ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСЬКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

ТОМ XXVII.

РЕДАГУЄ

ПРЕЗІДІЯ СЕКЦІЇ.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN in LEMBERG.

BAND XXVII.

REDIGIERT VOM

PRÄSIDIUM DER SEKTION.

У ЛЬВОВІ, 1928.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка.

ЗМІСТ. — INHALT.

		стор.
1.	*Р. Цегельський:* Д-р Іван Пулюй як науковий дослідник (*R. Cehelśkyj:* D-r Johann Puluj als wissenschaftlicher Forscher)	1—28
2.	*Н. Гаморак:* Новий тип транспіроґрафа (*N. Hamorak:* Ein neuer Transpirograph)	29—36
3.	*О. Смакула:* До фосфоризації алькалевих гальоїдів (*A. Smakula:* Zur Phosphoreszenz der alkalischen Haloide)	37—44
4.	*W. Lewickyj:* La spirale logarithmique et sa développante	45—48
5.	*Ю. Ґурґула:* Окремий випадок цикльоїдальних кривих. Слимаковата лінія (*J. Gurgula:* Ein besonderer Fall der cycloidalen Kurven)	49—78
6.	*С. Д. Чорний:* Формули довготи періастра та ексцентричности орбіти затемнюваних змінних зір типу β Lyrae (*S. D. Tschorny:* Formulae of the longitude of periastron and of eccentricity of the orbits of the eclipsing variable β Lyrae-Stars)	79—81
7.	*К. Танчаківський:* Поляризація ртутьних електрод в розчинах ртутьних солий (*K. Tančakivśkyj:* Electrolysis of the solutions of mercurous salts with the mercury dropping kathode)	83—99
8.	*П. Герасименко:* Поляризація сталих ртутьних електрод в розчинах ртутьних солий (*P. Herasymenko:* Electric Polarisation of Mercury Kathodes in Solutions of Mercurous Salts)	101—113
9.	*М. Кравчук:* Про збіжність деяких ступанкових дробів (*M. Krawtchouk:* Sur la convergence des certaines fractions continues)	115—128
10.	*М. Кравчук:* Замітка про контурні інтеґрали (*M. Krawtchouk:* Sur les integrales curvilignes)	129—131
11.	*Ю. Русов:* Бокова мускулятура риб деяких етольоґічних типів (*G. Roussoff:* Sur la musculature des poissons de differents types ethologiques)	133—214

стор.

12. *N. Kryloff et N. Bogoliouboff:* Sur quelques critères concernant l' existance dérivées d' une fonctions d' une variable réelle 215—221

13. *В. Кучер:* О двійности в ґеометрії і фізиці (*W. Kučer:* Das Dualitätsprincip in der Geometrie und Physik) 223—245

14. *М. Зарицький:* Похідна і когеренція абстрактної величини (*M. Zaryckyj:* Die Derivierte und die Kohärenz der abstrakten Grösse) 247—259

15. *Р. Цегельський:* Про українську хемічну термінольоґію (*R. Cehelśkyj:* Über die ukrainisch chemische Terminologie) . 261—270

Др. Роман Цегельський (Львів).

БІБЛІОТЕКА НАУК. ТОВ. ІМ. ШЕВЧЕНКА У ЛЬВОВІ

Др. Іван Пулюй як науковий дослідник.

(В десятиліття його смерти).

Вже небаром добігає десять літ від хвилі, як заснув вічним сном великий український вчений, знаний із своєї наукової діяльности більше чужим, як своїм, — др. Іван Пулюй, професор німецької техніки в Празі. Імя його було свого часу, головно в останніх двох десятках літ девятнайцятого і на початку двайцятого століття, знане широким кругам фізиків та електротехніків середньої і західньої Европи, а ще і тепер, хоч фізика пішла сильно вперед у всіх своїх ділянках від часів діяльности Пулюя, цитують його праці,[1]) а великі підручники фізики покликуються на його досліди. Належить ще згадати, що він сконструював кільканайцять приладів власного помислу, котрі прикрашають тепер музей „Conservatoire National des Arts et Métiers“ в Парижі, „Deutsches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik“ в Монахові та німецький університет в Празі, зладив перші найкращі фотоґрафічні знимки при помочи евакуованих скляних рурок власної конструкції сейчас після відкриття Рентґена, одержав за свої прилади медалі на кількох виставах, між иншим на всесвітніх виставах в Парижі 1878 і 1881 рр. та патенти за свої винаходи в Австрії та за кордоном. Його прилади ще і тепер реклямують великі фабрики фізикальних приладів у Німеччині та Австрії.

Одначе серед нашої суспільности не знали Пулюя з научного боку тому, що ділянка стислих наук лежала у нас до не-

[1]) Гл. н. пр. Erich Pietsch, „Gasabsorption unter dem Einfluß der elektrischen Entladung — clean up — und verwandte Erscheinungen“. (Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. Berlin. V. 1926, стр. 217), де зацитована праця Пулюя „Strahlende Elektrodenmaterie“,

давна облогом, за те знали у нас Пулюя як співробітника Куліша при перекладах св. Письма на українську мову та як громадського діяча, що не лише стежив пильно з далекої Праги за всіми подіями на Рідній Землі, але також активно боровся у важних хвилях за права українського народу, як н. пр. против царського указу з 1876 р., що закнеблював був уста українського народу на Великій Україні на яких 30 літ, за українську мову в церкві та за український університет у Львові і з великим запалом виступав в часі всесвітньої війни за утворенням самостійної Української Держави.

Але не є нашою метою займатися громадською діяльністю Пулюя; в сій праці ходить лише о те, щоби приглянутися його науковій чинности. В тій ціли необхідно познакомитися з життєписю його тому, що перебіг його життя вирив сильне пятно на його науковій діяльности. Ся задача є о стільки облекшена, що Пулюй лишив по собі дуже докладну автобіографію, доведену до 1906 р., але ще досі не опубліковану, а крім того вже була друкована його біографія в альбумі Екштайна „Geistige Welt“ і в альманаху віденської „Січи“ з 1908 р.

Іван Пулюй уродився 2. лютого 1845 р. в Грималові в Галичині, де його батько був заможнім міщанином, а в рр. 1861—65 посадником міста. До ґімназії ходив в Тернополі і скінчив там свої науки 1865 р. За часів польського повстання 1863 р., коли також Українці почали думати, чиї вони діти, заложив в Тернополі громаду, до котрої належали між иньшими його приятель Володимир Ганкевич, Андрій Січинський, три брати Барвінські, Михайло Борисікевич (пізн. проф. університету) і Іван Герасимович, всі вже покійні. Отся громада мала на ціли познакомлювати своїх членів з українською історією та літературою, розширювати та піддержувати національну свідомість і підпирати літературну часопись „Мету“, що виходила у Львові під редакцією Ксенофонта Климковича до 1865 р.

Скінчивши ґімназію, пішов Пулюй до Відня, де записався на теольоґію і був прийнятий до гр. кат. семинара, званого „Barbareum“, який розвязано 1893 р. Попри теольоґічні виклади слухав також викладів математики, фізики, механіки і астрономії на фільософічному факультеті та вважав науку найбільшим добром для себе так, що через математичні і фізичні виклади дуже часто і не обідав вкупі із семинаристами.

В часі університетських студій заснував Пулюй 1865 р. товариство українських богословів, до котрого належали спершу

самі семинаристи з Галичини. Згодом пристали до нього і світські академики. В 1868 р. рішила молодь заснувати явне товариство „Січ“, котрого першим кошовим був пок. проф. Наталь Вахнянин. Вже в тім часі перекладав Пулюй на українську мову ґеометрію для українських ґімназій, хоч їх ще не було, і молитовник для українського народа. Тоді серед української суспільности в Галичині верховодили москвофіли, що ґрупувалися біля крилошан при св. Юрі. Відси називано їх „святоюрцями“. Вони мали у своїх руках „Народній Дім“, „Ставропіґійський Інститут“, „Галицько-Руську Матицю“ та гр. кат. духовні семинарі у Львові, Перемишлі тай у Відні, не допускали свідомих Українців до сих інституцій, оклевечували їх перед суспільністю як польонофілів та ішли на руку московським обєдинителям, що почали були на Великій Україні переслідувати український рух. В ілюстрованій сатиричній ґазеті „Страхопудъ“, що виходила тоді у Відні під опікою духовника російської амбасади Раєвського, підносили галицькі москвофіли на сміх „хлопську мову“ і подавали ніби переклади молитов, добираючи самі прості слова. Як раз той насміх причинився до того, що Пулюй задумав видати молитовник на рідній мові.

Тоді вже піднялася була серед нашої суспільности реакція против москвофільської „тарабарщини“, якою святоюрці писали і якою навіть вчили у школах на годинах української мови. Сю реакцію скріпили ще і твори Шевченка, що ширилися з рук до рук та навівали любов до свойого рідного народа і краю. По ґімназіях, духовних семинарах і на університетах повставали українські громади для плекання рідного слова, а у Львові часописи: „Вечерниці“, „Мета“ і „Правда“. В тій орґанізаційній праці шісдесятих років 19. ст. брав Пулюй живу участь. Він познакомився 1869 р. з Кулішем, що в ті часи був головним подвижником літературного руху на Великій Україні. Куліш стратив був урядову посаду у Варшаві за те, що не хотів виректися українства, і приїхав на весні 1869 р. до Відня. Пулюй був очарований незвичайно широким світоглядом Куліша, а ще більше його великою щирістю до літературного діла в Галичині. Вони розговорювали про національні справи у Галичині і на Великій Україні, про переклади св. Письма, над котрим Куліш вже працював, і про потребу народнього молитовника. Тоді то зготовив був Пулюй невеличкий молитовник для вояків-Українців, що був видрукуваний 1869 р. у Відні заходом о. Доніна, крилошанина при храмі св. Стефана у Відні, а потім викінчив біль-

ший молитовник в українській мові та передав рукопис його новоіменованому митрополитови Йосифови Сембратовичеви, складаючи йому ґратуляцію в імени академічної молоді у Відні. Митрополит обіцяв Пулюєві, що дасть апробату молитовника, але опісля, вернувши до Львова, — під впливом тодішнього голови святоюрців крилош. Малиновського відмовив апробати і позволив на спалення рукопису „по праву каноническому". З приводу тої події і листу Малиновського до ректора гр. кат. семинара у Відні видрукував Пулюй у Відні 1871 р. брошуру п. з. „Лист без коверти", написав новий молитовник і видав його 1871 р. у Відні за позичені гроші.

Того самого року працював Пулюй разом з Кулішем, що замешкав з жінкою у Відні, над перекладом св. Письма на українську мову. Праця ішла дуже поволи, хоч оба працювали від рана до вечера, і Пулюй покинув був навіть на якийсь час університетські студії, щоби роботу приспішити, а по виїзді Кулішевої замешкав разом з Кулішем в одній кімнаті та жертвував весь свій час для перекладу. В маю 1871 р. був вже готовий переклад св. Письма Нового Завіта до первого соборного листа апост. Петра, гол. І. 16 і небаром потім видрукували Пулюй і Куліш переклади всіх чотирох евангелій у Відні. Опісля, перетомлені працею, роз'їхалися: Куліш у свою Мотронівку, а Пулюй до Грималова до родичів. В Грималові переклав Пулюй листи апостолів Петра, Йоанна і Юди та обявлення Йоанна Богослова і післав рукопис Кулішеви 9. серпня 1871 р. Видрукувати цілий „Новий Завіт" пощастилося аж 1881 р. в друкарні Товариства ім. Шевченка у Львові, але на Велику Україну не найшло св. Письмо вступу ізза указу з 18. мая 1876 р., хоч Пулюй робив заходи в Головнім Управленію по ділам печати в Петербурзі.[1]) В Галичині також не поширилося завдяки злегковаженню його Галичанами, як нарікає Пулюй у своїй автобіографії. Так перележало воно на складах до 1885 р. і тоді удалося Пулюєві за дозволом Куліша продати наклад „Нового Завіта" британському біблійному Товариству у Льондоні та поплатити довги за друк молитовника з 1871 р. і Нового Завіта 1881 р. Пулюй переписувався з Кулішем до 1886 р. і остав вірний йому та боронив його навіть тоді, коли Українці відсахнулися були від Куліша за його „Історію Возсоединенія Руси" і за його критику Шевченка. Одначе приязнь їх урвалася і Куліш ізза якоїсь маловажної справи чув жаль до Пулюя, вже не зближався до нього та помер 2. лютого

[1]) Тепер Ленінград.

1897 р. Пулюй був двічи на Великій Україні в 1878 р. і 1880 р. та гостював за першим разом у Івана Білозерського, а другим разом у Кулішів і Александрова в Харкові. По смерти Куліша навязав Пулюй переговори з Кулішевою і репрезентантом британського біблійного товариства Мілярдом у Відні в справі видання перекладу Старого Завіта, зладженого в більшій части Кулішем. До помочи запросив Івана Нечуя Левицького, котрий перевів четвертину Старого Завіту; сам зладив переклад „Псальмів" і зредаґував переклад Куліша, виправляючи деякі недогляди та недостачі. Се було 1903 р. Ціле св. Письмо вийшло з друку 1904 р. До перекладу св. Письма на українську мову прикладав Пулюй велику вагу. Він займався сею справою через яких 35 літ свойого найкращого віку, не зважаючи на те, що був обтяжений науковою та иньшою працею, та порівнує у своїй автобіоґрафії значіння появи українського св. Письма зі значінням перекладу Біблії Лютра для німецького народу.

По видрукуванню цілого св. Письма поновив Пулюй заходи в Головнім Управленію по ділам печати в Петербурзі та в петербурській Академії Наук, щоби виєднати дозвіл на висилку св. Письма до Росії, але йому відмовлено. Так само університети в Петербурзі, Київі і Харкові не прийняли його до своїх бібліотек. Дня 12. лютого 1905 р. вислав був Пулюй меморіял в обороні українського слова до президента комісії для цензурних законів Кобека і лист з просьбою о дозвіл поширити українські Псалтирі між раненими і недужими жовнірами-Українцями, учасниками російсько-японської війни. Але сі заходи були даремні тоді, як японський ґенерал Ноґі на просьбу Пулюя позволив розширяти св. Письмо в українській мові між жовнірами-Українцями, що з російським військом попали в японський полон.

Після сього екскурзу, що кидає ярке світло на характеристику особи Пулюя, займемося дальше перебігом його студій, наукової карієри та оглядом наукової діяльности. З великим ентузіязмом відносився він до природних наук, а головно до фізики і електротехніки. „Колиб я", пише він у автобіоґрафії, „мав ще раз починати жити і працювати, то не вибрав би иньших наук, як природні. Ту вічні закони і непохитна правда". Тому не дивно, що Пулюй, скінчивши 1869 р. теольоґію, не висвячувався, але, не зважаючи на горячі просьби матери, що боялася, чи з дальших студій що вийде, поїхав знов до Відня, де спершу бідував, а опісля удержувався зі стипендії та з лекцій.

В 1872 р. зробив іспит на ґімназіяльного учителя матема-

тики і фізики та займався науковими дослідами у фізикальному інституті проф. Лянґа у Відні. В 1874 р. був асистентом для фізики і механіки в ц. к. морській академії у Фюме у проф. Штальберґера, де на його предложення припоручено Пулюєві викладати теорію тепла. При сій нагоді зладив Пулюй свій славний прилад до поміру механічного рівноважника тепла. По смерти Штальберґера був через один рік суплентом для вище згаданих предметів.

В 1875 р. дістав від міністерства освіти стипендію в сумі 800 зл. австр. і поїхав на дальші студії до Штрасбурґа, де працював у фізикальному інституті звісного проф. Кундта. Там також осягнув степень доктора „philosophiae naturalis“. Мимоходом кажучи, Пулюй напевно стрічався у Штрасбурґу зі своїм ровесником Рентґеном, що був там спершу асистентом, а потім доцентом і надзвичайним професором. В 1877 р. габілітувався на віденському університеті на приватного доцента для досвідної фізики і викладав від 1877 р. до 1883 р. кінетичну теорію ґазів та механічну теорію тепла. Від 1876 р. до 1882 р. був також асистентом фізики в інституті проф. Лянґа у Відні.

За часів своєї доцентури займався кількома важними і з експериментального боку дуже трудними науковими питаннями, конструював власноручно прилади, бо у Відні не було тоді ні одного механіка, що вмівби робити скляні прилади, а на спроваджування з заграниці не було грошей. Висліди тих досвідних праць майже всі видрукувані в Записках віденської Академії Наук (Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien або коротше Wiener Berichte), а його прилад до означування механічного рівноважника тепла діждався премії на всесвітній виставі в Парижі 1878 р. Пулюй був членом-основателем електротехнічного товариства у Відні і заложив 1882 р. журнал „Zeitschrift für Elektrotechnik“, що ще тепер виходить у Відні, а від 1908 р. називається „Elektrotechnik und Maschinenbau“.

Свої електричні прилади виставив Пулюй 1881 р. на всесвітній електричній виставі в Парижі. Ті апарати, власноручно зладжені ним, були відзначені дипльомом. Кілька з поміж них находиться у парижському музеї „Conservatoire National des Arts et Métiers“.

Помимо тих моральних успіхів переживав Пулюй в тім часі кілька розчарувань та прикростей. І так міністерство освіти відмовило йому підмоги на виріб приладів на парижську виставу, котрі мав йому зладити інститут для скляних виробів в Липську після його власних моделів.

Другою прикрою справою було те, що Пулюй за 5 літ доцентури не дістав ані шеляга, хоч, йдучи на студії до Штрасбурґа, мав від міністерства обіцянку відповідної ремунерації на випадок габілітації і служби на одному із австрійських університетів. Лише за асистентуру побирав невеличку ремунерацію, але і ся кінчилася 1882 р. і він оставав без ніякого удержання. Тому рішився просити особисто міністра о приобіцяну ремунерацію за свої виклади на університеті, пожалітися на відмову субвенції на виставу в Парижі і на протекційний систем при обсаді університетських катедр. Одначе огірчений вийшов Пулюй з авдієнції, що не принесла йому нічого.

Також з иньших причин мав тоді Пулюй великі неприємности. Про се розказує він у книжочці „Кілька споминів про Куліша і його дружину Ганну Барвінок“, що вийшла 1905 р. у Відні вкупі з книжочкою його пера п. з. „Нові і перемінні звізди“. А саме в звязи зі справою Наумовича зробила віденська поліція трус у Пулюя, підозріваючи в ньому приклонника Наумовича, і забрала йому листи Куліша та Білозерського. Польські часописи подали зараз другого дня вістку, що привезуть до Львова „osobistość z Wiednia“. Ся напасть пригнобила Пулюя сильно, бо він боявся, що через те його університетська карієра, а тим самим і наукова вже погребана. До того ще померла його мати.

