII. Метациклїчні ґрупи степеня p^2.

§. 123. Вишукавши ґрупи степеня p^2, мусимо переконати ся, чи вони відповідають своїй цїли, т. зн., чи є 1. первісні, 2. загальні, 3. метациклїчні.

Ґрупи G_{I}, G_{II}, G_{III} є *первісні*, бо нї одна з них не має прикмети, спільної всїм непервісним ґрупам, а іменно:

*Непервісна лїнійна ґрупа може мати тількі такі субституції, які переводять дїйсні функції показчиків в їх многократи**).

Доказ. Нехай буде G первісною лїнійною ґрупою. Елементи, які вона має переставлювати, можна подїлити на кляси, яких не розриває нїяка субституція з G. Ті субституції можуть або тільки пересувати елементи в нутрі одної кляси, або перемінювати кляси поміж собою. Назвім ті кляси (r'), (r''), (r'''), ., а елементи кождої з них $r_1{}'$, $r_2{}'$,...; $r_1{}''$, $r_2{}''$,...; $r_1{}'''$, $r_2{}'''$...;...

Субституції g є перехідні у всїх елементах; нехай

$$g'=\mid h,\ k\quad h+\alpha',\ k+\beta'\mid \qquad (1)$$

переводить елемент $r_1{}'$ в r'_q серед тої самої кляси, то вона не розірве кляси (r'). Можемо доказати, що g' не розірве взагалї нї одної кляси.

Нехай буде (r'') другою клясою елементів; поміж субституціями g мусить бути одна така

$$g''=\mid h,\ k\quad h+\alpha'',\ k+\beta''\mid, \qquad (2)$$

яка переводить кожде $r_i{}'$ в $r_i{}''$; отже вона переведе цїлу систему (r') в (r''). Субституція g' може пересувати елементи (r') тільки поміж собою, отже

$$g''^{-1}\ q'\,g''$$

може пересувати тільки елементи (r''). Субституції g' і g'' є перемінні, отже $g''^{-1}\ g'\ g''=g'$ буде пересувати елементи (r'') і взагалї в кождій клясі (r). З того слїдує, що така субституція не розриває нї одної кляси.

Ту прикмету може мати *тільки субституція* g' *і її степені*; всї инші субституції, нпр.

---

*) Jordan, Sur les équations du dégré p^2, стр. 128.

$$g_1 = | \, h, \; k \quad h + \alpha_1, \; k + \beta_1 \, | \, , \qquad (3)$$

можуть тільки переміщувати кляси. Конечною і достаточною умовою, щоби субституція g_1 не була степенню субституції g', є те, що конґруенції

$$\left. \begin{aligned} m\alpha' &\equiv \alpha_1 \\ m\beta' &\equiv \beta_1 \end{aligned} \right\} \; (mod. \; p) \qquad (4)$$

не можуть істнувати рівночасно, коли приймемо

$$\alpha'\beta_1 - \alpha_1\beta' \not\equiv 0 \; (mod. \; p) \, ; \qquad (4a)$$

m цїле число, $< p$.

Отже ґрупа G складаєть ся з двох родів субституцій g:

1. з g', які переставляють елементи тільки в нутрі поодиноких кляс;

2. з g_1, які пересувають кляси поміж собою.

Инакших субституцій нема в G, бо кляси як такі мусять оставати нерозірвані.

Субституції g' і g_1 є перемінні, отже ґрупа G є Абелева; кожда її субституція має форму

$$g = g'^{\eta} g_1^{\vartheta} \qquad (5)$$

Тепер шукаймо таких двох функцій показчиків, щоби g' збільшувало першу з них о s, а другої не змінювало, а g_1 навпаки. Нехай ті функції будуть

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= mh + nk, \\ k_1 &= qh + rk, \end{aligned} \right\} \qquad (6)$$

тодї мусять істнувати таки пари конґруенцій:

$$\left. \begin{aligned} m\alpha' + n\beta' &\equiv 1, \\ m\alpha_1 + n\beta_1 &\equiv 0; \end{aligned} \right\} \; (mod. \; p) \qquad (7a)$$

$$\left. \begin{aligned} q\alpha' + r\beta' &\equiv 0, \\ q\alpha_1 + r\beta_1 &\equiv 1; \end{aligned} \right\} \; (mod. \; p). \qquad (7b)$$

ті конґруенції є все рішимі, бо їх детермінанта (4a) не є 0.

Впроваджуючи ті нові показчики, маємо:

$$\left. \begin{aligned} g' &= | \, h, \; k \quad h + 1, \; k \, | \, , \\ g_1 &= | \, h, \; k \quad h, \; k + 1 \, | \, ; \end{aligned} \right. \qquad (8)$$

показчики h_1 і k_1 заступили ми старими h і k, бо се виходить на одно.

Кожда инша субституція з G,

$$t = | \, h, \; k \quad ah + bk, \; ch + dk \, | \, ,$$

трансформує

$$\left.\begin{array}{lll} g' & \text{в} & g'^{\frac{d}{\Delta}}\, g_1^{-\frac{c}{\Delta}}, \\ g_1 & \text{в} & g'^{-\frac{b}{\Delta}}\, g_1^{\frac{a}{\Delta}}; \end{array}\right\} \quad (\Delta = ad - bc \not\equiv 0)$$

трансформовані субститудії мають ті самі прикмети що первісні, отже мусить бути $b = 0$, $c = 0$, т. зн.

$$t = |\, h,\ k \quad ah,\ dk \,|\,. \tag{9}$$

Отся субститудія множить кожду дійсну функцію показчиків (6) сталим чинником; наше твердженє є проте доказане.

§. 124. Ґрупи степеня p^2 мають такі субституції, які не сповнюють наведених тут умов.

1. Ґрупа G_{I} має в собі субституцію

$$\sigma_2 = |\, h,\ k \quad k,\ h \,|\,,$$

яка не є форми (9).

2. Так само в ґрупі G_{II} є субституція

$$\sigma_1 = |\, h\ k,\ ah + bke,\ bh + ak \,|\,,$$

яка не допускає такого добору функцій h_1 і k_1, тим більше, що тут маємо до діла зі злученими величинами.

3. Субституції v_1 і v_2 в обох своїх формах є занадто скомплїковані, щоби могли виконувати таку просту переміну.

Таким чином ми доказали, що наші ґрупи не можуть бути непервісні.

§. 125. Тепер займаємо ся питанем, коли ґрупи G є загальні і ріжні поміж собою.

I. Твердженє. Кожда ґрупа G_{I} для $p = 3$ і $p = 5$ містить ся в G_{III}; так само кожда ґрупа G_{II} для $p = 3$.

Доказ. 1. G_{I}; $p = 3$. Субституція

$$u = |\, h,\ k \quad h + k,\ h - k \,| \tag{11}$$

є перемінна з ґрупою G_{I}, отже $\{G_{\mathrm{I}}, u\}$ творить загальнїйшу метациклїчну ґрупу, яка містить ся в $G_{\mathrm{III}}\mathfrak{B}$; $u = \tau$.

2. G_{I}; $p = 5$. Комбінуючи ґрупу G_{I} з

$$\left.\begin{array}{r} u_1 = |\, h,\ k \quad h,\ -k \,|\,, \\ u_1 = |\, h,\ k \quad h + k,\ -2h + 2k \,|\,, \end{array}\right\} \tag{11}$$

одержимо метациклїчну ґрупу, загальнїйшу від G_{I}, яка є підґрупою третього типу G_{III}; $u_1 = ts_2$, $u_2 = v_1\, ts_2$.

3. G_{II}; $p = 3$. Для $p = 3$ є $e = -1$, отже

$$\left.\begin{array}{r} \sigma_1 = |\, h,\ k \quad ah - bk,\ bh + ak \,|\,, \\ a^2 + b^2 \not\equiv 0 \ (mod.\, p). \end{array}\right\}$$

Утворивши ґрупу $\{G_{\mathrm{II}}, u\}$, де

$$u = | h, k \quad \alpha h + \beta k, \beta h - \alpha k | , \qquad (12)$$

а α і β сповнюють умову

$$(\alpha^2 + \beta^3)(a^2 + b^2) + 1 \equiv | \equiv 0 \ (mod.\ 3), \qquad (13)$$

загальнійшу ґрупу, яка містить в $G_{III}\vartheta; u = \sigma_1^{-1}\tau$.

§. 126. Отсе ті одиноко можливі виїмки, що наші ґрупи є підґрупами ґруп инших типів.

II. Тверджене. Ґрупа G_I є загальна для $p > 5$, G_{II} для $p > 3$, G_{III} все.

Доказ. Крітеріею загальности є те, що порядок ґрупи мусить бути многократю порядку кождої підґрупи. Коли отся крітерія невистарчає, доказуватимемо тверджене безпосередно.

1. G_I не може містити ся в G_{II}, бо

$$\frac{r_{II}}{r_I} = \frac{2(p^2-1)p^2}{2(p-1)^2p^2} = \frac{p+1}{p-1}$$

не може бути цілим числом, коли $p > 3$.

2. Так само G_{III} не може містити ся в G_I, бо

$$\frac{r_I}{r_{II}} = \frac{p-1}{p+1}$$

ніколи не є цїлим числом.

Дальше слїдують безпосередні докази.

1. G_I не може містити ся в G_{III}, бо в G_I містить ся субституція форми σ_1

$$\sigma_1 = | h, k \quad \varrho h, k | , \qquad (14)$$

де ϱ є первісний корінь $(mod.\ p)$, яка не змінює рівно p корінів, а саме тих, яких перший показчик є p. Кожда иниша субституція, яка має ту саму прикмету, є комбінацією того σ_1 з

$$g_2 = | h, k \quad h, k + 1 | ,$$

т. зн.

$$\sigma = \sigma_1 g_2{}^\lambda = | h, k \quad \varrho h, k + \lambda | . \qquad (15)$$

r-та степень тої субституції є

$$\sigma^r = | h, k \quad \varrho^r h, k + \lambda r | ; \qquad (16)$$

вона мусить зіставляти без зміни ті самі корінї, в числї p, що σ_1 і σ. Те можливе тільки тодї, коли $\beta = 0$ і $\varrho^r \equiv 1$ $(mod.\ p)$; з того бачимо, що тільки субституція σ_1 і її степенї дають бажану переставку. Тверджене Fermat'a дає: $r = m(p-1)$.

Означім якусь субституцію з ґеометричної ґрупи третього типу u і шукаймо тих степений субституцій u, які є перемінні з τ (т. є з t або τ) аж по s_I:

$$Tu^\mu = u^\mu T, s_I ; \qquad (17)$$

легко провірити, що $\mu \leqq 4$. Кожда субституція, перемінна з τ, має форму

$$s_a = | h, k \quad ah, a\,k | ,$$

отже $u^{\mu} = s_a$.

Коли-б субституція σ_2 містила ся в G_{III}, то одна з її степений мусїла-б бути перемінна з T, т. зн. мусїла-б мати форму s; воно можливе тільки для $\mu = r$. Звідси виходить суперечність: r є многократю числа $p-1$, а μ є що найбільше 4, отже для $p > 5$ ґрупа G_{I} не може містити ся в G_{III}.

2. G_{II} не може містити ся в G_{III}, бо коли u є субституцією з G_{III}, то u^r $(r \leqq 4)$ редукуєть ся на

$$u' = | h, k \quad ah + \alpha, bk + \beta | ; \tag{18}$$

$(p-1)$-ша степень тої субституції редукуєть ся на

$$\begin{aligned} u'' &= | h, k \quad a^{p-1} h + (a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + 1)\,\alpha, b^{p-1} k + (b^{p-1} + b^{p-2} + \ldots + 1)\,\beta | \\ &= | h, k \quad h + \alpha, k + \beta | \end{aligned} \tag{19}$$

а p-та степень тої субституції є $\equiv 1$.

G_{II} має субституцію σ_2 порядку p^2-1; отже всї ті її степені, які редукують ся на 1, мають порядок $c(p^2-1)$; коли-б σ_1 містило ся в G_{III}, то

$$\frac{r(p-1)p}{c(p^2-1)} = \frac{rp}{c(p+1)}$$

мусїло-б бути цїлим числом; p і $p+1$ є супроти себе перві, отже r мусїло би бути многократю числа $p+1$, а се неможливе для $r \leqq 4$, $p > 3$.

§. 127. Остає ще тільки виказати, що ґрупа G_{III} є загальна.

1. G_{III} не може містити ся в G_{I}. Возьмім субституції

$$\left. \begin{aligned} u' &= | h, k \quad ah + \alpha, bk + \beta | , \\ u'' &= | h, k \quad ak + \alpha, bh + \beta | , \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

яких квадрати є

$$\left. \begin{aligned} u'^2 &= | h, k \quad a^2 h + (a+1)\alpha, b^2 k + (b+1)\beta | , \\ u''^2 &= | h, k \quad abh + (a\beta + \alpha), abk + (b\alpha + \beta) | . \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

Обі ті субституції є в G_{I}: $u' = \sigma_1 g$, $u'' = \sigma_1 \sigma_2 g$, отже і субституція

$$w = u'^{-2} u''^{-2} u'^2 u''^2 \tag{22}$$

містить ся в G_{III}; вона редукуєть ся на

$$w = | h, k \quad h + \eta, k + \vartheta | , \tag{23}$$

де η і ϑ дані рівнанями

$$\left. \begin{aligned} a^2 b \eta &\equiv (a^2 - 1)\beta - (a+1)(b-1)\alpha, \\ a b^2 \vartheta &\equiv (b^2 - 1)\alpha - (b+1)(a-1)\beta. \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

Порядок субституції w є p або 1; те друге є тоді, коли $\eta = 0$, $\vartheta = 0$.

2. G_{II} містить в собі подібну субституцію як G_{I} з тою ріжницею, що тут є показчики числами сполученими; w має також і тут порядок p або 1.

3. G_{III} не може містити в собі такої субституції порядку p або 1. Возьмім v_2 за u', а $v_2 t$ за u'', то се дасть:

$$w = v_2^{-2}(v_2 t)^{-2} v_2^{\,2}(v_2 t)^2 = t\tau \tag{22}$$

отже субституцію порядку 4 $(\neq p, \neq 1)$.

Таким чином ми вичерпали всі можливости і виказали, що виймаючи G_{I} для 3 і 5, і G_{II} для 3 всі типи ґруп є загальні, т. є. не можна одного з них переводити в другий. З тих доказів бачимо також, що всі ті типи є поміж собою ріжні.

§. 128. Тепер уставимо ряди зложеня для наших ґруп. Коли нам вдасть ся розложити ті ґрупи так, щоби їх показчики були первними числами, то се буде доказом, що ґрупи є метациклічні. Побачимо, що се справді можливе.

Всі три типи ґруп мають спільну визначну підґрупу M порядку p^2, яка переставляє оба показчики корінів; субституції тої ґрупи можна представити як добуток двох односторонних субституцій

$$g = g_1^{\ \alpha} g_2^{\ \beta} (\alpha,\ \beta = 0,\ 1, \ldots,\ p-1) \tag{25}$$

Порядок ґрупи M є p^2; приймаючи $\beta = 0$, одержимо Абелеву ґрупу N, зложену з односторонних субституцій g_1. Таким чином маємо вже кінцеву частину ряду зложеня для G з відповідним рядом показчиків

$$\begin{array}{ccccc} M, & & N, & & 1, \\ & p, & & p. & \end{array} \tag{26}$$

Та частина ряду зложеня є для всіх трьох ґруп спільна. Від тепер мусимо розкладати кождий тип з окрема.

§. 129. В першім типі маємо таку зложену субституцію

$$\sigma_1 = |\, h,\ k \quad ah,\ bk \,| \tag{27}$$

яку можемо опять розложити на дві односторонні

$$\begin{aligned} s &= |\, h,\ k \quad ah,\ k \,|, \\ t &= |\, h,\ k \quad h,\ bk \,|; \end{aligned}$$

найпростійша форма тих субституцій буде, коли за a і за b положимо ϱ, первісний корінь числа p:

$$\left.\begin{aligned} s &= |\, h,\ k \quad \varrho h,\ k \,|, \\ t &= |\, h,\ k \quad h,\ \varrho k \,|, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

отже

$$\sigma_1 = s^a t^b \ (a,\ b = 0\ 1,\ 2, \ldots,\ p-2). \qquad (29)$$

Держимо ся тут зовсім такої самої методи, як при метациклічних ґрупах степеня p; розкладаємо $p-1$ на перві чинники

$$p - 1 = k_1 k_2 \qquad k_\nu \qquad (30)$$

і творимо субституції

$$\left.\begin{aligned} s_\nu &= s^{\frac{p-1}{k_\nu}}, \\ t_\nu &= t^{\frac{p-1}{k_\nu}}; \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

їх порядки є однакові, k_ν. До ґрупи порядку M добираємо субституцію t_ν і одержуємо ґрупу L''_ν порядку $k_\nu . p^2$; її показчик з огляду на M є k_ν. Добираючи до L''_ν ще s_ν, одержуємо ґрупу L'_ν порядку $k_{\nu-1}{}^2\ p^2$, з показчиком k_ν.

Тепер творимо знов субституції

$$\left.\begin{aligned} s_{\nu-1} &= s^{\frac{p-1}{k_\nu k_{\nu-1}}}, \\ t_{\nu-1} &= t^{\frac{p-1}{k_\nu k_{\nu-1}}}; \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

їх $k_{\nu-1}$-ті степені містять ся вже в L'_ν і L''_ν, отже їх порядок є $k_{\nu-1}$. При їх помочи творимо дальше ґрупи $L''_{\nu-1}$ і $L'_{\nu-1}$ порядків $k_{\nu-1}\ k_\nu{}^2 p^2$ і $k_{\nu-1}{}^2 k_\nu{}^2 p^2$ з показчиками $k_{\nu-1}$ і $k_{\nu-1}$. Так поступаємо все дальше, аж врешті з субституціями

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= s^{\frac{p-1}{k_\nu \cdots k_1}} = s \\ t_1 &= t^{\frac{p-1}{k_\nu \cdots k_1}} = t \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

вичерпаємо всї субституції σ_1 і одержимо ґрупу L'_1.

Зістала ще тільки транспонуюча субституція σ_2 порядку 2, яку добираємо до L'_1 як найвисший член ґрупи G_1. Отже наш ряд зложеня з рядом відповідних показчиків виглядає так:

$$\begin{matrix} G_1,\ L'_1,\ L_1'',\ L'_2,\ L''_2, & .,\ L'_\nu,\ L''_\nu,\ M,\ N,\ 1, \\ 2,\ k_1,\ \ k_1,\ k_2,\ \ k_2 & .,\ k_\nu,\ k_\nu,\ p,\ p. \end{matrix} \qquad (34)$$

Всї показчики є первими числами, отже G_1 метациклічною ґрупою.

§. 130. Зовсім подібно поступаємо при третім типі. Тут маємо субституцію

$$s_\alpha = |\ h,\ k \quad ah,\ ak\ |, \qquad (35)$$

яку ми назвали рівнобічною. Напишім за a опять ϱ, то одержимо найпростійшу її форму

$$s_\varrho = s = |\ h,\ k \quad \varrho h, \varrho k\ |\ , \tag{36}$$

отже

$$s_\alpha = s^\alpha\ (\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ p-2). \tag{37}$$

За вихідну точку беремо субституцію $s^{\frac{p-1}{k_\nu}}$ і творимо чергою такі субституції:

$$\left.\begin{array}{l} s_\nu = s^{\frac{p-1}{k_\nu}}, \\ s_{\nu-1} = s^{\frac{p-1}{k_\nu k_{\nu-1}}} \\ \cdot \\ s_1 = s^{\frac{p-1}{k_\nu \ldots k_1}} = s \end{array}\right\} \tag{38}$$

порядків k_ν, $k_{\nu-1}$, . ., k_1. З них творимо ґрупи комбінуючи їх по черзї з ґрупою M. Се дає: L_ν, $L_{\nu-1}$, . ., L_1, ґрупи порядків $k_\nu p^2$, $k_{\nu-1}\ k_\nu p^2$, . ., $k_1 k_2 \quad k_\nu p^2 = (p-1)\ p^2$, показчиками будуть числа k_ν, $k_{\nu-1}$, ., k_1.

Вичерпавши всї субституції s_a, маємо ще чотири инші t, τ, v_1, v_2, яких форма залежить від числа p. В формі $\mathfrak{A}$ $(p = 4n + 1)$ маємо:

$$t^2 = 1,\ \tau^2 = 1,\ v_1{}^2 = s_2,\ v_1{}^3 = s_{2(1+j)},$$

отже v_1 і v_2 переходять в другій, згл. третїй степені в якесь s.

В формі $\mathfrak{B}$ $(p = 4n - 1)$ є

$$t^2 = s_{-1},\ \tau^2 = s_{-1},\ v_1{}^2 = s_2,\ v_2{}^3 = s_m,$$

отже всї чотири субституції переходять в s. Звідси маємо таку конструкцію ряду: добираючи t до L_1, одержуємо K; далї добираємо τ і маємо J, а вкінцї v_1 і v_2 і маємо H і і $G_{\text{Ш}}$. Порядки тих ґруп є такі: $(K) = 2(p-1)p^2$, $(J) = 4(p-1)p^2$, $(H) = 8(p-1)p^2$ або $12(p-1)p^2$, $(G_{\text{Ш}}) = 24(p-1)p^2$. Отже ряди зложеня і показчиків для $G_{\text{Ш}}$ є:

$$\left.\begin{array}{l} G_{\text{Ш}},\ H,\ J,\ K,\ L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_\nu,\ M_1,\ N_1,\ 1. \\ (2,\ 3),\ (2,\ 2)\ k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_\nu,\ p,\ p. \end{array}\right\} \tag{39}$$

Числа, замкнені в скобках, значать, що пари субституцій v_1 і v_2, t і τ можемо добирати в довільнім порядку.

§. 134. В другім типі поступаємо трохи инакше, а то тому, що тут σ_1 має більше скомплїковану будову. Коли

$$\sigma_1 = |\ h,\ k \quad ah + bek,\ bh + ak\ |\ ,\ e \text{ — не-останок } (mod.\ p), \tag{40}$$

тодї шукаємо такої лїнійної однородної функції показчиків

$$\varphi = mh + nk,$$

яка під впливом σ_1 зміняла би ся в свою многократь. Анальоґічно як при вишукуваню нормальної форми маємо тут такі конґруенції:

$$\left.\begin{aligned} ma + nb &\equiv m\varrho, \\ mbe + na &\equiv n\varrho \end{aligned}\right\} (mod.\ p), \tag{41}$$

з яких визначуємо ϱ

$$\begin{vmatrix} a - \varrho, & b \\ be, & a - \varrho \end{vmatrix} \equiv 0\ (mod.\ p),$$

т. зн.

$$\varrho^2 - 2a\varrho + a^2 - b^2 e \equiv 0\ (mod.\ p) \tag{42}$$

Звідси слїдує;

$$\varrho \equiv a \pm b\sqrt{e}\ (mod.\ p);$$

ϱ має дві вартости, ϱ_1 і ϱ_2; вони є дїйсні або злучені відповідно до того, чи e є додатне, чи відємне. В такім разї можна представити σ_1 простійше так:

$$t = |\ h,\ k \quad \varrho_1 h,\ \varrho_2 k\ |, \tag{44}$$

де

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 &\equiv a + b\sqrt{e} \\ \varrho_2 &\equiv a - b\sqrt{e} \end{aligned}\right\} (mod\ \ p) \tag{45}$$

Тепер йде розклад подібно як перше. Порядок субституції t є $p^2 - 1$, бо з поміж можливих p^2 комбінацій чисел a і b мусимо виключити $a = 0$, $b = 0$.

$p^2 - 1$ є все подїльне через 8; тому в рядї показчиків буде число 2 приходити три (або більше) разів. Длятого мусимо шукати таких субституцій t_1, t_2, t_3, щоби було:

$$t_1{}^2 = 1_1 \ \ t_2{}^2 = t \text{ або} = 1;\ t_3{}^2 = t_2{}^q\ (q = 0,\ 1,\ 2). \tag{46}$$

Коли

$$t_1 = |\ h \ \ k \quad \lambda_1 h,\ \mu_1 k\ |,$$

то мусить бути $\lambda_1{}^2 \equiv 1$, $\mu_1{}^2 \equiv 1$ $(mod.\ p)$, т. зн. мусить істнувати така пара конґруенцій:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 e &\equiv 1, \\ 2ab\sqrt{e} &\equiv 0. \end{aligned}\quad (mod.\ p).\right\} \tag{47}$$

Розвязку тих конґруенцій називаємо a_1, b_1. Дальше мусить бути

$$t_2 = |\ h,\ k \quad \lambda_2 h,\ \mu_2 k\ |$$

таке, щоби було $\lambda_2{}^2 \equiv 1$, $\mu_2{}^2 \equiv 1$ $(mod.\ p)$, або $\lambda^2{}_2 \equiv \lambda_1$, $\mu_2{}^2 \equiv \mu_1$ $(mod. p)$. В першім разї беремо ту саму розвязку, що в (47), в другім творимо нові конґруенції

$$\left.\begin{aligned} a_2 + b^2 e &\equiv a_1, \\ 2ab\sqrt{e} &\equiv b_1; \end{aligned}\right\} (mod.\ p) \tag{48}$$

їх розвязка нехай буде a_2, b_2. Тепер визначуємо так само t_3, т. є або 1). $\lambda_3{}^2 \equiv 1$, $\mu_3{}^2 \equiv 1$; або 2). $\lambda_3{}^2 \equiv \lambda_1$, $\mu_3{}^2 \equiv \mu_1$; або 3). $\lambda_3{}^2 \equiv \lambda_2$, $\mu_3{}^2 \equiv \mu_2$. Третя можливість дасть нову пару конґруенцій, яка буде мати розвязку a_3, b_3.

На подібній дорозі обчисляємо дальші су туції, розкладаючи число p^2—1 на первí чинники:

$$p^2 - 1 = l_1 l_2 \ldots l_\mu \qquad (49)$$

добираємо такі субституції τ_μ, $\tau_{\mu-1}$, ., τ_1, щоби їх l_μ -та, $i_{\mu-1}$, -та, ., l_1-та степень містила ся в попередній. До кождої lз них будемо мусїли розвязати одну пару конґруенцій.

Тепер укладаємо ряд для G_Π; беремо чергою субституції τ_μ, $\tau_{\mu-1}$, ., τ_1 і комбінуємо їх все з попередньою ґрупою, так що одержимо ряд ґруп L_μ (степень $l_\mu\, p^2$), $L_{\mu-1}$ (степень $l_{\mu-1}\, l_\mu\, p^2$), . ., L_1 (степень $l_1 l_2 \ldots l_\mu p^2 = (p^2-1)\, p^2$); показчики будуть тут l_μ, $l_{\mu-1}$, , l_1.

Вкінцї добираємо ще σ_2 і маємо вже повну ґрупу G_Π з рядами зложеня і показчиків.

$$\left.\begin{matrix} G_\Pi, & L_1, & L_2, & ., & L_\mu, & M, & N, & 1 \\ 2, & l_1, & l_2, & & l_\mu, & p, & p. & \end{matrix}\right\} \qquad (50)$$

Субституції τ, які виступають в невимірній або й злученій формі, можна привести назад до вимірного виду.

§. 132. Визначенє ряду зложеня для ґруп G подає заразом дорогу, як треба вести розвязку рівнаня степеня p^2. Приймім, що данє рівнанє

$$f(x) = 0 \qquad (51)$$

має сочинники з обсягу (R). Той обсяг розширюємо так, що долучуємо до него по одному коріневи рівнань первих степенїв, так що поміж тими степенями будуть всї числа з ряду показчиків, з виїмком двох остатнїх. Через те ґрупа редукуєть ся постепенно аж до M; коли назвемо сей розширений обсяг (R'), то рівнанє, яке має ґрупу M, є **Абелевим рівнанем** степеня p^2. Отсе рівнанє можна розвязати зовсїм, розвязуючи два Абелеві рівнаня степеня p.

Нехай буде

$$F(y) = 0 \qquad (52)$$

тим Абелевим рівнанєм степеня p^2, якого сочинники належать до обсягу (R'). Називаючи його корінї y_{hk}, творимо при помочи ω, первісного p-того кореня з одиницї, функції:

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= y_{11} + y_{21} + \ldots + y_{p1}, \\ Y_2 &= y_{12} + y_{22} + \ldots + y_{p2}, \\ & \\ Y &= y_1 + y_{2p} + \ldots + y_{pp}, \end{aligned}\right| \qquad (53)$$

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = Y_1 + \omega Y_2 + \omega^2 Y_3 + \qquad + \omega^{p-1} Y_p, \\ U_2 = Y_1 + \omega^2 Y_2 + \omega^4 Y_3 + \qquad + \omega^{2\, p-1)} Y_p, \\ \quad . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ U_{p-1} = Y_1 + \omega^{p-1} Y_2 + \omega^{2(p-1)} Y_3 + . \quad . + \omega^{(p-1)^2} Y_p; \end{array}\right\} \quad (54)$$

до них долучуємо ще вимірну величину

$$U_0 = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_p = a. \qquad (54a)$$

Через те розпадають ся корінї на p кляс непервісности по p членів; субституції g_1 пересувають елементи в нутрі поодиноких рядків (53), а g_2 рядки поміж собою. Виконуючи ті субституції на (54), переконаємо ся, що g_1 не змінює тих функцій, а g_2 переводить U_i в ε^{-i} U_i. Звідси слідує, що функції U_i^p належать до ґрупи M; тому можна їх виразити вимірно одною з них.

З рівнань (54) і (54a) маємо

$$Y_i = \frac{1}{p}\left[a + \sum_{n=1}^{p-1} \omega^{-in} U_n\right]; \qquad (55)$$

U_n^p є величиною в обсягу (R', ω), нпр. $= u_n$, отже для обчисленя функцій Y_i мусимо витягнути p-тий корінь з величин u_n, які можна означати вимірно:

$$Y_i = \frac{1}{p}\left[a + \sum_{n-1}^{p-1} \omega^{-in} \sqrt[p]{u_n}\right]. \qquad (55a)$$

Отсе вираженє має p^2 вартостий, а Y може мати тільки p ріжних вартостий; щоби усунути злишню многозначність, творимо такі функції

$$\varphi_\lambda = U_\lambda . U_1^{p-\lambda} \; (\lambda = 1, 2, \quad ., p-1); \qquad (56)$$

для $\lambda = 0$ є $\varphi_0 = U_0 . U_1^p = a u_1$, отже вимірна величина. Кожде φ_λ можна представити одним з них, бо вони всї належать до тої самої ґрупи, т. є до M: анї g_1, анї g_2 не змінюють φ_λ. З того слїдує:

$$U_\lambda = \frac{\varphi_\lambda}{U_1^p} . U_1^\lambda = \frac{\varphi_\lambda}{u_1} . U_1^\lambda; \qquad (57)$$

спеціяльно є

$$U_1 = \frac{\varphi_1}{u_1} . U_1,$$

т. зн.

$$\varphi_1 = u_1.$$

Всї инші φ_λ є вимірними функціями одного φ, нпр. φ_1

$$\varphi_\lambda = \chi_\lambda(u_1) . u_1,$$

так що се дає:

$$U_\lambda = \chi_\lambda(u_1) . U_1^\lambda.$$

Вставивши се в (55а), маємо

$$Y_i = \frac{1}{p}\left[a + \sum_{n=1}^{p-1} \omega^{-in} \chi_n(u_1)\left(\sqrt[p]{u_1}\right)^n\right] \tag{58}$$

Тут маємо виражене, яке може приймати p вартостей для $i = 1$, 2, ., p; одержимо його, добуваючи p-тий корінь з величини u_1, вимірної в обсягу (R', ω). Таким чином ми визначили p коренів Абелевого рівнаня степеня p

$$\Phi(Y) = \prod_{i=1}^{p}(Y - Y_i) = 0 \tag{59}$$

§. 133. Хотячи перейти до самих коренів y, мусимо звернути увагу на те, що з одної кляси неперівсности до другої переходимо через субституції g_2; отже ґрупа N, зложена з субституцій g_2, є ґрупою тих поодиноких кляс. З того бачимо, що треба нам обчислити тільки елементи з одної кляси, а всї прочі одержимо при помочи субституцій g_2.

До обсягу (R', ω) долучуємо ще одну невимірність ζ, первісний p^2-ий корінь з одиниці, і творимо функції з елементів першої кляси:

$$\left.\begin{array}{l}
Y_1 = y_{11} + y_{21} + y_{31} + \dots + y_{p1}, \\
\xi_1' = y_{11} + \zeta y_{21} + \zeta^2 y_{31} + \dots + \zeta^{p-1} y_{p1}, \\
\xi_2' = y_{11} + \zeta^2 y_{21} + \zeta^4 y_{31} + \dots + \zeta^{2(p-1)} y_{p1}, \\
\\
\xi'_{p-1} = y_{11} + \zeta^{p-1} y_{21} + \zeta^{2(p-1)} y_{31} + \dots + \zeta^{(p-1)^2} y_{p1}
\end{array}\right\} \tag{60}$$

Ґрупа N переводить ξ'_i в $\zeta^{-i}\xi'_i$; отже коли напишемо $\xi'^{p^2}_i = w'_i$, одержимо нові величини, вимірні в (R', ζ), які належать до ґрупи N і дають ся виразити одною з них. З (60) маємо

$$y_{i1} = \frac{1}{p}\left[Y_1 + \sum_{m=1}^{p-1} \zeta^{-im} \xi'_m\right]; \tag{61}$$

злишні вартости выражень під коренем ξ'_m вилучуємо при помочи функції

$$\psi'_\lambda = \xi'_\lambda \cdot \xi_1^{p^2 - \lambda},$$

яка належить до ґрупи N, т. зн.

$$\xi'_\lambda = \frac{\psi'_\lambda}{\xi'^{p^2}_1} \cdot \xi_1'^{\lambda} = \omega'_\lambda(w_1') \cdot \xi_1'^{\lambda} \tag{62}$$

Се дає

$$y_{i1} = \frac{1}{p}\left[Y_1 + \sum_{m=1}^{p-1} \zeta^{-im} \omega'_m(w_1')\left(\sqrt[p^2]{w_1'}\right)^m\right]. \tag{63}$$

Отсе вираженє має для $i = 1, 2, \qquad p$ знов p вартостий. Субституція g_2 веде до

$$y_{i2} = \frac{1}{p}\left[Y_2 + \sum_{m=1}^{p-1} \zeta^{-im} \omega''_m(w_1'') \left(\sqrt[p^2]{(w_1'')}\right)^m \right] \tag{64}$$

Тут маємо під корінем иншу функцію, а саме w_1''. Ті обі функції, w_1' і w_1'', дають ся представити одна другою вимірно, а так само кожда инша $w_1^{(j)}$

$$w_1^{(j)} = \vartheta_j(w_1'), \tag{65}$$

отже спеціяльною $w_1' = \vartheta_1(w_1')$. Рівно-ж величини ω''_m, $\omega'''_m \ldots$, можна представити функцією ω'_m, так що се дає

$$\omega_m^{(j)}(w_1^{(j)}) = \tilde{\omega}_m^{(j)}(w_1'). \tag{66}$$

Вставивши те в (64), маємо

$$y_{i2} = \frac{1}{p}\left[Y_2 + \sum_{m=1}^{p-1} \zeta \quad \tilde{\omega}''_m (w_1') \left(\sqrt[p^2]{\zeta_2(w_1')}\right)^m \right]$$

і загально

$$y_{ij} = \frac{1}{p}\left[Y_j + \sum_{m=1}^{p-1} \zeta^{-im} \tilde{\omega}^{(j)}_m(w_1') \left(\sqrt[p^2]{\zeta j(w_1')}\right)^m \right] \tag{67}$$

Комбінуючи се з вираженєм на Y_j (58), одержимо вкінці корінь рівнаня (52):

$$y_{ij} = \frac{1}{p^2}\left[a + \sum_{n=1}^{p-1} \omega^{-jn} \chi_n(u_1) \left(\sqrt[p]{u_1}\right)^n + p \sum_{m=1}^{p-1} \zeta^{\quad im} \tilde{\omega}^{(j)}_m(w_1') \left(\sqrt[p^2]{\zeta_j(w_1')}\right)^m \right] \tag{68}$$

Тут маємо функцію о p^2 вартостях. Її одержимо, коли добудемо p-тий корінь з величини u_1 з обсягу (R', ω): дальше при помочи того коріня визначимо величину w_1' і її вимірні функції $\zeta_j(w_1')$ в обсягу (R', ζ), а вкінці з тих функцій добудемо p-тий корінь.

Се ще не є одначе найзагальнїйше вираженє, яке може приймати p^2. Коли розходить ся о найзагальнійшу p^2-вартісну функцію, тоді мусимо узглядннти ті всї „приготовлюючі" долученя, які привели первісний обсяг вимірности (R) до (R'). При помочи корінів тих помічних рівнань знаходимо коріні первісного рівнаня $f(x) = 0$. Таким чином наш проблєм рішений вповнї.

XIV. Закінченє.

§. 134. Описану тут методу Jordan'а для рівнань степеня p^2 можемо примінити до всїх рішимих рівнань степеня p^α, $\alpha > 2$.

Рішиме рівнане степеня p^α буде мати в ряді зложеня своеї ґрупи Абелеву підґрупу M порядку p^α, яку творять субституції

$$g = | \, h_i \;\; h_i + \alpha_i \, | \; (i = 1, 2, \ldots, \alpha); \tag{1}$$

їх представимо як добуток α односторонних субституцій

$$g = g_1^{a_1} \, g_2^{a_2} \ldots g_\alpha^{a_\alpha}. \tag{2}$$

Потім означимо нормальні форми ґеометричних субституцій по припису Jordan'a *), а опісля будемо з них будувати метациклїчні ґрупи.

Нормальні форми субституцій степеня p^α знайдемо, розвязуючи конґруенцію

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho, & a_{12}, & & a_{1\alpha} \\ a_{21}, & a_{22} - \varrho, & & a_{2\alpha} \\ & & & \\ a_{\alpha 1}, & a_{\alpha 2}, & \ldots, & a_{\alpha\alpha} - \varrho \end{vmatrix} \equiv 0, \quad (mod.\ p) \tag{3}$$

якої детермінанта

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & & a_{1\alpha} \\ a_{21}, & a_{22}, & ., & a_{2\alpha} \\ & & & \\ a_{\alpha 1}, & a_{\alpha 2}, & & a_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} \tag{4}$$

не е зером. Отся конґруенція мае взагалї n корінїв; вони можуть бути або дійсні, або злучені. Тепер розбираемо, які е можливі комбінації рівних, дїйсних або злучених спряжених розвязок. Так нпр. для $\alpha = 3$ маемо конґруенцію

$$\varrho^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \varrho^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33}) \, \varrho - D \equiv 0 \; (mod.\ p); \tag{5}$$

A_{11}, A_{22}, A_{33} е мінорами, приналежними до елементів a_{11}, a_{22}, a_{23}. В тім разї можливі такі комбінації розвязок:

1. всї три корінї дїйсні, рівні;
2. всї три корінї дїйсні, — два з них рівні, третїй відмінний;
3. всї три корінї дїйсні, всї ріжні;
4. один корінь дїйсний, два другі злучені, спряжені.

Обі перші можливости дадуть мабуть непервісні ґрупи; бо коли істнуе тільки одна або дві такі функції, які перемінять ся під впливом тих субституцій в свої многократи, то можна буде знайти елементи, яких вони не змінять; нпр. 1. дасть нормальну форму

$$t = | \, h, \; k, \; l \quad \varrho h, \; a_{21} h + a_{22} k + a_{23} l, \; a_{31} h + a_{32} k + a_{33} l \, | \,,$$

яка не змінагь елементів, котрі будуть мати перший показчик $= p$; в разї 2. буде нормальна форма

---

*) C. Jordan, Traité etc., стр. 114.

$$t = | h, k, l \quad \varrho_1 h, \varrho_2 k, a_{31}h + a_{32}k + a_{33}l | ,$$

яка не змінить елементів x_{ppi} $(i = 1, 2, \quad . \; ., p)$. Тільки 3.

$$t = | h, k, l \quad \varrho_1 h, \varrho_2 k, \varrho_3 l |$$

і 4.

$$t = | h, k, l \quad \varrho_1 h, (\varrho_2 + \varrho_3 \, j)k, (\varrho_2 - \varrho_3 \, j)l |$$

будуть могли дати первісні ґрупи.

Проблемом рівнань степеня p^3 займемо ся другим разом.

ДОДАТОК.

(Доповнене до рівнань четвертого степеня, §§. 56—60).

На стр. 54 подано хибно методу, яку подає Vogt, Leçons, стр. 94sqq., під назвою методи Euler'a. З огляду на теоретичну й практичну вартість тої методи подаємо її в цілости.

В рівнаню четвертого степеня, зведеним до найвигіднїйшої форми,

$$y^4 - py^2 - qy + r = 0, \tag{1}$$

кладемо

$$y = \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}. \tag{2}$$

Закладаючи

$$u_1 + u_2 + u_3 = \gamma_1,$$
$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = \gamma_2$$
$$u_1u_2u_3 = \gamma_3,$$

одержимо через подвійне квадроване реляції (2)

$$y^2 = \gamma_1 + 2\left(\sqrt{u_1u_2} + \sqrt{u_2u_3} + \sqrt{u_3u_1}\right),$$

$$y^4 - 2\gamma_1 y^2 + \gamma_1{}^2 = 4\left(\gamma_2 + 2\sqrt{\gamma_3} \cdot y\right),$$

або

$$y^4 - 2\gamma_1 y^2 - 8\sqrt{\gamma_3} \cdot y + (\gamma_1{}^2 - 4\gamma_2) = 0; \tag{3}$$

з порівнаня сочинників при (1) і (3) одержуємо

$$\gamma_1 = \frac{p}{2},$$

$$\gamma_2 = \frac{p^2}{16} - \frac{r}{4},$$

$$\gamma_3 = \frac{q^2}{64}.$$

Величини γ_1, γ_2, γ_3 є основними симетричними функціями величин u_1, u_2, u_3, які одержимо, розвязуючи кубічне рівнане

$$u^3 - \gamma_1 u^2 + \gamma_2 u - \gamma_3 = 0,$$

т. є

$$u^3-\frac{p}{2}u^2+\left(\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4}\right)u-\frac{q^2}{64}=0, \tag{4}$$

рівнанє, яке вповні покриваєть ся з кубічною ресольвентою в методї д. Цвойдзїньского (стр. 56), так що ся остатня метода являєть ся тільки дуже простою (а корисною для рахунку) модіфікацією методи Euler'а.

Термінольоґічний додаток*).

Абелеве рівнанє Abel'sche Gleichung.
альтернуючий alternierend.
визначна підґрупа ausgezeichnete Untergruppe; Normalteiler.
виконувати субституцію eine Substitution ausüben.
*ви́мірний (вимірúмий) rational.
головний ряд (зложеня) Haupt(kompositions)reihe.
двостороння субституція zweiseitige Substitution.
долученє Adjunktion.
доповняюча ґрупа komplementäre Gruppe.
допускати субституцію eine Substitution gestatten.
ізоморфний isomorph.
*квадратний (квадратовий) quadratisch.
кляса непервісности Imprimitivitätssystem.
комплексія Komplexion.
корінь з одиницї Einheitswurzel.
*лїнійний (лїнїовий) linear.
метациклїчний metazyklisch.
многовартісний mehrwertig.
многостепенний mehrstufig; meroëdrisch.
найбільша (визначна) підґрупа ausgezeichnete Maximaluntergruppe; Maximalnormalteiler.
*неви́мірність (невиміримість) Irrationalität.
незмінна підґрупа invariante Untergruppe.
не-останок Nichtrest.
непервісний imprimitiv.

---

*) Подані тут такі терміни, яких нема в „Матеріялах до математичної термінольоґії“ ВП. Дра В. Левицького (Збірник т. VIII/2), або які пропонував би я ввести замість поданих Дром В. Левицьким; ті остатні зазначені звіздкою (*), а в скобцї містить ся їх давня назва.

неперéхідний intransitiv.
***обсяг вимірности (виміримости)** Rationalitätsbereich.
одностепенний einstufig; holoëdrisch.
одностороння субституція einseitige Substitution.
оператор Operator.
***первісний (первичний)** primitiv.
***перекрій (переріз)** Durchschnitt.
перемінний kommutativ.
***періода** (fem., **не** masc.) Periode.
підґрупа Untergruppe.
побічна ґрупа Nebengruppe.
поодинокий einfach.
похідний abgeleitet.
правильний regelmässig, regulär.
природний обсяг вимірности natürlicher Rationalitätsbereich.
***ресольвента (розвязник)** Resolvente.
рівнане ресольвенти Resolventengleichung.
рішимий auflösbar.
рішимість Auflösbarkeit.
роздїлене Verteilung.
розширити erweitern.
ряд (Абелевого рівнаня) Rang.
ряд зложеня Reihe der Zusammensetzung, Kompositionsreihe.
***система** (fem. **не** masc.). System.
складовий konstituierend.
спряжені роди konjugierte Gattungen.
транспонуюча субституція transponierende Substitution.
чисельний numerisch.
циклїчний zyklisch.

ПОКАЗЧИК.

(Цифри означують сторони).

А) Річи.

Б) Імена.

RÉSUMÉ.

An der Theorie der algebraischen Gleichungen hat sich die ganze heutige Algebra ausgebildet; die Theorie der Gleichungen bedient sich nunmehr eines der mächtigsten Hilfsmittel der modernen Mathematik — der Substitutionengruppen.

In der vorliegenden Arbeit werden die Grundzüge derjenigen Disziplin geschildert, die unter dem Namen: „Galois'sche Gleichungstheorie" bekannt ist. In der ersten Abteilung werden die Grundlagen für die Theorie gewonnen: die Substitutionen und deren Gruppen. Es werden die vier Haupteigenschaften derselben untersucht (Transitivität und Intransitivität, Primitivität und Imprimitivität, Isomorphismus, Einfachheit und Zusammensetzung), sowie wird der Einfluss der Gruppen auf algebraische Funktionen besprochen. Mit einem Abschnitt über spezielle (zyklische und metazyklische) Gruppen- und Funktionen wird dieser Teil der Arbeit abgeschlossen.

Die zweite Abteilung bringt die eigentliche Theorie der Gleichungen dar. Nach einer kurzen Behandlung der quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen wird das Problem der algebraischen Auflösung der Gleichungen höherer Grade vor Augen gestellt, woraus erhellt, dass allgemeine Gleichungen vom höheren als dem vierten Grade algebraisch nicht lösbar sind. In den zwei folgenden Abschnitten werden specielle Klassen von Gleichungen: Kreisteilungs- und Abel'sche Gleichungen behandelt, und zuletzt die Gruppe einer auflösbaren Gleichung untersucht; hieraus ergeben sich notwendige und hinreichende Kriterien für die Auflösbarkeit der Gleichungen.

Die dritte Abteilung ist spezielleren Untersuchungen gewidmet; es wird dargetan, dass die Lösung einer Gleichung zusammengesetzten Grades auf diejenige mehrerer Gleichungen von Primzahlpotenzgraden p^{α} reduziert werden kann. Wir stellen also ein typisches Problem auf, eine primitive Gleichung vom Grade p^{α} zu lösen.

Für $\alpha = 1$ haben wir mit einer Gleichung vom Primzahlgrad zu tun, deren Lösung wir Abel, Galois und in neuesten Zeit Herrn Weber verdanken; in der vorliegenden Arbeit wurde aber einer wenig bekannten, aber doch präzisen und durchsichtigen Methode des Herrn J. Dolbnia Platz gegeben.

