ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСЬКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

ТОМ XV. ВИПУСК I.

ПІД РЕДАКЦІЄЮ

Дра ВОЛОДИМИРА ЛЕВИЦЬКОГО, Дра ІВАНА РАКОВСЬКОГО і Дра СТЕФАНА РУДНИЦЬКОГО.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

BAND XV. HEFT I.

REDIGIERT VON

Dr. WLADIMIR LEWYĆKYJ, Dr. IWAN RAKOWŚKYJ u. Dr. STEPHAN RUDNYĆKYJ.

У ЛЬВОВІ, 1912.

Накладом Наукового Товариства ім. Шевченка.

З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка.

ЗМІСТ.

INHALT.

Про закон бігунового дуалїзму ґеометричних творів.

написав

В. Калїцун.

(B. Kalicun. Über das Gesetz der polaren Dualität in der Geometrie.)

Часть II. (II. Teil.)

Про закон бігунового дуалїзму в просторі.

I.

1. Дана є в просторі поверхня другого степеня $F^{(2)}$ і довільна точка P.

Довільна площа α, яка переходить через точку P, перетинає дану поверхню $F^{(2)}$ після кривої II-го степеня c^2. Бігунова точки P, з огляду на ту криву c^2, нехай буде означена через p. Иньша площа α_1, переходяча через точку P, перетинає поверхню $F^{(2)}$ після кривої $C_1{}^2$, а криву C^2 в двох точках A і B. Бігунова p_1 точки P, з огляду на криву $C_1{}^2$, перейде через точку U, гармонїчно спряжену з P в ґрупі $(PUAB) = -1$, через яку переходить рівнож бігунова p, бо точки A і B є спільні для обох кривих C^2 і $C_1{}^2$. З того слїдує, що прямі p і p_1 лежать на одній площі Π.

Однак нетрудно буде доказати, що на тій площі Π лежать всі бігунові p_x точки P, з огляду на перерізи $C_x{}^2$ поверхні $F^{(2)}$ довільними площами α_x, які переходять через точку P.

Коли іменно площа α_x перетинає прямі p і p_1 в точках U_1 і U_2, а криві C^2 і $C_1{}^2$ в парах точок: C і D, E і F, то точки U_1 і U_2 є гармонїчно спряжені з точкою P в ґрупах: $(PU_1CD) = -1$, $(PU_2EF) = -1$; отже пряма p_x, яка сполучує точки U_1 і U_2, є бігуновою точки P, з огляду на криву $C_x{}^2$, бо точки C і D, E і F належать рівнож і до тої кривої $C_x{}^2$. — Так отже дїйсно пряма p_x лежить на площі Π, визначеній прямими p і p_1.

З повисшого розумованя слїдує твердженє:

„Коли сїчна площа α_x поверхнї II-го ст. $F^{(2)}$ обертає ся около своєї сталої точки P, тодї бігунова p_x тої точки P, з огляду на криву C_x^2, після якої площа α_x перетинає поверхню $F^{(2)}$, описує сталу площу Π."

Площу тую названо „бігуновою площею" точки P, з огляду на поверхню II-го степеня $F^{(2)}$.

Нетрудно однак запримітити, що:

„Бігунова площа Π точки P, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, є місцем ґеометричним точок $U, U_1, U_2, \ldots$ гармонїчно спряжених з точкою P з огляду на пари точок $A, B; C, D; \ldots$, в яких прямі, що переходять через точку P, перетинають ту поверхню $F^{(2)}$."

А позаяк точки $U, U_1, U_2, \ldots$ є одинокими точками гармонїчно спряженими з точкою P в ґрупах $(PUAB)$, $(PU_1CD), \ldots$, проте площа Π є одинокою бігуновою площею точки P, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$.

З сего слїдує, що:

„З кождою дїйсною точкою (P) простору є спряжена певна площа (Π), яка є однозначно визначена тою точкою і поверхнею II-го ст. $F^{(2)}$."

Зі свійства гармонїчної ґрупи чотирох точок дасть ся дальше легко доказати, що:

„Бігунова площа Π довільної точки P, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, є площею стичности стожка II-го ст., описаного з точки P на данїй поверхнї $F^{(2)}$."

„Бігунова площа точки в безконечности переходить через осередок поверхнї $F^{(2)}$."

„Бігунова площа точки P, що лежить на поверхнї $F^{(2)}$, сходить ся з площею стичною тої поверхнї в точцї P."

2. Виходжу тепер з заложеня, що є дана в просторі довільна площа Π і поверхня II-го степеня $F^{(2)}$.

Бігунова площа Π_1 довільної точки P_1, що лежить на площі Π, перетинає поверхню $F^{(2)}$ після кривої C_1^2, а площу Π після прямої p_1; подібно бігунова площа Π_2 иньшої точки P_2 на площі Π, перетинає поверхню $F^{(2)}$ після кривої C_2^2, площу Π після прямої p_2, а площу Π_1 після прямої d. Та послїдна пряма d перетинає криві C_1^2 і C_2^2 в двох спільних точках A і B, а площу Π в точцї U, яка є точкою пересїчи прямих p_1 і p_2. З того слїдує, що пряма d мусить перейти через точку P, гармонїчно спряжену в ґрупі $(PUAB) = -1$, а яка є бігуном прямої p_1, з огляду на криву C_1^2, як рівнож бігуном прямої p_2, з огляду на криву C_2^2.

Рівнож легко буде доказати що через тую точку переходять всі бігунові площі (Π_x) точок (P_x) площі Π, з огляду на $F^{(2)}$.

Іменно бігунова площа Π_x точки P_x, що лежать на площі Π, перетинає поверхню $F^{(2)}$ після кривої C_x^2, а бігунові площі Π_1, Π_2 точок P_1, P_2 після прямих d_1, d_2. Ті послідні перетинають криві C_x^2 і C_1^2, C_x^2 і C_2^2 в їх спільних точках C і D, E і F, а прямі p_1 і p_2 в точках U_1, U_2. Отже на прямих d_1, d_2 мусить лежати точка P, яко гармонічно спряжена з точками U_1, U_2 в ґрупах $(PU_1\,CD) = -1$, $(PU_2\,EF) = -1$.

Таким способом доказалисьмо слїдуюче твердженє:

„Бігунові площі (Π_x) всіх точок (P_x), що лежать на данїй площі Π, з огляду на поверхню II-го степеня $F^{(2)}$, переходять через одну і ту саму точку P."

Однак з тверджень попередного уступа слїдує, що спільні точки A і B кривих C_1^2 і C_2^2 є точками стичности стичних площ σ_1 і σ_2 до поверхнї $F^{(2)}$, які переходять через пряму $[P_1\,P_2] = g$. Ввиду сего площа v, яка лучить точку P з прямою g, є гармонічно спряжена з площею Π, з огляду на стичні площі σ_1 і σ_2, бо ті площі переходять через точки P, U, A, B, що творять ґрупу гармонїчну. Отже:

„Коли грана (g) двох стичних площ (σ_1 і σ_2) поверхнї II-го ст. $F^{(2)}$ порушає ся по сталій площі Π, тоді площа V гармонічно спряжена з площею Π, з огляду на пару стичних площ σ_1 і σ_2, обертає ся около сталої своєї точки P."

А що через кожду пряму g площі Π можна попровадити тільки одну площу v, яка є гармонічно спряжена з площею Π, з огляду на площі σ_1 і σ_2, проте точка P є одинокою спільною точкою всіх площ V.

Точку P названо „бігуном" площі Π, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$.

Подібно отже як через точку і поверхню II-го ст. $F^{(2)}$ є однозначно визначена бігунова площа тої точки, так і взаїмно „з кождою дійсною площею є спряжена одинока дїйсна точка, яка є докладно визначена тою площею і поверхнею $F^{(2)}$.

3. Вертаю еще раз до попередної фіґури і беру під розвагу довільну точку P_x на прямій g площі Π.

Бігунова площа Π_x тої точки, з огляду на поверхню $F^{(2)}$, мусить перейти через бігун P площі Π, з огляду на $F^{(2)}$, як рівнож через бігун P_g прямої g, з огляду на криву C^2, після якої площа Π перетинає поверхню $F^{(2)}$. Коли отже точка P_x, порушаючи ся по прямій g, описує ряд (P_x), то єї бігунова площа Π_x визначує вязку

(Π_x), що посїдає прями g_1 за вісь, яка лучить ті два сталі бігуни P і P_g. Однак звісно, що ряд *(P_x)* є проєктивний з вязкою бігунових тих точок, з огляду на криву C^2, яка то вязка не є нічим иньшим як слїдами площ Π_x на площі Π. — Отже:

„Коли точка P_x описує на прямій g ряд *(P_x)*, то еї бігунова площа Π_x, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, переходить через одну і ту саму пряму g_1 і творить вязку *(Π_x)*, яка є проєктивна з рядом *(P_x)*."

І взаїмно:

„Коли площа Π_x описує около своеї сталоЇ прямої g_1 вязку площ *(Π_x)*, то бігун P_x тої площі, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, порушає ся по сталїй прямій g і визначує ряд *(P_x)*, який є проєктивний з вязкою *(Π_x)*."

З повисших тверджень передовсїм слїдує, що „прямій *(g)*, яку уважаємо за основу ряду точок (P_x), відповідає бігуново, з огляду на поверхню $F^{(2)}$ II-го ст. иньша пряма g_1, котра становить вісь вязки *(Π_x)* бігунових площ точок P_x, з огляду на тую поверхню.

Прямі g і g_1 що в той спосіб собі відповідають названо „прямими бігуново зі собою спряженими", з огляду на поверхню II-го степ. $F^{(2)}$.

Нетрудно буде відтак провірити слїдуючі свійства прямих g і g_1 бігуново спряжених, з огляду на $F^{(2)}$:

„Коли пряма g порушає ся по площі Π, то пряма g_1, бігуново спряжена з g, з огляду на поверхню II-го степеня $F^{(2)}$, переходить через бігун P площі Π, з огляду на ту поверхню."

І взаїмно:

„Коли пряма g описує на площі Π вязку прямих о вершку P_1, то g_1 описує вязку прямих на площі Π_1, бігуновій точки P_1, якої то вязки вершком є бігун P площі Π; Обі ті вязки прямих є проєктивні".

4. Дві точки, які посїдають те свійство, що бігунова площа, з огляд на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, одної з них — переходить через другу, носять назву „с п р я ж е н и х б і г у н і в"; подібно під „д в о м а б і г у н о в о с п р я ж е н и м и п л о щ а м и", з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, належить розуміти такі дві площі, з котрих одна переходить через бігун другої.

В попереднїм відступі (3) доказано, що ряд точок P_x на прямій g є проєктивний з вязкою бігунових площ *(Π_x)* тих точок, визначених з огляду на поверхню $F^{(2)}$. З сего слїдує, що точки P'_x, в яких пробиває пряма g вязку $(\Pi_x,)$ творять ряд *(P'_x)*, проєктивний з рядом *(P_x)*. Однак легко запримітити, що точки відповідні тих рядів є спряженими бігунами, з огляду на криву C^2, після якої перетинає поверхню $F^{(2)}$ довільна площа Π, що переходить через пряму g; ті ряди мусять отже, як звісно з I части, творити інволюцию. Позаяк однак точки F_x і P'_x є спряженими бігунами рівнож і з огляду на поверхню $F^{(2)}$, а площі Π_x і Π'_x, що переходять через ті точки і пряму g_1, бігуново спряжену з прямою g, є бігуново спряженими площами, з огляду на поверхню $F^{(2)}$, проте з повисшого розумованя слїдують твердженя:

„Всї пари спряжених бігунів, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, що лежать на тій самій прямій g, творять ряд інволюцийний, якого подвійними точками є точки пересїчи тої прямої з поверхнею $F^{(2)}$."

I взаїмно:

„Всї пари бігуново спряжених площ, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, переходячих через ту саму пряму g_1, творять вязку інволюцийну, якої подвійними площами є стичні площі до $F^{(2)}$, поведені через пряму g_1."

„Коли прямі g і g_1 є зі собою бігуново спряжені, з огляду на $F^{(2)}$, тодї інволюцийний ряд спряжених бігунів на одній з них є перспективічний з вязкою бігуново спряжених площ, переходячих через другу."

5. Повисші сполученя між просторними елементами і їх творами I-го ст. становлять основне свійство „закона бігунового дуалїзму в просторі."

Після того закона:

„Просторному системови Σ, який складає ся з точок — яко вершків вязок (P), — з прямих — яко основ рядів точок (g) або осий вязок площ (l) — і з площ — яко основ плоских системів (Π) — відповідає бігуново дуалїстично, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, иньший просторний систем Σ, котрий складає ся з площ — яко основ плоских системів, відповідаючих бігуново вязкам (P), — з прямих — яко осий вязок площ проективних з рядами (g) або основ рядів проективних з вязками (l), — і з точок яко вершків вязок, бігуново спряжених з плоскими системами (Π)," — при чім:

„Кождому твердженю, кождій дефінїциї, конструкциї або завданю, в яких виступають певні сполученя і свійства метові між елементами системи Σ, відповідає иньше твердженє, иньша дефінїция, конструкция або задача о сполученях і свійствах метових між елементами системи Σ_1, які слїдують з перших, коли поміняємо понятя: — точка — і площа; ділання: — перетинати — і — лучити, а полишимо однаковож незміненими понятя: прямої перспективічного положеня і відношеня подвійного поділу."

Системи Σ і Σ_1, що в той спосіб собі відповідають, названо „системами бігуново спряженими", з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, яку знов названо „провідною бігунового дуалізму."

6а) Нехай отже точка P в системі Σ, яка порушає ся після певного закона, описує криву просторну C.

Що дві безпосередно по собі слідуючі точки тої кривої визначують єї стичні, які з причини неперерваного наслідства творять поверхню розвивну Π_r, описану на кривій C; що дві безпосередно по собі слідуючі стичні перетинають ся в точці тої кривої, визначаючи площу (α), яка є стичною до розвивної поверхні Π_r, а рівночасно тісно-стичною до кривої C. — Неперерваному наслідству точок P в системі Σ відповідає в системі Σ_1, бігуново спряженім з Σ, неперерване наслідство єго бігунової площі Π, яка обвиває поверхню розвивну Π_r'. Що дві безпосередно по собі слідуючі стичні площі визначають творячі тої поверхні, які відповідають бігуново стичним кривої C, а що дві безпосередно по собі слідуючі творячі тої поверхні визначають точки кривої звороту C', які відповідають бігуново тісно-стичним площам кривої C.

Отже:

„Кривій просторній C і на ній описаній поверхні розвивній Π_r відповідає бігуново дуалістично поверхня розвивна Π'_r і єї крива звороту C'. — "

„Коли крива C є $m^{\text{-го}}$ ряду $n^{\text{-ої}}$ кляси $r^{\text{-го}}$ степеня, тоді з довільної точки можна попровадити m площ стичних до поверхні Π'_r, отже m площ тісно-стичних до кривої C', довільна площа перетинала-би криву звороту C' в n точках, а довільна пряма перетинала-би r творячих поверхні Π_r' — отже r стичних кривої C'. Крива C' є отже ряду $n^{\text{-го}}$ кляси $m^{\text{-ої}}$ степеня $r^{\text{-го}}$."

Коли крива C є плоскою, тоді всї бігунові площі єї точок переходять через бігун площі тої кривої і обвивають стіжок (σ). Творячі того стіжка є бігуново спряжені зі стичними кривої C, а крива звороту (C') редукує ся до вершка того стіжка.

„Коли плоска крива C є ряду $m^{\text{-го}}$ кляси $n^{\text{-ої}}$, то стіжок σ, бігуново з нею спряжений, з огляду на поверхню II. ст., є кляси $m^{\text{-ої}}$ ряду $n^{\text{-го}}$."

6б) З повисших розважань слідує, що:

„Коли крива просторна C, що порушає ся після певного закона, творить поверхню Π, то поверхня розвивна Π'_r, бігуново з C спряжена, обвиває поверхню Π', яка відповідає бігуново дуалістично поверхні Π.“

Поверхні Π і Π' є зі собою в той спосіб спряжені, що:

„Кождій точці і стичній площі в тій точці одної поверхні — відповідають бігуново дуалістично стичні площі і їх точки стичности другої поверхні.“

Ввиду сего легко запримітити, що:

„Коли поверхня Π є ряду $m^{\text{-го}}$ кляси $n^{\text{-ої}}$, то поверхня Π' з нею бігуново спряжена є кляси $m^{\text{-ої}}$ ряду $n^{\text{-го}}$.“

Іменно m точкам, в яких довільна пряма l перетинає поверхню Π, відповідає m площ стичних, поведених через пряму l', бігуново спряжену з l, до поверхні Π'; n площам стичним, поведеним через довільну пряму q до поверхні Π відповідає n точок пересїчи прямої q', бігуново спряженої з q, з поверхнею Π'.

6в) Приймім під розвагу дві поверхні Π і Π_1, які належать до системи Σ; перша з них нехай буде ряду $m^{\text{-го}}$ кляси $n^{\text{-ої}}$, а друга ряду $q^{\text{-го}}$ кляси $p^{\text{-ої}}$; то тим поверхням відповідають бігуново в системі Σ' дві иньші поверхні Π' і Π'_1, з яких перша є кляси $m^{\text{-ої}}$ ряду $n^{\text{-го}}$, а друга кляси $q^{\text{-ої}}$ ряду $p^{\text{-го}}$, — при чім легко запримітити, що:

1^0 „Кривій пересїчи поверхні Π і Π_1, яка є ряду $m.q^{\text{-го}}$, відповідає поверхня розвивна (Π_r), описана на бігунових поверхнях Π' і Π'_1; та поверхня є отже кляси $mq^{\text{-ої}}$ [1])“.

І взаїмно:

2^0 „Поверхня розвивна описана на обох поверхнях Π і Π_1 відповідає бігуново дуалїстично кривій пересїчи поверхний Π' і Π_1', є отже кляси $n.p^{\text{-ої}}$.“

3^0 „Коли поверхні Π і Π_1 стикають ся в певній точцї і посїдають в тій точці спільну площу стичности, тодї їх бігунові поверхні Π' і Π'_1 стикають ся рівнож в одній точцї і посїдають в нїй спільну стичну площу; єсли-би отже перші поверхні стикали ся вздовж певної кривої, тодї їх поверхні бігунові стикали-би ся рівнож вздовж певної кривої.“

4^0 „З вязкою поверхний, які переходять через криву пересїчи поверхний Π і Π_1, є бігунково дуалїстично спряжена громада по-

---

[1]) Cremona-Kurtze. Oberfläche... ст. 21.

верхний, вписаних в поверхню розвивну, яка є описана на поверхнях Π' і Π'_1."

Нехай в данім случаю будуть дані в системі Σ дві поверхні II-го степеня Π^2 і $\Pi_1{}^2$; то поверхні (Π'^2 і $\Pi'_1{}^2$), що відповідають їм бігуново дуалїстично, з огляду на поверхню провідну $F^{(2)}$, є рівнож II-го степеня; отже їх крива пересїчи є ряду IV-го кляси 12-ої ($C^4{}_{12}$). Та крива відповідає бігуново розвивній поверхні ($\Pi_4{}^r$), описаній на перших двох поверхнях, поверхня $\Pi^r{}_4$ є отже кляси 4-ої ряду XII-го. Звісно однак, що через ту криву C^4 можна повести чотири стіжкові поверхні II-го степеня, яких вершки сходять ся з вершками спільного чотиростїнника бігунового обох поверхний Π'^2 і $\Pi'_1{}^2$. Тим чотиром стіжкам відповідають в системі Σ чотири криві II-го степеня, після яких перетинає ся сама зі собою розвивна поверхня $\Pi^r{}_4$; ті криві мусять отже лежати на стїнах спільного чотиростїнника бігунового обох поверхний Π^2 і $\Pi_1{}^2$.

Тим способом доходимо до знаного твердженя:

„Крива власної пересїчи розвивної поверхнї описаної на двох поверхнях II-го степеня складає ся з чотирох кривих II-го степ., що лежать на стїнах спільного чотиростїнника бігунового обох тих поверхний."

6г) Повисші розумованя доказують, що бігуновий дуалїзм в просторі є загальною методою трансформацийною всїх сполучень і метових свійств ґеометричних утворів, до яких належать всї начеркові свійства тих утворів і сполученя взаїмного положеня їх елементів, що є зависимі від відношеня подвійного подїлу.

Коли ми хочемо троха розширити обсяг приміненя тої методи до сполучень метричних, приймаємо за поверхню провідну бігунового дуалїзму кулю або параболоїд, — подібно як то робилисьмо на площі, де принималисьмо за провідну бігунового дуалїзму коло або параболю.

7а) Нетрудно запримітити, що бігунова площа довільної точки, в віднесеню до кулї K, є прямовісна до проміру тої кулї, який переходить через сесю точку. З того відтак слїдує, що дві прямі бігуново зі собою спряжені, в віднесеню до кулї, є до себе прямовісні і кожда з них лежить на діяметральній площі, прямовісній до другої.

Коли возьмемо під розвагу дві площі Π і Π_1, то бігуни P і P' тих площ, з огляду на кулю K, лежать на промірах прямовісних до тих площ, отже замикають они кут, який є сповненем до 180° кута, замкненого даними площами. Подібно кут, який замикають дві перетинаючі ся прямі m і n, є сповненем кута, замкненого діяметральними площами, які переходять через прямі m' і n' бігуново спряжені з m і n.

З сего заключаємо, що:

„Коли дві просторні фіґури є зі собою бігуново спряжені, в віднесеню до кулї K, а між величинами кутів одної з них заходить певне получене, то подібне получене заходить між кутами, утвореними около осередка провідної кулї (K) промірами або площами діяметральними, яких напрями переходять через бігуни стїн зглядно бігунові боків перших кутів.“

7б) Нехай буде дана провідна куля K і иньша довільна куля K_1.

Кожда площа, що переходять через осередок обох куль, перетинає першу з них після кола k, а другу після кола k_1 — так, що бігунова кола k_1, в віднесеню до k, є кривою II-го степеня, яка має огнище в осередку кола k, а за провідну, приналежну до сего огнища, бігунову осередка кола k_1, з огляду на коло k[1]).

Ввиду сего зі симетричности обох куль слїдує, що:

„Кулї K_1 відповідає бігуново, з огляду на иньшу кулю K, оборотова поверхня II-го степеня (S), яка посїдає одно огнище в осередку провідної кулї K і має за провідну площу сего огнища бігунову площу осередка кулї K_1. — Поверхня S є елїпсоїдом, гіпербольоїдом двоповолоковим або парабольоїдом еліптичним, — залежить від сего, чи осередок провідної кулї лежить на вні, в нутрі або на самій поверхнї даної кулї K_1.“

З повисшого твердженя слїдує, що:

„Розличні свійства кутів у куль можна перемінити на свійства кутів, приналежних до спільного огнища оборотових поверхний II-го степеня.“

Трансформация метричних сполучень при помочи парабольоїда яко провідної поверхнї бігунового дуалїзму полягає на слїдуючім свійстві:

„Бігунові площі двох довільних точок, з огляду на парабольоїд, визначують на єго оси довжину, яка є рівна величинї прямокутного мета на ту вісь довжини, що сполучує дані точки.“

[Доказ сего свійства і єго інтерпретация є анальоґічні до тих, які знаходять ся в I-ій части ст. 12, проте їх полишаю].

II.

1. Часто два системи в просторі Σ і Σ', бігуново зі собою спряжені, з огляду на поверхню II го ст. $F^{(2)}$, уважаємо за один,

[1]) Порівнай I. часть ст. 11.

називаючи его „**бігуновим системом**“ (Σ) провідної поверхні $F^{(2)}$.

Хочу в отсїм роздїлї доказати, що основні свійства сего бігунового системи (Σ), які представилисьмо в попереднім розділі, істнують независимо від его провідної поверхні $F^{(2)}$.

В тій цїли возьмім під увагу в системі бігуновім Σ, визначенім, з огляду на поверхню II-го степеня $F^{(2)}$, певний чотиростїнник $ABCD$, який посїдає те свійство, що его вершки є бігунами протилежних стїн, а взаїмно стїни є бігуновими площами протилежних вершків, — а крім сего довільну точку E і еї бігунову площу ε — і усуньмо на хвилю з нашої уяви провідну $F^{(2)}$ того системи.

Пари протилежних гран сего чотиростїнника є спряженими бігуновими, пари вершків лежачих на тих гранах — є спряженими бігунами, — а пари стїн переходячих через них, є бігуново спряженими площами даного бігунового системи. Отже вершки A, B даного чотиростїнника, які лежать на грани $AB \equiv s$, становлять одну пару відповідних точок інволюцийного ряду спряжених бігунів, який то ряд приналежить в данім системі Σ до прямої $\cdot s \cdot$. Коли хочемо визначити другу пару точок тої інволюциї, то мусимо пошукати точок пересїчи прямої s з площею ε і площею $[s_1, E]$, яка сполучує бігун E площі ε з прямою $s_1 \equiv CD$. Сими двома парами точок є інволюцийний ряд спряжених бігунів на прямій s докладно визначений.

Тим самим способом, незалежно від поверхні $F^{(2)}$, дадуть ся визначити інволюциї спряжених бігунів на иньших гранах чотиростїнника $ABCD$, а тим самим інволюцийні вязки бігуново-спряжених площ, яких осями є ті грани, а відтак бігунові системи на его стїнах і бігунові снопи (жмути) в его вершках.

Коли хочемо в той сам спосіб, без помочи провідної поверхнї $F^{(2)}$, визначити бігун довільної площі Π, мусимо повести прямі a і d, після яких та площа перетинає дві протилежні стїни $BCD \equiv \alpha$, $BCA \equiv \delta$ даного чотиростїнника. Коли прямим тим (a, d) відповідають в бігунових системах плоских на площах α і δ бігуни A_1 і D_1, то прямі, які сполучують ті точки відповідно з бігунами площ α і δ [с. є. з точками A і D], є бігуново спряжені відповідно з прямими a, d в бігуновім системі Σ. А позаяк прямі a, d лежать на одній площі Π, проте прямі $\overline{AA_1}$, $\overline{DD_1}$ лежать рівнож на одній площі і перетинають ся в точці P, яка є бігуном даної площі Π. Бо через сю точку, як легко запримітити, переходять всї пари прямих, бігуново спряжених в системі Σ з прямими, після яких дана площа Π перетинає всї противлежні стїни чотиростїнника $ABCD$.

При помочи відворотної конструкциї дасть ся визначити для довільної точки P єї бігунова площа, а відтак для довільної прямої g — з нею бігуново спряжена пряма g_1 — враз з приналежною до неї інволюцсєю спряжених бігунів зглядно бігуново спряжених площ, отже цїлий бігуновий систем Σ.

Проте з повисших розумовань слїдує:

„Бігуновий систем (Σ) в просторі буде визначений, коли в довільно принятім чотиростїннику ($ABCD$) взаїмно спряжемо вершки з протилежними стїнами — яко бігуни і бігунові площі, — а крім сего приймемо довільну точку (E) і площу (ε) за бігун і відповідаючу єму бігунову площу.“

2. Чотиростїнник $ABCD$ названо „бігуновим чотиростїнником“ даного бігунового системy (Σ); інволюциї спряжених бігунів на єго гранах [як рівнож інволюциї бігуново-спряжених площ, переходячих через ті грани] — є зависимим від принятя точки E і єго бігунової площі є. — Коли примінимо до бігунових системів плоских на стїнах того чотиростїнника твердженя з I части на сторонї 16 і 17, то буде можна легко запримітити, що слїдує:

1⁰ „Коли на однїй парі протилежних гран бігунового чотиростїнника інволюциї спряжених бігунів є рівноіменні, то мусять бути рівноіменні ті інволюциї і на двох иньших парах протилежних гран. А именно можуть они тодї бути: а) на всїх парах протилежних гран — еліптичні, в) на однїй парі еліптичні, а на двох иньших — гіперболїчні.“

2⁰ „Коли на однїй парі протилежних гран бігунового чотиростїнника інволюциї спряжених бігунів є ріжноіменні, тодї мусять они бути ріжноіменні і на иньших парах протилежних гран, так, що маємо взагалї три інволюциї еліптичні і три гіперболїчні.“

Хотїлибисьмо однак доказати, що:

„Всї бігунові чотиростїнники, які виступають в певнім бігуновім системі, можуть бути тілько одного з повисших родів.“

І дійсно, нехай прямі s, s_1 будуть одною парою, а прямі t, t_1 другою довільною парою спряжених бігунових в данім бігуновім системі Σ; то з довільної точки P в просторі можна повести тілько одну таку пряму, що перетинає рівночасно обі прямі s і s_1 — в точках A і A_1, — як рівнож тілько одну таку пряму, що перетинає рівночасно обі прямі t і t_1 — в точках B і B_1. Коли відтак точки A', A'_1; B', B'_1 будуть відповідно спряжені з точками A, A_1; B' B_1 в інволюциях спряжених бігунів, які приналежать до прямих

s, s_1; t, t_1 в данім бігуновім системі Σ, тодї прямі $\overline{AA_1}$ і $\overline{A'A'_1}$, $\overline{BB_1}$ і $\overline{B'B'_1}$ є зі собою бігуново спряжені, а точки AA_1 $A'A'_1$ є вершками одного бігунового чотиростїнника, а точки BB_1 $B'B'_1$ другого. Позаяк прямі $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ лежать на однїй площі, проте прямі $\overline{A'A'_1}$, $\overline{B'B'_1}$ мусять рівнож лежати на однїй площі (Π), а їх точка пересїчи (P') є бігуном площі Π', на якій лежать попередні прямі $[\overline{AA_1}, \overline{BB_1}]$, подібно як точка P є бігуном площі Π', визначеноЇ прямими $\overline{A'A'_1}, \overline{B'B'_1}$. З сего слїдує, що грана $[\Pi\Pi^1] \equiv r_1$ тих площ є бігуново спряжена з прямою $\overline{PP'} \equiv r$, яка сполучує точки P і P'; ті отже прямі (r, r_1) перетинають так бігуново спряжені $\overline{AA_1}$ і $\overline{A'A'_1}$, — як рівнож бігуново спряжені $\overline{BB_1}$ і $\overline{B'B'_1}$. Нетрудно однак запримітити, що коли одна пара спряжених бігунових перетинає другу пару спряжених бігунових, тодї ті дві пари становлять протилежні грани бігунового чотиростїнника. На підставі отже повисше розважаного свійства бігунового чотиростїнника мусять інволюциї на прямих $\overline{AA_1}$ і $\overline{BB_1}$ посїдати такий сам характер як на s і s_1, отже як і на спряжених бігунових r і r_1; так само інволюциї на прямих t, t_1; $\overline{BB_1}$, $\overline{B'B'_1}$ посїдають такий сам характер як інволюциї на r і r_1; ввиду сего рід інволюций на спряжених бігунових s, s_1 є згідний з родом тих-же на спряжених бігунових t і t_1. А що прямі s, s_1; t, t_1 є довільно принятими парами бігунових спряжених в данім бігуновім системі, проте бачимо, що:

„Інволюциї спряжених бігунів [зглядно бігуново спряжених площ] на всїх парах бігуново спряжених прямих — є або всї рівноіменні (обі еліптичні або обі гіперболїчні) або всї ріжноіменні одна еліптична, друга гіперболїчна)“. — Се власне доказує, що певний бігуновий систем може посїдати бігунові чотиростїнники тільки одного з трьох родів, які ми вичислили на сторонї 20 і 21.