Всі ті невдачі не зразили Пулюя, бо він мав дуже витревалу вдачу, як ми вже бачили се по його тяжких заходах коло перекладу св Письма. Він не зломився і рішив піти другим шляхом, коли перший шлях не пощастився.

Тоді саме заясніла у науковому світі нова зоря — зоря електротехніки. Як тільки довідався Пулюй, що на паризькій виставі появилися жарові лямпи Едісона і Свана, то почав сам продумувати над найдогіднійшим способом виробу вугляних каблучків для таких лямп. І дійсно винайшов він такий спосіб і дістав на нього патент. Небаром потім став він технічним директором електротехнічного бюра у Відні, що заступало також електротехнічний відділ фірми Ganz і Co у Будапешті.

Пулюй кинувся тепер з запалом до сеї практичної праці тим більше, що в сім бюрі вміли як слід оцінити спосібности, знання та пильність Пулюя і призначили йому високу платню. В слідуючім році т. є. 1883 р. виставив Пулюй на електричній виставі у Відні більшу скількість своїх апаратів і звернув на себе увагу широких кругів ученых, міністерства та високопо-

ставлених осіб. При кінці вистави дістав від Верндля, ґенерального директора акційного товариства „Österreichische Waffenfabriks-Aktiengesellschaft“ в Steyr, оферту на консулєнта тої фірми для елєктричних фабрикатів і для вистави, що мала відбутися в Штайр літом 1884 р. Се предложення прийняв Пулюй під дуже корисними умовами і зі застереженням, що кождої хвилі буде міг, як лише схоче, вернути до наукової праці, бо все ще не тратив надії, що осягне колись свою задушевну мрію — університетську катедру. В Штайрі став Пулюй також директором фабрики своїх жарових лямп. В три місяці опісля фабрика вирабляла Пулюєві жарівки на виставу.

Весною 1884 р. в часі приготовань до вистави приїхав до Штайр секційний шеф міністерства освіти Фідлєр та ще кілька осіб з міністерства. При сій нагоді звидів він також фабрику жарівок Пулюя і був дуже захоплений нею. В місяць опісля міністерство освіти іменувало Пулюя професором експериментальної та технічної фізики в німецькій техніці в Празі і також припоручило йому викладати елєктротехніку та провадити елєктротехнічні вправи відповідно до потреби інститута. Одначе з огляду на великі поступи елєктротехнічної науки почав Пулюй 1885 р. відбувати окремі виклади з елєктротехніки та окремі елєктротехнічні вправи, а в 1897 р. розширив їх ще більше. В рр. 1884 і 1885 заложив у будинку фізикального інститута пражської техніки елєктротехнічну робітню, машинарню для елєктричних машин і робітню для грубих і субтельних механічних робіт, а для фізикального інститута справив нові апарати і прибори, що відповідали вимогам новочасної науки. До помочі дістав механіка та слугу для обслуги машин.

Літом 1895 р. звидів Пулюй знаменито і модерно випосажені елєктротехнічні інститути у Німеччині і, вернувши зі своєї поїздки, починив усильні старання в міністерстві, щоби засновано окремий елєктротехнічний інститут у німецькій техніці в Празі та вивінувано його відповідно до сучасних потреб. Одначе міністерство не сповнило сього домагання Пулюя, лише у 1902 р. відділило катедру елєктротехніки від катедри фізики, системізувало для неї нову катедру та покликало на неї Пулюя після 18 літ тяжкої праці його у двох ділянках науки. На сім місці необхідно згадати, що три роки перед тим осягнув Пулюй найвищу гідність на техніці в Празі, а саме вибрали його ректором на 1889/90 р.

З нагоди 100-літнього ювилею німецької техніки в Празі

відзначено Пулюя 1906 р. ордером залізної корони за наукові праці і за учительську діяльність. В 1910 р. дістав титул і характер радника двора, в 1913 р. віденське елєктротехнічне товариство іменувало його почетним членом з нагоди 30-ліття свойого істнування, а дня 30. вересня 1916 р. спенсіонувався.

Годиться ще згадати, що Пулюй заложив 1888 р. елєктротехнічне товариство „Elektrotechnischer Verein“ в Празі, до котрого належали спершу Німці і Чехи. Крім того заложив 1905 р. академічне товариство „Exkursionsfond der Hörer der Elektrotechnik an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag“; се товариство мало на меті збирати фонди на запомоги для убогих студентів елєктротехніки, що брали участь у наукових екскурсіях під проводом Пулюя.

За цілий час своєї діяльности на техніці в Празі був Пулюй для широких кругів елєктротехнічного промислу дорадником у ріжнородних технічних питаннях. Під його проводом і доглядом реконструовано 1896 р. елєктричну централю в Марієнбаді, а 1897 р. збудовано елєктричну централю в Цвікав. Його ради засягали і слухали, коли проєктовано елєктричну централю міста Праги, велику елєктричну централю фірми Спіро і Сини біля Гогенфурта, мійські централі в Мерані, Франценсбаді та в иньших містах.

Коли вибухла війна, посвятився він опіці українських воєнних виселенців з Галичини та утворив стипендійний фонд для убогої української молоді, що студіювала на еміґрації. Помер 31. січня 1918 р., полишаючи вдову та 5 дітей.[1])

Перебіг життя Пулюя мав великий вплив на його наукову діяльність. У першій частині своєї дуже плодовитої діяльности т. є. в сімдесятих роках 19. століття працював він у фізикальних інститутах проф. Лянґа у Відні та проф. Кундта в Штрасбурґу, що займалися ріжними проблємами модної тоді теорії ґазів, та мав також припорученя викладати кінетичну теорію ґазів і термодинаміку на віденському університеті. Се мало такий наслідок, що він займався тоді головно дослідами внутрішнього тертя ґазів і ґазових сумішок та дифузією пар. З початком вісімдесятих років звернувся він під впливом загальної тоді течії до елєктричних явищ у рурках з розрідженими ґазами, а пізнійше силою свойого становища на техніці в Празі присвятив він свою увагу майже виключно елєктротехнічним проблємам.

---

[1]) Жонатий був від 1884 р.

Третя четвертина 19. століття се час, коли творилася кінетична теорія ґазів. Тоді виступають A. Kroenig, Clausius, Maxwell, Boltzmann[1]) та иньші дослідники, здіймають величаву будівлю сеї теорії і стараються чим раз більше удосконалювати її. Ізза того появляється безліч експериментальних праць, в яких фізики досліджують як найдокладнійше ріжнородні прикмети ґазів. Сюди належать також досліди внутрішнього тертя ґазів та дифузії їх через пороваті стіни. Сими дуже тяжкими дослідами займався і Пулюй. Принуку до них дістав він мабуть від Lang-a, проф. досвідної фізики у Відні, у котрого фізикальнім інституті робив першу свою працю під заголовком „Über die Reibungskonstante der Luft als Funktion der Temperatur“, поміщену у Записках віденської Академії Наук (**69**, 287, 1874); там також містить автор подяку проф. Лянґови за поміч при праці. Щоби добре вирозуміти, о що ходило Пулюєви в його праці, пригадаймо собі, що се таке внутрішнє тертя. В тій ціли пригляньмося течі, котру через потручення посудини вправлено в осціляційний рух. Вона по якомусь часі приходить до рівноваги. Причиною того є внутрішнє тертя течі, що походить від опорів, чинних поміж молекулами течі. Якщо дві сусідні і рівнобіжні верстви течі пливуть з ріжною скорістю, то швидша прискорює повільнійшу, повільнійша опізнює швидшу. Після Нютона є внутрішнє тертя себто сила, з якою ділає швидша верства на одиницю повільнійшої, $R = -\eta \frac{du}{dz}$, де $\frac{du}{dz}$ є спадок скорости в напрямі прямовім до руху. (u є відносна скорість обох верстов, z є співрядна прямова до руху, η є співчинник тертя.) Ті самі розважання можемо перенести на ґази і в той сам спосіб здефініюємо внутрішнє тертя ґазів. Досліди кінетичної теорії ґазів вказують на те, що співчинник внутрішнього тертя ґазів не залежить від густоти їх, а тим самим від тиснення (закон Maxwell-a), але залежить від температури. Остання залежність дасться виразити на основі теорії взором

$$\eta = \eta_0 \sqrt{1 + \alpha t} \quad \text{або} \quad \eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^{\frac{1}{2}},$$

де η_0 є співчинник при температурі 0°, α співчинник розширення ґазів (для повітря $\alpha = 0{,}003665$). Коли незалежність співчинника тертя η виказано в широких межах тиснення, то що

[1]) Передтечами їх були Bernoulli 1738 і Waterston 1845.

до впливу температури на η зауважано певну незгідність. І саме Пулюй поставив собі за задачу дослідити залежність внутрішнього тертя ґазів від температури тай ужив до своїх помірів транспіраційної і осціляційної методи. Перша полягає на міренню скорости, з якою ґаз перепливає через дуже вузенькі рурки, друга на обсервації пригасання осціляції якогось тіла, уміщеного в ґазі, н. пр. осціляції круглої поземої плиточки, що є зачіплена на нитці та може обертатися довкруги неї як оси; сей осцілюючий кружок є уміщений поміж двома рівнобіжними нерухомими кружками так, що лише ґаз, замкнений поміж сими кружками, має вплив на спинювання осціляції середнього кружка. Шість праць перевів Пулюй над тертям ґазів та опублікував їх в Записках віденської Академії Наук.[1])

Перші дві праці виконав він у фізикальнім інституті віденського університету і обі випечатав під тим самим заголовком „Über die Reibungskonstante der Luft als Funktion der Temperatur“; третю із тих праць п. з. „Über die Abhängigkeit der Reibung der Gase von der Temperatur“ виконав у фізикальнім інституті проф. Кундта у Штрасбурґу, котрий разом з проф. Варбурґом робив також досліди над внутрішнім тертям ґазів.[2]) Четверта праця Пулюя має заголовок „Über die Reibung der Dämpfe“, а пята і шеста „Über die innere Reibung in einem Gemische von Kohlensäure und Wasserstoff“.

Вислідом першої праці є сконстатування факту, що вище згаданий теоретичний взірець, подаючий звязь поміж співчинником внутрішнього тертя повітря а температурою $\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^{\frac{1}{2}}$, не відповідає дійсности. Впрочім те саме сконстатували були вже давнійше Maxwell і O. Meyer. Перший з них подав рівнання $\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)$, другий $\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^{\frac{3}{4}}$ тоді, як у Пулюя виложник температурного чинника $(1 + \alpha t)$ виносить приблизно $\frac{2}{3}$. Для температури 0° находить Пулюй $\eta_0 = 0{,}00017877$ при допомозі транспіраційної методи, змодифікованої проф. Лянґом. В другій праці бере Пулюй під увагу також співчинник совгання повітря по стінах рурки (Gleitungskoeffizient) і находить майже

[1]) Wiener Berichte. II. Abt. **69**, **70**. 1874; **73**, 1876; **78**, 1878; **79**, 1879 (дві праці). Порівн. також: Carl's Repertorium f. Physik **13**, 1877, 293. Annal. d. Phys. u. Chem. Neue Folge. 1877, S. 296. — Замітка: Wiener Berichte мають ширшу назву: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien.

[2]) Kundt u. Warburg. Pogg. Ann. **155**, **156**, 1875.

такий самий вислід, як передше, а саме виложник температурного співчинника n є мало що менший від $\frac{3}{4}$. (Точні вартости: $n = 0{\cdot}590609 \pm 0\,009510$, коли у першій праці $n = 0{\cdot}652776 \pm \pm 0{\cdot}020893$).

В третій праці ужив Пулюй осціляційної методи, робив досліди з кімнатним повітрям, двоокисом вугля і воднем та доказав, що тертя не у всіх ґазів зміняється однаково з температурою. І так для повітря найшов він виложник температурного співчинника $n = 0{,}72196 \pm 0{,}01825$, кругло $\frac{3}{4}$; для CO_2 $n = 0{,}91654 \pm 0{,}01394$ (майже 1); для H_2 $0{,}69312 \pm 0{,}01088$ т. зн. $\frac{2}{3} < n < \frac{3}{4}$. В праці „Über die Reibung der Dämpfe“ визначив співчинники внутрішнього тертя ріжних пар, як водяної, алькоголю, бензолю, ацетону, етеру, і доказав, що для пари етеру є він прямо пропорціональний до абсолютної температури ($n = 0{,}94$, отже майже 1). В останніх двох працях з того самого обсягу займається Пулюй внутрішнім тисненням сумішки CO_2 і H_2. На основі своїх дослідів приходить він до отсих двох висновків:

1. Співчинник тертя сумішки CO_2 і H_2 та мабуть всіх ґазів, що хемічно не ділають на себе, не є більший (менший), як співчинник тертя сеї складової части, що має найбільший (найменший) співчинник тертя.

2) Ґази з більшим молекулярним тягарем мають при рівних скількостях більший вплив на вартість співчинника тертя сумішки ґазів. Н. пр. вистарчає домішати кілька сотих частей CO_2, щоби значно збільшити співчинник тертя водня; навпаки у сумішці CO_2 і H_2 у рівних скількостях полишається внутрішній співчинник тертя такий самий, як у чистім CO_2. Крім того випровадив Пулюй теоретичну формулу для співчинника тертя сумішки двох ґазів

$$\eta = \frac{\eta_1 \sqrt{p_1 + \frac{m_2}{m_1} p_2}}{\left[p_1 + \left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right)^{\frac{3}{2}} p_2\right]^{\frac{2}{3}}},$$

де η_1 і η_2 є співчинниками тертя поодиноких ґазів, m_1 і m_2 їх молекулярні тягарі, p_1 і p_2 їх часткові тиснення. Ся формула дає лише в приближенню вислід, згідний з обсерваціею.

Трудними були також досліди над дифузією пар. Їх описав Пулюй у двох працях п. з. „Über Diffusion der Dämpfe durch Tonzellen“.[1]) Се є взагалі перші досліди,

[1]) Wiener Berichte. 75. 1877. Abt. 2. 401 і 639.

які коли-небудь роблено над дифузією пар через пороваті стіни. До тепер було знане отсе явище: Коли два ґази, що не реаґують на себе хемічно, стоять під тим самим тисненням і є перегороджені від себе пороватою стіною, то наступає виміна їх через стіну, а обєми ґазів, що проникають рівночасно через стіну, відносяться до себе відворотно, як квадратові корені густот обох ґазів. Поміри дифузії ґазів робили Bunsen, Graham та другі дослідники. Прилади до помірів, є доволі складні. У Пулюя дифундувала пара з нутра глиняної посудини через стіни посудини на вні, а повітря зо вні до нутра посудини. Пулюй робив досліди дифузії пари води, хльороформу, алькоголю і етеру, при чім обчисляв т. зв. рівноважний дифузійний обєм пари k т. є. відношення обєму пари D до обєму повітря L, виміняних в 1 мінуті, отже $k = \frac{D}{L}$. Для водяної пари найшов з одного ряду спроб середню вартість з богатьох помірів $k = 1{,}2778$, з другого $k = 1{,}2591$, а корінь з відворотної вартости густоти водяної пари є 1,2669, отже доволі згідно з анальоґічними вислідами у ґазів. Крім того сконстатував, що скорість дифузії повітря з огляду на пари води, алькоголю, етеру і хльороформу росте з температурою. Загальний вислід його праць є той, що пари діфундують через стіни глиняної пороватої посудини у відворотнім відношенню до квадратового кореня з густот і що водяна пара діфундує скорше, як повітря.

Повищі досліди були дуже важні тому, що співчинники внутрішнього тертя та дифузії ґазів служать до обчислення середньої довготи шляхів молекулів, їх скількости та величини, молекулярних тягарів та співчинника заломання світла і відносного степеня вохкости повітря. Сьогодня вартости сих співчинників, як також инших величин, звязаних з кінетичною теорією ґазів, є вже усталені і на них опираються новійші добутки фізики.

В межичасі, а саме 1875 р. винайшов Пулюй прилад до означування механічного рівноважника тепла. Сей прилад був відзначений срібною медалею на всесвітній виставі в Парижі 1878 р. і є власністю фізикального інституту празького університету. На просьбу дирекції національного німецького музея „Deutsches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaften und Technik in München“ дарував проф. Пулюй 1907 р. для сього музея вірну копію свого приладу і її уставлено біля славного приладу Joule-a. Сей прилад виробляють великі німецькі фізикальні фабрики, н. пр. Max Kohl в Chemnitz,

та продають середнім і вищим школам, а більші підручники фізики подають опис його. Сам винаходчик описав свій прилад та спроби з ним у двох працях п. з. „Über einen Schulapparat zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalentes“ і „Beitrag zur Bestimmug des mechan. Wärmeäquivalentes“[1]). Сей прилад складаєть з двох порожніх сталевих стіжків, входячих в себе, що служать за кальориметер. Зовнішній стіжок можна обертати довкруги прямовісної оси при допомозі центрифуґальної машини. Внутрішній є наповнений живим сріблом, замкнений накривкою та свобідно рухомий. Він є злучений з раменем підойми, котрого кінець порушається біля поземої скалі, поділеної на степені. З кінця підойми провадить шнур через малий бльок, а на другім кінці його висить терезка на тягарці. Накривка має два отвори, в однім сторчить термометер, в другім прилад до мішання. Тепло, витворене через тертє стіжкових поверхней підчас обороту центрифуґальної машини, є рівноважне з працею, зужитою при тертю; останню обчисляємо зі скількости оборотів зовнішнього стіжка, тягарця, уміщеного на терезці задля здержання оборотового руху внутрішнього стіжка, довготи рамени підойми і кута, відчитаного на поділці. Відношення між працею а теплом є механічним рівноважником тепла. Сей апарат так догідний, що при допомозі його можна зробити поміри в протягу кільканайцяти хвиль. Інженір Леопольд Розенбавм з Відня, описуючи ювилейну виставу в Празі (1906 р.), де також були виставлені прилади Пулюя, пише про заслугу Пулюя, котрому удалося зладити на місце незручного приладу Joule-a такий апарат, що ним можна легко і докладно за кілька хвиль означити механічний рівноважник тепла, ту так важну величину сучасної фізики.[2]) Уживаючи свойого приладу, одержав Пулюй з одного ряду помірів вартість механічного рівноважника тепла $I = 425{,}2 \pm 5{,}4$ *kgm*, з другого $I = 426{,}7 \pm 5{,}9$ *kgm*. Сі вартости не відбігають сильно від загально прийнятої тепер $I = 427{,}1$ *kgm*.[3])

Важне місце займають прилади та праці Пулюя, що відносяться до електричних розряджень в евакуованих скляних рурках. Сі прилади, власної роботи Пулюя з рр. 1880—1882, звернули були на себе увагу широких наукових

[1]) Wiener Berichte. II. Abt. **71**. 1875, 677; **72**, 1876, 53. Порівн. також Pogg. Ann. Bd. **157**, 437 і 649.