Für $\alpha = 2$ haben wir Gleichungen vom Grade p^2. Metazyklische Gruppen vom Grade p^2 hat Herr C. Jordan aufgestellt: er fand drei Typen derselben, indem er die homogenen linearen (geometrischen) Substitutionen von zwei Indices

$$t = | \, h, k \quad ah + bk, \; ch + dk \, |$$

auf Normalformen brachte, die aus der charakteristischen Kongruenz

$$\begin{vmatrix} a-\varrho, & b \\ c, & d-\varrho \end{vmatrix} \equiv 0 \; (mod. \; p)$$

zu entnehmen sind. Diese Kongruenz hat eine reelle, zwei reelle oder zwei konjugiert komplexe Wurzeln, und diesen drei Möglichkeiten entsprechen die drei Normalformen von t, durch welche jede Funktion der Indices in eines ihrer Vielfachen verwandelt wird. Die genannten drei Gruppentypen sind:

Erster Typus: Die Gruppe G_{I} besteht aus der Kombination der arithmetischen Substitutionen g*), mit den geometrischen der Form

$$\sigma_1 = | \, h, k \quad ah, bk \, | \quad (a, b = 1, 2, . \, ., p-1),$$

und

$$\sigma_2 = | \, h, k \quad k, h \, |$$

Ihre Ordnung ist $2 \, (p-1)^2 \, p^2$.

Zweiter Typus: G_{II} besitzt neben den arithmetischen Substitutionen g solche geometrische:

$$\sigma_1 = | \, h, k \quad ah + bek, \; bh + ah \, | , \; e \text{- Nichtrest } (mod. \; p);$$

$$(a, b = 0, 1, 2, \ldots, p-1; \; a = b = 0 \text{ ausgeschlossen});$$

$$\sigma_2 = | \, h, k \quad h, -k \, | ;$$

ihre Ordnung ist $2 \, (p^2-1) \, p^2$.

Im dritten Typus haben wir zwei Formen zu unterscheiden:

Form $\mathfrak{A}$ für $p \equiv 1$ (*mod.* 4). Ausser den g haben wir noch

$$s = | \, h, k \quad \varrho h, \varrho k \, | , \; (\varrho \text{ — primitive Wurzel von } p);$$

$$t = | \, h, k \quad h, -k \, | ,$$

$$\tau = | \, h, k \quad k, h \, | ;$$

$$v_1 = | \, h, k \quad h + k, \; h - k \, | ;$$

$$v_2 = | \, h, k \quad h - jk, \; h + jk \, | ,$$

worin j eine Wurzel der Kongruenz

$$j^2 \equiv -1 \; (mod. \; \mathrm{p})$$

bedeutet.

Form $\mathfrak{B}$ für $p \equiv 3$ (*mod.* 4) besitzt ausser den g und s auch noch

$$t = | \, h, k \quad k, -h \, | ;$$

$$\tau = | \, h, k \quad \mu h + \nu k, \; \nu k - \mu k \, | ;$$

---

*) Arithmetische Substitutionen des Grades p^2,

$$g = | \, h, k \quad h + \alpha, \; k + \beta \, | \quad (\alpha, \beta = 0, 1, . \, . \, , p-1),$$

können als Kombinationen sog. einseitiger Substitutionen gedacht werden, die nur einen einzigen Index um 1 vermehren,

$$g_1 = | \, h, k \quad h + 1, k \, | , \text{ bzw. } g_2 = | \, h, k \quad h, k + 1 \, | ,$$

so dass $g = g_1{}^{\alpha} \, g_2{}^{\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$ ist.

$$v_1 = | h, k \quad \mu h + (\nu + 1)k, (\nu - 1)h - \mu k | ;$$
$$v_2 = | h, k'' - (1 + \mu\nu)h + (\mu - \nu^2)k, (\nu + \mu^2)h + (\mu\nu - \mu + \nu) k | ,$$
worin die Zahlen μ und ν durch die Relation
$$\mu^2 + \nu^2 + 1 \equiv 0 \ (mod.\ p)$$
mit einander verbunden sind.

Die Ordnung des dritten Gruppentypus ist in beiden Formen dieselbe, u. z. $24(p-1)p^2$.

Alle diese Gruppen sind, wie es sich zeigt, primitiv und allgemein, ausgenommen die Fälle $p = 3$ für G_I und $G_{I'}$, und $p = 5$ für G_I. Dass diese Gruppen metazyklisch sind, erhellt aus der Aufstellung ihrer Kompositionsreihe, deren sämtliche Indices Primzahlen sind.

Bei der Auflösung einer primitiven Gleichung vom Grade p^2, deren Koeffizienten Zahlen des natürlichen Rationalitätsbereiches (R) sind, wird folgender Weg eingeschlagen: Durch „vorbereitende" Adjunktionen von Irrationalitäten, deren Grade die Indices der Kompositionsreihe von G sind, kommt man durch allmähliche Reduktion der Gruppe auf eine Abel'sche Gleichung vom Grade p^2
$$F\ (y) = 0,$$
der ein erweiterter Bereich (R') zugrundeliegt. Durch Adjunktion zweier weiteren Irrationalitäten, einer p-ten und einer p^2-ten primitiven Einheitswurzel (was eigentlich auf eine einzige Adjunktion auskommt), wird diese Gleichung vollständig gelöst. Um die x zu finden, muss man noch Rückschritte durch „vorbereitende" Gleichungen machen.

Zuletzt wird die Methode skizziert, wie das Problem der Gleichungen p^α für $\alpha > 2$ zu behandeln wäre; den Fall $\alpha = 3$ behält sich Verf. einer späteren Gelegenheit vor.

Вплив температури
на скорість декількох хемічних реакций.

(Доповнене).

Др. Юліян Гірняк.

(Реферовано на засіданю мат.-прир.-лік. секциї дня 30. грудня 1910).

Головним вислідом моеї попередної праці, публікованої під тим-самим заголовком, було меньше-більше сконстатоване слідуючої приближеної правильности: чим більше є „зложений“ молекул треторядного аміну, тим меньша є скорість єго злучуваня з етильовим йодом, але і противно, тим більший є сочинник температури такого процесу. О скілько возьмемо однак під огляд подані там гетероцикльові аміни разом з деякими анілінами (дво-метильо-аніліна, дво-метильо-пара-толюїдина), то таку приближену правильність завважуємо доперва на амінах, в яких треторядний атом N находить ся в бензольовім перстені. Тому і цілій правильности припалоби досить зглядне чи обмежене значінє.

Неясні концепциї в роді загальних понять „зложености“ молекулів вже не вистарчають, щоби з ними можна наближати ся до органічної структурової доктрини хемічних сполук. Вона вже нині на се за високо і за всесторонно розвинена. Одним з моїх „улюблених“ переконань є, що як раз тому богато кінетичних питань, котрі доторкають навіть дуже зложеної, про око недосяглої механічної сторони молекулів, можна буде колись розвязувати на не простих, але у високім степени зложених молекулах тіл, відкриваних органічною синтезою. Совершенний розвій кінетичної теориї материї — отже свого рода чисто фізикальний проблем — буде обусловлений колись як раз дальшими відкритями на сій „правокрильній“ области загальної хемії, подібно, як найінтимнійшу за-гадку хемії „радіоактивність і будову хемічного атому“ розкриває тепер одиноко компетентна фізика. І колиби я відважив ся нині відповідати на таке пр. питанє, з котрого боку брати ся до вияснєня температури топленя поодиноких субстанций або до теоретичного вишуканя якогось закону в сїй загадцї, то я радивбим вибрати за материял не найпростїйші тіла, як пр. совершенні або одноатомові ґази, а дальше метан з єго недалекими гомольоґами і т. д., але як раз противно, пр. ізомери найвисших звісних ароматичних (многоперстеневих) углеводнїв [1]).

Про оправданість такої точки погляду говорити нині передвчасно. Я однак не вагав ся нею руководити в попередній праці. Бо мимо того, що я в нїй змінив раз цїлий плян роботи (стор. 10.), коли одинокий дослїд мене переконав про безвиглядність потвердженя погляду H. v. Halban'a — то потім при самім рекапітульованю вислїдів (майже на один день перед висилкою манускрипту [2])) я не уважав за річ ризиковну змінити досить радикально мій погляд на значінє сочинників температури дуже нечислених а навіть провізорично змірених (скоростий) процесів. Завваживши тодї майже припадково ідентичну ріжницю скоків в сочиннику при зіставленю: піридина, α-піколїна, коллїдина (стор. 16.), (до тої хвилї я все лиш квалїтативних правильностий надїяв ся), я рішив ся сейчас в поглядї, що се не припадок і начеркнув відтак коротенько зовсїм иньше теоретичне пояснене. В нїм йде вже не о „зложеність“ реаґуючих молекулів, але о закриті або відслонені центри реаґуючих атомів в молекулах.

В дотеперішних дослїдах над скоростию деяких процесів, стрічали ся спорадично пр. здвоєня скорости (дві карбоксильові ґрупи в положеню орто і ин.), теоретично зовсїм наглядно зрозумілї, але загальнїйшої правильности дотепер не сконстатовано на ніякій типовій ґрупі сполук. Се нікого не дивує і про правильність ледви чи який кінетик мріє. Коли однак я в моїм материялї стрінув ся зі здвоєнєм скоку сочинника на відповідних трох субстанциях, то тут йде вже о зовсїм иньшу річ [3]). В тім случаю проявляє ся дїйсно незвичайна вразливість того сочинника на простірну будову моле-

---

[1]) Необхідним доповнюванєм однак синтетично-препаративних дослїдів є означенє темп. топленя кождої субстанциї, хочби вже тому, що ся температура є незвичайно вражлива на конституцию. Кожде неозначенє єї тодї, як до сего є нагода, сьвідчить лиш про брак розуміня єї великого значіня.

[2]) Супроти Хв. Редакциї був я звязаний невідкличним речинцем.

[3]) Здвоєнє ріжниці в сочиннику, хочби вона виносила лиш 0·36, спроваджує без порівнаня більший „розріст“ скорости (k) у висших температурах, чим здвоєнє скорости (k) при незміненім сочиннику.

кулів, незалежно як раз від їх „зложености“, від концентрациї, а навіть чи не від каталїзи, а іменно до певної міри від степеня чистоти материялу. (Цїлу експериментальну працю я трактував як ориєнтацийну і не уважав тому за вказане висилювати ся на найвисший степень педантичности в переведеню, яка нинї далаби ся тут осягнути).

Висше згадані правильности в безглядній скорости процесів, хоч як виїмково подибувані, сьвідчать також про се, що і вона є зависима від структури молекулів. Нинї однак се вже всесторонно виказано, як вона в першій мірі залежить від майже всїх иньших фізикальних впливів, які нинї прямо дають ся подумати.

Коли однак мій висше начеркнений погляд є вірний, тодї загально вже сконстатована „антибатия“ між безглядною скоростию процесів а їх сочинником температури стає досить зрозумілою і по части вияснєною. Вже примітивне [1]) рівнанє Goldschmidt'a, яке я попередно (стор. 17) зацитував, вказує на дуже близьку звязь між ними. Коли-ж тепер менї малоби удати ся виказати незвичайну вразливість сочинника температури на простірну будову молекулів, тодї мимо „найріжнїйших“ каталїтичних впливів на вартість скорости процесу, мусить в грубім приближеню лишити ся в результатї зовнішна звязь між ними і то в загальнім того слова значіню. Так бим собі тепер поясняв антибатию.

Піднести тут мушу один ще момент, котрого поминенє моглоби спровадити деяке непорозумінє мого пояснюваня.

На перший погляд можнаби обговорювану антибатию вичитати вже з „примітивного“ рівнаня Goldschmidt'a. В чімже малоби лежати ще моє додаткове пояснене, коли воно не має бути злишне. Коротка відповідь булаби така:

1) З самого вже понятя „степеня заслоненя“ реаґуючого центрум виходить антибатия сама з себе, без ніяких рахункових дедукций кінетичної теориї.

2) Можність відчитаня антибатиї з рівнаня Goldschmidt'a є що правда дуже корисною обставиною для єго теориї. В такім однак загальнім (приближенім) сформулованю сеї справи, як у него, не можнаби відважити ся зґенералїзувати теоретично антибатиї на всї дїйсні процеси, супроти а) незвичайного впливу каталїзи на їх безглядну скорість, б) сподїваного а мною виказаного невпли-

---

[1]) Примітивне, бо се є перший крок в пошукуваню кінетичної гіпотези, а радше приближеного моделю, після якого требаб собі уявити механїзм хемічної переміни. Те саме відносить ся і до теориї F. Krüger'a (гл. там loc. cit.).

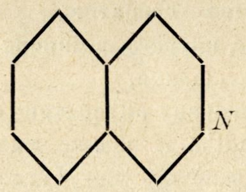
вання сеї каталїзи (принайменьше деякої) на сочинник, і в) неузгляднене взагалї будови молекулів в теориях так Goldschmidt'a, як і F. Krüger'a. Доперва коли приймемо моє пояснене неменьше анормальної вразливости сочинника на зглядне відслонене активного центрум, в змислї тої антибатиї, стає вона зрозумілою в розширенім (дїйснім) значіню, згідно з експериментальним ствердженем:

а) Сочинник температури є виключно залежний від положеня активного центрум в молекулї.

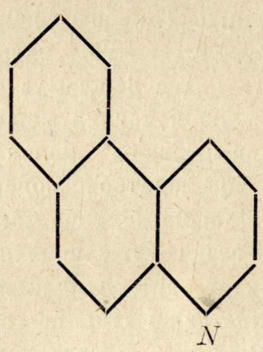
б) Безглядна скорість процесу є очивидно так само від того положеня відворотно залежною, не меньш однак крім того від цїлої серві иньших впливів, між иньшими пр. від загальної рухливости і положеня всїх ґруп в молекулї, так активних, як невтральних.

З самого зіставленя піридини, α- піколїни і коллїдини я не відваживби ся витягати всїх консеквенций, які тут ще насувають ся. Тому недавно перевів я кілька дальших ориєнтацийних визначень. Материял однак я вибрав так, щоби на нїм було досадно виказане зглядне заслонене чи закрите атому N в порівнаню з попереднім материялом в послїдній розвідці. Тому до зіставленя субстанций на стор. 10. і 11. я вибрав ще:

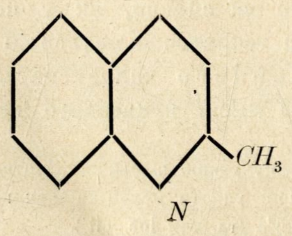
ізохінолїну:



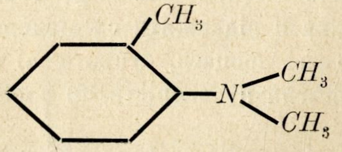
β - нафтохінолїну:



хінальдину:



дво - метильо - орто - толюїдину:



В змислї мого понятя релятивного заслоненя центрум (N) можна тут з гори предвидїти і сподївати ся таких вартостий (в приближеню):

для ізохінолїни: 2·5
„ β - нафтохінолїни: 3·0
„ хінальдини: висше від 3·0, коло 3·3
„ дво-метильо-орто-толюїдини: коло 2·5, евентуально навіть значно (неозначено) висше.

Для двох перших субстанций вийшли в досьвідї дїйсно зовсїм гладко числа: 2·53, 3·10, два дальші визначеня вийшли менї меньше удачно з результатом 3·3 [1]) і 2·7. В кождім случаю потверджене є надсподївано точне, так, що я відважую ся витягнути всї дальші теоретичні консеквенциї з висше сформулованого понятя. Вони є слїдуючі:

Передовсїм стає зрозумілою правильність, яку недавно сконстатував H. v. Halban. Вона звучить: мономолекулярні реакциї мають переважно значно висший сочинник температури нїж бімолекулярні, три- і т. д. Коли приглянемо ся треторядним амінам злученим пр. з C_2H_5I, то в них атом азоту є незвичайно глубоко схований в молекулї. Нема однак сумнїву, що і розпад такого молекула відбуває ся в тім самім місци, де находить ся N, то значить в місци закритім зі всїх сторін ріжними невтральними ґрупами. Коли лиш подумаємо собі, що той розпад заходить конечно через інтервенїюючу співучасть молекулів розчинника, тодї відразу будемо тут сподївати ся дуже високого сочинника температури. В своїй послїдній працї [2]) находить H. v. Halban цїлий ряд клясичних примірів, в котрих розпад таких тїл є злучений з дуже високим сочинником температури (4—5); але рівночасно показує ся, що той сам процес має зглядно дуже низький сочинник (1·9—2·5), коли реакция йде в противнім напрямі. На мій спосіб пояснює ся той факт так, що не „бімолекулярність“ сама в собі грає тут причинову ролю, лиш очивидне відкрите реаґуючих центрів. В дальшій консеквенциї цїле пересуване ся рівноваги при змінюваню температури дає ся спровадити на сю ріжницю сочинників. Ся консеквенция дає ся розтягнути аж до процесу диссоциациї ґазових тїл. Беручи на примір розклад:

$$I_2 \overset{k_1}{\underset{k_2}{\rightleftarrows}} I + I$$

---

[1]) від 3·2 до 3·45.

[2]) Die Rolle des Lösungsmittels usw. Zeitschr. f. phys. Chemie. Bd. 67. 1909.

можемо так сказати: сочинник скорости k_1 росте з температурою без порівнаня більше нїж k_2, з причини такої самої, як при амінах в розчині. На поодиноких атомах йоду мабуть треба приймити „сильні місця свояцтва“; а в такім случаю в двоатомовім молекулї I_2 тії місця повинні бути далеко більше обома атомами заслонені чим на поодиноких здиссоциованих складниках. А тодї і пересунене рівноваги з температурою є конечне, в змислї тім самім, що виказує експеримент і термодинаміка. Або формально можнаби подібно висказати ся за H. v. Halban'ом,

що реакция $I_2 \longrightarrow I + I$ є мономолекулярна,

а „ $I + I \longrightarrow I_2$ є бімолекулярна. Після мене однак лиш формально можна на сю ріжницю звести причину пересуненя рівноваги з температурою.

Метода визначеня поодиноких k_1 і k_2, отже визначеня чи не стану nascendi атомового йоду, є зовсім можлива і здає ся менї, навіть дуже легка. При найблизшій нагоді задумую тому перевести відповідні досліди.

Виїмки від формальної правильности H. v. Halban'а далиби ся легко моїм способом вияснити. Бо і мономолекулярні реакциї повинні виказувати малий сочинник температури, коли реаґуючі центри не є заслонені, лиш находять ся близько поверхнї сфери цїлого молекула. До певної міри можнаби се виказати і на моїх кількох дослїдах, попередно поданих. На иньшім місци обговорю се докладнїйше.

Поняте релятивного заслоненя активного центрум в молекулах має гарну анальоґію до кінетичної теориї тиску насиченої пари Boltzmann'а. На се звернув G. Mie 1) увагу, що Boltzmann зробив перший крок до фізичної інтерпретациї на пів емпіричних (термодинамічно видедукованих) виражень в рівнаню того тиску. В інтерпретациї Boltzmann'а висока вартість одної (міродайної) сталої відносного рівнаня є відворотно пропорциональна до вільного простору між молекулами, який стоїть до диспозициї перелетним поступовим рухам тих молекулів. Моє поняте булоби отже розтягненем кінетичної консеквенциї Boltzmann'а з молекулярних вільних просторів на міжатомові в поодиноких молекулах. Таке розширене чи доповнене згаданої консеквенциї промавлялоби сильно за чисто кінетичним характером хемічних процесів. (Воно не булоби рівнодушне з огляду на три недавно проголошені теориї сочинника температури, з котрих дві виходять з чистої кінетики, а трета лиш з термодинаміки).

---

1) Ann. der Phys. Bd. 11. 1903 S. 657. Zur kinet. Theorie der einatomigen Körper.

З тої точки погляду дає ся добре переінтерпретувати також знаменита дискусия всїх дотепер пропонованих рівнань сочинника (Berthelot, van't Hoff, Arrhenius), яку подав в своїй послїдній працї H. v. Halban. Найважнїйше однак є се, що суперечність сочинника в тавтомерних перемінах зі змислом рівнань van't Hoff'а, яку дуже оправдано підчеркує H. v. Halban, дає ся зовсім усунути при введеню мого поняття. З причини, що висьвітлене сеї справи вимагає більше місця, я задумую се в коротцї окремо публїкувати.

Липськ в грудни 1910

Про закон бігунового дуалїзму ґеометричних творів.

написав

В. Калїцун.

(B. Kalicun. Über das Gesetz der polaren Dualität in der Geometrie.)

Часть I. (I. Teil.)

[Два рисунки.]

Короткий погляд на історию розвою теориї бігунового дуалїзму.

1. Одною з прегарних спадщин по великім умі Poncelet'a є теория бігунового дуалїзму ґеометричних творів.

Вже Monge, сотворитель ґеометриї начеркової, подає кілька поодиноких примінень переміни одних творів ґеометричних на иньші, де точкам і простим одного твору відповідають прості і точки другого твору; в роцї 1806 Brianchon перемінює в подібний спосіб твердженє Pascal'a о шестикутнику, вписанім на кривій II-го степеня — на твердженє о шестибічнику, описанім на кривій II-го степеня; загальну одвак теорию бігунового дуалїзму розвиває по раз перший Poncelet в р. 1824 в своїй працї п. з. „Théorie générale des polaires réciproques".

В тій розвідцї Poncelet доказує, що бігуновий дуалїзм, в віднесеню до кривої II-го ст. або поверхнї II-го степ., є не тілько загальною методою трансформацийною всїх свійств начеркових ґеометричних творів, але дасть ся крім того примінити до певного рода получень метричних, обнятих одною назвою „получень метричних метових" (проекцийних). Через консеквентне приміненє тої методи до ґеометричних правд доходить відтак Poncelet до заключеня, що кождому свійству, кождому твердженю, в котрих виступають получення метові (так начеркові як метричні) між елементами площі або простору, відповідає бігуново иньше свійство, иньше твердженє; що отже ґеометрия розпадає ся на два ряди правд, які лучать ся зі собою і собі відповідають.

На дорозї вказаній Poncelet'ом поступив о крок наперед Gergonne, вельми заслужений математик француский, виказуючи, що взаїмність і лучність, яка панує між твердженями ґеометричними не є случайним вислїдом бігунових свійств з огляду на криві і поверхнї II-го степеня, але є основним свійством ґеометричних творів. Після сего закона, котрий Gergonne назвав „дуалїзмом“, відповідає пляніметриї точки — пляніметрия простої, стереометриї точки — пляніметрия площі.

Завзята і довголїтна суперечка, яка вивязала ся між Poncelet'ом і Gergonne'ом о першеньство відкритя сего закона дуалїзму, закінчив Steiner в р. 1832 в своїм творі п. з. „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“

„Закон дуалїзму“ — говорить Steiner в передмові до свого дїла — „появляє ся вже в елементарних творах основних, наколи теория бігунового дуалїзму є доперва вислїдом получення тих основних творів. Коли однак Gergonne міг тілько заобсервувати закон дуалїзму в первісних елементах ґеометриї, то в теориї бігунового дуалїзму виступає доказ сего закона. А що не брак рівнож і примірів, в котрих при помочи свійств бігунових доходить ся до нових, величавих вислїдів, проте не дасть ся заперечити, що Poncelet був перший, що підніс велике значінє закона дуалїзму, яко методи трансформацийної“.

2. З поміж многих розвідок Chasles'a, що відносять ся до сеї теориї, заслугують на увагу передовсім дві з них:

„Premier Mémoire sur la transformation des relations métriques des figures“ [Quet. Corr. Том 5, 1829].

„Sur la transformation parabolique des relations métriques des figures“ [Quet. Corr. Том 6, 1830].

Суть они дійсним доповненем теориї бігунового дуалїзму. Працї ті спонукали Poncelet'a до загальнїйшого розвиненя трансформациї параболїчної (ортоґональної) сполучень метричних в знаменитій розвідцї п. з.: „Note sur quelques principes généraux de transformation des relations métriques des figur“ [Quet. Corr., Том 7, 1832].

3. Способом загальним, не залежним від кривої II го ст., доходить до свійств бігунового дуалїзму на площі Möbius в своїй розвідцї п. з. „Der barycentrische Calcul“ [Липск 1827, том 1] Гадку Möbiusa доповняє і переносить на простор тривимірний Steiner в своїм повисше згаданім дїлї, а відтак Seydewitz, Staudt, Reye і прочі.

Möbius'ови завдячуємо рівнож „систем бігуново-зерових“. котрий відкрив в роцї 1833, розвязуючи задачу з механїки: „Вачеркнути дві сили, „котрі-би заступили даний систем сил, ділаючих на цїпке тіло“.

[Crelle's Journal für d. r. u. a. Mathematik, том 10].

В кілька лїт пізнїйше відкрив той систем рівнож Chasles [Comptes Rendus, 1843].

Про закон бігунового дуалїзму на площі.

I.

1 а) Нехай буде дана довільна точка P на площі стіжкового перерізу c^2.

Дві довільні прямі, переходячі через точку P, перетинають криву c^2 в парах точок A, B; C, D, котрі визначують чотирокутник $ABCD$, виписаний в тую криву; стичні a, b, c, d начеркнені відповідно в тих точках до кривої c^2, творять чотиробічник, описаний на тійже кривій [рис. 1). Звісно однак, що точки перекутні P, Q, R чотирокутника $ABCD$ лежать на перекутних p, q, r чотиробока $abcd$ [Dr. Łazarski, Zasady geometryi wykreślnej, том I, ст. 29]. З сего слідує, що точки U, V, в яких перекутня $-p-$ перетинає прямі AB, CD є гармонїчно спряжені з точкою P, з огляду на пари точок A, B; C D, —, с. є $(PUAB) = -1$, $(PVCD) = -1$.

Коли точки A, B і їх стичні a, b позістануть сталі, а тятива CD, переходяча через точку P, обертати ся ме около тоїж точки, тодї пряма $-p-$, що на нїй порушати ся ме точка V, позістане рівнож сталою, бо пряма та є визначена точкою U і спільною точкою стичних a і b. — Отже:

„Єсли тятива (CD) стіжкового перерізу (c^2) обертає ся около сталої єї точки P, тодї точка V, гармонїчно спряжена з точкою P, з огляду на точки C, D, — описує сталу пряму $-p-$“.

А що точка V є одинокою точкою гармонїчно спряженою з точкою P в ґрупі $(PVCD) = -1$, проте пряма $-p-$ є одиноким місцем ґеометричним, описаним точкою V. В той спосіб:

„З кождою дїйсною точкою (P), лежачою на площі стіжкового перерізу (c^2), є спряженя тільки одна дїйсна пряма (p), докладно визначена тоюж точкою (P) і перерізом стіжковим (c^2)“.

Пряму $-p-$ названо „бігуновою“ точки P, з огляду на перерів стіжковий c^2.

1 б) Звісно, що єсли з двох пар точок, які творять ґрупу гармонїчну, одна пара сходить ся в однїй точцї, тодї і трета точка тої ґрупи сходить ся з тою самою точкою. З того свійства слідує нове означенє бігунової:

„Бігунова $-p-$ точки $-P-$, з огляду на криву II-го ст. c^2, є тятивою стичности стичних, поведених з тої точки до даної кривої“.

Не трудно рівнож зі свійства чотиробічника $abcd$, описаного на кривій c^2, відразу здогадати ся, що:

„Єсли тятива (CD) стіжкового перерізу c^2 обертає ся около єї сталої точки P, то стичні c, d, вичеркнені до кривої c^2, в єї кінцях (C, D), перетинають ся на сталій прямій $-p-$, бігуновій точки P, з огляду на криву c^2“.

З тих самих причин, з котрих пряма $-p-$ є бігуновою точки P, є перекутні q, r відповідно бігуновими точок Q, R; або иньшими словами:

„Єсли в переріз стіжковий є вписаний чотирокутник $ABCD$, тоді боки єго трикутника перекутного є бігуновими протилежних вершків того трикутника“.

2 a) Приймім тепер на площі перерізу стіжкового c^2 довільну просту (рис. 1).

Дві пари стичних a, b; c, d, вичеркнених з двох довільних точок тої прямої до кривої c^2, утворять чотиробічник описаний на тій кривій, а їх точки стичности A, B; C, D, визначать чотирокутник вписаний в туюж криву; боки трибічника перекутного $p\,q\,r$ чотиробічника $a\,b\,c\,d$ переходять відповідно черев вершки P, Q, R трикутника перекутного чотирокутника $A\,B\,C\,D$. Коли означимо через u, v прості, що сполучають точку P з точками (a, b), (c, d) пересїчи стичних a, b, c, d, тоді зі свійств гармонїчних чотиробічника $a\,b\,c\,d$ слїдує, що пряма $-u-$ є гармонїчно спряжена з прямою $-p-$, з огляду на стичні a, b, — як рівнож проста $-v-$ є гармонїчно спряжена з тоюж простою $-p-$, з огляду на стичні c, d; се є: $(a\,b\,p\,u) = -1$, $(c\,d\,p\,v) = -1$.

При сталім положеню прямої $-p-$ і стичних a, b, нехай стичні c, d так по кривій c^2 порушають ся, щоби їх точка пересїчи позіставала завсїгди на прямій $-p-$; то пряма $-v-$ гармонїчно спряжена з прямою $-p-$, з огляду на стичні c, d, мусить переходити через тую саму точку P, бож точка та творить ґрупу гармонїчну з трома сталими точками A, B, U. Отже:

„Єсли точка пересїчи пари стичних c, d кривої II-го ст. порушає ся по сталій прямій $-p-$, то пряма $-v-$ гармонїчно спряжена з прямою $-p-$, з огляду на стичні c, d, переходить завсїгди через сталу точку P“.

А що через кожду точку прямої $-p-$ можна повести тільки одну пряму $-v-$ гармонїчно спряжену з $-p-$, з огляду на стичні c, d, що дають ся з тої точки повести до кривої c^2, проте точка P є одинокою спільною точкою для всїх прямих $-v-$.

Подібно отже — як через бігун є однозначно визначена єго бігунова, — так і навідворіть:

„З кождою дїйсною прямою (p), що лежать на площі стіжкового перерізу c^2, є спряжена тільки одна дїйсна точка (P), докладно визначена через тую пряму і криву c^2“.

Точку P названо „бігуном“ даної прямої, з огляду на переріз c^2.

2 б) З повисшої фіґури дасть ся вичитати прямо слїдуюче свійство:

„Єсли чотиробічник $a\,b\,c\,d$ є описаний на кривій II-го ст. c^2, тодї кождий вершок єго перекутного трибічника є бігуном протилежного бока того трибічника“.

Як рівнож:

„Єсли спільна точка стичних c, d до кривої II-го ст. c^2 порушає ся по сталій прямій $-p-$, то пряма, сполучаюча їх точки стичности, обертає ся около своєї сталої точки P, що є бігуном прямої $-p-$, в віднесеню до кривої c^2“.

3. Беру єще раз під розвагу чотирокутник $A\,B\,C\,D$, вписаний в криву II-го степ. c^2 і чотиробічник $a\,b\,c\,d$ описаний відповідно в вершках A, B, C, D на тійже кривій (рис. 1).

Після тверджень в уступах 1 б), 2 б) є боки p, q, r спільного перекутного трикутника обох чотирокутників бігуновими єго протилежних вершків P, Q, R; і взаїмно вершки P, Q, R того трикутника є бігунами єго протилежних боків p, q, r.

Єсли отже $-q-$ є боком трикутника перекутного, що сполучає єго вершки P і R, то єї бігун R є точкою спільною тятив $B\,D$ і $A\,C$; подібно бігун R бока $-r-$ знаходить ся в спільній точцї тятив $B\,C$ і $A\,D$.

Нехай при сталім положеню вершків A і B чотирокутника $A\,B\,C\,D$ бік $D\,C$ обертає ся около точки P; тодї прямі $A\,D$ і $B\,D$ (або $A\,C$ і $B\,C$) опишуть дві вязки проєктивні, о вершках A і B, а точки Q і R, яко точки пересїчи відповідних простих тих вязок з прямою $-p-$, утворять два проєктивні ряди. А що прямі (q) є перспективічні з рядом (R) [подібно як прості (r) є перспективічні з рядом (Q)], — проте маємо:

„Єсли пряма $-q-$, обертаючи ся около своєї сталої точки P, описує вязку $P\,(q)$, натодї бігун Q тої прямої, з огляду на криву II-го ст. c^2 [що лежить на площі вязки], описує на бігуновій $-p-$ точки P ряд $p\;(Q)$, проєктивний з вязкою $P\;(q)$“.

Однак легко мож запримітити, що пряма — p — мусить переходити через осередок вязок A (D) і B (D), з чого слїдує, що відповідні точки Q і R рядів (Q) і (R) суть замінні і творять інволюцию [Dr. Łazarski, Zasady geom. w. I, st. 16].

Коли проте назвем „бігунами спряженими", з огляду на криву II-го ст. c^2, такі дві точки (пр. Q і R), котрі посїдають свійство, що бігунова одної з них переходить через другу, а „бігуновими спряженими", з огляду на криву c^2, такі дві прямі (пр. q, r), з котрих одна переходить через бігун другої, тодї з тверджень попередних слїдує:

„Бігуни спряжені, з огляду на криву II-го ст. c^2, що лежать на прямій, творять інволюцию, для якої точки пересїчи тої прямої з кривою c^2 є точками подвійними. Та інволюция є отже гіперболїчна, параболїчна або елїптична, залежно від сего, чи підстава інволюциї перетинає криву c^2 в дїйсних точках, стикає ся з нею, чи перетинає ї в двох точках мнимих".

І навідворіть:

„Бігунові спряжені, в віднесеню до кривої II-го ст. c^2, що переходять через одну точку, творять інволюцию, для котрої стичні, начеркнені з даної точки до кривої c^2, є подвійними прямими. Та отже інволюция є гіперболїчна, параболїчна або елїптична, залежно від сего, чи дана точка лежить на вні, на обводї або в нутрі кривої c^2".

Нетрудно рівнож запримітити слїдуюче свійство:

„Вязка інволюцийна бігунових спряжених, що переходять через одну точку, є перспективічна з рядом бігунів спряжених, що лежать на бігуновій тої точки".

Розуміючи відтак через „трикутник бігуново спряжений", з огляду на криву II-го ст. c^2, — три точки, посїдаючі тоє свійство, що бігунова одного з них переходить через два иньші; подібно через „трибічник бігуново спряжений", з огляду на криву c^2, — три прямі, які посїдають свійство, що бігун одної з них є спільною точкою двох иньших, — тодї два перші з повисших тверджень дадуть ся слїдуючо висказати:

„Кожда точка P на площі перерізу стіжкового c^2 є спільним вершком безконечного множества трикутників бігуново спряжених з огляду на криву c^2, для котрих то трикутників бігунова — p — точки — P — є спільним боком. Пара вершків, що лежать на прямій — p — творять ряд інволюцийний, а пара боків, що переходять через точку P, творять вязку інволюцийну".

І взаїмно:

„Кожда пряма $-p-$ є спільним боком безконечного множества трибічників бігуново спряжених з огляду на криву c^2, для котрих бігун P тої прямої є спільним вершком. Пари боків, що переходять через тую точку, творять вязку інволюцийну, а пари вершків, що лежать на прямій $-p-$, творять ряд інволюцийний“.

4 а) Повисші получення, визначені з огляду на криву II-го ст. c^2, між елементами площі (π) і творами першого степеня тих елементів — становлять основне свійство закона бігунового дуалїзму на площі.

Після сего закона відповідає кождій точцї площі $-\pi-$ єго бігунова, і навпаки кождій прямій тої площі єї бігун, з огляду на криву II-го ст. c^2; рядови точок відповідає проєктивна з ним вязка прямих, і навпаки. Системови плоскому u, зложеному з точок, прямих, рядів точок і вязок прямих, відповідає иньший систем плоский u_1 (на тій самій площі), зложений з прямих, точок, вязок прямих і рядів точок, — при чім:

„Кождому твердженю, кождій дефініциї, конструкциї або задачі, в котрих є згадка о сполученях і свійствах метових між елементами або творами першого степеня системү u — відповідає иньше твердженє, иньша дефініция, конструкция або задача о сполученях і свійствах метових між елементами або творами першого степеня системү u_1, акі слідують з перших, коли поміняємо понятя: точка і пряма, діланя: перетинати і лучити, — оставляючи незміненими понятя: перспективічного положеня і відношеня подвійного поділу“.

Системи u і u_1 в той спосіб собі відповідаючі названо „системами бігуново зі собою спряженими“, в віднесеню до кривої II-го ст. c^2, котру названо „провідною бігунового дуалїзму“.

Замітка: З того, що сказалисьмо о бігуні і бігуновій легко можпізнати, що: 1) точкам і стичним підстави c^2, зачислюваним до одного з системів бігуново спряжених (н. пр. до u), відповідають стичні поведені в тих точках до кривої c^2, взглядно точки стичности тих стичних, належачі до другого системү (u_1)“.

2) Осередкови (S) провідної c^2 відповідає бігуново пряма в безконечности, і навідворіть: пряма в безконечности має за бігун осередок тої кривої“.

4 б) Нехай отже будуть дані в системі u дві вязки проєктивні прямих: W (a, b, c, . . .) і W_1 (a_1, b_1, c_1, . . .), котрі визначають, як звісно, криву другого степеня c^2; то вязкам тим відповідають бігуново, з огляду на провідну c^2, в системі u_1 два ряди проєктивні W (A, B, . . .) і W_1 (A_1, B_1, C_1, . .), котрі визначують криву другої кляси c^2. Точкам пересїчи прямих a і a_1, b і b_1, с. з.

точкам кривої c_1^2, відповідають прямі, що лучать точки A' і A'_1, B' і B'_1, ... т. є стичні кривої c^2; і навпаки стичним кривої c_1^2, котрі, як звісно, лучать по дві безпосередно по собі слїдуючі точки тоїж кривої, відповідають точки пересїчи, що двох безпосередно по собі слїдуючих стичних кривої c_2, с. є єї точка. Звідси одержуємо:

„Кривій II-го степ. c_1^2, що належить до систему u, відповідає в системі u_1, бігуново спряженім з u, крива кляси другої c_2“.

Такі дві криві c_1^2 і c_2, з котрих кожда має бігунові точки другої за стичні, будучи рівночасно місцем ґеометричним бігунів стичних другої, названо „кривими бігуново спряженими“, з огляду на c^2.

На основі замітки на попереднїй сторонї легко буде заприміти, що:

„Крива кляси другої c_2, бігуново спряженої з кривою другого степ. c_1^2, з огляду на криву c^2, є гіперболею, параболею або елїпсою, залежно від того, чи осередок S провідної c^2 лежить поза обводом, на обводї або на поли кривої c_1^2“.

З осередка S провідної c^2 дадуть ся випровадити до кривої c_1^2 дві стичні, котрі є: в першім случаю дійсні і ріжні, в другім случаю накривають ся, а в третім случаю є мнимі; стичним тим відповідають точки в безконечности кривої c_2, котрі отже є: в першім случаю обі дійсні і ріжні, в другім случаю накривають ся, а в третім случаю є мнимі спряжені.

Позаяк означеню бігуна і бігунової, з огляду на криву c_1^2, відповідає бігуново дуалїстично означене бігунової і бігуна, з огляду на криву c_2, проте маємо твердженє:

„Єсли точка P і пряма $-g-$ є бігуново спряжені, з огляду на криву c_1^2, тодї бігунова $-p-$ точки P і бігун G прямої $-g-$, з огляду на провідну c^2, є зі собою бігуново спряжені, з огляду на криву c_2, що відповідає бігуново кривій c_1^2“.

Звідси одержуємо слїдуюче твердженє:

„Осередок кривої кляси другої c_2, бігуново спряженої з кривою II-го ст. c_1^2, — є бігуном, з огляду на провідну бігунового дуалїзму c^2, — такої прямої, котра є бігуновою осередка кривої c^2, з огляду на c_1^2“.

Свійствам і твердженям кривої c_1^2, що полягають на проєктивности вязок прямих або рядів точок відповідають свійства і твердженя кривої c_2, що полягають на проєктивности рядів точок або вязок прямих. Приміром, твердженю Pascal'a о шестикутнику, вписанім в криву c_1^2, відповідає твердженє Brianchon'a о шестибічнику описанім на кривій c_2, і т. д.

Колиби криві II-го ст. c_1^2, $c_2^2 \dots$ творили вязку о основі $ABCD$, натоді криві кляси другої c'_2, $c''_2 \dots$, бігуново спряжені з попередними, утворилиби ряд, вписаний в основу $abcd$, причім свійства метові ряду відповідалиби бігуново дуалїстично тим-же свійствам вязки.

4 в) Коли точка P, порушаючи ся після певного закона на площі кривої провідної c^2, описує в системі U криву c, натоді бігунова — p — тої точки, з огляду на c^2, порушаючи ся після певного закона, обвине в системі U_1 криву c_1, бігуново спряжену з c. Єсли точка P займе безконечно близьке положенє на кривій c, с. з. порушить ся по стичній в тій точцї до кривої, то єї бігунова — p — оберне ся около своєї точки стичности, яка є навпаки бігуном стичної в точцї P до кривої c. З сего слїдує:

„Кожду з двох кривих c і c_1 бігуново зі собою спряжених, з огляду на криву II-го степ. c^2, можна уважати за обвідню бігунових точок другої або за місце ґеометричне бігунів стичних тоїж другої кривої“.

Коли точка P, описуючи криву c, переходить два, три, $\dots r$ разів тую саму точку D, виходячи кождим разом взагалї з иньшого положеня, тодї єї бігунова — p —, обвиваючи криву c_1, сходить ся два, три, $\dots r$ разів з тою самою прямою — d —, виходячи кождим разом з иньшого положеня. Звідси отже бачимо, що:

„Точці r — кратній і стичним в тій точцї одної кривої (c) відповідають бігуново дуалїстично стична r — кратна і єї точки стичности другої кривої (c_1)“.

Нетрудно буде рівнож доказати, що:

„Коли крива — c — є степеня m-го кляси n, то крива c_1, бігунового з нею спряжена є кляси m, степеня n-го“.

Бо m- точкам, в яких довільна пряма перетинає криву c, відповідає бігуново дуалїстично m- стичних, поведених з бігуна тої прямої до кривої c_1, а n- стичним, що дають ся вичеркнути з довільної точки до кривої c, відповідає n- точок кривої c_1, що лежать на бігуновій тої точки.

Звісно однак, що кляса кривої m-го степеня дасть ся означити рівнанєм: $n = m(m-1)$. Та многість вказує якраз на степень кривої c_1, бігуново спряженої з кривою c, з чого слїдувалоби, що кляса m кривої c_1 малаби вартість $m = m(m-1)[m(m-1)-1]$, а се після попередного твердженя повинно бути рівне рядови кривої c. Отже та сама крива — c — булаби раз m-го степеня, другий раз степеня $m(m-1)[m(m-1)-1]$, що є неможливе.

Тую суперечність повисших тверджень, знану під назвою „парадокса Poncelet'а“ ухилив Plücker, виказуючи, що крива висшого степеня ніж другого посїдає точки особливі, котрі знижають клясу, а крива висшої кляси ніж другої посїдає стичні особливі, котрі знижають степень кривої. А іменно:

„Точка подвійна знижає клясу кривої о дві, точка звороту о три одиниці. Стична подвійна знижає степень кривої о дві, а стична звороту (перегиная) о три одиниці“

Коли отже означимо через — δ — число точок подвійних, а через — $\varkappa$ — число точок звороту, одержуємо на означенє кляси кривої — c — рівнанє: $n = m\ (m - 1) - 3\,\delta - 3\,\varkappa$, котре в той спосіб зреконструоване виражає ряд кривої бігуново спряженої c_1.

Подібно, означаючи через — δ — число стичних подвійних, а через — i — число стичних перегиная, одержуємо на означенє ряду кривої — c — рівнанє: $m = n\,(n - 1) - 2\,\delta - 3\,i$, що виражає клясу кривої c_1.*)

Твердженям о многокутниках вписаних або описаних на кривій — c — відповідають бігуново дуалїстично твердженя о многобічниках описаних або вписаних в криву c_1, і на відворіть. Свійствам метовим вязки кривих — c — відповідають подібні свійства ряду кривих c_1, і т. д.

4 г) Приміри повисші виказують, що закон бігунового дуалїзму є загальною методою трансформацийною сполучень і свійств метових творів ґеометричних, до яких зачисляють ся всї свійства начеркові тих творів і сполученя взаїмного положеня їх елементів, що опирають ся на відношеню подвійного подїлу. Однак до получень метричних, в котрих виступають сталі величини довжин або кутів, або їх відношенє поєдинчого подїлу, — взагалї тої методи примінювати не можна, бо поняте довжини і кута не мають для себе понятий бігуново дуалїстичних.

Так приміром: Конструкциї прямих подвійних вязки інволюцийної відповідає бігуново дуалістично конструкция точок подвійних ряду інволюцийного, однак та відповідність не розтягає ся на визначенє нормальних вязки інволюцийного і осередка ряду інволюцийного. Рівнож не дасть ся перемінити при помочи тої методи слїдуюче твердженє: „Кожда стична в колї є нормальною до проміру, що переходить через єї точку стичности“.

---

*) Рівнаня повисші випровадив Plücker дорогою аналїтичною; дорогою синтетичною удало ся дійти до них Дрови Лазарскому в розвідцї п. з. „O wpływie punktów i stycznych szczególnych na rząd i klasę krzywych płaskich“ Sprawozdania Akademii w Krakowie — рік 1887.

Обсяг приміненя тої методи до сполучень метричних трохи ся розширяє, наколи за лїнїю провідну бігунового дуалїзму приймемо коло або параболю, як то в слїдуючім роздїлї наміряю виказати.

5 а) Нетрудно на основі розумовань, поміщених в уступах 1 б) і 2 б), запримітити, що бігунова довільної точки, з огляду на коло (k), є прямовісною до проміру того кола, яке переходять через дану точку. З причини того свійства коло може бути ужите з певною користю за криву провідну при бігуново дуалїстичній трансформацыї метричних получень.

Приймім отже на площі кола — k — кут $A\,B\,C$; то его раменам $A\,B$, $C\,B$ відповідають з огляду на коло — k —, бігуни A', C', що лежать на бігуновій — b — вершка B, котра є прямовісною до прямої, сполучаючої вершок B з осередком S даного кола — k —. Кут $A'\,S\,C'$, котрий творять прямі, сполучаючі осередок S з бігунами A', C' є рівний даному або є его сповненем; в кождім случаю оба кути посїдають рівні sinus'и. З того заключуємо:

„Коли дві фіґури плоскі є бігуново дуалїстично зі собою спряжені, з огляду на коло — k —, а між величинами кутів одної з них заходить певне полученє, то подібне получене заходити мусить між кутами, утвореними около середоточки S кола — k — через проміри, що переходять через бігуни рамен даних кутів".

Коли кут $A\,B\,C$, не зміняючи своєї величини, обертає ся довкола сталих точок A і C своїх рамен, натоді бігуни его рамен A', C' порушати ся муть на бігунових a, c точок A, C, причім кут $A'\,S\,C'$ буде мати рівнож сталу величину. А що вершок B даного кута, при повисшім руху, опише обвід кола — k_1 —, які переходить через точки A, C, проте его бігунова $A'\,C'$ обвине переріз стіжковий c^2, котрий є стичний до бігунових a, c і посїдає одно огнище в осередку S кола — k —. Отже:

„Крива бігуново спряжена з колом — k_1 —, з огляду на иньше коло — k —, є перерізом стіжковим c^2, котрий має одно огнище в осередку — S — кола — k —, а за провідну приналежну до того огнища, бігунову осередка кола k_1, з огляду на — k — "

Що ся тичить доказу другої части того твердженя, то належить запримітити, що стичним рівнобіжним кола — k_1 — відповідають бігуново точки кривої c^2, котрі лежать на тятивах, які переходять через осередок S кола провідного k, а тятивам, сполучаючим точки стичности тих стичних, відповідають точки пересїчи стичних в повисших точках кривої c^2. А що всї тятиви, що лучать точки стичности стичних рівнобіжних по — k_1 —, переходять через осередок того кола, проте точки пересїчи, що двох стичних кривої c^2, що їх тятиви стичности переходять через осередок S кола, провідною — k —, лежать на одній прямій, що є бігуновою осередка даного кола — k_1 —, з огляду на колю — k —. Однак та пряма є рівнож бігуновою точки S, з огляду на c^2, отже провідною тої кривої.

З повисшого твердженя слїдує відтак, що колам k_1, k_2 ..., довільно уміщеним на площі кола провідного — k —, відповідають бігуново дуалїстично криві c^2, $c_1{}^2$ ..., що мають в осередку S кола — k — спільне огнище. Отже:

„Розличні твердженя і свійства кутів у кіл можна перемінити бігуново дуалїстично на инші твердженя і свійства кутів, що належать до спільного огнища перерізів стіжкових“.