Ввиду сего дадуть ся розріжнити три роди бігунових системів в просторі:

„*A*) Бігуновий систем, що посїдає тілько такі бігунові чотиростїнники, у яких на однїй парі протилежних гран є інволюциї спряжених бігунів елїптичні, а на двох иньших парах гіперболїчні.“

„*Б*) Бігуновий систем, що посїдає самі бігунові чотиростїнники, у яких кожда пара протилежних гран посїдає ріжні інволюциї спряжених бігунів, одну еліптичну і одну гіперболїчну.“

„*В*) Бігуновий систем, що посїдає самі бігунові чотиростїнники, у яких всї грани є основами елїптичних інволюций спряжених бігунів.“

3. Нетрудно буде доказати, що:

„Місцем ґеометричним подвійних точок інволюцийних рядів спряжених бігунів є: в бігуновім системі *А*) поверхня II-го степеня просточертна, в системі *Б*) поверхня II-го ст. кривочертна, а в системі *В*) поверхня II-го ст. мнима.“

„Поверхнї ті посїдають те свійство, що бігунові площі їх точок є площами стичними в тих-же точках; проте поверхнї ті можна уважати за обвіднї подвійних площ інволюцийних вязок бігуново спряжених площ.“

Коли іменно в бігуновім системі *А*) возьмемо під розвагу пару прямих бігуново спряжених s і s_1, на яких інволюцийні ряди спряжених бігунів є гіперболїчні о подвійних точках F і F' зглядно F_1 і F'_1, то нетрудно буде можна запримітити, що пряма $\overline{FF_1} \equiv l$ є сама зі собою бігуново спряжена [с. з. площі бігунові всїх єї точок переходять через її саму]. Бо іменно бігунова площа точки F переходить через її саму і через пряму s_1, так само бігунова площа точки F_1 переходить через ту точку F_1 і пряму s. Отже грана тих двох площ сходить ся з прямою, яка сполучує точки F і F_1. — З тих самих причин є рівнож самі зі собою спряжені прямі: $\overline{FF'_1} \equiv l_1$, $\overline{F'F_1} \equiv g_1$, $\overline{F'F'_1} \equiv g$.

Дальші прямі самі зі собою бігуново спряжені в бігуновім системі *А*) дадуть ся визначити в слїдуючий спосіб:

Коли довільна пряма s_x перетинає винайдені прямі l і l_1 самі зі собою бігуново спряжені в точках X і Y_1, то бігун Y площі $[Y_1\ l]$ мусить лежати на прямій l і є точкою пересїчи тої прямої з прямою s'_x бігуново спряженою з прямою s_x; так само бігун площі $[y\ l_1]$ сходить ся з точкою Y_1, яка є точкою пересїчи прямої l_1 з прямою s_x. З сего слїдує, що грана тих площ, се є пряма $\overline{YY_1}$ є сама зі собою бігуново спряжена. Коли площа $[l\ Y_1]$ обертає ся около прямої l і описує вязку площ, тоді єї бігун Y описує ряд (Y) на прямій l, який є проєктивний з тою вязкою площ, отже і з рядом (Y_1). З сего слїдує, що пряма $\overline{YY_1}$ сама зі собою бігуново спряжена сполучує відповідні точки проєктивних рядів (Y) і (Y_1), се значить ся: они є гранами відповідних елементів двох проєктивних вязок $[l\ Y_1]$ і $[l_1\ Y]$, творять отже просточертну поверхню

II-го ст. $F^{(2)}$, що малисьмо як-раз для бігунового системи A) доказати.

З повисшого розумованя слїдує рівнож, що та поверхня $F^{(2)}$, є обвіднею подвійних елементів вязок бігуново спряжених площ сего бігунового системи.

Що тичить ся бігунового системи $Б$), то в нїм кожда пара бігуновоспряжених прямих має ріжні інволюциї бігунів спряжених, а іменно на однїй прямій та інволюция є еліптична, а на другій гіперболїчна, при чім перша з тих прямих є осию інволюцийної вязки гіперболічної бігуново спряжених площ, а друга інволюцийної вязки еліптичної таких-же площ. — З сего слїдує, що так поверхня утворена подвійними точками інволюцийних рядів бігунів спряжених, як рівнож поверхня обвинена подвійними площами вязок інволюцийних бігуново спряжених площ, — є II-го степеня. Позістає тілько доказати що ті поверхнї є ідентичні і кривочертні.

Нехай отже s_e і s_p будуть парами бігуново спряжених прямих, а F і F' точками подвійними інволюцийного ряду гіперболїчного бігунів спряжених на s_p, то площа $[s_e F] \equiv \Pi_r$ є бігуновою точки F, а рівночасно подвійною площею вязки бігуново спряжених площ о оси s_e. Всї прямі, які переходять через F є основами гіперболічно-інволюцийних рядів спряжених бігунів, які мають одну подвійну точку в F, а другу в другій точцї пересїчи з шуканою поверхнею. Прямі бігуново спряжені з сими прямими творять площу Π_t, яка посїдає інволюцийні ряди спряжених бігунів — тілько елїптичні, наслідком чого площа Π_t, крім точки F, не може посїдати більше дійсних точок спільних з поверхнею, що утворена подвійними точками інволюцийних рядів бігунів спряжених. Ся площа є стичною до згаданої поверхнї в точцї F. — Вязка інволюцийна спряжених бігунових, які переходять через F і лежать на площі Π_t, будучи перспективою еліптично-інволюцийною ряду спряжених бігунів на прямій s_e, є рівнож елїптична, а єї подвійні прямі мнимі представляють прямі, після яких площа Π_t перетинає дану поверхню.

А позаяк так само річ має ся з кождою подвійною точкою (F) гіперболїчно-інволюцийних рядів (s_p) спряжених бігунів і з єї бігуновою площею, проте дійсно, поверхня, утворена через ті подвійні точки є ідентичною з поверхнею, обвиненою подвійними площами інволюцийних вязок бігуново-спряжених площ — і є кривочертна.

В бігуновім системі $В$) всї точки, котрих бігунові площі через них переходять, — є мнимі; подібно є мнимі всї площі, яких бігуни лежать на них самих. А так як на кождій прямій є такі дві мнимі точки, як рівнож кожда пряма є осию двох таких мнимих площ, тому творять они мниму поверхню II-го степеня.

Нетрудно вичитати рівнож з повисших фіґур, що бігунові системи повисших поверхней є ідентичні з бігуновими системами щойно розслїджуваними, — так, що сї поверхнї є провідними тихже системів.

Замітка: Особлива точка (M) бігунового системуу Σ, що є бігуном площі в безконечности, є осередком сего системуу; площі і прямі, що переходять через точку M, зовемо дїяметральними площами зглядно промірами того системуу.

Дїяметральні площі, які є головними площами бігунової вязки, приналежної до осередка M в тім бігуновім системі Σ, є рівнож головними площами того системуу (Σ).

III.

1. На особливу увагу заслугують в бігуновім системі просторнім Σ такі пари бігуново спряжених прямих, що є до себе прямовісні. Загал всїх пар тих прямих носить назву „комплексу осий" бігунового системуу Σ і єго провідної поверхнї $F^{(2)}$; комплекс сей відповідає бігуново в данім бігуновім системі Σ — сам собі.

Коли дві прямі e і e_1 бігуново зі собою спряжені в бігуновім системі Σ є до себе прямовісні, тодї через e_1 переходить одна тільки площа ε прямовісна до e, а її бігун E містить ся на e

Пряму e названо „осию спряженою" з площею ε, точку E її „бігуном", точку $[e\,\varepsilon]$ її „основою", а площу ε „нормальною площею спряженою з осию e."

Кожда вісь e комплексу посїдає тільки один бігун E і одну спряжену з нею площу нормальну ε. Виїмок становлять головні оси бігунового системуу Σ, які мають безконечне число бігунів і тількож спряжених нормальних площ. Таксамо кожда площа ε посїдає тільки одну з нею спряжену вісь -e-, через яку переходять всї площі бігуново спряжені з ε і до неї прямовісні; однак для головної площі системуу Σ є всї до неї прямовісні прямі — її спряженими осями. — Безконечно далека площа має за спряжені оси всї проміри бігунового системуу Σ. — Ввиду сего нетрудно запримітити, що:

„До комплексу осий певного бігунового системуу (Σ) і єго провідної поверхнї $F^{(2)}$ зачисляємо: головні оси всїх бігунових системів плоских і бігунових вязок того системуу Σ, всї нормальні і проміри провідної поверхні $F^{(2)}$, прямі безконечно далекі і всї прямі, що є прямовісні до головних площ або лежать на сих послїдних.“

З сего слїдує між иньшим, що: „Довільна точка P в просторі є бігуном одної оси, а взагалї основою трьох осий, що перетинають ся прямовісно.“

Ті три оси є головними осями бігунової вязки, яка приналежить до точки P в бігуновім системі Σ. Коли точка P лежить на провідній поверхні $F^{(2)}$, тодї її нормальна в P є одною з тих трьох осий, а дві иньші є прямими нормальними інволюцийної вязки спряжених стичних поверхні $F^{(2)}$ в тій точцї P. Єсли та інволюция є прямокутна або єсли бігунова вязка в точцї P є оборотова, і має оборотовий стіжок за провідну, тодї крім нормальної вглядно оси обороту виступає вязка прямих, для яких точка P є основою.

2. Всї площі, бігуново спряжені з певною площею ε і до неї прямовісні, переходять через її вісь e; в тих площах лежать оси, спряжені з осями, які містять ся на площі ε. А що ті послїдні, як звісно з I части ст. 18, обвивають параболю, а на кождій площі вязки (e) переходить через бігун E площі ε по дві прямі бігуново спряжені і до себе нормальні, проте легко буде можна справдити слїдуюче твердженє:

1^0 „Оси бігунового систему Σ, який лежить на певній площі ε, обвивають параболю, котра дотикає головних площ того системy. Нормальні площі, спряжені з тими осями, переходять через вісь e, спряжену з площею ε, а їх бігуни лежать на прямій e_1, бігуново спряженій з e, а яка є стичною до сеї параболї. Що найбільше дві з тих осий є нормальними провідної поверхні $F^{(2)}$, іменно в точках, в яких її e_1 перетинає.“

2^0 Оси бігунового системy Σ, яка переходять через точку E, творять взагалї рівнобічний стіжок II-го степ., котрий має один промір бігунового системy і по однїй нормальній до кождої головної площі того системy. Позаяк що дві з тих осий перетинають ся в точцї E, проте їх бігуни лежать по два на щораз-то иньшій оси. Місцем ґеометричним тих бігунів є проте крива просторна (перехрестна) III-го степеня, якої тятиви є осями, а після якої перетинають ся що два повисші рівнобічні стіжки. Ся крива переходить через точку E, бігуни головних площ і осередок системy і через такі точки провідної поверхні $F^{(2)}$, в яких нормальні до $F^{(2)}$ переходять через точку E.“

Нетрудно рівнож запримітити, що: „Всї оси, які лежать на діяметральній площі бігунового системy Σ, творять вязку промірів і вязку рівнобіжних прямих; і взаїмно: всї оси, які мають той сам напрям, лежать на однїй діяметральній площі системи Σ.“

Коли іменно Π є площею діяметральною, тодї єї бігун P лежить в безконечности на промірі з нею спряженім. Прямі рівнобіжні, поведені в площі Π прямовісно до того напряму, є осями бігунового системи Σ, а так само прямі з ними бігуново спряжені, що переходять через P і творять другу діяметральну площу. З сего рівночасно слїдує:

1⁰ „Оси, що переходять через дві точки проміру, є парами рівнобіжні; оба стіжки, до яких они належать, стикають ся вздовж того проміру і переходять через той сам безконечно далекий переріз стіжковий“.

2⁰ „Всї параболї, обвинені через оси, які лежать в рівнобіжних площах, є перерізами одного і того самого стіжка, якого творячі є промірами бігунового системи Σ.“

3. Кожда пряма, поведена через P на головній площі $-\alpha-$ системи бігунового Σ, є осию того системи, проте стіжок, на якім лежать всї оси, що переходять через точку P, розпадає ся на дві плоскі вязки прямих. Коли отже e_x буде довільною осию, яка перетинає площу $-\alpha-$ в точцї P під кутом острим, тодї друга вісь тої вязки буде лежати на площі, якою мечемо прямовісно ту вісь на площу α. Бо в тій площі лежать крім e_x єще дві оси, а іменно слїд тої площі на площі α і прямовісна до α в точцї P.

Отже:

„Всї оси, які переходять через певну точку P головної площі α, творять дві вязки I-го ряду, з яких одна лежить в α, а друга в площі прямовісній до α. Бігуни сеї послїдної вязки лежать на прямій мрямовісній до α.“

Рівночасно маємо тверджене:

„Коли пряма $-n-$ є прямовісна до головної площі α, то всї оси, які перетинають пряму n, творять стіжки II-го ст., котрих вершки знаходять ся на прямій n, а які посїдають з площею α спільну рівнобічну гіперболю.“

Іменно, котрийнебудь з повисших стіжків перетинає ся з площею α після рівнобічної гіперболї, яка переходить через точку $[n\ \alpha]$ і осередок бігунового системи Σ, а якої одна асимптота є рівнобіжна, друга прямовісна до иньшої головної площі (β). Однак після попередного твердження кожда пряма, яка сполучує певну точку тої гіперболї з довільною точкою прямої $-u-$ є осию бігунового системи Σ.

Коли площа ε обертає ся наоколо свого слїду на головній площі α, тодї пароболя, обвинена осями, що на нїй находять ся, описує параболїчний валец, прямовісний до площі α; бо кожда стична тоЇ параболї описує около своєЇ точки пересїчи з площею α вязку осий, якої площа є прямовісна до α. Отже:

„Оси, що перетинають певну пряму g, лежачу на головній площі α, обвивають в загалї параболїчний цилїндер, прямовісний до α. Коли однак пряма g є прямовісна до другої головної площі β, тодї ті оси перетинають пряму g_1, яка лежить на площі β і прямовісну до α."

4. Повисші розумованя доказують, що:

„Комплекс осий є визначений, скоро є дані єго головні площі і одна єго вісь (e)."

Однак з твердженя на ст. 19 і 20 слїдує, що через головні площі, довільну точку E на оси e, приняту за бігун довільноЇ площі ε, прямовісної до e, буде бігуновий систем в просторі докладно визначений, який посїдає той сам комплекс осий. А що так точка E як рівнож слЇд $[e\,\varepsilon]$ можуть на прямій e заняти безконечно много положень, проте слїдує:

„Істнує ∞^2 бігунових системів співосевих і стілько співосевих поверхний II-го ст., що посїдають той сам комплекс осий."

5. Нехай в бігуновім системі Σ буде дана довільна площа ε, єї бігун E і з нею спряжена нормальна e (вісь). Коли грану площі ε і площі головної α системи Σ означимо через p, а точку пересїчи оси e з тою площею α через P, то легко буде доказати, що через тую точку (P) переходять всї оси (e) спряжені з площами, переходячими через пряму p. Метаючи іменно з точки P бігуни тих площ і ведучи до них прямовісні, одержимо дві вязки прямих, проєктивні з тою вязкою площ, отже проєктивні зі собою. Однак ті дві вязки прямих мають три прямі спільні, а іменно пряму e, пряму прямовісну до площі α і пряму прямовісну до прямоЇ p, з чого слїдує, що ті дві вязки є ідентичні.

Ся вязка осий, переходячих через точку P, визначує з вязкою площ, спряжених з тими осями і переходячими через пряму p — коло. Отже:

„Основи всїх осий, які перетинають головну площу α в точцЇ P, лежать на колї, яке переходить через точку P і перетинає прямовісно пряму p, що лежить на площі α, а через яку переходять всї нормальні площі, спряжені з тими-ж осями. Коло то має свій осередок на площі α."

В подібний спосіб як з прямою p є спряжена точка P — так само з кождою иньшою прямою q на головній площі α є спряжена точка Q тої площі. Нетрудно однак запримітити, що коли пряма q переходить тягло через точку P, то точка Q описує пряму p. Бо в тім случаю вісь спряжена з площею $[eq]$ мусить лежати на площі ε перетинати площу α в точці Q прямої p. З того слїдує, що:

„Кожда площа (ε) і з нею спряжена вісь (e) в бігуновім системі Σ визначують на головній площі (α) того системи пару спряжених елементів (бігунову і бігун) певного бігунового системи плоского (U), якого головні оси сходять ся з головними осями системи Σ."

Криву провідну сего бігунового системи плоского (u) названо „кривою огнищевою", а єї точки „огнищевими точками" просторного бігунового системи Σ і єго провідної поверхнї $F^{(2)}$.

Легко однак запримітити, що з трьох огнищевих кривих бігунового системи Σ дві є завсїгди дїйсні, а одна мнима.

До огнищевих кривих того бігунового системи Σ належить рівнож мниме коло в безконечности. Іменно площа в безконечности перетинає кожду площу ε і з нею спряжену вісь e після пари спряжених елементів бігунового системи плоского, якого мет з довільної точки простору можна доконати при помочи прямовісної бігунової вязки. Отже провідною кривою сего системи є коло мниме в безконечности.

Позаяк ті огнищеві криві є визначені, скоро є даний комплекс осий, проте з твердження на ст. 33 слїдує, що:

„Бігунові системи, що посїдають той сам комплекс осий, є співогнищеві, а їх провідні поверхнї творять громаду співогнищевих поверхний."

Ввиду сего свійства співогнищевих поверхний слїдують прямо з повисше пізнаних свійств їх комплексу осий.

Про бігунового-зеровий систем.

1. Нехай дані будуть три точки A, B, C просторної кривої III-го степ. (C^3) і в тих точках єї тїсно-стичні площі α, β, γ і єї стичні t_a, t_b, t_c.

Звісно, що:

1^0 Кожда з тих точок є вершком стіжка II-го степ., яким мечемо криву C^3.

2^0. Стичні площі пр. до стіжка $A(c^3)$ вздовж творячих AB або AC переходять відповідно через стичні t_b зглядно t_c кривої c^3 в точках B зглядно A.

З сего слїдує:

3°. Стична площа стіжка $A(c^3)$ вздовж творячої t_a сходить ся з тісно-стичною площею (α) кривої c^3 в точці А.

Коли возьмемо під увагу тристїнник $A(B, C, t_a)$, вписаний в стіжок $A(c^3)$, і означимо площу, яка сполучає точки A, B, C, через ε, тоді при помочи твердженя Pascal'a легко є доказати, що грана $[\alpha\,\varepsilon]$ площ α і ε і точки $[t_c.\ B\,t_a]$, $[t_b.\ C\,t_a]$ пересїчи стичних t_c, t_b з площами, які сполучують точки B, C зі стичною t_a, лежать на одній площі ε_1.

З тої самої причини лежить грана $[\beta\,\varepsilon]$ площ β і ε і точки $[t_c.\ A\,t_b]$, $[t_a.\ C\,t_b]$ на одній площі ε_2, — як рівнож грана $[\gamma\,\varepsilon]$ площ γ і ε — і точки $[t_a.B\,t_c]$, $[t_b.A\,t_c]$ лежать на площі ε_3.

Позаяк однак площі $[A\,t_c]$, $[B\,t_a]$, $[C\,t_b]$ перетинають ся в одній точці Q, яка є спільна для всїх трьох площ ε_1, ε_2 і ε_3, а площі $[A\,t_b]$, $[B\,t_c]$, $[C\,t_a]$ перетинають ся в точці Q_1, яка є рівнож спільна для тих площ ε_1, ε_2, ε_3, проте ті площі $(\varepsilon_1$, ε_2, $\varepsilon_3)$ мусять перетинати ся після одної прямої. Та пряма перетинає площу ε в точці E, через яку переходять тїсно-стичні площі α, β, γ.

Є то основне твердженє Chasles'a, яке звучить:

„Тїсно-стичні площі α, β, γ в трьох точках A, B, C просторної кривої III-го ст. c^3 перетинають ся в одній точції E, яка лежить на площі ε, що сполучує ті точки стичности $[A, B, C]$.“

Точка E, в якій перетинають ся три тїсно-стичні площі α, β, γ просторної кривої III-го ст. c^3, названо „бігуном“ площі ε, яка сполучує точки A, B, C стичности тих площ. І взаїмно: площу ε названо „бігуновою“ точки E, з огляду на криву c^3.

Тому повисше твердженє Chasles'a можна висказати слїдуючо:

„Бігун $[E]$ довільної площі (ε), з огляду на просторну криву III-го ст. c^3, лежить на тій-же площі (ε)“. І взаїмно:

„Бігунова площа (ε) довільної точки (E), з огляду на просторну криву III-го ст. c^3, переходить через тую-ж точку.“

А відтак:

„Бігун тїсно-стичної площі до кривої c^3 сходить ся з точкою стичности тоїж площі.“

2. З повисших тверджень слїдує безпосередно:

1°. „Просторна крива III-го ст. c^3 є рівночасно кривою третої кляси, се значить, що з довільної точки (E) дадуть ся повести до кривої c^3 що найбільше три площі тїсно-стичні.“

Бо коли-би через E можна було повести чотири площі тїсно-стичні до кривої c^3 в точках A, B, C, D, тодї на площі $(A\,B\,E)$ мусїли-б лежати і точки C, D, що бути не може, бо довільна площа не посїдає з кривою c^3 більше як три спільні точки.

2°. „Чотири точки просторної кривої III-го ст. c^3 творять один чотиростінник, а їх тісно-стичні площі творять другий чотиростінник. Кождий з тих чотиростінників є в другім вписаний, а рівночасно описаний.“

Коли іменно є дані чотири точки A, B, C, D кривої c^3 і тісно-стичні площі в тих точках α, β, γ, δ, тоді угол $[\beta\gamma\delta] \equiv A_1$ чотиростінника $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ мусить лежати на стіні $[B\,C\,D]$ першого чотиростінника $A\,B\,C\,D$, бо точка A_1 є бігуном площі $[B\,C\,D] \equiv \alpha_1$. І взаїмно, площа α переходить через свій бігун A, що є углом чотиростінника $A\,B\,C\,D$. Дійсно отже, вершки першого чотиростінника лежать на стінах другого, а стіни першого переходять через вершки другого.

Означім відтак вершки другого чотиростінника через $[\gamma\delta\,\alpha] \equiv B_1$, $[\delta\,\alpha\,\beta] \equiv C_1$, $[\alpha\,\beta\gamma] \equiv D_2$, тоді прямо з погляду на ті чотиростінники читаємо, що кожда з прямих $[A\,B_1]$. $[B\,A_1]$, $[C\,D_1]$, $[D\,C_1]$ перетинає всї чотири прямі: $[A\,B]$, $[\alpha\,\beta]$, $[C\,D]$, $[\gamma\,\delta]$. З сего заключаємо, що послїдні чотири прямі належать до одного системy творячих певного гіперболоїда — або що ті прямі мають взглядом себе „гіперболоїдальне“ положенє. — Так само гіперболоїдальне положенє мають чвірки прямих: $[A\,C]$, $[\alpha\,\gamma]$, $[B\,D]$, $[\beta\,\delta]$; $[B\,C]$, $[\beta\,\gamma]$, $[A\,D]$, $[\alpha\,\delta]$.

3. Поведім через довільну точку P дві тісно-стичні площі α, β до просторної кривої III-го степеня c^3, яких точками стичности суть точки A, B; то бігунова площа точки P, з огляду на криву c^3, сполучує точку P з точками стичности A і B, се є $\Pi \equiv [P.AB]$.

Коли через точку P переходить инша площа Π_1, що перетинає криву c^3 в точках C, D, в яких тісно-стичні площі є γ, δ, тодї бігун P_1 площі Π_1 лежить так на площі Π_1 як рівнож на площах γ і δ, отже є їх спільною точкою: $P_1 \equiv [\Pi_1\ \gamma\ \delta]$.

Позаяк чотири площі Π, Π_1, α, β переходять через ту саму точку P, проте грана $[\Pi\ \Pi_1]$ площ Π і Π_1 перетинає грану $[\alpha\,\beta]$ лощ α, β, а відтак пряму $[A\,B]$, бо лежить з нею в однїй площі, Π, як рівнож пряму $[C,\,D]$, бо лежить з нею на площі Π_1. Однак на підставі свійства, доказаного при кінци попередного уступа мусить та сама пряма $[\Pi\ \Pi_1]$ перетинати і четверту пряму $[\gamma\,\delta]$. З сего заключаємо, що площі Π, Π_1, γ, δ перетинають ся в однїй точці, с. з. що бігун P_1 площі Π_1 лежить на площі Π.

Отже:

„Коли площа Π_1 переходить через точку P, тодї єї бігун P_1, з огляду на просторну криву III-го ст. c^3, лежить на бігуновій площі Π точки P, з огляду на ту криву.“

З сего слідує твердженє:

„Бігунові площі всїх точок певної площі, з огляду на просторну криву III го ст. c^3, переходять через сталу точку тої площі, яка є бігуном тої площі, з огляду на криву c^3."

І взаїмно:

„Бігуни всїх площ, які переходять через одну точку, з огляду на криву c^3, лежать на однїй площі, що переходить рівнож через тую точку, а яка є бігуновою тої точки, з огляду на c^3."

4. Нехай будуть дані дві площі Π і Π_1 і їх бігуни P і P_1, з огляду на просторну криву III-го ст., то бігунові площі, з огляду на c^3, всїх точок, які лежать на грани площ Π і Π_1, мусять переходити рівнож через P і P_1, с. є через пряму $[P P_1]$, що сполучає ті точки. І взаїмно, бігунові площі точок, що лежать на прямій $[P P_1]$ переходять через пряму $[\Pi \Pi_1]$. Отже:

„Бігунові площі, з огляду на криву просторну III-го ст. c^3, всїх точок, що лежать на однїй прямій (g), переходять через иньшу пряму (g_1)."

І взаїмно:

„Бугуни всїх площ, що переходять через пряму (g_1), з огляду на криву c^3, лежать на иньшій прямій (g)."

Пару таких прямих g і g_1 названо „прямими бігуново зі собою спряженими", з огляду на просторну криву III го ст. c^3. — Коли отже точка P перебігає пряму g, тодї єго бігунова площа, з огляду на c^3, описує вязку площ, що має за вісь пряму g_1 і є перспективічна з рядом точок (P), — отже з тим рядом проєктивна.

5. Повисші розважаня доказують, що:

„Точки, площі і прямі в просторі — дадуть ся при помочи кривої просторної III го ст. c^3 — в той спосіб спрягчи, що кождій точцї (P) відповідає певна означена площа (Π) [єї бігунова], що переходить через тую точку і взаїмно, кождій площі (Π) відповідає певна означена, на нїй лежача точка (P) [єї бігун], а кождій прямій (s) відповідає иньша пряма (s_1) [пряма бігуново спряжена з s]. — В той спосіб одержимо систем точок, площ і прямих в просторі, який посїдає основні свійства бігунового системи, однак в питомий спосіб змодифіковані. Той систем названо „бігуново-зеровим"; має він просторну криву III-го ст. c^3 за провідну."

„Точка кривої c^3 і єї тїсно-стична площа, тятива тої кривої і грана площ тїсно-стичних в точках, в яких та тятива перетинає криву c^3, відповідають собі бігуново в тім бігуново-зеровім системі."

„Кожда стична (t) кривої c^3 відповідає сама собі в бігуново-зеровім системі тої кривої.“

Бо дійсно стічній (t), яка сполучує два безпосередно по собі слідуючі точки кривої c^3, відповідає бігуново грана двох тїсно-стичних площ в тих точках, отже та сама пряма.

6. Приймімо в бігуново-зеровім системі просторної кривої c^3 довільну точку Q і через її переходячу площу Π_p.

Бігунова площа Π_q точки Q мусить переходити через тую точку Q і бігун P площі Π_p; проте точки P і Q лежать на грани їх бігунових площ Π_p і Π_q, с. з. що прямі бігуново зі собою спряжені $[\Pi_p . \Pi_q]$ і $[P Q]$ накривають ся. — Прямій g на площі Π_p, що не переходить через точку Q відповідає в тім системі пряма g_1, яка переходить через точку P, однак не лежить на площі Π_q.

Коли точка X описує на прямій ряд точок, тодї его бігунова площа $[g_1 \ X] \equiv \xi$, обертаючи ся около прямої g_1, описує вязку площ, яка є перспективічна з тим рядом. А що з прямою $[Q X] \equiv s$, яка сполучує точки Q і X є бігуново спряжена грана бігунових площ тих точок, т. є. пряма $[\Pi_q \ \xi] \equiv s_1$, проте з повисшого розумованя слїдує свійство:

„Коли певна пряма s, обертаючи ся около точки Q, описує вязку прямих на площі Π_p, що переходить через тую точку Q, тодї пряма s_1 бігуново спряженя з прямою s в бігуново-зеровім системі, визначенім з огляду на c^3, описує вязку прямих на площі Π_q, бігуновій точки Q, — около бігуна P площі Π_p, з огляду на той-же систем. Обі ті вязки є проєктивні, а грана їх площ $[\Pi_q \ \Pi_p] \equiv [P Q]$ є їх спільною прямою.“

Коли пряма g лежить на площі Π_p і переходить через бігун P тої площі, тодї пряма g_1, бігуново спряжена з g, з огляду на бігуново-зеровий систем кривої c^3, мусить переходити через P і лежати на Π_p; однак площа Π' точки P', що лежить на прямій g, переходить через ту точку P' і точку P і перетинає площу Π_p після прямої g_1, бігуново спряженої з g; з того слїдує, що обі прямі g і g_1, накривають ся. Отже:

„Кожда пряма на довільній площі Π_p, яка переходить через бігун тої площі (P), з огляду на просторну криву III-го ст. c^3, є сама зі собою спряжена, з огляду на ту криву.“

З повисших тверджень слїдує загальна увага о прямих зі собою спряжених в бігуново зеровім системі;

„Дві прямі зі собою спряжені в бігуново-зеровім системі є в загалї перехрестні; коли однак перетинають ся, тодї накривають ся і дають пряму саму зі собою бігуново спряжену або т. з. пряму провідну бігуново-зерового систему.“

Коли однак уважати будемо пряму g за місце ґеометричне, описане точкою X, а пряму g_1 бігуново з g спряжену за вісь вязки площ, визначеної бігуновою площею ξ точки X, то повисше доказана проєктивність ряду (X) і вязки (ξ) не буде знищена, коли прямі g і g_1 накривають ся. — Звідси слідує твердженє:

„Пряму саму зі собою бігуново спряжену в бігуново-зеровім системі можна уважати: раз за основу ряду (X), другий раз за вісь вязки площ (ξ) бігунових точок того ряду; ті оба утвори є проєктивні.“

7. Нетрудно буде однак доказати, що:

„Кожда пряма l, що перетинає дві прямі бігуново спряжені в бігуново-зеровім системі — є сама зі собою спряжена в тім системі.“

Коли іменно та пряма (l) перетинає бігуново спряжені прямі g і g_1 в точках P і P_1, тоді бігуновою площею точки P є $\Pi \equiv [Pg_1]$, а точки P_1 є $\Pi_1 \equiv [P_1 g]$. Обі ті площі перетинають ся після прямої $[\Pi \Pi_1]$, що є бігуново спряженя з прямою $[PP_1]$, с. є. сама зі собою.

А що бігун якоїнебудь площі, переходячої через пряму l, яка є сама зі собою бігуново спряжена, лежить на тійже прямій, проте маємо твердженє:

„Бігун площі Π, яка перетинає прямі бігуново-спряжені g і g_1 в точках P і P_1, лежить на прямій l, що сполучає ті точки.“

І взаїмно:

„Коли через довільну точку P попроваджу таку пряму, котраби перетинала дві прямі g і g_1 бігуново спряжені в бігуново-зеровім системі, тоді через ту пряму мусить переходити рівнож бігунова площа (Π) тої точки P.“

З тих твердженъ слідує свійство:

„Коли в бігуново-зеровім системі дані є дві пари спряжених бігунових g і g_1, g_2 і g_3, то пряма l, яка переходить через довільну точку P прямої g і перетинає прямі g_2 і g_3, мусить рівнож перетинати і пряму g_1.“

Та пряма l є іменно сама зі собою бігуново спряжена, проте бігунова площа єї точки P переходить через її саму і через пряму g_1. З сего бачимо, що прямі g, g_1, g_2 і g_3 мають зглядом себе гіпербольоїдальне положенє.

Отже:

„Якінебудь дві пари спряжених прямих в бігуново-зеровім системі мають гіпербольоїдальне положене, с. з. они належать до одного системy творячих гіпербольоїда (H^2), якого творячі другого системy є прямими спряженими самими зі собою в тім бігуново-зеровім-системі."

Нехай довільна площа Π перетинає повисший гіпербольоїд $H^{(2)}$ після кривої II-го ст. c^2, а її творячі g, g_1 ; g_2, g_3 в двох парах точок S і S_1; T і T_1, то точка пересїчи прямих $[SS_1]$ і $[TT_1] \equiv P$ є бігуном площі Π в данім бігуново-зеровім системі. Кожда пряма, яка переходить через точку P, перетинає криву c^2 в двох точках X і X_1 через які мусять переходити дві творячі x і x_1 гіпербольоїда $H^{(2)}$; ті творячі (x і x_1) є спряженими прямими в данім бігуново-зеровім системі. Коли іменно хочемо для прямої x вишукати її бігунову, треба повести через прямі g, g_1, x гіпербольоїд $H^{(2)}$ і визначити таку творячу того самого системy, до якого належать прямі g, g_1, x, якаби перетинала площу Π в точцї X_1, лежачій на прямій PX; — тою творячою мусить бути пряма x_1. Тим способом можна одержати безконечне число пар бігуново спряжених прямих (x і x_1) в данім бігуново-зеровім системі, які належать до одного системy творячих гіпербольоїда $H^{(2)}$.