[2]) Черпано з автобіоґрафії.

[3]) Riecke. Lehrbuch der Physik. VI. Auflage. I. Bd. S. 315.

кругів. Сюди належать фосфоризуюча лямпа, електричні радіометри і рурки з розрідженим ґазом, через які перепускається високонапружену електричну струю. Кілька з поміж тих приладів відзначено 1881 р. на міжнародній електричній виставі в Парижі і вони находяться у паризькому музеї Conservatoire National des Arts et Métiers. Наукові праці про ті прояви були друковані п. з. „Strahlende Elektroden-Materie“ у Записках віденської Академії Наук[1]) і в тих працях подибуємо висновки, зближені до модерної електронової теорії. Збірку тих праць видала 1883 р. фірма Carl Gerold's Sohn у Відні п. з. „Strahlende Elektroden-Materie und der sogenannte vierte Aggregatzustand“, а в 1889 р. льондонське товариство Physikal Society анґлійський переклад її у Льондоні.[2])

В часах, коли Пулюй робив досліди над електричним розрядженням в евакуованих рурках, займалися тими явищами також Crookes, Hittorf і Goldschmied. Пулюй збиває вслучно їх хибні погляди, між иньшими ґіпотезу Crookes-a про четвертий стан матерії, і висказує погляд, що з катоди відриваються частинки, наелектризовані відємно, порушаються простолінійно з великою скорістю та таким чином проводять конвекційно електричну струю. Сей погляд майже в цілости задержався досі з тою ріжницею, що Пулюй вважав ті частиці матеріяльними частинками, а сьогодня принимаємо їх за частинки від'ємної електричности або т. зв. електрони.[3]) При тім всім є Пулюй приклонником унітарної теорії електричности, приймаючи, що кожде тіло у нормальнім стані має означену скількість етеру; якщо має його надмір, то є додатно-електричне, а як за мало, то від'ємно-електричне. Інтересною є також фосфоризуюча лямпа винаходу Пулюя, якої опис находимо у згаданій праці. Є се подовгаста скляна баньочка, в котрій уміщені платинові електроди, а против катоди є пластинка з лосняку (міка, Glimmer), поволічена з одного боку потасовим сірчаком, що фосфоризує зеленаво. Якщо злучимо електроди сеї лямпи з індуктором, то проявляється так сильна фосфоресценція, що ціла кімната є освітлена і можна читати навіть у певнім віддаленню від лямпи. Ся лямпа о стільки заслугує на увагу, що фактично вона є передтечею рурки Рентґена; остання має звичайно замісць фосфори-

[1]) Wiener Berichte. **81**, 1880; **83**, 1880; **85**, 1882.

[2]) Physical Memoirs. Vol. I. Part. 2. 1889.

[3]) Впрочім також електрони вважаємо сьогодня складовими частями матерії (атомів).

зуючої пластинки т. зв. антикатоду з платини. Отже Пулюй був вже 1882 р. на шляху відкриття, зробленого Рентґеном 1895 р.

Заслуги Пулюя у сій ділянці фізики зможемо тим краще оцінити, коли возьмемо під увагу, що модерна фізика опирається сьогодня у великій мірі на дослідах елєктричного розрядження в евакуованих рурках, а сучасники Пулюя вважали чарівні світляні явища в сих рурках здебільша гарною іграшкою без глибшого значіння, ба навіть висказувалися про них з кпинами, н. пр. так великий фізик, як J. Stefan.[1])

При помочи своєї лямпи та иньших вакуумапаратів, що служили йому до дослідів катодових промінів, зготовив він зараз по відкриттю Рентґена більшу скількість фотоґрафічних знимок. З поміж них 17 було виставлених на ювилейній виставі в Празі. Ті образи відзначаються тим, що і найніжнійші подробиці предметів дуже виразно віддані, і належить зауважати, що, не зважаючи на швидкий поступ рентґеноґрафії, через довший час другі дослідники і техніки не годні були зробити кращих образів, як Пулюєві. Тому не дивно, що після відкриття Рентгена в статтях про се відкриття поміщувано скрізь знимки Пулюя, н. пр. у французьких часописях „Cosmos“ з 8. II. 1896 р. стр. 300 і „La Natura“ з 8. II. 1896. В останній находимо розвідку Klemenčič-a de Engelmayer-a п. з. „Rayons invisibles (rayons X) de M. Wilhelm Conrad Röntgen. Expériences de M. Puluj de Prague“. З анґлійських часописей подає льондонський „The Photogram“ з квітня 1896, vol. 3, № 28, на 106 стр. опис лямпи Пулюя з малюнком сеї лямпи і першою фотоґрафічною знимкою 7-місячного плоду.[2]).

Проф. Пулюй оголосив також друком дві праці про проміні Рентґена, а саме „Über Enstehung der Röntgenstrahlen und ihre photographische Wirkung“ (Wien. Ber. Abt. II. **105**, 1896) і „Nachtrag zur Abhandlung „Über die Entstehung der Röntgenstrahlen u. ihre photogr. Wirkung“ (Wien. Ber. Abt. II. **105**, 1896). Згідно з Рентґеном констатує, що проміні Рентґена повстають на тих місцях поверхні довільного тіла, на котрі падуть катодові проміні. До своїх дослідів уживав Пулюй своєї фосфоризуючої лямпи, даючи їй ріжний вид. Замітною річю є, що він у першій праці висказує здогад про майбутнє примінення промінів Рентґена

[1]) Порівн. Elektrotechnik und Maschinenbau. Wien. 1913. Vereinsnachrichten. S. 1126.

[2]) Порівн. Др. О. Барвінський. Причинок до історії розвитку рентґенольоґії. Укр. Медичний Вістник. Прага. Ч. 3—4, 1924, стр. 187.

у хірурґії. Дальше годиться підчеркнути, що він у згаданій праці висказує наскрізь модерний погляд, що проміні Рентґена се филястий рух етеру, а причиною повставання тих филь етеру є удар частинок, входячих в склад катодових промінів, о матеріяльні тіла, на котрі вони падуть. Заразом Пулюй зробив спостереження, що евакуовані рурки без елєктрод, жарівки і радіометри світять під впливом промінів Рентґена у замкненій кімнаті.

Майже рівночасно з дослідами про елєктричні розрядження в евакуованих рурках студіює Пулюй причини руху радіометра[1]). Добутком тих дослідів є дві праці п. з. „Über das Radiometer“, дальше „Beitrag zur Erklärung des Zöllnerschen Radiometers“, а вкінці „Nachschrift zum Beitrag zur Erklärung des Zöllner'schen Radiometers“, поміщені у Записках віденської Акад. Наук.[2]) (Wien-Ber. **76**, 1877; **80**, 1879; **81**, 1880; **82**, 1880). Останні дві праці вийшли також разом у збірній праці „Über die strahlende Elektrodenmaterie“. Проблєм руху радіометра дуже складний і ще до нині вповні не вияснений. Як раз Пулюй звертає увагу на те, що процеси, які відбуваються у звичайному радіометрі, є доволі складні, і висказує здогад, що одна частина кінетичної енерґії промінів світла і тепла, падучих на крильця радіометра, збільшає скорість руху молєкулів освітлених поверхней і ударяючих в них молєкулів ґазу, а друга виконує працю і спричинює емісію молєкулів крилець себто випаровування їх. В кождім разі на думку Пулюя воздушні струї не можуть бути причиною рухів крил радіометра.

З дослідів Пулюя над катодовими промінями вийшла також його лямпа для високонапружених перемінних струй, в котрих катодові проміні розжарюють окис тору. Сюди належить праця „Über die elektrischen Entladungen in den Glühlampen bei hochgespannten Strömen“ (Zs. für Elektrotechnik, Wien, 1883). Замітні є також його уліпшення при виробі жарівок з вугляними каблучками („Versuch über die absolute Festigkeit und Dichte der Kohlenfäden“, Zs. f. Elektrotechnik Wien, 1883).

Образ діяльности Пулюя на полі чистої фізики не був би повний, колиби ми не згадали приладів тай експериментів, видуманих ним, що надаються добре до науки досвідної фізики у середніх та вищих школах. Вони відносяться

[1]) винайденого Crookes-ом 1873 р. (Гл. Riecke. Lehrb. der Physik. 1919. S. 583).

[2]) Гл. також Carl's Repertorium f. Physik.

ЛЬВІВСЬКА БІБЛІОТЕКА
АН УРСР
№ И- 30391

до ріжних ділянок фізики. І так з поля акустики подає він три інтересні шкільні спроби. В першій показує він інтерференцію двох поперечних филь, що біжать по двох рівнобіжних і дуже близько до себе уміщених поземих шовкових шнурочках; кінець одного злучений з одним раменем, кінець другого з другим раменем строєвих вильцят, які вправляємо в дрожання. Оба тяги филь будуть мати ріжницю фаз рівну половині довготи филі так, що гора одної филі буде бігти попри долину другої. Якщо гору одної филі і долину другої перевяжемо ниткою, котрої кінці будемо придержувати, то филі через інтерференцію знесуться. („Ein Interferenzversuch mit zwei schwingenden Saiten". Wien. Ber. **96**, II. Abt. 1887, 947).

В иньшій знов праці п. з. „Objektive Darstellung der wahren Gestalt einer schwingenden Saite". (Wien. Ber. **95**, II. Abt. 1887, 355) описує спробу, при допомозі якої можна бачити виразно филі на дрожачій шовковій нитці. Останню вправляє в рух при помочи електромаґнетних строєвих вильцят та освітлює фосфоризуючою лямпою, побудженою індуктором Румкорфа. Якщо скількости дрожань вильцят і переривача струї індуктора є рівні або скількість перших дрожань є многократю скількости других, то на відповідно уставленім екрані буде видно филясту форму дрожачої шовкової нитки.

Третя праця („Ein Versuch über die Resonanz". Carl's Repertorium für Physik. Bd. **14**, 1880) відноситься до резонанції строєвих вильцят. Пулюй демонструє дрожання строєвих вильцят, побуджених через резонанцію до видавання звука, при допомозі маятника із скляної кульочки з тоненькими стінами, завішеного на нитці, довгій на 50 cm, та проводить анальоґію поміж сим акустичним з'явищем а невидими молекулярними процесами у радіометрі.

На пражській ювилейній виставі був виставлений Пулюїв прилад для доказу, що всі тіла падуть у порожні однаково скоро. Є се звичайна евакуована скляна рурка, на котрої горішнім кінці прикріплений електромаґнет. Коли у звоях його плине електр. струя, то він придержує залізний перстень та легоньке перце з залізною тоненькою шпильочкою. А якщо струю перервати, то оба предмети падуть і то рівно скоро. („Fallapparat". Wied. Ann. f. Phys. u. Chemie. Leipzig, **33**, 1888).

Також важний для наукових дослідів та для технічних потреб є Пулюїв телєтермометер, виставлений на виставі

в Празі та описаний у Wien. Ber. **98**, 1889, 1502.[1]) Він надається до означення температури у віддаленому місці. Основується на фізикальнім законі, що електричний опір металевих дротів більшає зі зростом температури, а навпаки опір вугляних ниточок маліє враз зі зростом температури. Він складається зі замкненої скляної рурки, на менш більш 20 cm довгої, в котрій находиться вугляна ниточка і залізна спіраля, входячі в комбінацію містка Вітстона. Той телєтермометер придатний, якщо треба знайти температуру в глибоких шахтах і прокопах землі, в глибині моря, на високих баштах і горах і в таких фабричних заводах, де потрібний догляд над температурою, що не повинна переступати означених меж. Сим телєтермометром змірено температуру у прокопі Sauerbrunn коло Біліна у Чехословаччині.[2]) Той прокіп був на 130 m глибокий і зовсім заповнений квасною водою. Температуру мірено після кождого метра глибини і знайдено таким чином, що термічний ступінь землі виносить 32 m т. зн., що в землі на кождих 32 m вглибшки температура підноситься о 1° C.

Від початку вісімдесятих років 19. стол. займають Пулюя чим раз більше електротехнічні питання. Приводом до того було мабуть се, що він, маючи природне замилування до електротехніки, став 1882 р. управителем електротехнічного бюра у Відні, пізнійше в Штайр, де заснував фабрику електричних жарівок, уліпшених після власного винаходу, а пізнійше як професор техніки мусів ще докладнійше працювати у сій модерній тоді ділянці. Він винайшов кілька електротехнічних приладів та опублікував цілий ряд праць з поля електротехніки. З поміж тих приладів заслугують на увагу ті, що були виставлені на ювилейній виставі в Празі, а передусім прилад до переміни однонапрямної (одностайної) струї у дво- і трифазові перемінні. Тим апаратом можна наглядно і легко показати прикмети та ділання перемінних струй. Переміни періодичних струй відбуваються дуже скоро; звичайно періода їх виносить $\frac{1}{50}$ секунди. Одначе в згаданім апараті можна продовжити сей час довільно так, що зауважується вигідно кожду переміну струї як дво- так і трифазової. При допомозі кружляючого маґ-

[1]) Гл. також Techn. Blätter. Prag 1889, IV; Elektrotechn. Zs. Berlin, 1890, VIII; Elektrotechn. Echo, 1890; Repertorium d. Physik von Dr. Fr. Exner. München, **26**, 733.

[2]) Dr. Puluj. Über Temperaturmessungen in Bohrloche zu Sauerbrunn in Böhmen. Elektrotechn. Zs. Berlin 1880. — Zs. des österr. Ingenieur- u. Architekten vereines. Wien 1890. — Repertorium der Phys. von Dr. Fr. Exner, München, **27**.

нетного поля, витвореного трифазовою струєю сього приладу, можна легко дослідити залежність скорости кружляння маґнетного поля від скількости період струї. Ся залежність, як звісно, має вагу для будови елєктромоторів.

Також опублікував Пулюй більшу скількість праць, що відносяться до перемінних струй, подав догідний спосіб означування співчинника самоіндукції і ріжниці фаз гармонійних перемінних струй та досліджував залежність ріжниці фаз від ріжних чинників. Сюди належать отсі праці: а) Beitrag zur unipolaren Induktion.[1]) б) Bestimmung des Koëffizienten der Selbstinduktion mit Hilfe des Elektrodynamometers und eines Induktors.[2]) в) Über periodisch veränderliche elektromotorische Kräfte, welche in einem Leiter mit Selbstinduktion nur in einer Richtung wirken.[3]) г) Über die Wirkung gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduktion.[4]) д) Eine Methode zur Messung der Phasendifferenz von harmonischen Wechselströmen und deren Anwendung zur Bestimmung der Selbstinduktion.[5]) е) Über einen Phasenindikator und einige mit demselben ausgeführte Messungen.[6]) ж) Abhängigkeit der Phasendifferenz zwischen der primären Klemmenspannung und Stromstärke bei verschiedener Belastung des Sekundärnetzes einer Transformatoranlage.[7]) з) Anwendung des Kreisdiagrammes auf Wechselstromgeneratoren.[8]) Дві з поміж сих праць, а саме е) і з) надрукував Пулюй також в українській мові у виданнях Наукового Товариства ім. Шевченка у Львові п. з.: „Апарат до міряння ріжниці фаз межи перемінними протоками і кілька за його помочю зроблених помірок“ (Записки Наук. Тов. ім. Шевч. т. III. 1894) і „Кругова діяґрама ґенераторів для перемінних прудів“. (Збірник мат.-прир.-лік. Секції Наук. Тов. ім. Шевч. IX. т. 1903).

В праці а) досліджує Пулюй індукцію металевої кулі, завішеної над бігуном сильного елєктромаґнета і вправленої в оборотовий рух

[1]) Zentralblatt für Elektrotechnik, München 1888.

[2]) Elektrotechn. Zeitschrift (Zentralblat f. Elektrotechnik). Berlin u. München, 1891. S. 346.

[3]) Ibidem. 1891. S. 419, 434.

[4]) I. Mitteilung. Wiener Berichte, Bd. 100. Mai. S. 767, 1891; Elektrotechn. Zeitschrift. 1891. S. 498. — II. Mitteilung. Wien. Ber. Bd. 102, 1893; Elektrotechn. Zeitschrift. 1893, S. 466.

[5]) Wien. Ber. Bd. 102. Abt. II a. April 1893.

[6]) Wien. Ber. Bd. 102, Abt. II a. Juli 1893; Elektrotechn. Zeitschrift. 1893. S. 687.

[7]) Elektrotechn. Zeitschrift. 1895. S. 557.

[8]) Techn. Blätter. Prag. 35. 1903.

довкруги доземої оси. Працю б) містить дуже догідну методу означування самоіндукції при допомозі елєктродинамометра. В праці в) досліджує Пулюй перебіг елєктромоторичної сили в арматурі двобігунової однонапрямної машини. Як звісно, в обвитках цівок машини повстають підчас обороту змінні елєктромоторичні сили. Вони зміняють свій напрям, як лише цівки минуть неутральну площу, що стоїть прямово до маґнетного поля. В часі обороту арматурних цівок повище сеї площі ростуть елєктромоторичні сили від зера до своєї найбільшої вартости і потім маліють знов до зера, доходячи до неутральної площі. Понижче неутральної площі перебігають елєктромоторичні сили у такий самий спосіб, але у протилежньому напрямови, одначе коммутатор перемінює витворені струї на однонапрямні. Пулюй приймає на хвилеву елєктромоторичну силу вираз $e = E_0 \sin^2 \frac{2\pi t}{T}$, який дає лише додатні вартости і в якім T є періодою подвійного зросту та маління елєктромоторичної сили від зера до максимальної вартости E_0, і, виходячи з основного рівнання

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E_0 \sin^2 \frac{2\pi t}{T},$$

доказує, що середня натуга струї є незалежна від позірного опору, а тим самим від самоіндукції *(L)* і скількости колибань струї (Stromschwankungen). Вона залежить лише від максимальної елєктромоторичної сили і від звичайного опору провідного круга та дасться виразити взором:

$$M(i) = \frac{1}{2}\frac{E_0}{R},$$

де R є опір провідного дрота.