5 б) Трансформацию сполучень метричних при помочи параболї, яко провідної бігунового дуалїзму, назвав Chasles „параболїчною“, а Poncelet „ортоґональною“. Полягає она на слїдуючім свійстві:

„Бігунові двох довільних точок, з огляду на параболю, визначують на єї оси довжину, котра є рівна довжанї прямовісного мета на ту вісь довжини, що сполучає дані точки“.

І дїйсно, нехай через дані точки переходять дві прямі, прямовісні до оси параболї; то через бігуни тих прямих перейдуть відповідно бігунові даних точок. Звісно однак, що віддаленя тих бігунів від вершка параболї є рівні віддаленям тих прямих від тогож вершка. З того слїдує, що віддаленє тих бігунів — с. з. довжина визначена через бігунові даних точок на оси параболї — є рівна віддаленю прямовісних до оси параболї, що переходять через дані точки — т. є метови прямокутному довжини, сполучаючої дані точки.

Нехай отже A, B, C, D, E ... будуть точками фіґури плоскої, а $\varphi\,(AB,\ CD,\ EF, \ldots) = O$ сполученєм між довжинами єї боків. Натодї бігунові a, b, c, d, точок A, B, C, ... з огляду на параболю p^2, що лежать на площі тої фіґури, утворять другу фіґуру, бігуново дуалїстично спряжену з першою. Єсли α, β, γ, ... будуть означати точки, в яких бігунові a, b, c, ... перетинають вісь x — параболї — p^2 —, то з твердженя повисшого слїдує, що:

$$\alpha\beta = AB \cos (AB,\ x),\ \gamma\delta = CD \cos (CD,\ x),$$

Довжини AB, CD, обчислені з тих рівнань і підставлені в рівнанє $\Phi = O$ замінять єго на слїдуюче:

$$\Phi\left[\frac{\alpha\beta}{\cos\,(AB,\ x)},\qquad\right] = O.$$

Єсли послїдне рівнане буде того рода, що *cosinus*'и зі знаменників уступлять, так, що рівнане то прийме вид: $\Phi[\alpha\beta, \gamma\delta, \ldots] = O$, натоді представляти оно буде получене між довжинами, що належать виключно до другої фіґури, та виражати еї свійство, що відповідає бігуново дуалїстично свійству першої фіґури, представленому рівнанем $\Phi\ [A\,B,\ C\,D, \ldots] = O$.

II.

1. Часто два системи U і U_1, бігуново зі собою спряжені, з огляду на криву II-го ст. c^2, уважаємо за оден, називаючи его „системом бігуновим кривої c^2“.

В отсім роздїлї буду ся старати доказати, що свійство такого системи бігунового, представлене в I. роздїлї, істнує независимо від его провідної c^2, і що систем той є визначений, єсли будуть дані дві его бігунові спряжені і до них приналежні в тім системі ряди інволюцийні спряжених бігунів.

Нехай отже дані бігунові спряжені будуть прямі p_1, p_2 [рис. 2], а на них інволюцийні ряди спряжених бігунів нехай будуть визначені через пари спряжених бігунів: A, A_1; B, B_1 згляднo A', A_1'; B', B_1'.

Спільній точцї P прямих p_1, p_2 відповідає в інволюцийнім рядї (p_1) одинока з ним спряжена точка P_2, котра є бігуном прямої p_2, а в рядї інволюцийнім (p_2) відповідає ему одинока, з ним спряжена точка P_1, котра є бігуном прямої p_1. З того слїдує, що прямa $-p-$, що сполучає точки P_1, P_2 є одинокою бігуновою точки P.

Єсли хочемо для довільної прямої p_x визначити еї бігун P_x, треба визначити точки C_1, C_1', спряжені в даних інволюцийних рядах з точками C і C', в яких та прямa перетинає основи p_1, p_2 тих інволюций. Прямі, що лучать точки C_1, P_1; C_1', P_2 є бігуновими відповідно точок C і C'. Спільна точка P_x тих прямих є якраз одиноким бігуном даної прямої p_x.

Подібно відворотною конструкциєю буде можна для кождої точки P_x визначити однозначно еї бігунову p_x.

Звідси бачимо, що повисші данї позваляють „з кождою точкою (P_x) площі спрягти певну, однозначно означену пряму (p_x) — его бігунову; і взаїмно, з кождою прямою (p_x) спрягти певну, однозначно означену точку P_x — еї бігун“, подібно як то одержувалисьмо в I. роздїлї при помочи кривої II-го ст. c^2.

2. На основі повисшої конструкциї нетрудно буде відтак доказати, що „єсли точка P_y, порушаючи ся по прямій $-p_x-$, опи-

сує ряд (F_y), натоді єго бігунова p_y, обертаючи ся около бігуна P_x прямої p_x, визначить вязку (p_y), проєктивну з рядом (P_y)“.

Єсли іменно точка P_y порушає ся по прямій p_x, тоді прямі $P_1 P_y$, $P_2 P_y$ (рис. 2) описують дві перспективні вязки; спільні отже точки D' і D тих прямих зі сталими прямими p_2, p_1 визначать на тих послідних два проєктивні ряди. В виду того мусять бути рівнож проєктивні і ряди, визначені через точки δ' і δ, спряжені відповідно з точками D' і D в даних інволюцийних рядах спряжених бігунів на прямих p_2 і p_1. Однак з рисунку можна побачити, що єсли точка P_y зійде ся зі спільною точкою прямих p, p_x, то точки D і D' зійдуть ся з точками P_1 і P_2, якем в обох інволюціях відповідає одна і та сама точка P, що є спільною точкою прямих p_1 і p_2. Звідси слїдує, що ряди (δ) і (δ') є перспективічні, отже прямі (p_y), які лучать точки відповідні тих рядів, переходити мусять через одну і тую саму точку P_x, котра є бігуном прямої p_x; бо нетрудно запримітити, що коли точка P_y сходить ся з точкою C або C' пересїчи p_x з прямими p_1 і p_2, то пряма p_y сходить ся в першім случаю з прямою $C_1 P_1$, в другім случаю з прямою $C_1' P_2$, а ті перетинають ся якраз в точцї P_x, бігуні прямої p_x [стр. 13]. А що ряди (δ) і (δ') є проєктивні з рядом (P_y), проте вязка бігунових (p_y), переходячих через точку P_x, є проєктивна з рядом бігунів P_y, що лежать на прямій p_x.

Вязка (p_y) визначає на прямій p_x ряд точок (P_y') проєктивний з рядом (P_y). А що точки відповідні тих рядів є спряженими бігунами, проте є замінні і творять інволюцию, а тим самим їх бігунові [p_y і p_y'] є зі собою бігуново спряжені і творять інволюцийну вязку, котра є перспективічна з тим же рядом.

Тим робом отже доходимо до таких самих свійств як в I. роздїлї на стр. 5 і 6:

„Всї пари спряжених бігунів даного бігунового системy, що лежать на довільній прямій, творять інволюцийний ряд, подібно як всі пари спряжених бігунових, переходячих через тую саму точку, творять інволюцийну вязку. Ряд інволюцийний спряжених бігунів на прямій — p_x -- є перспективічний з вязкою інволюцийною спряжених бігунових, що переходять через бігун P_x тоїж прямої p_x“.

Так отже дїйсно систем бігуновий на площі є визначений, скоро є дані дві прямі бігуново спряжені в тім системі і до них приналежні інволюциї спряжених бігунів в тімже системі.

В подібний спосіб доказати можна, що систем бігуновий буде визначений: 1) через свої два спряжені бігуни і до них приналежні інволюцийні вязки спряжених бігунових; 2) єсли є даний єго трикутник бігуновий, оден бігун і єго бігунова.

3. Належало-би тепер спитати, чи є на площі бігунового систему (u):

а) такі точки, котрих-би бігунові переходили через них самих;

б) такі прямі, котрих-би бігуни на них самих лежали;

в) яке є місце ґеометричне — одних і других?

Звісно з попередного уступу, що єсли точка P_y порушає ся по прямій $-p_x-$, натодї єї бігунова $-p_y-$ зачеркує вязку около бігуна P_x прямої p_x, а пряма $-p_x-$ визначує на тій вязцї ряд (P_y'), котрий є проєктивний з рядом (P_y), творячи з ним інволюцийний ряд спряжених бігунів, приналежний до прямої p_x в данім бігуновім системі. Подвійні точки тої інволюциї будуть отже посїдати те свійство, що їх бігунові будуть переходити через них самих.

Приймім, що інволюцня спряжених бігунів на прямій $-p_x-$ є гіперболїчною, а єї подвійні точки є E і F; то кожда з тих точок є точкою подвійною всїх інволюцийних рядів спряжених бігунів, приналежних до прямих, що переходять через ті точки. З того бачимо, що на кождій прямій (l), переходячій через точку F, находить ся єще одна така Z, через яку переходить єго бігунова. Щоби отже визначити місце ґеометричне тих точок, треба-би обертати пряму p_x около єї подвійної точки F і вишукати другі точки подвійні (Z) інволюцийних рядів спряжених бігунів на тих прямих.

Шукані точки Z дадуть ся визначити при помочи слїдуючої конструкциї [рис. 2].

Нехай бігунова p_y точки P_y перетинає пряму p_x в точцї P_y', то точки P_y і P_y' є відповідними точками ряду інволюцийного спряжених точок на прямій p_x, творять отже ґрупу гармонїчну з подвійними точками E і F. Подібно річ має ся на довільній прямій $-l-$, пореходячій через точку подвійну F: пряма та перетинає ся з прямою p_y в точцї G, а з бігуновою $P_y \gamma$ тої точки в точцї G_1, котра є гармонїчно спряжена з точкою G, з огляду на точки подвійні F і єще не звісну точку Z. З того слїдує, що точка Z є точкою пересїчи прямої $-l-$ з прямою, що лучить другу точку подвійну E на $-p_x-$ з точкою γ, що є спряжена з точкою G в рядї інволюцийнім на p_y. Однак легко запримітити, що коли пряма $-l-$ обертає ся около точки подвійної F, то точки G визначає ряд (G), проєктивний з рядом (γ), визначеним точкою γ, бігуново спряженою з G, — пряма отже $E\gamma$ утворить вязку проєктивну з вязкою (l).

Ті дві проективні вязки визначують якраз шукане місце ґеометричне точок Z, котре отже є кривою II-го ст. c^2. Стичві до тої кривої c^2 в точках E, F будуть відповідати в тих вязках прямій, котра лучить їх вершки E і F. Є то отже прямі, що лучать точку P_x прямої p_y, бігуново спряженої зі спільною точкою P_y' прямих p_x і p_y — з точками E і F. А що точка P_x є бігуном прямої $-p_x-$, проте стичні $P_x E$, $P_x F$ є бігуновими точок E і F в данім бігуновім системі (u). — Отже бігунові системy бігунового (u), переходячі через свої бігуни, є стичними кривої c^2.

З повисшої конструкциї слідує, що трикутник $P_x E F$ є бігуново спряжений не тільки з огляду на даний систем бігуновий (u), але рівнож з огляду на стіжковий переріз c^2. Подібно пряма $P_y \gamma$ є бігуновою точки G, а пряма $P_y G$ є бігуновою точки $-\gamma-$ так з огляду на даний систем бігуновий, як рівнож з огляду на тойже переріз стіжковий c^2.

З повисших розумовань слїдує відповідь на поставлене питане:

„Місце ґеометричне точок в бігуновім системі плоскім, котрих бігунові переходять через них самих, є крива II-го степ. (c^2), яка є рівночасно обвідня всїх прямих, котрих бігуни лежать на них самих — так, що кожда точка тої кривої і в тій точцї єї стична є зі собою бігуново спряжені в тім-же бігуновім системі. Той отже переріз стіжковий містить точки подвійні всїх рядів інволюцийних спряжених бігунів того бігунового системy, котрі те ряди виступають на загалї прямих его площі, а стичні того переріза є прямими подвійними всїх вязок інволюцийних спряжених бігунових, приналежних в тім системі до загалу точок его площі. Той стіжковий переріз названо лїнїєю провідною даного бігунового системy, а сей послїдний не є нїчим иньшим — як загалом бігунів і бігунових, визначених з огляду на его лїнїю провідну так, що бігун і бігунова, з огляду на тойже переріз стіжковий, є ними і з огляду на даний бігуновий систем“.

4. Повисші розважаня і конструкциї були заложені на тім, що інволюция спряжених бігунів на прямій p_x була гіперболїчна, о дійсних точках подвійних (E, F). Однаковож не тратять они значіня і тодї, коли інволюция та єсть еліптична, о мнимих точках подвійних.

Взагалї легко є доказати — на основі розличних даних [ст. 14, 15], — потрібних до визначеня бігунового системy плоского (u), що ряди інволюцийні спряжених бігунів на прямих того системy могуть бути:

а) Частию гіперболїчні, частию еліптичні; такий систем зове ся „гіперболїчний“; крива провідна є дійсний переріз стіжковий (c^2).

б) Всї еліптичні; такий уклад бігуновий зове ся „еліптичний“; єго провідна є перерізом стіжковим мнимим.

в) Коли оден з двох рядів інволюцийних спряжених бігунів [p_1, p_2 на рис. 2], що служать до визначеня укладу бігунового (u), є параболїчний, приміром p_1, о подвійній точцї P_2, а другий ряд p_2 є гіперболїчний, о точках подвійних E_1, F_1, тоді точка P_2 є бігуном для кождої прямової на площі, і на відворіть, бігунова кождої точки на площі мусить переходити через тую точку P_2. З того слїдує, що вязка інволюцийна прямих, котрої вершок лежить в точцї P_2, а яка є перспективічна з даним інволюцийним рядом на p_2, визначує на кождій прямій приналежний до неї в данім укладї інволюцийний ряд спряжених бігунів.

Крива провідна того бігуновочо системy деґенерує ся на дві прямі, що сполучають точку P_2 з точками подвійними E_1, F_1 інволюцийного ряду на p_2.

Єслиби в повисшім случаю ряд гіперболїчний — p_2 — був заступлений рядом еліптичним, тодї крива провідна такого укладу бігунового булаби заступлена двома прямими мнимими спряженими.

Уклад бігуновий розважаний під в) зове ся „параболїчний“.

Отже дійсно, свійства бігунового плоского системy істнують незалежно від єго кривої провідної; виступають они навіть тодї, коли провідна є мнима.

III.

1. Особлива точка (M) площі бігунового системy (u), котра є бігуном прямої в безконечности, зове ся осередком, а прості, що через єї переходять, промірами тогож системy. Проміри спряжені бігунового системy (u) творять вязку інволюцийну (ст. 14), котрої прямі нормальні є головними осями, а прямі подвійні асимптотами системy. Але з твердженя на сторонї 16 слїдує, що повисші случайности бігунового системy сходять ся з тимиж провідної (c_2), з чого слїдує, що огнища тої кривої, які є вершками інволюцийних вязок нормальних бігунових спряжених, в віднесеню до тої кривої, посїдати мусять анальоґічні свійства для бігунового системy (u). Знані отже твердженя о огнищах перерізу стіжкового c_2 відносять ся і до бігунового системy u [Weyr. Projectivische Geometrie. Thl II, ст. 197].

„Пари прямих до себе нормальних і бігуново зі собою спряжених в системі бігуновім плоскім (u), визначують на головних осях того системy і прямій в безконечности пари точок інволюцийних рядів, котрих подвійні точки є огнищами того системy. Одна пара тих огнищ є завсїгди дїйсна, одна мнима, а одна сходить ся з мнимими точками коловими в безконечности“.

2. Кожду пряму l, що переходить через точку P бігунового систему u, можна уважати за одну з двох спряжених бігунових до себе нормальних того систему. Лучі l вязки $P\ (l)$ визначують на головній оси принятого бігунового систему ряд точок (L), котрий є проєктивний з рядом $(L\infty)$, після якого перетинає пряма в безконечности вязку $P\ (l)$ обернену о кут 90 степенів.

Коли (L') буде означати ряд точок, що відповідають точкам (L) в інволюцийнім ряді, котрого точки подвійні є огнищами на оси головній систему u, натодї нормальні (l'), вичеркнені з точок (L') до лучів вязки $P\ (l)$, є бігуново спряжені з тими прямими (l). А що ряди (L) і (L') є, як звісно, проєктивні, проте проєктивні є рівнож ряди $(L\infty)$ і (L'); отже прямі, що лучать їх відповідні точки, обвивають параболю. Параболя та, як легко запримітити, дотикає обох головних осий бігунового систему і має за провідну пряму, що лучить дану точку P з осередком M даного бігунового систему. Отже:

„Прямі (l'), бігуново спряжені в плоскім бігуновім системі з прямими (l), що переходять через сталу точку P, і до них нормальні, — обвивають параболю (p^2), котра має пряму PM, що лучить дані точки з осередком систему, за провідну і дотикає своїм обводом головних осий того систему і нормальних інволюцийної вязки бігунових спряжених, приналежної до тої точки P в данім системі. Кождій отже точцї (P) бігунового систему — u — відповідає певна означена параболя (p^2). Єсли однак точка P порушає ся по прямій l_0, тодї параболя p^2 — перебігає ряд параболь, вписаних в спільний чотиробік, котрий творять: дві головні оси бігунового систему, пряма в безконечности і пряма до даної l_0 нормальна і з нею бігуново спряжена. Провідні всїх тих параболь переходять через осередок даного бігунового систему“.

А що ряд (L') є проєктивний з рядом (L), проте мусить він бути рівнож проєктивний з вязкою $P\ (l)$; з того слїдує, що вязка (l') стичних до параболї p^2 є проєктивна з вязкою $P\ (l)$. Звісно однак, що такі дві вязки визначають криву III. степеня (c^3), для котрої точка P є точкою подвійною. [Weyr. Theorie der mehrdeutigen geometr. Elementargebilde....]. Отже:

„Прямі (l'), бігуново спряжені з прямими (l), що переходять через сталу точку P, і до них нормальні, перетинають ся з ними в точках кривої III-го степеня c^9, для котрої точка P є точкою подвійною, а нормальні інволюцийної вязки бігунових спряжених, приналежної до тої точки в данім бігуновім системі, є стичними тої кривої (c^3) в точцї P“.

Однак на основі попередних розумовань нетрудно запримітити, що:

„Крива та c^3 переходить через: огнища даного бігунового системи, точки мнимі колові в безконечности, безконечно далеку точку прямої PM, основи нормальних, вичеркнених з точки P до головних осий системи; врешті через точки подвійні інволюцийного ряду спряжених бігунів, що лежать на бігуновій точки P. Колиби точка P лежала на одній з головних осий системи, тоді крива c^3 складалаби ся з тої оси і кола, зачеркненого на промірі, ограниченім точкою P і точкою P', спряженою з P в інволюцийнім ряді, визначаючім огнища системи на тій оси. Колиби однак точка P була в безконечности, то крива c^3 складалаби ся з прямої в безконечности і рівнобічної гіперболї“.

3. При помочи повисшої кривої c^3 буде можна легко означити клясу кривої, котру обвивають нормальні лучі інволюцийних вязок спряжених бігунових плоского бігунового системи, що їх вершки лежать на певній прямій $-p-$. Іменно пряма $-p-$ перетинає криву III-го ст. c^3, належачу в тім системі до точки P, взагалї в трох точках, котрі посідають то свійство, що прямі, що лучать їх з точкою P, є осями трох інволюцийних вязок спряжених бігунових, приналежачих до тих точок в тім бігуновім системі. З того отже бачимо, що до шуканої кривої буде можна попровадити з довільної точки що найбільше три стичні, та отже крива є третої кляси. Звідси слідують твердженя:

„Нормальні лучі інволюцийних бігунових спряжених плоского бігунового системи, котрих вершки лежать на тій самій прямій $-p-$, обвивають криву третої кляси (c_3), що стикає ся з прямою $-p-$ в точці, в котрій перетинає її пряма з нею бігуново спряжена і до неї нормальна“.

Легко однак запримітити, що:

„Крива та стикає ся: з головними осями бігунового системи, з прямими, начеркненими нормально до тих осий в точках, в котрих їх дана пряма (p) перетинає, а крім того з прямою в безконечности. Єсли пряма $-p-$ переходить через одно з огнищ даного системи, тодї крива c_3 складає ся з того огнища і параболї, що має за своє огнище друге огнище бігунового системи на тій самій оси, а за провідну пряму $-p-$“.

4. Розумованя отсего роздїлу (III.) основують ся на інволюцийних рядах бігунового системи на его головних осях і прямій в без-

конечности, яких точки подвійні були огнищами того системи (ст. 17): Однак, як легко доказати, самі огнища не визначують докладно бігунового системи, і взагалї істнує безконечно богато бігунових системів плоских, що посїдають ті самі огнища. Криві провідні тих системів творять ряд стіжкових перерізів співогнищевих. З того заключаємо, що:

„Всї інволюцийні вязки спряжених бігунових, приналежні до довільноЇ точки P у всіх бігунових системах співогнищевих, посїдають спільні лучі нормальні. Ті отже системи посїдають: спільну параболю p^2 і криву III-го ст. c^3, які відповідають тій точцї P, подібно криву кляси третої c_3, що відповідає довільній прямій $-p-$“.

О бігуновім дуалїзмі в снопі.

1. Засади бігунового дуалїзму, виказані в попередних роздїлах для плоского системи, дадуть ся відразу перенести на сніп, уважаючи єго за перспективу того системи з довільної точки в просторі.

Коли отже зроблю мет плоскої фіґури на рис. 1 з довільної точки W, що лежить коло еЇ площі, тодЇ крива другого степеня c^2 буде кинена стіжком $W(c^2)$, кожда точка P лучем WP, а кожда пряма $-p-$ площею діяметральною Wp того стіжка; стичні отже a, b кривоЇ c^2 будуть заступлені площами Wa, Wb стичними до стіжка $W(c^2)$.

В виду того з твердженя на стор. 4 слїдує твердженє для поверхнї стіжкової II-го степеня:

„Коли діяметральна площа $W(CD)$ стіжковоЇ поверхнї $W(c^2)$ II-го ст. обертає ся около сталого, на нїй лежачого проміра WP, тодЇ промір WV, гармонїчно спряжений з проміром WP, з огляду на творячі стіжка WC, WD, після котрих та площа перетинає даний стіжок, лежить на однїй і тій самій площі діяметральній Wp“.

Площу Wp названо „площею бігуновою“ проміру WP, з огляду на поверхню стіжкову II-го ст. $W(c^2)$; лучить она, як легко запримітити, творячі стичности площ стичних, поведених через промір WP до тоЇ стіжкової поверхнї.

І на відворіть, з твердженя на ст. 4, 5 слїдує:

„Коли пряма пересїчи пари площ стичних (Wc, Wd) поверхнї стіжкової II-го ст. $W(c^2)$ порушає ся по сталій площі діяметральній Wv, гармонЇчно спряженій з площею Wp, з огляду на площі стичні Wc, Wd, натодї площа WP переходить завсїди через оден і той самий промір WP“.

Промір WP названо „проміром бігуновим“ площі Wp, з огляду на стіжок $W(c^2)$; є він прямою пересїчи площ стичних того стіжка вздовж творячих, після котрих єго перетинає площа Wp

Загал тих промірів і площ діяметральних стіжкової поверхні II-го ст., спряжених зі собою в повисший спосіб, зове ся „снопом бігуновим“ тої поверхні, для котрого та послїдна є „провідною“.

З розумовань в роздїлї II. поміщених бачимо, що стіжок провідний снопа бігунового може бути дійсний, мнимий або здеґенерований до двох площ дійсних або мнимих.

2. З тверджень о вязках, які заходять між елементами і творами I-го степеня плоского бігунового систему, легко буде здогадатись відповідних тверджень між елементами і творами I-го степеня бігунового снопа (W). І так з твердження на сторонї 5 (або 14) читаємо прямо:

„Єсли площа Wq снопа бігунового W, обертаючи ся около сталого, на нїй лежачого проміру WP, описує вязку площ, тодї промір WQ, бігуново спряжений з тою площею в данім снопі, описує на площі Wp бігуновій проміру WP — вязку лучів, проєктивну з тою вязкою площ“.

Називаючи відтак в снопі бігуновім W „промірами бігуново спряженими“ такі два проміри, що посїдають те свійство, що площа бігунова одного з них переходить через другий, а „площами діяметральними бігуново спряженими“ такі дві площі діяметральні, з котрих одна з них переходить через промір спряжений з другою, з тверджень на сторонї 5, 6 (або 14) слїдують твердженя:

„Пари промірів бігуново спряжених в бігуновім снопі W, лежачі на тій самій площі, творять інволюцийну вязку, для котрої творячі пересїчи тої площі з провідним стіжком $W(c^2)$ того снопа є лучами подвійними. Та інволюция є отже гіперболїчна або еліптична, залежно від того, чи площа дана перерізує провідний стіжок після двох творячих дійсних, є до него стичною або цілком єго не перерізує.

І взаїмно:

„Пари діяметральних площ бігуново спряжених в снопі бігуновім W —, а переходячі через той самий промір, творять вязку інволюцийну, для котрої стичні площі, поведені через той промір до провідного стіжка того снопа, є подвійними площами. Та інволюция є отже гіперболїчна, параболїчна або еліптична, залежить від сего, чи той промір лежить на вні, на поверхни або в нутрі того провідного стіжка“.

Однаковож легко запримітити, що:

„Вязка інволюцийна діяметральних площ бігуново спряжених в бігуновім снопі W, — що переходять через той сам промір, є перспективічна з вязкою інволюцийною бігуново спряжених промірів, що лежать на діяметральній площі, бігуново спряженій з тим проміром".

Три проміри бігунового снопа W, які посїдають те свійство, що площа бігунова одного з них переходить через дві дальші, зовуть ся „трійкою бігуново спряжених промірів" того снопа; подібно три площі діяметральні того снопа, які посїдають свійство, що промір бігуново спряжений з одною з них є прямою пересїчи двох иньших, зовуть ся „трійкою площ діяметральних бігуново спряжених" того снопа. — В виду того повисші твердженя дадуть ся слїдуючо висказати:

„Кождий промір бігунового снопа W є спільний для безконечного множества трійок бігуново спряжених промірів того снопа; що два дальші проміри тих трійок лежать на площі бігуновій проміра і творять інволюцию".

І взаїмно:

„Кожда площа діяметральна бігунового снопа W є спільною для безконечного множества трійок площ діяметральних бігуново спряжених в тім снопі; що дві дальші площі тих трійок переходять через промір бігуново спряжений з тою площею і творять вязку інволюцийну".

Увага: Легко є доказати, що поміж безконечним множеством трійок бігуново спряжених промірів в певнім снопі бігуновім W є взагалї: або тілько одна нормальна або всї ті трійки є нормальні. В тім другім случаю названо бігуновий сніп „ортоґональним"; повстає він, коли з кождим проміром кулї спряжемо єго площу діяметральну, нормальну до сего проміру. Стіжок асимптотичний кулї є стіжком провідним того снопа, що єго площа в безконечности перетинає після систему бігунового плоского, для котрого кривою провідною є мниме коло в безконечности.

3. Повисші получення між елементами і творами І го степеня бігунового снопа — становлять основне свійство „закона бігунового дуалїзму того снопа".

Після того закона відповідає кождому промірови снопа з ним бігуново спряжена площа діяметральна, і взаїмно; вязцї промірів відповідає з ним проєктивна вязка площ діяметральних. Творови (u), зложеному з промірів і площ діяметральних того снопа відповідає иньший твір (u_1), зложений з площ діяметральних і промірів того снопа -- при чім:

„Кождому твердженю, кождій дефініциї, конструкциї або задачі, в яких говорить ся о сполученях або свійствах метових між елементами твору — u —, відповідає иньше твердженє, иньша дефініция, конструкция або задача о сполученях метових між елементами твору u_1, — які слїдують з перших, коли замінимо взаїмно понятя: промір і площа діяметральна; дїланє: перетинати і лучити, лишаючи *однак ненарушеними понятя: перспективічного положеня* і відношеня подвійного подїлу“.

B. KALICUN: Über das Gesetz der polaren Dualität in der Geometrie.

I. Teil.

In dieser Abhandlung entwickelt der Verfasser das Gesetz des polaren Dualismus in der Ebene und im Bündel. Nach einer kurzen historischen Einleitung stellt er im I. Abschnitte die Abhängigkeit der projektivischen Eigenschaften der geometrischen Gebilde in der Ebene von einander vor, indem er diese Gebilde polarisch in Bezug auf einen Kegelschnitt verbindet, und weist nach, daß der polare Dualismus eine allgemeine Transformationsmethode der projektivischen Eigenschaften ist. Am Ende dieses Abschnittes benutzt er diese Methode zur Transformation einiger metrischen Eigenschaften der ebenen Gebilde, indem er zur Leitlinie einen Kreis bzw. eine Parabel annimmt. Im II. und III. Abschnitte zeigt der Verfasser daß das Gesetz des polaren Dualismus unabhängig von dem Leitkegelschnitte existirt.

Das Gesetz des polaren Dualismus im Bündel wird direkt von demselben in der Ebene ausgeführt, weil das Bündel als eine Projektion des ebenen Systems aus einem beliebigen Punkte des Raumes angesehen werden kann.

Рис. 1.

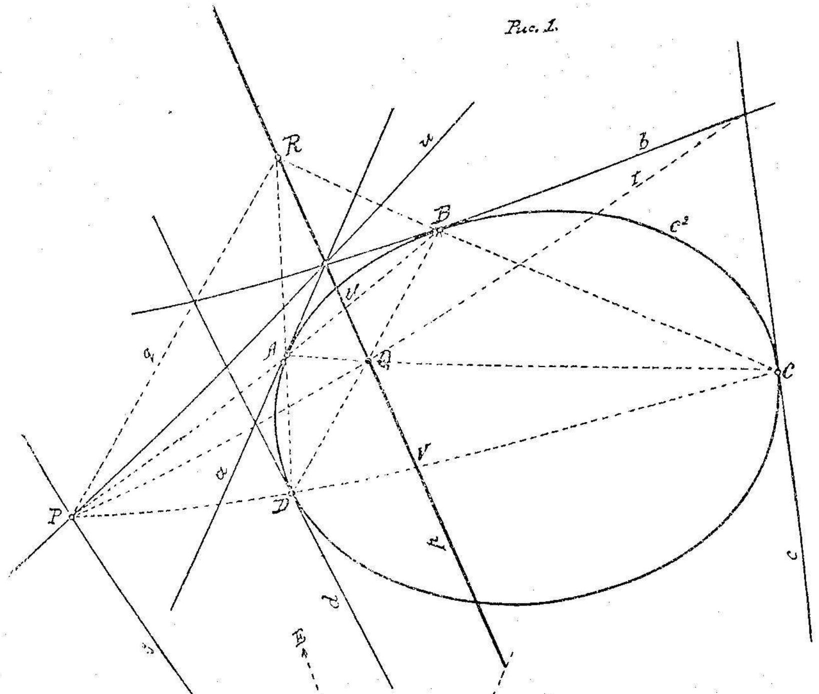
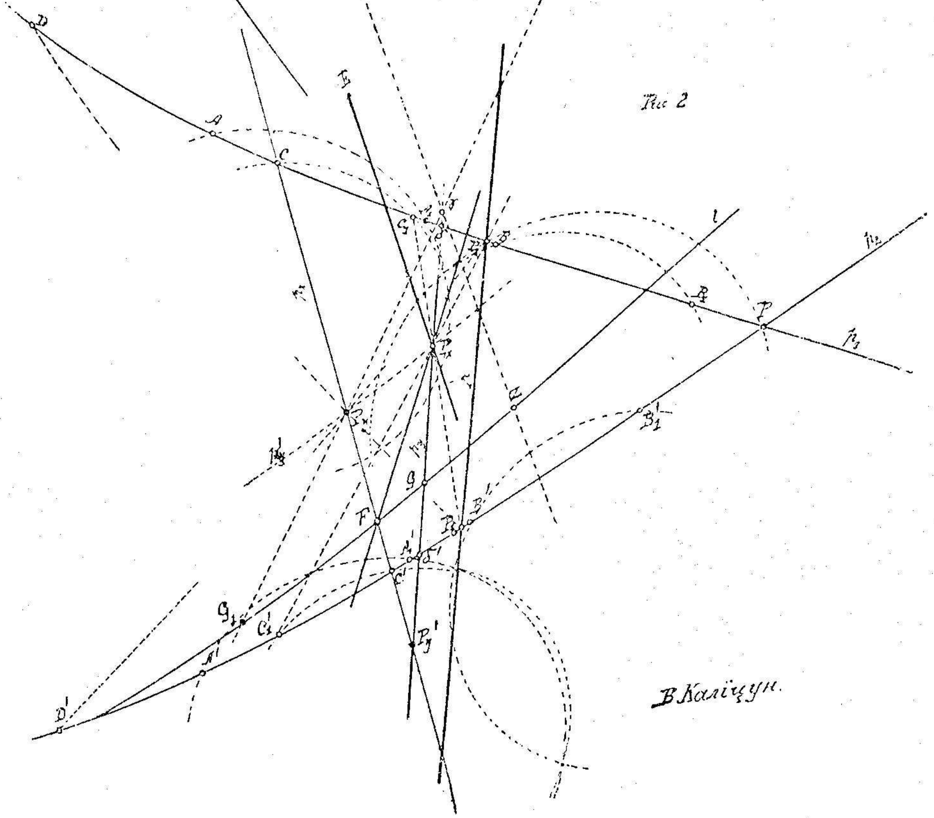


Рис 2



В Калiцун.

Приблизна конструкція правильного семикутника.

подав

Микола Чайковський.

(Angenäherte Konstruktion eines regulären Siebenecks).

---

1. Конструкція правильних многокутників, вписаних в коло, стоїть в тїсній звязи з розвязкою рівнаня

$$x^n - 1 = 0, \qquad (1)$$

де n є яке небудь цїле число. Знаючи, що

$$x = cos\frac{2k\pi}{n} + i\,sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (2)$$

можемо по приписам альґебраїчної розвязки рівнаня (1) відтяти на оси XX величину $cos\frac{2\pi}{n}$, а на оси YY величину $sin\frac{2\pi}{n}$; вони визначать точку P на обводї кола о лучи $r = 1$, який відтинає n-ту часть цілого круга кола, числячи від поземої оси.

Gauss подав спосіб альґебраїчної розвязки рівнаня (1); коли n є число перве, яке зменшене о 1 дає таке розложенє на перві числа

$$n - 1 = p_1 p_2 \cdots p_\nu, \qquad (3)$$

то розвязка рівнаня (1) зводить ся до розвязки рівнань степенїв $p_1 \cdot p_2 \cdot \quad p_\nu$.

Щоби таку розвязку можна начертати при помочи лїнїї і циркля, мусить складати ся ряд (3) з самих двійок, бо при помочи лїнїї і циркля можна сконструувати тільки корінї лїнїйних і квадратних рівнань. Щоби n було крім того первим числом, мусить воно мати вигляд $2^{2^\mu} + 1$, де μ є яким небудь цїлим числом. Для $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ маємо справдї перві числа тої форми; але для $\mu = 5$ одержуємо вже *зложене число, подїльне через 641, так* що не є певне, чи всї числа тої форми є перві, і котрі з них є зложені.

2. Випадок $n=7$ не належить до сеї категорії, бо $n-1=6=2.3$, отже має чинник 3, а кубічне рівнане не має ґеометричної конструкції. Альґебраічна розвязка веде до таких корінїв: 1; y_1, y_2. y_3; z_1, z_2, z_3, де y і z є корінями кубічних рівнань:

$$\left.\begin{array}{l} y^3-\varphi_1 y^2+\varphi_2 y-1=0, \\ z^3-\varphi_2 z^2+\varphi_1 z-1=0, \end{array}\right\} \quad (4)$$

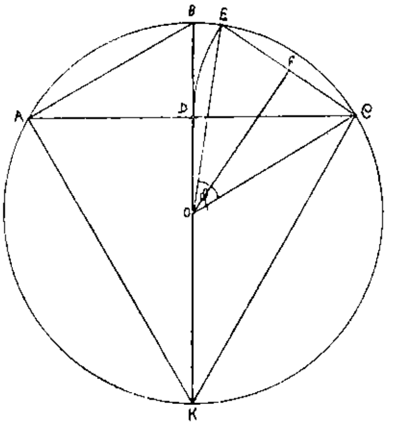
а:

$$\varphi_1=\tfrac{1}{2}(-1-i\sqrt{7}),$$
$$\varphi_2=\tfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{7}),$$

φ_1 і φ_2 можемо сконструувати ґеометрично, але не можемо сього зробити з корінями рівнань (4).

3. Все ж таки істнує спосіб приблизної конструкції правильного многокутника, вписаного в коло, який в практицї вистарчає навіть для дуже точних помірів.

В колї відтинаємо дві тятиви рівні лучеви, як при правильнім шестикутнику і лучимо з собою їх кінцеві точки. Половина тятиви AC, т. є половина бока рівнобічного трикутника, є дуже зближена до бока правильного семикутника.



Доказ. Назвім бік шуканого семикутника $EC=CD=x$; тодї маємо:

$$x=\tfrac{1}{2}AC=\frac{r}{2}\sqrt{3}=s_7$$

як висота в рівнобічнім трикутнику OAB.

З трикутника OCE виходить для кута φ:

$$sin\frac{\varphi}{2}=\frac{x}{2r}=\frac{1}{4}\sqrt{3},$$

а се дає:

$$\varphi=51^0 19' 04{\cdot}16''.$$

Огсей кут ріжнить ся від осередочного кута правильного, т. є від $\frac{2\pi}{7}=51^0 25' 42{\cdot}85''$, тільки о $6' 38{\cdot}69''$, так що 7φ ріжнить ся від 2π всього о $46' 33{\cdot}83''$. Отся ріжниця відповідає тятиві (або дузї) довжини $0{\cdot}0013544\,r$, так що при $r=1m$ будемо мати всього $0{\cdot}13$ *cm* блуду, який] можемо розділити на 7 частий по неповна $0{\cdot}02$ *cm*.

4. Знаючи бік семикутника і луч описаного кола, обчислимо легко луч вписаного кола $\varrho_7 = OF$ з $\triangle OEF$:

$$\varrho_7{}^2 = r^2 - \left(\frac{s_7}{2}\right)^2 = \frac{13}{16}r^2,$$

$$\varrho_7 = \frac{r}{4}\sqrt{13},$$

а звідси поверхню елементарного $\triangle OEC$:

$$f_7 = \frac{\varrho_7 s_7}{2} = \frac{r^2}{16}\sqrt{39}.$$

Обвід семикутника буде:

$$u_7 = 7s_7 = \frac{7}{2}r\sqrt{3}.$$

Львів 28. червня 1910.

RÉSUMÉ.

Die Konstruktion eines regelmässigen, dem Kreise eingeschriebenen Siebenecks ist. bekanntlich mittelst Zirkel und Lineal undurchführbar, weil die Lösung der Kreisteilungsgleichung $x^7 - 1 = 0$ die Lösung einer kubischen Resolvente erheischt.

Es existiert aber eine approximative Konstruktion des regulären Siebenecks, deren Annäherung so gross ist, dass sie in der Praxis sehr gut gebraucht werden kann.

Wenn wir dem Kreise ein gleichseitiges Dreieck ACK einschreiben, dann ist die Hälfte der Seite desselben beinahe gleich der gesuchten Seite des Siebenecks. Denn es ist $x = \frac{1}{2}AC = \frac{r}{2}\sqrt{3} = s_7$, und aus OCE folgt für φ:

$$sin\frac{\varphi}{2} = \frac{x}{2r} = \frac{1}{4}\sqrt{3},$$

woraus sich $\varphi = 51^0 19' 04.16''$ ergibt. Die Differenz $2\pi - 7\varphi$ ist $= 46'$ 33·83″, was einer Länge der Sehne (oder des Bogens) von 0·0013544 r entspricht. Für $r = 1m$ wäre die Korrektur 0·13 *cm*: 7 erforderlich; dies gäbe eine Verschiebung jeder Ecke des Siebenecks um beinahe 0·2 *mm*.

Метода Hermite'а
інтеґрованя вимірних функцій.

подав

Микола Чайковський.

(Hermite's Integrationsmethode von rationalen Funktionen).

§. 1. Інтеґрованє вимірних дробових функцій з многократними чинниками в знаменнику можна собі улекшити при помочи методи Hermite'a*) яка позваляє відлучити альґебраічну часть інтеґрала від перестуцної, без попереднього розкладаня на частинні дроби.

Інтеґрал

$$J = \int \frac{f(x)}{F\,x)} dx \tag{1}$$

виконуємо в той спосіб, що функцію $\frac{f(x)}{F(x)}$ розкладаємо на частинні дроби: коли $F(x)$ є многократні чинники, то частинні дроби будуть мати в знаменниках всі степені кождого чинника; інтеґруючи їх одержимо з кождого дроба альґебраічний інтеґрал, з виїмком тих, яких знаменники є однократні. Потім мусимо додати до себе всї альґебраічні інтеґрали.

Метода Hermite'a дає нам спосіб ощадити собі ту працю розкладаня на частинні дроби альґебраічної части і стяганя її в суму.

§. 2. Нехай буде

$$F(x) = \prod_{i=1}^{\mu} (x - a_i)^{\alpha^i} \prod_{j=1}^{\nu} (x^2 + b_j x + c_j)^{\beta^i} \tag{2}$$

знаменником інтеґрованої функції; степень тої функції є

$$s = \Sigma\, \alpha_i + 2\, \Sigma \beta_i,$$

степень чисельника $f(x)$ є що найменше $s_1 - 1$. Знаменник альґебраічної части інтеґрала буде обіймати всї чинники функції $F(x)$ в степенях о 1 низших ніж в $F(x)$, бо

---

*) Отсю методу подав Hermite в своїх викладах „Cours d' analyse"; одначе ніхто не користував ся нею, аж зробив про неї замітку Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, II. стр. 407. Про ту методу дізнав ся я від мого Вп. Професора Т. Цвойдзїнського.

$$\int \frac{dz}{z^n} = \quad \frac{1}{nz^{n-1}}$$

длятого маємо функцію

$$\Phi(x) = \prod_{i=1}^{\mu} (x - a_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{j=1}^{\nu} (x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_j -} \tag{3}$$

якої степень буде

$$s_2 = s_1 - \mu - 2\nu,$$

а степень чисельника $\varphi(x)$ що найвисше $s_2 - 1$. — Переступна часть буде мати в знаменнику всї чинники функції $F(x)$ однократно,

$$\Psi(x) = \prod_{i=1}^{\mu} (x - a_j) \,.\, \prod_{j=1}^{\nu} (x^2 + b_j x + c_j) \tag{4}$$

степеня

$$s_3 = \mu + 2\nu;$$

чисельник $\psi(x)$ буде степеня $\leqq s_3 - 1$. Маємо отже

$$F(x) = \Phi(x)\Psi(x); \tag{5}$$

звідси згідно з дефініціями

$$s_1 = s_2 + s_3$$

З того слїдує таке розділенє інтеґрала

$$J = \int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} + \int \frac{\psi(x)}{\Psi(x)} dx. \tag{1a}$$

§. 3. Зріжничкуймо рівнанє (1a) після x:

$$dJ = \frac{f(x)}{F(x)} dx = \frac{\Phi(x)\varphi'(x) - \Phi'(x)\varphi(x)}{\Phi^2(x)} dx + \frac{\psi(x)}{\Psi(x)} dx,$$

а позносивши знаменники маємо

$$f(x) = \frac{F(x)\varphi'(x)}{\Phi(x)} - \frac{F(x)\Phi'(x)\varphi(x)}{\Phi^2(x)} + \frac{F(x)\psi(x)}{\Psi(x)};$$

супроти реляції (5) є

$$f(x) = \Psi(x)\varphi'(x) \quad \frac{\Psi(x)\Phi'(x)}{\Phi(x)} \varphi(x) + \Phi(x)\psi(x). \tag{6}$$

Ріжничкуючи функцію (3) маємо

$$\Phi'(x) = (\alpha_1 - 1)\frac{\Phi(x)}{x \quad \alpha_1} + \ldots + (\beta_1 \quad 1)(2x + b_1) \cdot \frac{\Phi(x)}{x^2 + b_1 x + c_1} + .$$

або

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \sum \frac{\alpha_i - 1}{x - a_i} + \sum \frac{(\beta_j - 1)(2x + b_j)}{x^2 + b_j x + c_j} .$$

В знаменнику тої функції містять ся всї чинники функції $\Psi(x)$, отже

$$\frac{\Psi(x)\Phi'(x)}{\Phi(x)} = G(x) \tag{7}$$

є цілою функцією. Вставивши те в (6) одержуємо

$$f(x) = \Psi(x)\varphi'(x) - G(x)\varphi(x) + \Phi(x)\psi(x). \qquad \text{(6a)}$$

Степень того рівнаня є:
по лівій стороні; $\leqq s_1 - 1$;
по правій стороні (поодинокі виразн): $\leqq s_3 + s_2 - 2 = s_1 - 2$;
$\leqq s_3 + s_2 - 1 - s_2 + s_2 - 1 = s_1 - 2$; $\leqq s_2 + s_3 - 1 = s_1 - 1$,
отже по обох сторонах рівні.

Порівнуючи сочинники при x по обох сторонах рівнаня (6a), одержимо s_1 лінійних реляцій, з яких визначимо s_2 сочинників для функції $\varphi(x)$ і s_3 для функції $\psi(x)$.

Таким чином буде довершений розклад інтеґрала на альґебраічну і переступну часть.

§. 4 Примір. Квадратура еліпси веде до інтерала

$$E = \int_0^a y dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Підставляючи

$$\frac{a \quad x}{a + x} = z^2,$$

т. зн.

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2az}{1 + z^2},$$

$$dx = -\frac{4az}{(1 + z^2)^2} dz,$$

одержимо

$$E = 8ab\int^1 \frac{z^2 dz}{(1 + z^2)}.$$

Тут є:

$$F(z) = (1 + z^2)^3;\ f(z) = z^2;$$
$$(\Phi z) = (1 + z^2)^2;\ \varphi(z) = k_0 + k_1 z + k_2 z^2 + k_3 z^3$$
$$\Psi(z) = 1 + z^2;\ \psi(z) = l_0 + l_1 z;$$

звідси слідує

$$G\, z) = 4z,$$

отже маємо рівнане (6a)

$$z^2 = \begin{cases} k_1 + 2k_2 z + 3k_3 z^2, \\ \qquad + k_1 z^2 + 2k_2 z^3 + 3k_3 z^4, \\ - 4k_0 z - 4k_1 z^2, \quad 4k_2 z^3 - 4k_3 z^4, \\ + l_0 + l_1 z + 2l_0 z^2 + 2l_1 z^3 + l_0 z^4 + l_1 z^5 = 0 \end{cases}$$

яке дає: $k_0=0, k_1=-\frac{1}{8}, k_2=0, k_3=\frac{1}{8}; \ l_0=\frac{1}{8}, l_1=0,$

т. зн.

$$\varphi(x)=-\frac{1}{8}z+\frac{1}{8}z^2,$$

$$\psi(x)=\frac{1}{8}.$$

Звідси

$$E=8\,ab\left[\frac{-\frac{1}{8}z+\frac{1}{8}z^2}{(1+z^2)^2}+\frac{1}{8}\int_0^1\frac{dz}{1+z^2}\right]$$
$$=\frac{\pi ab}{4},$$

згідно з иншими обчисленями.

Тернопіль, 2. XII 1910.

RÉSUMÉ.

Die Hermite'sche Integrationsmethode dient dazu, im Integral einer rational gebrochenen Funktion mit mehrfachen Faktoren im Nenner, den algebraischen Teil vom transzendenten ohne Partialbruchzerlegung abzuspalten. Sei

$$J=\int\frac{f(x)}{F(x)}dx$$

das gesuchte Integral, worin $F(x)$ mehrfache Faktoren ersten und zweiten Grades besitzt, dann können wir schreiben:

$$J=\int\frac{f(x)}{F(x)}dz=\frac{\varphi(x)}{\Phi(x)}+\int\frac{\psi(x)}{\Psi(x)}dz;$$

die Funktion $\Phi(x)$ besitzt dieselben Faktoren wie $F(x)$, nur ihre Grade sind um 1 geringer; $\Psi(x)$ besitzt dagegen alle Faktoren von $F(x)$, aber nur einfach. Somit haben wir

$$F(x)=\Phi(x)\Psi(x).$$

Wir differenzieren das Integral nach x:

$$dJ=\frac{f(x)}{F(x)}dx=\frac{\Phi(x)\varphi'(x)-\Phi'(x)\varphi(x)}{\Phi^2(x)}dx+\frac{\psi(x)}{\Psi(x)}dx,$$

woraus wir nach einigen Umformungen bekommen:

$$f(x)=\Psi(x)\varphi'(x)-G(x)\varphi(x)+\Phi(x)\psi(x);$$

$G(x)$ bedeutet hierin die ganze Funktion $\frac{\Psi(x)\Phi'(x)}{\Phi(x)}$. Aus dieser Gleichung berechnen wir nach der Methode der unbestimmten Koefizienten die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$.