Ті прямі укладають ся парами інволюторично, бо точки X, X_1 на кривій c^2 творять ряд інволюцийний, якого подвійними точками є точки стичности стичних, попроваджених з точки P до кривої c^2. Ті точки є дїйсні, коли P лежить на внї кривої c^2, а мнимі, коли P лежить в нутрі c^2. В першім случаю є в системі прямих x, x, дві прямі самі зі собою бігуново спряжені в бігуново-зеровім системі, а в другім случаю прямі самі зі собою спряжені в системі прямих x, x, — є мнимі.

З сего розумованя слїдує твердженє:

Коли є дані дві прямі самі зі собою спряжені в бігуново-зеровім системі, які не перетинають ся в просторі, тодї є безконечне множество иньших прямих самих зі собою спряжених, що перетинають обі перші; ті послїдні творять один систем творячих одно-поволокового гіпербольоїда. Другий систем творячих того гіпербольоїда, до якого належать обі приняті, самі зі собою спряжені прямі, містить безконечно много пар прямих бігуново спряжених в тім-же бігуново-зеровім системі, а які творять з принятими гармонїчні ґрупи."

Конструкция плоскої кривої V-го степ. з почвірною точкою.

В. Калїцун.

B. Kalicun. Die Konstruktion der ebenen Kurve V-ter Ord. mit einem vierfachen Punkte.

В розвідцї п. з. „Über die Eigenschaften der ebenen Kurven etc", предложеній Цїсарскій Академії Наук у Віднп 9. червня 1910, подав я загальні свійства кривої V-го степ. з почвірною точкою і спосіб, в який би та крива дала ся начеркнути при помочи двох одно-чотирозначних вязок лучів.

В отсїй розвідцї перепроваджую конструкцию доповненя двох одно-чотирозначних вязок (Рис. I), а відтак чертаю образ двох ґатунків згаданої кривої V-го степеня (Рис. II, III), якого то образу, о скілько менї звісно, нїхто еще не пробував начертати.

I. Доповнене двох одно-чотирозначних вязок лучів.

1. Звісно, що дві одно-чотирозначні вязки лучів будуть визначені, коли приймемо довільно девять пар відповідаючих собі лучів[1]), отже: $W^1 (a_1, b_1, \ldots i_1)$, $W^4 (a_4, b_4, \ldots i_4)$. [Рисунок I].

Коли ми перетнемо вязку $W^1 (a_1, \ldots i_1)$ лучем a_4, а вязку $W^4 (a_4, \ldots i_4)$ лучем a_1, то одержимо два одно-чотирозначні ряди: $a_4 (A_1, B_1, \ldots I_1)$, $a_1 (A_4, B_4, \ldots I_4)$ в зредукованім положеню.

Прямі, які сполучують відповідні точки тих рядів, обвивають криву IV-ої кляси c_4, яка дотикае три рази основи a_1 чотирозначного ряду a_1[2]). З кождої точки якоїнебудь стичної s кривої c_4 виходить еще по три стичні тої кривої. Сї стичні визначують на по-

[1]) „Über die Eigenschaften der ebenen Kurven" стор. 4.
[2]) „Über die Eigenschaften etc." стор 3.

трійній стичній a_1 ряд, який є тризначний з рядом на стичній s, визначеним поодинокими стичнями, які виходять з точок потрійної стичної a_1. Отже стична $\overline{B_1 B_4} \equiv s$ перетинає стичні кривої c_4: $\overline{C_1 C_4}$ $\overline{D_1 D_4}, \ldots \overline{I_1 I_4}$ в точках $C, D, E, \ldots I$, які творять однозначний ряд з тризначним рядом $C_4, D_4, E_4, \ldots I_4$.

Ті одно-тризначні ряди є докладно визначені через сїм згаданих пар відповідних точок, а їх доповнене провадить до доповненя одно-чотирозначних рядів a_1, a_4, а відтак даних вязок W^1, W^4.

Щоби доповнити одно-тризначні ряди: s $(C, D, E, \ldots I)$ і a^1 $(C_4, D_4, \ldots I_4)$ сполучуємо точку G_4 з елементами ряду $s\,(C, D, \ldots I)$, а точку G з елементами ряду a_1 $(C_4, D_4, \ldots I_4)$; тим способом одержані дві одно-тризначні вязки: G_4 $(C, D, \ldots I)$ і G $(C_4, D_4, \ldots I_4)$ в зредукованім положеню визначують криву III-го ст. c^3, яка переходить два рази через вершок G тризначної вязки. Крива c^3 є визначена подвійною точкою G і точками: $(G_4 C, G C_4) \equiv 1^2$, $(G_4 D, G D_4) \equiv 2^2$, $(G_4 E, G E_4) \equiv 3^2$, $(G_4 F, G F_4) \equiv 4^2$, $(G_4 H, G H_4) \equiv 5^2$, $(G_4 I, G I_4) \equiv 6^2$.

Кожда пряма, що переходить через подвійну точку G, перетинає криву c^3 еще в однїй точцї, а прямі, що переходять через довільну точку тої кривої, перетинають її в дальших двох точках. З сего слїдує, що вязки лучів, які сполучують точку 1^2 з точками G, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, а точку G з точками 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, — є одно-двозначні.

Доповнене одно-двозначних вязок 1^2 $(2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2)$ і $G\,(2^2, 3^2, 4^2\ 5^2, 6^2) \equiv G$ $(C_4, E_4, \ldots I_4)$ не представляє найменьшої трудности: Іменно перетинаємо однозначну вязку $1^2\,(2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2)$ лучем $\overline{G\,3^2}$, а двозначну вязку G $(2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2)$ лучем $\overline{1^2\,3^2}$, наслїдком чого одержимо два одно-двозначні ряди: (II, IV, V, VI) і (II', IV', V', VI') в зредукованім положеню, які визначують криву другої кляси c_2, що дотикає підстави $\overline{1^2\,3^2}$ двозначного ряду. З кождої точки стичної $\overline{1^2\,3^2}$ мож еще повести одну стичну до кривої c_2; сї стичні визначують на прямій $\overline{G\,3^2}$ однозначний ряд, а пари стичних, які виходять з точок прямої $\overline{G\,3^2}$, визначують на $\overline{1^2\,3^2}$ двозначний ряд.

2. По сих загальних увагах приступлю до розвязаня слїдуючих завдань:

a) „Даний є луч x_4 чотирозначної вязки (W^4), визначити відповідаючий єму луч x_1 в однозначній вязцї (W^1)“.

Визначім точку X_4 пересїчи луча x_4 з прямою a_1 (рис. I), то пряма $G X_4$ є лучом двозначної вязки G $(C_4, E_4, \ldots I_4)$ $[\equiv G(2^2, 3^2, \ldots 6^2)]$ і перетинає пряму $\overline{1^2 3^2}$ в точцї X^{IV}. Коли ми з точки X^{IV} поведемо способом Brianchon'а стичну s_x до кривої c_2 і сполучимо точку ${}^1X^{IV}$ пересїчи тої стичної з прямою $\overline{G 3^2}$ з точкою 1^2, то одержимо луч $(1^2\, {}^1X^{IV})$ однозначної вязки 1^2 $(2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2)$, який відповідає лучеви $G X_4$ $(\equiv G X^{IV})$ двозначної вязки G $(2^2, 3^2, \ldots 6^2)$. Сї два лучі перетинають ся в точцї X^2 кривої III-го ст. c^3, яка сполучена з G_4 дає луч однозначної вязки G_4 $(C, D, E, \ldots I)$. Луч $\overline{G_4 X^2}$ перетинає пряму s $(\equiv B_1 B_4)$ в точцї X, а пряма $\overline{X_4 X}$, яка сполучує точку X з точкою X_4 є стичною кривої c_4 і перетинає a_4 в точцї X_1, яка сполучена з W^1 дає луч x_1 однозначної вязки, що відповідає даному лучеви x_4 чотирозначної вязки.

б) „Даний є луч y_1 однозначної вязки, визначити відповідаючі єму лучі в чотирозначній вязцї".

Луч y_1 перетинає підставу a_4 однозначного ряду $(A_1, B_1, C_1, \ldots I_1)$ в точцї Y_1, якій в чотирозначнім рядї на a_1 відповідають чотири точки Y^1_4, Y^2_4, Y^3_4, Y^4_4; сї точки сполучені з вершком W^4 дають лучі y^1_4, y^2_4, y^3_4, y^4_4 чотирозначної вязки, які відповідають лучеви y_1 однозначної вязки.

Щоби визначити сї лучі, сполучуємо точку Y_1 з точками одно-тризначних рядів: s $(C, D, E, \ldots I)$, a_1 $(C_4, D_4, E_4, \ldots I_4)$ і визначуємо спільні лучі сих одно-тризначних вязок. Спільні лучі перетнуть пряму a_1 в чотирох точках, які лежать на шуканих лучах чотирозначної вязки¹).

Спільні лучі тих вязок визначимо в слїдуючий спосіб: Через вершок Y_1 чертаю довільне коло K, яке перетинає вязки Y_1 $(C, D, \ldots I;\ C_4, D_4 \ldots I_4)$ після двох одно-тризначних рядів: (c, d, e, f, g, h, i), $(c_4, d_4, e_4, f_4, g_4, h_4, i_4, f)$; спільні точки сих рядів лежать на спільних лучах повисших вязок.

Щоби вишукати згадані спільні точки, сполучуємо точку d з точками c_4, d_4, e_4, $\ldots$ i_4, а точку d_4 з точками: c, d, e, f, g, h, i. Тим способом одержимо одно-тризначні вязки в зредукованім положеню, які як звісно, утворять криву III-го ст. c^3, що посїдає в d подвійну точку. Крива c^3 перетинає коло K еще в чотирох точках, які якраз є шуканими спільними точками згаданих рядів.

¹) Знане є твердженє Chasles'а, що: Два $(m\text{-}n)$ — значні твори мають $m+n$ спільних елементів.

Однак повисше завдане IV-го ряду дасть ся розвязати без помочи кривої c^3, виключно при помочи двох кривих II-го степеня:

Іменно крива c^3 є докладно визначена подвійною точкою d і точками: $(dc_4, d_4c) \equiv 1$, $(de_4, d_4e) \equiv 2$, $(df_4, d_4f) \equiv 3$, $(dg_4, d_4g) \equiv 4$, $(dh_4, d_4h) \equiv 5$, $(di_4, d_4i) \equiv 6$. Коли ми сполучимо точку 2 з точками 1, 3, 4, 5, 6, то одержимо вязку лучів, з яких кождий перетинає криву c^3 еще в одній дальшій точцї 2', 3', 4', . . . , а коло K в парах точок: a', a''; b', b''; c', c''; . . . , які творять, як звісно, квадратову інволюцию. Коли ми відтак сполучимо точку d кривої c^3 з єї точками 2, 2'; 3, 3'; 4, 4'; . . . , одержимо вязку двозначну в вязкою 2 (1, 3, 4, . . .); пари лучів сеї двозначної вязки перетинають коло K в парах точок: c_4, c_4'; e_4, e'_4; f_4, f'_4; . . . квадратової інволюциї. Інволюциї (c_4, c'_4; e_4, e'_4;, . . .) і (a', a''; b', b''; c', c''; . . .) є однозначні і мають чотири спільні точки, які є якраз точками пересїчи кривої c^3 з колом K. Однак через сї точки переходить, як легко запримітити, стіжковий переріз p^2, який визначують дві однозначні вязки: 2 (1, 3, 4, 5) і S $(\overline{c_4 c'_4}, \overline{e_4 e'_4}, \overline{f_4 f'_4} \ldots)$.

Коли отже начеркнемо переріз стіжковий p^2, то він перетне коло K в чотирох точках: η_1, η_2, η_3, η_4; прямі, які сполучують сї точки з точкою Y_1, є спільними лучами одно-тризначних вязок: Y_1 ($C, D, \ldots I; C_4, D_4, \ldots I_4$). Сї лучі перетинають пряму a_1 в чотирох точках: Y^1_4, Y^2_4, Y^3_4 Y^4_4, які сполучені з вершком W^4 дадуть лучі: y^1_4, y^2_4, y^3_4, y^4_4, чотирозначної вязки, що відповідають принятому лучеви y_1 однозначної вязки.

Увага: Лучі $d2'$ $d3'$ $d4'$, . . . двозначної вязки d (1, 3, 4, 5, 6, . . .) визначив я на рисунку в слідуючий спосіб:

Вязки 2 (1, 3, 4, 5, 6 . . .) і d (1, 3, 4, 5, 6 . . .) є одно-двозначні і сими 5 парами відповідних лучів докладно визначені. Коли перетнемо однозначну вязку 2 (1, 3, 4, 6 . . .) лучем $\overline{d4}$, а двозначну вязку d (1, 3, 4, 5, 6, . . .) лучем $\overline{24}$, то одержимо одно-двозначні ряди: (I'', III'', V'', VI'',...) і (I', III', V', VI' . . .) в зредукованім положеню, які визначують криву II-ої кляси c_2', що стикає ся з основою $\overline{24}$ двозначного ряду. З кождої точки однозначного ряду виходить еще по одній стичній до c_2', які перетинають пряму $\overline{24}$ в точках I_1', III'_2, V'_1, . . . ; точки сї творять по черзї з точками I', III', V', . . . пари елементів двозначного ряду на прямій $\overline{24}$. Пари точок I' I', III' III'_1, . . . творять, як звісно, квадратову інволюцию, отже коли їх получимо з точкою d, одержимо пари лучів двозначної вязки d (1, 3, 4, 5, . . .).

II. Конструкция кривої V-го ст. (Рис. II, III).

1. Крива V-го ст. з почвірною точкою буде визначена, коли крім почвірної точки W_4 приймемо еще десять еї довільних точок: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, [рис. II, III]. Бо коли ми получимо точки 10 і W^4 з иньшими точками: 1, 2, 3, ... 9, то одержимо девять пар відповідних лучів двох одно-чотирозначних вязок, які то пари визначують цїлковито сї вязки[1]).

Коли отже доповнимо ті вязки що йно представленим способом, то точки пересїчи відповідних лучів утворять криву c^5. Щоби однак визначити точки кривої c^5 дорогою лінїйною, треба при доповненю згаданих вязок виходити від лучів чотирозначної вязки [с. є від розвязаня завданя a)].

2. Стична s_w до кривої c^5 в довільній точції 10 (W^1) є лучем однозначної вязки W^1 (1, 2, ... 9), який відповідає спільному лучеви $W^4 W^1$, зачисленому до чотирозначної вязки W^4 (1, 2, ... 9).[2]).

Отже сю стичну визначимо способом лінїйним.

Щоби начертати стичні (s_1, s_2, s_3, s_4) кривої c^5 в почвірній точції W^4, належить памятати, що сї стичні є лучами почвірної вязки, які відповідають спільному лучеви $\overline{W^4 W^1}$, зачисленому до однозначної вязки. Отже знайдемо їх, коли розвяжемо завдане б) уст. I-го.

[В принятім положеню одно-чотирозначних вязок (рис. II), почвірна точка посїдає тільки дві дїйсні стичні t^1, t^2].

3. Безконечно далекі точки кривої c^5 найдемо в слїдуючий спосіб:

Пересуньмо однозначну вязку W^1 (1, 2, ...9) так рівнобіжно до первісного положеня, щоби еї вершок W^1 зійшов ся з вершком W^4 чотирозначної вязки, а відтак через вершок W^4 поведїм довільне коло K. Се коло перетне сї вязки після двох одно-чотирозначних рядів: (a_1, b_1, c_1, d_1, ... i_1) і (a_4, b_4, ... i_4). Коли отже сполучимо точку i_4 чотирозначного ряду з елементами однозначного ряду, а відповідну точку i_1 з точками чотирозначного ряду, то одержимо одно-чотирозначні вязки в зредукованім положеню. Сї вязки визначують криву c^4 четвертого степеня, яка посїдає в i_1 потрійну точку[3]).

---

[1]) „Über die Eigenschaften der ebenen etc.“ ст. 4.

[2]) „Über die Eigen. etc.“ ст. 17.

[3]) Über die Eigenschaften der eb. Kur. etc. ст. 3. Гляди рівнож: „Dr. M. Łazarski. Konstrukcye krzywej rz. IV...“ Академія Наук в Кракові т. XV.

Крива c^4 перетне коло K крім точки i_1 еще в пять дальших точках (які можуть бути парами мнимі), що є спільними точками згаданих рядів. Прямі, що сполучують сї точки з W^4, є спільними лучами одно-чотирозначних вязок W^1 і W^4 і вказують на безконечно далекі точки кривої c^5.

В данім положеню перетинає крива c^4 коло K тілько в трох дійсних точках; крива c^5 посїдає тілько три дійсні безконечно далекі точки.

Асимптоти $(a_1, a_2, \ldots)$ кривої c^5 начеркнемо, коли будемо приймати по черзї безконечно далекі точки за вершки однозначних вязок і в тих точках чертати стичні — способом поданим в уст. 2.

4. На рисунку III. начертав я криву V-го степ. з двома дїйсними стичними $(s_1\ s_2)$ в почвірній точцї і з одною дїйсною асимптотою (a).

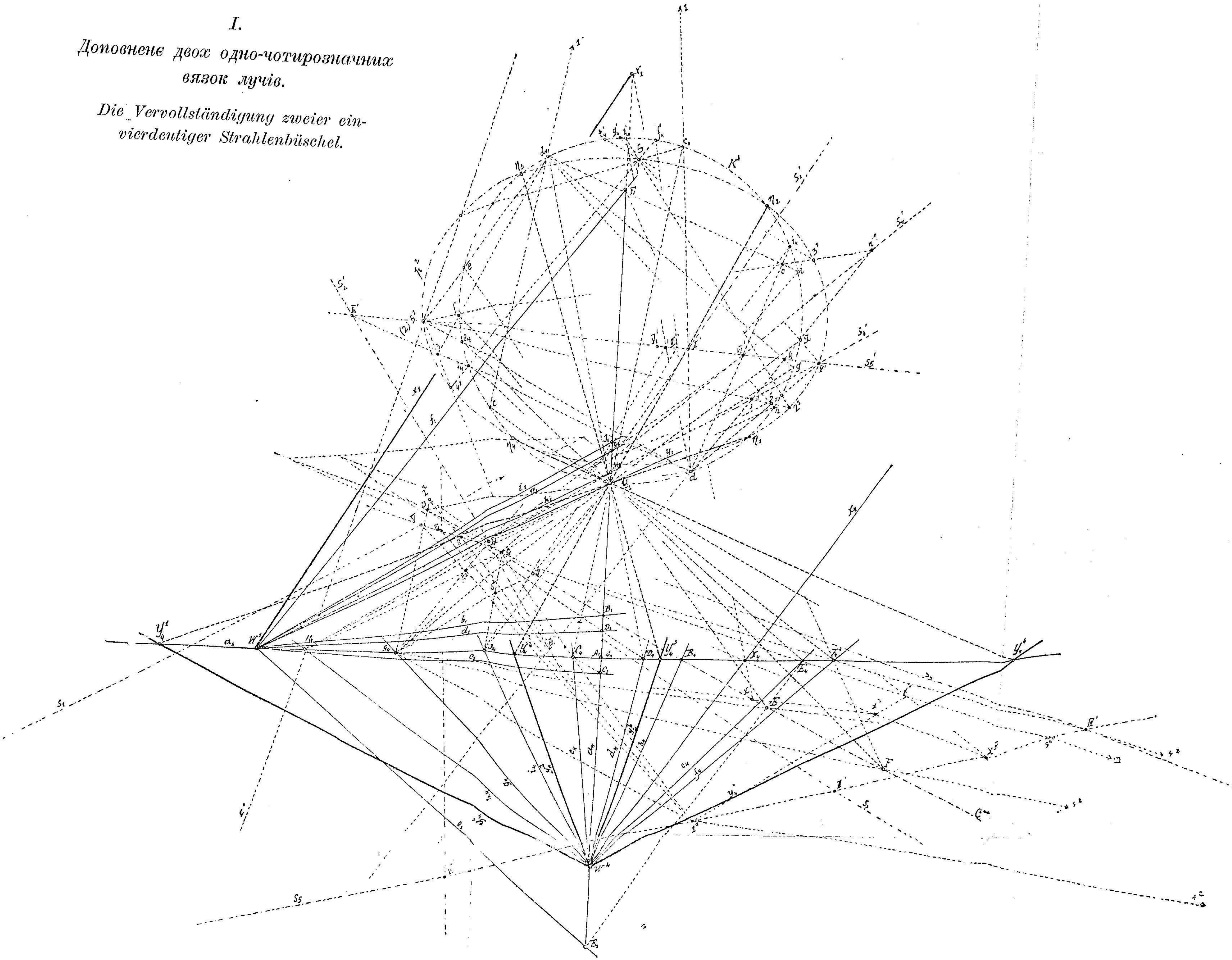
In der der kaiserlichen Akademie am 9. Juni 1910 vorgelegten Abhandlung habe ich die allgemeinen Eigenschaften der ebenen Kurve V-ter Ord. mit einem vierfachen Punkte entwickelt und auf die Art und Weise hingewiesen, auf welche diese Kurve mit Hilfe von zwei ein-vierdeutigen Strahlenbüscheln gezeichnet werden kann.

In der gegenwärtigen Abhandlung wird die Konstruktion zwei ein-vierdeutiger Strahlenbüschel und der genannten Kurve selbst durchgeführt.

I.

Доповнене двох одно-чотирозначних вязок лучів.

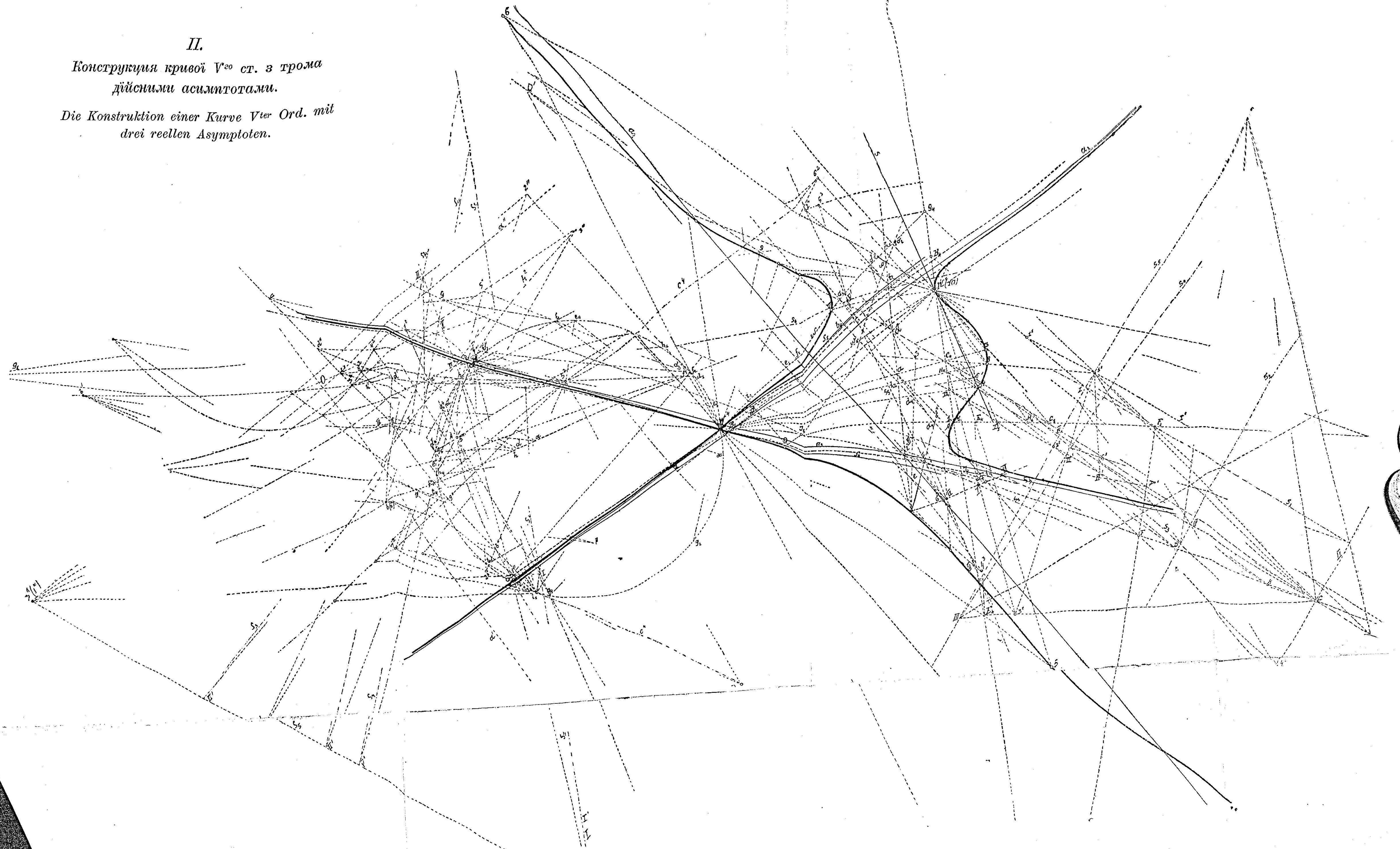
Die Vervollständigung zweier ein-vierdeutiger Strahlenbüschel.



II.

Конструкция кривої $V^{\text{го}}$ ст. з трома дійсними асимптотами.

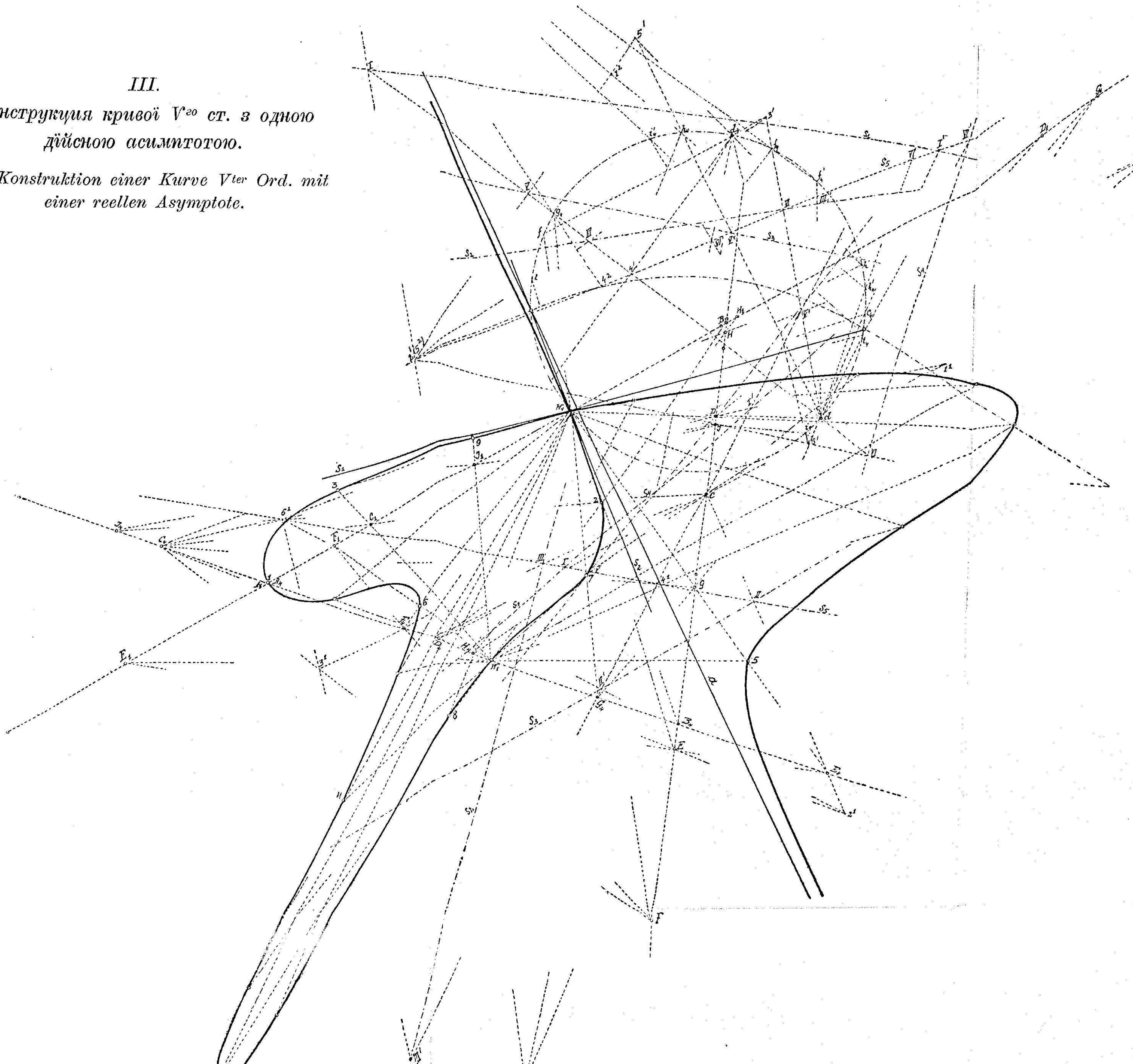
Die Konstruktion einer Kurve V^{ter} Ord. mit drei reellen Asymptoten.



III.

Конструкция кривої $V^{\text{го}}$ ст. з одною дійсною асимптотою.

Die Konstruktion einer Kurve V^{ter} Ord. mit einer reellen Asymptote.



Причинок до теорії стіжкових перекроїв.

(Ein Beitrag zur Theorie der Kegelschnitte).

НАПИСАВ

Др. Микола Чайковський.

§ 1.

Коли стіжкові перекрої будемо вважати ґеометричними місцями всїх точок, для яких відношенє віддалень від постійної точки (огнища) й постійної прямої (провідної лінії) є постійне, то звідси можна випровадити богато прикмет, спільних всїм стіжковим перекроям. Поминаючи всї ті прикмети, як загально звісні, хочемо в нинїшній нотатці звернути увагу на дві річи: 1) коли приймемо віддаленє огнища від вершка постійним і піддамо чисельну ексцентричність $\left(\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}\right)$ змінам від 0 до ∞, яку частину площі займе громада стіжкових кривих? і 2) як заховують ся провідні лінії еліпс, коли ε буде так само зміняти ся, і коли приймемо відношенє огнища від вершка, як попередно, постійним?

Перед тим одначе випровадимо всї величини, потрібні для теорії стіжкових перекроїв.

§. 2.

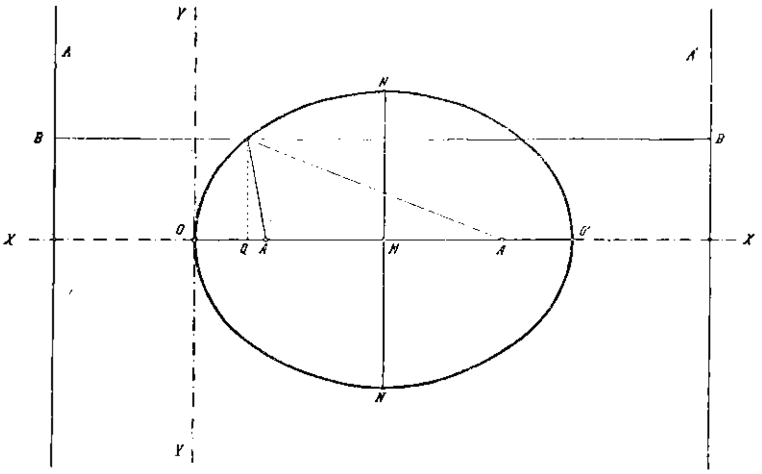
Нехай буде A огнищем, A провідною лінією стіжкових перекроїв; тодї дефініційне рівнанє всїх точок P бажаних кривих є:

$$\frac{AP}{PB} = \varepsilon, \tag{1}$$

де B є точкою, в якій трафляє провідну лінїю нормальна, поведена з P (рис. 1). З того дефініційного рівнаня одержимо аналїтичне рівнане стіжкових перекроїв

$$y^2 = 2c(\varepsilon + 1)x + (\varepsilon^2 - 1)x^2, \qquad (2)$$

а саме вершкове рівнане, бо відносимо його до сорядних, яких осию X є нормальна з огнища до провідної лінїї, а вісь Y переходить через ту точку на оси X, яка ділить віддалене огнища від провідної лїнії в відношеню $\varepsilon : 1$. Коли O є вершком кривих, а заразом і початком сорядних, то $c = OA$ — т. зн., се віддалене огнища від вершка.