Вкінці порівнує Пулюй закони перепливу елєктричности у провіднику, обтяженім самоіндукцією, в якім періодично змінна елєктромоторична сила витворює струєві імпульси одного напряму, зі законами оборотового руху тяжкого (розгонового) колеса під впливом змінних механічних ударів одного напряму.

В праці, наведеній під г) доказує, що середня натуга струї не залежить від самоіндукції, якщо елєктромоторична сила підлягає сінусовому законови і якщо її перемінюється в одну мить у неутральній площі маґнетного поля. Обчислення переводить автор, розвиваючи вираз на елєктромоторичну силу у ряд і сполучаючи його з основним рівнанням $Ri + L\frac{di}{dt} = E$. На середню

натугу струї одержує він вираз $M(i) = \frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}$. В другій части своєї праці доказує в супереч сумнівів Lohnstein-a, що середня натуга струї не залежить від самоіндукції навіть тоді, як електромоторична сила не підлягає сінусовому законови, але є н. пр. лінійно змінна так, що хитається що $\frac{1}{4}$ періоди поміж зером а максимальною вартістю після правила ломаної лінії. В сім випадку виходить середня вартість натуги струї $M(i) = \frac{1}{2}\frac{E_0}{R}$. Причиною деякої незгідности теоретичних виводів з практичними помірами є після Пулюя те, що переміна струї у неутральній площі маґнетного поля маґнетоіндукційної машини, ужитої Lohnstein-ом, не відбувається моментанно. Щоби се доказати, зладив Пулюй земельний індуктор у такий спосіб, що висліди помірів згодилися з теорією; в тім індукторі є контактові поверхні щіточок так само за широкі, як ізоляція поміж відрізками колектора. Одначе середня натуга струї залежить від самоіндукції, якщо комутація не відбувається моментанно.

В праці д) подає Пулюй дуже просту методу мірення електродинамометром ріжниці фаз двох перемінних струй, що повстали через розгалуження одної головної струї, і примінення її до означення співчинника самоіндукції звоїв трансформатора, машинової арматури тай иньших приладів, а у праці е), що слідує безпосередно по попередній, описує окремий прилад до мірення ріжниці фаз перемінних струй та самоіндукції. Сей прилад винайшов Пулюй сам і назвав його фазовим індікатором. Головними складовими частями фазового індікатора є дві сталеві пружини, злучені плоскими зеркалами однакової довготи та залізними стіжковатими якорями. Сі пружини можна вправити в дрожачий рух при допомозі двох малих електромаґнетів і перемінних струй. При ужитю методи Lissajous-a дають пружини криву дрожання, що зміняє свій вид і положення залежно від величини амплітуд та ріжниці фаз перемінних струй.

Праця з) містить звідомлення з помірів, переведених на трансформаторі електричної централі в Марієнбаді при допомозі вище згаданого фазового індікатора. Вкінці в статті з) виказує Пулюй, в який спосіб можна примінити кругову діяґраму Heyland-a до ґенераторів перемінних струй. Heyland подав був сю діяґраму лише для індукційних моторів, Kann примінив її до трансформаторів, а Heubauch до рядових моторів перемінних струй. Пулюй бере під увагу у своїй праці випадки, в яких ґенератор працює з опорами без індукції і з індукцією та випроваджує криву справности (Leistungskurve) ґенератора перемінної струї і трифазового мотора.

Працюючи на електротехнічній ділянці, виробив собі Пулюй велике значіння та популярність в електротехнічних фахових та наукових кругах. Бо мав він глибоке знання сеї нової науки, а свої праці виконував з незвичайною педантерією і передавав їх на письмі у ясній та прозорій формі. Тому не дивно, що великі електротехнічні фірми[1]) запрашали його на свойого експерта, а більші міста запитували його також о раду при будові електричних централь або реконструкцій давних, н. пр. Прага, Марієнбад.[2])

Замітним є також той факт, що через цілий ряд літ вибирано Пулюя головою електротехнічного товариства в Празі, а з нагоди 30-літнього ювилею електротехнічного товариства у Відні читаємо в часописи „Elektrotechnik und Maschinenbau“ з 1913 р. в статті „Das Jubiläum des Elektrotechnischen Vereines in Wien“ на 291 стр. отсі рядки: „Von Fachleuten, welche teils in der Rotunde, teils im Vereine Vorträge hielten, seien folgende bekannte Namen genannt: Mach, Pfaundler, v. Lang, v. Waltenhofen, William Siemens, Werner Siemens, Puluj und viele andere.“

На становищі голови електротехнічного товариства в Празі був Пулюй дуже рухливий і виголосив більшу скількість викладів на сходинах сього товариства на електротехнічні та иньші модерні теми, н. пр. про самоіндукцію, її наслідки, методи поміру, міряння ріжниці фаз перемінних струй, про теорію електронів. Вістки про сі виклади находимо у річниках журналу „Elektrotechn. Zeitschrift“. Один з них був надрукований в цілости в річнику з 1891 р. п. з. „Über die Selbstinduktion und ihre Wirkungen“. Сей виклад є прямо взірцевий і сьогодня моглиби прочитати його студенти електротехніки та фізики з великим пожитком для себе. Зачинається він дефініцією „ліній сил“ та самоіндукції. Опісля є обговорена звязь поміж зовнішньою електромоторичною силою а натугою струї у провіднику із самоіндукцією відповідно до рівнання $E = Ri + L\frac{di}{dt}$, при чім береться під увагу два случаї: 1) електромоторична сила є постійна, 2) елек-

[1]) Гл. Elektrotechn. Zeitschrift. 1891, S. 331.

[2]) Гл. Elektrotechn. Zeitschrift. Berlin u. München, 1894, S. 296; ibidem, 1897, S 98.

тромот. сила є змінна $\left(E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{T}\right)$. Вкінці говорить Пулюй про позірний опір, середню і ефективну натугу струї, працю, виконану перемінною струєю ($\frac{1}{2} E_0 J_0 \cos \varphi$) та про ватметер.

Практичну вартість має безпечна стація телєфонів, винайдена Пулюєм 1896 р. і патентована в Австрії, Угорщині, Німеччині, Швеції і Італії. Вона дає певну охорону перед високонапруженими струями, що пливуть шляховими проводами в сусідстві телєфонічних дротів і деколи ізза ослабленої ізоляції або також иньших причин попадають до телєфонічних проводів та загрожують тут людському життю. Ся стація містить крім звичайної індукційної цівки з двома обвитками дротів ще одну цівку з третьою обвиткою; остання уміщена в першій та ізольована від неї повітрєм. На кождій стації є в першім струєвім крузі: мікрофон, перша обвитка індукційної цівки, батерія і самочинний переривач (самозапинач, selbsttätiger Ausschalter); в другім крузі є: друга обвитка індукційної цівки і телєфон, а третій круг творять треті обвитки відокремлених цівок обох стацій і шляхові дроти. Всі ті круги звязані один з другим елєктромаґнетним способом і так є зладжені, що навіть тоді, якби дроти телєфонів зіткнулися припадком зі шляховими провідниками, в яких є висока елєктрична напруга, небезпечні струї не могли би прорватися до кругів з мікрофоном і телєфоном. Безпечні телєфонічні стації Пулюя завели у себе австрійські і чеські елєктричні централі, залізничі стації, копальня вугля в Бріксі, а навіть одна анґлійська фірма. В звязи з описаною телєфонічною стацією є дві праці Пулюя п. з. „Eine Telephonstation für elektr. Hochspannungsanlagen“ (Techn. Bl. Prag. **31**, 1899, IV, 171) і „Einige Neuerungen in der Telephonie“ (Techn. Bl. Prag. **33**, I, 1901, 1). Ту саму тему обговорює Пулюй і по українськи у Збірнику мат.-прир.-лік. Секції Наук. Тов. ім. Шевч. у Львові (т. VI, Зш. 1. 1900).

Для елєктротехніків можуть бути інтересними також праці про елєктричні централі в Празі („Über elektr. Zentralen in Prag.“ Techn. Bl. **27**, I. u. II. 1897, 91) і про елєктричну централю фірми Спіро і Синів в Крумав („Elektrizitätswerke Hohenfurt der Firma Ignaz Spiro u. Söhne in Krummau.“ Techn. Bl. **36**, 1. u. 2. Heft, Prag 1904). Остання праця появилася також в українській мові у Збірнику мат.-прир.-лік. Секції Наук. Тов. ім. Шевченка у Львові (III. т. 1905).

Переглянувшу наукову діяльність Пулюя, бачимо, що вона була незвичайно плодовита. Почавши від 1874 р., майже що року давав він бодай одну працю так, що всіх наукових праць появилося у німецькій мові около 50, в українській 4, не числячи двох популярно наукових розвідок, а саме „Непропаща сила“ (I. вид. „Просвіти“, II. вид. „Видавн. Спілки“) і „Нові і перемінні звізди“ (I. вид. „Просвіти“, II. вид. „Видавн. Спілки“, III. вид. накладом автора, Відень 1905); ся друга праця була друкована також без підпису у німецькій мові у „Wiener Allgem. Zeitung“.

Крім того опублікував яких 30 статтей і брошур в українській та німецькій мові в українських справах, а між иншим в справі українського університету у Львові та утворення самостійної України. Працював він у ріжних напрямках фізики та елєктротехніки, а деякі винаходи зєднали йому память грядущих поколінь фізиків та техніків. Неодну його думку прийняла модерна фізика, а лише через сліпий, може і пеховний припадок проміні X не називаються промінями Пулюя, лише Рентґена. Бо він вже був на їх сліді ще 1882 р., але на жаль, зайнятий другою працею, залишив був тоді дальші досліди над катодовими промінями. Останніх двайцять літ своєї наукової діяльности посвятив він головно елєктротехніці і причинився до розвитку її; тому справедливо каже про нього автор некрольоґу, поміщеного в „Elektrotechnik u. Maschinenbau“, Heft 15. 36 Jg. Wien, 14. April 1918, стр. 184: „Er war einer der Pioniere der Elektrotechnik in Österreich“. На жаль для своєї найблизшої вітчини міг він малощо дати з ділянки фізики та елєктротехніки тому, що ся царина була у нас в часах його діяльности майже не тикана, але за те необхідно з притиском зазначити, що Пулюй, живучи на далекій чужині, ніколи не забував, що є сином українського народа і боровся за його права і у Відні і в Петербурзі та перед европейською опінією в часах всесвітньої війни. Честь його памяти!

Високоповажаній Рідні Івана Пулюя, а передусім Його Дочці, Вп. Пані Директоровій Наталії Барвінській і Її Шваґрови Вп. П. Д-рови Олександрови Барвінському складаю отсим щиру подяку за поміч в отсій праці через визичення відбиток праць і рукопису автобіоґрафії Пулюя, як також клішів.

Dr. Johann Puluj als wissenschaftlicher Forscher.

(Zur zehnjährigen Erinnerung an seinen Todestag.)

Von *Dr. Roman Cehelskyj.*

(Inhaltsangabe.)

Dr. Johann Puluj wurde am 2. Februar 1845 zu Hrymaliw in Galizien geboren. Das Gymnasium absolvierte er in Tarnopol und dann besuchte er die theologische und die philosophische Fakultät (math. phys. Abteilung) in Wien. Hierauf widmete er sich den physikalischen Forschungen im Laboratorium des Prof. Hofrat Dr. von Lang, wurde im J. 1874 Assistent für Physik und Mechanik an der Marineakademie in Fiume und arbeitete im J. 1875 im physikalischen Institut des Prof. Kundt in Straßburg, wo er zum Doktor „philosophiae naturalis" promoviert wurde. Im J. 1877 habilitierte er sich zum Privatdozenten an der Universität Wien, woselbst er vom J. 1876 bis zum 1882 als Assistent bei dem Professor Lang fungierte. Gleichzeitig hielt er Vorlesungen über kinetische Gastheorie und mechanische Wärmetheorie.

Im J. 1882 übernahm er die technische Leitung des Wiener Zweigbüreaus der Firma Ganz u. Co. in Budapest. Ein Jahr später wurde er als technischer Konsulent der österreichischen Waffenfabriksgesellschaft nach Steyr berufen. Daselbst errichtete er eine Glühlampenfabrik und war bei der Veranstaltung der elektrischen Ausstellung in Steyr tätig, wodurch er auf sich die Aufmerksamkeit der maßgebenden Kreise lenkte. Insbesondere wurden neue, von ihm entdeckte Glühlampen allgemein bewundert.

Bald wurde er (1884) an die technische Hochschule nach Prag berufen und übernahm dort die Lehrkanzel für Physik und Elektrotechnik. Als im J. 1902 besondere Lehrkanzeln für beide Gebiete errichtet wurden, behielt er für sich die elektrotechnische Lehrkanzel.

Für seine wissenschaftlichen Verdienste wurde er im J. 1906 mit einem Orden der Eisernen Krone 3. Klasse ausgezeichnet und im J. 1910 wurde ihm der Titel und Charakter eines Hofrates verliehen. Im J. 1889/90 erhielt er die höchste akademische Würde, indem er zum Rektor der technischen Hochschule in Prag gewählt wurde. Am 30. September 1916 trat er in den Ruhestand und starb am 31. Jänner 1918.

Puluj hat zahlreiche wissenschaftliche Arbeiten[1]) veröffentlicht und Apparate konstruiest. Seine ersten Arbeiten beziehen sich auf die innere Reibung von Gasen und Gasgemischen und auf die

[1]) S. Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien (vom J. 1874 aufwärts) und Elektrotechnische Zeitschrift (die achtziger, neunziger Jahre des XIX. und Anfang des XX. Jahrhunderts).

Diffusion von Dämpfen. Sein vorzüglicher Apparat für die Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents wurde im J. 1878 auf der Weltausstellung in Paris prämiert.

Zahlreiche Abhandlungen beziehen sich auf die Entladung in evakuierten Röhren; sie sind unter dem Titel „Strahlende Elektroden-Materie" veröffentlicht und bilden einen wertvollen Beitrag zur modernen Elektronentheorie. Sie wurden auch in englische Sprache übersetzt und von der Physical Society[1]) in London im J. 1889 veröffentlicht. Die diesbezüglichen von Puluj erfundenen Vakuumapparate wurden auf der elektrischen Ausstellung in Paris im J. 1881 prämiert. Ein Teil derselben befindet sich in der Sammlung des Conservatoire National des Arts et Métiers in Paris.

Aus Pulujs Forschungen über Kathodenstrahlen ging auch seine Lampe für hochgespannten Wechselstrom hervor, in welcher ein Glühkörper aus Thoroxyd durch Kathodenstrahlen zum Leuchten gebracht wurde. Interessant ist auch seine phosphoreszierende Lampe, in welcher er bereits 13 Jahre vor der Röntgenschen Entdeckung eine Antikathode unterbrachte. Diese Antikathode war aus einem mit grünlich phosphoreszierenden Schwefelkalzium einerseits überzogenen Glimmerblättchen verfertigt. Mit seiner phosphoreszierenden Lampe machte Puluj gleich nach der Röntgenschen Entdeckung prächtige Röntgen-Aufnahmen, die in mehreren deutschen, englischen und französischen Zeitschriften reproduziert wurden. In seiner Abhandlung „Über die Entstehung der Röntgenstrahlen und ihre photographische Wirkung[2]) spricht er die Vermutung aus, daß die Röntgenstrahlen eine Art von Wellenbewegung sind, und glaubt, daß sie mit Erfolg in der Chirurgie Verwendung finden werden. In der Tat, seine Vermutung wurde von späteren Forschern (Laue) bestätigt und die Röntgenstrahlen wurden zum wichtigsten Werkzeug der Chirurgie.

Bemerkenswert sind ferner seine Verbesserungen in der Herstellung von Kohlenfaden-Glühlampen, sein Telethermometer, eine Einrichtung an Telephonstationen zum Schutz gegen hochgespannte Ströme, sein Phasenindikator zur Bestimmung der Phasendifferenz von Wechselströmen und der Selbstinduktion induktiver Stromkreise, sein Fallapparat und noch andere Apparate.

In den neunziger Jahren des XIX. und am Anfang des XX. Jahrhunderts veröffentlichte Puluj zahlreiche Abhandlungen aus dem Gebiete der Elektrotechnik, meistens in der „Elektrotechnischen Zeitschrift". Sie behandeln die Selbstinduktion, die Phasendifferenz, periodisch veränderliche elektromotorische Kräfte, Anwendung des Kreisdiagrammes auf Wechselstromgeneratoren, Telephonstationen für elektrische Hochspannungsanlagen und elektrische Zentralen.

Puluj blieb stets in Berührung mit der elektrischen Industrie. Unter seiner Leitung wurde im J. 1896 das städtische Elektrizitätswerk in Marienbad rekonstruiert und im J. 1897 das Elektrizitäts-

[1]) Physical Memoirs. Vol. I. Part 2. 1889.
[2]) Wien. Berichte. **105.** Abt. II a, S. 228, 1896.

werk in Zwickau gebaut. Auch bei der Gründung von den Elektrizitätswerken in Prag, Meran, Franzensbad und in anderen Städten fungierte er als technischer Berater. In Anerkennung seiner Verdienste auf dem elektrotechnischen Gebiete wurde er im J. 1913 vom elektrotechnischen Verein in Wien anläßlich der Feier des 30-jährigen Bestandes des Vereines zum Ehrenmitglied ernannt.

Puluj war auch literarisch tätig. Zusammen mit dem ukrainischen Schriftsteller Kulisch übersetzte er das alte und das neue Testament in die ukrainische Sprache. Diese Übersetzung wurde von der britischen Bibelgesellschaft im J. 1904 in Wien herausgegeben. Außerdem veröffentlichte er einige populärwissenschaftliche Arbeiten in ukrainischer und deutscher Sprache.

Er hielt auch zahlreiche Vorträge auf dem Gebiete der Elektrotechnik und Physik in dem von ihm gegründeten und jahrelang geleiteten elektrotechnischen Verein in Prag, sowie auch in anderen wissenschaftlichen und Fachvereinen in Prag und in Wien. Einige von diesen Vorträgen erschienen in der Elektrotechnischen Zeitschrift und können noch heute als musterhaft erklärt werden.