ПОКАЗЧИК

до Збірника математично-природописно-лїкарської секції Наукового Товариства імени Шевченка.

Т. I–XIII. Роки 1898–1909.

Зладив **Микола Чайковський.**

ВІД ВПОРЯДЧИКА.

Отсей показчик подїлений на 4 части. В першій подані всї оріґінальні працї, які появили ся в 13 перших томах »Збірника« (в числї 95), а і ті працї, які друковано перед появою »Збірника« в 13 перших томах »Записок« Наук. Тов. ім. Шевченка. В другій части зібрані всї матеріяли до української научної терміనольоґії (17 статий в »Збірнику« і 4 в »Записках«). Віддїлили ми їх тому окремо, що отся частина научної працї — творенє терміНольоґії з обсягу математично-природописних наук — у нас дуже важна.

Римське число при кождій статї означує том »Збірника«, арабські числа сторони, а число в скобцї з доданєм »м.« місце, на якім статя находить ся в книжцї.

В третій части зібрана бібліоґрафія зі всїх томів »Збірника« і деяких томів »Записок«. В тій части видалось нам відповіднїйшим упорядкувати імена авторів по латинській азбуцї, бо переважаюча більшість рецензованих книжок друкована не-українською азбукою. Українські та російські твори вставлено там, де їм належалось би місце в польській транскрипції. — Видавництво книжки подавано в скороченю[1]), з пропущенєм цїни і числа сторін. Рецензент зазначений *курсивом*: його імя

---

[1] **Скороченя:** med. = medizinisch, Monh. = Monatshefte, Bln. = Berlin, Lpz. = Leipzig, Tb. = Teubner (видавець), G. V. = Gauthier-Villars (видавець), Ztsch. = Zeitschrift, Wochschr. = Wochenschrift і т. д.

взяте в скобку, коли він підписував ся по кількох рецензіях нараз, або зовсім не підписував ся (як редактор цілої книжки). — Паґінація відносить ся до відділу, затитулованого »Справоздання і реферати« (в скороченю »Спр.«), »Звіти«, Бібліоґрафія та хроніка математично-фізична« (»Бібл.«), в X. томі »Літературні новини до ґеоґрафії України-Руси« »Л. Н«. а в XI. томі „Bacteroidae“ д. Я. Федюка („Bact.“). — Звіздкою (*) зазначені ті твори, які тільки вичислені в »Збірнику« без рецензії. Порядкове число взяте в скобки, означує, що розвідка друкована в »Записках«; ті числа взяті з »Показчика до Записок« для тт. I—XX. (Львів, 1898). Дотичний том »Записок« зазначений товстим друком.

Четверта часть містить в собі математично-фізикальну хроніку; вона розділена на такі ґрупи: 1. Personalia, 2. Математика, 3. Фізика й хемія, 4. Електроніка й радіоактивність, 5. Астрономія, 6. Космічна фізика й метеорольоґія, 7. Ріжні дрібні нотатки. В кождім відділї пороблені точні відсилачі.

По списї імен слїдує додаток в німецькій мові (Anhang), в якім подано заголовки всїх оріґінальних праць для ужитку чужинців, що не знають української мови.

Липень — Падолист, 1910. *М. Ч.*

I. Оріґінальні праці та розвідки.

1. **Бобяк** Гринько, Причинки до ліхенольоґії східної Галичини. Обрісники Перемисчини та Підгаеччини. VIII/2 1—8. (м. 6).
2. —, Причинки до микольоґії східної Галичини. Гриби околиці Бережан. XI. 1—41. (м. 5).
3. —, Про наші губи. VIII/2 1—22. (м. 5).

Верхратський Іван, Бібліоґрафія (*vide* **Turati** в бібл. частині).

4. —, Др. Іван Яхно. (Згадка посмертна). XI. 1—5. (м. 9).
5. —, Красавка брунявка (Arctia Caja L.). в двох поколїнях. XI. 3—5. (м. 7).
6. —, Михайло Поляньский. (Згадка посмертна). X. 1—6. (м. 1).
7. —, Нічна лівка на мотилів на ивиних цьвітах. III/2. 1—10. (м. 2).
8. —, Перепелиці (Coturnix communis) яко зимосонники. XI. 1—2. (м. 6).
9. —, Скілько часу потребують мотилї сьвіжо вилягглі до повного розвитку своїх крил? I. 1—4. (м. 5).
10. **Гвоздецький** Теофіль, др. Нові напрями в лїченю переросту припрутнї (hypertrophia prostatae). III/1. 27—30. (Справ. м. 5).
11. **Гірняк** Юлїян, др. Вплив температури на скорість декількох хемічних реакций. XIII. 1—19. (м. 3).
12. —, Замітки до рівнань моно- і бімолекулярної хемічної кінетики. XIII. 1—29. (м. 2).
13. —, О проводі тепла цукру у воднім розчині. XI. 1—11. (м. 2).
14. —, Про вплив синхронїчної зміни концентраций на хід мономолекулярної реакциї. XII. 1—14. (м. 2).
15. —, Про періодичні хемічні реакциї. XII. 1—8. (м. 3).

16. —, Роля сталої, плинної і ґазової фази в хемічній рівновазї. IX. 1—42. (м. 2).

17. **Глїбовицький** Клим, Микола Генрих Абель і его значінє в математицї. (З нагоди столїтних роковин его уродин). IX. 1—88. (З портретом Абеля) (м. 1).

18. —, Права руху маятника. (На основі теориї функций еліптичних). III/2. 1—14. (м. 3).

19. —, Рівнанє пятого степеня. II. 1—36. (м. 1).

20. **Горбачевський** Іван, проф. др., Загальний метод добуваня нуклеінного квасу з орґанів. Тимчасова звістка. III/1. 1—4. (м. 1).

21. —, О кристалїзованім ксантинї і ґуанїнї. I. 1—4. (м. 3).

22. —, Причинки до пізнаня виживи сільської людности галицького Поділя. V. 1—16. (м. 1).

23. —, Про виказанє закраски крови. VIII/1. 1—4. (м. 1).

24. —, Про повставанє товщи в звіриннім орґанїзмі. VIII/1. 1—4. (м. 2).

25. **Горницький** Зенон Евген, Проект елїпсоґрафу. X. 1—4 + табл. (м. 4).

26. **Дакура** Осип, др., Бактериольоґічні вислїдки посмертні а диягноза клїнїчна недуг інфекцийних. (Тимчасове донесенє). II. 1—14. (м. 4).

27. —, Дослїди з новою лїмфою (Tuberculin TR.) Роберта Коха. — Зі шпиталю Вільгельміни у Відни (директор Др. Тельґ. III/1. 1—9 + лїтература, стр. 10. (м. 3).

28. —, Заклад лїчебний для сухотників в Аллянд. II. 1—8. (м. 5).

29. —, Зі шпитальної казуїстики за рік 1899. Зі шпиталю Вільгельміни у Відни - Отакрінґу, дир. Др. Тельґ. (I. Embolia arteriae pulmonalis. II. Pyaemia. III. Tumor cerebri. IV. Кілька випадків erysipelas.) VI/2. 1—9. (м. 3).

30. —, Інтересний случай новотвору передного середгрудя. Зі шпиталю Вільгельміни у Відни — Оттакрінґу, дир. Др. Тельґ. V/1. 1—9. (м. 3).

31. —, Клїнїчні спостереженя що до подаваня урoферину. — Зі шпиталю Вільгельміни у Відни — Отакрінґу, директор др, Тельґ. V/2. 1—8. (м. 2).

32. —, Причинки до певного ставленя клїнїчної діяґнози тифа на підставі бактеріольоґічних дослїдів. — З шпиталю Вільгельміни у Відни, Оттакрінґ, директор Др. I. Тельґ. VIII/1. 1—10 + табл. (м. 3).

33. —, Причинок до діяґностики клїнїчної тифу кишкового. (Діязореакция Ерлїха і Серодіяґностика Відаля) I. 1—20. (м. 7).

34. —, Про вагу посмертних бактеріольоґічних дослїдів. — (Доповненє до працї в II. т.) (Зі шпиталю Вільгельміни, Відень — Оттакрінґ. Директор Др. Тельґ.) IV/1. 1—14. (м. 3).

35. — Стремлїня і здобутки теперішньої терапії. III/1. 1—24. + лїтер. стр. 25—26. (Справ. м. 5).

36. —, **Долинський** Маріян, др., З положничої казуїстики. V/1. 1—6. (м. 4).

37. —, Про лїченє рака родницї вприскуванєм extracti chelidonii majoris. — З клїнїки проф. Йордана в Кракові. IV/1. 1—3. (м. 5).

38. **Кобринський** Евген, др., Про лїченє „Ectopia vesicae“. З ческої хірурґічної клїнїки проф. Майдля в Празї. V/1 1—10. (м. 2).

39. **Кос** Михайло, др., Лїченє трахоми і других запалень злуч-

ниці іхтарґаном. IX. 1—4. (м. 7).

40. —, Очні хиби у новобранців. (Виклад виголошений 3. цьвітня 1902 в науковім товаристві військових лікарів в Перемишлю) IX. 1—10. (м. 5).

41. —, Про скіяскопію. (Відчит виголошений дня 10. падолиста с. р. [1899], на засїданю товариства військових лікарів в Перемишли)* V/2. 1—9 + табл. (м. 3).

42. **Кучер** Володимир, Основи електронїки. XIII. 1—68. (м. 1).

43. **Левицький** Володимир, др., Відношене ґеометриї метричної до метової. IX. 1—11. (м. 3).

44. —, Ґеометрия метова в оптиці ґеометричній (після теориї Ф. Кляйна). VIII/2. 1—12 + табл. (м. 1).

45. —, Дра Гільберта основи ґеометриї. VIII/2. 1—7. (м. 7).

46. —, Додаток до теориї дробів тяглих та ґрупи модулової. (Друга нота) VII/2. 1—8. (м. 5).

47. —, Докази істнованя інтеґралів рівнань ріжничкових. I. 1—30. (м. 2).

48. —, До теориї рядів степенних. VII/1. 1—10. (м. 1).

49. —, Електро-маґнетна теория сьвітла і филї електричні. II. 1—69. + табл. (м. 3).

(105). —, Еліптичні функциї модулові. **VII**. 1—28 + 2 табл. (м. 3).

50. —, Кілька уваг про форму інтерполяцийну Lagrange'a. IV/2. 1—8, (м. 2).

51. —, Клим Глїбовицький (згадка посмертна). XII. 1—6. (м. 5).

52. —, Кліматичні відносини Тернополя (на основі праць д. В. Саткого). IV/2. 1—6. (м. 3).

53. —, Клясифікация наук математичних. VI/1. 1—16. (м. 3).

54. —, Короткий начерк теориї функций автоморфних. VII/1. 1—29 + табл. (м. 3).

55. —, Математика теоретична а практична. (Погляди проф. Ф. Кляйна). VIII/2. 1—14. (м. 8).

56. —, Найновійші праці з теориї. функций аналїтичних. VII/2. 1—12. (м. 4).

57. —, Осафат Петрик. (Некрольоґ). II. 2 стор. (без паґінациї, м. 8).

58. —, Причинок до подїлу рівнань другого степеня. II. 1—6 + табл. (м. 2).

59. —, Причинок до теориї дробів тяглих і ґрупи модулової. IV/2. 1—8. (м. 1).

60. —, Про зерові місця функциї $\zeta(s)$. X. 1—3. (м. 3).

61. —, Про переступ чисел *e* і *π*. I. 1—28. (м. 1).

(107). —, Про симетричні вираженя з вартостий функциї mod. *m*. **IV**. 124—139.

62. —, Теория перстенїв Сатурна. VII/2. 1—46. + табл. (м. 1).

Марішлєр Юліян, др., *vide* **Озаркевич** Евген, др., і **Марішлєр** Юліян, др.

63. **Матвіяс** Софрон, Дещо про лучі Бекереля (Becquerel). VII/1. 1—8. + табл. (м. 2).

64. —, Новійші розслїди над лучами Бекереля. VIII/2. 1—6. (м. 2).

65. **Морачевська-Окуневська** Софія, др., Вплив температури на осмотичне тиснене еритроцитів. — Із фізіольоґічної лябораториї проф. дра Бека у Львові. III/1. 1—10. (м. 2).

66. **Морачевський** Вячеслав, др., Нові способи досліду білковини. VI/2. 1—11. (м. 2).

67. —, Переміна материї при акромеґалиї. IX. 1—6. (м. 6).

68. **Озаркевич Евген**, др., Досліди над пропасницею (malaria). IV/1. 1—17. (м. 2).

69. —, Значінє і метода при дослїдах над переміною материї. III/1. 1—12 (м. 4).

70. —, Про уробілїнну жовтачку (Urobilinicterus). VI/2. 1—10. (м. 1).

71. —, і **Марішлєр** Юлїян, др., Дослїди над переміною матерпї при зменшаючій ся і збільшаючій ся черевній опухоли (ascites). — З клїнїки внутрішних недуг проф. Антона Ґлюзїнського у Львові. V/1. 1—15. (м. 1).

72. **Олїйник** Михайло, др., Про нападову гемоґльобінурию (Paroxysmale Haemoglobinurie). З клїнїки проф. дра Найссера у Відни. V/2. 1—4. (м. 4).

73. **Примак** Федір, Єще кілька слів про глезу (thymus) риб кістноскелетних (Teleostei) з узглядненем осклївців (Ganoidei) і кругоротих (Cyclostomi). (Інститут анатомії порівнательної ц. к. Унїверситета у Львові). VIII/2. 1—11. (м. 3).

74. —, Причинки до істориї розвитку і інволюцпї желези thymus у риб кістноскелетних (Teleostei). (Інститут анатомії порівнательної ц. к. унїверситета у Львові). VII/2. 1—26. + табл. (м. 3).

(108). **Пулюй** Іван, професор др., Апарат до міряння ріжницї фаз межи перемінними протоками і кілька за єго помочю зроблених помірок. **III.** 1—23.

75. —, Безпечна стация телефонів. VI/1. 1—6 + 2 табл. (м. 1).

76. —, Електрична централка Гогенфурт фірми Г. Спіро і синове в Крумляві. X. 1—35 + 16 таблиць (м. 5).

77. —, Кругова діяграма генераторів для перемінних прудів. X. 1—24. (м. 2).

78. **Раковський** Іван, др., Bronislavia Radziszewskii. Нова рідня і новий рід семейства Ховзятковатих (Gammaridae). VIII/2. 1—14 + 4 табл. (м. 4).

79. —, Причинки до анатомії порівнательної судин кровних у хробаків. I. 1—14 + табл. (м. 4).

(109). —, Причинок до пізнання будови проводу кормового у пявки лїкарскої. **IX.** 1—6 + табл. (м. 4).

80. — 81. **Рудницький** Стефан, др., Знадоби до морфольоґії підкарпатського сточища Днїстра (Mit einem deutschen Résumé). X. 1—83. (Résumé 84—85). (м. 6).; XI. 1—77, 80 (Résumé 78—79). (м. 3).

—, Лїтературні новини для ґеоґрафії України-Руси. X. 1—17. (м. 8). (vide в бібл. части **Rehman** і **Uhlig**).

82—83. —, Про плями сонїчні, часть перша. VII/1. 1—27. (м. 4). Часть друга. VII/2. 1—90. (м. 2).

84. —, Фізична ґеоґрафія при кінци XIX столїтя. (Наукова хронїка за 1898, 1899 і 1900 р.) IX. 1—116. (м. 4).

85. **Сельський** Щасний, др., До механїки нормальних і патольоґічних змін положеня матерниці. (Руська термінольоґія I. Верхратського). I. 1—14. (м. 6).

86. —, Спірні питаня про відхилїн родиниці (retroflexio uteri). IV/1. 1—16. (м. 1).

87. **Сидоряк** Семен, Про ногастки (Myriopoda) зібрані в Галичині в протязї року 1897). III/2. 1—14. (м. 1).

88. Студия анатомічна над взаїмними відношенями снаряду слухового і міхура плавного у риб шарановатих (Cyprinidae) і вюноватих (Cobitidae). VI/1. 1—50. + 4 табл. (м. 2).

89. **Соловій** Адам, др., Причинок до перерваня родниці (Ruptura uteri). Сполучене перерване зводу і шийки підчас породу при луковатій проділеній одношийковій родниці. (Uterus arcuatus septus unicollis). — З клініки положничо-ґінекольоґічної проф. А. Чижевича у Львові. IV/1. 1—7. (м. 4).

90. **Стефанович** Емілїян, Зведене інтеґралів еліптичних. XI. 1—14. (м. 1).

91. **Федюк** Ярослав, Bacteroidae. I. Перегляд лїтератури. XI. 1—48 (м. 4). (*vide* дотичні твори в бібліоґр. відділї).

(114). **Черняхівський** О., др., Пристрій до мірення сили скорочень уразу (uterus). **II.** 114—118 + табл.

(111). **Ч.** О., др., Випадок vesaniae melancholicae, скоре і цілковите видужанне після самоповішення. **XIII.** 1—12. (м. 3).

92. —, З'їзд британської асоциациї наук. II. 1—3. (м. 7).

(112). —, Неовіталїзи і його хиби. **IX.** 1—20. (м. 3).

93. —, VI. Пироговський з'їзд лїкарів у Київі. I. 1—38. (м. 8).

94. —, VII. Інтернаціональний ґеольоґічний з'їзд у Петербурзї. II. 1—4. (м. 6).

95. **Янович** Володимир, др., Цілковите вилїчене вовка (lupus) за помочию Kalium hypermanganicum. V/2. 1—2. (м. 5).

(114). * *, Патольоґічні переміни в ячку (мудї) при деяких інфекцийних хоробах. **VI.** 1—4. (м. 5).

II: Матеріяли до української научної термінольоґії.

96. **Верхратський** Іван, Виразня мінеральоґічна. XIII. 1—64. (м. 4).

97. —, Нові знадоби до номенклятури і термінольоґії природописної, народної. XII. 1—84. (м. 1).

22 а. **Горбачевський** Іван, др., Словарець до праці: »Причинки etc.«. V/2. 5. (м. 7).

98. —, Уваги о термінольоґії хемічній. X. 1—7. (м. 7).

99. **Грабовський** О., Терміни записані з уст народних. III/1. 7. (м. 6).

100. **Г.** Я., Кілька слів про термінольоґію. III/1. 1—2. (м. 6).

101. **Гр.** Яр., Витяг термінольоґічний з цілого випуску. III/1. 7—13. (м. 6).

49 а. **Левицький** Володимир, др., Додатки до термінольоґії електричної та оптичної. II. 70—72. (м. 3).

(105 а). —, Додаток до термінольоґії математичної. **VII.** 29—30. (м. 3).

102. —, Материяли до математичної термінольоґії. Часть перша, математика елементарна. Часть друга, математика висша. VIII/2 1—33. (м. 9).

(106). 103—104. —, Материяли до фізичної термінольоґії. Часть перша (механіка), **XI.** 1—12. (м. 3). Часть друга (механіка течий, ґазів, тепло і метеорольоґія). Часть трета (маґнетизм, електричність і електротехніка). III/1. 1—13. (м. 4). Часть четверта (акустика і оптика, астрономія і космоґрафія). VIII/2. 1—12. (м. 10).

105. —, Начерк термінольоґії хемічної. IX. 1—12. (м. 8).

106. **Невестюк** Яків, др., Материял термінольоґічний (букви А, В, С). III/1. 3—7. (м. 6).

107—111. **О.** Е., др., Термінольоґічний витяг з цілого випуску. IV/1. 35—40. (м. 7). V/1. 48—51. (м. 6). V 2. 1—4. (м. 7). VI 2. 51—53. (м. 5). VIII/1. 67—69. (м. 5).

(108 а). **Пулюй** Іван, др., Додатки до руської термінольоґії. **III.** 24.

75 а. —, Причинок до руської термінольоґії. VI/1. 7. (м. 1).

112. **Рудницький** Стефан, др., Начерк ґеоґрафічної термінольоґії. XII. 1—151. (м. 4).

III. Бібліоґрафія.

113. **Abadie,** Nature et traitement du glaucome. (Arch. d'ophtalm. 1899. Nr. 2). *(Др. Михайло Кос).* V/1. 38—39. Спр.

114. **Abderhalden**, Die Beziehungen der Wachstumsgeschwindigkeit des Säuglings zur Zusammensetzung der Milch beim Hunde, beim Schwein, beim Schaf, bei der Ziege und beim Meerschweinchen. (Ztschr. f. phys. Ch. B. 27. H. 4—5) *М.* V/2. 4—5. Спр.

*115. **Abel**, Abhandlungen über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen. (Ostwalds Klass. Bd. 111). *(В. Л.).* VII/2. 16. Бібл.

116. **Abraham** Max, Theorie der Elektrizität, II. Bd. Elektromagn. Theorie der Strahlung (2 Aufl., Lpz. Tb. 1908). *В. К.* XIII. 18—19. Бібл.

*117—119. **Acta** mathematica (Stockholm) T. 24., зош. 1—2. (1900) *(В. Л.).* VII/2. 17. Бібл. — T. 24., зош. 3—4, (1900—1). *(В. Л.).* VII/2. 5. Бібл. — T. 25., зош. 1—2. (1901) і 3—4. (1902). *(В. Л.).* IX. 31—32. Бібл.

*120. **Adámek** A., Měřictví pro školy mistrovské, odborné a řemeslnické (Praha 1897, Jedn. česk. Math.). *В. Л.* VI/1. 19. Бібл.

121. **Adler**, A., Fünfstellige Logarithmen, (Lpz. 1909. Sml. Gösch.). *М. Ч.* XIII. 9—10. Бібл.

122. **Ahrens** A., W., Dr., Mathematische Spiele. (Lpz. 1907. Tb.). *В. Л.* XII. 6. Бібл.

123. **Aldor**, Untersuchungen über die Verdauungs- und Aufsaugungsfähigkeit des Dickdarmes. (Zbl. f. inn. Med. N. 7. 1898). *Е. О.* V/1. 9—10. Спр.

124. **Alexandroff** I., Aufgaben aus der niederen Geometrie (Lpz. Tb. 1903). *(В. Л.).* X. 16—17. Бібл.

125. **Alving** E., Influance de la voie et du mode d'introduction sur le develloppement des effects immunisants du serum antidittérique. (C. R. t. 127., 1898). *М.* IV/1. 6. Спр.

126. **Ambronn** L., Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde (Bln., Springer, Bd. I—II. 1899). *В. Л.* VII/2. 15. Бібл.

American Journal. of Mathematics, *(vide)* **Journal.**

127. **Andogsky,** Zur Frage über die Ganglienzellen der Iris. (Arch. f. Aug. XXXIV. 1897). *(Я. Грушкевич).* III/1. 47—48. Спр.

128. **Andoyer** H., Theorie de la lune (Paris, Naud, 1902). *С. Р.* IX. 22. Бібл.

129. **Anjeszky,** Über Immunisierung gegen Wuth mit normaler Nervensubstanz. (Zbl. f. Bakt. 1900). *О. Д.* V/2. 17—18. Бібл.

*130—132. **Annalen**, mathematische (Lpz. Tb.) 54, зош. 1—2, (1900), зош. 3 (1901). *(В. Л.).* VII 2.

18. Бібл. — Т. 54, зош. 4 (1901). Том 55; зош. 1—2 (1901). *(В. Л.)*. VIII/2. 3—4. Бібл. — Том 55, зош. 3—4. (1902). Том 56. зош. 1—3 (1902). *(В. Л.)*. IX. 30. Бібл.

*133. **Annales** de l'école normale supérieure, Сер. III. Т. 18. зош. 10—12. (1901). Т. 19, зош. 1—9. (1902). *(В. Л.)*. IX. 33. Бібл.

*134. **Annales** of Mathematics (Harvard University), (Сер. 2). T. 2. Nr. 3—4, T. 3. Nr. 1. (1901). *(В. Л.)*. VIII/2. 8. Бібл.

*135—136. **Annales** of Mathematics (London), (серія 2), т. 2. Nr. 2. (1901). *(В. Л.)*. VII/2. 20. Бібл. — T. 3. Nr. 1—4 (1901—2). *(В. Л.)*. IX. 36. Бібл.

*137—139. **Annali** di matematica pura ed applicata, (Milano) (серія 3). T. V. зош. 2 (1901). *(В. Л.)*. VII/2. 20. Бібл. — T. V. зош. 3—4. (1901). *(В. Л.)*. VIII/2. 8. Бібл. — T. VI. (1901). T. VII. (1902). T. VIII. зош. 1 (1902). *(В. Л.)*. IX. 36—37. Бібл.

140. **Appell** P., Eléments d'analyse mathématique à l'usage des ingénieurs et des physiciens (Paris, Carré et Naud 1898). *(В. Л.)*. VII/2. 13—14. Бібл.

*141. —, Traité de mécanique rationelle T.I. (Statique, dynamique du point, 1893). T. II. (Dynamique des systèmes, mécanique analytique, 1896.) T. III. (Équilibre et mouvemeut des milieux continus, 1900). (Paris, G. V). *(В. Л.)*. VII/2. 13—14. Бібл.

142. — et **Lacour** E., Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications (Paris, G. V. 1897). *В. Л.* IV/2. 4. Бібл.

*143. **Арбузовъ** В., Сборникъ аритм. задачь для учениковъ средн. учебн. завед. (Москва) *(В. Л.)*. VII/1. 7. Бібл.

*144—145. **Archiv** der Mathematik und Physik Grunert's, (Lpz. Tb.) Третя серія, T. I. зош. 1—2, 3—4. (1901). *(В. Л.)*. VIII/2. 2—3. Бібл. — T. II. зош. 1—4. (1901—2), T. III., зош. 1—4. (1902). *(В. Л.)*. IX. 28—30. Бібл.

146. **Arldt** C., Die Funkentelegraphie (Lpz., Thomas, 1903). *В. Л.* IX. 24. Бібл.

147. **Arndt**, Über atonische Blutungen des Uterus und ihre Behandlung (Ther. Mh. 1898). *В. Г.* IV/1. 12—13. Спр.

Artault, *vide* **Scrini et Artault**.

148. **Atwater** W., Über die Entbindung von Stickstoff aus seinen Verbindungen und die Aufnahme athmosphärischen Stickstoffs durch Pflanzen. (Am. Chem. Journ. vol. 8. 1886). *Ярослав Федюк*, XI. 14. Bact.

*149. **Auerbach** F., Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre (Lpz. Tb). *(В. Л.)*. X. 29. Бібл.

150. —, Die Weltherrin und ihr Schatten (Jena, Fischer, 1902). *(В. Л.)*. VIII/2. 29. Бібл.

151. —, Taschenbuch für Mathematiker und Physiker (Lpz. Tb. 1909). *В. Л.* XIII. 8—9. Бібл.

152. **Ausset** et **Raviart**, Un cas d'ophtalmophlégie nucléaire progressive (La presse méd. 1900). *(Др. Михайло Кос)*. VI/2. 36—37. Спр.

153. **Авербах** Ф., Цариця сьвіта і еї тінь (перекл. Яків Николаєвич, Львів, 1904). *(В. Л.)*. X. 33. Бібл.

154. **Babeau** I., Des differants modes d'élimination de la chaux chez les rhachitiques et des diverses périodes du rhachitisme (C. R. t. 126, 1898). *М.* III/1. 39. Спр.

155. **Babes** V., Sur le traitement de la rage par l'injection de substance nerveuse normale. (C. R., t. 126). *Е. О.* III/1 40. Спр.

56. **Bachmann** Paul, Grundlehren der neueren Zahlentheorie. (Lpz. 1907. Gösch., SS.) *М. Ч.* XIII. 6—7. Бібл.

157. **Bäck**, Heilung eines Falles von schwerem Pannus trachomatosus durch ein intercurrentes Erysipel. (Klin. Mh. f. Aug., 1900). *(Др. Яр. Грушкевич).* VI/2. 40. Спр.

158. **Badal**, Trois cas de kératocone. (Arch. d. opht. 1901, Nr. 8). *М. К.* VIII/1. 11. Звіти.

159. **Bahrdt** Wilhelm, Physikalische Messungsmethoden. (Lpz. Sml. Gösch. 1906). *В. Л.* XII. 7. Бібл.

160. **Barbarin** P., La géometrie non-euclidienne (Paris, Naud, 1902). *В. Л.* IX. 7. Бібл.

161. **Barret**, Ein Fall von Filaria im menschlichen Auge (Arch. f. Aug. XXXIV. 1897). *Я. Грушкевич,* III/1. 52. Спр.

*162. **Barret** Hugo, Dr., Geschichte der Chemie (Lpz. Sml. Gösch. Bd. I. 1905, Bd. II. 1906). *В. Л.* XII. 12. Бібл.

163. **Baum**, Über die Anwendung und therapeutischen Indikationen des Jodipins. (Ther. Mh. 1901, Nr. 7). *Е. О.* VIII/1. 39—40. Звіти.

164. **Beck** T., Beiträge zur Geschichte des Maschinenbaues. (Bln., Springer, 1900). *В. Л.* VII/2. 15. Бібл.

165. **Beco de Liège**, Note sur la valeur de l'agglutination par le serum antityphique expérimental comme moyen de diagnostic entre le bacille d'Eberth et les races côliformes. (Zbl. f. Bakt. XXVI). *О. Д.* V/2. 13—14. Спр.

166. **Behring** E., Über Heilprinzipien. insbesondere über das aetiologische und das isopathische Heilprinzip. (D. med. Wschr. Nr. 5. 1898). *О. Д.* III/1. 59—62. Спр.

167. **Beijerinck**, Über die Natur der Fäden der Papilonaceen-Knöllchen. (Zbl. f. Bakt. XV. 1894). *Ярослав Федюк,* XI. 35. Bact.

168. **Bein** W., Dr., Elemente der Akkumulatoren, ihre Theorie und Technik (Lpz. Barth, 1908). *В. Л.* XII. 10—11. Бібл.

169. **Bendix**, Zur Cytodiagnose der Meningitis. (D. med. Wochschr. 1901, Nr. 43). *В. Г.* VIII/1. 50. Звіти.

170. **Benecke** F., Über die Knöllchen an Leguminosen-Wurzeln. (Bot. Ztsch. 1887. 1). *Ярослав Федюк,* XI. 20—21. Bact.

171. **Benedikt** und **Schwarz**, Grundzüge der Typhusdiätetik.(Münch. med. Wschr. 1899. Nr. 6). *М.* V/1. 8—9. Спр.

Benoit, *vide* **Noel** et **Benoit.**

*172. **Bernoulli** Jakob, Wahrscheinlichkeitsrechung (Ostwald Klass. I—II., III—IV. чч. 107—8). *(В. Л.).* VII/2. 16. Бібл.

173. **Bernstein**, Dr., Oophorin bei Osteomalacie. (Münch. med. Woch. 1898, Nr. 14). *(М.).* III/1. 33. Спр.

174. **Berger**, Sur un cas d'endotheliom (La Sem. méd. 1899, 52. Ac. de Sc. 1899). *Е. К.* V/2. 32. Спр.

175. **Bernheimer**, Anatomische und experimentelle Untersuchungen über die corticalen Sehcentren. (Klin. Mbl., 1900). *(Др. Яр. Грушкевич),* VI/2. 48—49. Спр.

176. **Berthelot** M., Sur la fixation directe de l' azote gazeux de

l'athmosphère par les terres végétales. (C. R. 104. 1887. 1). *Ярослав Федюк,* XI. 20. Bact.

177. **Besredka** (du lab. de M. Metchnikoff). Du role des leucocyts dans l'intoxication par un composé arsénical soluble. (An. del' Int. Past. XIII). *Д.* VI/2. 17—18. Спр.

178. **Beutel** Eugen, Algebraische Kurven. Erster Teil: Kurvendiscussion (Lpz. 1909. Sml. Göch). *М.* Ч. XIII. 5—6. Бібл.

178 bis. **Beyerinck** M. W., Die Bacterien der Papilionaceen-Knöllchen (Bot. Ztg. 1888). *Ярослав Федюк*, XI. 22—23. Bact.

179. **Bezold**, W., Theoretische Betrachtungen über die Ergebnisse der theoretischen Luftschiffahrten (Brschg. Vw. 1900). *(В. Л).* VIII/2. 33. Бібл.

*180—181. **Bibliographia** mathematica rossica (bug. „Физ. мат. общ." в Казани, ред. Д. Синцов). (1897). *В. Л.* VI/1. 19. Бібл. (1898). *(В. Л.)* VII/1. 7. Бібл.

*182. **Bibliotheca** mathematica (журнал присв. історії мат. наук; Lpz. Tb.). III. серія. Т. II. зош. 1. (1901). *(В. Л.).* VII/2. 17. Бібл.

183. **Biegański** Władysław, Zagadnienia ogólne z teoryi nauk lekarskich (Варш. 1897). *Я. Грушкевич*, III/1. 30—31. Спр.

184. **Biernacki** E., Dr., Weitere Beobachtungen über spontane Blutsedimentirung. (Ztsch. f. phys. Ch. XXIII. 5). *М.* III/1. 34—35. Спр.

185. **Billwiller,** Über Stickstoff-Assimilation einiger Papilionaceen, deren Bedeutung für die Landwirtschaft unter specifischer Berücksichtigung schweizerischer Verhältnisse. (In.-Diss. Bern 1895). *Ярослав Федюк,* XI. 35—36. Bact.

(194). **Бѣлый,** Кобеляксъка земська медична комісия (рос.). (Земскій Врачъ 1894). *О. Ч.* **VIII.** 7. Н. Хр.

186. **Білик** Іван, Dwie zasady termodynamiki. (Spr. gimn. Brzeżany, 1899). *В. Л.* VI/1. 4. Бібл.

*187. — , Soczewki jako podwójne źwierciadła. (Spr. I. gimn. Kołomyja, 1902). *(В. Л.).* VIII/2. 11. Бібл.

188. — , dto. *С. М.* IX. 25. Бібл.

189. **Bloch**, Dionin als schmerzstillendes Mittel in der Praxis. (Tb. M. 1899, Nr. 8). *Е. О.* V/2. 31—32. Спр.

*190. **Blochmann** R., Luft, Wasser, Licht und Wärme. (Lpz. Tb.). *(В. Л.).* X. 29. Бібл.

191. **Blum,** Über den Nährwert der Heteroalbumose des Fibrins und der Protoalbumose des Casein. (Ztsch. f. phys. Ch. XXX. H. 12). *М.* VI/2. 6—7. Спр.

192. **Blumenthal,** Über Sidonal, ein neues Heilmittel. (Протокол з засїданя тов. берл. лїк. — Zbl. f. inn. Med., 1900, N. 13). *Е. О.* VI/2. 28—29. Спр.

193. **Boas,** Die interne Behandlung der Hämorrhoiden (Th. d. Geg.) 1899. N. 10). *Е. О.* VI/2. 29—30. Спр.

(166). **Богдановичъ,** Пережитки давнього сьвітогляду у Білорусів (рос.). (Научн. Обозр. 1894). *О. Ч.* **VIII.** 4. Н. Хр.

194. **Bohland,** Über die Einwirkung der Hidrotica und Antihidrotica auf den Leukocytengehalt des Blutes. (Zbl. f. inn. Med. 1899. N. 15). *М. Вахнянин.* V/1. 20—22. Спр.

*195. **Boltzmann** L., Vorlesungen über Gastheorie. 2. Theil (Lpz. Barth). *(В. Л.).* VII/1. 6. Бібл.

— , *vide* **Festschrift.**

196. **Bondi**, Die klinischen und anatomischen Augenhintergrundserkrankungen eines Falles von Leukaemia lienalis. (Prag. Med. Wschr. 1901, Nr. 26). *М. К.* VIII/1. 10. Звіти.

197. — , Über die Indicationen zur Operation des Alterstaares. (Wiener Med. Presse. 1901, Nr. 30). *М. К.* VIII 1. 11—12. Звіти.

198. **Bönninger**, Über die Methode der Fettbestimmung im Blut u. den Fettgehalt des menschlichen Blutes. (Ztsch. f. kl. Med. 42. I—II.) *М.* VIII 1. 1—2. Звіти.

199. **Bonola** Roberto. Die nichteuklidische Geometrie autoris. deutsche Ausg. von Dr. H. Liebmann, Lpz. Tb. 1908. *В. Л.* XII. 7. Бібл.

200. **Bordet**. Le mécanisme de l'agglutination. Ann. de l'inst. 1899. Nr. 3 *О. Д.* V/2. 8—9. Спр.

201. **Borel** Émile. Leçons sur la théorie des fonctions. (Paris G. V. 1898 *В. Л.* VI 1. 1—2. Бібл.

202. — . Leçons sus les fonctions entières. Paris, G. V 1900). *(В. Л.)*. VII 2. 3—4. Бібл.

203. — , Leçons sur les fonctions méromorphes (Paris, G. V. 1903). *В. Л.* IX. 13—20. Бібл.

204. — , Leçons sur le séries à termes positifs. Paris, G. V. 1902). *В. Л.* IX. 8—13. Бібл.

205. — , Leçons sur les séries divergentes. (Paris G. V. 1901). *В. Л.* VIII 2. 18—22. Бібл.

206. **Bouchand**, Essai de la cryoscopie de urines. (C. R. 129, 1899). *М.* V 1. 2. Спр.

207. **Bourget**. Zur Behandlung der Influenza und der grippenartigen Infectionen. [?] *О. Г.* VIII/1. 60—61. Звіти.

208. **Bouty** E., Progrès de l'Electricité. Oscillations hertziennes. (Paris 1899). *В. Л.* VI/1. 2—3. Бібл.

209. **Bréal**, Expériences sur la culture de Légumineuses. (Ann. agr. XV. 1889). *Ярослав Федюк*. XI. 29. Bact.

210. — , Observations sur la fixation de l'azote atmosphèrique par les Légumineuses dont les racines portent des nodesités. (C. R. 107. 1888). *Ярослав Федюк*, XI. 27. Bact.

211. **Bremer**, Zur Radicaloperation von Cruralhernien nach Fritz Salzer. (Zbl. f. Chir. 1899. N. 44). *В. Г.* V/2. 34—35. Спр.

Brook Fr. W., *vide* **Hopkins** F. G. and **Brook** Fr. W.

212. **Bruhns** G., Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. (Lpz. Tb. 1903). *(В. Л.)*. X. 16. Бібл.

213. **Brunchorst** I., Über die Knöllchen an den Leguminosen-Wurzeln. (Ber. d. d. bot. Ges. III. 1884). *Ярослав Федюк*, XI. 12. Bact.

214. — , Über die Knöllchen an den Wurzeln von Alnus und der Eleagnen. (Tgbl. d. 58. Vers. d Naturf. u. Arz. 1885). *Ярослав Федюк*, XI. 12—13. Bact.

215. **Bruner** Ludwik, Ewolucya materyi, zarys nauki o promieniotwórczości. (Kraków, nakł. kółka mat.-fiz. 1909). *В. Л.* XIII. 21. Бібл.

216. **Bucherer** H. A., Elemente der Vektoranalysis (Lpz. Tb. 1903). *В. Л.* X. 5—6. Бібл.

217. **Buchner**, Zymase aus getödteter Hefe. (Ber. d. d. chem. Ges. B. 33. N. 17). *М.* VIII/1. 2—3. Звіти.

*218—219. **Buhlert**, Ein weiterer Beitrag zur Frage der Arteinheit der Knöllchenbakterien der Leguminosen. (Zbl. f. Bakt. 1901. IX/2. — Fühling's landw. Ztg. 1901). *Ярослав Федюк*, XI. 43. Bact.

220. — , Untersuchungen über die Arteinheit der Knöllchenbacterien der Leguminosen und über die landwirtschaftliche Bedeutung dieser Frage. (Zbl. f. Bakt. 1901. IX/2). *Ярослав Федюк*, XI. 43. Bact.

*221—223. **Bulletin** de la Société mathématique de France. T. 29, зош. 1. (1900). *(В. Л.)*. VII/2. 19. Бібл. — T. 29, зош. 2—3. (1901). *(В. Л.)*. VIII/2. 6—7. Бібл. — T. 29, зош. 4. (1901). T. 30, зош. 1—2. (1902) *(В. Л.)*. IX. 34. Бібл.

224—225. **Bulletin** médical, le. Nr. 19. (1899). а) Случай строї інверзиї ропниці. б) Отроенє tinctur-ою cannabis indica. *Е. К.* V/1. 43—44. Спр. — Nr. 20. (1899). Penitis gangrenosa наслїдком прутня paracoli (paracolibacille). *Е. К.* V/1. 46. Спр.

226. **Bumm** E., Zur Kenntnis des Eintagfiebers im Wochenbett. (Zbl. f. Gyn. 1897, N. 45). *Ал. Бач.* III/1. 43—44. Спр.

*227. **Burkhard** H., Funktionentheoretische Vorlesungen. 2. Theil (Elliptische Funktionen). (Lpz. Veit). *(В. Л.)*. VII/1. 5. Бібл.

Burr, *vide* **Stutzer**, **Burr** und **Mandl**.

228. **Camus**, Action anticoagulante des injections intraveineuses de lait d'une espèce animale sur le sang des animaux de même espèce. (C. R. t. 137, Nr. 27). *М.* VIII/1 5. Звіти.

229. **Cantor** M., Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens (Lpz. Tb. 1898). *В. Л.* VI/1. 1. Бібл.

230. — , Vorlesungen über Geschichte der Mathematik (IV. том, Lpz. Tb. 1908). *В. Л.* XIII. 11. Бібл.

231. **Caselli**, Recherches expérimentales et bactériologiques sur la fièvre puerpérale, рефер. Labbé, (La presse méd. 1899. Nr. 27). *О. Д.* V/1. 45—46. Спр.

232. **Caspary**, Über die 4. Generation der Reitenbach'schen Wruke. (Schriffen der physikal.-ökonom. Ges. zu Königsberg, 1879). *Ярослав Федюк*, XI. 9—10. Bact.

233. — , Uber erbliche Knollen und Laubsprossenbildung an den Wurzeln von Vruken. (Brassica napus L). (Pringsheim's Jahrb. 1879. XII. Heft 1). *Ярослав Федюк*, XI. 9. Bact.

*234. **Cauchy** A., Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen. (Ostwald's Klass. Bd. 112). *(В. Л.)*. VII/2. 16. Бібл.

— , *vide* **Lagrange** et **Cauchy**.

235. **Цегельский** Р., Оповіданя з природописної науки (фізика). Часть I (про воздух, воду, ґази, і течи. Дещо з механїки). Часть II. (про тепло, маґнетну та елєктричну силу, голос та сьвітло). (Чернівці, »Руска Бесіда« 1909). *М. Ч.* XIII. 23—24. Бібл.

236. **Chabry**, De la sténose du col de l'uterus, de son traitement principalement de l'evidement commisural du col stomatoplastic. Operation de M. le doct. Pozzi. *С. П.* V/2. 43. Спр.

237. **Chauveau** A., Comparaison du pouvoir thermogène et dynamogene des éléments avec leur

pouvoir nutritiv etc. (C. R. t. 125. 1897). *(E. O.)* III/1. 39—40. Спр.

238. — , La production du travail musculaire utilise-t-elle comme potentiel énérgetique l'alcool substibué á une partie de la ration aliméntaire? (C. R. t. 132). *M.* VIII/1. 4—5. Звіти.

239. —, Sur l' importance du sucre considéré comme aliment. Nouvelle demonstration de la supériorité de la valeur nutrifive du sucre sur celle de la graisse en égard à la valeur thermogène etc. (C. R. t. 126. 1898). *(M.)*. III/1. 37. Спр.

*240. **Хвольсонъ** О. Д., Курсъ физики. Т. III. Ученіе о теплотѣ. (Спб. 1899). *(В. Л.)*. VII/1. 8. Бібл.

241. **Cohn,** Bemerkungen zum Koplik'schen Frühsymptom der Masern. (Ther. Mh. 1899, N. 11). *E. O.* VI 2. 31. Спр.

242. — Die neueren Forschungen betrefs der Assimilierung des freien Stickstoffs. Vortrag (Fühling's Landw. Ztg. 1887 *Ярослав Федюк.* XI. 16. Bact.

243. —, Zur Frage der Zuckerbildung aus Eiweiss. (Ztsch. f. phys. Ch. B. 28. Heft 1—2). *M.* V/2. 3. Спр.

Comberousse Ch. de, *vide* **Rouché** E. et **Comberousse Ch. de.**

244. **Cordier** L., Sur le dosage du suc gastrique. (C. R. t. 12. 6. 1898). *(E. O.)*. III/1. 41. Спр.

245. **Coupin**, Action des vapeurs anesthétiques sur la vitalité des grains seches et des grains humides. (C. R. t. 129). *M.* V/2. 4. Спр.

246. **Cours complét** de mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. Darboux (Paris, Colin). *В. Л.* V 1. 2. Бібл.

Crelle's Journal, *vide* **Journal.**

247. **Cuénot** et **Remlinger.** Un cas de lèpre oculaire. (La presse méd. 1900, Nr. 9). *(Др. Михайло Кос)*. VI/2. 37—38. Спр.

248. **Curie** S., Mme, Untersuchungen über die radioaktiven Substanzen (übers. W. Kaufmann). (Brschg. Vw. 1904). *I. Б.* X. 24—25. Бібл.

249. **Curschmann,** Zur diagnostischen Beurtheilung der vom Blinddarm und Warzenfortsatze ausgehenden entzündlichen Processen. (Münch. med. Wschr. 1901, Nr. 8). *В. Г.* VIII/1. 57—58. Звіти.

(901). **Cybulski** N., Próba badań nad żywieniem się ludu miejskiego w Galicyi (Краків 1894). *Я. Грушкевич.* **VI.** 66—67. Бібл.

250. **Cyon** E. D., Sur les fonctions de l'hypophye cérébrale. (C. R. t. 126. 1898). *M.* IV 1. 3—4. Спр.

251. **Czajkowski** Karol, Zasady umiejętnego szybkiego i dokładnego rachowania. (Lwów-Warszawa, 1908). *В. Л.* XII. 5. Бібл.

252. **Чайковський** Микола. Розвій чисельних системів в історії людської культури. (Альм. Січи Львів 1908). *В. Л.* XII. 4. Бібл.

*253—254. **Časopis** pro pěstování mathematiky a fysiky. (Річник XXIX. *C. M.* VI/1. 8—9. Бібл. — Річник 30, ч. 3. (1901). Річник 31, число 1—2 (1901). *(В. Л.)*. VIII/2. 9. Бібл.

*255. **Чебишевъ** П. Л., Сочиненія (изд. А. А. Маркова і Н. Я. Санина). Т. I. (Спб.). *(В. Л.)*. VII/1. 8. Бібл.

256. **Чиколевъ** В. Н., Таблицы математическія... главнѣйшая по общей механикѣ і физикѣ (Спб. 1897). *В. Л.* VI/1. 18. Бібл.

257. **Czuber** Emanuel, Vorlesungen über Differential und Integralrechnung. T. I—II. (Lpz. Tb. 1898). *Л. В.* IV/2. 11. Бібл.

258. **Danne** I., Das Radium, seine Darstellung und seine Eigenschaften, з передм. Ch. Lauth'a (Lpz. Veit, 1904). (*В. Л.*). 26—27. Бібл.

Darboux, *vide* **Cours complèt.**

259. **Darmstaedter** L. und **Du Bois Reymond** R., 4.000 Jahre Pionier-Arbeit in den exakten Wissenschaften. (Bln. Stargardt, 1904). *I. Б.* X. 31. Бібл.