На основі рівнаня (2) можемо перевести повну дискусію стіжкових перекроїв, коли будемо вважати ε змінним параметром.

Іменно:

для $\varepsilon = 0$ маємо коло;
„ $\varepsilon < 1$ „ елїпсу;
„ $\varepsilon = 1$ „ параболю;
„ $\varepsilon > 1$ „ гіперболю;
„ $\varepsilon = \infty$ „ пряму лїнію, а саме вісь Y; її рівнане є: $x = 0$.

Для відємних ε криві є нездефінїовані.

§ 3.

Тепер шукаємо симетрії наших кривих; в тій цїли знаходимо точки пересїчи кривих з осию X; їх є дві: вершок O і вершок O'

в віддаленю $x_0 = \frac{2c}{1-\varepsilon}$; для $\varepsilon < 1$ лежить він на право від O, для $\varepsilon = 1$ є в безконечности, а для $\varepsilon > 1$ по лївій стороні від O, бо тоді є $x_0 < 0$. Назвім $a = \frac{c}{1-\varepsilon}$, тодї $x_0 = 2a$ називаеть ся великою або головною осию кривої.

Творячи похідну рівнаня (2), одержимо

$$yy' = c(\varepsilon + 1) + (\varepsilon^2 - 1)x;$$

вона стає зером для $x = \frac{c}{1-\varepsilon} = a$. В тій точції досягає крива maximum або minimum. Віддалене обох екстремів назвиває ся побічною (або малою) осию кривої; означім її $2b$, тоді є

$$b = c\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

Для $\varepsilon = 1$ є $b = \infty$, для $\varepsilon > 1$ є воно мниме.

Точку пересїчи обох осий M называемо осередком кривої. Віддалене осередка від вершка є

$$a = \frac{c}{1-\varepsilon},$$

віддалене від огнища є

$$AM = a - c = \frac{c\varepsilon}{1-\varepsilon} = a\varepsilon.$$

Воно має назву лїнїйної ексцентричиности; означуємо його буквою e: $\quad e = a\varepsilon.$

Звідси легко випровадити звісне рівнане:

$$a^2 - b^2 = e^2.$$

Для мнимого b маємо, розумієть ся, $a^2 + b^2 = e^2$.

§ 4.

Точка A', яка лежить на головній оси симетрично з A до M, є рівно-ж огнищем, а пряма Λ', симетрична до M супроти Λ, є також провідною лїнїєю кривої. Се легко провірити дуже простим рахунком. Коли назвемо B' точку, в якій пряма нормальна з P до Λ' трафляє пряму Λ', одержимо рівно-ж дефінїційне рівнане кривої

$$\frac{PA'}{PB'} = \varepsilon \tag{3}$$

З рівнань (1) і (3) слїдує

$$PA + PA' = \varepsilon \,.\, (PB + PB') = \varepsilon \,.\, CC';$$

величина CC' є віддаленєм обох провідних лінїй:

$$CC' = 2CM = 2(CO + OM),$$

а що $$CO = \frac{c}{\varepsilon}, \text{ то } CO + OM = \frac{c}{\varepsilon(1-\varepsilon)},$$

отже $$CC' = \frac{2c}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = \frac{2a}{\varepsilon}, \text{ проте } \varepsilon\,.\,CC' = 2a;$$

коли положимо: $r_1 = PA$, $r_2 = PA'$, одержимо:

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{4}$$

Отсе звичайна **дефінїція еліпси**. — Її можемо примінити рівно-ж і до гіперболї, тільки з тим застереженєм, що коли точки A' і B' лежать по відємній сторонї оси Y, то величини PA' і PB' треба брати з відємним знаком, отже рівнанє (3) треба відоймити від (1). Се дасть:

$$r_1 - r_2 = \varepsilon\,.\,CC' = 2a. \tag{5}$$

Осями симетрії кривих є обі оси; осередком симетрії осередок кривої. Параболя має тільки одну вісь симетрії, а саме вісь X (головну вісь). Її осередок симетрії лежить в безконечности.

§ 5.

Приходимо тепер до першого питаня, яке ми поставили на вступі, іменно, як заховуеть ся громада кривих (2) на площі, коли c буде постійне, а ε приймемо за змінний параметер*).

Для $\varepsilon = 0$ маємо коло о лучи c з осередком в A; віддаленє провідної лїнїї є $CO = \infty$; так само й друга провідна лінія є в безконечности.

Для $\varepsilon < 1$ одержуємо еліпсу; її видовженє зростає зі зростом параметру ε, бо коли $\varepsilon < \varepsilon_1 < 1$, то $a_1 = \frac{c}{1-\varepsilon_1} > a$. Зі зростом ε віддалюють ся проте точки M, A' і O' постійно, аж для $\varepsilon = 1$ перейдуть в безконечність.

Коли ε перейде границю 1, всї згадані точки появляють ся по лївій сторонї Y, бо величини a і ε стають відємні. Вони будуть зближати ся постійно до вершка O, бо коли $\varepsilon_1 > \varepsilon > 1$, то $a_1 =$
$= \frac{c}{1-\varepsilon_1} = \frac{-c}{\varepsilon_1 - 1} < a_1$.

Для $\varepsilon = \infty$ одержимо $CC' = \frac{2c}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = 0$, проте обі провідні лїнїї зійдуть ся; тодї є рівно-ж $CO = 0$, отже вони впадуть на вісь Y. З рівнаня (2) одержимо тодї $x = 0$; проте цїла крива перейде в вісь Y.

*) Не мішати з параметром стіжкових перекроїв!

Кожда з кривих буде обширнїйша від попередньої, бо коли приймемо $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, нпр. $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \delta$, $(\delta > 0)$, то для того самого x маємо $y_2 > y_1$. Отже коли дві сусїднї криві стикають ся в точцї O, то не можуть вже мати инших спільних точок.

§ 6.

Коли схочемо знайти, яку частину площі покриє громада кривих при тяглій зміні параметру ε, поставмо собі таке питанє: „нехай буде дана точка $P(\xi, \eta)$ на площі; яка є вартість параметру ε тої кривої, що переходить через точку P“?

Вставивши в рівнанє (2) сорядні точки P й розвязавши його з огляду на ε, одержимо:

$$\varepsilon = -\frac{c}{\xi} + \frac{1}{\xi}\sqrt{(\xi - c)^2 + \eta^2}. \tag{6}$$

Знак „$-$“ при коріни є виключений, бо ми приймаємо параметер ε заєдно додатнїй. Звідси слїдує, що мусить бути сповнена одна вимога для ξ і η:

$$\sqrt{(\xi - c)^2 + \eta^2} \leqq c, \tag{7}$$

бо тільки тодї зможе бути $\varepsilon \geqq 0$. Нерівність (7) висказує, що тільки тодї через точку P може переходити одна крива з громади (2), коли P лежить не на полї кола о лучи c й осередку в огнищи A. Через кожду иншу точку переходить одна і тільки одна крива з громади (2), бо ε має тільки одну можливу вартість.

Звідси слїдує, що **громада стіжкових кривих, даних рівнанєм (2) зі змінним параметром ε, покриває цїлу площу з виїмком вершкового кола о лучи c** з осередком в огнищи A.

Для відємних ε наші криві, як сказано, нездефініовані.

§ 7.

Щоби розслїджувати зміну положеня провідних лїній з параметром, зведім рівнанє (2) до **осередочного виду** (можливе се, розуміє ся, тільки при еліпсї й гіперболї).

При еліпсї пересуваємо початок сорядних о a на право; тому скорочуємо сорядну x о a:

$$(1 - \varepsilon^2)\, x + y^2 = c^2 \cdot \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}, \tag{8}$$

або в звичайній формі

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\,;$$

при гіперболї відбуваеть ся отсе пересунене о таку саму величину на лїво, отже сорядна x буде продовжена о a; се дасть:

$$(\varepsilon^2 - 1)\, x^2 - y^2 = c^2 \cdot \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}, \tag{9}$$

отже звичайна форма рівнаня гіперболї буде:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Віддалене обох провідних лїній є в обох разах

$$d = CC' = \frac{2c}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

зглядно

$$d = \frac{2c}{\varepsilon(\varepsilon - 1)};$$

коли-ж тут не будемо вважати на знак, можемо приймити перший взорець.

Для $\varepsilon = 0$ є $d = \infty$; для $0 < \varepsilon < 1$ приймае воно скінчені вартости, а для $\varepsilon = 1$ стає опять ∞. Опісля, коли $\varepsilon > 1$, опадає воно від ∞ до 0. — Звідси слїдує, що коли ε зростає від 0 до 1, d перебігає спершу спадаючий ряд, а опісля знов зростає.

Знайдїм долїшню границю того ряду. Коли положимо

$$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon(1 - \varepsilon),$$

маємо:

$$\varphi'(\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon;$$

$\varphi'(\varepsilon)$ стає зером для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, а що $\varphi''(\varepsilon) = -2 < 0$, то $\varphi(\varepsilon)$ є для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ maximum, отже тодї d є minimum. Отже долїшньою границею вартостий d є

$$d_{\min.} = 8c;$$

обі провідні лїнії еліпси не можуть ніколи зблизити ся до себе більше, як на $8c$.

§ 8.

Положім $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \delta_1 \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} - \delta$; тодї є

$$d_1 = d_2 = \frac{2c}{\frac{1}{4} - \delta^2}.$$

Дві еліпси, яких вершки однаково віддалені від огнищ і яких чисельні ексцентричности є симетрично розложені супроти числа $\frac{1}{2}$, мають ті самі провідні лїнії. Такі дві еліпси о тих самих провідних лїніях назвемо приналежними еліпсами супроти δ (zugehörige Ellipsen in bezug auf δ).

Рівнаня кождої пари приналежних еліпс є такі:

$$\left(\frac{x}{\frac{2c}{1-2\delta}}\right)^2+\left(\frac{y}{c\sqrt{\frac{3+2\delta}{1-2\delta}}}\right)^2=1,\quad \left(\frac{x}{\frac{2c}{1+2\delta}}\right)^2+\left(\frac{y}{c\sqrt{\frac{3-2\delta}{1+2\delta}}}\right)^2=1. \tag{10}$$

Тут є:

$$a_1=\frac{2c}{1-2\delta},\quad a_2=\frac{2c}{1+2\delta};\quad b_1=c\sqrt{\frac{3+2\delta}{1-2\delta}},\quad b_2=c\sqrt{\frac{3-2\delta}{1+2\delta}}. \tag{10a}$$

Для $\delta=0$ зливають ся обі елїпси в одну:

$$\left(\frac{x}{2c}\right)^2+\left(\frac{y}{c\sqrt{3}}\right)^2=1. \tag{11}$$

Отсе одинока елїпса, ідентична зі своєю приналежною; вона приналежна до $\delta=0$. Її назвемо головною елїпсою (Hauptellipse).

Коли пів-оси головної елїпси назвемо a, b, а пів-оси пари приналежних елїпс a_1, b_1 і a_2, b_2, одержимо такі реляції:

$$a_1>a>a_2;\quad b_1>b>b_2,$$

т. зн. з пари двох приналежних елїпс одна лежить на зовнї, а друга містить ся внутрі головної елїпси.

Для $\delta=\frac{1}{2}$ маємо: $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=0$, отже $d=\infty$; перше рівнанє (10) тратить своє значінє, бо обі пів-оси стають ∞, а друге стає $x^2+y^2=c^2$, т. зн.

Екстремом приналежних елїпс є така пара, що перша елїпса стає безконечно велика, т. є. оба її огнища, вершки й провідні лїнії відсувають ся безконечно далеко, (стає параболею о безконечно далекім вершку), а друга елїпса стає виїмковим колом о лучи c, з осередком M.

Для приналежних елїпс замітні такі реляції:

$$a_1+a_2=\frac{4c}{1-4\delta^2}=\tfrac{1}{2}d;$$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2};\quad \frac{e_1}{e_2}=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2=\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2.$$

§ 9.

Коли-б ми хотїли перевести той сам дослїд над гіперболею, побачимо, що для $\varepsilon > 1$ істнує minimum d тільки для $\varepsilon = \infty$; є воно $d = 0$. До нього належить тільки одно ε, отже до кождої пари провідних лїній належить одна і тільки одна гіпербола.

§ 10.

Конструкція пар приналежних елїпс.

Провідні лїнїї елїпси знаходимо, ведучи стичні до елїпси в кінцях її параметрів, т. є. в точках нормально над огнищами. Вони перетинають ся з осию X в точках, куди переходять провідні лїнїї. — Стичні-ж до елїпси перетинають вісь X в тих самих точках, що стичні до кола з осередком M і лучем a (велика пів-вісь елїпси), ведені з точок нормально над дотичними точками елїпс. Проте конструкція провідних лїній елїпси є дуже легка.

Нехай a_1 і a_2 означують великі пів-оси одної пари приналежних елїпс; тодї є дані також і обі елїпси, а з рівнань (10а) можемо знайти c і δ, отже всьо, що потрібне до визначеня елїпси. — Для приналежних елїпс істнує реляція

$$a_1 + a_2 = \tfrac{1}{2}d;$$

отже коли зачеркнемо з M співосередні кола лучами a_1 і a_2 і відміримо на оси X відтинок $CM = a_1 + a_2$, то точка C подасть, куди переходить провідна лїнія. З C ведемо стичні до обох кіл; мети точок стичности на вісь X визначать положенє огнищ обох елїпс (рис. 2).

Що сконструовані так елїпси є справдї приналежні, можемо доказати так: 1) мусимо виказати, що обі елїпси мають спільні провідні лїнїї; 2) мусимо доказати, що обі мають однакове віддаленє вершків від огнищ.

1) Слїдує безпосередно з конструкції; прямі A і A' є справдї провідними лїніями обох елїпс, бо D_1C і D_2C є стичними до кіл над великими осями елїпс, а точки стичности лежать прямо над огнищами елїпс.

2) Маємо доказати, що $O_1A_1 = O_2A_2$. З ΔMCD_1 і MCD_2 слїдує:

$$a_1{}^2 = A_1M^2 + A_1D_1{}^2; \quad a_2{}^2 = A_2M^2 + A_2D_2{}^2,$$

а також:

$$A_1D_1{}^2 = CA_1 \,.\, A_1M; \quad A_2D_2{}^2 = CA_2 \,.\, A_2M.$$

Тут є:

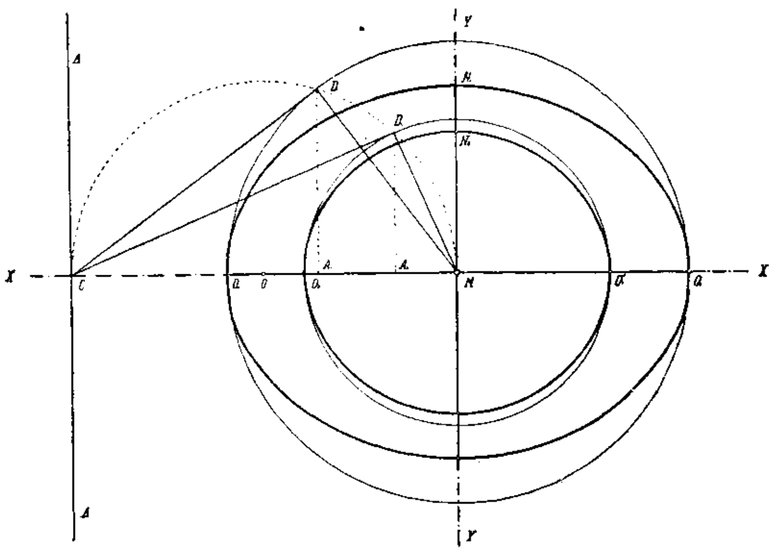
$$CA_1 = CM - A_1M = (a_1 + a_2) - A_1M;$$
$$CA_2 = CM - A_2M = (a_1 + a_2) - A_2M,$$

(бо $CM = a_1 + a_2$), отже дальше

$$A_1D_1{}^2 = [(a_1 + a_2) - A_1M] \,.\, A_1M;$$

$$A_2D_2{}^2 = [(a_1 + a_2) - A_2M] \,.\, A_2M,$$

проте: $$A_1M = \frac{a_1{}^2}{a_1 + a_2}; \quad A_2M = \frac{a_2{}^2}{a_1 + a_2}.$$



Бажані відтинки є:

$$O_1A_1 = a_1 - A_1M \quad \text{і} \quad O_2A_2 = a_2 - A_2M,$$

отже $$O_1A_1 = O_2A_2 = \frac{a_1a_2}{a_1 + a_2} = c,$$ як се слїдує рівно-ж з (10a).

Для конструкції головної елїпси ($a_1 = a_2$) рисуємо точку C в віддаленю $2a_1 (= a_1 + a_2)$ від M.

Тернопіль, 30. XI. 1911.

RÈSUMÈ.

Hier werden die Kegelschnitte als geometrische Örter derjenigen Punkte definiert, für die das Verhältnis der Abstände von einem fixen Punkt A (Brennpunkt) und einer fixen Linie A (Leitlinie) einen konstanten Wert ε hat.

Wenn der Abstand des Brennpunktes vom Scheitelpunkt O der Kurven mit c bezeichnet wird, dann lautet die Scheitelgleichung der Schaar sämtlicher Kegelschnitte:

$$y^2 = 2c(\varepsilon + 1)x + (\varepsilon^2 - 1)x^2,$$

worin c der veränderliche Parameter*) ist, den man von 0 bis $+\infty$ stetig variieren lässt; für negative Werte desselben sind die Kurven nicht mehr definiert.

Der Gegenstand des vorstehenden Beitrags ist: 1) zu zeigen, welcher Teil der Ebene durch die ganze Kurvenschaar bedeckt wird, und 2) zu untersuchen, wie sich die Ellipsen verhalten, sobald man ihre Leitlinien hin und her verschiebt.

Die erste Frage ergibt die Antwort, dass durch alle diejenigen Punkte der Ebene Kurven der genannten Schaar gehen können, die nicht innerhalb des „Ausnahmskreises" liegen, d. h. des Kreises vom Radius c um den Brennpunkt A. Den Extremen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = \infty$ entsprechen der Ausnahmskreis als Grenzlage aller Ellipsen, und die Y-Achse als Grenzlage aller Hyperbeln.

Zur Behandlung der zweiten Frage wird die Scheitelgleichung der Ellipse in eine Mittelpunktsgleichung transformiert:

$$(1 - \varepsilon^2)\, x^2 + y^2 = c^2 . \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon};$$

ferner wird c als konstant beibehalten und beim Variieren des Parameters ε sollen alle Ellipsen konzentrisch bleiben. Es zeigt sich alsdann, dass für $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ den zwei Ellipsen, die durch $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \delta$ und $\varepsilon_2 = \frac{1}{2} - \delta$ $(0 \leqq \delta \leqq \frac{1}{2})$ bestimmt sind, je ein gemeinsames Leitlinienpaar zukommt; für solches Ellipsenpaar wird die Bezeichnung „einander zugehörige Ellipsen in bezug auf δ" gewählt. Für $\delta = 0$ ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$; dann bekommen wir nur eine einzige, sich selbst zugehörige Ellipse. Sie mag „Hauptellipse" heissen; bei ihr ist der Abstand der beiden Leitlinien ein Minimum, u. z. $= 8c$.

Für $\delta = \frac{1}{2}$ kommen wir auf ein Extrempaar; die eine Ellipse ist unendlich gross, die andere der Ausnahmskreis um M.

Zuletzt wird die Konstruktion der zugehörigen Ellipsenpaare angegeben; auf der X-Achse wird ein Punkt C bestimmt, dessen Abstand von M gleich der Summe ist der grossen Halbachsen beider Ellipsen; er gibt die Lage der Leitlinie A an, denn es ist der halbe Abstand beider Leitlinien $\frac{1}{2}d = a_1 + a_2$. Dann werden um M zwei Kreise mit den Radien a_1 und a_2 geschlagen, an welche dann von C aus Tangenten zu legen sind. Die Projektionen der Berührungspunkte auf die X-Achse sind die Brennpunkte beider zugehörigen Ellipsen.

---

*) Nicht zu verwechseln mit dem „Parameter eines Kegelschnitts"!

worin c der veränderliche Parameter*) ist, den man von 0 bis $+\infty$ stetig variieren lässt; für negative Werte desselben sind die Kurven nicht mehr definiert.

Der Gegenstand des vorstehenden Beitrags ist: 1) zu zeigen, welcher Teil der Ebene durch die ganze Kurvenschaar bedeckt wird, und 2) zu untersuchen, wie sich die Ellipsen verhalten, sobald man ihre Leitlinien hin und her verschiebt.

Die erste Frage ergibt die Antwort, dass durch alle diejenigen Punkte der Ebene Kurven der genannten Schaar gehen können, die nicht innerhalb des „Ausnahmskreises" liegen, d. h. des Kreises vom Radius c um den Brennpunkt A. Den Extremen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = \infty$ entsprechen der Ausnahmskreis als Grenzlage aller Ellipsen, und die Y-Achse als Grenzlage aller Hyperbeln.

Zur Behandlung der zweiten Frage wird die Scheitelgleichung der Ellipse in eine Mittelpunktsgleichung transformiert:

$$(1 - \varepsilon^2)\, x^2 + y^2 = c^2 \cdot \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon};$$

ferner wird c als konstant beibehalten und beim Variieren des Parameters ε sollen alle Ellipsen konzentrisch bleiben. Es zeigt sich alsdann, dass für $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ den zwei Ellipsen, die durch $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \delta$ und $\varepsilon_2 = \frac{1}{2} - \delta$ $(0 \leqq \delta \leqq \frac{1}{2})$ bestimmt sind, je ein gemeinsames Leitlinienpaar zukommt; für solches Ellipsenpaar wird die Bezeichnung „einander zugehörige Ellipsen in bezug auf δ" gewählt. Für $\delta = 0$ ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$; dann bekommen wir nur eine einzige, sich selbst zugehörige Ellipse. Sie mag „Hauptellipse" heissen; bei ihr ist der Abstand der beiden Leitlinien ein Minimum, u. z. $= 8c$.

Für $\delta = \frac{1}{2}$ kommen wir auf ein Extrempaar; die eine Ellipse ist unendlich gross, die andere der Ausnahmskreis um M.

Zuletzt wird die Konstruktion der zugehörigen Ellipsenpaare angegeben; auf der X-Achse wird ein Punkt C bestimmt, dessen Abstand von M gleich der Summe ist der grossen Halbachsen beider Ellipsen; er gibt die Lage der Leitlinie Λ an, denn es ist der halbe Abstand beider Leitlinien $\frac{1}{2}d = a_1 + a_2$. Dann werden um M zwei Kreise mit den Radien a_1 und a_2 geschlagen, an welche dann von C aus Tangenten zu legen sind. Die Projektionen der Beruhrüngspunkte auf die X-Achse sind die Brennpunkte beider zugehörigen Ellipsen.

---

*) Nicht zu verwechseln mit dem „Parameter eines Kegelschnitts"!

Динаміка електрону.

написав

Володимир Кучер.

Основи динаміки електрону.

Катодові і β-лучі радіоактивних тїл є рухом електронів с. є. атомів відємної електричности. Повстає отже в сей спосіб електричний ток, який ріжнить ся від ґальванїчного току хиба тим, що не пливе по матеріяльнім осередку; такий ток називає ся током конвекцийним. Ток сей витворює около себе, так само як й ток в добрім провіднику, маґнетне поле, якого енерґія є пропорцийональна до квадрату з сили тока. Зрастаючій силї тока противдїлає електро-моторна сила власної індукциї, яка знов є пропорцийональна до часової зміни сили тока. А що сила конвенцийного тока, який повстає в наслїдок руху електрону, тому електро-моторній силї власної індукциї відповідати-ме сила пропорцийональна до прискореня електрону, але єї напрям буде противний. Ся послїдна відповідає в звичайній механїцї силї безвладности; кожда отже електрична частинка в руху посїдати-ме в наслїдок витвореного около себе електро-маґнетного поля безвладну масу, яку ми для відріжненя від безвладної маси тяжких дробин назвем за J. J. Thomson-ом і O. Heavisede-ом „сповидною" або „електро-маґнетною" масою.

Коли конвекцийний ток з електричних частинок витворює около себе маґнетне поле — що доказав досьвідом Rowland, то електрони в катодових лучах, які саме представляють конвекцийний ток, мусять посїдати електро-маґнетну масу. Крім сего можна ще приписати електронови на перший погляд матеріяльну масу, яка саме належить всякій тяжкій матерії, яку можна приписати й електричним йонам. Питане однак є, чи можна електронови приписати сю послїдну? Чи маємо уважати електрон за $\frac{1}{2000}$ чи $\frac{1}{1000}$ часть атому водня, чи нї? Питаня сего годї нам поминути навіть тодї, коли уважати-мемо безвладність електрону в части за матеріяльну, а в части за електро-маґнетну. — Відповідь на се питане дають нам прояви безвладности, які електрони оказують в скоршім руху, чим в катодових лучах. Після аксіомів звичайної механіки маса матеріяльна важких частинок мусить бути постійна, незалежна від скорости, з якою рух відбуває ся. Електро-маґнетна знов маса, яка бере свій початок в електро-маґнетнім поли, буде залежати так само як й само електро-маґнетне поле від скорости, з якою електрон перелїтає космічний етер.

З відкритєм лучів β і пізнанєм їх природи, а іменно, що они є також рухом електронів о далеко більшій скорости, як в катодових лучах, показали досьвіди проф. Kaufmann-а, що безвладність електричних частинок росте в парі зі зростаючою їх скоростию. В тім отже часї прийшла гадка M. Abraham-ови вивести динаміку електрону на чисто електро-маґнетних основах. Теоретичні виводи Abraham-а найшли опісля досьвідне потверджене Kaufmann-а[1]) так, що на природописнім конґресї в Карльсруге 1900. р. могли оба сьміло виступити з думкою, що маса електрону є чисто електро-маґнетної природи.

Динаміка електрону має свою основу в рівнанях електронової теориї. Щоби однак дійти до сих послїдних, мусимо вийти з рівнань Maxwell-а для електро-маґнетного поля. Перше рівнане Maxwell-а говорить що:

$$curl\ \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{z}$$ [2]),

значить, що вир сили маґнетного поля $\mathfrak{H}$ є пропорциональний до цїлої густоти тока $\mathfrak{z}$; притім не буде злишним зазначити, що $c = 3.10^{10}$.

Повний ток в електроновій теориї складає ся з двох частий: 1) з тока пересуненя в етері і 2) з конвекцийного тока електронів. Коли електричну силу назвемо $\mathfrak{E}$, тодї на ток пересуненя дістанемо: $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$; а ток конвекцийний електронів дістанемо: $\mathfrak{k} = \frac{\varrho \mathfrak{v}}{c}$[3]),

[1]) W. Kaufmann: Physik. Zeitschr. 4., стор. 54. 1902. M. Abraham: Phys. Zeitschr. 1902, стор. 52. Той сам: Göttingen Nachrichten 1903, стор. 90. Той сам: Gött. Nachr. 1902, стор. 20.

[2]) Föppl Abraham: Theor. d. Elektr. т. I. стор. 235.

[3]) Föppl-Abraham: Theorie d. Elektr. I. стор. 190.

де ϱ є електричною густотою, а $\mathfrak{v}$ скоростею електронів. В наслїдок сего отримаємо перше рівнане елекронової теориї:

(I) $$curl\ \mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 4\pi\mathfrak{k}.$$

Друге рівнане теориї Maxwell-а:

$$curl\ \mathfrak{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$ [1])

означає, що вир електричної сили є пропорциональний до маґнетної індукциї $\mathfrak{B}$. В електроновій теориї переміняє ся она на

(II) $$curl\ \mathfrak{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t},$$

з огляду на се, що для етеру $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$. Крім сих двох задержує ще електронова теория слїдуючі рівнаня:

(III) $div\ \mathfrak{E} = 4\pi\varrho$; [2])

(IV) $div\ \mathfrak{H} = 0$.

До тих рівнань долучає ще H. A. Lorentz рівнане, яке подає електро-маґнетну силу на одиницю наряду:

(V) $$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{S}].$$ [3])

Притім треба додати, що цїлий наряд, який ми приписуєм електронови і який уважаємо за елементарну скількість електричности, мусить бути роздїлений в певнім просторі. Сей саме простір крім наряду називаємо „електроном“. Він може порушати ся в просторі лише яко цїлість, не може однак бути роздїлений.

Коли отже електричність о густотї ϱ є роздїлена на електроні, тодї до неї відносимо електро-маґнетну силу $\mathfrak{F}$. Послїдна складає ся з двох частий, а іменно з зовнїшної сили $\mathfrak{F}_1$ електро-маґнетного поля і з внутрішної електро-маґнетної сили $\mathfrak{F}$, якою електрон сам на себе дїлає. Так само треба роздїлити сили, які походять від самого електрону $\mathfrak{E}$ і $\mathfrak{H}$ та сили зовнїшні $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{E}_1$. В наслїдок сего рівнане (V) роздїлить ся на:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}].$$

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{E}_1 + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}_1].$$

Коли дальше динаміка електрону має бути збудована на чисто електро-маґнетних основах, тодї крім електро-маґнетних сил нїяких інших сил впроваджувати не треба. В случаю істнованя сих послїдних, які мали-б дїлати на електрон, динаміка електрону не була-б вже чисто електро-маґнетною.

[1]) l. c. стор. 238. [2]) l. c. стор. 239. [3]) l. c. стор. 412.

Ідучи дальше за думкою динаміки цїпких тїл жадаємо, щоби зовнїшні і внутрішні сили, які дїлають на елемент обєму до електрону були собі рівні, але в противних напрямах; отже:

$$\text{(VI)} \qquad \iiint (\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1)\varrho\, dv = 0$$

а також цїлковитий момент тих сил:

$$\text{(VIa)} \qquad \iiint (\mathfrak{r}_1 \mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1)\varrho\, dv = 0.$$

Два послїдні рівнаня називають ся в динаміцї електрону „основними динамічними рівнанями“.

Дальше мусимо приписати електронови якісь скінчені розміри; годї уважати електрон за точку, бо колиб так було, тодї електро-маґнетні сили в тїй точцї були-б нескінчено великі, а напрям їх був би неозначений. Коли однак заложимо, що електрон посїдає справдї малі але скінчені розміри, тодї не міг би він виконувати оборотових рухів. З того слїдує, що в електро-маґнетній механїцї не істнує материяльна точка, як в аналїтичній механїцї. Електрон треба уважати за цїпке тїло, яке є спосібним так до руху поступового, як й до оборотового. Коли так, тодї до основних рівнань динаміки електрону треба долучити еще рівнане з кінематики цїпких тїл:

$$\text{(VII)} \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\mathfrak{r}],$$

де $\mathfrak{v}_0$ означає скорість осередка маси електрону, $\mathfrak{u}$ кутову скорість, а $\mathfrak{r}$ луч поведений з осередка маси. — Послїдне рівнане (VII) зване кінематичним рівнанем поясняє, що електричність годї відлучити елементови обєми електрону, она є з послїдним невіддїльною так, як важка матерія на елементах обєму цїпкого тїла. З рівнаня сего слїдує дальше, що електрон так само, як й цїпке тїло посїдає шість степений свободи руху.

Вернїм ще до перших чотирох рівнань (I—IV)[1]. Можна їх ще подати в інший спосіб, а именно при помочи тзв. електро-маґнетних потенціялів. Рівнане (IV) каже нам, що вектор $\mathfrak{H}$ не має жерел; сповняти отже буде его така вартість на $\mathfrak{H}$:

$$1) \qquad \mathfrak{H} = curl\, \mathfrak{A}.$$

Ново впроваджений вектор $\mathfrak{A}$ є векторовим потенціялом, якого:

$$div\ \mathfrak{A} = 0.$$

Коли введемо в (II) рівнане 1), тодї покаже ся, що:

$$curl\, (\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}) = 0.$$

[1]) M. Abraham: Prinzipien der Dynamik des Elektrons, Ann. d. Phys. 1903, стор. 103.