Seine Tätigkeit war umfangreich und sehr ersprießlich, insbesondere auf dem Gebiete der Elektrotechnik. Mit Recht nannte man ihn daher einen der Pioniere der Elektrotechnik in Österreich. Ehre seinem Andenken!

Н. Гаморак.
Камянець Под.

Новий тип транспірографа.

„...At present we are largely occupied in trying to find out the antecedent conditions that determine the processes that go on in the plant.... For these problems qualitative observations are of but little value, and emphasis is now being strongly placed on quantitative experimentation.... But the apparatus and methods by which effective conditions may be controlled and measured are generally not yet available; they remain mostly to be devised... In this connection it may be pointed ont that, for the present and immediate future, contributions in instrumentation and technique should be regarded as much more important than any general conclusions that may be derived from most of our commonly only abortive attempts to obtain reliable knowledge of causal relations by short-cuts that are not planned to succeed in the broader way..."

(B. E. Livingston: The present crisis in plant physiology, 1927.)

Цитовані слова, як не треба краще, характеризують теперішнє становище у фізіології рослин.

Перехід від якісного до кількісного способу дослідження, а властиво перевага цього останнього, вимагає прецізної та справної апаратури. Тимчасом фізіологія рослин, як порівнюючи недавна наука, ще не вспіла її витворити. Сусідні області, що з ними по методиці фізіологія тісно сходиться — фізика й хемія — не тільки не можуть часом дати потрібної методики та апаратури для спостережень процесів життя, значно складніших, як процеси в неживій матерії — а противно, не раз фізіологам приходиться робити нові відкриття або їх поглибляти в області неживого (розробка фізіологами питань осмотичного тиснення, евапорації і т. д.). Тому й не дивно, що ми й до тепер ще не маємо усталеної, стандартизованої апаратури навіть для таких основних життєвих процесів рослини, як ассіміляція, дихання,

werk in Zwickau gebaut. Auch bei der Gründung von den Elektrizitätswerken in Prag, Meran, Franzensbad und in anderen Städten fungierte er als technischer Berater. In Anerkennung seiner Verdienste auf dem elektrotechnischen Gebiete wurde er im J. 1913 vom elektrotechnischen Verein in Wien anläßlich der Feier des 30-jährigen Bestandes des Vereines zum Ehrenmitglied ernannt.

Puluj war auch literarisch tätig. Zusammen mit dem ukrainischen Schriftsteller Kulisch übersetzte er das alte und das neue Testament in die ukrainische Sprache. Diese Übersetzung wurde von der britischen Bibelgesellschaft im J. 1904 in Wien herausgegeben. Außerdem veröffentlichte er einige populärwissenschaftliche Arbeiten in ukrainischer und deutscher Sprache.

Er hielt auch zahlreiche Vorträge auf dem Gebiete der Elektrotechnik und Physik in dem von ihm gegründeten und jahrelang geleiteten elektrotechnischen Verein in Prag, sowie auch in anderen wissenschaftlichen und Fachvereinen in Prag und in Wien. Einige von diesen Vorträgen erschienen in der Elektrotechnischen Zeitschrift und können noch heute als musterhaft erklärt werden.

Seine Tätigkeit war umfangreich und sehr ersprießlich, insbesondere auf dem Gebiete der Elektrotechnik. Mit Recht nannte man ihn daher einen der Pioniere der Elektrotechnik in Österreich. Ehre seinem Andenken!

Н. Гаморак.
Камянець Под.

Новий тип транспірографа.

„...At present we are largely occupied in trying to find out the antecedent conditions that determine the processes that go on in the plant.... For these problems qualitative observations are of but little value, and emphasis is now being strongly placed on quantitative experimentation.... But the apparatus and methods by which effective conditions may be controlled and measured are generally not yet available; they remain mostly to be devised... In this connection it may be pointed ont that, for the present and immediate future, contributions in instrumentation and technique should be regarded as much more important than any general conclusions that may be derived from most of our commonly only abortive attempts to obtain reliable knowledge of causal relations by short-cuts that are not planned to succeed in the broader way..."

(B. E. Livingston: The present crisis in plant physiology, 1927.)

Цитовані слова, як не треба краще, характеризують теперішнє становище у фізіології рослин.

Перехід від якісного до кількісного способу дослідження, а властиво перевага цього останнього, вимагає прецізної та справної апаратури. Тимчасом фізіологія рослин, як порівнюючи недавна наука, ще не вспіла її витворити. Сусідні області, що з ними по методиці фізіологія тісно сходиться — фізика й хемія — не тільки не можуть часом дати потрібної методики та апаратури для спостережень процесів життя, значно складніших, як процеси в неживій матерії — а противно, не раз фізіологам приходиться робити нові відкриття або їх поглибляти в області неживого (розробка фізіологами питань осмотичного тиснення, евапорації і т. д.). Тому й не дивно, що ми й до тепер ще не маємо усталеної, стандартизованої апаратури навіть для таких основних життєвих процесів рослини, як ассіміляція, дихання,

транспірація, абсорпція. Ми повинні в цім напрямку стремітися до типу так прецізного, справного і так стандартизованого апарату, яким являється для анатомії мікроскоп. Але до цього типу фізіологічного апарату ми що далекі і при теперішньому становищі не приходиться дивуватися словам B. E. Livingston-a: „I judge that hardly a single passingly satisfactory experiment has ever been performed with plants...“ (op. cit.).

Значить, на порядку дня у фізіології рослин — відкриття прецізної та справної апаратури. Кількісний спосіб дослідження вимагає масових спроб. Складність життєвих процесів вимагає співучасти в розробці одної проблеми більшої кількости дослідників, вимагає колективної розробки. Ця потреба в масових і колективних дослідах ставить певні вимоги до апаратури: вона повинна бути стандартизована (щоби можна було між собою з певністю порівнювати кількісні дані поодиноких дослідів); дальше, вона повинна бути по можливості автоматична — для економії часу. Автоматична регістрація має ще й другу важливу додатню сторону: вона усуває суб'єктивні помилки спостерігача.

І не дивно, що на відкриття такої автоматичної апаратури віддають чимало часу. Та з многочисленних спроб тільки невелика кількість апаратів на стільки виправдала себе, що їх заготовляють в певній стандартизованій формі (наприклад саморегіструючий авксанометр). А зрештою і до цього часу не має у фізіології рослин такої апаратури і коли приходиться влаштовувати фізіологічну лабораторію, то треба мало що не всі апарати робити на окремі замовлення, чи то на підставі літератури, чи то на основі власних проєктів.

Перейдемо тепер до апаратів, що являються нашою темою — транспірографів, тобто саморегіструючих апаратів до поміру транспірації, одного з найважливіших процесів у житті рослини. Відомий цілий ряд спроб конструкції таких апаратів. Огляд цих апаратів можна знайти в книзі Burgerstein-a (1), Grafe (4, 5), а також у праці Briggs-a і Schrantz-a (3). І хоч ці спроби сягають ще часів Vesque-a (8), тобто 1878 року — помимо цього ще до тепер ні один з апаратів не закріпився у вжитку.

А що для помірів транспірації потрібно такого стандартизованого саморегіструючого апарату — про це мабуть багато говорити не приходиться. Не тільки суто теоретична сторона проблемів водного режіму рослини вимагають цього, але в не меншій мірі практичні питання, звязані з посухостійкістю рослин, з'окрема культурних рослин. В обидвох випадках треба масових та численних спроб, що їх можна виконати тільки при наявності доброї апаратури.

Колиж ми переглянемо літературу про „техніку“ поміру транспірації, то завважується цікаве явище, що апаратом даної конструкції користується тільки сам його винахідник, а в загальне вживання цей апарат не входить. Це вказує на існування причин, що перешкаджають вживанню таких апаратів, що роблять їх результати не раз непевними.

Одна з таких важливих причин, що перешкаджають точній роботі транспірографів — це ріжні принагідні зовнішні потрясення, що виводять вагу з рівноваги. Особливо мають значіння ці потрясення при лабораторних спробах і навіть при найбільш стабільній установці не вдається їх зовсім усунути.

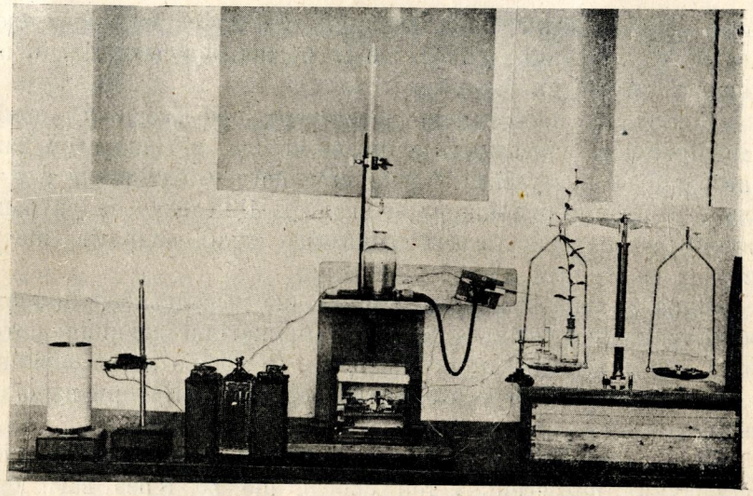
При дотеперішніх спробах старалися усунути вплив цих принагідних потрясень в той спосіб, що до терез ваги були прикріплені диски, погружені в густий плин (гліцеріну). Але „успокоювачі“ такого типу зменшують чутливість ваги, роблять її рухи повільними, а що найважливіше, зовсім не застерігають від фальшивої регістрації в моментах безпосередно перед фактичною регістрацією, бо тоді навіть „приглушене“ потрясення вповні вистарчає, щоби спричинити регістрацію.

Вище наведені міркування і спроби в цьому напрямку переконали мене в необхідності нових конструкцій. В дальнішому подаю опис апарату, що ним я користувався успішно при моїх лабораторних спробах над транспірацією рослин.

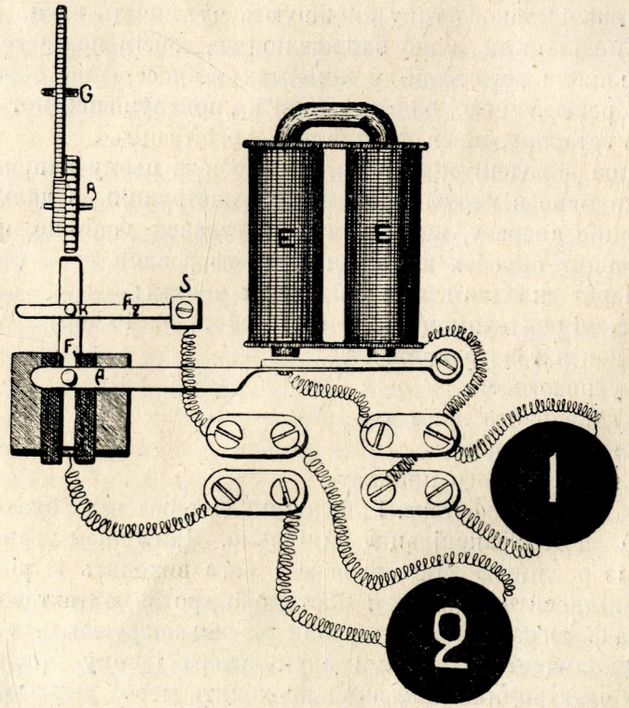
Апарат складається зі слідуючих частин:

а) хемічно-технічної ваги (чутливість на 10 mg),
б) контактового приладу,
в) успокоювача,
г) капельного приладу,
д) акумуляторів,
е) регіструючого приладу.

Як бачимо з фотогр. 1, на одній із терез ваги знаходиться рослина, що її транспірацію виміряємо. Наслідком транспірації тереза із рослиною стає легшою і вага виходить із рівноваги. Тереза підноситься уверх і платинові дроти контактового приладу (на фотографії з лівої сторони терези) погружаються в ртуть. Дроти сполучені з полюсами акумулятора і тому при контакті повстає електричний ток, який проходить через успокоювач (на фотографії 1 в низу між вагою і акумуляторами).



Малюнок 1.



Малюнок 2. **1** — до ртутного контакту.
2 — до капельного приладу та регіструючого приладу.

Будова успокоювача стане нам зрозуміла зі схеми 2. Коли наступає на вазі контакт, електричний ток проходить через електромагнети *EE*. Якір *A* притягується ядром електромагнетів і рівночасно з якором входить в рух металева пружинка F_1. На кінці цієї металевої пружини мається гумовий наконечник. Коли електромагнети вводять в рух пружинку F_1, гумовий наконечник доторкається щільно до колісця годинникового приладу *R* і пружинка F_1 наслідком руху колісця підноситься у верх. По деякому часі пружинка F_1 підносячись входить в дотик зі срібним контактом *K*, що мається на поперечній пружинці F_2. Тільки вже наслідком цього другого контакту приходять до діяння апарати, що обозначені в схемі цифрою „2“, а саме капельний прилад і регіструючий прилад.

Капельний прилад вже описаний мною в попередній публікації (6). В основі він залишився той самий, хоч впроваджено деякі зміни. Функціонування цього приладу опирається на прінціпі сполучених судин. В пляшці (що її виразно видно на фотогр. 1) мається парафіновий олій (paraffinum liquidum). Пляшка має в низу отвір, до якого щільно пристосована гумова рурка. На своїому другому кінці гумова рурка насунена на шкляну рурку, що прикріплена до якоря електромагнетів типу електричного дзвінка. Апарат зрегульовається в той спосіб, що при нормальному становищі парафіновий олій в кінці шкляної рурки стоїть на однаковій висоті з рівнем плину у пляшці і тому олій не витікає. Колиж прийде до контакту (через *K* в успокоювачі), тоді електромагнети активуються, притягують якір і з ним шкляну рурку в низ, кінець шкляної рурки стає низше рівня плину в пляшці і на основі прінціпу сполучених судин парафіновий олій стає випливати зі шкляної рурки в формі каплини.

Каплина парафінового олію спадає в мензурку, що мається на вазі. Наслідком того ліва тереза (на фотогр. 1) стає важша і спадає в низ, ртутний контакт переривається, а рівночасно з тим переривається діяння електромагнетів *EE* в успокоювачі. Пружинка F_1 входить в своє нормальне положення і контакт *K* переривається. Наслідком того електромагнети капельного приладу перестають притягувати якір, він підноситься у верх враз із шкляною руркою і парафіновий олій перестає витікати. Значить, при відповідній чутливості вага повертає після випадення одної каплини в початкове становище.

Кожна каплина регіструється на барабані, що його бачимо на фотогр. 1 з лівої сторони, з самого краю. Барабан робить

оборот раз в 24 години. Регістрація відбувається електромагнетним приладом, як часто при фізіологічних спробах. За кожний раз, коли активуються електромагнети капельного приладу, рівночасно проходить ток через електромагнети регіструючого приладу і перо зазначує на барабані точку. Значить: кожній каплині парафінового олію, що випадає в мензурку на вазі, відповідає одна точка на барабані.

Остається дати пояснення, в чому полягає значіння успокоювача. Коли вага виходить з рівноваги наслідком зміни тягару, то ця зміна рівноваги являється сталою. Колиж на вагу діють принагідні потрясення, то вони викликують короткі колихання, що спричинюють контакт на вазі і ток в електромагнетах *EE* не на довше, як декілька секунд. Успокоювач при допомозі шрубки *S* (гляди мал. 2) зрегульований в той спосіб, що при короткотревалім потрясенні пружинка F_1 не доходить до контакту *K* — бо заким вона дійде, ток переривається в електромагнетах *EE* наслідком колихання в другому напрямку. Колиж зміна тягару являється сталою, тоді пружинка F_1 наслідком функціонування годинникового приладу підноситься до контакту *K*. Через цей контакт входить в діяння капельний апарат, каплина олію випадає, а рівночасно на барабані регіструється точка. Шрубкою *S* можна регулювати час контакту на вазі, що проходить без регістрації.

Методою каплин користується також апарат Blockman-a і Paine-a (2). Але конструкція цього апарату опирається на зовсім другому прінціпі (каплини води витікають з пляшки Маріота), успокоювач гліцеринового типу, а як плин вживається вода. Вживання води спричинює можливість випарування; тим самим викликує помилки при спробах. А дальше тягар каплин парафінового олію значно менший[1]) і тим самим спостереження можуть бути значно більше детайлізовані.

Для ілюстрації функціонування апарату подаю декілька лабораторних спроб (фотогр. 3).

Спроба 10. 14/V. Галузка Aesculus Hippocastanum зрізана під водою і вложена в пляшку з водою. Видно сильнішу транспірацію в полудневу пору (13—15 год.) і чимраз більше зменшення ночю.

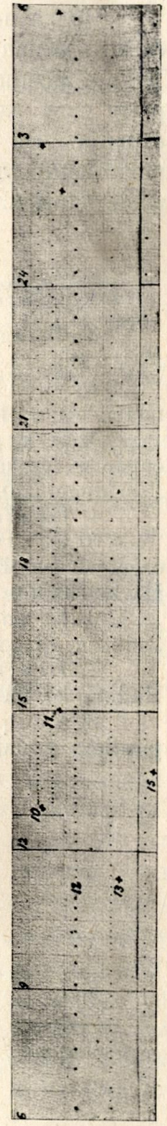
[1]) У моїх спробах тягар каплин був при кімнатній температурі пересічно 23 mg.

Спроба 11. 15/V. Галузка Acer Negundo. Перебіг транспірації як в спробі 10.

Спроба 12. 16/V. Галузка Berberio vulgaris, свіжо зрізана. Спробу продовжувано цілу добу. Перебіг транспірації як у попередніх спробах — сильна транспірація 12—15 год., декілька раз слабша ночю.

Спроба 13. 17/V. Та сама галузка Berberis vulgaris. Перебіг транспірації анальоґічний, як 16/V.

Спроба 15. 19/V. Та сама галузка Berberis vulgaris. Перебіг транспірації такий, як у спробах 12 і 13, але інтензивність його значно менша. Спроби 12, 13 і 15 доказують, що при експериментах зі зрізаними галузками інтензивність транспірації в пізніших днях спроби сильно зменшується, хоч перебіг транспірації на протязі доби остає тойже. Тому при таких спробах треба докладно вказувати час, що пройшов після зрізання галузки.



Малюнок 3.