260. **Deiss**, I., Über Bildung des Zuckers aus Fett im Thierkörper. (Ztsch. f. phys. Ch., XXIV. H. 5—6). *М.* III/1. 37. Спр.

261. **Delpino** F., Osservazione sopra i batteriocecidii e la sorgente d'azoto in una pianta di Galega officinalis. (Malpighia, 1888). *Ярослав Федюк*, XI. 26. Bact.

262. **Demicheri**, Actinomycose conjonctivale. (Arch. d'opth. 1899, Nr. 2). *(Др. Михайло Кос).* V/2. 35—36. Спр.

263. **Dentz**, Hutchinsonsche Zähne. (Ztsch. f. kl. Med. XXXVI). *Е. О.* V/2. 23. Спр.

264. **Depéne**, Experimentelle Untersuchungen über den Einfluss seitlicher Blendung auf die centrale Sehschärfe (Kl. Mbl. f. Aug. 1900). *(Др. Яр. Грушкевич).* VI/2. 43—44. Спр.

265. **Deutsch**, Zur Frage der Agglutininbildungen. Institut Prof. Pertik, Budapest. (Zbl. f. Bact. 1900, Nr. 2). *Д.* VI/2. 13. Спр.

266. **Doehlemann** K., Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung (Lpz. Gösch. 1901). *(В. Л.).* X. 12. Бібл.

267. **Dolganoff**, доц., Über die Veränderungen des Auges nach Ligatur der Gallenblase (Arch. f. Aug. XXXIV. Bd. 1897). *(Я. Грушкевич.)* III/1. 49—50. Спр.

*268. **Domin** Karel, Arithmetika v úlohach pro ústavy učitelské. (Kutna Hora, K. Šolc, 1899) *В. Л.* VI/1. 19. Бібл.

269. **Donath** B., Radium (Bln. Paetel, 1904). (*В. Л.*). X. 26. Бібл.

*270. **Dörrie** H., Das quadratische Reciprocitätsgesetz im quadratischen Zahlkörper mit der Klassenzahl 1. (Göttingen). *(В. Л.).* VII/1. 6. Бібл.

271. **Drews**, Weitere Erfahrungen über den Einfluss der Somatose auf die Sekretion der Brustdrüsen bei stillenden Frauen. (Zbl. f. inn. Med. 1898, Nr. 3). *Е. О.* IV/1. 9—10. Спр.

Du Bois-Reymond, *vide* **Darmstaedter** und **Du Bois-Reymond.**

272. **Dufour** et **Raband**, Tuberculose pulmonaire chez les aliénés mélancoliques. (Gaz. hebd. de méd. et de chir. 1898, Nr. 28). *О. Д.* V/1. 27. Спр.

273—274. **Dziwiński** Placyd, dr., Wykłady matematyki. Kurs I. Zasady geometryi analitycznej i analizy wyższej. Lwów, Tom I. (1902). *В. Л.* IX. 20. Бібл. — Tom II. (1908). *В. Л.* XIII. 4—5. Бібл.

275. **Ebert** H., Magnetische Kraftfelder. (2 части, Lpz., Barth 1896—7). *В. Л.* IV/2. 5. Бібл.

276. **Edel**, Über den Einfluss des künstlichen Schwitzens auf die Magensekretion. (Ztsch. f. kl.

Med. Bd 42) *М.* VIII/1. 2. Звіти.

277. **Edlefsen**, Über Ichtyolvasogen bei Gelenkaffektionen. (Ther. Mh. 1900, Nr. 1) *Е. О.* VI/2 31—32 Спр.

278. **Ekstein**, Phosphortherapie und Kastration bei Osteomalakie. (Prag. med. Wschr., 1899, Nr. 33). *Е. О.* V/2 39—40. Спр.

279 **Elbs Karl**, Die Akkumulatoren. (Lpz. Barth, 1896) *В. Л.* IV/2 3. Бібл.

280. **Ellis**, Unregelmässiger Astigmatismus durch Mikroskopieren. (Arch. f Aug. XXXIV. 1897) *(Я. Грушкевич)*. III/1. 51—55. Спр.

El progresso matématico, *vide* **Progresso.**

281. **Elschnig**, Drüsenbildung an der Bonman'schen Membran. (Wiener Med. Wschr. 1900. Nr. 20). *(Др. Михайло Кос)*. VI/2. 36. Спр.

282. **Emmerich** und **Saida**, Über die morphologischen Veränderungen der Milzbrandbacillen bei ihrer Auflösung durch Pyocyanase. (Zbl. f. Bakt. 1900. Nr. 22/23). *Д.* VI/2. 16—17. Спр.

*283—286. **Encyklopädie** der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. (Lpz. Tb.). *В. Л.* IV/2. 11—12. Бібл. *В. Л.* VI/1. 4. Бібл. *(В. Л.)*. IX. 19—20. Бібл. — *(В. Л.)*. XII. 15. Бібл.

287. **Engel**, Über die Prognose bei Typhus abdominalis. (Wiener med. Wschr., 1898., Nr. 15—18). *Е. О.* V/2. 26—27. Спр.

288. **Engelmann**, Über eine sehr seltene Form von Darmruptur. (Zbl. f. Gyn. 1900. Nr. 46). *М.* VIII/1. 65—66. Звіти.

289. **Engler** Wilhelm, Über den Einfluss der Temperatur auf radioaktive Umwandlungen. Ann. der Phys. 1908. Bd. 2[illegible] *Гірняк.* XIII. 34. Бібл.

290. **Enlenbung**. Zur Therapie der Ischias. (Ther. d. Geg. 18[illegible]. N. 10). *Е. О.* VI 2. 24. Спр.

291. **Enriques** F., Vorlesungen über projektive Geometrie. (Lpz. Tb. 1903). *В. Л.* X. 9—12. Бібл.

292. **Erikson** Jakob, Studier öfver Leguminosernas röfknölar. (Lund 1874, докт. дісс.; Bot. Ztg. 1874; Acta Univ. Lundensis). *Ярослав Федюк*, XI. 1—2. Bact.

*293. **Ермаковъ** В. П., Теорія абелевихъ функцій (Кіевъ, 1897). *В. Л.* VI/1. 18. Бібл.

294. **Ernst** Marcin, Kosmografia. (Warsz., Wende, 1908). *В. Л.* XII. 11—12. Бібл.

295. **Eschle**, Die Behandlung des Ehysipelas mit Ichtyolpinselungen. (Heilkunde, 1901. Nr. 6). *Е. О.* VIII/1. 48. Звіти.

*296. **Euler**, Drei Abhandlungen über Kartenprojektion. (Ostwald's Klass., Bd. 93). *(В. Л.)*. VII/2. 16. Бібл.

297. **Ewald**, Arsen und Thyreoideapräparate (Jodothyrin). (Th. d. Geg. 1899. 9. Heft). *В. Г.* V/2. 29—30. Спр.

298. —, Über Ernährungsclystiere. (Arch. f. Anat. u. Physiol. 1899. Suppl.) *М.* V/2. 7. Спр.

299. **Fehling** H., Die Physiologie und Pathologie des Wochenbetts. (Stuttgart, Enke 1898). *С. Ц.* V/2. 40—41. Спр.

*300. **Fehr** A., Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la géometrie infinitésimale (Paris, Carré et Naud, 1899). *(В. Л.)*. VII/1. 7. Бібл.

301. **Ferrán**, Über einige neue Entdeckungen bezüglich des Bacillus der Tuberculose und der Frage der Prophylaxis und

Heilung dieser Krankheit. (Wiener kl. Wschr. IV. 28. 1898). *О. Д.* IV/1. 17. Спр.

302. **Fessler**, Über paraxysmale Hämoglobinurie. (Wiener Med. Wschr. 1898, Nr. 31). *О. Грабовський.* IV/1. 19—20. Спр.

303. **Festchrift** Ludwig Boltzmann gewidmet, zum sechzigsten Geburtstage, 20. Februar 1904. (Lpz. Barth, 1904). *І. Б.* X. 31—32. Бібл.

*304. Физико-математическія науки въ ходѣ ихъ развитія (журналъ исторіи, философіи і библіографіи физ.-мат. наукъ, Т. I. Nr. 1—4. *В. Л.* VII/1. 4—5. Бібл.

305. **Finger**, Die Vererbung der Syphilis. (Wiener kl. Wochr. 1899, Nr. 4—5). *Е. О.* VI/2. 30—31. Спр.

306. **Floret**, Weiteres über Heroin. (Ther. Mh. 1899, Nr. 6). *Е. О.* V/2. 30—31. Спр.

307. **Folkierski** W., Zasady rachunku różniczkowego i całkowego. (Warsz. 1904). (*В. Л.*). X. 17—18. Бібл.

308. **Fontan**, Blessure de la vessie consécutive à une plaie de la fesse (La sém. méd., 1899, Nr. 49. — Soc. de chir. 1899). *Е. К.* V/2. 33—34. Спр.

309. **Föppl** A, Die Geometrie der Wirbelfelder. (Lpz. Tb. 1897). *В. Л.* IV/2. 4. Бібл.

*310. —, Vorlesungen über technische Mechanik Том I. (Einführung in die M). (Lpz. Tb 1897). *В. Л.* IV/2. 8. Бібл.

311. —, dto. Том III. (Festigkeitslehre). (Lpz. Tb. 1897). Том IV. (Dynamik). (і від. 1899). *В. Л.* VI 1. 3. Бібл.

312. **Forbes-Leslie**, Malarial fever; some suggestions in its pathology and treatment. (Lancet 1898). *Е. О.* V/2. 19. Спр.

313. **Ферстер** В., [Förster], Сумніви про стійність космоґонії Канта-Ляпляса. (Пер. Др. В. Левицкий, Л. Н. Віст. XXI, 1903). (*В. Л.*). X. 33. Бібл.

314. **Frank** B., Die Assimilation des freien Stickstoffs bei den Pflanzen in ihrer Abhängigkeit von Spezies, von Ernährungsverhältnissen und von Bodenarten. (Landw. Jahrb. 1892, Bd. 21). *Ярослав Федюк.* XI. 32. Bact.

315. —, Die Assimilation des freien Stickstoffs durch die Pflanzenwelt. (Bot. Ztg. 1893. Heft IX) *Ярослав Федюк.* XI. 33. Bact.

316. —, Die Krankheiten der Pflanzen. Ein Handbuch für Landleute und Fortswirte, Gärtner u. s. w. (Breslau, Trewendt, 1880) *Ярослав Федюк.* XI. 10. Bact.

317. —, Die Pflanzenkrankheiten. Encykl. des Naturw. I. відділ, I. ч. Handbuch der Bot. von **Schenk**. (Breslau 1879). *Ярослав Федюк.* XI. 10. Bact.

318. —, Über den Einfluss, welchen das Sterilisieren ausübt. (Ber. d. D. B. G. 1888). *Ярослав Федюк.* XI 26—27 Bact

319. —, Über den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse der Assimilation elementaren Stickstoffs durch die Pflanzen (Ber d. D. B. G. 1889) *Ярослав Федюк.* XI. 27—28 Bact.

320—321. —, Über die Parasiten in den Wurzelanschwellungen der Papilionaceen. (Bot. Ztg. 1879, Nr. 24—25). *Ярослав Федюк.* XI 6; 7—8. Bact.

322 —, Über die Pilzsymbiose der Leguminosen. (B. d. D. B. G. 1889) *Ярослав Федюк.* XI. 28—29. Bact.

323. —, Über die Quellen der Stickstoffnahrung der Pflanzen. (B. d. D. B. G. 1886). *Ярослав Федюк* XI. 14. Bact.

324—325. —, Über die Mikroorganismen des Erdbodens. (B. d. D. G. 1886). *Ярослав Федюк.* XI. 13—14. Bact. — (Agr. Forsch. X. зош. 1—2. 1887). *Ярослав Федюк.* XI. 14—15. Bact.

326. —, Über Ursprung und Schicksal der Salpetersäure in den Pflanzen. (B. d. D. B. G. 1887). *Ярослав Федюк.* XI. 19. Bact.

327. —, und **Otto**. Untersuchungen über die Stickstoffassimilation der Pflanzen. (B. d. D. B. G. 1890). *Ярослав Федюк.* XI. 31. Bact.

328. **Franke.** Eine neue Methode der operativen Behandlung des Plattfusses nebst einem Beitrag zur Cocainisirung des Rückenmarks. (Ther. Mh. 1901. Nr. 4). *О. Г.* VIII/1. 59. Звіти.

—, *vide* **Pfeiffer** und **Franke.**

329. **Fraenkel** C., Untersuchungen über das Vorkommen von Mikroorganismen in verschiedenen Bodenschichten. (Hygiene, 1887, т. 2). *Ярослав Федюк.* XI. 19. Bact.

330. **Fränkel,** Über Radicaloperation der Leistenbrüche von Säuglingen. (Zbl. f. Chir. 1899. Nr. 47). *В. Г.* V/2. 35. Спр.

331. —, Zur pathologischen Anatomie des Bronchialasthmas. (Ztsch. f. kl. Med. XXV). *Г.* V/1. 19—20. Спр.

Frésales, *vide* **Ulry** et **Frésales.**

332. **Fricke**, R., Hauptsätze der Differential — und Integralrechnung. (Brschg. Vw. 1902). *(В. Л.).* X. 6—7. Бібл.

333. —, Kurzgefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik; analytisch-funktionentheoretischer Teil (Lpz. Tb. 1900). *В. Л.* VII/2. 2—3. Бібл.

334. —, und **Klein** F, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Bd. I. Gruppentheor. Grundlagen. (Lpz. Tb. 1897). *(В. Л.).* VII/2. 10—12. Бібл.

335. **Fröhlich,** Über den Nachweis von Traubenzucker im Harn mittels Methylenblau. (Zbl. f. inn. Med. 1899. N. 4). *Е. О.* IV/1. 29. Спр.

336. **Frommel** Wilhelm, Radioactivität. (Lpz. Sml. Gösch. 1907). *В. Л.* XII. 8. Бібл.

*337. **Fuchs**, L., Bemerkungen zur Theorie der associirten Differentialgleichungen. (Bln. Reimer). *(В. Л.).* VII/1. 6. Бібл.

338. **Gain** Ed., Influence de l'humidité sur le developpement des nodesités des Legumineuses. (C. R. t. 116. 1894). *Ярослав Федюк.* XI. 34—35. Bact.

339. **Galippe.** Note sur la présence de microorganismes dans les tissus végétaux. C. R. 1887). *Ярослав Федюк.* XI. 15—16. Bact.

340. **Galli-Valerio,** Contribution à l'étude de la morphologie du bacillus mallei. Zbl. f. Bakt. 1899). *О. Д.* V 2. 12—13. Спр.

341. —, Les puces des rats et des souris jouent-elles un rôle important dans la transmission de la peste bubonique à l'homme? (Zbl. f. Bakt. 1900). *Е. О.* V/2. 18. Спр.

342. **Galois** Evariste, Oeuvres mathématiques, avec une introduction par É. Picard. (Paris. G. V. 1897). *В. Л.* IV/2. 4. Бібл.

343. **Gans** Richard, Einführung in die Theorie des Magnetismus. (Lpz.

Tb. 1908). *B. K.* XIII. 13—14. Бібл.

344. —, Einführung in (die) Vectoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. (Lpz. Tb. 1909). *B. K.* XIII. 6. Бібл.

345. **Gautier**, La médication cacodylique. (Bull. de l'ac. de méd. 1901. N. 26—27). *E. O.* VIII/1. 49—50. Звіти.

346. —, L'iode existe-t-il dans l'air? (Séance de l'ac. de Sc. 1899 *O. Д.* V/1. 28—29. Спр.

347. **Geelmnyden**, Über Acetonurie bei Phloridrinvergiftung. (Ztsch. f. phys. Ch. B. 24). *M.* V/1. 8. Спр.

348. **Geitel** H., Über die Anwendung der Lehre von den Gasionen auf die Erscheinungen der athmosphärichen Elektricität. (Brschg. Vw. 1901). *(B. Л.)*. VIII/2. 33. Бібл.

349. **Gellhorn**, Zur Frage der Eisentherapie. (Ther. Mh. 1897). *E. O.* III/1. 54—55. Спр.

*350. **Gérard** E., Leçons sur l'electricité (Paris, G. V. t. I. 1899, t. II. 1900). *(B. Л.)*. VII/1. 6. Бібл.

*351. —, Traction éléctrique. (Paris, G. V. 1900). *(B. Л.)*. VII/1. 7. Бібл.

352. **Gerber**, Maassregeln zur Verhütung der Ohreiterungen. Zur Vertheilung in Familien, Schulen, Fabriken etc. durch Ärzte, Lehrer, Aufsichtsbeamten u. A. *(E. O.)*. VIII/1. 62—64. Звіти.

353. **Gerhard**, Über Eheschliessung Tuberculöser. (Ztsch. f. Tub. u. Heilstättenwesen. B. I.). *E. O.* VIII/1. 27—29. Звіти.

354. **Gersuny**, Parafineinspritzung bei Incontinentia urinae. (Zbl. f. Gyn. 1900, Nr. 48). *M.* VIII/1. 65—66. Звіти.

355. —, Über partielle Exstirpation des Ovariums. *C. П.* V/2. 41—42. Спр.

356. **Ghon** und **Schlagenhaufer**, Ein weiterer Beitrag zur Biologie des Gonococcus und zur pathologischen Anatomie des gonorrhoischen Processes. (Wiener kl. Wschr. 1898. Nr. 24). *O. Д.* IV/1. 15—16. Спр.

357. **Giflord**, Der Fraenkel'sche Diplococcus als häufiger Erreger des acuten Bindehautcatarrhs. Arch. f. Aug. XXXIV. 1897). *(Я. Грушкевич)*. III/1. 48. Спр.

358. **Gleichen** A., Lehrbuch der geometrischen Optik (Lpz. Tb). *B. Л.* IX. 23—24. Бібл.

Gmeiner A., *vide* **Stolz** O. u. **Gmeiner** A.

*359. **Gockel** A., Die Luftelektrizität. Methoden und Resultate der neuen Forschung. (Lpz. Hirzel 1908). *B. K.* XIII. 21. Бібл.

360. **Goldschmid** Hans, Über die Abhängigkeit der Reaktionsgeschwindigkeit von der Temperatur in homogenen gasförmigen Systemen. (Phys. Ztsch. 1909). *Ю. Гірняк.* XIII. 30—31. Бібл.

361. **Gottschalk**, Zur Behandlung der ulcerirenden, inoperablen Cervixcarcinoms. *C. П.* V/2. 41. Спр.

*362. **Graetz** L., Das Licht und die Farben. (Lpz. Tb.) *(B. Л.)*. X. 29. Бібл.

363. —, Die Elektrizität und ihre Anwendungen. (Stuttgart, Engelhorn, 1903). *(B. Л.)*. X. 22. Бібл.

364. **Gray** Andrew, Lehrbuch der Physik (autor. deutsche Ausg. Dr. Auerbach). I. Bd. Allg. u. spez. Mechanik (Brschg. Vw. 1904). *I. Б.* X. 20—21. Бібл.

365. **Greeff**, Über Zwillings-Ganglienzellen in der menschlichen Retina. (Arch. f. Aug. XXXV. 1897). (*Яр. Грушкевич.*). IV/1. 25—26. Спр.

366. **Greinacher** H., Die neuen Fortschritte auf dem Gebriete der Radioaktivität. (Brschg. Vw. 1908). *В. К.* XIII. 19. Бібл.

367. —, Radium (Lpz. Veit, 1907). *В. Л.* XII. 8. Бібл.

368. **Griffon**, Volumineux anéorysme aortique thoroco-abdominal,sans hypertrophie du ventricule gauche. Séance de Soc. anat. 1899). *О. Д.* V/1. 27—28. Спр.

369. **Grüneisen** E., Über die thermische Ausdehnung u. die spezielle Wärme der Metalle. (Ann. der Physik, 1908. Bd. 26). *Ю. Гірняк.* XIII. 27. Бібл.

370. —, Zusammenhang zwischen Kompressibilität, thermischer Ausdehnung, Atomvolumen und Atomwärme der Metalle. (Ann. der Physik, 1908. Bd. 25). *Ю. Гірняк.* XIII. 28—30. Бібл.

*371. **Grujitsch** S., Radium (Bln., Kühn, 1904). *(В. Л.)*. 26. Бібл.

372. **Gruber**, Max, Zur Theorie der Aglutination. (Münch. med. Wschr. 1899. Bd. 44, Nr. 41). *М.* V/2. 7—8. Спр.

373. **Gruner** Paul, Dr., Die radioactiven Substanzen und die Theorie des Atomzerfalles. (Bern, Francke, 1906.). *(В. Л.)*. XII. 8. Бібл.

374. **Grunert**, Der Dilatator pupillae des Menschen, ein Beitrag zur Anatomie und Physiologie der Irismuskulatur. (Arch. f. Aug. XXXVI. 1898). *Я. Грушкевич.* IV/1. 27—28. Спр.

Grunert's Archiv, *vide* **Archiv.**

375. **Gulewitsch**, Das Verhalten des Trypsin gegen einfache chemische Verbindungen. (Ztsth. f. phys. Ch. B. 27. H. 6). *М.* V/2. 6. Спр.

376. **Günther** Siegmund, Dr., Astronomische Geographie. (Lpz. Gösch. 1902). *С. Р.* IX. 21—22. Бібл.

377. —, Geschichte der Mathematik, I. Teil — von den ältesten Zeilen bis Cartesius. (Lpz. SS. XVIII. 1908). *М. Ч.* XIII. 10—11. Бібл.

378. **Guttmann**, Tabes dorsalis und Syphilis. (Ztsch. f. kl. Med. B. XXXV). *Е. О.* V/2. 27—28. Спр.

379. **Habel**, Ein Fall von chronischer fibrinöser Bronchitis. (Zbl. f. inn. Med. 1898, Nr. 1). *Е. О.* IV/1. 7. Спр.

380. **Hadamard** I., La série de Taylor et son prolongement analytique. (Paris, Naud, 1901). *(В. Л.)*. VIII/2. 17—18. Бібл.

381. **Haegler**, Steriles oder antiseptisches Nährmaterial? (Zbl. f. Chir. 1899, Nr. 5). *Г.* V/1. 30—31. Спр.

382. **Hamburger**, Über das Verhalten des Blasenepithels gegenüber Harnstoff. (Arch. f. An. u. Phys. 1900, Heft 1—2). *М.* VI/2. 5—6. Спр.

383. —, Über die Quellen des Kammerwassers. (Kl. Mbl. f. Aug. 1900. XII). *(Др. Я. Грушкевич)*. VIII/1. 12—13. Звіти.

384. **Hamburger** M., Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs. (Lpz. Tb. 1902). *(В. Л.)*. VIII/2. 25—26. Бібл.

*385. —, Uber die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung. (Bln. Reimer). *(В. Л.)*. VII/1. 6. Бібл.

386. **Hammer** W. I., Radium und andere radioaktive Substanzen (bearb. von E. Ruhmer, Bln.; Adm. der Fachzeitschrift „Der Mechaniker“, 1904). *(В. Т.)*. X. 26. Бібл.

Handwörterbuch der Astronomie, *vide* **Valentiner**.

387. **Harbitz**, Studien über Endocarditis. (D. med. Wschr. 1889. (?) N. 8). *Е. О.* V/2. 24—25. Спр.

388. **Harnach** Erik, das Jodospongin, die jodhaltige eiweiss artige Substanz aus dem Badeschwamm (Ztsch. f. phys. Ch. 1898. Bd. 24). *М.* III/1. 36—37. Спр.

389. **Hartig** R., Über die durch Pilze bedingten Pflanzenkrankheiten. (München 1880). *Ярослав Федюк.* XI. 10. Bact.

Haselhoff, *vide* **Koenig** und **Haselhoff**.

390. **Häusermann** Emil, Die Assimilation des Eisens. (Ztsch. f. phys. Ch. 1897. Bd. XXIII. Heft 6). *С. М.* III/1. 52—53. Спр.

391. **Hedlsom**, Einwirkung verschiedener Stoffe auf das isolierte Säugetierherz. (Skand. Arch. f. Phys. Bd. VIII). *М.* IV/1. 4—5. Спр.

392. **Heichelheim**. Klinische Erfahrungen über Hedonal. (D. med. Wschr. 1900. Nr. 49). *Е. О.* XIII/1. 25—26. Звіти.

393. **Heidenhein**, Ersetzung des Katgut durch Seide. Aus dem städt. Krankenhaus zu Worms. (Ztrbl. f. Chir. 1899. Nr. 8). *(Ал. Бач.)*. V/1. 31—32. Спр.

394. **Heim**, Die Behandlung der croupösen Pneumonie im Kindesalter. (Ther. Mh. 1904, Nr. 11). *Е. О.* VIII/1. 46—48. Звіти.

395. **Heinersdorff**, Ein Fall von doppelseitigem, nicht entzündlichem Glaucom in jugendlichem Lebensalter bei gleichzeitiger Retinitis pigmentosa und Myopie. (Arch. f. Aug. XXXIV. 1897). *(Я. Грушкевич)*. III/1. 50. Спр.

396. **Hellriegel** und **Willfahrt**, Erfolgt die Assimilation des freien Stickstoffs durch die Leguminosen unter Mitwirkung niederer Organismen? Mitteilung neuer Kulturversuche. (B. d. D. B. G. 1889). *Ярослав Федюк.* XI. 28. Bact.

397. —, Untersuchungen über die Stickstoffnahrung der Gramineen und Leguminosen. (Ztsch. des Ver. für Rübenindustrie. 1888. Beilageheft). *Ярослав Федюк.* XI. 23—25. Bact.

398. **Helmholtz** H. v., Vorlesungen über die elektomagnetische Theorie des Lichtes. (Hg. v. A. König u. C. Bunge, Hamburg, Voss, 1897). *В. Л.* IV/2. 6. Бібл.

399. **Hensel** Z u. **Landsberg** G., Theorie der algebraischen Functionen einer Variablen. (Lpz. Tb. 1902). *В. Л.* XI. 5—6. Бібл.

Herder's Jahrbücher, *vide* **Jahrbücher**.

400. **Herz** N., Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung. (Lpz. Sml. Schubert, XIX. 1900). *В. Л.* VII/2. 13. Бібл.

401. **Hess**, Über den gegenwärtigen Stand der Lehre von der Akkomodation. (Kl. Mbl. 1900). *(Др. Я. Грушкевич.)*. VI/2. 44—46. Спр.

Hessenland, *vide* **Takke, Immendorff, Hessenland, Schütte** und **Minssen**.

402. **Heubner**, Zur Kenntnis der Säuglingsatropie. (Jahrb. f. Kinderhlk. LIII. 1901). *В. Г.* VIII/1. 56. Звіти.

403—404. **Hilbert** D., Grundlagen der Geometrie. Zweite Auflage (Lpz. Tb. 1903). *В. Л.* X. 8—9. Бібл. — Dritte Auflage (ibid. 1908). *В. Л.* XIII. 3—4. Бібл.

(274). **Гильченко** Н. В., Антропольоґічний тип Українців. *О. Ч.* **IV.** 199.

405. **Hiltner** L., Bericht über die Ergebnisse der im Jahre 1903 in Bayern ausgeführten Impfversuche mit Reinkulturen von Leguminosen - Knöllchenbakterien (Nitragin). (Naturtr. Ztsch. f. Land u. Forstwirtsch. II. 1904). *Ярослав Федюк.* XI. 44. Bact

406. —, Die Impfung der Leguminosen mit Reinkulturen und ihre praktische Anwendung. (Tgbl. der V. inter. Kongr. f. angew. Ch. in Bln. 1903, Nr. 5). *Ярослав Федюк.* XI. 43—44. Bact.

407. —, Über die Bakteroiden der Leguminosenknöllchen und ihre willkürliche Erzeugung ausserhalb der Wirtspflanze. (Zbl. f. Bakt. 1904. VI. 2. Abt.) *Ярослав Федюк.* XI. 45. Bact.

408. —, Über die Ursachen, welche die Grösse, Zahl, Stellung und Wirkung der Wurzeknöllchen der Leguminosen bedingen. (Arbeiten a. d biolog. Abt. f. Land — u. Forstwirtsch. am kais. Gesundheitsamte, Bln. 1901, Heft 2). *Ярослав Федюк,* XI. 41—42. Bact.

409. —, Über Entstehung und physiologische Bedeutung der Wurzelknöllchen. (Forst - naturw. Ztsch. 1897). *Ярослав Федюк.* XI. 38. Bact.

410. —, Über neuere Erfahrungen und Probleme auf dem Gebiete der Bodenbakteriologie und unter besonderer Berüchsichtigung der Grunddüngung und Brache. (Arb. d. deutsch. Landwirtsch. Ges. 1904. Heft 98). *Ярослав Федюк.* XI. 44. Bact.

411. —, und **Störmer** K., Studien über die Bakterienflora des Ackerbodens, mit besonderer Berücksichtigung ihres Verhaltens nach einer Behandlung mit CS_2 und Brache. (Arb. a. d. biolog. Abt. f. Land — u. Forstwirtsch. am kais. Gesundheitsamte, Bln. 1904. Heft 3). *Ярослав Федюк.* XI. 44. Bact.

—, *vide* **Nobbe** F. und **Hiltner** L.

—, *vide* **Nobbe, Hietner** u. **Schmidt.**

412. **Гірняк** Ю., Ненастанна деґрадация енерґії — конечна прова і причина всякого руху і житя в природї. (Л. Н. В. XXI. 1903). *В. Л.* IX. 26—27. Бібл.

413. **Hirschkron**, Über Masturbation und ihre Behandlung. (Ther. Mh. 1901. Nr. 19. *В. О.* VIII/1. 41—42. Звіти.

414. —, Zur Behandlung der Trigeminus-Neuralgie. (Zbl. f. d. ges. Ther. 1897). *Гарматій.* III/1. 57—58. Спр.

415. **Глїбовіцкий** К., Інтеґрали рівнань ріжничкових першого ряду в точках особливих *n*-кратних. (Справ. дир. П. ґімн. Перемишль, 1898/9). *В. Л.* VI/1. 11—13. Бібл.

416. **Hoborski** Antoni, dr. i **Wilk** Antoni, dr. Zasadnicze pojęcia rachunku różniczkowego i cał-

kowego. (Kraków, 1910). *М. Ч.* XIII. 7—8. Бібл.

417. **Hofmann** A., Die Suggestionstherapie in der internen Medicin. (D. med. Wschr. 1899, Nr. 37—38). *E. O.* V/2. 32. Спр.

418. **Hofmann** Karl, Dr., radioactiven Stoffe nach dem gegenwärtigen Stande der wissenschaftlichen Erkenntnis. (Lpz. Barth, 1903). *C. M.* IX. 25. Бібл.

419. **Hollemann** A. F., Lehrbuch der organischen Chemie. (7. Aufl. Lpz. Veit, 1909). *В. Л.* XIII. 26. Бібл.

420. —, Podręcznik chemii nieorganicznej. Z 3-niem wyd. przeł. K. Jabłczyński, Warszawa, Wende, 1907). *В. Л.* XII. 12—13. Бібл.

421. **Holzmüller** Gustav, Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. (I. Tb. Lpz. Tb. 1897). *В. Л.* XII. 12—13. Бібл.

422. **Homburger**, Scrophulose, Tuberculose, hereditäre Syphilis. Звіт з праці: Die jüngsten Fortschritte und der heutige Stand der Kinderheilkunde. (Ther. Mh. 1901. Nr. 11). *E. O.* VIII/1. 50—56. Звіти.

423. **Hopkins** F. G. and **Brook** Fr. W., On halogen derivates from proteids. (Journ. of Phys. 1898, XXII. вип. 3). *M.* III/1. 35—36. Спр.

424. **Horwat** und **Lewin**, Über die Immunität der Igel gegen die Canthariden. (D. Med. Wschr. 1898. N. 22, 24). *О. Д.* IV/1. 18—19. Спр.

*425. **Граве** П. П., О построеніи кривыхъ третьей степени. (Казань). *(В. Л.).* VII/1. 7. Бібл.

426. **Hueppe**, Über Chlorophyllwirkung chlorophyllfreier Pflanzen. (Tgbl. der 60. Naturf. — Vers. zu Wiesbaden, 1887). *Ярослав Федюк.* XI. 20. Bact.

*427. **Гуржеевъ** С., Прикладная механика. (Изд. 3. Спб.). *(В. Л.).* VII/1. 8. Бібл.

Immendorf, *vide* **Takke, Immendorf, Hessenland, Schütte** und **Minssen.**

428. **Index** du repertoire bibliographique des sciences mathématiques (Amsterdam, Delsmann, 1908. — додаток do **Revue** sémestrielle des publ. math.). *B. Л.* XII. 15. Бібл.

*429. **Ивановъ** А., Теорія прецессіи. (Спб. 1899). *(В. Л.).* VII/1. 8. Бібл.

430. **Извѣстія** императорскаго русскаго географическаго общества, (1897, т. XXXIII). *О. Ч.* III/2. 6—8. Огляд.

*431 — 433. — , Университетскія (Кіевъ, 1899). *О. Я.* VI/1. 9—10. Бібл. (Nr. 3—4, рік?) *В. Л.* VII/1. 4. Бібл. — (1909, Nr. 1—7). *М. Ч.* XIII. 34—35. Бібл.

*434—436 —, физико-математическаго Общества при имп. казанскомъ университетѣ. Вторая серія. (Т. IX. Казань 1899). *В. Л.* VI/1. Бібл. (Т. IX. вип. 3. Казань 1899. вип. 4. 1900. Т. X. вип. 1. 1900). *В. Л.* VII/1. 4. Бібл. — (Т. X. 1901. — Nr. 3—4). *(В. Л.).* VIII/2. 10. Бібл.

437. **Jacoby** M., Über die Beziehung der Leber und (der) Blutveränderungen bei Phosphorvergiftungen zur Autolyse. (Ztsch. f. phys. Ch. Bd. 30). *M.* VI/1. 10. Спр.

438. —, Über die fermentative Eiweissspaltung und Ammoniakbildung in der Leber. (Ztsch. f. phys. Ch. Bd. 30). *М.* VI/2. 9—10. Спр.

439. **Jäger** Gustav, Dr., Theoretische Physik, Bd. IV. (Lpz. Sml. Gösch. 1908). *В. Л.* XII. 8—9. Бібл.

*440. **Jahrbücher,** Herders (XXIII. т.) Jahrbuch der Naturwissenschaften (Freiburg in Breisgau, 1908). *В. Л.* XII. 14—15. Бібл.

*441. **Jahresbericht** des physikalischen Vereines zu Frankfurt a/M. für 1907/8. (Frkf. a/M. Natmann 1909). *М. Ч.* XIII. 37. Бібл.

442. **Jaks,** Der Gebärmantel. (Zbl. f. Gyn. 1900, Nr. 46). *М.* VIII/1. 65. Звіти.

443. **Jalaugier,** Le cacodylate de soude dans la tuberculose pulmonaire. (Gaz. des hôpitaux 1901, N. 90. — Zbl. f. inn. Med. 1902, N. 1). *Е. О.* VIII/1. 49—50. Звіти.

444. **Janiów** Józef, Dyfuzya gazów i par. (Spr. gimn. Jarosław, 1902). *(В. Л.)*. VIII/2. 1—2. Бібл.

445. **Joachim,** Ein Beitrag zur Frage der Somatoseneinwirkung auf die Brustdrüsen stillender Frauen. (Zbl. f. inn. Med. 1898, Nr. 10.). *Е. О.* IV/1. 10—11. Спр.

446. **Joachimsthal,** Zur Behandlung des Schiefhalses. (D. med. Wschr. 1901. Nr. 8). *В. Г.* VIII/1. 58. Звіти.

447. **Johannenssen** A. und **Wang** E., Studien über die Ernährung des Säuglings. (Ztsch. f. phys. Ch. Bd. 24. Heft 5—6). *М.* III/1. 33—34. Спр.

448. **Johansson,** Über die Tagesschwankungen des Stoffwechsels in nüchterndem Zustande und vollständiger Muskelruhe. (Skand. Arch. f. Phys. 1898. Bd. VIII. 1—3). *М.* IV/1. 5. Спр.

449. **Jonnesko,** Die Resection des Halssympathicus in der Behandlung der Epilepsie, des Morbus Basedowii und des Glaucoms. (Zbl. f. Chir. 1899. Nr. 6.). *Ал. Бач.* V/1. 31. Спр.

450. **Jouffret** E., Traité élémentaire de géometrie à quatre dimensions. (Paris, G. V. 1903). *(В. Л.)*. X. 13—16. Бібл.

451. **Jouléc,** Sur le dosage de l'alcalescense de l'urine normale. (C. R. t. 125. N. 25). *(Е. О.)*. III/1. 41. Спр.

*452—454. **Journal** (american) of Mathematics. (Vol. 23. Nr. 1, 1901). *(В. Л.)*. VII/2. 19—20. Бібл. — (Vol. 23. Nr. 2—4). *(В. Л.)*. VIII/2. 7. Бібл. — (Vol. 24. зош. 1—4). *(В. Л.)*. IX. 34—35. Бібл.

*455. —, de l'école normale supérieure (Paris, 1901, серія 3. т. 18). *(В. Л.)*. VIII/2. 6. Бібл.

*456—458. —, de l'école politechnique. 2-а серія. (зош. 5. 1900). *(В. Л.)*. VII/2. 19. Бібл. — (зош. 6. 1901). *(В. Л.)*. VIII/2. 6. Бібл. — (зош. 7. 1902). *(В. Л.)*. IX. 33. Бібл.

*459—460. —, de Liouville. Серія 5. Paris. (T. VII. зош. 1—2. 1901). *(В. Л.)*. VIII/2. 6. Бібл. — (T. VII. зош. 2—3. 1901; т. VIII. зош. 1—3. 1902). *(В. Л.)*. IX. 33—34. Бібл.

*461—463. —, für reine und angewandte Mathematik (Crelle). Berlin. (T. 123. зош. 1. 1901). *(В. Л.)*. VII/2. 18. Бібл. —

(Т. 123. зош. 3—4. 1901; т. 124. зош. 1). *(В. Л.)*. VIII/2. 5. Бібл. — (Т. 124. зош. 2—4). *(Л. В.)*. IX. 32. Бібл.

464. —, de Sages Fem. Вимір голови дитини в лоні матери. *(Др. В. Сіменович)*. V/1. 44. Спр.

465. **Kaatzer,** Zur Kreosottherapie der Lungenphtise. (Ther. Mh. 1896). *Е. О.* III/1. 53. Спр.

466. **Kalähne,** Die neuereren Forschungen auf dem Gebiete der Elektrizität und ihre Anwendungen. (Lpz. Quelle u. Meyer, 1908). *В. К.* XIII. 13. Бібл.

467. **Kantz** Das Formaldehyd und seine Anwendung in der Zahntherapie (Wiener med. Wsch. 1898. Nr. 32). *Гарматій.* IV 1. 30—31. Спр.

468. **Karewski**, Zur Radicaloperation der Leistenbrüche bei Säuglingen. (Zbl. f. Chir. 1899, Nr. 51). *Б. Г.* V/2. 35—36. Спр.

469. **Kayser** H., Die Elektronentheorie (Bonn. Röhrscheid, 1903). *В. Л.* IX. 24. Бібл.

*470. **Кайзер** Г., Теория електронів (пер. Др. В. Левицкий, Л. Н. В. XXII. 1903). *(В. Л.)*. X. 34. Бібл.

471. **Kehrer**, Ein eigenartiger Fall von Azoospermie. (Münch. med. Wschr. 1900. Nr. 36). *Г. Гр.* VI/2. 19—20. Спр.

471 bis. **Keller**, Über den Einfluss der Zufuhr von Kohlenhydraten auf den Eiweisszerfall im Organismus magendarmkranker Säuglinge. (Zbl. f. inn. Med. 1899. Nr. 2). *Ал. Бач.* V/1. 10—14. Спр.

472. **Kępiński** Stanisław, Podręcznik równań różnicznowych. (Lwów 1907, 2 части). *В. Л.* XII. 4—5. Бібл.

473. **Kernig**, Über Dämpfungen an den Lungenspitzen ohne pathologische Veränderungen in denselben. (Ztsch. f. kl. Med. XXXIV. H. 5—6). *Е. О.* IV/1. 9. Спр.

474. **Kessler** H., Eine neue Krankheit an den Kohlpflanzen. (Landw. Ztg. u. Anzeiger des landw. Ztrverb. für den Regierungsbez. Kassel 1879. Nr. 30). *Ярослав Федюк,* XI. 9. Bact.

475. **Kirmmisson,** Traitement de la coxalgie (La Sem. med. 1899, Nr. 52). *Е. К.* V/2. 33. Спр.

*476. **Киселевъ** А.. Элементарная алгебра. (Москва, Думновъ, 1897). *В. Л.* VI/1. 18. Бібл.

*477. **Kistner** A., Deutsche Physiker und Chemiker. (Kempten u. München, Kösel, 1908). *В. Л.* XII. 12. Бібл.

*478. —, Geschichte der Physik (2. Bde, Lpz. Sml. Gösch. 1906). *В. Л.* XII. 12. Бібл.

479. **Klaatsch** H., Die Vererbung in der Pathologie. (Münch. med. Wschr. 1898. Nr 14). *М.* III/1. 33. Спр.

480. **Klein,** Ein Beitrag zur Kenntnis der Verbreitung des Bacillus pseudotuberculosis (Zbl. f. Bakt. 1899, Nr. 9). *О. Д.* V/2. 11—12. Спр.

481 —, Giebt es eine „Amblyopia ex anopsia“? (Wiener med. Wschr. 1900. Nr. 20). *(Др. Михайло Кос)*. VI/2. 35—36. Спр.

482. **Klein** E, (London). Zur Kenntnis des Bacillus tuberculosis und pseudotuberculosis in der Milch sowie die Biologie des Bacillus tuberculosis. (Zbl. f. Bakt. 1900, Nr. 4—5). *Д.* VI/2. 13—14. Спр.

*483. **Klein** F., Anwendung der Differential - und Integralrechnung auf Geometrie. (Vorlesung gehalten während des Sommersemesters 1901, ausg. von C. Müller; Lpz. Tb. 1902). *(В. Л.)*. VIII/2. 25. Бібл.

484. — , Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. (I. Tl. Arithmetik, Algebra, Analysis; Lpz. Tb. 1908; II. Tl. Geometrie, ibidem, 1909). *В. Л.* XIII. 2—3. Бібл.

485. — , Über eine zeitgemässe Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen. (Lpz. Tb. 1904). *(В. Л.)*. X. 1—2. Бібл.

*486. **Клейнъ** Ф., Лекціи по избраннымъ вопросамъ элементарной геометріи. Пер. Н. Н. Парсантьева, подъ ред. Д. М. Синцова. (Казань. 1898). *(В. Л.)*. VI/1. 18. Бібл.

487. **Klein** F. und **Riecke** E., Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen (Lpz. Tb. 1900). *(В. Л.)*. VII/2. 16—17 Бібл.

488. — , und **Sommerfeld** A., Über die Theorie des Kreisels (Lpz. Tb. I. зош. 1897, II. зош. 1898). *В. Л.* IV/2. 5. Бібл.

— , *vide* **Fricke** R. und **Klein** F.

489. **Kleine,** Über Entgiftung im Thierkörper. (Ztsch. f Hyg. B. 66. Heft 1). *М.* VIII/1. 6. Звіти.

490. **Klingmüller**, Der gegenwärtige Stand der Syphilis - Therapie. (Kl. Mh. für A. 1900. XII). *Др. Яр. Грушкевич.* VIII/1. 14—17. Звіти.

491. **Klinkerfues** W., Theoretische Astronomie. (2. Aufl. bearb. von Dr H. Buchholz, Brschg. Vw. 1899). *В. Л.* VI/1. 3. Бібл.

492. **Klipstein,** Experimentelle Beiträge zur Frage der Beziehungen zwischen Bakterien und Erkrankungen der Athmungsorgane. (Ztsch. f. kl. Med. XXXIV. Heft 4). *Гарматій.* IV/1. 13—14. Спр.

493. **Kneser** A., Lehrbuch der Variationsrechnung. (Brschg. Vw. 1900). *В. Л.* IX. 1—5. Бібл.

494. **Knopf,** Dis Früherkennung der Tuberculose. (Ztsch. f. Tub. B. I. 3). *Е. О.* VIII/1. 29—30. Звіти.

495. **Kny** L., Über die Wurzelanschwellungen der Leguminosen. (Verhdl. des bot. Ver. der Prov. Brandenburg 1878). *Ярослав Федюк.* XI. 4—5. Bact.

496. — , Zu dem Aufsatz des Herrn Prof. B. Frank: „Über die Parasiten in den Wurzelanschwellungen der Papilionaceen" (Brt Ztg. 1879. — Sitzber. des Bot. Ver. des Prov. Brandenburg 1879). *Ярослав Федюк.* XI. 8—9. Bact.

497. **Kobold** Herman, Dr., Der Bau des Fixsternsystems (Brschg. Vw. 1906). *В. Л.* XII. 11. Бібл.

498. **Koch** L., Über die direkte Ausnutzung vegetabilischer Reste durch bestimmte chlorophyllhaltige Pflanzen. (Ber. d. D. B. G. Bd. 5. 1887). *Ярослав Федюк.* XI. 16—17. Bact.

499. — , Über die Entwickelung der Malariaparasiten. (Ztsch. f. Hyg. und Infektionskrankh. Bd. XXXII). *Е. О.* VIII/1. 20. Звіти.

500. **Kohlrausch** F., Leitfaden der praktischen Physik (Lpz. Tb. 1896; 8. вид. з дод. „das absolute Maassystem"). *В. Л.* IV/2. 3. Бібл.

501. **Kohn**, Zum Thymustod. (D. med. Wschr. 1901, Nr. 2). *В. Г.* VIII/1. 57. Звіти.

502. **Koláček** Fr., Dr., Hydrodynamika (Sborn. Jedn. česk. math. č. II. Praha, 1899). *В. Л.* VI/1. 6—7. Бібл.

503. **Koloušek** I., Mathematická theorie důchodů jistých a půjček annuitních. (Praha, 1904). (*В. Л.*). X. 13. Бібл.

504. **Koenig** und **Haselhoff**, Die Aufnahme der Nährstoffe aus dem Boden durch Pflanzen. (Landw. Jahrb. Bd. 23. 1894). *Ярослав Федюк.* XI. 25. Bact.

505. **Koranyi**, Physiologische und klinische Untersuchungen über den osmotischen Druck thierischer Flüssigkeiten. (Ztsch. f. kl. Med. Bd. 33—34). *М.* V/1. 1—2. Спр.

506. —, und **Pel**, Die Behandlung der Pneumonie. (Звіт з дискусиї на XVIII-тім конґр. для внутр. мед. в Вісбадені, 1900). *Е. О.* VIII/1. 17—19. Звіти.

507. **Korn**, Über acute Alkoholvergiftung im Kindesalter. (Ther. Mh. 1897). *Е. О.* III/1. 54. Спр.

*508. **Корольковъ** А. Л., Лекціи по электротехникѣ (Спб. *(В. Л.)*. VII/1. 8. Бібл.

(458). **Kosmos**, 1895. р. XX. Львів. *І. Р.* **XIV**. 35—36. Н. Хр.

*509. **Косоноговъ** І., Атмосферное электричество и земной магнетизмъ.. (Кіевъ 1899). *(В. Л.)*. VII/1. 8. Бібл.

*510. **Котельниковъ** А. П., Проективная теорія векторовъ. (Казань). *(В. Л.)*. VII/1. 7. Бібл.

511. **Köthner** Paul, Dr., Aus der Chemie des Ungreifbaren. („Die Natur“, Bd. II., Zickfeldt, Osterwieck). *В. Л.* XII. 9. Бібл.

512. **Kowalewski** G., Einführung in die Infitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. (Lpz. Tb. 1908). *В. Л.* XII. 6. Бібл.

*513. **Kranz** I., Zbiór zadań matematycznych. (Kraków, Krzyżanowski, 1902). *(В. Л.)*. X. 17. Бібл.

514. **Krause**, Beitrag zur Kenntniss des Actinomyces. *О. Д.* V/2. 12. Спр.

515. —, Beiträge zur Kenntniss des Bacillus pyocyaneus (Einwirkung von Teslaströmen auf den Bacillus pyocyaneus). (Zbl. f. Bakt. 1900. XXVII). *Д.* VI/2. 15—16. Спр.