З сего знов слїдує дальше, що $(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t})$ мусить бути відємним gradient-ом якогось скалярного (безнапрямного) потенціяму Φ, отже:

$$\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi.$$

$$2) \qquad \mathfrak{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}.$$

Коли однак маємо до дїла з постійним полем, тодї:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = 0,$$

а Φ редукує ся до електро-статичного потенціялу.

Впровадженем вектору $\mathfrak{A}$ і скаляру Φ вдоволили ми рівнаням II) і IV) рівнанями 1) і 2). Ходить тепер о се, щоби $\mathfrak{A}$ і Φ так вибрати, щоби рівнаня I) і III) були також сповнені. Вставмо отже вартости на $\mathfrak{E}$ і $\mathfrak{H}$ з рівнань 1) і 2) в I) і III), то дістанемо:

$$curl^2\, \mathfrak{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} + \nabla \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 4\pi\mathfrak{k}$$

і: $$-div\, \nabla \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} div\, \mathfrak{A} = 4\pi\varrho.$$

Примінюючи ту правила векторової аналїзи мусимо сї рівнаня написати так:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathfrak{A} + \nabla (\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + div\, \mathfrak{A}) = 4\pi\mathfrak{k},$$

і: $$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\, div\, \mathfrak{A} = 4\pi\varrho.$$

З огляду однак на дефініції Φ і $\mathfrak{A}$ маємо, що:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + div\, \mathfrak{A} = 0,$$

в наслїдок чого отримаємо:

$$3) \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathfrak{A} = 4\pi\mathfrak{k}$$

$$4) \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = 4\pi\varrho.$$

В случаю, коли слїдувати-ме стан тривкий (stationärer Zustand), тодї Φ і $\mathfrak{A}$ не будуть залежати від себе; скаляр Φ перейде тодї в потенціял електро-статичного поля, а $\mathfrak{A}$ в векторовий потенціял маґнетного поля. Взагалї потенціяли подані рівнанями 3) і 4) називають ся „електро-маґнетними потенціялами“, а именно: Φ називає ся „скалярним електро-маґнетним потенціялом“, $\mathfrak{A}$ знов „векторовим електро-маґнетним потенціялом“.

Рівнаня руху електрону[1]).

Коли знаємо вішне поле, положенє, проводну скорість і оборотову скорість електрону, тоді вішна сила буде визначена рівнанєм:

$$\text{5)} \qquad \mathfrak{F}_1 = \iiint \varrho \, dv \, \mathfrak{F}_1 = \iiint \varrho \left(\mathfrak{E}_1 + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}_1]\right) dv\,;$$

а весь момент вішних сил буде:

$$\text{6)} \qquad \mathfrak{N}_1 = \iiint \varrho \, [\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}_1] \, dv = \iiint \varrho \left[\mathfrak{r}, \mathfrak{E}_1 + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}_1]\right] dv.$$

Ходить нам дальше о точку відносну в електроні. Для круглого-електрону обираємо за таку точку єго осередок (осередок кулї), з якого ведемо провідний луч $\mathfrak{r}$. В кінематичнім рівнаню $\mathfrak{v}_0$ є скоростию якраз згаданого осередка, а $\mathfrak{u}$ оборотовою скоростию електрону около єго осередка.

Коли однак наряд не бувби симетрично розложений на електронї, тодї відносну точку треба би визначити рівнанєм:

$$\text{(6a)} \qquad \iiint \varrho \, \mathfrak{r} \, dv = 0\,;$$

она відповідала би осередкови мас в аналїтичній механіці.

Приймім, що електрон відбуває лишень поступний рух, тодї $\mathfrak{u} = O$, а вішна сила представить ся в сей спосіб:

$$\text{(7)} \qquad \mathfrak{P}_1^{(1)} = \iiint \varrho \, \mathfrak{E}_1 \, dv + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{v}_0 . \iiint \varrho \, \mathfrak{H}_1 \, dv\right].$$

Електричне і маґнетне поле в просторі величини ряду проміру електрону можна все вважати за однородне; в тім случаю поступна часть вішної сили зредукуєсь до:

$$\text{(7a)} \qquad \mathfrak{P}_1^{(1)} = e\left\{\mathfrak{E}_1 + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{H}_1]\right\};$$

де e означає нам наряд електрону.

Вішний же момент оборотової сили для чистого поступного руху буде:

$$\text{(7b)} \qquad \mathfrak{N}_1^{(1)} = \iiint \varrho \, [\mathfrak{r}\,\mathfrak{E}_1] \, dv + \frac{1}{c} \iiint \varrho \, [\mathfrak{r}\,[\mathfrak{v}_0 \mathfrak{H}_1]] = O,$$

бо так $\mathfrak{E}_1$ як $[\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{H}_1]$ можна виймити перед знак інтеґрованя, а дальше після 6a)

$$\iiint \varrho \, \mathfrak{r} \, dv = 0.$$

Приймім дальше, що електрон крім поступного руху відбуває ще обороти около свого осередка. Тодї долучить ся до вішної сили ще складова оборотова в маґнетнім поли:

$$\mathfrak{P}_1^{(2)} = \frac{1}{c} \iiint \varrho \, [[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}], \mathfrak{H}_1] \, . \, dv.$$

[1]) Abraham: Theorie d. Elekt. II. стор. 147. A. H. Bucherer: Math. Einf. in d. Elektronentheorie 1904, стор. 118. і дальші.

Рівнанє се на основі правил векторового рахунку представить ся дальше так:

$$\text{7c)} \qquad \mathfrak{P}_1^{(2)} = \frac{1}{c} \iiint \varrho \, \{\mathfrak{r}\,(\mathfrak{u}\,\mathfrak{H}_1) - \mathfrak{u}\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{H}_1)\} \, dv.$$

Бачимо отже, що й се виражене також зникає; значить, що часть оборотової, вішної сили в однороднім, маґнетнім поли зникає. Але оборотовий момент сеї складової вішної оборотової сили:

$$\mathfrak{N}_1^{(2)} = \frac{1}{c} \iiint \varrho \, [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{H}_1) \, dv = \frac{1}{c}\left[\mathfrak{u} . \iiint \varrho \, \mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{H}_1) \, dv\right]$$

є ріжним від зера. Момент сей є пропорцональний до векторового добутка з оборотової скорости $\mathfrak{u}$ і вішної маґнетної сили $\mathfrak{H}_1$. Все те однак буде сповнене під умовою, що електрична маса є симетрично розділена з огляду на єї осередок. Отже:

$$\mathfrak{N}_1^{(2)} = \lambda\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{H}_1],$$

де λ є сочинником пропорцональности, який по обчисленю для обємного наряду електрору оказав ся:

$$\lambda_v = \frac{ea^2}{5c},$$

а для поверхневого наряду:

$$\lambda_\sigma = \frac{ea^2}{3c},$$

коли a означати-ме луч електрону.

Коли впровадимо виражевя на вішну силу в динамічні рівнаня (VI), дістаємо їх в такій формі:

$$\text{8)} \qquad \mathfrak{P}_1 + \iiint \varrho \, \mathfrak{F} \, dv = 0$$

$$\text{8a)} \qquad \mathfrak{N}_1 + \iiint \varrho \, [\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}] \, dv = 0.$$

Ходить тепер о визначенє вектору $\mathfrak{F}$, сили, яка походить від самого електрону.

Щоби визначити внутрішні сили, требаби для кождої точки електрону визначити електро-маґнетне поле, а опісля електромаґнетні сили, які дїлають на весь обєм, а дальше треба їх зложити подібно, як учать основи аналїтичної механіки цїпких тїл. Коли електрон в часї t зробив якусь дорогу, тодї внутрішна сила витворена ним самим в тім самім часї t буде залежати від скорости і від прискореня, якого він набрав в тім інтервалї часу. Ту вже якраз бачимо основну ріжницю між динамікою цїпких тїл а динамікою електрону. В першій визначають вішні сили часові зміни проводної або оборотової скорости, при данім розкладі маси тїла. Динамічні однак рівнаня в електроновій динаміцї є рівнанями функцийними, які вяжуть з собою положенє електрону, скорість і прискоренє руху поступного і оборотового в якімсь інтервалї часу t. З огляду на се рівнаня динаміки електрону справляють більші трудности в розслїджуваню.

Можна однак улекшити собі цїлу річ в сей спосіб, коли заложимо, що електрони в катодових лучах і β-лучах відбувають рухи майже тривкі (quasi-stationäre Bewegung); в сей спосіб витворене електро-маґнетне поле буде майже таке саме, яке витворивби електрон, котрий порушавби ся рівномірно.

Припустїм, що електрон з нарядом e порушаєсь зі скоростию $\mathfrak{v}$ і що на него не дїлають ніякі внїшні сили, які би походили від якоїсь іншої матерії; лишень електро-маґнетні сили і таку-ж енерґію беремо під увагу. А що ми в динаміцї електрону всї сили і енерґію відносимо до етеру, то можемо все віддїлити дїлане не-електро-маґнетних сил якоюсь стїною, яку можемо умістити в безконечности. В сей спосіб можемо означити поле для одного електрону з поминанем дїланя інших електронів. Коли знати-мем поле, тодї означимо величину его руху і енерґію.

Густоту електро-маґнетного поля, витвореного електроном означимо:

9) $$\mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\,\mathfrak{S},$$

де $\mathfrak{S}$ є вектором Poyting-а:

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathfrak{F}\,\mathfrak{H}].$$

Величина ся подає нам виплив енерґії електро-маґнетного поля на одиницю поверхнї. Густота поля буде отже:

9a) $$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c}\,[\mathfrak{F}\,.\,\mathfrak{H}].$$

$\mathfrak{g}$ представляє ту нїчо іншого, як електро-маґнетну величину руху на одиницю поверхнї. Вся знов електро-маґнетна величина руху в просторі v буде сумою поодиноких $\mathfrak{g}$ на елемент простору dv; отже:

9b) $$\mathfrak{G} = \iiint \mathfrak{g}\, dv.$$

Величину $\mathfrak{G}$ називає M. Abraham імпульсом електро-маґнетного поля електрону. Коли електрон відбуває оборотовий рух, тодї мусить бути оборотовий електро-маґнетний імпульс, якого рівнанем буде:

10) $$\mathfrak{Y} = \iiint [\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}]\, dv.$$

Возьмім під увагу оден лишень електрон та поминїм внїшні електро-мачнетні сили, витворені іншими електронами $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{H}_1$, тодї будемо мати до дїла лишень з внутрішними силами електрону $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$. Цїла отже сила, яка дїлає на електрон буде:

11) $$\mathfrak{P} = \iiint \varrho\,.\,\mathfrak{F}\,.\,dv = \iint \mathfrak{N}\, ds - \frac{d\mathfrak{G}}{dt},$$

бо сила $\mathfrak{F}$ складає ся з сил неелектро-маґнетної природи $\mathfrak{N}$, які походять від інших тїл, а які ми відгородили поверхнею s, яким знов протидїлати-ме сила, що має своє жерело в часовій зміні імпульсу $\mathfrak{G}$. А що поверхню s для етеру обрали ми в безконечности так, що в часї, в якім тревае явище, електро-маґнетне поле не дійде до неї, тому вектор $\mathfrak{N}$ зникає на поверхни s; в наслїдок сего стає ся зером перший член 11) і остає:

11a) $$\mathfrak{P} = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt}.$$

Цїла отся сила, якою електро-маґнетне поле дїлає на електрон, рівнає ся відємній часовій зміні електро-маґнетної величини руху поля.

Анальоґічно момент сил буде означений моментом сил на поверхні s поменшеним о часову зміну моменту імпульсового $\mathfrak{Y}$; тому:

$$\mathfrak{R} = \iint [\mathfrak{r}\,\mathfrak{N}]\, ds - \frac{d\mathfrak{Y}}{dt},$$

де $\mathfrak{r}$ є провідним лучем зачеркненем з осередка електрону до постійної точки в просторі. Треба однак зазначити, що оба моменти $\mathfrak{R}$ і $\mathfrak{Y}$ відносимо до осередка електрону, який порушає ся зі скоростию $\mathfrak{v}_0$. А що все відбуває ся в етері, тому стїну s можна все посунути аж до безконечности так, що для неї сили електро-маґнетного поля зникають, значить, що:

$$\iint [\mathfrak{r}\,\mathfrak{N}]\, ds = 0$$

і отримаємо $\mathfrak{R}$:

12) $$\mathfrak{R} = -\frac{d\mathfrak{Y}}{dt}$$

З огляду однак на рівнане 10) маємо:

$$\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} = \iiint [\mathfrak{r}\,\mathfrak{g}]\, dv.$$

Коли знов $\mathfrak{r}$ є провідним лучем, поведеним з осередка електрону, тодї:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = -\mathfrak{v}_0;$$

отже: $$\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} = \iiint \left[\mathfrak{r}, \frac{d\mathfrak{g}}{dt}\right] dv = [\mathfrak{G}\,\mathfrak{v}_0].$$

З анальоґії однак з оборотовим рухом цїпких тїл, не тяжко заприміти, що перший член правої сторони послїдного рівнаня представляє нам часову зміну електро-маґнетної величини руху на одиницю поверхнї при постійнім $\mathfrak{r}$; є се отже оборотивий момент $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R} = \iiint \left[\mathfrak{r}, \frac{d\mathfrak{g}}{dt}\right].$$

В наслїдок послїдних двох рівнань отримаємо остаточно оборотовий момент електро-маґнетних сил електрону: 2

12a) $\mathfrak{N} = \iiint [\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}]\,\varrho\,dv = [\mathfrak{v}_0 \mathfrak{G}] + \frac{d\mathfrak{Y}}{dt}.$

Коли рівнаня 11a) і 12a) вставимо в динамічні рівнаня (VI) і узглядинмо рівнаня 8) і 8a), тоді дістанемо динамічну звязь між вністними і внутрішними силами електрону:

13) $$\mathfrak{P}_1 = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}.$$

13a) $$\mathfrak{N}_1 = [\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{G}] + \frac{d\mathfrak{B}}{dt}.$$

Ся динамічна форма рівнань подана M. Abraham-ом відповідає зовсім рівнаням руху цїпкого тїла; під зглядом формальним є они тотожні зі згаданими рівнанями. Заходить однак тут ріжниця, а іменно: в механїцї цїпких тїл уважаємо складові поступного і оборотового імпульсу за лінїйні функциї поступної і оборотової скорости, коли знов не маємо сего при електро-маґнетній механїцї; тут залежність тих величин від скорости не дає нам лінїйної функциї. Не лишень хвилевий рух в данім моментї часу впливає на імпульси електро-маґнетного поля, але всї рухи, які електрон зробив від часу спочинку. Оба імпульси визначають нам інтеґрали над цілим простором, який займає електро-маґнетне поле; отримаємо єго однак через суперпозицию всїх піль, які електрон витворив від початку руху аж до даної хвилї. З тої саме причини заходять в рівнанях динаміки електрону великі комплїкациї; лишень для специяльних родів рухів, пр. для рівномірного поступного руху слїдують якісь функциї між скоростию а імпульсами.

З порядку річи треба тепер випровадити рівнаня на енерґію поля, витвореного електроном. Енерґія ся W буде все скінченою величиною, коли від хвилї спочинку електрону ділати будуть на него лишень скінчені вншні сили.

Возьмім під увагу простір v ограничений стїною s, в якім електрон витворює електро-маґнетне поле. На кождий елемент обєму dv електрона ділає внутрішна сила $\varrho\,\mathfrak{F}\,dv$; она витворює в одиниці часу працю:

$$(\mathfrak{v}\,\mathfrak{F})\,\varrho\,dv = (\mathfrak{v}\,\varrho_1 \mathfrak{E})\,dv.$$

Складова знов сила, яка походить від маґнетної сили $\mathfrak{G}$, не виконує нїякої працї, бо она ділає нормально до напряму розходженя електричности. Через зінтеґроване сего рівнаня отримаємо працю доконану електро-маґнетними силами в просторі v:

$$\iiint(\varrho\,\mathfrak{v}, \mathfrak{E})\,dv = \frac{dA}{dt}.$$

А що $\varrho\mathfrak{v}$ представляє сам густоту конвекційного тока, який ми означили $\mathfrak{f}$, тому:

$$\frac{dA}{dt} = c\iiint(\mathfrak{f}, \mathfrak{E})\,dv = \frac{c}{4\pi}\iiint\left(\mathfrak{E}, curl\,\mathfrak{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}\right)dv.$$

Возьмім тепер під увагу таке виражене:

$$\iint[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]_{\to n}\,ds = \iiint \mathfrak{H}\,curl\,\mathfrak{E}\,dv - \iiint \mathfrak{E}\,curl\,\mathfrak{H}\,dv,$$

де n означає, що беремо сей інтеґрал в нормальнім напрямі до поверхнї s. Коли знов порівнаємо з собою два послїдні рівнаня, так побачимо, що:

$$\frac{c}{4\pi}\iiint(\mathfrak{E}\,curl\,\mathfrak{H})\,dv = \frac{c}{4\pi}\iiint(\mathfrak{H}\,curl\,\mathfrak{E})\,dv - \frac{c}{4\pi}\iint[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]_{\to n}\,ds.$$

По обчисленю однак показує ся, що:

14) $$\frac{dA}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\}\frac{dv}{4\pi} - \iint\frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]_{\to n}\,ds.$$

Рівнане 14) є рівнанєм енерґії. Перша часть:

$$\iiint\frac{dv}{8\pi}\{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\} = W$$

представляє нам енерґію електро-маґнетного поля; друга знов часть, се енерґія проміньованя, — се нїчо іншого як вектор Poyting-а:

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}] \text{ над поверхнею } s.$$

Напишемо отже рівнанє енерґії в такій формі:

14a) $$\frac{dA}{dt} = -\frac{dW}{dt} - \iint\mathfrak{S}\,ds.$$

Але стїну s можемо собі уявити дуже далеко, як се ми висше вже учинили, так, що електро-маґнетне поле не доходить до неї, тожі нїяка енерґія не буде через ню випливати, значить, що:

$$\iint\mathfrak{S}\,ds = 0,$$

отже:

14b) $$\frac{dW}{dt} = -\frac{dA}{dt}.$$

Приріст енерґії поля в елементї часу dt рівназ ся умалимкови виконаної працї внутрішними електро-маґнетними силами $\mathfrak{F}$.

З кінематичного рівнаня (VII) слїдує, дальше, що:

$$\frac{dA}{dt} = \iiint(\mathfrak{v}\,\mathfrak{F})\,\varrho\,dv = (\mathfrak{v}_0, \iiint\varrho\,\mathfrak{F}\,dv) + (\mathfrak{u}, \iiint[\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}]\,\varrho\,dv).$$

Коли вставимо в се рівнане висліди з 8) і 8a), отримаємо виражене на працю в такім видї:

14c) $$\frac{dA}{dt} = -(\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{P}_1) - (\mathfrak{u}\,\mathfrak{N}_1).$$

По узглядненю однак рівнань 14b) і 14c) дістанемо остаточне рівнане енергії:

15) $$\frac{dW}{dt} = (\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{P}_1) + (\mathfrak{u}\,\mathfrak{N}_1).$$

Приріст отже електро-маґнетної енерґії рівнає ся праці, виконаній вніішними силами. З рівнаня знов 14c) читаємо, що праця, виконана вніішними силами, має противний напрям до праці, виконаної внутрішними силами. Колиби ми приняли крім електро-маґнетних сил ще якісь інші сили, механїчні, тоді згадане рівнане не булоби сповнене. Того рода сили після нашого вступного заложеня мусять бути вилучені.

По вставленю однак в рівнане 15) вартостий за $\mathfrak{P}_1$ і $\mathfrak{N}_1$ з 13) і 13a), отримаємо рівнане на енерґію, виражене електро-маґнетними імпульсами:

16) $$\frac{dW}{dt} = (\mathfrak{v}_0\,\frac{d\mathfrak{G}}{dt}) + (\mathfrak{u}\,\frac{d\mathfrak{G}}{dt}) + (\mathfrak{G}\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}_0]),$$

яке мати буде велике значінє в слідуючих частях динаміки електрону.

Нїм однак прийдемо до частної динаміки електрону, зробім перед тим до сего приготоване через впроваджене нових величин. Най T представляє нам маґнетну енерґію, а U електричну; їх ріжниця:

17) $$T - U = L$$

означає нам „живу силу" (lebendige Kraft). Величина ся має значінє функциї Lagrange'а на енерґію в механїці.

Означім дальше T і U при помочи електро-маґнетних потенціялів [1) і 2)], тоді отримаємо:

17a) $$T = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{H}^2\,dv = \frac{1}{8\pi}\iiint(\mathfrak{H}\;curl\,\mathfrak{A})\,dv$$

17b) $$U = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{E}^2\,dv = -\frac{1}{8\pi}\iiint(\mathfrak{E},\,\nabla\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t})\,dv.$$

Коли рівнане 17a) зінтеґруємо per partes і знов заложимо, що інтеґрал над граничною стїною s раз на все зникає, а дальше впровадимо рівнане (II), тоді дістанемо:

17c) $$T = \frac{1}{2}\iiint(\mathfrak{k}\,\mathfrak{A})\,dv + \iiint\frac{dv}{8\pi c}(\mathfrak{A},\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}).$$

При інтеґрованю per partes рівнаня 17b) зникнуть так само поверхневі інтеґрали. В рахунку отримаємо там між іншими оден складник: $div\,\Phi\,\mathfrak{E}$, який по приміненю векторового рахунку розложить ся:

$$div\,\Phi\,\mathfrak{E} = \Phi\,div\,\mathfrak{E} + \mathfrak{E}\,\nabla\Phi:$$

по приміненю однак твердженя Gauss-а отримаємо:

$$\iiint \mathfrak{E}\,\nabla\,\Phi\,dv = -\iiint\Phi\,div\,\mathfrak{E}\,dv = 4\pi\iiint\Phi\,\varrho\,dv.$$

В кінци одержимо взір на U:

17d) $$U = \frac{1}{2}\iiint\Phi\,\varrho\,dv - \iiint\frac{dv}{8\pi c}(\mathfrak{E},\frac{\partial\mathfrak{A}}{dt}).$$

Впровадьмо дальше за M. Abraham-ом ще дві нові величини, а іменно:

$$\Psi = \Phi - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{A}),$$

та простірний інтеґрал сеї величини:

18a) $$V = \frac{1}{c}\iiint\Psi\,\varrho\,dv,$$

який Abraham називає функцією сил (Kräftefunktion). Єї можна ще написати так:

18b) $$V = \frac{1}{c}\iiint\Phi\,\varrho\,dv - \frac{1}{c}\iiint(\mathfrak{k}\,\mathfrak{A})\,dv,$$

де все $\mathfrak{k} = \varrho\,\mathfrak{v}$. З ріжниці 17c) і 17d) отримаємо вираженє на таку силу L:

18c) $$L = \frac{1}{8\pi c}\frac{d}{dt}\iiint(\mathfrak{E}\,\mathfrak{A})\,dv - V.$$

Рівномірно-поступний рух.

Приймім, що електрон порушає ся від якогось досить довгого часу поступно з постійною скоростию так що-до єї напряму, як до єї величини. Кінематичне рівнане тут не буде вповні сповнене, бо: $\mathfrak{u} = 0$, остає лишень $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0$. Коли вісь x-ів оберемо за напрям руху, тоді складові скорости в напрямі осий y і z зникають: $\mathfrak{v}_y = \mathfrak{v}_z = 0$; остає лишень скорість в напрямі руху $\mathfrak{v}_x = \mathfrak{v}$. В попереднім уступі було вже згадане, що поле скалярного потенціялу Φ, так само й векторового потенціялу $\mathfrak{A}$ є суперпозицією піль, які електрон витворив в часі від спочинку до даної хвилї. Поле залежало отже від скоростий електрону, які він мав в кождій хвилї того інтервалу часу.

В рівномірно-поступнім руху рух в данім якімсь моментї є під кождим зглядом рівний рухови в попереднім та слідуючім моментї. Тому поле потенціялів Φ і $\mathfrak{A}$ буде постійнне в віднесеню до якогось укладу, який довершує разом також рух зі скоростию $\mathfrak{v}$.

Коли отже електро-маґнетні потенціяли є статочними в віднесеню до подвижного укладу, тоді анальоґічно до рівнань ґідромеханїки напишемо:

$$\frac{D\Phi}{Dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+(\mathfrak{v}\nabla)\,\Phi=0$$

$$\frac{D\mathfrak{A}}{Dt}=\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}+(\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{A}=0.$$

А що рух слїдує лишень в напрямі оси x, отже:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\mathfrak{v}_x\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}=-\mathfrak{v}_x\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial t}.$$

В наслїдок сего рівнаня 3) і 4) приберуть такий вид:

19) $$(1-\beta^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=-4\pi\varrho,$$

19a) $$(1-\beta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial z^2}=-4\pi\varrho\beta,$$

коли $\beta=\frac{\mathfrak{v}_x}{c}=\frac{|\mathfrak{v}|}{c}$. Густота конвекцийного тока в нормальних напрямах до напряму руху зникає, отже: $\mathfrak{k}_y=\mathfrak{k}_z=0$, остає тільки $\mathfrak{k}_x=\varrho\beta$, а відси слїдує, що:

19b) $\mathfrak{A}_x=\beta\,\Phi$; $\mathfrak{A}_y=\mathfrak{A}_z=0$.

Коли в сей спосіб отримані вартости обох потенціялів вставимо в рівнаня 1) і 2). то обчислимо складові електричної сили, а іменно:

19d) $$\begin{cases}\mathfrak{E}_x=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial x}=-(1-\beta^2)\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\\ \mathfrak{E}_y=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\\ \mathfrak{E}_z=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\end{cases}$$

дальше:

19e) $$\begin{cases}\mathfrak{H}_x=0\\ \mathfrak{H}_y=\dfrac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial z}=\beta\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}=-\beta\,\mathfrak{E}_z\\ \mathfrak{H}_z=-\dfrac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial y}=-\beta\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=\beta\mathfrak{E}_z.\end{cases}$$

При знаних $\mathfrak{E}$ і $\mathfrak{H}$ можна все обчислити складову електро-маґнетної сили $\mathfrak{F}$:

19f) $$\begin{cases}\mathfrak{F}_x=-(1-\beta^2)\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\\ \mathfrak{F}_y=\mathfrak{E}_z-\beta\,\mathfrak{H}_z=-(-\beta^2)\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\\ \mathfrak{F}_z=\mathfrak{E}_z+\beta\,\mathfrak{H}_z=-(-\beta^2)\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}.\end{cases}$$

З сих рівнань бачимо, що $\mathfrak{F}$ повстало з якогось скаляру $(1-\beta^2)\,\Phi$. Сей скаляр є нїчим іншим, як лишень Ψ, як о тім можемо легко переконати ся, коли в рівнане 18) вставимо вартости $\mathfrak{A}$ з рівнаня 19b); отже:

$$(1-\beta^2)\,\Phi=\Psi.$$

В наслїдок сего напишемо, що:

20) $$\mathfrak{F}=-\nabla\Psi.$$

Сей скалярний потенціял Ψ називає M. Abraham „конвенцийним потенціялом“. Сповняє він таке ріжничкове рівнане:

20a) $$\varkappa^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=4\pi\varrho\,\varkappa^2,$$

наколи $\varkappa=\sqrt{1-\beta^2}$. Чинник $\varkappa$ буде все величиною додатною і дїйсною, бо електрон порушає ся зі скоростию меншою від скорости сьвітла, отже $\beta<1$.

Конвекцийний потенціял Ψ має таке саме значінє при руху поступнім електрону, як електро-статичний потенціял φ для електрону в спочинку. Як відємний ґрадієнт φ подає нам силу, яка дїлає на електрон в спочинку, так відємний ґрадієнт Ψ подає нам силу, яка дїлає на електрон в рівномірно-поступнім руcї. Як умалимок енерґії електро-статичної:

21) $$U=\frac{1}{2}\iiint\varrho\,dv\,\varphi$$

подає нам працю, яку зискує ся при зміні конфіґурації електронів в спочинку, так умалимок функциї сил:

21a) $$V=\frac{1}{2}\iiint\Psi\varrho\,dv$$

подає нам працю, яку можна отримати при зміні в конфіґурації в системі електронів, які порушають ся рівномірно-поступно.

Легко пізнати, що еквіпотенціяльні поверхнї для конвенцийного потенціялу будуть сплощеними оборотовими еліпсоідами, яких осередок впадає в осередок електрону, а оборотова вісь в напрям руху, а відношенє їх осий: $\varkappa$: 1. Такі еліпсоіди називають еліпсоідами Heaviside-a. Поверхнї рівного потенціялу наряджeного тїла в спочинку є все спів-осередними кулями навіть в дуже великім віддаленю від него. Так само поверхні рівного, конвекцийного потенціялу прибирають навіть в великім віддаленю від електрону вид еліпсоід Heaviside-а. Сила $\mathfrak{F}$ має однак все нормальний напрям до тих поверхний.

Коли $\beta = 0$, тоді поле визначене вектором $\mathfrak{F}$ переходить в електро-статичне поле, визначене вектором $\mathfrak{E}$, а конвекцийний потенціял Ψ переходить в електро-статичний φ; громада подібних еліпсоід Heaviside-а переходить в громаду спів-осередних куль.

Розходить ся нам тепер о визначене конвекцийного потенціяла Ψ. Тому звернім ся до ріжничкового рівнаня 20а). Перейде оно в рівнане Poisson-а, коли через субституції впровадимо нові незалежні змінні такі:

22) $$x = \varkappa x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 .$$

Положім рівночасно:

22a) $$\varrho = \frac{\varrho_0}{\varkappa}.$$

Тоді рівнане конвекцийного потенціяла напишемо:

22b) $$\nabla_0{}^2\, \Psi = -4\pi\varkappa\varrho_0.$$

Сорядні $x_0\, y_0\, z_0$ і електрична густота ϱ_0 належать до електро-статичної системи S_0, а сорядні $x\, y\, z$ і ϱ до рухомої системи S. Коли порівнаємо з собою S_0 і S, тоді показуєсь, що система S_0 повстає з S через видовжене рівнобіжне до напряму руху, в наслідок чого вісь x видовжилась в відношеню $\varkappa^{-1}$; густота знов з огляду на 22а) повинна би зменшити ся в відношеню $\varkappa$ так, щоби відповідні елементи обєму S і S_0 мали такий самий наряд. Електро-статичний потенціял φ_0 системи S_0 сповняє рівнане Poissona:

22c) $$\nabla_0{}^2\, \varphi_0 = -4\pi\varrho_0,$$

якого загальним розвязанем є:

22d) $$\varphi_0 = \iiint \frac{\varrho_0 dv_0}{r_0} = \int \frac{de_0}{r_0}.$$

Завважмо дальше, що наряди відповідних елементів обєму в S_0 і S є ті самі, то отримаємо по порівнаню 22с) і 22b), що:

23) $$\Psi = \varkappa\, \varphi_0 = \varkappa \iiint \frac{\varrho_0}{r_0}\, \varkappa v_0,$$

де:

$$r_0 = \sqrt{(x_0 - \xi_0)^2 + (y_0 - \eta_0)^2 + (z_0 - \zeta_0)^2} = \sqrt{\frac{1}{\varkappa}(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

є віддалене точок $(x_0\, y_0\, z_0)$ і $(\xi_0\, \eta_0\, \zeta_0)$ в системі S_0, які відповідають точкам $(x\, y\, z)$ і $(\xi\, \eta\, \zeta_0)$ в системі S. З сего бачимо, що через таку трансформацію визначене конвекцийного потенціяла зводить ся до визначеня статистичного потенціяла.

По порівнаню складових електро-статичної сили $\mathfrak{E}_0 = -\nabla_0 \varphi_0$ в системі S_0 зі складовими електро-маґнетної сили $\mathfrak{F} = -\nabla\Psi$ в системі S, отримаємо такі реляції:

23a) $$\begin{cases} \mathfrak{F}_x = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} = -\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} = \mathfrak{E}_{0,x} \\[2ex] \mathfrak{F}_y = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} = -\varkappa\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial y_0} = \varkappa\,\mathfrak{E}_{0,y} \\[2ex] \mathfrak{F}_z = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial z} = -\varkappa\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial z_0} = \varkappa\,\mathfrak{E}_{0,z} \end{cases}$$

Складова електро-маґнетної сили при рівномірній трансляції в напрямі руху рівнає ся складовій електричної сили, коли знов дві інші складові нормальні до напряму руху є в відношеню $\varkappa = \sqrt{1-\beta^2}$ разів поменшені від електро-статичної сили.