Дякуючи електричному успокоювачу описаним апаратом можна працювати і в лабораторії, де буває навіть досить неспокійно. І так зазначені мною спроби відбувалися в той час, коли кругом по сусідних авдіторіях йшли лекції і кількість випадкових потрясень була велика. Всеж таки вказано, щоби спроби з транспірографом проводилися по можливості в спокійних умовах, бо, коли принагідні колихання відбуваються надто часто, тоді регістрація на барабані нераз не дає зовсім докладної картини; треба вводити в неї деякі корективи. Правда, до цих коректівів звичайно досить легко дійти. І так буває, що в коротці перед нормальною регістрацією наступає принагідне потрясення. При малій амплітуді колихання повстає контакт, випад каплини і регістрація. Значить, тут регістрація, що мала відбутися пізніше, наступає дешо скоріше. Такі неточності легко завважити і виправити: віддалення точок регістрації звичайно буває рівномірне і легко впізнати правдиве місце точки регістрації. Сама кількість точок (тобто абсолютна кількість транспірованої води) зазначена правильно.

Друга неточність моглаби повстати тоді, коли вже підчас самого випаду каплини і регістрації ділає сильне потрясення. Це потрясення переривае випад каплини і очевидно, що в скорому часі, коли тільки вага заспокоїться, наступає нова регістрація. На барабанах, що обертаються раз в 24 год. — ці дві регістрації слідують по собі так близько, що вся ненормальність регістрації виявляється тільки в дещо грубшій точці.

Література.

1. Burgerstein A. Die Transpiration der Pflanzen. Bd. 1 — 1904; Bd. 2 — 1920; Bd. 3 — 1925.
2. Blackman V. H. and Paine S. G. A recording transpirometer. Ann. of Bot. 28, 1914.
3. Briggs and Shantz. An automatic transpiration scale of large capacity for use with freely exposed plants. Journ. Agricultur. Research. Washington, 5, 1915.
4. Grafe V. Ernährungsphysiologisches Praktikum, 1914.
5. Grafe V. Messung der Gas- und Wasserbewegung im Pflanzenorganismus. Handbuch der biolog. Arbeitsmethoden, Abt XI, Teil 2, H. 1, 1920.
6. Гаморак Н. Новий апарат для поміру транспірації рослин. Записки Сільсько-Господ. Інституту в Камянці на Поділлі, т. 3, 1926.
7. Livingston B. E. The present crisis in plant physiology. Bulletin of the Torrey Botanical Club. Vol. 53, 1927.
8. Vesque M. J. L' absorption comparée directment à la transpiration. Annales des sciences naturelles. Botanique. Vol. VI, 1878.

Др. Олександер Смакула.

До фосфоризації алькалевих гальоїдів.

Коли насвітлювати алькалеві гальоїди промінями Рентґена, то вони зафарбовуються. Так н. пр. *Na Cl* приймає жовту краску, *KCl* синю, а *RbCl* фіолетову. При сьому оказують сі кристали між 300 *mμ* а 600 *mμ* абсорпцію з виразним максімум, як показали поміри Z. Gyulai'a[1]) і W. Flechsig'a[2]). При насвітлюванні сих закрашених кришталів коротким (себ-то синім) світлом абсорпційна крива сплощується, а рівночасно пересувається максімум в напрямі довших хвиль. Те саме явище викликує підвисшення температури, як се рівнож видно з праці W. Flechsig'a. Gudden і Pohl[3]) пояснюють се явище неправильностями в кристалічній сітці, які викликує підвисшення температури або насвітлення.

Рівнож закрашення (зафарбування) кришталів є тісно звязане з неправильностями кристалічної сітки. Так н. пр. природний кристал камінної соли закрашується при тому самому насвітленні промінями Рентґена значно слабше, як кристал штучно зроблений. (Методою S. Kyropoulos'a[4]) можна на протязі 3-ох годин зробити штучно кристал величини 125 cm^3, а то й більші). У синтетичному кришталі є сітка безперечно більше нарушена, як у природному й сим пояснюється його сильнійше зафарбування. Се підтверджує і праця Przibram'a[5]), який виказав, що під впливом тиснення кристали сильнійше зафарбовуються. Домішка тяжких металів (*Ag, Cu, Mn, Cr*) викликує рівнож неправильности в кристалічній сітці й се сприяє також більшому за-

[1]) Zeitschrift für Physik, том 33, стор. 251, 1925.
[2]) „ „ „ „ 36, „ 605, 1926.
[3]) „ „ „ „ 41, „ 833, 1927.
[4]) Zeitschrift für anorg. u. allgem. Chemie, том 154, стор. 308, 1826.
[5]) Zeitschrift für Physik, том 37, стор. 881, 1926.

Друга неточність моглаби повстати тоді, коли вже підчас самого випаду каплини і регістрації ділає сильне потрясення. Це потрясення переривае випад каплини і очевидно, що в скорому часі, коли тільки вага заспокоїться, наступає нова регістрація. На барабанах, що обертаються раз в 24 год. — ці дві регістрації слідують по собі так близько, що вся ненормальність регістрації виявляється тільки в дещо грубшій точці.

Література.

1. Burgerstein A. Die Transpiration der Pflanzen. Bd. 1 — 1904; Bd. 2 — 1920; Bd. 3 — 1925.
2. Blackman V. H. and Paine S. G. A recording transpirometer. Ann. of Bot. 28, 1914.
3. Briggs and Shantz. An automatic transpiration scale of large capacity for use with freely exposed plants. Journ. Agricultur. Research. Washington, 5, 1915.
4. Grafe V. Ernährungsphysiologisches Praktikum, 1914.
5. Grafe V. Messung der Gas- und Wasserbewegung im Pflanzenorganismus. Handbuch der biolog. Arbeitsmethoden, Abt XI, Teil 2, H. 1, 1920.
6. Гаморак Н. Новий апарат для поміру транспірації рослин. Записки Сільсько-Господ. Інституту в Камянці на Поділлі, т. 3, 1926.
7. Livingston B. E. The present crisis in plant physiology. Bulletin of the Torrey Botanical Club. Vol. 53, 1927.
8. Vesque M. J. L' absorption comparée directment à la transpiration. Annales des sciences naturelles. Botanique. Vol. VI, 1878.

Др. Олександер Смакула.

До фосфоризації алькалевих гальоїдів.

Коли насвітлювати алькалеві гальоїди промінями Рентґена, то вони зафарбовуються. Так н. пр. *Na Cl* приймає жовту краску, *KCl* синю, а *RbCl* фіолетову. При сьому оказують сі кристали між 300 *mμ* а 600 *mμ* абсорпцію з виразним максімум, як показали поміри Z. Gyulai'a[1]) і W. Flechsig'a[2]). При насвітлюванні сих закрашених кришталів коротким (себ-то синім) світлом абсорпційна крива сплощується, а рівночасно пересувається максімум в напрямі довших хвиль. Те саме явище викликує підвисшення температури, як се рівнож видно з праці W. Flechsig'a. Gudden і Pohl[3]) пояснюють се явище неправильностями в кристалічній сітці, які викликує підвисшення температури або насвітлення.

Рівнож закрашення (зафарбування) кришталів є тісно звязане з неправильностями кристалічної сітки. Так н. пр. природний кристал камінної соли закрашується при тому самому насвітленні промінями Рентґена значно слабше, як кристал штучно зроблений. (Методою S. Kyropoulos'a[4]) можна на протязі 3-ох годин зробити штучно кристал величини 125 cm^3, а то й більші). У синтетичному кришталі є сітка безперечно більше нарушена, як у природному й сим пояснюється його сильнійше зафарбування. Се підтверджує і праця Przibram'a[5]), який виказав, що під впливом тиснення кристали сильнійше зафарбовуються. Домішка тяжких металів (*Ag, Cu, Mn, Cr*) викликує рівнож неправильности в кристалічній сітці й се сприяє також більшому за-

[1]) Zeitschrift für Physik, том 33, стор. 251, 1925.
[2]) „ „ „ „ 36, „ 605, 1926.
[3]) „ „ „ „ 41, „ 833, 1927.
[4]) Zeitschrift für anorg. u. allgem. Chemie, том 154, стор. 308, 1826.
[5]) Zeitschrift für Physik, том 37, стор. 881, 1926.

крашенні, але не всі металі однаково ділають: криштали з домішкою срібла зафарбовуються сильнійше, як з домішкою міди.

Анальоґічно мається справа з відфарбуванням. Синтетичний криштал тратить свою краску скорше, як природний. Сей процес відфарбування можна приспішити, коли температуру кришталу підвисшимо. Червоне світло не має жадного впливу на відфарбування. Синтетичний, закрашений криштал насвічував я 6 годин сильним червоним світлом вугляної лямпи й закрашення майже нічого не змінилося, підчас коли при насвітлюванні синім світлом криштал тратить цілком свою краску вже на протязі кількох хвилин.

Щоби означити вплив синього світла на закрашені (промінням Рентґена) криштали алькалевих гальоїдів, поступав я в сей спосіб. Криштал ділив я на дві рівні части; одну часть огрівав в точно означених відступах по 100 секунд і після кождого огріття міряв абсорпційний сочинник при помочи подвійного монохроматора, фотоелєктричної клітини та однониткового елєктрометра. Абсорпцію міряв я для тої довжини хвилі світла, яку криштал найсильнійше абсорбує. З другою частиною кришталу поступав я так само, лише перед кождим нагріттям насвічував на протязі 10 секунд синім світлом. З рис. 1. бачимо, що абсорпційний сочинник при насвітлюванні синім світлом скорше зменшується, як лише при самому нагріванні. З сього виходить, що закрашені промінням Рентґена алькалеві гальоїди заховуються під впливом синього світла подібно як при високій температурі. На криштали з домішкою тяжких металів впливає синє світло сильнійше, як без домішки.

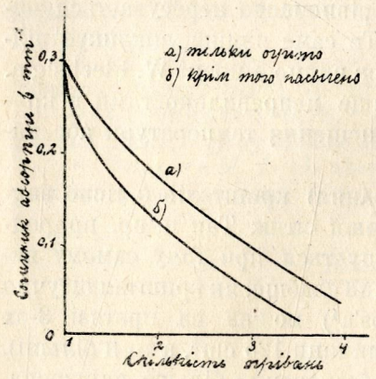


Рис. 1.

Сей вислід, що синє світло впливає на закрашені гальоїди подібно як висока температура, поставив під знак запитання працю A. Frum'a,[1]) яку він зробив у тутешньому інституті перед двома роками. Frum найшов між иншим, що коли закрашений криштал насвітити синім світлом, а відтак огріти до 100° C, то він світить (фосфоризує). Колиж по синім світлі насвітити червоним, то при огріванні до 100° C нема жадного ефекту. Червоне світло привертає криштал до нормального стану, подібно як се Gudden і Pohl[1]) найшли при фотоелектричних явищах. Згідно з моїм вислідом могло бути можливе, що Frum міряв світло, що походило від відфарбування (Entfärbungsleuchten) кришталу, а не дійсну фосфоризацію. Але, як дальше покажеться, мої дальші поміри говорять в користь праці Frum'a.

[1]) Zur lichtelektrischen Leitung u. Phosphoreszenz von *Na Cl*-Kristallen. 1925.

Дальшою моєю задачею було встановити звязок між зафарбуванням і сумою фосфорового світла (після Лєнарда: Lichtsumme). Коли огріти закрашений криштал до 300° C, то краска в короткім часі (кругло 1 хвилина) зникає, а рівночасно висилає криштал фосфорове світло. На основі сього повиненби криштал дати тим більшу суму фосфорового світла, чим сильнійше він закрашений. Щоби се вияснити, огрівав я криштал по кождому помірі абсорпційного сочинника (як передше) означений час (5 секунд) до 200° C і мірив суму світла при помочи фотоелєктричної комірки та однониткового елєктрометра (вихилення елєктрометра є впрост пропорціональне до суми світла). Висліди представлено на рис. 2. Поміри виконувано взад, себ-то зачинаючи від великої абсорпції і великої світляної суми. Зразу меншає сума фосфорового світла досить скоро, а відтак чим раз поволійше зближається до незмірімої величини. До помірів уживав я природних і синтетичних кришталів. Всі криві мають той самий характер (рис. 2.), з тою хіба ріжницею, що деякі криві вказують, немовби криштал стративши краску рівночасно перестає світити. Однак се не завсігди бував. Коли н. пр. положити закрашений криштал на світло сонця, то краска по короткому часі (5 хвилин) майже зовсім зникає, але при огріті до 300° C криштал ще досить сильно світить.

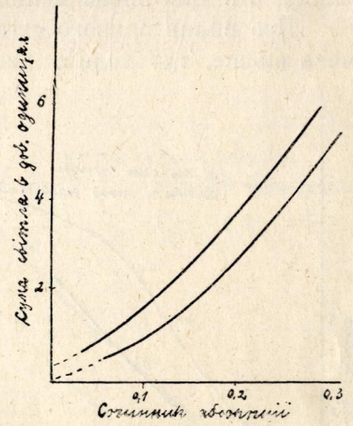


Рис. 2.

Чим довше насвітлювати криштал промінням Рентґена, тим

[1]) Zeitschrift für Physik, том 37, стор. 881, 1926.

сильнійше він зафарбовується, але скількість нагромадженої світляної енергії зближається досить скоро до певної границі, як се показує рис. 3. Чи крива завертає вниз, колиб кристал ще сильнійше зафарбувати, сього мені не вдалось осягнути, що зовсім не виключене. У свіжо насвічених кришталах сума фосфорового світла значно більша, як при давних; також кристали з домішкою світять сильнійше, як природні і зі збільшенням домішки тяжких металів росте й сума світла, але лише до певного відсотка домішки, а відтак знова меншає.

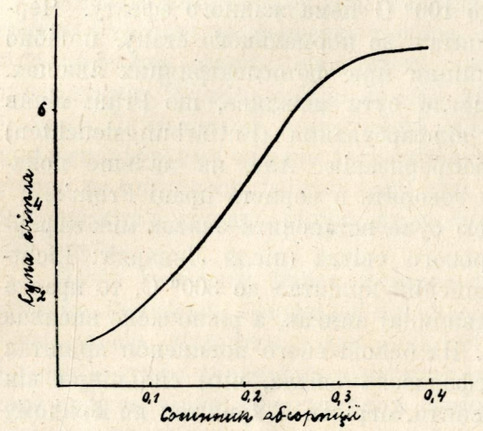


Рис. 3.

Про вплив синього світла на закрашення кришталів була мова висше, тут ходить виказати вплив на суму фосфорового світла. До вияснення сього міряв я на одній половині кришталу абсорпцію й при огріванні суму фосфорового світла, а з другою половиною поступав я так само, лише перед кождим поміром світляної енергії (суми світла) насвічував кристал 5 секунд синім світлом. Поміри представляє рис. 4. З нього бачимо, що насвітлювання синім світлом побільшує значно суму фосфорового світла, бо колиб синє світло тільки приспішувало процес висвітлювання, то обі криві перетиналибись. Отже фосфорове світло й заникання краски є два ріжні явища, які разом виступають, але не конечно завсігди, як се показує слідуючий примір.

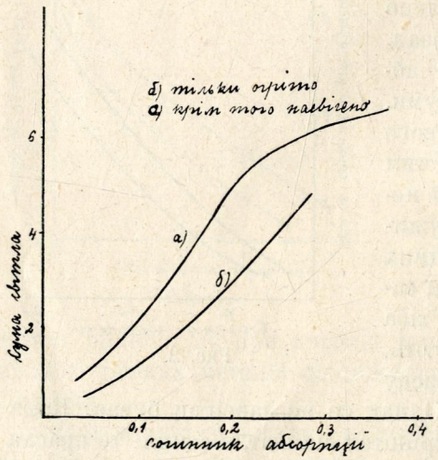


Рис. 4.

Деякі природні кристали камінної соли, що далися досить сильно зафарбувати (сочинник абсорпії = 0,3 mm^{-1}) фосфоризували при нагріванні дуже слабо. Через насвітлювання позафіолєтовими промінями за помочю елєктродової дуги (*Al, Cd, Zn*) не вдалось також привести кристал до фосфоризования; рівнож насвітлювання синім світлом не мало ніякого впливу. При помірі абсорпційного спектра показалось, що такі кристали перепускають цілком світло аж до 186 $m\mu$.[1]) (При помірах понизше 186 $m\mu$ треба вбудувати апаратуру т. є подвійний монохроматор з фотоелєктричною коміркою в порожнечу, бо воздух такі короткі хвилі дуже сильно абсорбує). Цим отже доказано, що зафарбування не дає світляної енергії — себ-то кристал не є фосфором, — коли йому бракує домішки тяжкого металю.

Алькалеві гальоїди з домішкою тяжких металів, як *Pb, Tl, Ag, Cu, Mn* виказують сильну абсорпцію в полосі позафіолєтовій, як се видно з праці R. Hilsch'a[2]) і моєї[3]) та є добрими фосфорами.

Додатно закрашені кристали не фосфоризують також, коли їм бракує домішки тяжкого металю.

Що відфарбування не причиняється до збільшення суми фосфорового світла, бачимо ще й з отсього експерименту. Одну половину закрашеного кришталу огрівав я в означених відступах до 200° C і міряв кождим разом суму світла. Другу частину огрів я до 350° C, а відтак по остигненні насвітив 5 хвилин позафіолєтовими промінями й поступав з тим

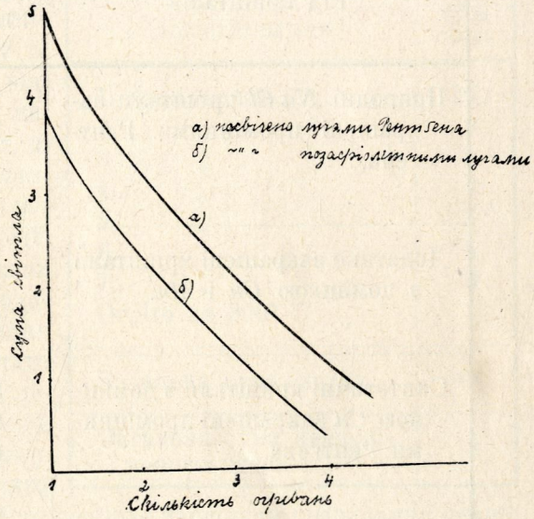


Рис. 5.

[1]) Pohl und Rupp, Annalen der Physik, том 81, стор. 1161, 1926.
[2]) Rudolf Hilsch, Zeitschrift für Physik, том 44, 1927.
[3]) Alexander Smakula, Zeitschrift für Physik, том 45, стор. 1, 1927.