516. **Krepelin**, Neuere Untersuchungen über die psychischen Wirkungen des Alkohols. (D. med. Wschr. 1899, Nr. 42). *М.* V/2. 6—7. Спр.

517. **Kretz**, Heilserumtherapie und Dyphterietod. (Wiener Kl. Wschr. IV. 21. 1898). *О. Д.* IV/1. 16. Спр.

Kreuzhage C., *vide* **Wolff** E. u. **Kreuzhage** C.

518. **Kronecker** L., Vorlesungen über Mathematik. (II. Tl. II. Abschnitt, I. Bd. Lpz. Tb. 1903). *(В. Л.)*. X. 16. Бібл.

519. —, Vorlesungen über Zahlentheorie. (I. Bd. hg. K. Hensel, Lpz. Tb. 1901). *(В. Л.)*. VIII/2. 25. Бібл.

520. —, Werke. (Herausgeg. auf Veranlass. der k. preuss. Ak. der Wiss. von K. Hensel in 4. Bden. Bd. I. 1895, Bd. II. 1897). *В. Л.* IV/2. 4—5. Бібл.

521. **Krüger** F., Zur Kinetik des Dissoziationsgleichgewichtes und der Reaktionsgeschwindigkeit. (Gött. Nachr. 1908). *Ю. Гірняк.* XIII. 31—33. Бібл.

522. **Kühn** I., Die Assimilation freien Stickstoffs durch Bodenbakterien ohne Symbiose, ohne Leguminosen. (Fühling's landw. Ztsch. 1901). *Ярослав Федюк.* XI. 39. Bact.

523. **Küster** F. W., Dr. Logarithmische Rechentafeln für Chemiker. (Lpz. Veit 1904). *I. К.* X. 30. Бібл.

*524. **Курдюмовъ** В. И., Курсъ начертательной геометріи. Отд. I. II. (Спб.). *(В. Л.).* VII/1. 7. Бібл.

525. **Laborde,** Traitement rationel de l'epilepsie fonctionelle. (Le Bull. méd. 1899. Nr. 96). *Е. К.* V/2. 29. Спр.

Lacour E., *vide* **Appel** P. et **Lacour** E.

*526. **Lagrange** J. L., Unbestimmte Analysis. (Ostwalds' Klass. Ч. 103). *(В. Л.).* VII/2. 16. Бібл.

*527. —, und **Cauchy,** Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung. (Ostwald's Klass. Bd. 113). *(В. Л.).* VII/2. 16. Бібл.

528. **Landau,** Über den Nachweis von freier Bauchwassersucht. (Zbl. f. Gyn. 1900. Nr. 45). *М.* VIII/1. 64. Звіти.

Landsberg G., *vide* **Hensel** K. und **Landsberg** G.

529. **Lange.** Zur Anatomie des Ciliarmuskels der Neugeborenen. (Kl. Mbl. f. Aug. 1901). *(Др. Яр. Грушкевич).* VIII/1. 13. Звіти.

530. **Langendorff** Prof., Über die Beziehung des oberen sympatischen Halsganglions zum Auge und zu den Blutgefässen des Kopfes. (Kl. Mbl. f. Aug., 1900). *(Др. Яр. Грушкевич).* VI/2. 40—42. Спр.

531. **Lapersonne,** de, Des névrites optiques eiées aux sinusites sphénoidales et aux maladies de l'arrière - cavité des fosses nasales. (Arch. d'opht., 1899, Nr. 9). *Др. Мих. Кос.* V/2. 38. Спр.

532. **Laplace,** Oeuvres complètes. T. XII. (Paris, G. V. 1898). *В. Л.* VI/1. 1. Бібл.

533. **Laska** Wacław, dr., Astronomia sferyczna. (Lwów, 1901). *С. Р.* IX. 22. Бібл.

534. **Laurent** E., Observations sur le développement des nodositét radicules chez les légumineuses. (C. R. t. 133, 1901). *Ярослав Федюк.* XI. 39—40. Bact.

—, *vide* **Schloesing** Th. fils et **Laurent.**

535. **Laves,** Über das Eiweissnährmittel „Roborat“ und sein Verhalten im Organismus, verglichen mit ähnlichen Präparaten. (Münch. med. Wschr., Nr. 39, рік?) *Г. Гр.* VI/2. 21—22. Спр.

536. **Läwit,** Protozoennachweis im Blut und in den Organen leukämischer Individuen. (Zbl. f. Bakt. B. XXIII. Heft 5—6). *Е. О.* V/2. 18—19. Спр.

537. —, Weitere Mittheilung über Sporozoennachweis bei Leukämie (Wiener kl. Wschr. 1899, Nr. 20). *Е. О.* V/2. 18—19. Спр.

538. **Lebon** E., Krótki zarys dziejów astronomii. (przekł. Bouffałła z przedm. Dicksteina, Warszawa, Wende, 1903). *(В. Л.).* X. 27. Бібл.

*539. **Lejeune-Dirichlet,** Die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus — und Cosinus-Reihen. (Ostwald's Klass. Bd. 116). — з додатком ч. 812: *(В. Л.).* VII/2. 16. Бібл.

540. **Levin**, Untersuchungen über den Begritt der cumulativen Wirkung. (D. med. Wschr. 1899. Nr. 43). *Д.* VI/2. 10—11. Спр.

541. **Levinsohn**, Über den Einfluss der Lähmung eines Irismuskels auf seinen Antagonisten. (Kl. Mbl. f. Aug. 1900). *(Др. Яр. Грушкевич).* VI/2. 49—50. Спр.

542. **Levy I.**, Beiträge zur Lehre von der Stickstoffaufnahme der Pflanzen. (Dissert. Halle 1889). *Ярослав Федюк.* XI. 28. Вact.

*543. **Lévy** L., Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques (Paris, G. V. 1898). *(В. Л).* VII/1. 7. Бібл.

—, *vide* **Rouché.** E. et **Lévy** L.

Lewandowsky Max, *vide* **Munkx** Immanuel und **Lewandowsky** Max.

Lewin, *vide* **Horwaht** und **Lewin.**

544. **Lewy**, Über die Adhäsion des Blutes an der Wandung der Blutgefässe. (Arch. f. An. u. Phys. — Phys. Abt. 1899). *М.* V/2. 1. Спр.

545. **Левицкий** В., др., Деякі інтересні числа. (Учитель. 1904). *Я. М.* X. 35. Бібл.

546. —, Деякі практичні правила подільности чисел. (Учитель, 1903). *Я. М.* IX. 27. Бібл.

547. —, Етер космічний. (»Учитель«, 1903). *Я. М.* X. 34. Бібл.

*548. —, Машини електростатичні. (Відбитка з »Учителя«, Львів 1906). *В. Л* XII. 11. Бібл.

549. —, Основні одиниці в фізиці. (»Учитель« 1904). *Я. М.* X. 35. Бібл.

550. —, Проба девяткова. (»Учитель« 1903). *Я. М.* IX. 2. Бібл.

551. —, Про поступи фізики в послідних часах. (Учитель«, 1904). *Я. М.* X. 34. Бібл.

552. —, і **Огоновский** Петро, Альгебра для висших кляс шкіл середних. (Львів, ч. I. на V. кл. 1906, ч. II. на VI—VII кл. 1908). *С. Матвіяс.* XII. 1—2. Бібл.

553. **Libański** E., Perpetuum mobile. (Lwów, 1904). *(В. Л.).* X. 32. Бібл.

554. **Lichtenstein**. Diagnostische Irrthümer. (Zbl. f. Gyn. 1900, Nr. 48). *М.* VIII/1. 66. Звіти.

*555. **Lie** Sophus u. **Scheffers** G., Geometrie der Berührungstransformationen. (Lpz. Tb., 2 части, 1896—7). *В. Л.* IV/2. 3. Бібл.[1]).

556. **Liebrecht**, Über physiologisches und hysterisches Doppelsehen. (Arch. f. Aug. XXXIV., Wiesbaden, 1897). *(Я. Грушкевич).* III/1. 46—47. Спр.

557. **Liebreich**, Die Vichyquellen. (Ther. Mh., 1901, Nr. 7). *Е. О.* VIII/1. 42—44. Звіти.

558. **Liebscher**, Beitrag zur Sticksstoff-Frage. Journ. f. Landw. 1893, Bd. 41). *Ярослав Федюк.* XI. 34. Вact.

559. —, Der Verlauf der Nährstoffaufnahme und seine Bedeutung für die Düngerlehre. Journ. f. Landw. 1887). *Ярослав Федюк.* XI. 17. Вact.

560. **Liegel**, Meine Therapie bei cruposer Pneumonie. (Wiener med. Wschr. 1899, Nr. 19). *Е. О.* V/2. 28—29. Спр.

561. **Limbeck**, Säuerung des Organismus. (Ztsch. f. kl. Med. 1898. Bd. 34). *М.* V/1. 6—7. Спр.

562. **Linde**, Wurzelparasiten und angebliche Bodenerschöpfung in Bezug auf die Kleemüdigkeit und analoge Erscheinungen bei ungenügendem Pflanzenwechsel.

---

[1]) Обширнійша згадка в ч. 996.

(Lpz. Inaug. - Diss., Freiburg 1881). *Ярослав Федюк.* XI. 11. Bact.

*563. **Лобачевскій** Н. И., Біографическій очеркъ. (Спб.). *(В. Л.).* VII/1. 8. Бібл.

564. **Lommel** E., Lehrbuch der Experimentalphysik (15. вид., Lpz. Barth, 1908). *В. К.* XIII. 12. Бібл.

(539). **Łomnicki** A. M., Pleistoceńskie owady z Borysławia. (Muzeum im. Dzieduszyckich) — Fauna pleistocenica insectorum Boryslaviensium (Musaeum Dzieduszyckianum), (Львів, 1894). *I. В.* **V**. 86—87. Бібл.

565. **Łopuszański** I., Z podstaw teoryi funkcyi (Kraków, sp. wyd. 1903). *(В. Л.).* X. 16. Бібл.

566. **Lorentz** H. A., Lehrbuch der Differential — und Integralrechnung und der Anfangsgründe der analyt. Geometrie. (übers. von Dr. Schmidt, Lpz. Barth, 1900). *В. Л.* VII/1. 3. Бібл.

567. — , Sichtbare und unsichtbare Bewegungen, (übers. von G. Siebert, Brschg. Vw. 1902 . *(В. Л.)* VIII 2. 30—31. Бібл.

568. — , The Theory of Electrons and its Applications to the phenomena of light and radiant heat. A course of lectures delivered in Columbia University, New-York, 1906. (Lpz. Tb. 1909). *В. К.* XIII. 17—18. Бібл.

— , *vide* **Recueil**.

*569. **Лоренцъ** Г., Элементы высшей математики, перев. В. И. Шемеретевскаго. III. I. Москва). *(В. Л.).* VII/1. 7. Бібл.

570. **Lorenz**, Über das Redressement der spondylitischen Wirbelsäure durch totale Lordosierung in horizontaler Suspension. (Wiener med. Wschr. 1898, Nr. 24—27). *О. Грабовський.* IV/1. 21—25. Спр.

571. — , Zur Behandlung der Epilepsie mit Bromipin. (Wiener med. Wschr. 1901, Nr. 44). *Е. О.* VIII/1. 26. Звіти.

572. **Loria** G., Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, übers. v. F. Schütte. (Lpz. Tb. 1902). *В. Л.* IX. 7—8. Бібл.

573. **Löwenfeld** L., Über Epilepsiebehandlung. (Zbl. f. ges. Ther. 1897. H. XI—XII). *Гарматїй.* III/1. 56—57. Спр.

574. **Lublinski**, Über die Wirksamkeit des Pyramidon bei dem Fieber der Phtisiker. (Ther. Mh. 1901, Nr. 10). *Е. О.* VIII/1. 45—46. Звіти.

575. **Luborski**, Befund von Schweinrothlaufbacillen im Stuhle eines icterischen Kindes. (D. med. Wschr. рік?) *В. Г.* VIII/1. 57. Звіти.

576. **Lunstroem** A. N., Über Mykodomatien in der Wurzeln der Papilionaceen (Bot. Zbl. XXXIII. 1888). *Ярослав Федюк.* XI. 25. Bact.

577. — , Über symbiotische Bildungen bei den Pflanzen. (Bot. Sekt. af Naturvetenskapliga Students ällkapet i Upsala 1886. Реферат в Just's Jahresberichte, 1886. II. 2). *Ярослав Федюк.* XI. 13. Bact.

578. **Maas**, Radicaloperation kindlicher Hernien. (D. med. Wschr. 1901; Nr. 10). *В. Г.* VIII/1. 56—57. Звіти.

579. **Maassen** Friedrich, Zur Charakteristik der Somatose. (Wiener med. Wschr. 1898. Nr. 1.) *Гарматїй.* III/1. 55—56. Спр.

580. **Mach** E., Die Mechanik in ihrer Entwickelung, historisch-kritisch dargestellt. (4. Aufl. Lpz. Brockhaus, 1901). *(B. Л.)*. VIII/2. 31—32. Бібл.

581. **Mache** H. und **Schweidler** E., Die atmosphärische Elektrizität. (Brschg. Vw. 1909). *B. К.* XIII. 19—22. Бібл.

582. **Maguenne** L., Sur les poids moléculaires moyen de la partie soluble dans les graines en germination. (C. R., t. 125. 1897). *(M.)*. III/1. 38. Спр.

583. **Maklakoff**, Les résultats définitifs de mes recherches sur l'influence de la lumière voltaique sur la peau. (Arch. d'opht. 1901, Nr. 5). *M. К.* VIII/1. 9. Звіти.

Mandl, *vide* **Stutzer**, **Burr** und **Mandl**.

584. **Mankowski**, Ein neues Nährsubstrat zur Isolirung von Typhusbacillen und des Bacterium colli communalis. (Zbl. f. Bakt. 1900). *О. Д.* V/2. 16—17. Спр.

585. —, Ein Verfahren zum schnellen und leichten Unterscheiden von Kulturen des Typhusbacillus von Bacterium colli. (Zbl. f. Bakt. 1900, N. 1.) *О. Д.* V/2. 16. Спр.

586. **Mannaberg**, Über Phlebitis und Thrombose in klinischer Beziehung. (Wiener med. Wschr. 1899, Nr. 10—12). *Е. О.* V/2. 25—26. Спр.

587. **Marandon** de Montyel, Des troubles et des déformations pupillaires chez les vésaniques (La presse méd. 1901, Nr. 75). *M. К.* VIII/1. 9. Звіти.

Marcano, *vide* **Munz** et **Marcano**.

588. **Marchoux**, Rôle du pneumocaque dans la pathologie et dans la pathogénie de la maladie du sommeil. (Ann. de l'inst. Pasteur, t. 13. 1899). *О. Д.* V/I. 26—27. Спр.

589. **Marcinowski**, Zur Atropinbehandlung des Ileus. (Münch. med. Wschr. Nr. 43. рік?) *Г. Гр.* VI/2. 23. Спр.

590. **Marcus**. Über in Wasser lösliches Serumglobin. (Ztsch. f. phys. Ch. B. 28. H. 5/6). *M.* VI/2. 2. Спр.

591. **Marege**, Du role de l'arthritisme dans la pharyngite granuleuse. (Le Bull. méd. Nr. 96). *Е. К.* V/2. 27. Спр.

592. **Marischler**, O wpływie na organizm powolnego sączenia się płynu surowicznego z jamy brzusznej kanałem pozostałym po nakłuciu trójgrańcem. (Przeg. lek. 1899, Nr. 12). *Е. О.* V/1. 10. Спр.

Marseau Th., *vide* **Salamson** C. J. et **Marseau** Th.

593. **Marzinowsky**, Über einige in den Krypten der Gaumenmandeln gefundenen Bacillenarten. (Zbl. f. Bakt. 1900). *Д.* VI/2. 12.—13. Спр.

Математическій сборникъ, *vide* **Сборникъ**, математическій.

Mathematische Annalen, *vide* **Annalen**, mathematische.

594. **Mathews** A., Zur Chemie der Spermatozoen. (Ztsch. f. phys. Ch. Bd. XXIII. H. 4—5). *M.* III/1. 36. Спр.

595. **Matschinsky** (du laboratoire de prof. Metschnikoff), De l'atrophie des ovules dans les ovaires des mammifères. (Ann. de l'Inst. Pasteur (1900). *Д.* VI/2. 18—19. Спр.

596. **Mattirolo** O.,. Sulla influenza che l'estirpazione dei fiori esercita sui tubercoli radicali delle

piante leguminose. (Malpighia, XIII, також Arch. ital. de Biol. t. XXXIV. 1906). *Ярослав Федюк.* XI. 40—41. Bact.

597. **Mayer**, Zur Kenntnis der säurefesten Bacterien aus der Tuberculosegruppe. (Zbl. f. Bact. 1899, Nr. 12). *О. Л.* V/2. 9—10. Спр.

Mayer Hans. *vide* **Nowicki** R. und **Mayer** Hans.

598. **Mayers**, Über Immunität gegen Proteide. (Zbl. f. Bact. A. 1900, Nr. 8—9). *М.* VIII/1. 7—8. Звіти.

599. **Mazé**, Les microbes des nodosités des Légumineuses. (Ann. de l' Inst. Pasteur, 1897, XIII). *Ярослав Федюк.* XI. 37—38. Bact.

600. **Messerschmitt** I. B., Die Schwerbestimmung an der Erdoberfläche. (Brschg. Vw. 1909 *В. К.* XIII. 12—13. Бібл.

*601. **Mewes** Rudolf, Die elementare Physik des Äthers. (Kraft und Masse). 2. Tb. (Bln., Fischer). *(В. Л.).* VII/1. 5. Бібл.

602. —, Licht, Elektrizitäts-und X. — Strahlen. (2. Aufl. Bln., Fischer). *(В. Л.).* VII/1. Бібл.

603. **Meyer** M. W., Der Mond. (Stuttgart, Franckl, 1909). *В. Л.* XIII. 25—26. Бібл.

604. —, Wie kann die Welt eimal untergehen? (Stuttgart, Kosmos). *(В. Л.).* X. 28—29. Бібл.

605. **Meyer** W. Fr., O stanie obecnym teoryi niezmienników. (Przeł. S. Dickstein, 1899). *В. Л.* VI/1. 4. Бібл.

606. **Meyer**, Die Behandlung des Peritonitis und ähnlicher Krankheiten durch Alkoholumschläge. (Ther. Mh. 1901, I). *О. Г.* VIII/1. 60. Звіти.

607. —, Über das Fieber bei der Lungentuberkulose und seine Behandlung. (Ther. Mh. 1901, Nr. 10). *Е. О.* VIII/1. 44—45. Звіти.

608. **Michaelis**, Über Diazorearation bei Phtisikern und ihre prognostiche Bedeutung. (Zbl. f. inn. Med. 1899, Nr. 48). *Е. О.* V/2. 21. Спр.

*609. **Michel** F., Recueil de problèmes de géometrie analytique. (Paris, G. V. 1900). *(В. Л.).* VII/1. 7. Бібл.

610. **Middeldorff**, Ein Fall von Ileus, mit Atropin behandelt. (Münch. med. Wschr. 1901, Nr. 17). *Е. О.* VIII/1. 22. Звіти.

611. **Mie**, Moleküle, Atome, Weltäther. (Lpz. Tb. 1904). *(В. Л.).* X. 29. Бібл.

612. **Miles** Manly, Die nitrificierenden Mikroben. (Biederm. Zbl. 1887. VIII., також Agricultural Science, 1887, vol. 1). *Ярослав Федюк.* XI. 15. Bact.

*613. **Мининъ** А. П., Сборникъ задачъ по аналитической геометріи. (Москва, 1897). *В. Л.* VI/1. 18. Бібл.

614. **Minkowski** Herman, Raum und Zeit (вид. A. Gutzmer, Lpz. Tb. 1900). *В. К.* XIII. 22—23. Бібл.

Minssen, *vide* **Takke, Immendorf, Hessenland, Schütte** und **Minssen.**

615. **Mitteilungen** der Erdbeben-Kommission der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien 1909. Nr. XXXV. Hölder). *М. Ч.* XIII. 37. Бібл.

616. **Mohr**, Beitrag zur Exstirpation des Ganglion cervicale supremum nervi sympathici bei Glaucom. (Kl. Mh. f. Aug. Stuttgart, 1900). *(Др. Яр. Грушкевич).* VI/2. 42. Спр.

617. **Möller** H., Plasmodiophora Alni. (D. bot. Ges. 1885, III. 3). *Ярослав Федюк*. XI. 12. Bact.

*618—619. **Monatshefte** für Mathematik und Physik, Wien. (T. XII. квартал 1—4, 1902). *(В. Л.)*. IX. 32—33. Бібл.

620. **Morax**, Chancre syphilitique de la conjonctive bulbaire. Infection par un nourrisson hérédosyphilitique. (La presse méd. 1900, Nr. 31). *(Др. Михайло Кос)*. VI/2. 35. Спр.

621. **Morsani**, Über einen neuen operativen Invaginationsprocess bei geradlinigen Darmanastomosen. (Zbl. f. Chir. 1899, Nr. 32). *В. Г.* V/2. 34. Спр.

622. **Müller** F., Vocabulaire mathématique—Mathematisches Vokabularium. (Lpz. Tb., Paris, G. V. — Часть I. 1900, часть II. 1901). *(В. Л.)*. VIII/2. 33. Бібл.

623. **Müller** G., Zur Behandlung des chronischen Hydrops genu. (Zbl. f. Chir. 1898, Nr. 52). *В. Г.* V/2. 36. Спр.

624. **Müller** J., Über die Ausscheidungsstellen des Acetons und die Bestimmung in der Athemluft und in den Hautasdünstungen des Menschen. (Arch. f. exper. Pathol. u. Pharm. Bd. XL). *Е. О.* V/2. 21—22. Спр.

625. **Müller**, Zur Trennung der Albumosen von den Peptonen. (Ztsch. f. phys. Ch. Bd. 26. H. 1—2). *М.* V/1. 1—3. Спр.

626. **Munkx** Immanuel und **Lewandowsky** Max, Über die Schicksale der Eiweissstoffe nach Einführung in die Blutbahn. (Arch. f. Anat. u. Phys. — Phys. Abt. 1899. Suppl.) *М.* V/2. 1—3. Спр.

627. **Munro** E. A., miss, Nitrification (Pharm. Journ. and Transact. 1887. vol. XVII). *Ярослав Федюк*. XI. 13. Bact.

628. **Munz** A., De quelques faits d'oxydation et de réduction produite par les organismes microscopiques. (C. R. t. 101, 1885, II). *Ярослав Федюк*. XI. 13. Bact.

629. —, et **Marcano**, Sur la formation des terres nitrées dans les regions tropicales. (C. R. t. 101, 1885, II). *Ярослав Федюк*. XI. 13. Bact.

630. **Миколаєвич** Я., Про падучі зьвізди. (Передрук з »Учителя«, 1904). *(В. Л.)*. X. 35. Бібл.

631. **Natanson** Władysław, Odczyty i szkice. (Warszawa, Wende 1908). *В. Л.* XII. 12. Бібл.

(629). **Научное Обозрѣніе.** *О. Ч.* **VIII.** 4. Н. Хр.

(628). **Наука и Жизнь** (1894). *О. Ч.* **VIII.** 4. Н. Хр.

632. **Naunyn**, Zur Digitalistherapie bei Herzkrankheiten. (Ther. d. Geg. 1899, Nr. 5). *Е. О.* VI/2. 25—26. Спр.

633. **Nedden**, Ein Fall von Blenorrhoea neonatorum, hervorgerufen durch den Pseudoinfluenzbacillus. (Kl. Mbl. f. Aug. Stuttgart, 1900). *(Др. Яр. Грушкевич)*. VI/2. 42—43. Спр.

634. **Neisser** u. **Wechsberg**, Über eine neue einfache Methode, zur Beobachtung von Schädigungen lebender Zellen und Organismen. (Münch. méd. Wschr. Nr. 37. рік?) *Г. Гр.* VI/2. 20—21. Спр.

635. **Nencki** und **Zalewski**, Über das Verhalten des Benzoyl - und des Calciumsyperoxyds im Verdauungskanal des Menschen und des Hundes. Ztsch. f. phys

Ch. Bd. 27. H. 6). *М.* V/2. 6. Спр.

636. **Nernst** Walter, Dr., Theoretische Chemie vom Standpunkte der Avogadro'schen Regel und der Thermodynamik. (6. Aufl. Stuttgart 1909). *Ю. Гірняк.* XIII. 26. Бібл.

637. **Netto** Eugen, Prof. Dr., Gruppen- und Substitutionentheorie. (Lpz. Sml. Schub. LV, 1908). *М. Ч.* XIII. 9. Бібл.

638. **Neubauer**, Ein Fall von acuter Dermatomyositis. (Zbl. f. inn. Med. 1899, N. 12). *М. Вахнянин.* V/1. 23—24. Спр.

639. **Neugebauer**, Automatische Tätigkeit des Embryonalherzens bis 3 Stunden über den Tod hinaus. (Zbl. f. Gyn. 1898). *П.* IV/1. 28—30. Спр.

640. **Neumann**, Der Einfluss grosser Wassermengen auf die Stickstoffausscheidungen beim Menschen. (Arch. f. Hyg. B. 36. Heft 3). *М.* VI/24. Спр.

641. **Neuschuller**, La perception de la couleur et l'acuité visuelle pour les caractères sur fond gris variable. (Arch. d'opht. 1899, Nr. 9). *Др. Михайло Кос.* V/2. 36—37. Спр.

642. **Neusser** E., Maltafieber. (З XVIII зїзду для внутр. мед. в Вісбадені, 1900). *Е. О.* VIII/1. 19—20. Звіти.

643. **Nicolai** K. H., Bakteriologische Untersuchungen über Wurzeln und Samen von Hedysarum coroniarum. (Diss. Erlangen, 1900). *Ярослав Федюк.* XI. 38. Bact.

644. **Nielsen** N., Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, (Lpz. Tb. 1904). *(В. Л.).* X. 7—8. Бібл.

645. **Nimführ** R., Die Luftschiffahrt, ihre wissenschaftlichen Grundlagen und technische Entwickelung. (Lpz. Tb., 1909). *В. Л.* XIII. 23. Бібл.

646. —, Leitfaden der Luftschiffahrt und Flugtechnik. (Wien, Hartleben, 1909). *В. Л.* XII. 9—10. Бібл.

647. **Nippoldt** A. junior, Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht. (Lpz. Göschen, 1903). *(В. Л.).* X. 27. Бібл.

648. **Nobbe**, Über die Stickstoff-Ernährung der Leguminosen. (Verh. d. Ges. deut. Naturf. u. Ärzte. Vers. zu Bremen 1890. II). *Ярослав Федюк.* XI. 29. Bact.

649. —, Über einige neuere Beobachtungen, betreffend die Bodenimpfung mit reinkultivierten Knöllchenbakterien für die Leguminosen-Kultur. (Bot. Zbl. 1896, LXVIII). *Ярослав Федюк.* XI. 36—37. Bact.

650. —, und **Hiltner**, Eine aus der ungleichen Wirkungskraft der Knöllchenbakterien sich ergebende praktische Schlussfolgerung. (Magdeburger Ztg. 1894, Nr. 68). *Ярослав Федюк.* XI. 34. Bact.

651. —, Künstliche Überführung der Knöllchenbaktierien von Erbsen in solche von Bohnen (Phaseolus). (Zbl. f. Bakt. 1900. 2. Abt. VI). *Ярослав Федюк.* XI. 39. Bact.

652. —, Über den Einfluss verschiedener Impfstoffmengen auf die Knöllchenbildung und den Ertrag der Leguminosen. (Landw. Versuchsstationen, LV. 1900). *Ярослав Федюк.* XI. 38. Bact.

653. —, Über die Anpassungsfähigkeit der Knöllchenbakterien ungleichen Ursprungs an verschiedene Leguminosengattun-

gen. (Landw. Versuchsstationen XLVII. 1896). *Ярослав Федюк.* XI. 37. Bact.

654. —, Über die Dauer der Anpassungsfähigkeit der Knöllchenbakterien an bestimmte Leguminosengattungen. (Landw. Versuchsstation. XLIX. 1898). *Ярослав Федюк.* XI. 38. Bact.

655. — und Richter, Über den Einfluss des im Kulturboden vorhandenen assimilierbaren Stickstoffs auf die Aktion der Knöllchenbakterien. (Landw. Versuchsstation LIX. 1904). *Ярослав Федюк.* XI. 44. Bact.

656. —, Über die Nachwirkung einer Bodenimpfung zu Schmetterlingsblütlern auf andere Kulturgewächse. (Landw. Versuchsstation. LIV. 1904). *Ярослав Федюк.* XI. 44. Bact.

657. —, **Hiltner** u. **Schmid**, Versuche über die Knöllchenbakterien der Leguminosen, insbesondere über die Frage der Arteinheit derselben. (Landw. Versuchsstation. XLV. 1894). *Ярослав Федюк.* XI. 38. Bact.

658. **Nolda**, Zur Tannoformbehandlung der Nachtschweisse der Phtisiker. (Bln. kl. Wschr. 1901, Nr. 26). *Е. О.* VIII/1. Звіти.

659. **Nothnagel**, Pseudoperityphlitis. (Wiener kl. Wschr. 1899, Nr. 15). *Е. О.* VI/2. 26. Спр.

660. **Notthaft**, Ein Fall von artificiellem acutem thyreogenem Morbus Basedow. Zugleich ein Beitrag zur Frage der Schilddrüsenfunktion und zur Frage der Actiologie des Morbus Basedow. (Zbl. f. inn. Med. 1898, Nr. 15). *Е. О.* IV/1. 6—7. Спр.

661. **Nowicki** R. und **Meyer** Hans, Flüssige Luft (M. Ostrau, Pauschek, 1906). *В. Л.* XII. 8. Бібл.

662. **Nuel**, Étiologie et pathogénie des cataractes polaires anterieures. *(Др. Михайло Кос).* V/1. 36—37. Спр.

663. —, et **Benoit**, Voies d'élimination des liquides intra-oculaires hors de la chambre antérieure et au fond de l'oeil (nerf optique, etc.). (Arch. d'opht., 1900, Nr. 4). *(Др. Михайло Кос).* VI 2. 34—35. Спр.

*664. **d'Ocagne** M., Traité de Nomographie; théorie des Abaques. (Paris, G. V. 1899). *(В. Л.).* VII/1. 7. Бібл.

665. **Oderfeld**, Zur Technik der Darminvagination. (Zbl. f. Chir. 1899, Nr. 10). *Г.* V/1. 30. Спр.

666. **Огоновский** Петро, Учебник аритметики для низших кляс шкіл середних. Часть I на I і II клясу. (Друге зовсім пероблене видане. Львів 1900). Накладом автора. *С. М.* VI/1. 13. Бібл.

667. —, Учебник аритметики для низших кляс шкіл середних. Часть II на III і IV клясу. (Львів 1898. Накладом автора). *С. М.* VI/1. 14. Бібл.

668. —, Учебник фізики для низших кляс шкіл середних (Львів 1897). *В. Л.* VI/1. 10—11. Бібл.

—, *vide* **Левицкий** Володимир, др. і **Огоновский** Петро.

669. **Olshausen**, Über den Begriff des Puerperalfiebers und die praktische Bedeutung der Definition der Krankheit. *С. П.* V/2. 42. Спр.

670. **Ostwalt**, Mittel zur Bekämpfung der Infektion nach intraokularen Operationen. (Arch. f. Augenheilk. 1897. XXXV). *(Я. Грушкевич).* IV/1. 26—27. Спр.

Otto. **Frank** und **Otto.**

671. **Paltauf.** Über die Reaktionen der Organismen gegen Infektionen Vortrag gehalten in der Festversammlung. der k. k. Gesellschaft der Ärzte in Wien, 18. März 1898). *О. Д.* IV/1. 15. Спр.

675. **Pamiętnik** fizyograficzny, wyd. A. Ślusarski i Br. Znatowicz. T. XIII. Варш. 1895. Dział I. Meteorologia i Hydrografia. Zestawienie roczne spostrzeżeń dokonywanych na stacyach meteorologicznych w ciągu r. 1892. *І. Раковський.* **Зап. XII.** 51. Бібл. Dział II. Geologia z chemią. 1. Objaśnienia do mapy geologicznej gubernii Lubelskiej przez D-ra Jana Trejdosiewicza. *І. Раковський.* **Зап. XII.** 51—52. Бібл. Dział III. Botanika i zoologia. 1. Przyczynki do znajomości flory krajowej przez Józefa Paczowskiego. *Ів. Раковський.* **Зап. XII.** 52—53. Бібл.

672. **Paratore** E., Ricerche istologiche sui tubercoli radicali delle leguminose. Genova 1900. *Ярослав Федюк.* XI. 39. Bact

673. **Pascal'** E., Die Variationsrechnung (übersetzt von A. Schepp. Lpz. Tb. 1899). *В. Л.* VII/2. 12. Бібл.

*674. —, Rachunek nieskończonościowy (перекл. S. Dickstein, T. I. 1896; T. II. 1896; T. III). *В. Л.* IV/2. 9. Бібл.

675. —, Repertorium der höheren Mathematik (übers. von A. Schepp). I. Theil, Analysis (Lpz. Tb. 1900). *В. Л.* VII/2. 12—13. Бібл.

676. —, Repertorium der höheren Mathematik (übers. von A. Schepp). II. Theil, Geometrie (Lpz. Tb. 1902). *(В. Л.).* VIII/2. 1. Бібл.

677. **Passerini** N., Sui tubercoli radicali della Medicago sativa L. Bollet. Societ. Botan. Ital. 1901. p. 365—370. *Ярослав Федюк,* XI. 40. Bact.

678. **Peano** G., Zarys rachunku geometrycznego (з італійского перекл. S. Dickstein, Варшава р. 1897). *В. Л.* IV/2. 9. Бібл.

679. **Péchin,** De l'acuité visuelle au point de vue médicolegal. (Arch. d'opht. 1901. Nr. 3). *М. К.* VIII/1. 10. Звіти.

Pel, *vide* **Koranyi** i **Pel.**

680. **Pergens,** Argyrosis der Conjunctiva bei Protargolgebrauch (Kl. Mbl. f. Aug. 1900). *(Др. Яр. Грушкевич).* VI/2. 43. Спр.

681. **Pernter** I. M., Die tägliche telegraphische Wetterdiagnose in Österreich (Wien, W. Braumüller, 1904). *(В. Л.).* X. 28. Бібл.

682. **Perry** I., Drehkreisel (übers. von A. Walzel, Lpz. ib., 1904). *(В. Л.).* X. 22—23. Бібл.

683. **Peter** B., Die Planeten. (Lpz. Tb. 1909). *В. Л.* XIII. 25. Бібл.

684. **Petermann** A., Contribution à la question de l'azote. (Mem. cour. et austr. Mem. publ. par l'Acad. royale de Belgique, vol. 47, 1892). *Ярослав Федюк.* XI. 32. Bact.

685. —, Contribution à la question de l'azote. (Bruxelles 1893). *Ярослав Федюк.* XI. 33—34. Bact.

686. **Petry,** Über die Ausscheidung des leichtabspaltbaren Schwefel[s] durch den Harn. (Ztsch. f. physiol. Ch. B. 30. p. 45). *М.* VI/2. 7—8. Спр.

(685). **Petryk** J., Krytyczny przegląd prac dokonanych dotychczas nad falami elektrycznemi. (Kosmos, XX. 1895, стор. 369—386). *В. Л.* **Зап. IX.** 55—56. Бібл.

687. **Pfaundler**, Über ein Verfahren zur Bestimmung des Amidosauerenstickstoffes im Harne. (Ztschr. f. physiol. Ch. B. 30. pag. 75). *М.* VI/2. 8—9. Спр.

688. **Pfeifer** Th., Stickstoffsammelnde Bakterien, Brache und Raubbau). Berlin 1904. (Paul Parey) 55. pp. (відбитка із: Mitt. d. landwirtsch. Inst. d. kgl. Univers. Breslau, III. Heft 1). *Ярослав Федюк,* XI. 46. Bact.

689. **Pfeiffer,** Über den Faserstoffgehalt des leukaemischen Blutes. (Zbl. f. inn. Med. 1898. N. 1). *Е. О.* IV/1. 7—8. Спр.

690. —, und **Franke,** Beitrag zur Frage der Verwertung elementaren Stickstoffs durch den Senf. (Landw. Versuchsstation 1897. Bd. 48. p. 455). *Ярослав Федюк.* XI. 38. Bact.

691. **Pfuhl,** Untersuchungen über die Entwickelungsfähigkeit der Typhusbacillen auf gekochten Kartoffeln bei gleichzeitigem Vorhandensein von Collibacillen und Bacterien der Gartenerde. (Zbl. f. Bact. 1899, Juli). *О. Д.* V/2. 14—15. Спр.

692. **Picard** Emile, Traité d'Analyse (Paris, G. V., том I, 1891; том II, 1893; том III, 1896; том IV в друку). *В. Л.* IV/2. 1—3. Бібл.

693. — , et **Simbart** G., Théorie des fonctions algébriques de deux variables independantes. (Paris, G. V., 1897. T. I). *В. Л.* IV/2. 8. Бібл.

694. **Pickardt,** Über die rationelle Verwendung des Papain bei Erkrankungen des Magens. (Ther. d. Geg. 1900, Nr. 5). *Е. О.* VI/2 32. Спр.

695. **Piorkowski,** Ein einfacher Verfahren zur Sicherstellung der Typhusdiagnose. *О. Д.* V/1. 17—18. Спр.

696. **Piove,** Untersuchungen über den Stickstoff-Gehalt der Böden nach dem Anbau verschiedener landwirtschaftlicher Kulturgewächse. (Ztsch. des landw. Ver. in Bayern. 1893, p. 59. u. 101). *Ярослав Федюк.* XI. 33. Bact.

697. **Planck** Max, Das Prinzip der Erhaltung der Energie (2. Auflage, Leipzig und Berlin, 1908). *В. Л.* XIII. 12.

*698. **Poincaré** H., Cinématique et mécanismes. (Paris, Carre et Naud, 1889 (?)). *(В. Л.).* VII/1. 7. Бібл.

699. — , Der Wert der Wissenschaft (übersetzt von E. Weber und H. Weber, Lpz. Tb. 1906). *В. Л.* XII. 13—14. Бібл.

700. — , Wissenschaft und Hypothese (übers. von F. u. L. Lindemann, Lpz. Tb. 1904). *(В. Л.).* X. 2—4. Бібл.

701. — , *(В. Л.).* XII. 13—14. Бібл. [реценз. разом з: Der Wert der Wissenschaft].

702. **Poincaré** L., Die moderne Physik (übertragen von Dr. M. und Dr. W. Brahm, Leipzig, Quelle und Mayer, 1908). *В. Л.* XIII. 13. Бібл.

Постниковъ, *vide* **Слетовъ и Постниковъ.**

703. **Potherat,** Deux cas de consolidation incompléte des tractures traitées et gueries par la méthode thyroidienne. (Soc. de chir., séance du 29. nov. 1899). *Е. К.* V/2. 33. Спр.

*704. **Prace** matematyczno-fizyczne (pod redakcyą S. Dicksteina, W. Gosiewskiego, E. i W. Natansonów, A. Witkowskiego i K. Żorawskiego, Warszawa). Том. X. за рік 1899—1910 *В. Л.* VI/1. 5. Бібл.

*705. —, Том XII. 1901. *(В. Л.).* VIII/2. 9. Бібл.

*706. —, Том XIII. 1902. *(В. Л.).* IX. 37. Бібл.

707. **Prażmowski** A., Brodawki korzeniowe grochu. (Rozpr. Wydz. matem.-przyrodn. Akad. Umiejęt. w Krakowie. T. XXI. також осібний відбиток. 1890). *Ярослав Федюк.* XI. 29—31. Bact.

708 —, Über die Wurzelknöllchen der Leguminosen. Bot. Zeitung, 36. 1888. *Ярослав Федюк.* XI. 27. Bact.

709. **Prillieux,** Sur la nature et sur la cause de la formation des tubercules qui naissent sur les racines des Legumineuses. (Bull. de la Soc. bot. de France II. ser. Tome 1. No. 1. 1879, p. 98.) *Ярослав Федюк.* XI. 5—6. Bact.

*710. **Пржевальскій** Е., Аналитическая геометрія и собраніе задачъ изъ анал. геометріи. Изд. 4. *(В. Л.).* VII/1. 8. Бібл.

711. **Procopovici,** Über angeborene beiderseitige Abducens- und Facialis-Lähmung. (Arch. f. Aug. XXXIV. 1897). *(Я. Грушкевич).* III/1. 45—46. Спр.

*712. **Progresso** matematico, el, (журнал іспаньский; Zaragossa); падолист та грудень 1900. *(В. Л.).* VII/2. 20. Бібл.

*713. **Publikationen** des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Photographische Himmelskarte. Zone + 31° bis + 40° Deklination. I. Bd. Leipzig, Engelmann. *(В. Л.).* VII/1. 6. Бібл.

*714. **Puluj** J., Anwendung des Kreisdiagrammes auf Wechselstromgeneratoren (Prag, 1900). *(В. Л.).* X. 32. Бібл.

715. **Пулюй** Іван, др., Непропаща сила. (У Львові, лїтер. наукової біблїотеки ч. 5. 1901). *В. Л.* IX. 26. Бібл.

716. **Puzyna** J., Teorya funkcyi analitycznych. (Lwów, Altenberg). T. I. 1898. *В. Л.* IV/2. 9—11. Бібл.

717. —, T. II. 1900. *(В. Л.).* VII/1. 1—3. Бібл.

Raband, *vide* **Dufour** et **Raband.**

718. **Раковський** Іван, др., Про землю, сонце і звізди. (Популярна астрономія). Видавництво Товариства »Просьвіта« ч. 350. У Львові, 1909. *М. Ч.* XIII. 24. Бібл.

719. **Ramsay** W., Die edlen und radioaktiven Gase (Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1908). *В. Л.* XIII. 23. Бібл.

720. **Rauch,** Über Naftalan bei Hämorrhoiden. (D. med. Wschr. 1900, N. 39). *Е. О.* VIII/1. 26. Звіти.

Raviart, *vide* **Ausset** et **Raviart.**

721. **Raymond,** La paralysie faciale périphérique avec paralysie associée de la VI-e partie. (La presse méd. 1902. N-ro 1). *М. К.* VIII/1. 61—62. Звіти.

722. **Reber,** Isolierte Ruptur der Iris ohne Verletzung der Augenhäute. (Arch. f. Aug. XXXIV 1897). *(Яр. Грушкевич.* III/1. 51. Спр.

723. **Recs,** Malaria, its parasitology. (Practitioner 1901. Март). Zbl. f. inn. Med., Nr. 25, 1901). *Е. О.* VIII/1. 21—22. Звіти.

*724. **Récueil** de travaux offerts par les auteurs de H. A. Lorentz. (Haye, Martinus Nijkoff, 1900). *(В. Л.)*. VII/2. 16. Бібл.

725. **Rehman** Antoni, dr., Ziemie dawnej Polski i sąsiednich krajów słowiańskich, opisane pod względem fizyczno-geograficznym. Część druga. Niżowa Polska. Львів, 1904. *Др. Стефан Рудницький*. X. 1—5. Л. Н.

726. **Reiche,** Die Bedeutung der erblichen Belastung bei der Lungenschwindsucht. (Ztsch. f. Tuberkulose und Heilstättewesen. Bd. I. H. 4). *Е. О.* VIII/1. 30—31. Звіти.

727. — , Zur Verbreitung des Carcinoms. Münch. med. Wschr., N. 39. 1900. *Г. Гр.* VI/2. 21. Спр.

*728. **Рейнгардтъ** Н. В., Неэвклидова геометрія и позитивизмъ. (Казань, 1898). *В. Л.* VI/1. 18. Бібл.

Remlinger, *vide* **Cuénot** et **Remlinger**.

*729. **Rendiconti** del circolo matematico di Palermo. Том XV. зош. 1—6. 1901. *(В. Л.)*. VIII/2. 8. Бібл.

*730. — , Том XVI. зош. 1—5. (1902). *(В. Л.)*. IX. 37. Бібл.

731. **Revue** de therap. med. chirurg. (Blondel). *Е. О.* III/1. 42. Спр.

*732. **Revue** semestrielle des publications mathématiques (під ред. P. H. Schoute, Korteweg etc., Amsterdam, Delsman et Nolthenius), том VIII, часть I. 1900. *(В. Л.)*. VI/1. 18. Бібл.

*733. — , том VIII, часть II. 1900. *(В. Л.)*. VII/1. 8. Бібл.

*734. — , том IX. часть I. 1901 *(В. Л.)*. VII/2. 16. Бібл.

*735. — том IX. часть II. 1901. том X. часть I. 1902. *(В. Л.)*. VIII/2. 16. Бібл.

*736. — , том X. часть 1. і 2. р. 1902. і том XI. часть 1. 1903 + показчик до пятьох томів (за час 1898—1902). *(В. Л.)*. IX. 38. Бібл.

*737. — , том XII. *(В. Л.)*. X. 20. Бібл.

738. **Ribbert** H., Über Parasitismus. D. med. Wschr. 1898. N. 11, p. 167). *(Е. О.)*. III/1. 40. Спр.

*739. **Richarz** F., Neue Fortschritte auf dem Gebiet der Elektrizität. (Lpz. Tb.). *(В. Л.)*. VII/1. 6. Бібл.

740. — , (2. Auflage 1902). *(В. Л.)*. VIII/2. 29. Бібл.

741. — , Anfangsgründe der Maxwell'schen Theorie verknüpft mit der Elektronentheorie (Lpz. Tb. 1909). *В. К.* XIII. 15—16. Бібл.

742. **Richet,** Du serum musculaire, (C. R. T. 131. p. 1314. Nr. 87). *М.* VIII/1. 5—6. Звіти.

Richter L., *vide* **Nobbe** F. und **Richter** L.,

743. **Riecke** Eduard, Lehrbuch der Physik, 4. Auflage. (Lpz. Veit, 1908). *В. К.* XIII. 12. Бібл.

— , *vide* **Klein** F. und **Riecke** E.

744. **Riegler** G., Der Amateurastronom. (Wien u. Lpz., Hartleben 1909). *В. Л.* XIII. 25. Бібл.

745. **Riemann** B., Gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausg. von M. Noether u. W. Wirtinger. (Lpz. Tb. 1902). *В. Л.* IX. 51. Бібл.

*746. **Righi** A., Die Optik der elektrischen Schwingungen. (übers. von B. Dessau. Lpz. *(В. Л.)*. VII/1. 5. Бібл.

747. — , Neuere Anschauungen über die Struktur der Materie, (übers. von Dr. Fraenckel, Lpz. J. A. Barth, 1908). *В. Л.* XII. 10. Бібл.

748. **Rochon-Duvigneand**, Dilatation des voies lacrymales chez les foetus et le nouveau né consécutive à l'imperforation de leur orifice inférieur. Conditions anatomiques qui favorisent la dacryocystité congénitale.(Arch. d'opht. 1898. Nr. 2). *(Др. Мих. Кос)*. V/1. 37—38. Спр.

749. **Roger** et **Weil**, La gangrène bénigne des paupiéres. (La presse méd. 1901. Nr. 76). *М. К.* VIII/1. 10—11. Звіти.

750. **Rohleder**, Die Anwendung des Naftalan in der allgemeinen ärztlichen Praxis. (Ther. Monh. 1899. N. 7). *Е. О.* VI/2. 28. Спр.

751. **Rolly**, Zur Frühdiagnose der Masern. (Aus der Heidelberger Poliklinik Prof. Vierodt).(Münch. med. Wschr. 1899. N. 38). *Е. О.* VI/2. 31. Спр.

752. **Rosenblatt**, Zum Nachweis der Tuberkelbacillen in den Faeces. (Zbl. f. inn. Med. N. 29. 1899). *Е. О.* V/2. 23—24. Спр.

753. **Rosenfeld**, Klinische Diagnostik der Grösse, Form und Lage des Magens. (Zbl. f. inn. Med. Nr. 1. 1899). *Гр. Гармиатій*, V/1. 24—26. Спр.