Коли так маємо розвязаний електро-статичний проблєм для системи S_0 через розклад потенціялу, тоді легко можемо перейти до розвязаня системи S, яка відбуває рівномірний рух; она повстала з S_0 через контракцію рівнобіжну до напряму руху у відношеню $\varkappa$. Внутр системи S_0 електро-статичний потенціял є постійний, а електро-статичні сили $\mathfrak{E}_0$ там не істнують; анальоґічно в системі S конвекцийний потенціял внутр еї є постійний, а електро-маґнетні сили $\mathfrak{F}$ зникають. Як в системі S_0 розклад рівноваги буде означений після W. Thomsona через minimum електро-статичної енерґії U_0, так само розклад електричности на провіднику системи S відзначає ся тим, що старає ся функцію сил:

23b) $$V = \varkappa\, U_0 + \frac{1}{2}\iiint \Psi\varrho\, dv$$

звести до minimum.

Величина руху і вигляд електрону.

Возьмім під увагу електрон, який порушає ся поступним рухом з якоюсь скоростию по прямій лінії. Виводи попередного уступу немов промовляють за тим, що рівномірно-поступний рух змінив вйішний вид електрону, а іменно з кулї на оборотову еліпсоіду. Чи дійсно така деформація слїдувала, розкажемо низше. На разї приймаємо, що маємо до дїла з еліпсоідальним електроном, який порушає ся рівномірно по прямій лінії. По якімсь досить довгім часї від початку поступного руху вся енерґія і величина руху електро-маґнетного поля будуть постійні під услівем, що скорість електрону є менша від скорости сьвітла. Енерґія і величина руху складати ся будуть з енерґії і величини руху електро-маґнетних филь, які вислав електрон перед рівномірним рухом і в часї вже самого рівномірно-поступного руху. Дальший рух електрону буде вже означений енерґією і величиною руху чистої трансляциї.

Електромаґнетні імпульси $\mathfrak{G}$ і $\mathfrak{Y}$ не будуть змінятн ся з часом при такім руху, в наслідок чого після 13) і 13а) буде:

24) $$\mathfrak{P}_1 = 0$$

24а) $$\mathfrak{N}_1 = [\mathfrak{v}_0 \mathfrak{G}] = 0,$$

бо $\mathfrak{v} \parallel \mathfrak{G}$.

До піддержаня отже рівномірного руху еліпсоїдального електрону не треба ніякої вн̂ішної оборотової, сили коли електро-маґнетний імпульс має згідний напрям з напрямом руху. Рівномірний поступний рух електрону може тілько тоді слідувати без ніяких внішних сил, коли імпульс буде годити ся з рухом що до напряму.

Чи се условє руху буде сповнене, залежить се передовсім від вигляду і розміщеня наряду, який порушає ся конвекцийно. З попередних однак заложень що до симетричности розміщеня наряду слідує, що електро-маґнетний імпульс $\mathfrak{G}$ мати-ме напрям все згідний з напрямом руху, коли послідний буде слідувати рівнобіжно до напряму одної трех головних осий еліпсоїдального електрону. В случаю руху еліпсоїди в іншім напрямі треба внішної сили оборотової, яка піддержала би рівномірний поступний рух без жадних оборотів. Рух отже еліпсоїдального електрону в якімсь скіснім напрямі до єго трех головних осий не сповняє першої засади Newton-a; він не може слідувати дальше без діланя внішних сил.

Що до руху рівнобіжного до одної з трех головних осий еліпсоїдального електрону треба розріжнити в тім случаю рухи постійні і непостійні. За постійний поступний рух треба уважати сей, в якім при відклоненю головної оси з напряму руху повстає внутрішна сила, яка старає ся звернути головну вісь знов до напряму руху. Колиж однак по відклоненю головної оси повстають внутрішні сили того рода, що старають ся згадане відклонене ще побільшити, тоді такий рух треба уважати за нестійний.

Передтим сказали ми, що функція сил V подає нам працю при зміні конфіґурациї нарядів в руху. А що в сім случаю маємо до діла зі статочним полем, тому після 18с):

23) $$V = -L.$$

В наслідок сего поступні рухи постійні і непостійні будуть ріжнити ся між собою тим, що для перших функція сил прибирає minimum, а для других maximum при даній скорости. Зовсім аналоґічно як в механіці ціпких тіл стан постійної і непостійної рівноваги виріжняє ся через minimum, зглядно maximum енерґії положеня. M. Abraham оказав дальше, що V для руху в напрямі найменшої

оси еліпсоїдального електрону прибирає maximum своєї вартости, коли знов для руху в напрямі найбільшої оси minimum. Рух отсей в напрямі сеї послідної треба уважати за постійний. Розходить ся тепер о се, який буде рух згідний з напрямом середної оси. Коли возьмемо під увагу сили, які відклонюють найменшу вісь, так супроти них рух згідний з напрямом середної оси треба ще уважати за постійний; але непостійним окаже ся рух супроти таких відклонень, які ділають на найбільшу вісь. З огляду на се також поступний рух еліпсоїдального електрону в напрямі середної оси треба уважати за непостійний рух.

З тих причин M. Abraham є сеї думки, що електрони в катодних лучах і лучах раду, які мають рівномірно-поступні рухи, годі уважати за сплощені еліпсоїди, які порушають ся в рівнобіжнім напрямі до оборотової оси, бо за найменшою внішною причиною слідувалоб вивернене електрону. Коли однак можна уважати електрони катодних лучів і лучів радіо-активних тіл за сплощені еліпсоїди, тоді треба би конечно приняти також, що они мають рух згідний що до напряму з найбільшою осию еліпсоїди, бо в противнім случаю рівномірно-поступний рух без діланя внішних сил був би неможливий; тілько круглий електрон заховає постійний рух без огляду на відклоненя; тоді не треба ніякої внішної сили для піддержаня рівномірної трансляції. З сего слідує, що рівномірно-поступний рух круглого електрону зі скоростию меншою від скорости сьвітла буде свобідним рухом без діланя внішних сил. Такий лише електрон сповняє першу основу нютонівскої механіки. Сї чисто теоретичні виводи M. Abraham-a найшли ствердженє у досьвідах Kaufmann-a[1]).

Крім сеї теориї що до вигляду електрону, який порушає ся зі скоростию меншою від скорости сьвітла, істнують ще дві інші теориї, а іменно теория Bucherer-a[2]) і H. A. Lorentz a[3]).

Після Bucherer-a деформациі електрону слідує в сей спосіб, що обєм єго остає захований. Деформація отже, якої дізнає електрон в часі свого руху, повстає в наслідок діланя електро-динамічних сил $\mathfrak{F}$ на повехню електрону. Сили ті старають ся звести дану систему до такого стану, в якім потенціяльна енерґія доходить до minimum своєї вартости. А до сеї вартости дійде згадана система тоді, коли поверхня і поверхня рівного потенціялу точки спадуть

---

[1]) W. Kaufmann: Über die Konstantion des Elektrons, Ann: d. Ph. 1906.

[2]) A. H. Bucherer Math: Einf. in d. Elektronentheorie, стор. 57. і дальші.

[3]) H. A. Lorentz:. Versuch einer Theorie elektr. u. opt. Ersch. 1905, стор. 155. і дальші.

на себе. Бо коли в рівнанях потенціялу для еліпсоїди, яка відбуває рух, положимо $a = b = 0$, тоді побачимо, що поверхні рівного потенціялу точки є еліпсоїдальними поверхнями, яких оси позістають до себе у відношеню:

$$(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} : 1 : 1.$$

Коли куля з лучем a деформує ся в сего рода еліпсоїду, тоді при захованю обему оси еї будуть означені в сей спосіб:

$$a(1-\beta^2)^{\frac{1}{3}},\ a(1-\beta^2)^{-\frac{1}{3}},\ a(1-\beta^2)^{-\frac{1}{3}},$$

що легко можна оказати рахунком.

В перших однак часах по оголошеню своеї теориї деформації електрону не удалось однак Bucherer-ови потвердити еї доказом. Аж в 1909 р.[1]) удалось єму зробити досьвідний доказ своеї теорії, але дуже субтельний.

Проти праці Bucherer-а виступив Bestelmeyer[2]) з Göttingen, який виказав похибки в досьвідах Bucherer-а. Похибки ті незначні вправді, однак при їх узглядненю дійдемо до тих самих результатів, які Kaufmann одержав 1905. р., а якими він потвердив теоретичні виводи Abraham-а. Тому Bestelmeyer виказавши похибки в досьвідах Bucherera признає слушність Abraham-ови.

H. A. Lorentz для вияснення деяких цікавих оптичних явищ, передовсім неґативного результату інтерференції Michelson-Morley-а приймає, що електрон з початку круглий з лучем a деформує ся в еліпсоїду о осях:

$$a(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}},\ a,\ a.$$

Ся деформарцію, є отже сего рода, що оси нормальні до напряму руху остають незмінені, а вісь рівнобіжна до напряму руху зміняє ся у відношеню $(1-\beta)^{\frac{1}{2}}$. H. A. Lorentz приймає дальше, що електрон є стиснений, в наслідок чого густота розділеної електричности зміняє ся при скорім руху. При скорости рівній скорости сьвітла, електрон здеформував би ся в кружок, а на его кінцевих кругах густота булаб нескінчено велика.

Колиб однак електрон мав ся деформувати при поступнім руху з наслідок ділання електро-динамічної сили $\mathfrak{F}$, тоді для електрону в стані спочинку мусіли би ми приняти внутрішну силу, яка протиділала-б силї, котра походить від великого електричного наряду, щоби в сей спосіб електрон знов остав ся кулею. Сила така

[1]) A. H. Bucherer: Ann: d. Physik, 1909, стор. 513.
[2]) Bestelmeyer: Ann: d. Phys., 1909, стор. 166. 30. F.

не булаби вже силою електричної натури, але якоюсь елястичною силою. В такім случаю динаміка електрону не булаби вже чисто електро-маґнетною; електрон в рівномірно-поступнім руху не сповнив би тоді першої основи механіки Newton-а.

Рівнаня 19) і 20а) оперті на чисто електро-маґнетних основах все таки промавляють немов за деформацією електрону; з другої однак сторони, коли хочемо мати динаміку електрону оперту на чисто електро-маґнетних основах, мусимо відкинути, як висше ми показали, его деформацію в рівномірно-поступнім руху. Щоби однак уникнути трудности на яку ми вже висше вказали, розвяжемо сей проблем при помочи лінїй електро-маґнетних сил.

Електрон, як ми на самім початку зазначили, не має іншої маси, як лишень електро-маґнетну; можна отже уважати его за осередок-жерело електро-маґнетних сил в етері немов діру в етері, який однак заховуєсь проти всяких внїшних сил так, як цїпке тіло обдарене масою. Коли електрон є в спочинку, тоді лінїї електро-маґнетних сил є рівномірно на всї сторони розділені. Поведім около згаданого осередка кулю о дуже малім лучу і назначім на нїй околиці рівникові і бігунові; а що лінїї сил розділені рівномірно, то однакова їх скількість припаде так на околиці бігунові, як й на рівникові. Приймім, що такий округлий електрон порушає ся рівнобіжно до своєї оси (лінії, яка лучить оба бігуни). Що стане ся тоді з лініями сил? Они не будуть вже дальше рівномірно розділені; зачнуть они рідшати в бігунових околицях (рів. 19, 19а) а згущувати ся в рівникових околицях т. є. нормальних до напряму руху. Згущене лінїй сил буде не зовсїм значне, коли скорість електрону буде невеличка в порівнаню до скорости сьвітла. Коли однак скорість електрону зближати-ме ся до границї скорости сьвітла, тоді умалимок лінїй електро-маґнетних сил в бігунових околицях буде дуже великий, але й також велике буде згущене їх на рівнику, а іменно у відношеню:

$$1 : (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

В случаю, коли скорість електрону дорівнала би скорости сьвітла, отже $\mathfrak{v} = c$, бігунові части електрону булиб зовсїм пусті, а всї лінїї сил зібрали би ся в рівникових частях, значить нормальних до напряму руху. (Рівнаня 19, 19а, 20а).

Електро-маґнетна енерґія поступного руху.

В попередних уступах показали ми, що між функцією сил V а функцією Lagrange-а L і електро-статичною енерґією електрону заходять такі реляції:

$$25\text{a)} \qquad V = \varkappa U_0 = -L.$$

З функції Lagrange-а дасть ся випровадити енерґія, а також величина руху для круглого електрону.

Функція Lagrange-а представляє ся після рівнаня 17) як ріжниця маґнетної енерґії T і електричної U:

$$L = T - U.$$

А що після 19e): $T = \frac{1}{8\pi}\iiint \mathfrak{H}^2\, dv = \frac{\beta^2}{8\pi}\iiint \{\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2\}\, dv$, тому:

$$26) \qquad L = -\frac{1}{8\pi}\iiint \{\mathfrak{E}_x^2 + \varkappa(\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2)\}\, dv.$$

Зріжничкуймо послїдне вираженє з огляду на β, то дістанемо:

$$26\text{a)} \qquad \frac{dL}{d\beta} = \frac{\beta}{4\pi}\iiint (\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}^2)\, dv - \iiint \{\mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \beta} + \varkappa^2 (\mathfrak{E}_y \frac{d\mathfrak{E}_y}{\partial \beta} + \mathfrak{E}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \beta})\} \frac{dv}{4\pi}.$$

Займім ся передовсїм другою частиною правої сторони. Виступають там частинні похідні сили $\mathfrak{E}$ з огляду на β; мають они означати, що ріжничкованє відносить ся до якоїсь означеної точки рухомого укладу. При узглядненю 19f) можна згадану часть написати так:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint \{\mathfrak{F}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \beta} + \mathfrak{F}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial \beta} + \mathfrak{F}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \beta}\}\, dv.$$

З огляду однак на рівнанє 20) та на те, що Ψ і $\mathfrak{E}$ маліють з віддаленем від електрону, а іменно перше в (—1)-ій, а друге в (—2)-ій степени і з сеї причини інтеґрали тих величин над граничною поверхнею s в безконечности можна поминути (як се висше ми учинили) маємо, що:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint \Psi \frac{\partial}{\partial \beta}\, div\, \mathfrak{E}\, dv = \iiint \Psi \frac{\partial \varrho}{\partial \beta}\, dv.$$

А що ϱ т. є. розклад наряду не зміняє ся зі зміною скорости $\mathfrak{v}$, тому:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \beta} = 0,$$

отже:

$$\iiint \Psi \frac{\partial \varrho}{\partial \beta}\, dv = 0.$$

Відси бачимо, що друга частина правої сторони рівнаня 26a) рівнає ся зерови. Першу часть знов можемо при помочи рівнаня 19b) переміпити і тодї дістанемо таку реляцію:

$$26\text{b)} \qquad \frac{1}{c}\frac{dL}{\partial \beta} = \frac{1}{4\pi c}\iiint \{\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y\}\, dv = \iiint \mathfrak{g}_x\, dv = \mathfrak{G}_x.$$

Похідна функції Lagrange-а з огляду на безглядну вартість скорости $|\mathfrak{v}| = c\beta$ подає нам складову електро-маґнетного імпульсу в напрямі руху. Для круглого електрону, якого електро-маґнетний імпульс є все згідний з напрямом руху, маємо:

$$27) \qquad |\mathfrak{G}| = G = \frac{\partial L}{\partial |\mathfrak{v}|}.$$

Коли би ми знов приняли, що вигляд електрону зміняє ся зі скоростию, а в наслїдок сего розклад наряду в рухомій системі змінив би ся, отже ϱ булоби функцією β, тодї друга часть правої сторони рівнаня 26a) не зникала би. Рівнанє 27) є дуже важне в динаміцї електрону; оно подає нам залежність електро-маґнетного імпульсу від енерґії.

Вся енерґія системи W по впровадженю функції Lagrange-а представляє ся так:

$$W = 2T - L,$$

де T означає маґнетну енерґію. Розходить ся тепер о визначенє T яко функції $\mathfrak{G}$. Поступимо тут в сей спосіб:

Знаємо, що при узглядненю в поступнім руху $\mathfrak{G}_x = 0$:

$$T = \frac{1}{8\pi}\iiint \{\mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2\}\, dv = \frac{c\beta}{2}\iiint \mathfrak{g}_x\, dv$$

або по обосторонній зінтеґрованю отримаємо:

$$28) \qquad 2T = |\mathfrak{v}|\, \mathfrak{G}_x = (\mathfrak{v}\, \mathfrak{G}).$$

Подвійна маґнетна енерґія електрону в рівномірно-поступнім руху рівнає ся скалярному добуткови зі скорости і електро-маґнетного імпульсу. Вставляючи 28) в вираженє на енерґію W, дістаємо:

$$28\text{a)} \qquad W = |\mathfrak{v}|\, \mathfrak{G} - L,$$

або по впровадженю 27):

$$29) \qquad W = \mathfrak{v}\frac{dL}{d|\mathfrak{v}|} - L.$$

Рівнаня 27) і 29) подають звязь, яка позваляє визначити електро-маґнетну енерґію і імпульс при помочи функції Lagrange-а.

Розходить ся тепер о вираженє функції Lagrange-а. Через трансформацію 23) відтворюєсь куля з лучем a в руху на еліпсоїду в спочинку, якої половини осий є:

$$30) \qquad a_0 = \frac{a}{\varkappa}, \quad b_0 = c_0 = a.$$

Є се видовжена еліпсоїда, якої оборотова вісь є рівнобіжна до напряму руху. Через таку трансформацію 23) зредукували ми обчислене конвекцийного потенціялу Ψ до електро-статичного потенціяла φ, а іменно

$$\Psi = \varkappa\,\varphi_0.$$

Як поверхня оборотової еліпсоїди є поверхнею рівного потенціяла φ_0, так само поверхня електрону в поступнім русї є поверхнею постійного конвекцийного потенціялу Ψ. Електро-статичний потенціял оборотової еліпсоіди як учить електро-статика [Föppl-Abraham: Theorie der Elektricität B. I. §. 36.] виражає ся:

30a) $$\varphi_0 = \frac{e}{\sqrt{a_0{}^2-b_0{}^2}}\, log\left(\frac{a_0+\sqrt{a_0{}^2-b_0{}^2}}{b_0}\right)$$

або по введеню трансформаційної форми 30) і по справленю маємо:

30b) $$\varphi_0 = \frac{e}{2a\beta}\,\varkappa\, log\left(\frac{1+\beta}{\varkappa}\right),$$

де log є натуральним льоґаритмом.

Тепер можна вже обчислити конвекцийний потенціял при помочи висше поданої форми $\varkappa\varphi_0 = \Psi$: отже:

30c) $$\Psi = \frac{e}{2a\beta}\,\varkappa^2\, log\left(\frac{1+\beta}{\varkappa}\right) = \frac{e}{2a}\,\frac{1-\beta^2}{2\beta}\, log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

Знаючи Ψ можемо найти дальше при помочи рів. 23b) і 25) функцію Lagrange-а або функцію сил для електрену, а іменно:

31) $$L = -\frac{1}{2}\, e\,\Psi = \frac{e^2}{2a}\,\frac{1-\beta^2}{2\beta}\, log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = -V.$$

Рівнанє се однак є важне тілько для наряду розділеного на поверхнї електрону. З него знов можна випровадити анальоґічне рівнанє для наряду розділеного в просторі електрону на основі слїдуючого твердженя з теорії потенціялу: Електро-статична енерґія двох еліпсоїд тої самої форми, з яких одна має простірний наряд, а друга поверхний, позістають до себе у відношеню як 6 : 5. Відси слїдує, що функція L для простірного наряду електрону прибере форму:

31a) $$L = -\frac{3}{5}\,\frac{e^2}{a^2}\left(\frac{1-\beta^2}{2\beta}\right) log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

З 31) обчисляємо електро-маґнетний імпульс:

31b) $$\mathfrak{G} = \frac{dL}{d\,|\mathfrak{v}|} = \frac{e}{2ac\beta}\left\{\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right) log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\},$$

а дальше отримаємо всю електро-маґнетну енерґію електрону:

31c) $$W = |\mathfrak{v}|\,\frac{dL}{d\,|\mathfrak{v}|} - L = \frac{e^2}{2a}\left\{\frac{1}{\beta}\, log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\}.$$

Через додане, а опісля віднятє 31) і 31c) отримаємо вираженє на часть електричної, а опісля маґнетної енерґії:

31d) $$T = \frac{e^2}{4a}\left\{\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right) log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\};$$

31e) $$U = \frac{e^2}{4a}\left\{\left(\frac{3-\beta^2}{2\beta}\right) log\left(\frac{1-\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\}.$$

Коли розвинемо два послїдні рівнаня на ряди, слїдуючі після β^2, а опісля поминемо величини ряду β^4, дістанемо:

31f) $$U = U_0 = \frac{e^2}{2a}$$

31g) $$T = T_0 = \frac{e^2}{3a}\beta^2.$$

З послїдних двох рівнань бачимо, що при малій скорости катодових лучів їх енерґія електрична не залежить від скорости, маґнетна знов енерґія є пропорціональна до другої степени скорости; отже першу можна порівнати з потенціяльною, другу знов з кінетичною енерґією в механіцї.

До таких самих взорів на енерґію і електро-маґнетний імпульс дійдемо, коли приймемо теорію лїній електро-маґнетних сил для електрону.

Відплив цїлої енерґії при руху електрону на одиницю поверхні подає нам вектор Poyting-а:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi c}\,[\mathfrak{E}\,.\,\mathfrak{H}].$$

який входить в вираженє на імпульс. Відплив сей буде складати ся з двох частий, а іменно з енерґії електро-маґнетного поля, витвореного електроном і з енерґії, яка зуживаєсь на пересунене лїній електромаґнетних сил електрону при поступнім руху, отже:

$$\mathfrak{S} = |\mathfrak{v}|\,.\,w + \mathfrak{s},$$

де w означає густоту енерґії на одиницю поверхні.

Розходить ся тепер о обчисленє $\mathfrak{s}$. Возьмім під увагу якусь точку електрону, який порушає ся рівномірно поступно. Напрям електро-маґнетної сили в тій точці може мати напрям згідний з напрямом руху електрону або напрям противний до напряму руху. В точках електрону, де електро-маґнетна сила має напрям згідний з напрямом руху, сила ся виконує працю, в наслїдок чого слїдує зужите енергії. В точках знов, в яких напрям електро-маґнетної сили є противний до напряму руху, заощаджує ся на енергії, бо там слїдує праця против електро-маґнетної сили. Рівновага знов наступить тоді, коли енергія спливати-ме постійно від перших до других частий електрону. отже:

$$div\,\mathfrak{s} = -(\varrho\,\mathfrak{F} \mid \mathfrak{v} \mid),$$

де $\mathfrak{F}$ означає електро-маґнетну силу, ϱ простірну густоту, а $\mid \mathfrak{v} \mid$ скорість в напрямі руху. Для одиниці обему отримаємо отже:

$$div\,\mathfrak{s} + (\varrho\,\mathfrak{F} \mid \mathfrak{v} \mid) = 0.$$

або для цілого обему v:

$$\iiint div\,\mathfrak{s}\,dv = - \mid \mathfrak{v} \mid \varrho \iiint \mathfrak{F}\,dv.$$

З векторової знов аналізи знаємо, що:

$$-\iiint \mathfrak{r}\, div\,\mathfrak{s}\,dv = \iiint \mathfrak{s}\,dv,$$

де $\mathfrak{r}$ є провідним лучем, поведеним з якоїсь точки до елементу dv. З огляду на се:

$$\mid \mathfrak{v} \mid \iiint \mathfrak{F}\,dv = \iiint \mathfrak{s}\,dv.$$

Коли згадану точку оберемо за початок укладу сорядних, тоді складові $\mathfrak{r}$ і dv будуть собі рівні, отже: x, y, z. Тому отримаємо:

$$x\,\varrho \iiint \mathfrak{F}\,dv = \iiint \mathfrak{s}_x\,dv$$
$$y\,\varrho \iiint \mathfrak{F}\,dv = \iiint \mathfrak{s}_y\,dv$$
$$z\,\varrho \iiint \mathfrak{F}\,dv = \iiint \mathfrak{s}_z\,dv.$$

Послїдні рівнаня послужать нам до обчисленя електро-маґнетного імпульсу $\mathfrak{G}$, а іменно:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c^2}\iiint \mathfrak{S}\,dv = \frac{1}{c^2}\iiint \mid \mathfrak{v} \mid w\,dv + \frac{1}{c^2}\iiint \mathfrak{s}\,dv$$

або:

$$\mathfrak{G} = \frac{\mid \mathfrak{v} \mid}{c^2} W + \frac{1}{c^2}\iiint \mathfrak{s}\,dv,$$

коли означимо електро-маґнетну енергію над цілим обемом через W. По підставленю за $\mathfrak{s}$ маємо:

$$\mathfrak{G} = \frac{\mid \mathfrak{v} \mid}{c^2} W + \frac{x\varrho}{c^2}\iiint \mathfrak{F}\,dv.$$

Друга часть правої сторони означає працю, в наслїдок якої кожда точка електрону в напрямі оси x пересуваєсь нормально до неї о якийсь відступ. Є то отже праця потрібна до пересуненя лїнїй сил з бігунових частий в рівникові части електрону. Приймім однак, що кожда з лїнїй електро-маґнетних сил пересуне ся о якесь δs, тоді праця для пересуненя буде $\varrho(\mathfrak{F}\,\delta s)\,dv$. Ціла енергія при по-

ступнім руху електрону W розпаде ся на енергію, потрібну для піддерженя руху, і на працю, потрібну для пересуненя лїнїй електро-маґнетних сил; отже:

$$W = \mid \mathfrak{v} \mid \mathfrak{G} - \varrho \iiint (\mathfrak{F}\,\delta s)\,dv.$$

(Знак мінус тому, бо праця відбуває ся коштом енергії W).

Коли порівнаємо послїдну реляцію з 28а), то бачимо, що праця потрібна для пересуненя лїнїй сил є нічим іншим, як функцією Lagrange-а, яка подає нам „живу силу“:

$$\varrho \iiint (\mathfrak{F}\,\delta s)\,dv = L.$$

В сей спосіб дістали ми рівнанє, яке ми мали перед тим, іменно:

$$W = \mid \mathfrak{v} \mid \mathfrak{G} - L.$$

Приймім, що початковий розклад лїнїй сил був в укладї $x_0\,y_0\,z_0$. Однородне однак пересунене їх в наслїдок сили $-(\varrho\mathfrak{F})\,dv$ змінило уклад на інший о сорядних:

$$x = x_0\,(1-\varepsilon), \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

де ε означає істий дріб. Рух слїдує лише в напрямі оси x, тому пересунене:

$$\delta s = x_0\,\delta\varepsilon = \frac{x}{1+\varepsilon}\,\delta\varepsilon.$$

Вся праця потрібна на однородне пересунене лїнїй сил з бігунових частий в рівникові буде рівнати ся:

$$\varrho \iiint (\mathfrak{F}\,\delta s)\,dv = \frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon}\iiint \mathfrak{F}\,x\,dv$$

або:

$$\varrho \iiint \mathfrak{F}\,x\,dv = (1+\varepsilon)\frac{\partial L}{\partial \varepsilon},$$

де $\mid \mathfrak{v} \mid$ при ріжнччкованю уважаємо за постійне.

Коли отримаму вартість вставимо в рівнанє для $\mathfrak{G}$, одержимо:

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{G} = \frac{\mid \mathfrak{v} \mid}{c^2} W + \frac{\mid \mathfrak{v} \mid}{c}(1+\varepsilon)\frac{\partial L}{\partial \varepsilon}.$$

Величини $\mathfrak{G}$ і W можна виразити функцією Lagrange-а L. Зі значіня самої функції L слїдує, що:

$$\mathfrak{G} = \frac{\partial L}{\partial \mid \mathfrak{v} \mid} \quad \text{(порівнай 27)};$$

отже:

$$W = \mid \mathfrak{v} \mid \frac{\partial L}{\partial \mid \mathfrak{v} \mid} - L.$$

Коли послїдні дві вартости вставимо до (α), дістанемо:

$$\frac{\partial L}{\partial \mid \mathfrak{v} \mid} = \frac{\mid \mathfrak{v} \mid^2}{c^2}\frac{\partial L}{\partial \mid \mathfrak{v} \mid} - \frac{\mid \mathfrak{v} \mid}{c^2} L - \frac{\mathfrak{v}}{c}(1-\varepsilon)\frac{\partial L}{\partial \varepsilon}$$

або:

$$(\beta^2-1)\frac{\partial L}{\partial\,|\mathfrak{v}|}+\beta(1-\varepsilon)\frac{\partial L}{\partial\varepsilon}-\beta L=1,$$

з заміткою, що $\beta=\frac{|\mathfrak{v}|}{c}$, $|\mathfrak{v}|=\beta c$.

Коли послїдне рівнане подїлимо через $1+\beta^2$, отримаємо:

$$\varkappa\left(\frac{\partial L}{\partial\varkappa}\right)+(1+\varepsilon)\frac{\partial L}{\partial\varepsilon}=L,$$

де: $\varkappa=\sqrt{1-\beta^2}$.

Рівнане се справдить лише функція:

$$L=-f\left(\frac{1+\varepsilon}{\varkappa}\right).$$

Для $\beta=0$, $\varkappa=1$, маємо:

$$L=-W_0(1+\varepsilon).$$

Є се енерґія електрону задержаного в поступнім руху, якого лїнії сил вже пересунули ся однородно.

Функцію L для електрону перед поступним рухом, в якім лінії сил були розділені рівномірно в просторі, отримаємо, коли положимо $\varepsilon=0$; тодї дістанемо:

$$L=-W_0.$$

Енерґія та змінить ся в наслідок пересунени лїнїй сил в такім самім відношеню, в якім лїнії сил пересунули ся з бігунових частин в рівникові, а іменно:

$$1:\varkappa.$$

Виражене на енерґію одержимо з енерґії для елїпсоїди оборотової в спочинку, якої оси були:

$$(\beta)\qquad a=\frac{a_0}{\varkappa},\quad b=c=0.$$

до лінії сил пересунули ми у відношеню $1:\varkappa$.

Отже:

$$L=-\varkappa U,$$

де U означає електро-статичну енерґію.

Коли знаємо потенціял для висше поданої елїпсоїди, найдемо U. Потенціял:

$$\varphi=\frac{e}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$

(Föppl-Abraham: Theorie der Elektrizität l. c.), або по введеню (β)

$$\varphi=\frac{e}{2a\beta}\varkappa\log\left(\frac{1+\beta}{\varkappa}\right).$$

А що:

$$U=\tfrac{1}{2}\varphi e,$$

тому:

$$L=-\tfrac{1}{2}\varkappa\varphi e$$

або:

$$L=\frac{e^2}{2a}\frac{1-\beta^2}{2\beta}\log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

В сей спосіб зовсїм іншою дорогою дійшли ми до тих самих взорів, що проф. Abraham. Коли знаємо L, то легко найдемо імпульс $\mathfrak{G}$ і енерґію W.

Поступний майже статочний рух електрону.

В трох послїдних уступах пізнали ми електро-маґнетне поле, енерґію і імпульс, які відповідають рівномірно-поступному рухови. Взори подані там для згаданих величин залежать тільки від скорости. Строго однак взявши, будуть они лишень тодї важні, коли скорість від безконечно довгого часу була рівномірна. Бо кожде прискорене, якого раз дізнав електрон, дїлає в сей спосіб, що місце, в якім електрон находив ся в даній хвилї, стає ся жерелом електро-маґнетних круглих фаль, які зі скоростию сьвітла розходять ся в просторі. Натуга електро-маґнетного поля тих филь, як й їх енерґія та величина руху залежать від прискореня, удїленого якраз тодї електронови. Яке-небудь лишень прискорене і колинебудь оно дїлати-ме на електрон в одностійнім руху, тодї енерґія і імпульс не будуть вже залежати виключно від его скорости, а тим самим наші взори в попередних уступах не будуть строго важні. Ся якраз обставина утрудняє строге трактоване нерівномірних рухів електрону. В сїм случаю послугуємо ся певною методою приближеня, яка оказалась вже правдивою в електро-динаміці при токах в провідниках.