кришталом дальше як з попередним. Хоч останній кристал зовсім не зафарбувався, то мимо того дав він майже таку саму суму світла, як попередний зафарбований, як се видно з рис. 5.

З висше наведених помірів бачимо, що зафарбування є лише побічним явищем при нагромадженні світляної енергії в кришталі лучами Рентґена та що його можна усунути через освітлення синім світлом або через підвисшення температури. Суму світла тих фосфорів та їх зафарбування не дали покищо розмежуватись від себе, але дуже можливо, що се дасться осягнути при помочи червоного світла.

Як вже передтим було згадано, не міг Frum у своїй праці з певністю ствердити, чи сума світла при його помірах мала чисто фосфоровий характер, чи ні. Зовсім ясно виходить се з моїх попередних помірів, як також з низше наведених, які я робив у дещо відмінному напрямі. Цілу суму фосфорового світла міряв я тим разом нараз, один раз тільки при нагрітті до 300° С, а другий раз при попередньому насвітлюванні синім світлом.

Рід кришталів	Сума світла	
	Тільки огріто	Крім того насвічено син. св.
Природні *Na Cl* кристали закрашені промінням Рентґена.	10 10 5 5	15 15 7 10
Додатньо закрашені кристали з домішкою *Cu* і *Mn*.	13 10 10	10 5 3
Синтетичні кристали з домішкою *Cu* закрашені промінням Рентґена.	12 12 13 9 14 13	8 5 2 6,5 8,5 2

Висліди зіставлені в повисшій табличці. Суму світла треба розуміти тут як і при попередних помірах у довільних одиницях.

Поміри робив я на природних і синтетичних кришталах закрашених промінням Рентґена, а також на додатно закрашених парою соду (*Na*). Сума світла природних кришталів більшає по насвітленні синім світлом; такі кристали мають дійсну фосфоризацію. Дещо инакше представляється на перший погляд справа з синтетичними і додатно закрашеними кришталами. У них світляна сума меншає, коли їх насвітити синім світлом. Ся ріжниця походить відси, що при насвітлюванні синім світлом фосфоризують сі кристали вже при звичайній температурі, підчас коли природні доперва при огріттї найменше до 100° С. Тому що при моїх помірах між насвітленням а поміром суми світла проходило звичайно 5 секунд, я не міг міряти цілої суми, а лише частину й сим пояснюється сей протилежний вислід.

Доказ дійсної фосфоризації дався отже перевести впрост лише на природних кришталах. Щоби се доказати й на синтетичних кришталах, требаби послугуватись методою фосфороскопічною, при чому апаратура значно ускладнюється й тому я сього не робив. За те змодифікував я дещо попередпі поміри: одну частину криштала нагрів я до 300° С і змірив світляну суму, а другу насвітив 5 секунд синім світлом і огрів лише до 200° С одну хвилину та змірив світляну суму, відтак охолодив кристал, насвітив, огрів до 200° С і т. д. Поміри зіставлені в табличці побіч. Насвітлювана частина дала 49 одиниць світляної енергії, а така сама тільки огріта лише 5 одиниць. Через насвітлювання синім світлом можна дістати з закрашеного кришталу довільну скількість світляної енергії, але лише теоретично, бо в дійсности світляна енергія по кождому огріттї меншає наслідком розпадання певної частини осередків (центрів), які абсорбують енергію підчас насвітлювання. Сей процес можна зробити практично зворотним (reversibel), коли огрівати лише дуже короткий час й тільки до температури, при якій кристал зачинає саме світити.

Насвітлювання	Сума світла
1. насвітлення	10
2. „	9
3. „	9
4. „	8
5. „	5
6. „	4
7. „	3
Огріто до 300° С	1
Загальна сума світла	49
Загальна сума ненасвіченого кусня	5

Frum доказав у своїй праці, що червоне світло приводить насвічений синім світлом криштал до первісного стану. Я розслідив сей вплив дещо дальше. Мої поміри не тільки підтвердили працю Frum'a, але виказали дальше, що червоне світло не відфарбовує кришталів а також може так само як і синє світло привести криштали до фосфоризації, як се показує зіставлення в табличці побіч. Та се однак ще не цілком певне, бо червоне світло впливає дуже слабо й треба цілими годинами насвічувати, щоби викликати сю малу ріжницю, а такі поміри звичайно не мають великої точности.

Світл. сума	
Тільки огріто	Насв. черв. світл.
52	60
23	27
19	21
15	20

Рівнож і сю працю зробив я у І. Фізичному Інституті в Ґетінґені в проф. R. Pohl'a, якому на сьому місці складаю щиру подяку за цінні поради.

Ґетінґен, 14. грудня 1927.

Wl. Lewickyj (Léopol).

La spirale logarithmique et sa développante.

1. La spirale logarithmique decouverte par Descartes (1638) c'est la courbe dont le rapport d'un arc quelconque et le rayon vecteur correspondant est toujours constant tel que:

$$\frac{\widehat{AB}}{AB} = \frac{\widehat{AC}}{AC} = \frac{\widehat{AD}}{AD} = \quad = const.$$

c'est à dire:

$$\frac{r}{s} = const. \qquad 1)$$

La différentiation de cette équation et sa transformation en coordonnées polaires celle que:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

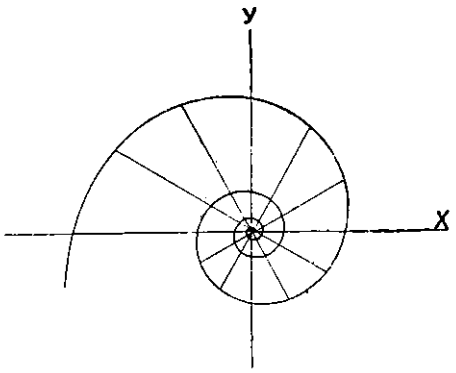
donne à nous

$$d\varphi = \sqrt{c^2 - 1}\ \frac{dr}{r}.$$

L'intégral de cette équation est:

$$r = Ce^{\alpha\varphi} \qquad 2) \qquad \left(\alpha = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \quad C = const.\right)$$

La spirale a la forme suivante:



Déjà J. Bernouilli (1691) a montré que la développée de la spirale logarithmique est pareille à la courbe même c'est à dire que la développée de cette courbe est aussi une spirale logarithmique. Dans la note suivante je veux donner une nouvelle démonstration du théorème reciproque et cela que la développante d'une spirale logarithmique est aussi une spirale logarithmique pareille.

Je demontrerai ce théorème par les méthodes egales à cettes ques j'ai employées dans mes notes précedentes[1]).

2) Nous obtiendrons l'équation d'une développante de la spirale logarithmique de l'équation 2) et des équations:

$$\xi = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2), \quad \eta = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) \qquad 3)$$

Dans ce but écrivons l'équation 2) dans la forme:

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = Ce^{\alpha \, arctg \frac{\eta}{\xi}}$$

c. e. à dire:

$$log\,(\xi^2 + \eta^2) - log\,C^2 = 2\alpha \, arctg \frac{\eta}{\xi}. \qquad 4)$$

La différentiation de cette équation par ξ donnera:

$$\frac{\xi + \eta \frac{d\eta}{d\xi}}{\xi^2 + \eta^2} = \alpha \frac{\xi \frac{d\eta}{d\xi} - \eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

ou:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\alpha\eta + \xi}{\eta - \alpha\xi} \qquad 5)$$

Cependant il y a:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{d\xi}{dx}}$$ et à l'égard de l'équation 3)

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{3y'y''^2 - y'''(1+y'^2)}{y''^2}[2]), \quad \frac{d\xi}{dx} = -y'\frac{3y'y''^2 - y'''(1+y'^2)}{y''^2}$$

ou:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{y'}.$$

L'équation 5) prend maintenant la forme suivante:

$$y' = \frac{\eta - \alpha\xi}{\alpha\eta + \xi}. \qquad 6)$$

---

[1]) cf. Sammelschrift der math.-naturw.-ärztl. Sektion, Lemberg, Bd. XXI, S. 65 sqt.

[2]) L'importance du ce numérateur comp. l. cit.

Posant pour ξ et η les valeurs 3) nous obtiendrons au lieu de l'équation 6) l'expression suivante:

$$(x + \alpha y)y' - (y - \alpha x) = \frac{(1 + y'^2)^2}{y''}. \qquad 7)$$

C'est l'équation différentielle de la développante que nous cherchons. Mais on peut constater très facilement que l'équation au-dessus peut être satisfaite par la substitution

$$y' = \frac{x + \alpha y}{\alpha x - y} \qquad 8)$$

car dans ce cas il y a

$$(1 + y'^2)^2 = \frac{(x^2 + \eta^2)^2(\alpha^2 + 1)^2}{(\alpha x - y)^4}, \quad y'' = \frac{(xy' - y)(\alpha^2 + 1)}{(\alpha x - y)^2}.$$

Mais étant

$$xy' - y = \frac{x^2 + y^2}{\alpha x - y}$$

alors

$$y'' = \frac{(x^2 + y^2)(\alpha^2 + 1)}{(\alpha x - y)^3},$$

en conséquant la côté droite de l'équation 7) aura pour valeur $\frac{(x^2 + y^2)(\alpha^2 + 1)}{\alpha x - y}$. Cependant la côté gauche ayant la même valeur l'équation 7) devient l'identité:

$$\frac{(x^2 + y^2)(\alpha^2 + 1)}{\alpha x - y} \equiv \frac{(x^2 + y^2)(\alpha^2 + 1)}{\alpha x - y}$$

c'est à dire l'équation différentielle 7) a pour solution la valeur:

$$y' = \frac{x + \alpha y}{\alpha x - y}.$$

De la formule dernière suit

$$(\alpha x - y)\, y' = x + \alpha y$$

ou:

$$x + yy' = \alpha(xy' - y).$$

Écrivant cette équation dans la forme:

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \alpha \frac{xy' - y}{x^2 + y^2}$$

son integral a la valeur:

$$log\,(x^2 + y^2) = 2\alpha\, arc\, tg \frac{y}{x} + const,$$

et quand nous poserons

$$const = 2 \log m,$$

nous obtiendrons:

$$x^2 + y^2 = m^2 e^{2\alpha \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}$$

ou

$$\sqrt{x^2 + y^2} = m\, e^{\alpha \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}. \qquad 10)$$

Mais c'est l'équation de la spirale logarithmique, éventuelement dans le cas de m variable d'un faisceau des spirales logarithmiques pareilles à la courbe 1) donnée.

Nôtre théorème est donc démontrée.

Octobre, 1927.

Гургула Юрій (Рогатин).

Окремий випадок цикльоїдальних кривих. Слимакована лінія.

У пошукуванні за такими величинами, які можнаби уживати як співрядні точок у просторі і які булиби незалежні від осий співрядних, ми опираючися на підставових працях Софуса Ліе, визнаємо їх у промінь осціляційного кола $\overline{R}$ і довжині дуги даної кривої лінії $\overline{s}$. Вони зовуться диференційними інваріянтами.

Ми виведемо деякі підставові формули природної ґеометрії, які дають нам можність находити рівнання природні кривих ліній цикльоїдальних. Теорія ґеометрії природної є розбудована Е. Чезаром.[1])

Насамперед ми можемо уявити собі такий уклад осий співрядних, якого початок лежить на кривій лінії і постійно зміняє своє положення. При помочи теорії векторів і розважань граничних ми доходимо до формул, які дають нам звязок між співрядними природними а співрядними цего укладу осий співрядних, який завжди є у руху.

§. 1.

Умовні ріжничкові рівнання для непорушности точки на площі.

Величини: $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{O'P}$ є подумані у значінню векторів. (Фіґ. 1.)

Точки O і O' є дві сусідні точки одної і тої самої кривої лінії, оси x-сів і x'-сів є стичними цеї кривої; оси y-онів і y'-онів є нормальними (прямовісними) цеї кривої лінії.

[1]) E. Césare — Vorles. über natürliche Geometrie. Leipzig 1901.

Проекційне рівнання векторів на вісь $\overrightarrow{x'}$ звучить:

$$\overrightarrow{OP_{x'}} = \overrightarrow{OO'_{x'}} + \overrightarrow{O'P_{x'}}$$

де: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$

$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{\Delta x} + \overrightarrow{\Delta y}$

$\overrightarrow{O'P_{x'}} = (\overrightarrow{x + dx})$

Ми одержимо отже:

$$x \,.\, \cos d\tau + y \,.\, \sin d\tau = \Delta x \,.\, \cos d\tau + \Delta y \,.\, \sin d\tau + x + dx$$

або:

$$\cos d\tau \,.\, (x - \Delta x) + \sin d\tau \,.\, (y - \Delta y) = x + dx$$

При помочи розважувань граничних ми одержимо:

$$lim \cos d\tau = 1$$

$$lim \sin d\tau = d\tau$$

Отже: $x - \Delta x + y \,.\, d\tau - d\tau \,.\, \Delta y = x + dx$

$d\tau \,.\, \Delta y$ як величину другого порядку опускаємо.

$$-\Delta x + y \,.\, d\tau = dx$$

Ділимо рівнання через ds.

$$-\frac{\Delta x}{ds} + y \,.\, \frac{d\tau}{ds} = \frac{dx}{ds}, \text{ але: } ds = R \,.\, d\tau$$

$$\text{отже: } \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$lim \frac{\Delta x}{ds} = 1.$$

Ми одержимо отже взір:

$$\underline{\frac{dx}{ds} = \frac{y}{R} - 1} \qquad 1)$$

Проекційне рівнання векторів на вісь $\overrightarrow{y}$-онів звучить:

$$\overrightarrow{OP_{y'}} = \overrightarrow{OO'_{y}} + \overrightarrow{O'P_{y'}}$$

або:

$$-x \,.\, \sin d\tau + y \,.\, \cos d\tau = \Delta x \,.\, \sin d\tau + \Delta y \,.\, \cos d\tau + y + dy$$

На підставі вище сказаного про розважування граничні ми маємо:

$$-x \,.\, d\tau + y = \Delta x \, d\tau + \Delta y + y + dy.$$

$$-x \,.\, \frac{d\tau}{ds} = \frac{\Delta y}{ds} + \frac{dy}{ds}$$

але: $lim\ \frac{\Delta y}{ds} = 0$, а $\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$

Ми одержуємо отже:

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{x}{R} \qquad 2)$$

s = дуга кривої лінії.
R = промінь осціляційного кола.

Рівнання 1) і 2) є умовні ріжничкові рівнання для непорушности точки P на площі у випадку сукцессивної зміни укладу осий співрядних.

§. 2.

Точка R порушається на площі укладу осий співрядних x, y і творить нову криву лінію, якої природними співрядними є: $\bar{s}$, $\bar{R}$.

Лінія крива Γ має рівнання: $R = f(s)$, а лінія крива $\bar{\Gamma}$ має рівнання: $\bar{R} = f(\bar{s})$.

Величини: $\overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{O'P'}$ є подумані у значінню векторів, δy, δx є пересуненнями (Verschiebungen) точки P на площі: x—y. (Фіґ. 2.)

Рівнання проекційне на вісь векторів $\overrightarrow{x'}$ звучить:

$$\overrightarrow{OP'_{x'}} = \overrightarrow{OO'_{x'}} + \overrightarrow{O'P'_{x'}}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{(x + \delta x)} + \overrightarrow{(y + \delta y)}$$

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{\Delta x} + \overrightarrow{\Delta y}$$

$$\overrightarrow{O'P'_{x'}} = \overrightarrow{(x + dx)}$$

Ми одержуємо отже:

$$\overrightarrow{(x + \delta x)_{x'}} + \overrightarrow{(y + \delta y)_{x'}} = \overrightarrow{\Delta x_{x'}} + \overrightarrow{\Delta y_{x'}} + \overrightarrow{(x + dx)}$$

або:

$$(x+\delta x) \,.\, cos\, d\tau + (y+\delta y) \,.\, sin\, d\tau = \Delta x \,.\, cos\, d\tau + \Delta y \,.\, sin\, d\tau + x + dx.$$

При помочи розважувань граничних і з поминенням величин другого порядку ми одержимо:

$$lim\ cos\, d\tau = 1, \quad lim\ sin\, d\tau = d\tau$$

$$x + \delta x + (y + \delta y) \,.\, d\tau = \Delta x + \Delta y \,.\, d\tau + x + dx$$

$\Delta y \,.\, d\tau$ опускаємо, отже:

$$\delta x + y \,.\, d\tau = \Delta x + dx$$

Ціле рівнання ділимо через ds

$$\frac{\delta x}{ds} + y \cdot \frac{d\tau}{ds} = \frac{\Delta x}{ds} + \frac{dx}{ds}$$

Але: $\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$, $lim\ \frac{\Delta x}{ds} = 1.$

Ми одержуємо:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{y}{R} + 1. \qquad 3)$$

Подібно випроваджуємо також:

$$\overrightarrow{(x+\delta x)_{y'}} + \overrightarrow{(y+\delta y)_{y'}} = \overrightarrow{\Delta x_{y'}} + \overrightarrow{\Delta y_{y'}} + \overrightarrow{(y+dy)}$$

або:

$$-(x+\delta x).sin\, d\tau + (y+\delta y).cos\, d\tau = -\Delta x.sin\, d\tau + \Delta y.cos\, d\tau + y + dy.$$

При помочи розважувань граничних ми одержуємо:

$-x.d\tau + \delta y = \Delta y + dy$; ділимо ціле рівнання через ds.

$$-x.\frac{1}{R} + \frac{\delta y}{ds} = \frac{\Delta y}{ds} + \frac{dy}{ds};\ lim\ \frac{\Delta y}{ds} = 0.$$

Отже:

$$\frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{R} \qquad 4)$$

Рівнання 3) і 4) є умовними ріжничковими рівнаннями для пересунень точок лінії кривої $\overline{\Gamma}$ на площі осий співрядних: $x—y$.

§. 3.

Відношення між кривою Γ а $\overline{\Gamma}$.

$$(d\bar{s})^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 \qquad 5)$$

Вставивши у рівнання 5) рівнання 3) і 4) одержимо:

$$d\bar{s} = ds \underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx}{ds} - \frac{y}{R} + 1\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} + \frac{x}{R}\right)^2}}_{\varkappa}$$

або: $d\bar{s} = ds \cdot \varkappa$

$$\bar{s} = \int \varkappa \cdot ds \qquad 6)$$

Відношення між: R і $\overline{R}$.