754. **Rosin**, Erfahrungen mit Heroin. Ther. d. Geg. Nr. 6. 1899). *Е. О.* V/2. 30. Спр.

755. **Ross**, Zur Behandlung der Obstipation. (Münch. med. Wschr. N. 43. рік?) *Г. Гр.* VI/2. 22—23. Спр.

756. **Rossmässler** F. A., Toxikologie oder die Lehre von den Giften. (Hartleben, Wien, 1908). *В. Л.* XII. 13. Бібл.

757. **Rotter**, Über die Radicaloperation freier Hernien. (Ther. Mh. 1901. I). *О. Г.* VIII/1. 59—60. Звіти.

*758. **Rouché** E. et **Comberousse** Ch. de, Traité de Géometrie (I. partie — Géometrie plane, II. partie' — Géometrie dans l'éspace, Paris, G. V. 1900). *(В. Л.)*. VII/1. 6. Бібл.

*759. — et **Lévy** L., Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs. (Tome I. 1900, Tome II. sous presse. Paris. G.-V). *(В. Л.)*. VII/1. 7. Бібл.

760. **Routier(i)**, Grossesse extra uterine. (La Semaine médicale, N. 49. 1899. Soc. de Chir, Séance du 8. nov. 1899. *Е. К.* V/2. 40. Спр.

761. —, Hysterotomie an cour d'une grossesse méconue. (La Semaine médicale, Nr. 50. 1899). Soc. de Chir., Séance du 15. nov. 1899). *Е. К.* V/2. 40. Спр.

762. **Rudeaux**, Deux observations d'opération de Parro. (Société de obstétrique de gynécologie et de pédiatrie de Paris. Séance du 1. déc. 1899). *Е. К.* V/2. 39. Спр.

(756). **Rozprawy** Akademii Umiejętności w Krakowie. Wydział matem.-przyrodniczy, s. II. t. VII—IX, ogólnego zbioru tom 27—29. Крак. 1895. *І. Раковський.* **Записки XIV**. 51—52. Бібл.

763. **Рудницкий** Стефан, Про звязь періодичної діяльности сонця з температурою земскої атмосфери. (звіт дир. ц. к. академ. ґімназиї у Львові р. 1902. ст. 37). *(В. Л.)*. VIII/2. 2. Бібл.

764. **Rudolph** H., Luftelektrizität und Sonnenstrahlung. (Lpz. J. A. Barth, 1903). *(В. Л.)*. X. 32—33. Бібл.

765. **Rudzki** M. P., Odkształcenie się ziemi pod ciężarem wielkich lodowców. (Kraków, nakładem

Akad. Umiej. 1900). *В. Л.* VI/1. 6. Бібл.

766. — , Teorya fizycznego stanu kuli ziemskiej. (Kraków, nakładem Akad. Umiej. 1900). *В. Л.* VI/1. 6. Бібл.

767. **Rumpel**, Vorläufige Mittheilung über eine Methode zur Erzeugung von Krystallen aus schwer krystallisierenden Stoffen. (Berichte d. deutsch. chem. Gesell. B. 33. Nr. 19. p. 3474). *М.* VIII/1. 4. Звітп.

768. **Ruppel**, Zur Chemie der Tuberkelbacillen. (Ztsch. f. physiol. Ch. B. 24. Heft 1--3). *М.* V/1. 5—6. Спр.

(759). **Русская Медицина**. 1894. *С-а.* **VIII**. 6—7. Н. Хр.

769. **Rutherford** E., Die Radioactivität, autorisierte deutsche Überzetzung von Dr. E. Aschkinass. (Bln., J. Springer, 1907). *В. Л.* XII. 7—8. Бібл.

*770. **Рибачек** Михайло, Льоґічна будова математичних доказів. (Звіт II. ґімназиї в Коломиї, 1902). *(В. Л.)*. VIII/2. 11. Бібл.

771. — , dto. *Я. М.* IX. 26. Бібл.

772. **Rydygier**, O przeszczepianiu uszypułowanych płatów mięśniowych. (По викладу виголошенім на XII. міжнароднім з'їзді лікарів у Москві в році 1897). *Ал. Бач.* III/1. 42—43. Спр.

Saida, *vide* **Emmerich** und **Saida**.

773. **Saint-Hilaire Constantin**, Über einige mikrochemische Reactionen. (Ztsch. f. phys. Ch. B. 26. p. 102). *М.* V/1. 3. Спр.

774. **Salamson** C. I. et, **Marseau** Th., Influance de quelques poisons sur la force antitoxique du sang. (C. R. 126. p. 1229. N. 17. 25. Avril 1898). *М.* IV/1. 5. Спр.

775. **Salaskin**, Über die Bildung von Harnstoff in der Leber der Säugethiere aus Amidosäuren der Fettreihe. (Ztsch. f. phys. Ch. B. 25. Heft 1—2. p. 128). *М.* IV/1. 3. Спр.

776. **Salkowski**, Über das Vorkommen von Pentosen im Harne. (Ztsch. f. phys. Ch., B. 27. H. 6. p. 507). *М.* V/2. 5—6. Спр.

777. — , Über die quantitative Bestimmung der Alloxurbasen im Harn mittelst des Silberverfahrens. (Pflüger's Arch. f. d. ges. Phys. d. Mensch. u. Thiere. Bd. 69. Heft. 5. und 6. p. 268). *М.* IV/1. 1—3. Спр.

778. **Sänger**, Subjective Diagnose bei Trockenheit der Nasenschleimhaut, so wie der Rachen- und Kehlkopfschleimhaut. (Münch. med. Wschr. N. 15, 1898). *Е. О.* V/2. 24. Спр.

779. **Sarason**, Apparate zur Behandlung des Schnupfens. (Ther. Mh. 1889 (?) N. 3). *Е. О.* VI/2. 26. Спр.

780. **Савицкий** Е. М. др., Ґеометрия для висших кляс ґімназияльних (Львів 1908). *С. Матвіяс.* XII. 3—4. Бібл.

781. **Сборникъ**, математическій, Москва 1900. Том XXI. 1. зошит, том XXII. 2. зошит). *(В. Л.)*. VII/2. 20. Бібл.

782. **Schaefer** Clemens, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität und Magnetismus. З портретом Maxwell'a. (Leipzig, 1908. Tb.) *В. Л.* XIII. 14. Бібл.

783. **Scheffers** G., Einführung in die Theorie der Flächen. (Lpz. Veit, 1902), *(В. Л.)*. VIII 2. 22—24. Бібл.

vide **Lie** Sophus und **Scheffers** G.

784. **Scheiber,** Über Pellagra. (Wien. med. Wschr. Nr. 9—11. 1899). *Е. О.* V/2. 20—21. Спр.

*785. **Scheid** K., Die Metalle. (ANuG). *В. Л.)*. X. 20. Бібл.

786. **Scheiner** J., Der Bau des Weltalls (Lpz. Tb. 1904). *(В. Л.)*. X. 28. Бібл.

787. —. Populäre Astrophysik (Lpz. Tb. 1908). *В. Л.* XIII. 25. Бібл.

Schenk, *vide* **Frank.**

*788. **Шиффъ** В., Сборникъ упражненій и задачъ по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ. (Ч. I. Спб). *(В. Л.)*. VII/1. 7. Бібл.

789. **Schilling** F., Morbus Addisonii und Organotherapie. (Münch. med. Wschr. 1897, N. 7). *Е. О.* III/1. 55. Спр.

790. **Schilling,** Über die Nomographie von D' Ocagne (Lpz. Tb. 1900). *(В. Л.)*. VII/2. 17. Бібл.

*791. —, Über neue kinematische Modelle sowie neue Einführung in die Theorie der cyclischen Kurven. (Halle). *(В. Л.)*. VII/1. 66. Бібл.

792. **Schindler** F., Zur Kenntnis der Wurzelknöllchen der Papilionaceen. (Bot. Zbl. 1884. Bd. XVIII. pag. 84). *Ярослав Федюк.* XI. 11—12. Bact.

Schlagenhaufer *vide* **Ghon** und **Schlagenhaufer.**

793. **Schlatter**, Totale Exstirpation des Magens. (Mitt. aus den Grenzgebieten der Med. u. Chir. B. III. 1898). *Др. В. Сіменович.* V/1. 32—33. Спр.

794. **Schlesinger**, Herman, Die spezifischen Wärmen von Lösungen. I. (Physik. Ztsch., Jg. 10. p. 210. 1909). *Ю. Гірняк.* XIII. 27. Бібл.

795. **Schloesing** Th. fils et **Laurent,** Sur la fixature de l'azote gazeux par les Légumineuses. (C. R de l'Ar. Paris, t. 111. 1890. p. 750—753). *Ярослав Федюк.* XI. 31—32. Bact.

796. —, Sur la fixation de l' azote libre par les plantes. (C. R. de l'Ac. Paris, t. 115. No. 18. p. 659—661. 1892). *Ярослав Федюк.* XI. 32—33, Bact.

797. **Schmeichler,** Über Protrusion des Augapfels. (Wiener med. Wschr. 1899. Nr. 8—9). *(Др. Михайло Кос)*, V/1. 41—42. Спр.

Schmid, *vide* **Nobbe, Hiltner** u. **Schmid.**

798. **Schmidt,** Über Alloxurkörper und neutralen Schwefel bei Krankheiten. (Ztsch. f. klin. Med. B. 34. 1898). *М.* V/1. 4. Спр.

799. —, Über einen Fall von Papilo-Retinitis bei Chlorose (Arch. f. Aug. XXXIV. Bd. Wiesbaden 1897). *(Яр. Грушкевич).* III/1. 48—49. Спр.

800. **Schmid** G. C., Die Kathodenstrahlen. (Die Wissenschaft, т. II). *І. Б.* X. 25. Бібл.

801. **Schneider** A., Beiträge zur Kenntnis der Rhizolien. Vorläufige Mitteilung. (Ber. d. Deut. Bot. Ges. Bd. XII. 1894. p. 11). *Ярослав Федюк.* XI. 35. Bact.

802. **Schönfliess** A., Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. (Lpz. Tb. 1900). *В. Л.* VII/2. 14. Бібл.

803. **Schott**, G., Physische Meereskunde. (Lpz. Göschen, 1903). *(В. Л.)*. X. 29—30. Бібл.

804. **Schrötter**, Zur Heilbarkeit der Tuberculose. (Ztsch. f. Tub. u.

Heilst. B. I). *E. O.* VIII/1. 26—27. Звіти.

*805. **Шульгинъ** Г., Мореходная астрономія. (Спб). *(В. Л.)*. VII/1. 8. Бібл.

*806. **Schultz** C., Die Ursache der Wettervorgänge (Wien, Hartleben), *(В. Л.)*. VII/1. 6. Бібл.

807. **Schulz** Fr. W., Eiweisskörper des Haemoglobin's. (Ztsch. f. phys. Ch. 24. p. 449). *(M)*. III/1. 33. Спр.

Schütte, *vide* **Takke**, **Immendorf**, **Hessenland**, **Schütte** und **Minssen**.

808. **Schütze**, Über den Nachweis von Typhusbacillen in den Fäces und in der Milz nach dem Verfahren von Piorkowski. (Ztsch. f. kl. Med. B. XXXVIII. i p 39). *E. O.* VI/2. 23. Спр.

Schwarz, *vide* **Benedikt** und **Schwarz**.

Schweidler E., *vide* **Mache** H. und **Schweidler** E.

809 **Scrini**, Recherches cliniques sur le strabisme des nouveanés. Le strabisme fonctionnel congénital existe-t-il? (Arch. d'opht. 1901, Nr. 5). *M. K.* VIII/1. 9. Звіти.

810. —, et **Artault**, La nirvanine en ophtalmologie. (Arch d'opht. 1889 (?) N. 12). *(Др. Михайло Кос)*. VI/2. 37. Спр.

811. **Seggel**, Über die Anforderungen an das Auge und die Sehstörungen beim Schiessen der Infanterie. (Deut. militärärztl. Ztsch. 1898. Heft 8. u. 9). *(Др. Михайло Кос)*. V/1. 33—35. Спр.

*812. **Seidel**. Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche diskontinuirliche Functionen darstellen. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 116), як додаток до ч. 539. *(В. Л.)*. VII/2. 16. Бібл.

813. **Seliwanoff**, Lehrbuch der Differenzenrechnung. (Lpz. Tb. 1902). *(В. Л.)*. X. 7. Бібл.

*814. **Servant** M., Essai sur les séries divergentes (Paris, Gauthier-Villars). *(В. Л.)*. VII/1. 7. Бібл.

815. **Sieber** Über die Umihoff'sche Reaction in der Frauenmilch. (Ztsch. f. phys. Ch., B. 30. p. 101). *M.* VI/2. 9. Спр.

816. **Siegheim**, Über Endocarditis gonorrhoica. (Ztsch. f. kl. Med. Heft 5—6. 1908). *E. O.* III/1. 58—59. Спр.

817. **Silberstein**, Unguentum hydrargyri cinereum gegen Syphilis. (Ther. Mb. Juli 1898). *В. Г.* IV/1. 11—12. Спр.

818 **Silex** Доц., Über progressive Levatorlähmung. (Arch. f. Aug. XXXIV. Bd. Wiesbaden, 1897). *(Я. Грушкевич)*. III/1. 44—45. Спр.

Simbart G., *vide* **Picard** E. et **Simbart** G.

819. **Simon** M., Analytische Geometrie des Raumes. (Samml. Schubert, Göschen, Lpz. Ч. I. 1900. ч. II. 1901). *(В. Л.)*. VIII/2. 28—29. Бібл.

820. —, Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. (Lpz. Tb. 1901). *(В. Л.)*. VII/2. 1. Бібл.

821. **Sitsen**, Über den Einfluss des Trocknens auf die Widerstandsfähigkeit der Mikroben Desinfectionsmitteln gegenüber. (Zbl. f. Bakt. N. 2—3, 1899). *О. Д.* V/2. 15—16. Спр.

*822. **Sitzungsberichte** der Kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien. (CXVII. Band, Jahrgang 1908, Heft VIII—XII, Abteilung II. a, CXVIII. Band, Jahrgang 1909. Heft I—IV, Abteilung II a. — Hölder). *М. Ч.* XIII. 35—37. Бібл.

823. **Sivén**, Über das Stickstoffgleichgewicht beim erwachsenen Menschen. (Scand. Arch. f. Phys. B. X. Heft 1, 2. p. 91). *М.* VI/2. 2—4. Спр.

824. **Слетовъ** и **Постниковъ**, Електролизъ при рубцевомъ съуженіи пищевода. (Врачъ, 1901, ч. 1, стр. 14). *М.* VIII/1. 4. Звіти.

825. **Smith**, Croupous-lobar Pneumonie. (Twentieth Century Practica of Medicin). *Др. В. Сїменович.* V/1. 14—16.

(800). **Сочинскій**, Земська медицина в Катеринославській ґуб. (Р. Медицина 1894). (рос.). *С-а.* **VIII**. 6—7. Н. Хр.

(799). — , Медично-санїтарні замітки з Катеринославщини. (рос). *О. Ч.* **IV**. 199—200. Бібл.

*826. **Соколовъ** П. К., Метода аритметики. (Спб). *(В. Л.)*. VII/1. 7. Бібл.

827. **Solomon** Vera, Experimentelle Untersuchungen über Rabies. Institut Prof. Galli-Valerio-Lausanne. (Zbl. f. Bakt, 1900. X. 3). *Д.* VI 2. 14—15. Спр.

Sommerfeld A. *vide* **Klein Felix** und **Sommerfeld** A.,

828. **Sorel**, Arthrite suppurée de l'épaule an cours d'une pleuropneumonie. Considérations cliniques et bactérioligiques. (Le Bulletin Médical, N. 28, 5. Avril 1899). *О. Д.* V/1. 29—30. Спр.

829. **Sourdille**, Chancre syphilitic de la conjonctive bulbaire. (Arch. d'opht. 1900. N. 4). *Др. Михайло Кос.* VI/2. 39—40. Спр.

*830. **Spée** E., Région b-f du spectre solaire. (Paris, Gauthier-Villars). *(В. Л.)*. VII/1. 6. Бібл.

831. **Spiro** et **Remsel**, Über Basen und Säurecapacität des Blutes und der Eiweisskörper. (Ztsch. f. phys. Ch. B. 26. p. 233). *М.* V/1. 4—5. Спр.

(802). **Sprawozdanie** komisyi fizyograficznej Akademii Umiejętności w Krakowie. (T. XXIX., 1894). *Я. Грушкевич і І. Раковський.* **VII**. 53—57. Бібл. (T. XXX., 1895. Część I. Materyały zebrane przez sekcyę meteorologiczną). *І. Раковський.* XI. 63—64. Бібл.

832. **Stapler**, Zur Aetologie des gelben Fiebers. (Wiener med. Wschr. Nr. 17. 1899). *Е. О.* V/2. 29—20. Спр.

833. **Stark**, Rozkład i zmienność atomów chemicznych (przełożył L. Bruner, Warszawa, Wende, 1904). *(В. Л.)* X. 25—26. Бібл.

834. **Stern**, Über Sichtbarkeit der Magen- und Darmkontouren bei der Athmung. (Zbl. f. inn. Med. Nr. 43, 1898). *Е. О.* V/1. 9. Спр.

835. **Stolz** Otto, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. (Lpz. Tb. ч. I, 1893; ч. II, 1896; ч. III, 1898). *В. Л.* IV/2. 3. Бібл.

836. —, u. **Gmeiner** A., Theoretische Arithmetik; I. Abth. Allgemeines, die Lehre von rationalen Zahlen (Lpz. Tb. 1900). *(В. Л.)*. VII/2. 1. Бібл.

837. — ; I. Theil 1900, II. Theil 1902. (Lpz. Tb.). *(В. Л.)*. VIII/2. 17. Бібл.

Störmer K., *vide* **Hiltner** L. und **Störmer** K.

838. **Strassmann**, Durchgang des Sublimats durch den Placentarkreislauf. (Arch. f. Anat. u. Phys. — Physiol. Abt. Supple-

mentband, I. Hälfte, p. 95). *М.* V/2. 3. Спр.

839. **Strauss**, Über die Verwendbarkeit eines neuen Eiweisspräparates Tropon für die Krankenernährung. (Therap. Mh. — N. V. 1898). *В. Г.* IV/1. 12. Спр.

840. **Strouhal** Č. Dr.. Akustika (v Praze, 1902). *(В. Л.).* X. 24. Бібл.

841. —, Mechanika (v Praze, 1901). *(В. Л.).* X. 23. Бібл.

842. **Studnička** E. J., Úvod do analytické geometrie v rovině (v Praze, 1902). *(В. Л.).* X. 12—13. Бібл.

843. —. Úvod do nauky o determinantech (Sbornik jednoty českých mathematiků v Praze, č. III, 1899). *В. Л.* VI/1. 7—8. Бібл.

*844. —, Výklady o funkcích monoperiodických. (V Praze 1897, nákladem Jednoty českých mathematiků). *В. Л.* VI/1. 19. Бібл.

845. **Sturm** A., Geschichte der Mathematik (Lpz. 1904. Sammlung Göschen), *Р. Г.* X. 18—19. Бібл.

846. **Sturm** Ch., Lehrbuch der Analysis, übersetzt von Dr. T. Gross (Berlin, Fischer; 2 томи, зі вступом про житє і діла Sturm'a). *В. Л.* VII/1. 3. Бібл.

847. **Stutzer** A., Die Nutzbarmachung des Stickstoffs der Luft für die Pflanzen. (Deut. landw. Presse, 1904. Nr. 10, 11, 12, 17, 19). *Ярослав Федюк.* XI. 44. Bact.

*848. —, Neue Arbeiten über die Knöllchenbakterien und die Fixierung des freien Stickstoffs durch Organismen. (Zbl. f. Bakt. u. Par. 2. Abt. I. 1895, p. 68. Abt. II, 1896 p. 650. *Ярослав Федюк.* XI. 36—37. Bact.

849. **Stutzer**, **Burr** und **Mandl**, Untersuchungen über das Anpassungsvermögen von Bacterium radicicola an einem fremden Nährboden. (Zbl. f. Bact. u. Par. 2. Abt. II. 1896. p. 665). *Ярослав Федюк.* XI. 37. Bact.

850. **Suchanek**, Erfahrungen mit Vasogenpräparaten. (Ther. Mh. 1899, N. 7). *Е. О.* VI/2. 27. Спр.

851. **Süchting** H., Kritische Studien über die Knöllchenbakterien. (Zbl. f. Bakt. II. Abt. XI. 1904. pp. 377—387, 417—441, 496—520. *Ярослав Федюк.* XI. 47—48. Bact.

852. **Suppau**, Über den therapeutischen Werth des Urotropin. (Wiener med. Blätter, 1900. N. 28). *Е. О.* VI/2. 32—33. Спр.

853. **Süsskind**, Klinischer und anatomischer Beitrag zur Tuberkulose der Thränendrüse. (Arch. f. Aug. XXXIV. Bd., Wiesbaden 1897). *(Я. Грушкевич).* III/1. 50. Спр.

*854. **Тафтлъ** Ем., Др., Аглебра за горнитѣ класове на гимназиалнитѣ училища. Съставилъ..., прѣведъ отъ чехски А. В. Шоурек. (Пловдивъ 1899). (по болгарски). *В. Л.* VI/1. 19. Бібл.

855. **Takke**, **Immendorf**, **Hessenland**, **Schütte** und **Minssen**, Über das Verhältniss der Bakterien der Leguminosen - Knöllchen gegen Ätzkalk. (Mitteil. des Ver. zur Förder. d. Moorkultur i D. Reich. XIII. 1895. p. 389). *Ярослав Федюк.* XI. 36. Bact.

856. **Talma**, Von der Gährung der Kohlenhydrate im Magen.(Ztsch. f. klin. Med. XXV. Bd). *Г.* V/1. 18—19. Спр.

857. — , Zur Ernährung der Diabetiker. Ther. d. Geg. 1901. N. 9. *E. O.* VIII/1. 40—41. Звіти.

858. **Tannery** J., Elemente der Mathematik; autor. deutsche Ausgabe von P. Klaess (Tb. Lpz. 1909). *B. Л.* XIII. 4. Бібл.

859. **Teichmüller**, Das Vorkommen und die Bedeutung der eosinophilen Zellen im tuberkulösen Sputum. (Zbl. f. inn. Med. N. 13. 1898). *E. O.* VI/1. 11. Спр.

860. **Terrien**, Dystophie marginale symétrique des deux cornées avec astigmatisme regulier consécutiv et guérison par la cautérisation ignée. (Arch. d'opht. N. 1, 1900 *(Др. Михайло Кос.)*. VI/2. 38—39. Спр.

(836). **Тезяковъ**, Фізичний розвій учнїв земських шкіл Елїсавет — гр. пов. (рос.) (Врачъ, 1894). *С-а.* **VIII.** 5—6. Н. Хр.

861. **Thése** de Paris 1898. Дім вільний від всяких мікробів. *(Др. В. Сїменович)*. V 1. 44—45. Спр.

862. — , Як означити вагу дитини в разї породу ніжками? *Др. В. Сїменович.* V/I. 45. Спр.

863. **Thier**, Auge und Erysipel. (Klin. Monatsblätter, Stuttgart 1900). *Др. Яр. Грушкевич)*. VI/2. 50. Спр.

864. **Thomas**, Über die Wirkung einiger narkotischen Stoffe auf die Blutgase, die Blutalkalescenz und die rothen Blutkörperchen. (Arch. f. exper. Pathol. u. Pharmakol. Bd. 41. N. 1). *Ал. Бач.* IV/1. 14—15. Спр.

865. **Thompson** Silvanus, Elementare Vorlesungen über Electricität und Magnetismus. (übers. von A. Himstedt, 2. Aufl. Tübingen, H. Laupp. 1897). *B. Л.* IV/2. 8. Бібл.

866. **Thompson**, Die physiologische Wirkung der Protamine und ihrer Spaltungsprodukte. (Ztsch. f. phys. Ch. B. 29. H. 1. p. 1). *M.* VI/2. 1—2. Спр.

*867. **Thomson** J. J., Les décharges électriques dans le gaz (traduit par L. Barbillon, Paris, Gauthier-Villars, 1900). *(B. Л.)*. VII/1. 6. Бібл.

868. **Thurnwald**, Über die Heilwirkung des Xeroforms. (Wiener Med. Wochenschr. Nr. 44, 1898). *Гарматїй.* IV/1. 30. Спр.

*869. **Tisserand** F., Traité de Mécanique céleste (4 volumes. Tome I., 1889, Tome II., 1891, Tome III., 1894, Tome IV, 1896. Paris, Gauthier-Villars). *(B. Л.)*. VII/1. 6. Бібл.

*870. **Transactions** of the American Mathematical Society (volume 2. Nr. 1. 1901). *(B. Л.)*. VI/2. 19. Бібл.

*871. — ; (vol. 2. Nr. 2 i 3. 1901). *(B. Л.)*. VIII 2. 7—8. Бібл.

*872. — ; Том II, зош. 4. 1901. Том III, зош. 1—3, 1902). *(B. Л.)*. IX. 35—36. Бібл.

873. **Trousseau**, Traitement opératoire de la myopie par l'extraction du crystallin transparent. (La presse méd. 1899. Nr. 27). *Др. Михайло Кос.* V/I. 39—41. Спр.

(850). **Труды** общества испитателей природы при Импер. Харьковскомъ университетѣ, (т. XXVII, 1892—3, Харків 1894). *Z.* **IV.** 193—194.

874. — , (1897, т. XXXI). *О. Ч.* III/1. 2—5. Огляд.

875. **Труды** С-Петерсбурскаго общества естествоиспитателей (т. XXVII, 1897). *О. Ч.* III/2. 5—6 Огляд.

876. **Tschirch** A., Beiträge zur Kenntnis der Wurzelknöllchen der

Leguminosen. (Ber. d. D. B. G. Bd. I. 1887. p. 58). *Ярослав Федюк.* XI. 17—18. Bact.

877. — , Über die Wurzellknöllchen der Leguminosen. (Ges. Naturf. Freunde. 19. April 1887. p. 53). *Ярослав Федюк.* XI. 21. Bact.

878. **Tswett**, Sur la liquefaction reversible des albuminoides. (C. R. T. 129. N. 15. p. 551). *М.* V/2. 4. Спр.

879. **Turati** Emilio, conte, Alcune nuove forme di lepidotteri (Estr. dal Naturalista Siciliano, Anno XVIII, N-o 2—3, 1903). *Іван Верхратський.* XI. 6—8. Бібл.

880. **Turban**, Die Vererbung des Locus minoris resistentiae bei der Lungentuberculose. (Ztsch. f. Tub. u. Heilst. B. I. Heft I. 2). *Е. О.* VIII/1. 31—32. Звіти.

*881. **Turpain** A., Récherches expérimentales sur les oscillations électriques. (Paris, Hermann). *(В. Л.).* VII/1. 7. Бібл.

(852). **Тутковскій** П., Замітки про Трахтемирівські гори (рос.). (Наука и Жизнь, 1894). *О. Ч.* **IV.** 199. Бібл.

(855). — , Про трус на півдні Росиї (рос.). (Н. і Ж. 1894). *О. Ч.* **VIII.** 4—5. (Н. Хр.).

(854). — , Про западный край, популярные естественно-историческіе и геогр. очерки. (Вип. I. к. 1893). *О. Ч.* **IV.** 192. Бібл.

882. **Uhlig** Victor Dr., Bau und Bild der Karpathen. (Sonderabdruck aus Bau und Bild Österreichs von Carl Diener, Rudolf Hoernes, Franz E. Suess und Victor Uhlig. Wien-Leipzig, 1903, Tempsky-Freitag). *Др. Стефан Рудницький.* X. 5—17. Л. Н.

883. **Uhthoff**, Die toxische Neuritis optica (Klin. Monatsbl., Stuttgart. 1900). *(Др. Яр. Грушкевич).* VI/2. 46—48. Спр.

884. **Ulry** et **Frérals**, Des collyres aqueux de salicylate de sourde. (Arch. d'opht. 1899, Nr. 2). *(Др. Михайло Кос.).* V/1. 42. Спр.

885. — , Recherches expérimentales sur la pénétration dans l'oeil de collyres aqueux d'oiodure de potassium. (Arch. d'opht. 1899, Nr. 1). *(Др. Михайло Кос).* V/1. 42. Спр.

886. — , Rôle de la cornée dans l'absorption des collyres. (Arch. d'opht. 1899. N. 3). *(Др. Михайло Кос).* V/1. 42—43. Спр.

Университетскія извѣстія. *vide* **Извѣстія.**

(859). **Устименко** Т. М., Рождаїмость, смертність та шлюби в м. Полтаві 1893. (рос.). (Земскій Врачъ, 1894). *О. Ч.* **VIII.** 7--8. Н. Хр.

887. **Valentiner** Siegfried, dr., Vectoranalysis (Lpz. Samml. Göschen). *В. Л.* XII. 5—6. Бібл.

*888. (**Valentiner** W.,) Handwörterbuch der Astronomie. (Breslau, Trewendt). *(В. Л.).* VII/1. 6. Бібл.

*889. — ; (vierter Band, Lpz. Barth, 1902). *(В. Л.).* VIII/2. 32. Бібл.

890. **van 't Hoff** I. H., Acht Vorlesungen über physikalische Chemie. (Braunschweig, Vieweg, 1902). (*В. Л.*). VIII/2. 29—30. Бібл.

891. **ван 'т Гофф** I., Розвій природничих наук в XIX віці (перекл. Др. В. Левицкий, Л. Н. Вістник. 1903. т. XXII, ст. 114—127 *(В. Л.).* X. 33—34. Бібл.

*892. **Vater** R., Einführung in die Theorie und den Bau der neueren Wärmekraftmaschinen.

Aus Natur und Geisteswelt). *В. Л.* X. 29. Бібл.

893. **Vertun**, Über Validol, ein neues Mentholpräparat. (Berl. klin. Wochschr., 1899. N. 33). *Е.* VI 2. 27. Спр.

894. **Vibrans**, Wie tief soll man pflügen, um sich die Tätigkeit der Bodenbakterien nutzbar zu machen? (Mitteil. d. Deutsch. Landw. Ges. 1904. 17). *Ярослав Федюк.* XI. 45. Bact.

895. **Vinay**. Cordiopathies et mariage. Deutsche med. Wochschr., Nr. 2. 1898). *Е. О.* V/2. 39. Спр.

896. **Viquerat**, Beitrag zur Tuberculinfrage. (Zbl. f. Bakt. 1899, September). *О. Л.* V/2. 10—11. Спр.

897. **Voigt** M., Elementare Mechanik II. Auflage. Lpz. Veit, 1901). *В. Л.* VII/2. 14—15. Бібл.

898. **Voigt** Waldemar, Magneto- und Elektrooptik (Lpz. Tb.) *В. К.* XIII. 16—17. Бібл.

899. **Voit**, Über den Wert der Albumosen und Peptone für die Ernährung. (Münch. med. Wochschr. 1899, Nr. 6. pag. 142). *М.* V/1. 2—3. Спр.

900. **Volland**, Meine Behandlung der Lungenschwindsucht. (Ther. Monh. 1901. Nr. 7). *Е. О.* VIII 1. 22—24. Звіти.

Voller A., Elektrische Wellentelegraphie. (Hamburg, Voss 1903). *В. Л.* IX. 24. Бібл.

902. **Voss** A., Über das Wesen der Mathematik (Lpz. Tb. 1908). *В. Л.* XIII. 1—2. Бібл.

903. **Vuillemin** P., Les tubercules radicaux des Légumineuses. Nancy 1888). *Ярослав Федюк.* XI. 25—26. Bact.

904. **Wagner**, Über die Diagraphie von Nierensteinen (aus der Breslauer chirurgischen Klinik. — Zbl. f. Chir. 1899, Nr. 8). *Ал. Вач.* V/1. 32. Спр.

905. **Walden** P., Wilhelm Ostwald (mit zwei Heliograwüren und einer Bibliographie. Lpz. Engelmann, 1904). *І. Б.* X. 30—31. Бібл.

906. **Waldvogel**, Warum und wo entsteht das Aceton? (Zbl. f. inn. Med., Nr. 28 1899). *Гр. Гр.* V/2. 22—23. Спр.

907. **Waller**, Le dernier signe de vie. (Compt. Rend. T. 131, p. 485. i p. 1173). *М.* VIII/1. 6. Звіти.

908. **Walther**, Augenuntersuchungen an 2500 Arbeitern verschiedener industrieller Betriebe. (Arch. f. Augenheilk. XLII. Band, 1900). *(Др. Яр. Грушкевич).* VIII/1. 13—14. Звіти.

909. **Wang**, Fütterungsversuche mit Indol. (D. med. Wochensch. N. 42. 1899, 46. B., p. 1365). *М.* V/2. 4. Спр.

—, *vide* **Johannenssen** und **Wang**, E.

910. **Warburg** E., Lehrbuch der Experimentalphysik (6. Aufl. Tübingen u. Lpz. 1902). *(В. Л.).* VIII/2. 31. Бібл.

911. **Ward**, Marshall, On the tubercular swellings on the roots of Vicia Faba. (Phil. Trans. Roy. Soc. London 1887. vol. 178. p. 539—562). *Ярослав Федюк*, XI. 21. Bact.

912. —, The Tubercular Swellings on the roots of the Leguminosae. Communicated by Prof. Forster. (Procedings of the Royal Society, vol. 42. April 1887). *Ярослав Федюк.* XI. 22. Bact.

913. **Warming Eugen**, Smaa biologiske og morfologiske Bidrag. 1). Denstaria bulbifera L. 2). Sauromatum guttatum (Woll.)

Schott. 3). Om Skormplanternes Skorm. 4). Scheuchzeria palustris L. 5). Sium angustifolium og latifolium. 6). Hippophaë rhammoïdes L. — (Botanisk Tidskrift. 3. R. I. 1876 pag. 84—110). *Ярослав Федюк*. XI. 3. Bact.

914. **Weber** E., Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. (Lpz. Tb. 1900). *(B. Л.)*. VII/2. 4—10. Бібл.

915. **Weber** H., Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, bearbeitet nach Riemam's Vorlesungen. (Vieweg, Braunschweig. I. Bd. 1900, II. Bd. 1901). *(B. Л.)*. VIII/2. 26—28. Бібл.

916. —, Lehrbuch der Algebra. (2. Auflage, I. Band 1897, II. Band 1899, Vieweg, Braunschweig). *B. Л.* VI/1. 4. Бібл.

*917. — u. **Wellstein** I., Encyklopädie der Elementarmathematik (Lpz. Tb. I. том 1903). *(B. Л.)*. X. 19. Бібл.

918. **Weber** L., Wind und Wetter. (Lpz. Tb. 1904). *(B. Л.)*. X. 28. Бібл.

Wechsberg, *vide* **Neisser** und **Wechsberg.**

919. **Weierstrass** K, Vorlesungen über die Theorie der Abel'schen Transcendenten. (Mathem. Werke von Weierstrass, Bd. IV. bearb. von G. Hettner u. I. Knoblauch, Berlin, Meyer u. Müller, 1902). *B. Л.* IX. 20—21. Бібл.

Weil, *vide* **Roger** et **Weil.**

*920. **Weiler** W., Wörterbuch der Elektrizität und des Magnetismus (Lpz.) *(B. Л.)*. VII/1. 5. Бібл.

921. **Weiss**, Zur Behandlung der Fettleibigkeit mit Schilddrüsenpräparaten. (Wiener med. Wochenschr. Nr. 41. 1898). *Гармати́й*. IV/1. 31. Спр.

922. **Weitbrecht** W., Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (Lpz. Göschen, 1906). *B. Л.* XII. 6. Бібл.

Wellstein J., *vide* **Weber** H. u. **Wellstein** J.

923 **Werner**, Therapeutische Versuche über Eisensomatose bei Chlorose. (Wiener med. Presse, Nr. 50. 1898). *E. O.* V/2. 30. Спр.

924. **Wertheim** G., Anfangsgründe der Zahlenlehre. (Braunschweig. Viewed, 1902). *(B. Л.)*. X. 4—5. Бібл.

*925. **Весоловскій** Н, Н., Элементарная теорія ошибокъ наблюденій и способъ найменшихъ квадратовъ съ приложеніями ихъ къ вопросамъ Низшей Геодезіи. (Москва, 1897). *B. Л.* VI/1. 18. Бібл.

926. **Wexford** H., Clubbing in Cabages. (The Gardeners chroniche, 1879. II. рад. 442). *Ярослав Федюк*. XI. 7. Bact.

927. **Weygand** W. Dr., Über die psychischen Wirkungen der Hungers. (Med. Wochenschr. 1898, N. 13. p. 386). *M.* III/1. 32—33. Спр.

928. **Weyr** Eduard, Počet differenciálný (v Praze 1902). *(B. Л.)*. X. 12. Бібл.

*929. —, Projektivná geometrie základnich útvarů prvního řádu (Čislo I. Sborniku Jednoty českých mathematiků). *B. Л.* VI/1. 19. Бібл.

930. —; (v Praze 1898). *B. Л.* VII/1. 5. Бібл.

931. **Wiadomości** matematyczne(видає Дікштайн, Варшава. Том III, 1899 р). *В. Л.* VI/1. 5. Бібл.

*932. —; (Том IV, 1900). *(В. Л.)*. VII/1. 3. Бібл.

*933. —; (Том V, 1901. Том VI, зош. 1—3, 4—5, 1902). *(В. Л.)*. VIII/2. 9—10. Бібл.

*934. —; (Том IV, зошит 6, 1902) *(В. Л.)*. IX. 38. Бібл.

935 **Wien** W., Über Elektronen (друге видане; Tb., Lpz. 1909). *В. К.* XIII. 21—12. Бібл.

*936. **Wienecke** E., Der geometrische Vorkursus in schulgemässer Darstellung. (Lpz. Tb. 1904). *(В. Л.)* X. 17. Бібл.

937. **Wigand** A., Bakterien innerhalb der Anschwellungen der Papilionaceen-Wurzeln. (Bot. Hefte, Forschungen aus dem bot. Garten zu Marburg. Heft 2, 1887, p. 88—97). *Ярослав Федюк.* XI. 19. Bact.

938. —, Das Vorkommen von Bacterien innerhalb des geschlossenen Gewebes der knollenartigen Anschwellungen der Leguminosenwurzeln. (Bot. Hefte, Mrburg 1887/88). *Ярослав Федюк.* XI. 22. Bact.

Wilk Antoni dr., *vide* **Hoborski** Antoni dr. i **Wilk** Antoni dr.

939. **Willfahrt**, Über Stickstoffaufnahme der Pflanzen. (Tagebl. 60. Naturfor.-Vers. zu Wiesbaden, p. 362, 1887). *Ярослав Федюк.* XI. 18. Bact.

—, *vide* **Hellriegel** und **Willfahrt.**

940. **Wilson** St., The club-root fungus. (The Gardener's chronicle, 1879, II. pag. 392—394). *Ярослав Федюк.* XI. 6—7. Bact.

941. **Winckler**, Zur operativen Behandlung der hyperplastischen Zungentonxille. (Wiener med. Wochenschr. Nr. 31. 1898). *Ол. Грабовський.* IV/1. 20—21. Спр.

942. —, Über Massage des Kehlkopfs. (Wiener med. Wochenschr. Nr. 14. 1898). *Е. О.* V/2. 24. Спр.

943. **Winkelmann** A., Handbuch der Physik. (Zweite Auflage. VI. Band, Erste Hälfte: Optik I, Lpz. Barth, 1904). *І. Б.* X. 21. Бібл.

944. **Winterberg**, Zur Theorie der Säurevergiftung. (Ztsch. f. phys. Ch. Bd. 25, Heft 3—4, pag. 202). *М.* V/1. 7—8. Спр.

945. **Winternitz**, Die Hydrotherapie des Ulcus rotundum ventriculi. (Wiener med. Wochensch. N. 21. 1898). *Вахнянин.* IV/1. 31—33. Спр.

946. **Witkowski** A., Zasady fizyki (Варшава, т. І. 1892, том II, перший зошит р. 1897). *В. Л.* IV/2. 6—8. Бібл.

947. —; (tom II. zeszyt II. 1904). *(В. Л.)*. X. 21—22. Бібл.

948. **Witthauer**, Die Behandlung der Gallensteinkollik mit Olivenöl. (Münch. med. Wochensch. 1900. Nr. 43. *Е. О.* VIII/1. 25. Звіти.

949. **Wittmarck** L., Bemerkungen über kropfkranke Kohlpflanzen. (Monatschr. des Ver. zur Beförd. d. Gartenbaues in den kön. preuss. Staaten, XXII, 1879, p 444—445). *Ярослав Федюк.* XI. 9. Bact.

*950. **Witz** A., Thermodynamique, à l'usage des ingénieurs. (Paris, Gauthier-Villars). *(В. Л.)*. VII/1. 7. Бібл.

951. **Wohltmann**, Die Knöllchenbakterien in ihrer Abhängigkeit von Boden und Düngung. Journ. f. Landw. 1901, Heft 4). *Ярослав Федюк.* XI. 43. Bact.

*952. **Войнаровскій** П. Д., Основныя свѣдѣнія изъ висшей математики, необходимыя электротехнику. Ч. I-я, теорет. и практ. курса электротехники. (Изд. Риккера, Спб. 1897). *В. Л.* VI/1. 18. Бібл.

953. **Woker** Gertrud, Dr., Probleme der katalytischen Forschung. (Lpz. Veit, 1907). *В. Л.* XII. 14. Бібл.

954. **Wolf,** Zur Reactionsfähigkeit der Bacterien. Aus dem Institut Prof. v. Baumgarten. (Zbl. f. Bakt. 1900, N. 25). *Д.* VI/2. 11—12. Спр.

*955. **Wölffing** E., Mathematischer Bücherschatz. (Lpz. Tb., перша часть, Reine Mathematik 1903). *(В. Л.).* X. 19—20. Бібл.

956. **Wollff** E. u. **Kreuzhage** C., Vegetationsversuche in Landkultur über das Verhalten verschiedener Pflanzen gegen die Zufuhr von Salpeterstickstoff. (Landw. Jahrb. 1887, XVI. p. 659—698). *Ярослав Федюк.* XI. 19. Bact.

957. **Wollny,** E., Über Beziehungen der Mikroorganismen zur Agricultur. (Zbl. f. Bakt., vol. 1., 1887, Nr. 15—16, p. 441—448, 467—474). *Ярослав Федюк.* XI. 19—20. Bact.

958. **Wolpert.** Über Ausnutzung der körperlichen Arbeitskraft in hochwarmer Luft. (Arch. f. Hyg., 36. B., Heft 3, p. 294). *М.* VI/2. 5. Спр.

959. **Woronin** M., Bemerkungen zu dem Aufsatz von Herrn H. Möller über Plasmodiophora alni. (D. Bot. Ges. III. 5, p. 177—178. 1885. *Ярослав Федюк.* XI. 12. Bact.

960. —, Nachträgliche Notiz zur Frage der Kohlpflanzenherniae. (Bot. Ztg., 1880, стр. 54—57). *Ярослав Федюк.* XI. 10—11. Bact.

961. —, Plasmodiophora Brassicae, Urheber der Kohlpflanzenherniae. (Jahrb. f. wissensch. Bot. XI, 1878, pag. 548—574). *Ярослав Федюк.* XI. 3—4. Bact.

(251). **Врачъ,** 1894. *С-а.* **VIII.** 5—6. Н. Хр.

962. —, 1897. Засїданє Антропольоґічного Товариства при медичній Академії в Петербурзї. *О. Ч.* III/2. 1—2. Огляд.

963. **Wróblewski,** Ein neuer eiweissartiger Bestandtheil der Milch. (Ztsch. f. phys. Ch., B. 24. H. 3—4. p. 308). *М.* V/1. 3. Спр.

Zalewski, *vide* **Nencki** und **Zalewski.**

964. **Записки** императорскаго общества сельскаго хозяйства южной Россіи. (Одесса, 1897 г., 12 книжок). *О. Ч.* III/2. 5. Огляд.

965. —, императорскаго русскаго общества (1897). *О. Ч.* III/2. 6. Огляд.

*966. —, императорскаго харьковскаго Университета (за р. 1899). *О. Я.* VI/1. 10. Бібл.

*967. —; (Рік 1900. книга 2, книга 3). *В. Л.* VII/1. 4. Бібл.

*968. —; (рік 1901. книжка 3). *(В. Л.).* VIII/2. 10. Бібл.

969. — кавказскаго отдѣла императорскаго русскаго географическаго общества, (т. XIX. 1897). *О. Ч.* III/2. 6. Огляд.

(352—352). — кіевскаго Общ. Естествоиспитателей (т. XIII. вип. 1 і 2, 1894). З. **IV.** 192—193. Бібл. (т. XIV. 1895). *Д. З.* **XIV.** 50—51. Бібл.

970. —; (Т. XIV. 1897). *О. Ч.* III/2. 5. Огляд.

971. —, новороссійскаго общества естествоиспитателей (т. XXI., вип. I, 1897). *О. Ч.* III/2. 5. Огляд.

*972. **Zeitschrift** für Mathematik und Physik (давнійше під ред. Schlömilch'a, тепер під ред. R. Mehmke і C. Runge в Липску; журнал зреформований тепер в напрямі математики приміненої. Том 46. зошит подвійний 1—2. 1901; зошит 3. 1901). *(В. Л.).* VIII/2. 4—5. Бібл.

*973. —; (зошит 4, 1901. Том 47, зошит 1—4. Том 48. зошит 1). *(В. Л.)* IX. 31. Бібл.

974. **Zeltner**, Über die Wirkung des Diatoxinum crystallisatum (Merck) im Vergleich zu der der Digitalisblätter. (Münch. med. Wochensch., 1900. N. 26). *Е. О.* VI/2. 33—34. Спр.

(361). **Земскій Врачъ**. (1894). *О. Ч.* **VIII.** 7—8. Н. Хр.

975. **Zenetz**, Zur Diagnose des Krebses der Verdauungsorgane. (Wiener med. Wochensch. 1899, N. 21). *Е. О.* VI/2. 24—25. Спр.

976. **Zeppelin** Ferdinand, Graf v. u. a., Die Luftschiffahrt, dem heutigen Stande der Wissenschaft entsprechend dargestellt. (Stuttgart, Franckh, 1908). *В. Л.* XII. 10. Бібл.

977. **Zeuthen** H. G., Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert, (deutsch v. R. Meyer, Lpz. Tb. 1903). *(В. Л.).* X. 17. Бібл.

978. **Zinssen** O., Über das Verhalten von Bakterien insbesondere von Knöllchenbakterien in lebenden Pflanzen - Geweben. (Pringsheim's Jahrb., XXX. 1897. p. 423). *Ярослав Федюк.* XI. 37. Bact.

979. **Zopf**, Oxalsäurebildung durch Bacterien. (Ber. d. d. Bot. Ges., 18. Jahrg., Heft 1. p. 32). *М.* VIII/1. 3—4. Звіти.

980. **Звіт** зі зїзду для туберкульози в Льондоні, відбувшого ся дня 22, і 23. липня 1901. (British Med. Journ. з 27. липня 1901). *Е. О.* VIII/1. 32—39. Звіти.

IV. Хроніка.

1. PERSONALIA.

981. **Becquerel** Henri, некрольоґ, XII. 40. Бібл.

982. **Beltrami** Евген, некрольоґ, VI/1. 18. Бібл.

983. **Berthelot** Маркил, некрольоґ, XII. 40. Бібл.

984. **Бредіхін** Теодор Александрович др., некрольоґ, X. 59—60. Бібл.

985. **Brioschi** Francesco, некрольоґ, IV/2. 5 (згадки посмертні).

986. **Faye**, некрольоґ, VIII/2. 16. Бібл.

987. **Фукс** Імануіл Лазар, некрольоґ, VIII/2. 16. Бібл.

988. **Gould** Венямин, некрольоґ, IV/2. 2—3. (згадки посмертні).

989. **Gyldén** Гуґо, некрольоґ, IV/2. 2. (згадки посмертні).

990. **Hall** Asaph, некрольоґ, XII. 41. Бібл.

991. **Hermite** Шарль, некрольоґ, VII/1. 29. Бібл.

992. **Janssen** Pierre, некрольоґ, XII. 41. Бібл.

993. **Кантор** Моріц, ювилей, VII/1. 8. Бібл.