Коли електричний ток в провіднику є статочний, значить, що его натуга від якогось довшого часу є постійна, тодї послїдна визначує маґнетне поле; коли-ж знов ток зміняє свою натугу, тодї маґнетне поле вже не відповідає натурі тока в даній хвилї, а залежати оно буде від єї часової зміни. При скорих дроганях, як дроганях Hertz-а, треба брати послїдну залежність під увагу; объявляє ся она передусїм через филї, які шле осцилятор Hertz-a. В теориї змінних токів майже не бере ся під увагу сего случаю. Маґнетне поле, витворене змінною натугою і розкладом тока, обчисляє ся там звичайно так, як би ток був статочний; з енерґії в сей спосіб обчисленого поля виводжаєсь самоіндукцію, яка протидїлає часовій зміні натуги тока. Така теорія „майже статочного тока“ не завела для повільних дрогань; електро-маґнетне проміньоване слїдує тільки при дуже скорих і наглих дроганях тока.

Статочному токови в провіднику відповідає конвекцийний ток, який представляє нам рівномірний рух електронів; токови однак майже статочному відповідає майже статочний рух електронів. За майже статочний рух електронів будемо уважати такий рух, якого скорість так поволи зміняє ся, що імпульс кождоразової скорости можемо обчисляти як імпульс при статочнім руху.

Маса електрону.

Власна індукція в теорії тока в провіднику відповідає в динаміцї електрону его електро-маґнетній масї. На вступі вже зазначили ми, що доведено досьвідом до того, що електрон має безвладну масу, яка при малій скорости, як пр. при повільних катодних лучах показалась майже постійною, коли знов при скорих лучах β радіоактивних тіл, яко функція скорости.

В майже статочнім руху без дїланя оборотових сил електро-маґнетний імпульс має все згідний напрям з напрямом руху; тодї також:

$$[\mathfrak{v}\,\mathfrak{G}] = 0,$$

а дальше оборотовий імпульс стає ся зером. Як імпульс зміняє ся з часом, то зміна ся рівнаесь внїшній електро-маґнетній силї:

$$\text{32)} \qquad \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{P}_1.$$

Розложім ту силу на дві складові, а іменно $\mathfrak{F}_{1,s}$ рівнобіжну до напряму руху і $\mathfrak{F}_{1,r}$ нормальну до него. Перша з тих спричиняє приріст складової імпульсу, стичної до дороги, друга знов дає початок зміні напряму імпульсу. А що $\mathfrak{G}$ і $\mathfrak{v}$ показують все напрям руху, то складові часових змін тих векторів, які мають напрям стичної до дороги, рівнають ся часовим змінам їх безглядних вартостий. Тому:

$$\text{32a)} \qquad \mathfrak{P}_{1\,s} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \frac{d\mathfrak{G}}{d\,|\,\mathfrak{v}\,|} \cdot \frac{d\,|\,\mathfrak{v}\,|}{dt}.$$

Означім $\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \dot{\mathfrak{v}}$, отримаємо дальше:

$$\text{32b)} \qquad \frac{\mathfrak{P}_{1,s}}{\dot{\mathfrak{v}}} = \frac{d\mathfrak{G}}{d\,|\,\mathfrak{v}\,|}.$$

Складову нормальну до напряму руху найдемо в сей спосіб. Електро-маґнетний імпульс, який показує вже напрям руху, відклонює ся в просторі в наслідок дїланя $\mathfrak{P}_{1,r}$ з якоюсь кутовою скоростию $\dot{\mathfrak{v}}_r = \frac{|\,\mathfrak{v}\,|}{r}$, де r означає луч скривленя поверхнї. Шукана складова $\mathfrak{P}_{1,r}$ в сїм случаю виноситиме:

$$\mathfrak{P}_{1,r} = G \,.\, \frac{|\,\mathfrak{v}\,|}{r}.$$

По поділеню сего рівнаня по обох сторонах через $\frac{|\,\mathfrak{v}\,|}{r} = \dot{\mathfrak{v}}_r$, отримаємо:

$$\text{32c)} \qquad \frac{\mathfrak{P}_{1,r}}{\dot{\mathfrak{v}}_r} = \frac{G}{|\,\mathfrak{v}\,|}.$$

З рівнань 32b), 32c) читаємо, що відношенє сили в стичнім напрямі до прискореня в тім напрямі, а також відношенє сили в нормальнім напрямі до свого прискореня є функціями скорости для майже статочного руху електрону. В сей спосіб маємо представлену другу основу механїки Newton-а в динаміцї електрону. Відношенє означенє через 32b) дає нам вартість тзв: подовжної електро-маґнетної маси електрону (longitudinale elektromagnetische Masse):

$$\text{33)} \qquad m_s = \frac{dG}{d\,|\,\mathfrak{v}\,|},$$

коли знов відношенє 32c) подає тзв. поперечну масу електрону (transversale elektromagnetische Masse):

$$\text{33a)} \qquad m_r = \frac{G}{|\,\mathfrak{v}\,|}.$$

При повільнім руху електро-маґнетний імпульс є пропорціональний до скорости $\mathfrak{v}$ (31b); в сїм случаю обі висше згадані маси суть собі рівні.

По вставленю вартости на $\mathfrak{G}$ з 31b) в оба рівнаня 33, а, дістанемо обі маси:

$$\text{34)} \qquad m_s = \frac{e^2}{2ac^2} \cdot \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{2}{1-\beta^2} - \frac{1}{\beta} \log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \right\}$$ [1]

$$\text{34a)} \qquad m_r = \frac{e^2}{2ac^2} \cdot \frac{1}{\beta^2} \left\{ \left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\right) \log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1 \right\}$$

Для скоростий, які в порівнаню зі скоростию сьвітла є треба уважати за малі, можемо β^2 в супроти 1 поминути і отримаємо граничну вартість подовжної і поперечної маси:

[1]) M. Abraham: l. c. стор. 191.

34b) $$m_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2},$$

для поверхного наряду; для простірного знов наряду треба помножити сю вартість через $\frac{6}{5}$, отже:

34c) $$m_0 = \frac{4}{5}\frac{e^2}{ac^2}.$$

Положім:

$$\frac{1}{\beta^2}\left\{\frac{2}{1-\beta^2} - \frac{1}{\beta}\log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\right\} = U_1(\beta)$$

а:

$$\frac{1}{\beta^2}\left\{\left(\frac{1-\beta^2}{2\beta}\right)\log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) - 1\right\} = U_2(\beta);$$

тоді напишемо обі маси для поверхневого і простірного наряду в виді:

34d) $$m_s = m_0 \cdot \tfrac{3}{4}\, u_1(\beta)$$

34e) $$m_r = m_0 \cdot \tfrac{3}{4}\, u_2(\beta);$$

На основі помірів з відклонень лучів β раду в сильнім маґнетнім поли доказав W. Kaufmann важність взору на поперечну масу, де $\beta = \frac{\mathfrak{v}}{c}$ виносило у него 0·60 до 0·95. Незгідність теоретичних обчислень з досьвідними виносила 1% до 1·5% [1]).

При знаню m_0 можна обчислити відси питомий наряд електрону для повільних катодних лучів в *em.* о:

$$\frac{e}{c\,m_0} = \frac{3}{2}\frac{ac}{e},$$

а опісля луч електрону a. Після досьвідних помірів S. Simona:

$$\frac{e}{c\,m_0} = 1{\cdot}865.\ 10^7,$$

яке число видає ся бути найправдоподобнійшим зі всіх помірів. Відси слідує, що:

$$a = \frac{4}{5}\frac{e}{c}\,.\,1{\cdot}865.\ 10^7.$$

А що наряд електрону рівняє ся нарядови йону після E. Riecke-го:

$$2.10^{-10} < |\,e\,| < 20.10^{-10},$$

тому:

$$10^{-10}cm < a < 10^{-12}cm.$$

Коли розвинемо $u_1(\beta)$ і $u_2(\beta)$ на ряди і упорядкуємо їх після зростаючих степений β, тоді дістанемо:

34f) $$m_s = m_0\left\{1 + \frac{6}{5}\beta^2 + \frac{9}{7}\beta^4 + \frac{12}{9}\beta^6 + \dots\right\}$$

[1]) M. Abraham: Ann: d. Phys. 1903. l. c.

34g) $$m_r = m_0\left\{1 + \frac{6}{3.5}\beta^2 + \frac{9}{5.7}\beta^4 + \frac{12}{7.9}\beta^6 + \dots\right\}$$

Ряди сї є збіжні для $|\,\beta\,| < 1$. З послідних рівнань легко заключити, що подожна маса все буде більша від поперечної маси. Колиб якась сила ділала скісно до напряму руху, тоді прискорене не булоби згідне що до напряму з силою, бо вектор прискореня буде взагалї заключати зі стичною до напряму дороги щораз більший кут, як вектор сили, позаяк подовжна безвладність перевисшає поперечну. Тільки в случаю, коли сила ділає рівнобіжно або нормально до напряму руху, годять ся з собою що до напрямів так сила, як й прискорене. Маса отже в динаміцї електрону не є скалярною величиною, як в звичайній механіцї. Сила є ту лінійною векторовою функцією прискореня в загальнійшім значіню, чим там. Електро-маґнетна маса є системою сочинників лінійної векторової функції, є тензором о оборотовій симетрії, якого вісь симетрії визначає напрям руху електрону. Можна зробити тут порівнане з моментом безвладности тіла в оборотовім руху, для якого визначеня треба двох величин: моменту около оборотової оси і моменту около оси, нормальної до тої.

Масу електрону можна ще найти з реляції на енерґію. Висше мали ми рівнане енерґії (15) для чисто поступного руху електрону:

$$\frac{dW}{dt}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{P}_1) = |\,\mathfrak{v}\,|\,\mathfrak{P}_{1,s}$$

Але для майже статочного руху треба уважати енерґію електрону яко функцію безглядної вартости скорости, тому:

$$\frac{dW}{d\,|\,\mathfrak{v}\,|}\cdot\frac{d\,|\,\mathfrak{v}\,|}{dt} = |\,v\,|\,.\,\mathfrak{P}_{1,s}$$

або:

$$\frac{\mathfrak{P}_{1,s}}{|\,\dot{\mathfrak{v}}\,|} = \frac{1}{|\,\mathfrak{v}\,|}\cdot\frac{dW}{dt}.$$

Вартість відношеня $\frac{\mathfrak{P}_{1,s}}{|\,\dot{\mathfrak{v}}\,|}$ означили ми яко подовжну масу m_s, отже:

35) $$m_s = \frac{1}{|\,\mathfrak{v}\,|}\,\frac{dW}{dt}.$$

Рівнанє се подає нам звязь між подовжною масою а її енерґією.

Поперечну однак масу не можна виразити рівнанем енерґії, бо сила, яка ділає нормально до напряму руху, не виконує ніякої працї.

Оба взірці на подовжну масу (33, 35) є тотожні, бо з рівнань (27 і 29) можна легко найти звязь між енерґією а імпульсом, іменно:

$$36)\qquad \frac{dG}{d\,|\,\mathfrak{v}\,|}=\frac{1}{|\,\mathfrak{v}\,|}\cdot\frac{dW}{d\,|\,\mathfrak{v}\,|}=\frac{d^2L}{d\,|\,\mathfrak{v}\,|^{\,2}},$$

що дійсно доводить ідентичности взорів 33) і 35).

Колиби ми знов приняли, що вигляд електрону зміняє ся зі скоростию, то маси отримані з рівнаня для імпульсу і енерґії не булиби тотожні. Бо енерґія здеформованого електрону не є чисто електро-маґнетною, але в части іншої неелектро-маґнетної натури, яка походить від механїчних сил, що спричиняють деформацію електрону. В сїм случаю динаміка електрону пересталаби бути основана на чисто електро-маґнетних основах. Знов отже одна причина, яка промовляє проти деформації електрону, коли уважати будемо его яко цїлке тїло.

Висші наведені взори на обі маси походять від M. Abraham-a. Крім него подали ще Bucherer і H. A. Lorentz взори на обі маси електрону, який деформує ся в часї руху, іменно:

Bucherer[1]):

$$m_s=\frac{2}{3}\frac{e}{a}\left(1+\frac{6}{5}\beta^2+\frac{9}{7}\beta^4+\ldots\right)$$

$$m_r=2\,\frac{e^2}{3a}\left(1+\frac{6}{3.5}\beta^2+\frac{9}{5.7}\beta^4+\ldots\right)$$

H. A. Lorentz[2]):

$$m_s=\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}\left(1+\frac{3}{2}\beta^2+\ldots\right)$$

$$m_r=\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{1/2}}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{ac^2}\left(1+\frac{1}{2}\beta^2+\ldots\right).$$

Оборотовий рух електрону.

До тепер займали ся ми виключно поступним рухом електрону і поминали ми всякі вїншні сили, які моглиби пустити в оборот електрон. Коли крім поступного руху зі скоростию $\mathfrak{v}$ маємо ще оборотовий рух з оборотовою скоростию $\mathfrak{u}$, тодї густоти токів $\mathfrak{f}_y$, $\mathfrak{f}_z$ а так само $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ не зникають в просторі, як при 19b). Примінемо передовсїм кінематичне рівнанє:

$$\mathfrak{v}=\mathfrak{v}_0+[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}].$$

---

[1]) A. H. Bucherer: l. c. стор 53. і слїдуючі.

[2]) M. Abraham, Phys. Zeitschr. 1904. стор. 576.

$$37)\qquad (1-{}^2)\beta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 z}=-\,4\pi\varrho$$

$$37a)\qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial^2 z}=-\,4\pi\varrho\beta-4\pi\frac{\varrho}{c}(\mathfrak{u}_y z-\mathfrak{u}_z y)$$

$$37b)\qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{A}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_y}{\partial z^2}=-\,4\pi\frac{\varrho}{c}\,\mathfrak{u}_z x-\mathfrak{u}_x z)$$

$$37c)\qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{A}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_z}{\partial z^2}=-\,4\pi\frac{\varrho}{c}(\mathfrak{u}_x y-\mathfrak{u}_y x)$$

Приймім тут знов вісь x за напрям поступного руху. Електро-маґнетне поле витворене таким рухом можна уважати лишень тодї за статочне, коли вектор $\mathfrak{v}$ має постійний напрям в просторі, а крім сего ще постійний напрям у віднесеню до укладу, який порушає ся разом з електроном, се значить, коли напрям руху і оборотової оси спадають на себе. А що поле є статочне, то з сего слїдує, що імпульс $\mathfrak{G}$ і оборотовий імпульс $\mathfrak{Y}$ електро-маґнетного поля мусять мати постійні вартости і такі напрями, які булиби так в просторі, як й в самім електронї постійні; напрями висше згаданих величин спадають разом з напрямами векторів $\mathfrak{v}$ і $\mathfrak{u}$.

Положім в рівнанях від 37a) до 37c):

$$\mathfrak{u}_z=\mathfrak{u}_y=0\,;\quad \mathfrak{u}_x=\mathfrak{u},$$

тодї дістанемо:

$$38)\qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=-\,4\pi\varrho$$

$$38a)\qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}^x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial z^2}=-\,4\pi\varrho\beta$$

$$38b)\qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{A}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_y}{\partial z^2}=+\,4\pi\frac{\varrho}{c}\,\mathfrak{u}z$$

$$38c)\qquad (1-\beta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{A}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_z}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_z}{\partial z^2}=-\,4\pi\frac{\varrho}{c}\,\mathfrak{u}y.$$

По впровадженю до сих рівнань трансформації 22), як при поступнім руху, зведемо їх на звичайні рівнаня потенціялу. Потенціяли Φ і $\mathfrak{A}_x$ стають ся в безконечности зерами з відворотностию першої степени віддаленя; потенціяли знов $\mathfrak{A}_y$ і $\mathfrak{A}_z$ відповідалиби потенціялам мас, які в безконечности стають ся зером з відворотностию другої степенї віддаленя. Відси можемо найти конвекцийний потенціял Ψ при помочи взірця 18:

$$\Psi=\Phi-\frac{1}{c}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{A}),$$

або в нашім случаю:

$$\Psi = \Phi - \beta \mathfrak{A}_z + \mathfrak{u}(z\mathfrak{A}_y - y\mathfrak{A}_z).$$

Перейдім тепер до вн'ішної оборотової сили. Она була означена рівнанем 6):

$$\mathfrak{N}_1 = \iiint [\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}_1]\,\varrho\,dv.$$

В однороднім електричнім поли $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{E}_1$ для всїх точок електрону. З огляду знов на симетрію електрону $\iiint \varrho\,\mathfrak{r}\,dv = 0$, а з сего слїдує, що в однороднім вн'їшнім електричнім поли не може виступити ніяка оборотова сила. Те саме відносить ся до однородного маґнетного поля, коли нема н'їяких оборотів. Для однородного маґнетного поля

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}_1]$$

для всїх точок електрону.

Зовсїм інакше представляє ся річ, коли електрон находить ся в оборотовім руху. Тодї в $\mathfrak{F}_1$ виступає складова $\frac{1}{c}\,[[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}], \mathfrak{H}_1]$, яку можна переробити при помочи векторової аналїзи на:

$$\frac{\mathfrak{r}}{c}(\mathfrak{u}\,\mathfrak{H}_1) - \frac{\mathfrak{u}}{c}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{H}_1).$$

По вставленю вже сеї переробленої части до вираженя на $\mathfrak{N}_1$ і по зінтеґрованю покаже ся, що:

39) $$\mathfrak{N}_1 = \frac{ea^2}{3c}[\mathfrak{u}\,\mathfrak{H}_1].$$

Так виглядає оборотова сила в однороднім маґнетнім поли; є она нормальна до напряму і до лінїй маґнетних сил.

В неоднородних полях виступають оборотові сили також тодї, коли навіть не було оборотового руху з початку. Возьмім тепер случай, що катодний луч переходить через неоднородне маґнетне або електро-статичне поле в нормальнім напрямі до лінїй сил. Най вісь x представляє напрям луча, а додатна вісь y най буде рівнобіжна до електричної сили $\mathfrak{E}_1$, або коли маємо до дїла з маґнетним полем, то відємна вісь z най буде рівнобіжна до маґнетної сили $\mathfrak{H}_1$. На всякий случай $\mathfrak{F}_1$ буде показувати напрям додатної оси y. В електро-статичнім поли $|\mathfrak{F}_1| = |\mathfrak{E}_1|$, в маґнетнім знов $|\mathfrak{F}_1| = \beta\,|\mathfrak{H}_1|$. Дальше натуга поля має ся зміняти здовж оси x; отже: $\frac{d\,|\mathfrak{F}^1|}{dx}$ буде мірою неоднородности поля. Внутр неоднородного обсягу електрону можна все положити з достаточним приближенем:

$$|\mathfrak{F}_1| = |\mathfrak{F}_1|_0 + x\frac{d\,|\mathfrak{F}^0|_0}{dx},$$

де $|\mathfrak{F}_1|_0$ і $\frac{d\,|\mathfrak{F}_1|_0}{dt}$ відносимо до осередка електрону. Тодї вн'їшна сила, яка дїлає на електрон буде:

40) $$\mathfrak{F}_{1,y} = e\,|\mathfrak{F}_1|_0,$$

а оборотова сила:

40a) $$\mathfrak{N}_{1,z} = \frac{e^2 a}{3}\cdot\frac{d\,|\mathfrak{F}_1|_0}{dx}.$$

Коли знов розважати будемо чистий оборотовий рух електрону, тодї поступна скорість осередка має електрону буде зером $\mathfrak{v} = 0$. Електро-маґнетні потенціяли для оборотового руху означимо з рівнань 38—38c; коли там положимо $\beta = 0$, и подасть знов вартість оборотової скорости. В сей спосіб дістанемо ріжничкові рівнаня, з яких можна визначити Φ і $\mathfrak{A}$, іменно:

41) $$\begin{cases} \nabla\Phi = 4\pi\varrho \\ \nabla\mathfrak{A}_x = 0 \\ \nabla\mathfrak{A}_y = \frac{1}{c}\,4\pi\varrho\mathfrak{u}z \\ \nabla\mathfrak{A}_z = -\frac{1}{c}\,4\pi\varrho y\mathfrak{u}; \end{cases}$$

а дальше після рівнаня 18) отримаємо конвекцийний потенціял:

42) $$\Psi = \Phi - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{A}) = \Phi - \frac{\mathfrak{u}}{c}(z\mathfrak{A}_y - y\mathfrak{A}_z)$$

Тепер означимо функцію Lagrange-a зі взору:

$$L = -\iiint \frac{\Psi e}{2}\,dv,$$

або:

$$L = -V = -\iiint \frac{\Phi\varrho}{2}\,dv - \frac{\mathfrak{u}}{c}\iiint \frac{\varrho}{c}(z\mathfrak{A}_y - y\mathfrak{A}_z)\,dv.$$

Послїдні взори відносять ся лишень до сильних оборотів електрону, які дуже впливають на его свобідний рух. (Рух електронів радіоактивних тїл). Таких однак оборотів не удалось запримітити при досьвідах. О много більше, як говорить M. Abraham, годить ся з досьвідом ся теорія, яка уважає оборотові рухи за неконечні для динаміки електрону.

Кілька уваг до динаміки електрону.

Вже розважанем майже статотних токів робимо закид, що поминає ся там страту енерґії у формі проміньованя. То само можна закинути майже статочному рухови електронів, який ми обговорювали в попередних уступах. Там обчисляли ми енерґію поля і електро-маґнетний імпульс так, як они відповідали скорости електрону в кождій хвилї. Але всяке проскорене, кожда зміна напряму руху електрону спричиняє висилане електро-маґнетних филь, які ми саме помпнули, коли прискорений і оборотовий рух електрону уважали за майже статочний.

Приймім, що цїла сила, якою електрон дїлає сам на себе, є:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'', \tag{42)}$$

де $\mathfrak{P}'$ означає силу того рода, яку обчисляли ми в попередних уступах, іменно:

$$\mathfrak{P}' = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt},$$

а $\mathfrak{P}''$ знов означає реакцийну силу електро-маґнетного проміньованя

$$\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}^{(s)}.$$

Величина $\mathfrak{G}$ яко імпульс поля, яке порушає ся разом з електроном, залежати буде від форми електрону, коли знов реакція проміньована від нього не залежить. Електро-маґнетні филї, вислані електроном, можна уважати за филї рівно-важні з филями нарядженої точки. Тоді рівнане 42) для внутрішної електро-маґнетної сили сповняє зовсїм рівнане енерґії і електро-маґнетних імпульсів.

Рівнане руху, яке не буде вже в ніякій суперечности з основою захованя енерґії і імпульсів, буде:

$$\mathfrak{P}_1 = -\mathfrak{P} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} - \mathfrak{P}^{(s)}. \tag{42a)}$$

Возьмім насамперед рух рівномірно-поступний, який слїдує зі скоростию $\mathfrak{v}_1$; най опісля якась вн̂ішна причина приспішить его, а опісля най знов слїдує рівномірний рух зі скоростию $\mathfrak{v}_2$. В наслїдок прискореня став ся електрон жерелом електро-маґнетних филь, які по якімсь часї віддаляють ся достаточно від електрону. Внутр простору ограниченого сферою филї повстає електро-маґнетне поле, яке відповідає скорости $\mathfrak{v}_2$, а якого енерґія є W_2, а імпульс $\mathfrak{G}_2$. Енерґію і імпульс на зовні сфери филї поминаємо. Назвім дальше енерґію самої сфери W_{12}, а еї імпульс $\mathfrak{G}_{12}$, тодї отримаємо таке імпульсове рівнане:

$$\int_1^2 \mathfrak{P}_1 dt = \mathfrak{G}_2 - \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_{12}, \tag{42b)}$$

і рівнане на енерґію:

$$\int_1^2 (\mathfrak{v}\,\mathfrak{P}_1)\, dt = W_2 - W_1 + W_{12}.$$

Для електрону, який деформує ся в часї руху, треба узглядпити ще внутрішну зміну потенціяльної енерґії.

Послїдні рівнаня є мірою, коли рухи електронів можемо уважати за майже статочні, а іменно: рух електронів можемо уважати тодї тілько за майже статочний, коли реакція сили проміньованя $\mathfrak{P}^{(s)}$ зникати-ме в порівнаню з внутрішною силою $\mathfrak{P}'$.

Возьмім під увагу лучі β раду в сильнім маґнетнім поли. Електрони будуть зачеркувати в сїм случаю колові рухи. Най лучем кола одного електрону буде R, тодї вартість сили безвладности майже статочного руху означимо:

$$|\,\mathfrak{P}'\,| = m_r \frac{\mathfrak{v}^2}{R} = m_0 \frac{3}{4} \frac{\mathfrak{v}^2}{R} u_2(\beta). \tag{43}$$

Реакція знов проміньованя, як означив M. Abraham (Theorie der Elektrizität B. II. стр. 131, 88); є:

$$\mathfrak{P}^{(s)} = -\mathfrak{v} \cdot \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\mathfrak{v}^2}{\varkappa^2 R^2}, \quad (\varkappa = 1 - \beta^2). \tag{43a)}$$

Утворім відношене:

$$\mathfrak{P}^{(s)} : \mathfrak{P}' = \frac{4}{3} \frac{a}{R} \frac{\beta}{\varkappa^4 u_2(\beta)} = \frac{4}{3} \frac{a}{R} f(\beta) \tag{43b)}$$

то бачимо, що для рухів, яких скорість ледви зближає ся до скорости сьвітла, функція $f(\beta)$, яка виступає в відношеню є величиною доволї малою, а дальше R є дуже великим в порівнаню з a; тому вартість $\mathfrak{P}^{(s)}$ зникає в порівнаню з $\mathfrak{P}'$. З огляду на се можна ще все уважати рух електронів катодних лучів і лучів β радіоктивних тїл під дїланем маґнетних сил за рух майже статочний.

Вернім ще до рівнаня 42). Два додатники правої сторони не становлять нїчо іншого, як два перші додатники такого ряду:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'' + \mathfrak{P}''' + \ldots\ldots, \tag{44)}$$

який росте з зростаючими степенями a. Перший додатник є внутрішною електро-маґнетною силою, в якім виступає a; другий член є силою реакції проміньованя, яка від форми електрону не залежить, отже a не буде виступати в нім. Третий член буде знов залежати від форми електрону і розкладу наряду і в нім буде виступати a в чисельнику і т. д. А що внутрішна сила $\mathfrak{P}$ була означена скоростию і прискоренем, тому таке розвинене є все можливе, коли тільки рух е тяглий, а его скорість буде менша від скорости сьвітла. Чим дальше будемо провадити розвинене такого ряду, тим висші похідні ʋ дістанемо і тим висші степені тих похідних треба буде брати під увагу. Ряд сей буде тим менше збіжний, чим рух буде більше нетяглий, а скорість буде щораз більше доходити до границї скорости сьвітла. Для нетяглих рухів і рухів зі скоростию сьвітла ряд сей буде все розбіжний.

Про хльорофіль.

написав

Стефан Кордуба.

I.

Загально відомо, що зелена краска ростин походить від присутности осібних зелених тілець, розміщених в видї зелених грудочок серед клітинної протоплязми, котрі то тїльця називаємо галинками зелені (Chlorophyllkörner). Галинки зелені стрічаємо у всїх родів ростин, починаючи від найвисших а кінчаючи на найнизших, з виїмком бактерий та грибів, котрі при своїм галапаснім житю тої зелені цїлком не потрібують. У глїнів (Algae) форма тих галинок е ще дуже ріжноманїтна. Звичайно посїдає тут кожда клітина одну велику галинку, так зв. хльоропляст, в видї щитоватім або лентоватім, що тягнеть ся будьто здовж клітинної болони (Palmelaceae, Coleochaete), будьто лежить в самій серединї клітини (Mougeotia). При дальшій діференціяції прибирають хльоропляcти береги меньше або більше зубчасті або тягнуть ся здовж клітини в видї спірально звиненої стяжки, як се можна запримітити у оскрутнї (Spyrogyra), котра звідси взяла навіть свою назву. У висших вже глїнів, мохів та папоротий, як також у всїх явноцьвітих, форма галинок зелені прибирає сталий вид: е вони по найбільшій части овальні або сочковаті або прибирають вид многобічних табличок. Загально, коли слідитимем морфольогічний розвій тих галинок, починаючи від найнизших а кінчаючи на найвисших ростинах, побачимо, що й в тім напрямі поступала природа постепенно а то, маючи на оцї те важне завдане, яке ті галинки сповняють в житю ростини, побільшала постепенно їх число так, що коли у найнизших ростин стрічаємо сесї галинки в числї одної або двох, то у висших ростин подибуємо їх в кождій асімілюючій клітинцї в великій скількости.

Про хльорофіль.

написав

Стефан Кордуба.

I.

Загально відомо, що зелена краска ростин походить від присутности осібних зелених тілець, розміщених в виді зелених грудочок серед клітинної протоплязми, котрі то тільця називаемо галинками зелені (Chlorophyllkörner). Галинки зелені стрічаемо у всіх родів ростин, починаючи від найвисших а кінчаючи на найнизших, з виїмком бактерий та грибів, котрі при своїм галапаснім житю тої зелені цїлком не потрібують. У глїнів (Algae) форма тих галинок є ще дуже ріжноманітна. Звичайно посїдае тут кожда клітина одну велику галинку, так зв. хльоропляст, в виді щитоватім або лентоватім, що тягнеть ся будьто здовж клітинної болони (Palmelaceae, Coleochaete), будьто лежить в самій серединї клітини (Mougeotia). При дальшій діференціяції прибирають хльоропласти береги меньше або більше зубчасті або тягнуть ся здовж клітини в виді спірально звиненої стяжки, як се можна запримітити у оскрутнї (Spyrogyra), котра звідси взяла навіть свою назву. У висших вже глїнів, мохів та папоротий, як також у всїх явноцьвітих, форма галинок зелені прибирае сталий вид: є вони по найбільшій части овальні або сочковаті або прибирають вид многобічних табличок. Загально, коли слїдитимем морфольоґічний розвій тих галинок, починаючи від найнизших а кінчаючи на найвисших ростинах, побачимо, що й в тім напрямі поступала природа постепенно а то, маючи на оцї те важне завдане, яке ті галинки сповняють в житю ростини, побільшала постепенно їх число так, що коли у найнизших ростин стрічаемо сесї галинки в числї одної або двох, то у висших ростин подибуемо їх в кождій асімілюючій клїтинцї в великій скількости.

У висших, листястих ростин, галинки зелені містять ся головно в листю, хоч подибуємо їх і в иньших частях орґанїзму. В листю виступають вони в обох верствах листєвої ткани так губчастій як і палїсаднїй, особливо в тій послїднїй в великій скількости. З чого вони повстають та звідки беруть ся в такім великім числї? Первісно думали, що галинки зелені подібно як прочі хромопласти видїлюють ся з матерії, що находить ся серед клїтинної протоплязми, та з котрої викристалїзовують вони в видї подовгастих тїлець, подібно як пр. зеренця алеврону серед насїня наших збіж. Перший Schmitz виказав на водоростах, що нові тїльця зелені повстають з давних дорогою подїлу а не родять ся з якоїсь твірчої матерії, розміщеної серед протоплязми. Слїдами Schmitz'a пішов Schimper, котрий ствердив, що такий процес має місце не лише у низших але й у всїх висших ростин. При помочи мікроскопійних дослїдів він переконав ся, що у всїх твірчих тканях ростин містять ся протоплязматичні безбарві тїльця, котрі через подїл множать ся а проникнувши до поодиноких тканий, ріжничкують ся відтак, то на л е в к о п л я с т и або тїльця безбарві, то на *хльоропласти* або як ми їх назвали, галинки зелені, то знов на х р о м о п л я с т и, себто тїльця, що можуть бути ріжно забарвлені: на буро, жовточервоно і т. д. Хльоропласти збирають ся, як я вже згадав, головно в листю, надаючи йому барву зелену, хромопласти знова подибуємо головно в коронї цьвітів або наскірні овочів, котрим надають відповідну закраску.