994. **Kelvin** Льорд, (Sir William Thomson), некрольоґ, XII. 38—39. Бібл.

995. **Ляндау** Едмунд і єго досліди, XII. 15—17. Бібл.

996. **Lie** Sophus, некрольоґ, IV/2. 5—7. (згадки посмертні).

997. **Менделєєв** Дмитро, некрольоґ, XII. 39—40. Бібл.

998. **Moissan** Henri, некрольоґ, XII. 40. Бібл.

999. **Сатке** Володислав, некрольоґ. X. 60—61. Бібл.

1000. **Шмальгавзен** I., проф., некрольоґ, **IV**. 200. *(Др. О. Ч.)*.

1001. **Стокс** Жорж, ювилей, VII/1 8. Бібл.

1002. **Sylvester** Яков Йосиф, некрольоґ, IV/2. 4—5. (згадки посмертні).

1003. **Tisserand** Франц Щасний, некрольоґ, IV/2. 1—2. (згадки посмертні).

1004. **Фоґель** Герман, некрольоґ, XII. 40. Бібл.

1005. **Weierstrass** Карль Теодор, IV/2. 3—4. (згадки посмертні).

2. МАТЕМАТИКА.

1006. **Архімеда** незнаний твір, XII. 18—19. Бібл.

1007. **Вислїди** в книжцї староегипетського математика Агмеса, VIII/2. 43—44. Бібл.

1008. **Ґеометриї** Bolyai - Лобачевського нове уґрунтоване, VIII/2. 38—43 + таблиця. Бібл.

1009. **Моделї** до науки математики, VI/1. 15—16. Бібл.

1010. **Picard'a** твердженя узагальнене (Landau), X. 39. Бібл.

1011. **Планет** рухи в неевклїдовім просторі, XI. 55—56. Бібл.

1012. **Проблєми** математики, будучі, VII/2. 21—24. Бібл.

1013. **Простір** наш, чи є евклїдовий чи нї? VIII/2. 45—48. Бібл.

1014. **Теорем**, новий загальний, з теориї аналїтичних функцій Mittag - Leffler), X. 35—38. Бібл.

1015. **Теореми**, деякі, з теориї аналїтичних функцій, подав проф. Пузина), X. 38—39. Бібл.

1016. **Тяглости** поняте, VII/2. 30—34. Бібл.

1017. **Фермата** твердженє, XII. 19. Бібл.

3. ФІЗИКА І ХЕМІЯ.

1018. **Абсолютна** міра часу, VII/1. 9—10. Бібл.

Акумулятори, *vide* **Нові**.

Алїяж, *vide* **Терміт**.

Апарат, *vide* **Новий**.

1019. **Арґон** і його товариші, VII/2. 25. Бібл. *vide* **Одержуванє**.

Атмосфера, *vide* **Скільність**.

Атоми, *vide* **Означуванє**.

Brown, *vide* **Молєкулярні**.

Буря, *vide* **Вплив.**
Van der Waals, *vide* **Рівнанє.**
Видержність, *vide* **Вплив.**
Вираженє, *vide* **Математичне.**
1020. **Відношенє** між сочинником заломаня а густотою ґазу, X. 54—55. Бібл.
Вода, *vide* **Розходженє.**
Воздух, *vide* **Одержуванє**; *vide* **Скількість**; *vide* **Теклий.**
Вольт, *vide* **300.000.**
1021. **Вплив** бурі на нервну систему, IX: 51. Бібл.
1022. — , температури на видержність зеліза і стали, XII. 31—32. Бібл.
Герц, *vide* **Розходженє.**
Hewitt, *vide* **Ртутна.**
Голос, *vide* **Скорість.**
1023. **Густота** електричности на еліпсоіді, VII/1. 26. Бібл.; *vide* **Відношенє.**
Ґаз, *vide* **Відношенє**; *vide* **Скількість**; *vide* **Скорість.**
Ґравітація, *vide* **Скорість**; *vide* **Стала.**
Діелєктрики, *vide* **Елєктричні.**
Діямант, *vide* **Елєктричні.**
1024. **Ділянє** зимна на орґанізм, XII. 28. Бібл.; *vide* **Охоронне.**
Дроганя, *vide* **Розходженє.**
Едісон, *vide* **Нові.**
1025. **Елєктричний** опір діяманту, IX. 50 Бібл.
1026. — опори деяких діелектриків, IX. 50. Бібл.
1027. — , прикмети селєну, IX. 49—50. Бібл.
— , *vide* **Нові**; *vide* **Охоронне.**
Електричність, *vide* **Густота.**
Елєктростатична, *vide* **Нова**
Елєменти, *vide* **Математичне.**
Еліпсоід, *vide* **Густота.**
Етер, *vide* **Погляди.**
1028. **Завданя** техніки 20. століття, VIII/2. 49. Бібл.

Закон. *vide* **Математичне.**
Заломанє, *vide* **Відношенє**
1029. **Заміна** фосфору в ціпке тіло, VIII/2. 45. Бібл.
Запах, *vide* **Скорість.**
1030. **Звідки** взяв ся термометер Фаренгайта? IX. 60—61. Бібл.
Зелїзо, *vide* **Вплив.**
1031. **Зимне** світло, VII/2. 39—40. Бібл.
Зимно *vide* **Ділянє.**
Золото, *vide* **Температура.**
Інфлюенція. *vide* **Нова.**
Кадм, *vide* **Температура.**
1032. **Кататипія**, IX. 52. Бібл.
Кипінє, *vide* **Температура.**
Кисень, *vide* **Плинний**; *vide* **Температура.**
Космічний, *vide* **Погляди**
Краски. *vide* **Метода.**
Криштали, *vide* **Плинні.**
Lummier, *vide* **Метода.**
Lutecium, *vide* **Новий.**
Лямпа, *vide* **Ртутна.**
Лямпи, *vide* **Нові.**
Маґнезія, *vide* **Начиня.**
1032. **Математичне** вираженє періодичного закона елементів, VIII/2. 14. Бібл.
Матерія, *vide* **Періодичні.**
Машина. *vide* **Нова.**
Менделєєв, *vide* **Погляди.**
Металї, *vide* **Переміна**; *vide* **Т. зв.**
1033. **Метода** Lummier'a фотоґрафованя красок, XII. 27—28. Бібл.
1034. **Механїчний** рівноважник темпа, VIII/2. 46. Бібл.
Мінерали, *vide* **Температура.**
Міра, *vide* **Абсолютна.**
1035. **Молєкулярні** рухи Brown'a, XII. 19. Бібл.
1036. **Найвисше** тисненє, VIII/2. 13. Бібл.

1037. **Начиня** з маґнезії, XII. 30—31. Бібл.

Неорґанічна, *vide* **Періодичні.**

Нерви, *vide* **Вплив.**

1038. **Низькі** температури, VIII/2. 12. Бібл.

1039. **Нова** теорія електростатичних інфлюенційних машин, X. 46—47. Бібл.

1040. **Новий** первень: lutecium, XII. 30. Бібл.

1041. — проекційний апарат, IX. 60. Бібл.

1042. **Нові** акумулятори Едізона, VII/2. 37. Бібл.

1043. — електричні лямпи, VII/2. 27—28. Бібл.

1044. — поміри температури топленя первнів, XII. 29. Бібл.

Нововідкриті, *vide* **Скількість**

1045. **Одержане** арґону з воздуха, XII. 32—33. Бібл.

1046. **Означуване** атомових тягарів, VII/2. 35—36. Бібл.

Опір, (опори), *vide* **Електричний, (—і).**

Орґанїзм, *vide* **Ділане.**

1047. **Охоронне** убране проти діланя електр. токів о високім потенціялї.

Пара, (—и), *vide* **Переміна**; *vide* **Скорість**

Первень, (первні) *vide* **Новий (—і)**

1048. **Переміна** металів в пару, XII. 29. Бібл.

Періодичний, *vide* **Математичне.**

1049. **Періодичні** прояви в неорґанічній матерії, IX. 59. Бібл.

1050. **Плинні** кришталі, VII/2. 24—25. Бібл.

Плинний *vide* **Переміна.**

1051. **Погляд** Менделеева на космічний етер, X. 42—45. Бібл.

Полумінь, *vide* **Температура.**

Поміри *vide* **Нові**

Поступ, *vide* **Скорість.**

1052. **Поступи** фізики і хемії в 1[illegible] р., VIII/2. 44—45. Бібл.

Потенціял, *vide* **Охоронне.**

Прикмети, *vide* **Електричні.**

Проекційний, *vide* **Новий.**

Прояви, *vide* **Періодичні.**

1053. **Рівнане** Van der Waals'a, VII/2. 45—46. Бібл.

Рівноважник, *vide* **Механічний**

1054. **Розходжене** дрогань Гер[illegible] в воді, VII/2. 36. Бібл.

1055. **Ртутна** лямпа Hewitt'a, IX. 50—51. Бібл.

Рухи, *vide* **Молекулярні.**

1056. **Свійства** танталю, XII. 29—3[illegible] Бібл.

Світло, *vide* **Зимне**; *vide* **Скорість.**

Селен, *vide* **Електричні.**

— **овий,** *vide* **Фотометр**

Система, *vide* **Вплив.**

Скали, *vide* **Температура.**

1057. **Скількість** нововідкритих газів в воздусі, VIII/2. 12. Бібл.

1058. — шляхотних ґазів в атмосфері, XII. 32. Бібл.

1059. **Скорість** голосу в ріжних парах і ґазах, VIII/2. 13. Бібл.

1060. — поступу ґравітації. IX. 52—53. Бібл.

1061. —, поступу запаху, X. [illegible] Бібл.

1062. — світла, VII/2. 36. Бібл.

Сочинники, *гл.* **Відношене.**

1063. **Стала** ґравітації, VIII/2. [illegible] Бібл.

Сталь, *vide* **Вплив.**

Танталь, *vide* **Свійства.**

1064. **Теклий** воздух, VIII/2. [illegible]—[illegible] Бібл.

1065. **Температура** кипіня плинного кисня, VII/2. 39. Бібл.

1066. —, кипіня цинку і ка[illegible] [illegible] 10. Бібл.

1067. — полуміний, XII. 28—29. Бібл.

1068. — топленя золота, VII/2. 39. Бібл.

1069. — топленя ріжних мінералів і скал; *vide* **Вплив**; *vide* **Низькі**, *vide* **Нові**.

Теорія, *vide* **Нова**.

Тепло, *vide* **Механічний**.

1070. **Терміт**, аліяж Al і окису заліза, XII. 32. Бібл.

Термометр, *vide* **Звідки**.

Техніка, *vide* **Завданя**.

1071. **Т. зв.** рідкі металї, XII. 30. Бібл.

Тисненє, *vide* **Найвисше**.

Тіло, *vide* **Флюор**.

Товариші, *vide* **Арґон**.

Топленє, *vide* **Нові**; *vide* **Температура**.

Тягарі *vide* **Означенє**.

Убранє, *vide* **Охоронне**.

Фаренгайт, *vide* **Звідки?**

Фізика, *vide* **Поступи**.

Флюор, *vide* **Заміна**.

Фотоґрафія, *vide* **Метода**.

1072. **Фотометр** селеновий, XII. 27. Бібл.

Хемія, *vide* **Поступи**.

Час, *vide* **Абсолютна**.

Цинк, *vide* **Температура**.

Ціпкий, *vide* **Флюор**.

Шляхотний, *vide* **Скількість**.

1073. **3000** волтів, XII. 35—36. Бібл.

4. ЕЛЄКТРОНЇКА Й РАДІОАКТИВНІСТЬ[1]).

1074. **Абсорпция** ґравітаційної енерґії лучистими тілами, VIII/2. 47. Бібл.

Азотан, *vide* **Свіченє**.

1075. **Актин** XII. 25. Бібл.

α, *vide* **Лучі**; *vide* **Скорість**.

Атмосферний, *vide* **Лучистість**.

Атом, *vide* **Відріжнюванє**, *vide* **Як довго**.

1076. **Атомовий** тягар раду, VIII/2. 35. Бібл.

Bath (місто, *vide* **Гель**.

Бекерель, *vide* **Дальші**; *vide* **Діланє**; *vide* **Досліди**: *vide* **Енерґія**.

Bordas, *vide* **Дальші**.

Бромак, *vide* **Дальші**.

1077. **Відріжнюванє** йонів від атомів, VIII/2. 12—13. Бібл.

1078. **Вплив** катодних лучів на кришталі кам. соли і флюориту, VIII/2. 15. Бібл.

1079. —, світла на електромаґнетні филї, VIII/2. 39. Бібл.

Воздух, *vide* **Йонізація**; *vide* **Лучі**, *vide* **Свіченє**.

Втрата, *vide* **Лучі**.

1080. **Гель** в горячих жерелах міста Bath, X. 53. Бібл.

1081. **Годинник** з ряду, XII. 23. Бібл.

Горячий, *vide* **Гель**.

Ґравітаційний, *vide* **Абсорпция**.

1082. **Дальші** досліди Bordas'a над діланєм бромаку раду, XII. 22. Бібл.

1083. —, досліди над лучистими тілами, X. 50—52. Бібл.

1084. —, прикмети лучів Бекереля, VII/2. 34—35. Бібл.

1085. —, прикмети лучів Рентґена, VIII/2. 36—38. Бібл.

1086. **Діланє**, електричних филь на людський та звірячий мозок. VIII/2. 42. Бібл.

---

[1]) Давнїйший термін д. *В. Л.* »лучивочинний« заступлено пізнїйшим »лучистий«.

1087. — лучів Бекереля на око, VII/2. 35. Бібл.
1088. — раду на корунд, XII. 22. Бібл.
— , *vide* **Дальші**.
1089. **Дослїди** Бекереля над польоном, VIII/2. 48—49. Бібл.
— , *vide* **Дальші**; *vide* **Нові**.
Доплєр, *vide* **Прінціп**.
Електричний, *vide* **Дїланє**.
Електромаґнетний, *vide* **Вплив**.
Електрон, *vide* **Маса**.
1090. **Еманація** раду, XII. 25. Бібл. (2 ноти).
1091. — фосфору, VIII/2. 49. Бібл.
1092. **Енерґія** йонів, VII/2. 27. Бібл.
1093. — лучів Рентґена та Бекереля, VII/2. 26. Бібл.
— , *vide* **Абсорпція**; *vide* **Скорість**; *vide* **Тепляна**.
Жерела, *vide* **Гель**.
Звірячий, *vide* **Дїланє**.
1094. **Зміна** тягару лучистих матерій, VIII/2. 48. Бібл.
Йон, *vide* **Відріжнюванє**; *vide* **Енерґія**.
1095. **Йонїзація** воздуха понад океаном, XII. 22. Бібл.
1096. **Індукована** лучистість, VIII/2. 34—35. Бібл.
„Ionium“, *vide* **Нове**.
Істнованє, *vide* **Як довго**.
Камяна сіль, *vide* **Вплив**
Катодний, *vide* **Вплив**.
1097. **Клясифікація** лучів, XII. 20. Бібл.
Корунд, *vide* **Дїланє**.
Кришталі, *vide* **Вплив**.
X, *vide* **Поляризація**.
1098. **Лучисте олово**, VII/2. 36. Бібл.
1099. **Лучистість** атмосферних опадів, XII. 24. Бібл.
1100. — олова, XII. 24. Бібл.
1101. — снїгу VIII/2. 42. Бібл.
— ; *vide* **Індукована**.
Лучистий, *vide* **Абсорпція**; *vide* **Дальші**, *vide* **Зміна**; *vide* **Натура**; *vide* **Нове**.
1102. **Лучі** *α*, VIII/2. 48. Бібл.
1103. — *α* тратять у воздусї прикмети, XII. 24. Бібл.
— , *vide* **Вплив**; *vide* **Дальші**; *vide* **Дїланє**; *vide* **Енерґія**; *vide* **Клясифікация**; *vide* **Нові**; *vide* **Поляризація**; *vide* **Прінціп**; *vide* **Скорість**; *vide* **Угинанє**; *vide* **Хемічні**.
Людський, *vide* **Дїланє**.
Малий, *vide* **Радіометер**.
1104. **Маса** електрона, VIII/2. 15. Бібл.
Матерія, *vide* **Зміна**.
Мозок, *vide* **Дїланє**.
N, *vide* **Нові**.
1105. **Натура** лучистих тїл, VIII/2. 35—36. Бібл.
1106. **Нове** лучисте тїло („ionium“). XII. 25. Бібл.
1107. **Новий** погляд на лучі Рентґена, XII. 25. Бібл.
1108. — рід лучів, VIII/2. 34. Бібл.
1109. **Нові** дослїди над лучами N, X. 47—50. Бібл.
Океан, *vide* **Йонїзація**.
Око, *vide* **Дїланє**.
Олово, *vide* **Лучисте**; *vide* **Лучистість**.
Опади, *vide* **Лучистість**.
1110. **Переміна** первнів, XII. 21—22. Бібл. (з ноти).
Первнї, *vide* **Переміна**.
Плинний, *vide* **Свіченє**.
Погляд, *vide* **Новий**.
Польон, *vide* **Дослїди**.
1111. **Поляризація** лучів X, VIII/2. 47—48. Бібл.
Прикмети, *vide* **Дальші**: *vide* **Лучі**; *vide* **Хемічні**.
1112. **Прінціп** Доплера а ситові лучі, XII. 26. Бібл. (2 ноти).
Рад, *vide* **Атомовий**; *vide* **Годинник**; *vide* **Дальші**; *vide*

Діланє; *vide* **Еманація**; *vide* **Тепляна**; *vide* **Як довго.**

1113. **Радіометер**, чуткий для дуже малих теплот, VIII/2. 43. Бібл.

Рентґен, *vide* **Дальші**, *vide* **Енерґія**, *vide* **Новий**, *vide* **Скорість**, *vide* **Угинанє.**

Рід, *vide* **Новий.**

Світло, *vide* **Вплив.**

1114. **Свіченє** уранового азотану в плиннім воздусї, VIII/2. 38. Бібл.

1115. **Ситові** лучі, VIII/2. 39—41. Бібл.; *vide* **Прінціп**; *vide* **Хемічні.**

1116. **Скорість** і енерґія частинок α, XII. 23. Бібл.

1117. — лучів Рентґена, VIII/2. 38. Бібл.

Сніг, *vide* **Лучистість.**

Теплота, *vide* **Радіометер.**

1118. **Тепляна** енерґія раду, XII. 23—24. Бібл.

Тіло, *vide* **Абсорпція**; *vide* **Дальші**; *vide* **Натура**, *vide* **Нове.**

Тягар *vide* **Атомовий**; *vide* **Зміна.**

1119. **Угинанє** лучів Рентґена, VIII/2. 47. Бібл.

Урановий, *vide* **Свіченє.**

1120. **Хемічні** прикмети ситових лучів, VIII/2. 41. Бібл.

Филї, *vide* **Вплив**; *vide* **Діланє.**

Флюорит, *vide* **Вплив.**

Фосфор, *vide* **Еманація.**

Частинки, *vide* **Скорість.**

Чуткий, *vide* **Радіометер.**

1121. **Як довго** може істнувати один атом раду? X. 52—53. Бібл.

5. АСТРОНОМІЯ.

α **Aurigae**, *vide* **Звізди.**

Auriga *vide* **Дуговина**; *vide* **Звізда.**

β **Aurigae**, *vide* **Дуговина.**

Boreily, *vide* **Нова.**

Величина, *vide* **Напрям.**

Венера, *vide* **Фотоґрафія.**

Відносини, *vide* **Кліматичні.**

Внїшнї планети, *vide* **Час.**

Вселенна *vide* **Погляди.**

1122. **Геліоцентричні** сорядні планет в 1903 р., IX. 56. Бібл.

Головні звізди, *vide* **Радіяльні.**

1123. **Девятий** місяць Сатурна, X. 58. Бібл.

1124. **Дороги** планетоідів, X. 56—57. Бібл.

1125. **Дуговина** подвійної звізди β Aurigae, X. 56. Бібл.; *vide* **Знимка.**

Ерос, *vide* **Планета.**

1126 **Звізда** α Aurigae, Capella, VII/1. 8—9. Бібл.

1127. — 85 Pegasi, IX. 55. Бібл. — , *vide* **Дуговина**; *vide* **Змінна**; *vide* **Нова**; *vide* **Полярна**, *vide* **Система.** — **Звізди**, *vide* **Нові**; *vide* **Означенє**; *vide* **Радіяльні**; *vide* **Сила**; *vide* **Скількість**; *vide* **Тепляне.**

1128. **Зміни** в перстенях Сатурна, XII. 35. Бібл.

1129. **Змінна** звізда в Персею, VIII/2. 42. Бібл.

1130. **Знимка** дуговини Урана, VIII/2. 42. Бібл.

1131. **Інтересний** планетоід (1902. KX), IX. 58. Бібл.

Capella, *vide* **Звізда.**

1132. **Кліматичні** відносини Марса, XII. 34. Бібл.

Комета, *vide* **Нова.**

1133. **Комети** в найблизших роках, VII/2. 29. Бібл.

—, *vide* **Повставанє**.

Лебедев, *vide* **Повставанє**.

Марс, *vide* **Кліматичні**; *vide* **Червона**.

Малі планети, *vide* **Проміри**.

Місцевости, *vide* **Сорядні**

Місяць, *vide* **Девятий**.

1134. **Мраковини** в окруженю Нової Persei, IX. 57—58. Бібл.

Найблизші роки *vide* **Комети**.

1135. **Найменша** скількість сонїчних плям, X. 56. Бібл.

Найправдоподібнїйша вартість, *vide* **Паралякса**.

1136. **Напрям** і величина питомого руху сонця, X. 57. Бібл.

Newcomb. *vide* **Погляди**.

1137. **Нова** звізда, IX. 54. Бібл.

1138. — комета Borelly, VII/1. 9. Бібл.

1139—40. — планетоіда, VIII/2. 15. Бібл.; „TG“, XII. 35. Бібл.

— Persei, *vide* **Мраковини**.

1141. **Нові** звізди за остатнїх 14 лїт, VII/2. 40—41. Бібл.

1142. — подвійні звізди, IX. 54. Бібл.

Оборот, *vide* **Час**.

1143. **Означенє** температури звізд, VIII/2. 43—44. Бібл.

1144. **Паралякса** сонця, VII/1. 9. Бібл.

1145. —, найправдоподібнїйша вартість, IX. 55. Бібл.

—, *vide* **Сонїшня**.

Pegasus, *vide* **Звізда**.

Перстень, *vide* **Зміни**; *vide* **Темний**.

Персей, *vide* **Змінна**; *vide* **Мраковина**.

Питомий рух, *vide* **Напрям**.

1146—8. **Планета** Ерос, VI/1. 15. Бібл.; VII/2. 29. Бібл.; VIII/2. 14. Бібл.

1149. —, Юпітер, VII/2. 40. Бібл.

Планети, *vide* **Геліоцентричні**; *vide* **Проміри**; *vide* **Час**.

Планетоіди, *vide* **Дороги**; *vide* **Інтересний**; *vide* **Нова**;

Плєяди, *vide* **Радіяльні**.

Пляма, *vide* **Червона**; **плями**, *vide* **Найменша**.

1150. **Повставанє** хвостів комет від тиску світла, IX. 54. Бібл.

1151. —, (теорія Лебедева), IX. 53. Бібл.

1152. **Погляди** проф. Newcomb'а на вселенну, IX. 60. Бібл.

Подвійні звізди, *vide* **Дуговина**; *vide* **Нові**.

1153. **Полярна** звізда, XII. 35. Бібл.

Проміньованє, *vide* **Тепляне**.

1154. **Проміри** малих планет, VIII/2. 42. Бібл.

1155. **Протуберанція** *vide* **Сонїшня**.

1156. **Радіяльні** скорости головних звізд в Плєядах, X. 58. Бібл.

Рух, *vide* **Напрям**.

Сатурн, *vide* **Девятий**; *vide* **Зміни**; *vide* **Темний**.

Світло, *vide* **Фотоґрафія**; *vide* **Повставанє**; *vide* **Сила**.

1157. **Сила** світла деяких звізд, VII/2. 26—27. Бібл.

1158. **Система** звізди Сіріюс, VII/1. 9. Бібл.

Сіріюс, *vide* **Система**; *vide* **Товариші**.

1159. **Скількість** звізд при фотоґрафії, VIII/2. 43. Бібл.

—, *vide* **Найменша**.

Скорости *vide* **Радіяльні**.

Сонїшні плями, *vide* **Найменша**.

1160. **Сонїшня** паралякса, X. 59. Бібл.

1161. — протуберанція 1908, XII. 38. Бібл.

Сонце *vide* **Напрям**; *vide* **Паралякса**; *vide* **Температура**.

1162. **Сорядні** місцевостий на землї на 1903 р., VIII/2. 49—51. Бібл.

—, *vide* **Геліоцентричні.**

1163. **Темний** перстень Сатурна, XII. 35. Бібл.

1164. **Температура** сонця, VIII/2. 15. Бібл.

—, *vide* **Означенє.**

1165. **Тепляне** проміньованє деяких звізд, VII/2. 41. Бібл.

Тиск світла, *vide* **Повставанє.**

1166. **Товариш** Сірія, X. 58. Бібл.

Уран. *vide* **Знимка.**

1167. **Фотоґрафія** при помочи світла Венери, VII/2 40. Бібл.

—, *vide* **Скільність.**

Хвіст, *vide* **Повставанє.**

1168. **Час** обороту внішних планет, IX. 54—55. Бібл.

1169. **Червона** пляма на Юпітері, XII. 34. Бібл.

Юпітер, *vide* **Планета**; *vide* **Червона.**

6. КОСМІЧНА ФІЗИКА Й МЕТЕОРОЛЬОҐІЯ.

Атмосфера, *vide* **Брак**, *vide* **Склад.**

Атмосферний, *vide* **Натуга.**

1170. **Барометричне** maximum в 1907 р., XII. 33—34. Бібл.

Bishop, *vide* **Перстень.**

1171. **Брак** метану в атмосфері, VII/2. 38. Бібл.

1172 **Величезний** метеорит, IX. 59. Бібл.

1173. **Величина** морських филь, XII. 36. Бібл.

1174. **Висота** а температура, XII. 33. Бібл.

1175. — хмар, VII/2. 40.

1176. **Вікове** пересуненє маґнетної земської оси, VII/2. 26. Бібл.

Вісь землї, *vide* **Вікове**

Вулькани, *vide* **Ґази.**

1177. **Ґази** з вулькану Mont-Pelée, IX. 59. Бібл.

Еквадор, *vide* **Помір.**

1178. **Екстреми** температур в XIX. ст., VII/2. 39. Бібл.

Електричний, *vide* **Натуга.**

1179. **Зависимість** між опадом а скількістю води в ріках, X. 54. Бібл.

Землетрясенє, *vide* **Скорість.**

Земля, *vide* **Ядро.**

Земський, *vide* **Пересуненє**; *vide* **Поміри.**

Індійський Океан, *vide* **Струї.**

Маґнетний, *vide* **Пересуненє.**

Maximum, *vide* **Барометричне,**

Метан, *vide* **Брак.**

Метеорит, *vide* **Величезний.**

Mont Pelée, *vide* **Ґази.**

Морські филї, *vide* **Величина.**

1180. **Натуга** атмосферної електричности, VIII/2. 39. Бібл.

1181. **Наукова** проґноза погоди. (J. M. Pentner), X. 53—54. Бібл.

1182. **Нова** теорія полярного світла, XII. 26—27 Бібл.

Океан, *vide* **Струї.**

Опад, *vide* **Зависимість.**

Пересуненє, *vide* **Вікова.**

Perntner *vide* **Наукова.**

1183. **Перстень** Bishop'a. в лїтах 1902—1904 X. 55—56. Бібл.

Погода, *vide* **Наукове**

Полуденник, *vide* **Помір.**

1184. **Полярне** світло, VII/2. 27. Бібл.

1185. — , нові теорії, VII/2. 37. Бібл.

— , *vide* **Нова.**

1186. **Поміри** полуденника в Еквадорі, X. 55. Бібл.

1187. **Поміри** земського прискореня, VII/2. 40. Бібл.

Прискоренє, *vide* **Поміри**.

Проґноза, *vide* **Наукова**.

Прямовісний, *vide* **Склад**.

Ріки, *vide* **Зависимість**.

Світло, *vide* **Полярне**.

Скількість води, *vide* **Зависимість**.

1188. **Склад** атмосфери в прямовіснім напрямі, VII/1. 10—11. Бібл.

1189. **Скорість** филь при землетрясеню, XII. 36. Бібл.

1190. — хмар, VIII/2. 44—45. Бібл.

1191. **Струї** в Індійськім Океанї, XII. 38. Бібл.

Температура, *vide* **Висота**; *vide* **Екстреми**.

Теорія, *vide* **Нова**; *vide* **Полярне**.

Филї, *vide* **Величина**, *vide* **Скорість**.

Хмари, *vide* **Висота**; *vide* **Скорість**.

1192. **Ядро** землї, XII. 36—37. Бібл.

7. РІЖНІ НОТАТКИ.

Академія, *vide* **Конкурси**.

Алюмінїй, *vide* **Продукція**.

1193. **Аналїза** староегипетських золотих виробів, VII/1. 10. Бібл.

1194. **Анґлїйська** виправа до антарктичного бігуна, VI/1. 17—18. Бібл.

Антарктичний, *vide* **Анґлїйська**.

Астрофізичний, *vide* **Нова**.

Берлїн, *vide* **Конкурси**.

Бігун, *vide* **Анґлїйська**; *vide* **Поступи**.

1195 **Введенє** метричної системи, VIII/2. 42. Бібл.

Векторіяльні методи, *vide* **Міжнароднє**.

Виправа, *vide* **Анґлїйська**.

Вироби, *vide* **Аналїза**.

Гайдельберґ, *vide* **Зїзди**.

Гонґ-Конґ, *vide* **Найважнїйший**.

1196. **Ґеофізична** обсерваторія на горі Monte Rosa, X. 37—58. Бібл.

Ґетінґен, *vide* **Конкурси**.

Електричний, *vide* **Сила**.

Еллєр, *vide* **Конкурси**.

Еспанія, *vide* **Нова**.

Здобутє бігуна, *vide* **Поступи**.

Зелїзо, *vide* **Продукція**.

Золоті вироби, *vide* **Аналїза**.

1197—1200. **Зїзди**: IX. зїзд польських лїкарів і природників в Кракові 1900, VI/1. 14. Бібл. — Міжнароднїй зїзд математиків в Парижі 1900, VI/1. 14. Бібл. — Третїй міжнароднїй математичний конґрес в Гайдельберзї, X. 39—42. Бібл. — Четвертий міжнароднїй математичний конґрес в Римі 1908, XII. 17—18. Бібл.

Золото, *vide* **Продукція**.

Квас, *vide* **Річна**.

Кватерніони, *vide* **Міжнароднє**.

Конґрес, *vide* **Зїзди**.

Краків, *vide* **Зїзди**; *vide* **Конкурси**.

1201—1212. **Конкурси**: Академія наук в Берлїнї на 1902 р. VI/1. 16. Бібл. — dto, з леґату Еллера, VI/1. 16—17. Бібл. — Берлїнської академії (ім. Штайнера), VIII/2. 12. Бібл. — Краківської академії (ім. Маєра) VII/2. 11. Бібл. — dto, X. 61. Бібл. — Неаполїтанської академії на 1901 р. VII/2. 29. Бібл. — Па-

1229. **Ціна** плятини в 1906 р., XII. 31. Бібл.

Яблоновський (князь) *vide* **Конкурси.**

1230. **Дещо** з военно-лїкарської статистики за рік 1897. *E. O.* V/I. 47. Спр.

8. З ТОВАРИСТВА.

1231—3. Від Товариства I (вступ, без паґ.). Від Редакції I. (без паґ.). — Передне слово (до збірника медичної секції). *E. O.* III/1. (на вступі, без паґ.).

Спис імен[1].

---

[1] Імена подавані в оріґінальній правописи; українська транскрипція подана лиш тоді, коли вона була ужита в »Збірнику«.

Anhang.

Der vorliegende Anhang enthält die deutschen Titel aller originellen Arbeiten aus den Gebieten der mathematischen Wissenschaften, der Naturwissenschaften und der Medizin, die in den 13 ersten Bänden des „Sbirnyk" (Sammelschrift der mathematisch-naturwissenschaftlich-medizinischen Sektion der Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften in Lemberg), sowie in den 13 erstenBänden der „Sapiski" (Denkschrift) derselben Gesellschaft veröffentlicht worden sind. Die römischen Ziffern bedeuten den Band des „Sbirnyk" (die Bände der „Sapiski" sind durch ein vorgesetztes „Sap." gekennzeichnet), die arabischen Ziffern die Seiten.

I. Originelle Arbeiten.

Bobjak Gregor, Beiträge zur Lichenologie Ostgaliziens. Lichenes agri Peremysliensis et Pidhajcensis. VIII/2. 1—8.

—, Beiträge zur Mycologie Ostgaliziens. Fungi agri Berežanensis. XI. 1—41.

—, Über unsere Pilze. VIII/2. 1—22.

Černjachivškyj Alexander, Dr., Apparat zur Messung der Verkürzungen des Uterus. **Sap.** II. 114—118 + 1 Tafel.

Č. O., Dr., Der Neovitalismus und seine Schattenseiten. **Sap.** IX. 1—20.

—, Ein Fall der Vesania melancholica, rasche und vollkommene Genesung nach der Selbsterhängung, **Sap.** XIII. 1—12.

—, Kongress der Britischen Assoziation der Wissenschaften. II. 1—4.

—, VI. Pirogow'scher Kongress der Ärzte in Kiew. I. 1—38.

—, VII. Internationaler Geologen-Kongress in Petersburg. II. 1—4.

Dakura Josef, Dr. Aus der Spitalkasuistik für das Jahr 1899. — Vom Wilhelminen-Krankenhaus in Wien-Ottakring, Dir. Dr. Telg. (I. Embolia arteriae pulmanalis, II. Pyaemia, III. Tumor cerebri, IV. Einige Fälle von Erysipelas). VI/2. 1—9.

—, Beitrag zur klinischen Diagnostik des Typhus abdominalis. (Diasoreaktion von Ehrlich und Serodiagnostik von Vidal). I. 1—20.

—, Beiträge zur Sicherstellung der klinischen Diagnose des Typhus auf Grund bakteriologischer Untersuchungen. — Vom Wilhelminen-Krankenhaus in Wien-Ottakring, Direktor Dr. J. Telg. VIII/1. 1—10 + 1 Tafel.

—, Die Heilanstalt für Lungensüchtige in Alland. II. 1—8.

—, Ein interessanter Fall eines Tumors im vorderen Mediastinalraum. — Vom Wilhelminen-Krankenhaus in Wien-Ottakring, Dir. Dr. Telg. V/1. 1—9.

—, Klinische Beobachtungen über das Uroferin. — Vom Wilhelminen - Krankenhaus in Wien-Ottakring, Direktor Dr. Telg. V/2. 1—8.

—, Postmortale bakteriologische Forschungen und die klinische Diagnose der Infektionskrankheiten. (Vorläufige Mitteilung). II. 1—14.

—, Über die Bedeutung der postmortalen bakteriologischen Untersuchungen. — (Ergänzung zur Arbeit im II. Bde). Vom Wilhelminen-Krankenhaus in Wien-Ottakring, Direktor Dr. Telg. III/1. 1—14.

—, Versuche mit dem neuen Tuberculin (TR) Robert Koch's. — Vom Wilhelminen-Krankenhaus Wien-Ottakring, Dir. Dr. Telg. III/1, 1—9 + Literatur, S. 10.

—, Ziele und Erfolge der heutigen Therapie. III/1. 1--24. Literatur 25—26. (Artikel: Referate).

Dołyńskyj Marian, Dr., Aus der geburtshilflichen Kasuistik. V/1. 1—6.

—, Über die Behandlung des Uteruscarcinom mit Ext. chelidonii majoris. — Von der Klinik Prof. Jordan in Krakau. IV/1. 1—3.

Fedjuk Jaroslav, Bacteroidae. I. Literaturübersicht. XI. 1—48.

Hirnjak Julian, Dr., Bemerkungen zu den Gleichungen der mono- und bimolekularen chemischen Kinetik. XIII. 1—29.

—, Die Bedeutung der festen, flüssigen und gasartigen Phase im chemischen Gleichgewichte. IX. 1—42.

—, Einfluss der Temperatur auf die Geschwindigkeit einiger chemischen Reaktionen. XIII. 1—19.

—, Über den Einfluss des synchronischen Konzentrationswechsels auf den Verlauf der monomolekularen Reaktion. XII. 1—14.

—, Über periodische chemische Reaktionen. XII. 1—8.

—, Wärmeleitung in der Zuckerlösung. XI. 1—11.

Hlibowyćkyj Klemens, Gesetze der Pendelbewegung. (Auf Grund der Theorie der ellipt. Funktionen) III/2. 1—14.

—, Gleichung fünften Grades. II. 1—36.

—, Niels Heinrich Abel und seine Bedeutung in der Mathematik. (Zum hundertsten Geburtstage Abel's). (Mit Porträt Abel's). XI. 1—88.

Horbačevśkyj Johann, Prof. Dr. Hofrat, Eine allgemeine Methode der Darstellung von Nukleinsäure aus Organen. (Vorläufige Mitteilung). III/1. 1—4.

—, Forschungen über die Ernährung der Landbevölkerung Galiziens. V/2. 1—16.

—, Über die Bestimmung des Blutfarbstoffes. VIII/1. 1—4.

—, Über die Entstehung des Fettes im Tierkörper. VIII/1. 1—4.

—, Über krystallisiertes Xanthin und Guanin. I. 1—4.

Hornyćkyj Zeno Eugen, Modell eines Ellipsenzirkels. X. 1—4 + 1 Tafel.

Hwosdećkyj Theophil, Dr., Neue Richtungen in der Behandlung der Hypertrophia prostatae. III/1. 27—30. (Artikel: Referate).

Janowyč Vladimir, Dr., Gänzliche Heilung eines Lupusfalles mittelst Kalium hypermanganicum. V/2. 1—2.

Kobryńskyj Eugen, Dr., Über die Heilung der Ectopia vesicae. — Von der tschechischen chirurgischen Klinik Prof. Meidl in Prag. V/1. 1—10.

Kos Michael, Dr., Augengebrechen der Wehrpflichtigen, (Vortrag, gehalten am 3. April 1902. im

Verein der Militärärzte in Peremyschl). IX. 1—10.

—, Behandlung des Trachoms und anderer Bindehautentzündungen mit Ichthargan. IX. 1—4.

—, Über die Skiaskopie, (Vortrag, gehalten am 10. November 1902. im Verein der Militärärzte in Peremyschl). V/2. 1—9. (mit einer lith. Tafel).

Kučer Vladimir, Grundlagen der Elektronik, XIII. 1—68.

Lewyćkyj Vladimir, Dr., Beitrag zur Klassifikation der Gleichungen zweiten Grades. II. 1—6. (mit einer Tafel).

—, Beitrag zur Theorie der Kettenbrüche und der Modulgruppe. IV/2. 1—8.

—, dto (zweite Note). VII/2. 1—8.

—, Beziehung zwischen der metrischen und der projektiven Geometrie. IX. 1—11.

—, Dr. Hilbert's Grundlagen der Geometrie VIII/2. 1—7.

—, Einige Bemerkungen zur Lagrange'schen Interpolationsformel. IV/2. 1—8.

—, Elliptische Modulfunktionen. **Sap.** VII. 1—28 + Beitrag zur math. Terminologie + 2 Tafeln.

—, Elektromagnetische Lichttheorie und elektrische Wellen. Im Anhang: Beitrag zur Terminologie. II. 1—69, 70—72 (mit 1 Tafel).

—, Existenzbeweise für Integrale der Differentialgleichungen. I. 1—30.

—, Klassifikation der mathematischen Wissenschaften. VI/1. 1—16.

—, Klemens Hlibowyćkyj. (Nekrolog). XII. 1—6.

—, Klimatische Verhältnisse Tarnopols. (Auf Grund der Arbeiten von W. Satke). IV/2. 1—6.

—, Kurzer Abriss der Theorie der automorphen Funktionen. VII/1. 1—29 + 1 Tafel.

—, Neueste Arbeiten aus der Theorie der analytischen Funktionen. VII/2. 1—12.

—, Osafat Petryk. (Nekrolog). II. 2 Seiten.

—, Projektive Geometrie in der geometrischen Optik (nach der Theorie von F. Klein). VIII/2. 1—12. (Mit einer Tafel).

—, Theoretische und praktische Mathematik. (Ansichten von Prof. F. Klein). VIII/2. 1—14.

—, Theorie der Saturnringe. VII/2. 1—46. (Mit 1 Tafel).

—, Über Nullstellen der Funktion ζ *(s)*. X. 1—3.

—, Über symmetrische Ausdrücke aus den Werten der Funktion mod. *m*. **Sap.** IV 124—139.

—, Über Transzendenz der Zahlen e und π. I. 1—28.

—, Zur Theorie der Potenzreihen. VII/1. 1—10.

Marischler Julius, Dr., *vide* **Osarkevyč Eugen,** Dr., und **Marischler Julius,** Dr.

Matwijas Sophron, Einiges über Becquerelstrahlen. VII/1. 1—8. Mit 1 Tafel.

—, Neuere Untersuchungen über Becquerelstrahlen. VIII/2. 1—6.

Moračevśka-Okunevśka Sophie, Dr., Einfluss der Temperatur auf den osmotischen Druck der Erythrocyten. — Aus dem physiologischen Laboratorium Prof. Dr. Beck in Lemberg. III/1. 1—10.

Moračevśkyj Wenzel, Dr., Neue Methoden zur Untersuchung des

Eiweisses. VI/2. 1—11.

—, Stoffwechselversuch bei Acromegalie. IX. 1—6.

Olijnyk Michael, Dr., Über die paroxysmale Haemoglobinurie. — Aus der Klinik Prof. Dr. Neusser in Wien. V/2 1—4.

Osarkevyč Eugen, Dr., Über die Stoffwechselversuche und die dabei angewendeten Methoden. III. 1—12.

—, Über Urobilinicterus. VI/2. 1—10.

—, Untersuchungen über die Malaria. IV/1. 1—17.

Osarkevyč Eugen, Dr., und **Marischler Julius**, Dr., Stoffwechsel bei abnehmendem und zunehmendem Ascites. — Aus der internen Klinik Prof. Anton Glusiński in Lemberg. V/1. 1—15.

Prymak Theodor, Beiträge zur Geschichte der Entwickelung und Involution der Thymusdrüse bei den Knochenfischen. (Institut der vergleichenden Anatomie der k. k. Universität in Lemberg). VII/2. 1—26. Mit 1 Tafel.

—, Ein Beitrag zur Kenntnis der Thymusdrüse bei den Knochenfischen mit Berücksichtigung der Ganoiden und Cyclostomen. — (Institut der vergleichenden Anatomie der k. k. Universität in Lemberg). VIII/2. 1—11.

Puluj Johann Prof. Dr., Apparat zur Messung der Phasendifferenz bei Wechselströmen und einige mit seiner Hilfe durchgeführte Messungen. **Sap.** III. 1—23.

—, Eine gefahrlose Telephonstation (mit terminologischem Anhang). VI/1. 1—7. (Mit 2 Tafeln).

—, Elektrizitätswerk Hohenfurth der Firma Ignaz Spiro u. Söhne in Krummau. X. 1—35. (Mit 16 Tafeln).

—, Kreisdiagramm für Wechselstromgeneratoren. X. 1—24.

Rakovškyj Johann, Dr., Beitrag zur Kenntnis des Baues des Darmkanals bei der Blutegel. **Sap.** IX. 1—6 (mit einer Tafel).

—, Beitrag zur vergleichenden Anatomie der Blutgefässe der Würmer. I. 1—14. (Mit 1 Tafel).

—, Bronislavia Radziszewskii Neue Gattung und neue Art aus der Familie der Gammariden. VIII/2. 1—14. (Mit 4 Tafeln).

Rudnyckyj Stefan, Dr., Beiträge zur Morphologie des karpatischen Dniestergebietes. (Mit einem deutschen Résumé). X. 1—83. (Résumé 84—85); XI. 1—77, 80. (Résumé 78—79).

—, Die physische Geographie am Ende des XIX. Jahrhunderts. (Wissenschaftliche Chronik für die Jahre 1898, 1899, 1900). IX. 1—116.

—, Neueste Erscheinungen zur Geographie der Ukraine. X. 1—17.

—, Über Sonnenflecken. Erster Teil, VII/1. 1—27. Zweiter Teil, VII/2. 1—90.

Selškyj Felix, Dr., Streitfragen über die Retroflexio uteri. IV/1. 1—16.

—, Zur Mechanik der normalen und pathologichen Lageveränderung der Gebärmutter. I. 1—14.

Solowij Adam, Dr., Ein Beitrag zur Uterusruptur. Aus der geburtshilflichen Klinik Prof Čyževič in Lemberg IV/1. 1—7.

Stefanovyč Emilian, Reduktion der elliptischen Integrale. XI. 1—14.

Sydorjak Simeon, Über das anatomische Verhältniss zwischen dem Gehörapparate und der Schwimmblase bei den Cypriniden und bei den Cobitiden. VI/1. 1—50. (Mit 4 lithogr. Tafeln).

—, Über die in Galizien im Jahre 1897 gesammelten Myriopoda. III/2. 1—14.

Werchratškyj Johann, Arctia Caja L. in zwei Generationen. XI. 3—5.

—, Coturnix communis als Winterschläfer. XI. 1—2.

—, Dr. Johann Jachno. (Nekrolog). XI. 1—5.

—, Michael Polanškyj. (Nekrolog). X. 1—6.

—, Nachtfang der Schmetterlinge auf den Blüten der Salix caprea. III/2. 1—10.

—, Über die zur völligen Flügelentwickelung frischgeschlüpfter Lepidopteren nötige Zeitdauer. I. 1—4.

* * *, Pathologische Hodenänderungen bei einigen Infektionskrankheiten. **Sap.** VI. 1—4.

II. Materiale zur ukrainischen wissenschaftlichen Terminologie.

Horbačevškyj Johann, Dr., Bemerkungen über die chemische Terminologie. X. 1—7.

—, Terminologischer Anhang zur Arbeit: „Zur Kenntnis der Ernährung etc.“ V/2. 5. (Terminologischer Teil).

Hrabovškyj Alexander, Aus der medizinischen Volksterminologie. III/1. 7. (Terminologischer Teil).

H. J. Einiges über die (medizinische) Terminologie. III/1. 1—2. (Terminologischer Teil).

Kr. Jar. Terminologischer Auszug aus Bd. III. Heft 1. 7—13. (Terminologischer Teil).

Lewyćkyj Vladimir, Dr., Beiträge zur elektrischen und optischen Terminologie. (Postscriptum zur Arbeit „Elektromagn. Lichttheorie etc.“). II. 70—72.

—, Beiträge zur mathematischen Terminologie (postscriptum zur Arbeit: „Elliptische Mudelfunktionen). **Sap.** VII. 29—30.

—, Grundriss der chemischen Terminologie. IX. 1—12.

—, Grundriss der mathematischen Terminologie. (Elementare u. höhere Mathematik). VIII/2. 1—33.

—, Grundriss der physikalischen Terminologie. Erster Teil: Mechanik, **Sap.** XI. 1—12. — Zweiter Teil: Mechanik der Flüssigkeiten und der Gase, Wärmelehre, Meteorologie. Dritter Teil: Magnetismus, Elektrizitätslehre und Elektrotechnik, III/2. 1—13. — Vierter Teil: Akustik und Optik, Astronomie und Kosmographie. VIII/2. 1—12.

Nevestjuk Jakob, Dr., Terminologisches Material, (Buchstaben: A, B, C). III/1. 3—7. (Terminologischer Teil).

O. E., Dr., Terminologischer Auszug aus dem ganzen Heft. IV/1. 35—40. (Referate); V/1. 48—51. (Referate); V/2. 1—4. (Ter-

Kryptonymen-Verzeichnis.

Č. O. = *Černjachiwśkyj Alexander.*
H. J. und *Hr. Jar.* = *Hruškevyč Jaroslaus*, Dr.
O. E. = *Osarkevyč Eugen*, Dr.