Хроматофори в клїтинках розвиваючих ся пучків, мають початково сочковату форму і лежать в досить великих відступах від себе, пізнїйше однакож множачи ся через подїл, зближають ся до себе та прибирають вид овальний. В часї зміни форми доконуєть ся також зміна барви. Одні з білих стають ся зеленими, иньші знов з брудно-білої або сїрої барви прибирають краску цеглисточервону. Та переміна барви хроматофорів доконуєть ся у ріжних клїтинок в ріжнім часї так, що пр. в цьвітах рожі можемо подибати ріжні стани переходові від нормальних, сочковатих, галинок зелені аж до трикутних хроматофорів жовтої або червоної краски. Зміна краски хроматофорів попереджує звичайно зміну форми. З сього бачимо, що зелені галинки або як ми назвали їх хльоропласти, є того самого походження що тїльця иньшої барви та що вони можуть взаїмно переображати ся і зміняти свою форму та барву, переходячи одні в других, при чім за зміною форми і барви слїдує зміна функції.

Галинки зелені (хльоропласти) мають будову тїл протоплязматичних. Що однак відносить ся до їхньої внутрішньої структури, під многими зглядами не є вона ще докладно розслїджена. Pringsheim впевняв, що хльоропласти мають структуру губчасто-поровату а цїла їх протоплязматична маса, котру називаємо основною (Grundmasse), є пересякла олїйно плинною барвиною (Farbstoff). A. Meyer описав дещо докладнїйше сесю протоплязматичну субстанцію і назвав її „Stroma“. В тій то масї розміщені суть поодинокі краплї зеленого плину так зв. *хльорофілю*. Meyer робив свої дослїди на ростинах, у котрих [illegible] можна бачити кропельки хльорофілю (пр. у Aca[illegible] phippium s.). Стан скупности, в якім виступає основна маса хльоропластів, є меньше більше сталий а радше пів плинний; в кождім разї є вона дуже нїжної та мягкої консистенції, як можна переконати ся з сього явища, що, коли галинки зелені, порвані струєю порушаючої ся протоплязми, перетискають ся побіч себе, то сплощують ся і приймають подовгастий вид. Зі сторони вншної покриває галинки зелені тоненька болонка, як об тім переконав ся Tschirch на живих клїтинках водних ростин Nitella і Elodea canad. То само можна ствердити у ростин сухоземних, але сї послїдні до дослїдів не надають ся, бо істноване плївки у хльоропластів тих ростин можнаби також уважати за обяв патольоґічний. А хотяй би навіть дорогою чистої обсервації істнованя вншної плївки у хльоропластів ствердити не можна, то присутність її мусимо приймити хотяйби зі зглядів хемічно-фізичних.

Що відносить ся до барви основної маси хльоропластів, то тяжко ствердити, чи та маса є цїлком безбарва, чи слабо закрашена; очевидно зелені грудки хльорофілю не позваляють сего докладно розслїдити.

Що ся зелена барвина, звана хльорофілем, виступає в видї поодиноких грудочок, се ствердило много ботанїків та хеміків, але деякі з них як Tschirsch думали, що ся зелена барвина проникає основну протоплязматичну масу хльоропластів і є серед неї розпущена а не виступає в поодиноких зеренцях (grana). Проти сього погляду промавляє не лиш факт, заобсервований Schimper'om, Meyer'om та иньшими, котрі прямо бачили ті зеренця хльорофілю, але також дослід, який виконав Reinke. Він переконав ся, що галинки зелені так як вони суть розміщені серед клїтинок листя, не флюоризують а навіть емульзія хльоропластів, витиснена з листя базнику (Sambucus nigra) і піддана стислим дослїдам при помочи спектроскопу і сильних сочок, не виказала анї слїду червоного сьвітла флюоресценції. Навпаки звісною є річю, що коли хльорофіль розпустимо в алькоголю або етері і той розчин слідити мемо в сонїшнім сьвітлї, то він пічне сильно флюоризувати. Отже коли хльорофіль в листю не флюоризує, або як флюоризує то дуже слабо, то лише длятого, що хльорофіль не виступає в листю як розчин. Reinke розпустив відтак хльорофіль, котрий одержав з листя, намоченого в алькоголю, в розтопленій парафінї. Розчин зачав флюоризувати тодї так красно, як в алькоголю. Як лиш парафіну остудив, хльорофіль не оказав анї слїду флюоресценції. Сей дослїд веде нас до заключеня, що хльорофіль не містить ся в основній масї в станї цїлком плиннім але радше плинно-сталім, збитий в поодинокі грудки (grana). Сей здогад є правдоподібним також з огляду на фізіольоґічну чинність сеї барвини: бо коли правдою є, що задачою хльорофілю є редукція двокису вугля (CO_2), котрий з воздуха проникає до галинок зеленї, то сей процес проникання стає ся значно улекшеним при того рода розміщеню хльорофілю.

Як я згадав, протоплязматичні тїльця, з яких пізнїйше в міру розвою ростинного орґанїзму повстають хльоропласти, є первісно безбарві або слабо закрашені і як левкопласти виповняють ткань розвиваючих ся пучків і прозябцїв. В міру сього як вніїшні обставини сприяють та ростина нормально розвиває ся, безбарві тїльця наперед жовтїють, але та жовта краска не триває довго, бо по якімсь часї прибирає листє під впливом дїланя вніїшних чинників краску зелену; причиною сього є поява зеленої барвини себ то хльорофілю. Щоби однак хльорофіль міг витворити ся, до сього конче потрібні є слїдуючі чинники: передовсїм сьвітло, без згляду на се, чи се є сьвітло сонїшне чи иньше, а відтак певний степень теплоти. Ростини, що ростуть в темнотї або в сьвітлї дуже слабім та розсїянім, суть цїлком позбавлені зеленої краски і стають ся жовтими та блїдими, однак скоро лиш виставимо блїду ростину на дїланє сонїшних лучів, стає ся сейчас з блїдо-жовтої зеленою. Не у всїх ростин се явище виступає однаково. Деякі чатинні дерева (coniferae) визначають ся тим, що їх шпильки, як лиш розвинуть ся, суть жовтими, та потрібують аж кількох тижнїв, щоб зазеленїти. Не лиш на сонїшнім сьвітлї зеленїють ростини, може се наступити при кождім иньшім штучнім сьвітлї як електричнім, маґнезієвім і т. и. та, як виказали дослїди, при такім штучнім сьвітлї ростини не лише заховують темно-зелену краску, але навіть досить добре розвивають ся і можуть видавати овочі. З другої сторони деякі з чатинних дерев як ялиці а також туї (Thuja or.) в часї кільченя можуть навіть в темнотї витворювати хльорофіль, однакож гинуть скоро, бо з недостачі сьвітла не можуть асімілювати. Факт сей ріжно

толковано: одні говорять, що має тут вплив досить висока температура (14—16° C) иньші знов твердять, що в часї кільченя виділяють ся певні хемічні сполуки, котрі в цїлости заступають дїланє сонїшних лучів. Не всї сонїшні лучі впливають однаково на витворенє хльорофілю; як дослїди виказали, головно жовті лучі дїлають найенерґічнїйше, найслабше сині і фіолетні.

Як істнує певне minimum сьвітла, потрібне до витвореня хльорофілю, так є також певне optimum, при котрім витворюванє хльорофілю і процес асіміляції відбуває ся найенерґічнїйше; поза тим стоїть межа, котрої переступленє може не лише утруднити процес асіміляції але спричинити цїлковите знищенє галинок зеленї. Обсервації виказали, що не лише алькогольні та етерові розчини розкладають ся під впливом сьвітла; той сам розклад і знищенє хльорофілю може наступити в живім листю ростини, коли ся послїдня є виставлена на дїланє занадто сильних сонїшних лучів, сильнїйших, чим се є потрібним до зросту і житя галинок. То нам пояснює, для чого много з наших дерев оказує в горячій і посушній порі року листє блїде як пр. деякі чатинні дерева, або длячого мохи, котрі в затїнених місцях оказують красну зелену барву, виставлені на дїланє сильних сонїшних лучів, поволи жовкнуть і вянуть. Всї ті явища належить пояснювати собі в сей спосіб, що під впливом сильного сьвітла наступило в тих случаях частинне знищенє хльорофілю, отже барвини а не цїлої галинки зеленї, яка при лагіднїйшім сьвітлї (інсоляції) може знова відзискати зелену краску. Се припущенє потверджають дослїди Pringsheim'a. Пускаючи сконцентровані сочкою лучі на приготовані галинки зеленї, запримітив він, що в наслїдок великої інтензивности сьвітла наступило в них цїлковите знищенє хльорофілю і цїлої протоплязматичної маси, здає ся з причини процесу паленя.

Подібно як за сильне сьвітло, дїлає убійчо на хльорофіль цїлковита недостача сьвітла. Sachs переконав ся, що в темнотї не лиш розкладає ся сам хльорофіль але також протоплязматичний підклад опускає повільно клїтинки, так що по якімсь часї наступає цїлковитий занник хльоропластів. Сей процес відбуває ся тим скорше чим висша є температура. У ростин, призвичаєних до сильного сьвітла, той процес виступає вже тодї, коли ті ростини короткий лиш час знайдуть ся в затемненім місцї, як то можна запримітити у деяких трав і чатинних дерев, иньші знова ростини можуть обійти ся без сьвітла цїлі місяцї і не тратять при тім зеленого вигляду.

Причиною розкладу хльоропластів в темнотї суть після Wiesner'a орґанїчні кваси.

З огляду на змінні впливи осьвітленя прибирає листє ріжних ростин ріжне положенє зглядом падучих лучів сонця. І так загально є звісною річию, що особливо у ростин тропікальних країв уставляєть ся листє не як у наших дерев своєю площею нормально до падаючих лучів але радше рівнобіжно себто рубом, щоби в сей спосіб охоронити ся від надмірного жару сонця. Так як листє можуть також зміняти своє положенє галинки зе́лені (хльороплясти), відповідно до напряму й інтензивности сьвітла. Коли Stahl уставив оден з глїнів, званий Mougeotia, в слабім сьвітлї, плитки зе́ленї уложили ся своїми поверхнями нормально до падаючих лучів, знова при сильнім сьвітлї площі їх злили ся з площею сьвітла. Через зміну інтензивности сьвітла можна викликати відповідний оборот і скрут хльороплястів. Такі рухи галинок, відбуваючі ся під впливом сьвітла, запримічено у багатьох висших ростин: як Ornithogallum umb., Scilla bifolia, Viola odorata, Polygonum і т. и. В многих случаях має вплив на рух і розміщенє галинок в листю виключно інтензивність сьвітла а не його напрям. Має се місце у многих мохів та водних ростин пр. у Elodea canad., Vallisneria spiralis та многих иньших. В слабім сьвітлї, яке для водних ростин є сьвітлом звичайним і нормальним, галинки уставляють ся в клїтинках рівнобіжно до поверхнї листка, при чім бічні стїни клїтинок є цїлком позбавлені зе́лені (епістрофія). Як лиш однак кинемо на листок тих ростин сильнїйше сьвітло, сейчас галинки утїкають і уставляють ся біля бічних стїнок клїтин (апострофія). При надмірній інтензивности сьвітла опускають галинки й ті бічні стїнки і переносять ся до середини клїтинок, щоб в сей спосіб ухоронитись від гнищеня (систрофія). Не лише сьвітло викликує те явище; можуть его викликати також иньші чинники, як ріжні хемічні та механїчні діланя, сильні стрясеня або нагла зміна температури.

Зміну положеня галинок зелені в клїтинках належить толкувати собі не свійством порушуваня ся тих галинок але радше самої протоплязми, котра їх зі собою порикає.

Яке значінє має то явище для житя ростини, не трудно згадати. Задачию галинок є вглитанє сонїшних лучів, длятого при слабім осьвітленю уставляють ся галинки зе́лені в той спосіб, щоби свою поверхню можливо як найбільше побільшити а тим самим з'абсорбувати як найбільше сонїшного сьвітла, як жерела енергії потрібної до житя ростини. З другої знов сторони надмірне сьвітло ділає на них убійчо, длятого через відповідне уложенє старають ся сього уникнути.

Побіч сьвітла при витворюваню хльорофілю має головне значінє відповідна температура. Що так є дїйсно, можна об тім переконати ся кождої весни, коли снїги зачнуть топити ся. Мимо сього що сонце досить вже пригріває, поля і луги довго ще заховують жовту краску, бо видно температура воздуха не осягнула еще відповідної висоти. Можна переконати ся, що при температурі 18° — 19° С хльорофіль творить ся еще досить поволи, хотяй деякі мотильковi ростини вже при температурі 4° С зачинають зеленїти і асімілювати, чатинні знова в часі кільченя навіть при 9° С не оказують зелені. Minimum температури, при котрім ростини зачинають зеленїти, виносить + 16° С, коли спаде температура понисше minimum, новий хльорофіль не творить ся; коли низька температура триває довший час, ростини прибирають т. зв. зимову барву наших чатинних дерев, що повстає в наслїдок частинного знищеня зеленої барвини а виступленя на єї місце бурої. Колиж знова температура підносить ся, то в міру сього прибуває що раз більше хльорофілю але лише до певної границї, по за котру дальше підвисшуванє температури може спричинити вздержанє процесу асіміляції і смерть ростини. То maximum температури, при котрім хльорофіль еще витворюєсь, виносить + 40° С, optimum колибає ся між 20° С а 35° С.

Крім згаданих вже услівій конечні суть до витвореня хльорофілю ще й иньші чинники, як присутність кисня, амоняку (NH_3), желїзних і азотних солий та достаточна скількість вогкости. Що потрібною є достаточна скількість вогкости, то стверджує факт, що ново засїяне збіже в посушній осени є цїлком жовте, присутність знов амоняку та азотних солий є з того згляду потрібна, що галинки зелені є, подібно як клїтинки, протоплязматичними творами, які без згаданого корму обійти ся не могуть.

Крім згаданих солий мають також цукри значний вплив на творбу хльорофілю. Переконав ся об тім Klebs, годуючи деякі водні ростини (Elodea canad.) в сильних цукрових розчинах. У Stichococcus bacillensis рішає рід поживи о появі хльорофілю в темнотї: а іменно азотани потасові не викликують зазеленїня, натомість asparagin або pepton може се спричинити. Рівнож виказали досліди, що ростини блїді скорше зеленїють в розчинах цукру чим в чистій водї. Відай присутність певної скількости цукрів може бути користною хоть не конечною при творбі хльорофілю.

Розгляньмо тепер фізичні та хемічні свійства хльорофілю. Хльорофіль ріжнить ся тим від иньших природних барв, що не розпускаєть ся, анї в зимній анї горячій водї; можемо його одержати з зеленого листя, коли на якийсь час намочено єго в алькоголю або етері. Крім сього розпускаєть ся хльорофіль також в бензолю, бензині, товщах, хльороформі а навіть оливі.

Найкрасший розчин хльорофілю одержимо, коли зелене листє намочимо в 95% алькоголю. А щоби переконати ся, чи так одержаний хльорофіль є поодинокою чи зложеною барвиною, додаймо до сього зеленого розчину трохи бензолю, вимішаймо відтак добре сю мішанину а коли розчин успокоїть ся, побачимо по якімсь часї дві барвини: одна на споді золото-жовта, розпущена в алькоголю тзв. Xanthophyll, друга блїдо синьої краски, розпущена в бензолю тзв. Cyanophyll. Тоті дві барвини виступають віддїльно також в природї а іменно барвина блїдо синя переважає в сьвіжо розвитих листочках і билах, жовта знов барвина виступає в листю в порі осїнній, коли сонце слабше вже гріє а температура на дворі значно обнизить ся. Причиною жовкненя листя є безперечно повільний розклад хльорофілю; коли протоплязма і всї запаси корму переносять ся з листя до трівалих частий ростини та в зівялім листю лишаєть ся лише жовта барвина (Xanthophyll) в видї дрібоньких жовтих зерен. Інтересним є також, що деякі ростини як пр. Thuja orient, коли є в зимі звернені до сонця, прибирають від сеї сторони краску буру. Сю появу належить в сей спосіб розуміти, що хльорофіль розкладаєть ся під впливом морозу і сонця а на його місце виступає темна барвина. Хльорофіль є сполукою дуже нетревалою; алькогольний або етеровий розчин хльорофілю виставлений на ділanє сонця і воздуха тратить свою зелену краску а прибирає жовту або навіть бураво жовту. Сей розклад хльорофілю може відбувати ся лише під впливом тих двох чинників; сам воздух без сьвітла або само сьвітло без воздуха сього процесу викликати не можуть. Розклад хльорофілю залежить головно від інтензивности дїлаючого сьвітла а також — як дослїди Reink'ого виказали, від якости сьвітла: найсильнїйше дїлають на розклад хльорофілю лучі червоні а найслабше зелені. Отсе захованє ся розчинів хльорофілю під впливом сьвітла наводить нас на здогад, що подібний розклад хльорофілю під впливом сьвітла відбуваєть ся в живій ткани ростини. Не бачимо однак сього, бо місце розложеного заступає сьвіжо витворений хльорофіль, подібно як дїєть ся з кождою живою матерією. Як довго треває гармонїя між процесом розкладу а творби хльорофілю, так довго заховує ростина зелену краску, однак з хвилею, як оден процес зачинає брати верх над другим, сейчас виступає жовта або бура барва.

Так дїєть ся в осени, коли температура воздуха значно обни-

зить ся. Запримічено, що листє дерев жовкне в осени наперед на тих галузках, котрі найбільше суть виставлені на сонце. Подібно буравіють під впливом морозу і зимна найскорше ті галузки дерев чатинних (coniferae), що найбільше виставлені на дїланє сонця, коли галузки, укриті в глубинї корчів, заховують зелену краску. Відай до самого розкладу хльорофілю причиняєть ся не лише сама низька температура, але також в значній мірі сьвітло.

Очевидно не дасть ся заперечити, що чималий під тим зглядом вплив мають також орґанїчні кваси, котрих в кождій ростинї є подостатком. В лїтї, коли ткань листя є здоровою, кваси ті не можуть дістатись до нутра хльоропластів, бо сьому перешкаджає плїнка, що їх окружає, але в осени чи зимою, коли ткань листя під впливом зимна гине, тодї всякі кваси та барвини легко проникають до нутра клїтинок а відтак і до галинок зелені, спричиняючи розклад хльорофілю. В виду сього стає ясним, длячого Фльора, що росте близько фабрик, звідки добувають ся ріжні ґази та пари квасів, так скоро жовкне або й цїлком примирає.

Хльорофіль і гемоґльобін, себ то червона барвина крови, є ідентичними хемічними сполуками.

Отсе твердженє є остаточним вислїдом довголїтних праць багатьох учених над складом хемічним хльорофілю. Дослїди в тім напрямі розпочав єще Hoppe-Seyler, відтак вів їх дальше Hagenbach і Kraus, а в послїдних часах Nencki, Schunk і Marchlewski. В своїх працях послугували ся сї учені головно спектроскопом. Дослїди над спектрум хльорофілю розпочав єще Brewster в роцї 1833 і переводив їх так над зеленим листєм як і над алькогольним розчином хльорофілю. Після точних дослїдів Kraus'а спектрум хльорофілю, розпущеного в алькоголю, складаєть ся з сїмох смуг абсорбційних: перша смуга, що лежить між B і C лїнїй Фравенгофера в червонім полю спектра, є найсильнїйша, прочі суть меньші і слабші. Друга половина спектра від E — H, зміняєть ся дещо залежно від роду розчинника: в бензолю та часть спектра більше пересуваєть ся в сторону фіолєтного кінця спектра.

Дослїди ті виказали, що хльорофіль є вельми скомплїкованою орґанїчною сполукою. Дїлаючи на нього ріжними хемічними відчинниками, одержимо кілька похідних, з котрих найважнїйшою є так зв. *філльопорфірін* а котра в новійших часах стала ся предметом дослїдів учених, головно Nenck'ого, Schunk'а і Мархлевського. Завдяки їх працї а головно сього послїднього, стверджено, що межи Філльопорфіріном, котрий є темно-червоно-фіолєтної краски і оказує нахил до твореня дрібних кристалів а межи *гема-*

топорфірінам, барвиною крови, заходить дуже велика схожість. А іменно хемічний склад обох тих сполук є дуже до себе подібний: фільльопорфірін $= C_{16}\ H_{18}\ N_2\ O$, гематопорфірін $= C_{16}\ H_{18}\ N_2\ O_3$, що вказує на то, що оба ті тіла є лише ріжними степенями окисення одної і тої самої субстанції.

Рівнож і спектра обох барвин в етеричних квасних і алькалічних розчинах, а з другої сторони спектра розчинів відповідних солий цинкових, суть ідентичні, з тою лише малою ріжницею, що абсорбційні смуги гематопорфіріна є легко пересунені в напрямі червоного.

Після фотоґрафічних знимок Tschircha при помочи кварцевого спектроскопу анальоґія абсорбційних смуг розтягаєть ся також на спектрум позафіолєтове.

На основі тих і подібних фізичних та хемічних дослідів можемо нині майже рішучо сказати, що ф і л л ь о п о р ф і р і н, п о х і д н а х л ь о р о ф і л ю і г е м о ґ л ь о б і н с е б т о ч е р в о н а б а р в и н а к р о в и, с т а н о в л я т ь о д н у і т у с а м у м а т е р і ю.

Отсей здобуток сучасної біохемії мусить нам послужити як ще оден незбитий доказ, що „natura nescit saltus" — як говорили старинні фільозофи, що межи орґанічними творами природи, між царством звірят а царством ростин, не істнує так велика пропасть, як то єще до недавна представляли собі учені, але навпаки й в тих, так на перший погляд відмінних сьвітах, дасть ся віднайти богато спільного, що лучить оба ті царства зі собою, та що вказує на їх спільне походжене.

Значінє хльорофілю в природі дуже велике: від нього залежить житє не лише ростин але й цїлого орґанічного сьвіта, не виключаючи чоловіка.

Як звісно ростина побирає корм двома дорогами: корінєм тягне ростина ріжні соли мінеральні, розпущені в воді, листєм знова побирає з воздуха крім иньших ґазів головно вуголь, котрий там уносить ся в виді сполуки, котру називаєм двокисом вугля. Зелені части ростин, як листє, вглитають отсей двокис разом з иньшими ґазами, котрі відтак розпускають ся в клітиннім соку і звідси проникають до зелених галинок. Під впливом сьвітла наступає тут сейчас редукція двокису вугля; вуголь лишаєть ся в хльоропластах, де разом з воднем і киснем лучить ся на так звану мучину або крохмаль а освободжений кисень виділяєть ся. Процес сей званий *асіміляцією* $C\ O_2$, відбуваєть ся в галинках так скоро, що вже по двайцять мінутовім діланю сьвітла та при достаточній

скількости вугляного квасу виступають в галинках маленькі зеренця мучини.

Щоби процес асіміляції міг відбувати ся, до сього потрібним є крім галинок зелені, як властивого асіміляційного орґану, і двокису вугля, головно с ь в і т л о. Як однак досліди виказали не всї лучі сьвітла ділають однаково: від червоного сьвітла почнаючи до жовтого, ділають лучі щораз інтензивнїйше а при сьвітлї жовтім асіміляція відбуваєть ся найенерґічнїйше.

При діланю дальших лучів в спектрі сила асіміляційна зменьшаєть ся а при фіолєтовім сьвітлї цїлком слабне. Що дотичить двокису вугля, то переконали ся, що чим більше єго в атмосфері, тим живійше відбуває ся процес асіміляції. В давних формаціях землї особливо в формації камінного вугля було в воздусї значно більше вугляного двокису як нинї, тож ростинність в тих часах була буйнїйша, доказом чого є грубі поклади камінного вугля, що заховались до нинї.

Процес асіміляції відбуваєть ся виключно в галинках зелені. Черпаючи з воздуха двокис вугля ($C\ O_2$) і абсорбуючи його, виділяють рівночасно з себе галинки вільний кисень, очевидно в відношеню прямо пропорціональнім до скількости забсорбованого $C\ O_2$. Отсе явище виділюваня кисня з хльоропластів є найлучшою крітерією, що лише в них а не деинде відбуває ся процес асіміляції. Наочно можемо о тім переконати ся при помочи бактеріольоґічної методи, котра визначаєть ся тою прикметою, що при єї помочи можна викрити найменьшу скількість кисня. Звісно, що деякі бактерії пр. bacterium thermo, виконують в атмосфері кисня скорі рухи, котрі однак сейчас устають, як лиш кисня забракне. Послугуючись сею методою, переконали ся, що пр. в клїтинцї ocкрутнї (Spyrogyra) коли єї виставимо на сьвітло, лише в галинцї зелені ґрупують ся та порушають ся бактерії, коли навпаки, бактерії, находячі ся в незеленій части клїтинки, заховують ся цїлком спокійно. З сього випливає заключенє, що лише в галинках зелені виявзуєть ся кисень або иньшими словами лише в г а л и н к а х в і д б у в а є т ь с я п р о ц е с а с і м і л я ц і ї.

Однак з огляду на се, що кожда галинка зеленї складаєть ся, як згадано на самім початку, з части протоплязматичної (stroma) і з зеленої барвини або хльорофілю, виринає тепер друге питанє, котра з тих складових частий відграє важнїйшу ролю в асіміляційнім процесї. Щоби дати на се питанє достаточну відповідь, мусимо наперед переконати ся, як заховуєть ся на сьвітлї кожда з тих складових частий віддільно від себе. Від давна ріжні вчені виголошували погляди, що хльорофіль сам як барвина без протоплязматичного підкладу потрафить асімілювати CO_2, а Regnard мав навіть запримітити, що алькогольні розчини хльорофілю виділяють зі себе кисень, але все те оказалось завдяки обсервації Pringsheim'a і Kny (1897) лише злудою. Так само свобідні від протоплязматичного підкладу „grana" хльорофілю, виставлені на сьвітло, не лише не виділяли зі себе кисня, але навіть приміщені на протоплязматичнім субстраті инших тіл, того явища цілком не оказували. В новійших часах (1900) робив також в тім напрямі досліди Bejjerink і переконав ся, що в розтертих хльоропластах відбуваєть ся також процес асіміляції, бо метода бактеріольоґічна ствердила у них виразно виділюване кисня. Після остаточних вислїдів його праці, спосібність до асіміляції заховують навіть найдрібнїйші частинки зеленого первища. Molisch (1904) повторив той дослїд з тим самим успіхом: він змішав ґліцериновий екстракт хльорофілю зі сьвіжого листя з порошком скоро і обережно висушеного листя, а виставивши його відтак на сонце, запримітив розклад двокису вугля і виділюване кисня. Однаковож доси не удало ся ствердити правдивости сих дослїдів. Правдоподібно видїлюване кисня в часї тих дослїдів походить звідси, що богато заховало ся єще незнищених хльоропластів, по части також то явище могло бути викликаним посмертним розкладом через ензими. В виду сих наукових вислїдів мусимо нинї станути на тім, що хльорофіль відділений від первища, як барвина, асімілювати не може.

Чи однакож з другої сторони хльорофіль в лучности зі своїм протоплязматичним субстратом відграє в процесї асіміляційнім так важну ролю, як до послїдних часів приписували йому ботаніки, є річию сумнівною а обсервації з послїдних часів вказують на щось противного. Знаємо пр. що істнує багато ростин виблїдлих, котрі отже є позбавлені хльорофілю а котрі мимо того асімілюють, як рівнож з другої сторони знаємо много бактерій тзв. пурпурових і зелених як bacterium viride, bacillus virescens, eubacillus multisporus, котрі на сьвітлї видїляють кисень, отже мусимо приймити, що асімілюють. Чи висше згадані бактерії длятого асімілюють, що їх пурпурова та зелена барвина зближена до хльорофілю, то на разї не звісно, однак в кождім разї отсї обсервації вказують нам на се, що головну чинність в асіміляційнім процесї належить приписати радше протоплязматичній масї хльоропластів, чим самій барвинї, а через се чинність хльорофілю належить спровадити до чисто фізичної. Цікаві є під тим зглядом погляди Pringsheim-a, що створив так зв. „Lichtschirmtheorie". Відмавляє він рішучо хльорофілеви хемічної чинности в асіміляційнім процесї і твердить, що хльорофіль в тім процесї сповняє чинність заслони, котрої завданєм є хоронити протоплязму галинок перед надмірним віддиханєм, та в котрої тіни можуть легко відбувати ся процеси асіміляції і редукції. Pringsheim перечить рішучо сьому, мовби хльорофіль улягав на сьвітлї тяглому розкладови і поновній реґенерації: він робив в тім напрямі численні досліди а ніколи не запримітив подібного розкладу. Після нього не CO_2 має викликувати розклад хльорофілю але кисень (O). Коли піддамо зелену клїтинку діланю сильних сонїшних лучів в атмосфері CO_2 без приступу кисня, хльорофіль позістає незмінним, підчас коли при тій самій інтензивности сьвітла вже мала скількість кисня вистарчить, щоби хльорофіль в протягу кількох хвиль знищити.

Погляд Pringsheima є о стільки неслушним, о скілько припускає він, що сьвітло може викликати який небудь вплив на процес віддиханя клїтинки, однакож друга часть його теорії, після котрої хльорофіль є тим чинником, котрого задачою є вглитати сонїшні лучі і переміняти їх в хемічну енерґію, має дійсно наукову основу.

Хльорофіль дїлає тут іменно як sensibilisator. Звісно приміром, що срібні соли, якими послугують ся головно при фотоґрафії, суть вражливі лише на фіолєтове сьвітло і лише під їх впливом розкладають ся; червоні лучі цілком на них не дїлають. Коли однакож покриємо ті соли якоюсь барвиною, котра вглитати-ме червоне сьвітло, дїланє сих лучів сейчас на них переносить ся. Подібне явище заходить, здає ся, в галинках зелені. Хльорофіль є тою барвиною, котра вглитає сонячні лучі і то лучі ріжної краски в ріжнім степени. І подібно як лучі фіолєтні, вгличені плитою фотоґрафічною, викликують на нїй певні зміни натури хемічної, так і сонїшні лучі вгличені хльорофілем, стають ся жерелом енерґії, котра викликує розклад двокису вугля (CO_2). Сьвітло падаючи на хльорофіль, вправляє в рух єго молєкули; виконують се головно ті лучі сьвітла, котрих довжина филь відповідає найбільше филям дрожачих молєкулів. Хльорофіль хватає отже живу енерґію сонця в летї і вязнить єї в тїлї ростини. Длятого слушно каже Jul. Meyer, що відкрив право о непропащій енерґії: „Die Natur hat sich die Aufgabe gestellt, das der Erde zuströmende Licht im Fluge zu erhaschen und die beweglichste aller Kräfte in starre Formen umgewandelt aufzuspeichern. Zur Erreichung dieses Zweckes hat sie die Erdkruste mit Organismen überzogen, welche lebend das Sonnenlicht in sich aufnehmen. Diese Organismen sind die Pflanzen; die Pflanzenwelt bildet ein Reservoir, in welchem die flüchtigen Sonnenstrahlen fixiert werden".

Сокаль дня 12/12 1911.

Лїтература.

1. Czapek Fr.: Biochemie der Pflanzen. 1905. Том I.
2. Ebermayer E.: Physiologische Chemie der Pflanzen 1882.
3. Grosglik S.: Z fizyologii roślin. (Fakty i przypuszczenia z dziedziny asymilacyi). 1889.
4. Haberlandt G.: Physiologische Pflanzenanatomie. II Aufl. 1896.
5. Hausen: Farbstoffe des Chlorophylls 1889.
6. Jost: Vorlesungen aus der Pflanzenphysiologie.
7. Knight: Sechs Pflanzen-physiologische Abhandlungen 1895.
8. Kraus G.: Zur Kentniss der Chlorophyllfarbstoffe 1872.
9. Marchlewski L.: Die Chemie des Chlorophylls 1895.
10. Meyer A.: Das Chlorophyllkorn 1884.
11. Meyer A.: Untersuchungen über die Stärkekörner 1895.
12. Monteverde: Das Absorbtionsspectrum des Chlorophylls 1893.
13. Pfeffer.: Pflanzenphysiologie 1897.
14. Pringsheim N.: Untersuchungen über das Chlorophyll. (Jahrbuch für wissenschaf. Botanik B. XII., 1881).
15. Sachs I.: Vorlesungen über Pflanzenphysiologie 1882.
16. Sachsse: Die Chemie und Physiologie der Farbstoffe, Kohlenhydrate und Proteinsubstanzen.
17. Schimper A. F. W.: Untersuchungen über die Chlorophyllkörner. (Jahrbuch für wiss. Botanik. Bd. XVI. 1885).
18. Schunk und Marchlewski: Annalen der Chemie 1897.
19. Tschirch: Untersuchungen über das Chlorophyll 1884.
20. Tschirch: Berichte der botan. Gesellschaft. 1895.