З фіґ. 2) одержимо: $\vartheta + d\bar{\tau} = d\tau + \vartheta + d\vartheta$

або: $d\bar{\tau} = d\tau + d\vartheta$, — ділимо через ds

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{d\tau}{ds} + \frac{d\vartheta}{ds};\ \text{але що:}\ ds = \frac{d\bar{s}}{\varkappa},$$

то маємо: $$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{\varkappa}{\bar{R}},$$

отже: $$\frac{\varkappa}{\bar{R}} = \frac{1}{\bar{R}} + \frac{d\vartheta}{ds} \qquad 7)$$

З рівнань 6) і 7) одержуємо через елімінування з них дуги s загальне природне рівнання (explicite): $\bar{R} = f(\bar{s})$.

§. 4.

Лінії кочення (Rollkurven) у співрядних природних. (Фіґ. 3.)

Крива Γ є стала крива лінія (Basiskurve) о природних співрядних R, s, по якій котиться крива Π о природних співрядних R_λ, s_λ; точка P остає непорушною на площі кривої Π, це значить: вона не зміняє свойого положення зглядом цеї кривої лінії. В даній хвилі є точка O спільна для обох кривих ліній.

Крива лінія $\bar{\Gamma}$ є власне лінією кочення (Rollkurve) о співрядних $\bar{R}$, $\bar{s}$.

Щоби найти рівнання цеї кривої лінії у природних співрядних, ми послугуємося рівняннями, найденими у попередних уступах.

Насамперед ми маємо умовні ріжничкові рівнання для непорушности точки P на площі кривої лінії Π; з рівнань 1) і 2) першого уступу ми одержуємо у тому випадку слідуючі умовні ріжничкові рівнання:

$$\frac{dx}{ds_\lambda} = \frac{y}{R_\lambda} - 1 \qquad 8)$$

$$\frac{dy}{ds_\lambda} = -\frac{x}{R_\lambda} \qquad 9)$$

Однак тому, що крива лінія Π котиться по Γ, точка P зміняє безустанно своє положення супроти цеї лінії. Ми одержимо отже умовні ріжничкові рівнання для пересунень точок лінії кривої $\bar{\Gamma}$ на площі сталої лінії Γ; з рівнань 3) і 4) другого уступу ми одержуємо у тому випадку слідуючі умовні ріжничкові рівнання:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \left(\frac{y}{-R}\right) + 1$$

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dy}{ds} + \left(\frac{x}{-R}\right)$$

або увільнивши рівнання від скобок ми одержимо:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} + \frac{y}{R} + 1 \qquad 10)$$

$$\frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} - \frac{x}{R} \qquad 11)$$

Тому, що крива лінія Π котиться по кривій Γ, мусить бути: $s = s_\lambda$, або $ds = ds_\lambda$.

Отже: $\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ds_\lambda}; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{ds_\lambda}.$

Тепер ми підставляємо рівнання 8) і 9) у рівнання 10) і 11); з цего слідує:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{y}{R_\lambda} - 1 + \frac{y}{R} + 1$$

або: $$\frac{\delta x}{ds} = y\left(\frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R}\right) = \frac{y}{Q} \qquad 12)$$

$$\frac{\delta y}{ds} = -\frac{x}{R_\lambda} - \frac{x}{R}$$

або: $$\frac{\delta y}{ds} = -x\left(\frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R}\right) = -\frac{x}{Q} \qquad 13)$$

бо: $$\frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R} = \frac{1}{Q} \qquad 14)$$

Як бачимо, то крива лінія $\bar{\Gamma}$ повстає кінетичною дорогою; вона є образом руху точки P на площі кривої Γ.

З рівнань 12) і 13) одержуємо:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= ds \cdot \frac{y}{Q} \\ \delta y &= -ds \cdot \frac{x}{Q} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{matrix} 12' \\ 13' \end{matrix}$$

З ріжничкової ґеометрії беремо взір:

$$(d\bar{s})^2 = (\delta y)^2 + (\delta x)^2 = (ds)^2\left\{\left(\frac{y}{Q}\right)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2\right\}$$

$$(d\bar{s})^2 = \left(\frac{ds}{Q}\right)^2 \cdot (x^2 + y^2)$$

або: $d\bar{s} = \frac{ds}{Q}\,\varrho$ гляди фіґ 3.

З цего одержуємо інтеґрал:

$$\bar{s} = \int \frac{\varrho}{Q} \cdot ds \qquad 15)$$

де сочинник: $\varkappa = \frac{\varrho}{Q}$.

Відношення між R і $\bar{R}$.

$$\Theta = \vartheta - \frac{\pi}{2}; \quad \text{отже: } d\Theta = d\vartheta.$$

$$\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{1}{R_1} + \frac{\sin\Theta}{\varrho} \qquad 16)$$

рівнання знане з природної ґеометрії. Рівнання 16) є умовне ріжничкове рівнання для непорушности точки P на площі кривої лінії Π.

На підставі рівнання 7) маємо:

$$\frac{\varkappa}{\bar{R}} = \frac{1}{R} - \frac{d\vartheta}{ds} \qquad 17)$$

Вставивши у рівнання 17) з рівнапня 16) вираз за $\frac{d\vartheta}{ds}$ ми одержимо:

$$\frac{\varkappa}{\bar{R}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} - \frac{\sin\Theta}{\varrho} = \frac{1}{Q} - \frac{\sin\Theta}{\varrho} \qquad 18)$$

Тому, що $\varkappa = \frac{\varrho}{Q}$, $\varrho = \varkappa . Q$, ми можемо рівнання 18) написати також у слідуючій формі:

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{1}{\varrho} - \frac{Q . \sin\Theta}{\varrho^2} \qquad 18')$$

Рівнання 15) і 18') є параметричні рівнання ліній кочення у загальному виді.

§. 5.

Тепер ми займемося лініями кривими, які носять назву епіцикльоїдальних; з них візьмемо під увагу цю ґрупу ліній епіцикльоїдальних, які повстають тоді, коли криві лінії Γ і Π є колами о ріжних промінях: $R_1 = r$, $R = R$. Точку P приймаємо на обводі кола Π. (Фіґ. 4.)

Точка M є своєчасно точкою стичности обох кіл, ω = кут кочення.

З рисунку бачимо, що $\overset{\frown}{MP} = \overset{\frown}{MP_0} = \sigma$, а $\sigma = 2r\Theta = R . \omega$.

Ми покористуємося формулами попереднього уступу; і так маємо: $d\bar{s} = \varkappa . ds = \frac{\varrho}{Q} . ds$, де вираз за Q одержимо з рівнання 14), а radius vector ϱ виражуємо сінусом кута Θ.

І так:

$$Q = \frac{R \,.\, r}{R + r} \tag{19}$$

$$\varrho = 2r \,.\, sin\,\Theta \tag{20}$$

$$ds = \varkappa \,.\, d\sigma \tag{21}$$

Але: $\sigma = 2r\ \Theta$, $d\sigma = 2r \,.\, d\Theta$, $\varkappa = \frac{\varrho}{Q}$. Вставивши повисші вирази у рівнання 21), ми одержимо:

$$d\bar{s} = \frac{4r(R+r)}{R} \,.\, sin\,\Theta \,.\, d\Theta \tag{22}$$

або: $$d\bar{s} = a \,.\, sin\,\Theta \,.\, d\Theta \tag{22'}$$

рівнання, у якому $a = \frac{4r \,.\, (R+r)}{R}$ є величиною знаною.

Ми беремо тепер під увагу рівнання 18')

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{1}{\varrho} - \frac{Q \,.\, sin\,\Theta}{\varrho^2},$$

яке пишемо у слідуючій формі:

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{\varrho - Q \,.\, sin\,\Theta}{\varrho^2} \tag{18''}$$

Підставивши у рівнання 18'') вирази з рівнань 19) і 20), ми одержимо:

$$\bar{R} = \frac{4r\,(R + r)}{R + 2r}\ \ sin\,\Theta \tag{23}$$

або: $$\bar{R} = b \,.\, sin\,\Theta \tag{23'}$$

рівнання, у якому: $b = \frac{4r\,(R + r)}{R + 2r}$ є величиною знаною.

Ріжничкове рівнання 22') дає нам по інтеґруванню слідуюче рівнання:

$$\bar{s} = a \,.\, cos\,\Theta + c \tag{24}$$

Рівнання 23') і 24) є параметричними рівнаннями лінії епіцикльоїдальної $\bar{\Gamma}$.

Поділивши рівнання 23') через b, а рівнання 24) через a, ми одержимо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\bar{s} - c}{a} &= cos\,\Theta \\ \frac{\bar{R}}{b} &= sin\,\Theta \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Степенуючи оба рівнання і додавши їх до себе, ми одержимо слідуюче альґебраічне рівнання епіцикльоїдальної $\bar{\Gamma}$ у природних співрядних:

$$\frac{(\bar{s}-c)^2}{a^2}+\frac{\bar{R}^2}{b^2}=1 \qquad 26)$$

З рівнань 25) і 26) ми доходимо до слідуючих заключень; по перше ми зауважуємо, що для $\Theta=0$, $\bar{R}=0$, ми маємо для дуги $\bar{s}$ Minimum:

$$\bar{s}=a+c$$

а для: $\Theta=\frac{\pi}{2}$, $\bar{R}=b$, ми одержуємо $\bar{s}=c$ (maximum).

Рахуючи дугу епіцикльоїдальної від її вершка (Scheitel), де $\Theta=\frac{\pi}{2}$, $\bar{s}=c=0$, ми одержимо слідуюче рівнання цеї кривої лінії:

$$\frac{\bar{s}^2}{a^2}+\frac{\bar{R}^2}{b^2}=1 \qquad 26')$$

Як бачимо рівнання 26') є схоже з рівнанням еліпси у співрядних Декарта.

Для $\Theta=0$, $\varrho=0$, $\bar{R}=0$ ми маємо острину (Spitze). Рахуючи дугу епіцикльоїдальної від цеї острини ми маємо: $\bar{s}=a+c=0$, отже: $c=-a$; тоді рівнання епіцикльоїдальної одержує такий вид:

$$\frac{(\bar{s}+a)^2}{a^2}+\frac{\bar{R}^2}{b^2}=1 \qquad 26'')$$

Не вдаючися у дальшу дискусію ліній кривих епіцикльоїдальних, яка у своїому дальшому перебігу має свій окремий інтерес і не входить у обсяг цеї праці, — ми задержимося ще лиш на відношенню між слідуючими величинами: radius-vector-ом $=\varrho$, та промінями осціляційних кіл: R і $\bar{R}$.

Ми маємо: $\varrho=2r\,.\,sin\,\Theta$

$$\bar{R}=b\,.\,sin\,\Theta=\frac{4r(R+r)}{R+2r}\,sin\,\Theta$$

або:

$$\bar{R}=\frac{2(R+r)}{R+2r}\quad\varrho=\mu\,.\,\varrho \qquad 27)$$

де:

$$\mu=\frac{2(R+r)}{R+2r} \qquad 28)$$

Рівнання 27) ми напишемо у іншій формі:

$$\bar{R} = \frac{2\left(1+\frac{r}{R}\right)}{1+2\frac{r}{R}} \quad \varrho \qquad 27')$$

На підставі повищих рівнань ми одержимо слідуючі вартости:

для: $R = \infty$, ми маємо: $\mu = 2$, $\bar{R} = 2\varrho$
$R = r$, $\mu = \frac{4}{3}$, $\bar{R} = 1{\cdot}25\,.\,\varrho$
$R = 0$, або $r = \infty$, „ „ $\mu = 1$, $\bar{R} = \varrho$ } 28)

Загально ми бачимо, що: $\bar{R} > \varrho$.

Для кута $\bar{\tau}$ ми маємо рівнання:

$$d\bar{s} = \bar{R}\ d\bar{\tau} \qquad 29)$$

або:
$$d\bar{\tau} = \frac{d\bar{s}}{\bar{R}} \qquad 30)$$

Для ліній епіцикльоїдальних ми одержимо:

$$\bar{\tau} = \int \frac{d\bar{s}}{\bar{R}} = \int \frac{a\,.\,sin\,\Theta\,.\,d\Theta}{b\,.\,sin\,\Theta} = \frac{a}{b} \int d\Theta \qquad 31)$$

рахуючи дугу епіцикльоїдальної від її вершка (Scheitel).

Отже: $\bar{\tau} = \frac{a}{b}\,.\,\Theta + c_1$

або: $\bar{\tau} = \frac{R+2r}{R}\,.\,\Theta + c_1 \qquad 32)$

§. 6.

Окремі випадки епіцикльоїдальних кривих.

Ми візьмемо під увагу три випадки, яким підлягають лінії епіцикльоїдальні:

випадок A) для: $R_\lambda = r = \infty$ евольвента кола
„ B) „ $R = \infty$ цикльоїда
„ C) „ $R = 0$.

Що до випадку C), то ми тут можемо відріжнити дві можливости; їх розгляд буде переведений у слідуючім уступі.

Випадок A). Коло о проміни $R_\lambda = r$ переходить у лінію пряму. Перекочуючи цю пряму по сталім колі Γ (фіг. 4) ми одержимо очевидно евольвенту цего кола.

Рівнання 26'') ми пишемо в експліцитовій формі; ми дістанемо отже:

$$\bar{R}^2 = -2\frac{b^2}{a}.\bar{s} - \frac{b^2}{a^2}\ \bar{s}^2.$$

для: $lim\, r = \infty$, ми маємо:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{r\to\infty}\frac{b^2}{a} &= \frac{4\left(\frac{R}{r}+1\right).R}{\left(\frac{R}{r}+2\right)^2} = R \\ \lim_{r\to\infty}\frac{b}{a} &= \frac{\frac{R}{r}}{\frac{R}{r}+2} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 34)$$

Узгляднивши формули 34) ми дістанемо природне рівнання евольвенти кола як слідує:

$$\bar{R}^2 = 2R.\bar{s} \qquad 35)$$

Очевидно, що $\bar{R} = \varrho$ гл. рівнання 28).

Випадок B). Коло стале Γ о проміню $= R$ переходить у лінію пряму. Коло Π котиться тоді по цій прямій і точка P на обводі цего кола творить криву лінію, знаною в літературі під назвою цикльоїди.

Покористуючися взорами з попереднього уступу ми одержимо для $R = \infty$:

$$R = 2\varrho \qquad \text{з рівнання 28)}$$

$$a = \frac{4r\left(1+\frac{r}{R}\right)}{1+2\frac{r}{R}} = 4r$$

$$b = 4r\left(1+\frac{r}{R}\right) = 4r$$

Отже: $a = b = 4r$.

Підставивши вартости за a і b у рівнання 23) і 24) ми дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} \bar{R} &= 4r.\sin\Theta \\ \bar{s} &= 4r.\cos\Theta \end{aligned}\right\} \qquad 36)$$

рахуючи дугу цикльоїди від її вершка (Scheitel).

З рівнань 36) ми випроваджуємо легко природне альґебраічне рівнання цикльоїди:

$$\bar{R}^2 + \bar{s}^2 = 16r^2 \qquad 37)$$

Як бачимо, рівнання 37) є схоже з рівнанням кола у співрядних Декарта.

$$\bar{\tau} = \frac{a}{b}\ \Theta + c_1 = \Theta + \frac{\pi}{2} \qquad 38)$$

бо для $\Theta = 0$, $c_1 = \frac{\pi}{2}$.

§. 7.

Тепер ми беремо під увагу випадок, що $R = 0$, це значить, що промінь кола сталого (des ruhenden Kreises) Γ стремить до зера і це коло переходить у точку. (Фіґ. 4.)

Цей випадок становить власне головний предмет нашої праці.

Перш за всего, оперуючи формулами, взятими із загального трактату про лінії епіцикльоїдальні, ми доходимо до висліду, що у тому випадку лінія епіцикльоїдальна не істнує, або інакше дефінюючи, вона переходить у точку (фіґ. 5).

Бо дійсно, у тому випадку коло стале Γ (фіґ. 4) переходить для $R = 0$ у точку M. Приймивши отже початок дуги епіцикльоїдальної у точці M на обводі рухомого кола Π ми з фіґ. 5 бачимо, що при оборотї цего кола довкруги точки M принята точка залишується все на одному і тому самому місці, це значить, що образом нашої кривої лінії є власне ця точка M.

Осередок рухомого кола Π робить дорогу по обводі кола, якого осередком є точка M, а промінем промінь рухомого кола $\Pi = r$.

На підставі рівнань 28) мусить бути для $R = 0$, $\mu = 1$, $\bar{R} = \varrho$. У тому випадку $\bar{R} = 0$, $\varrho = 0$.

На основі формули: $R \,.\, \omega = 2r\Theta$ ми мусимо прийти до висліду, що коли промінь сталого кола $\Gamma = R$ є рівний зеру, то також і кут Θ мусить зовсім зникнути; з цего слідує, що і $sin\,\Theta = 0$, а також $\bar{R} = b \,.\, sin\,\Theta = 0$ (23'), $a : \bar{s} = a \quad cos\,\Theta = \infty$ (24); також: $\varrho = 2r \,.\, sin\,\Theta$ (20) мусить бути рівний зеру.

Для: $R = 0$ $a = \infty$, бо:

$$\lim_{R \to 0} a = \lim_{R \to 0} \frac{4r(R+r)}{R} = \infty;$$

$$\bar{\tau} = \int \frac{d\bar{s}}{\bar{R}} = \frac{a}{b}\Theta + c_1 \qquad \text{гл. рівнання 31), 32)}$$

а що: $d\bar{s} = a \,.\, sin\,\Theta \,.\, d\Theta$ 22'), то для $R = 0$, $a = \infty$, $sin\,\Theta = 0$, $\bar{R} = 0$, $c_1 = 0$, $b = 0$,

отже: $\bar{\tau} = \infty \cdot 0$ неозначена форма.

На основі повисше сказаного ми приходимо до слідуючого твердження:

Коли промінь R сталого кола Γ стремить до зера, то — принявши за початок дуги кривої лінії точку M, яку уважаємо образом здеґенерованого кола Γ, — то тоді образом цеї кривої лінії є власне ця точка M.

Однак у тому випадку, коли ми за початок кривої лінії оберемо іншу точку на обводі кола Π відмінну від точки M, то тоді образом псевдоепіцикльоїдальної лінії буде коло о проміни: $\bar{R} = \varrho$. (Фіґ. 6.)

Бо дійсно, коли обертатимемо коло Π довкруги точки M, то тоді точка P_0, обрана нами за початок дуги нашої кривої лінії $\bar{\Gamma}$, є завжди однаково віддалена від точки M.

На основі рівнань 28) ми дістанемо для $R = 0$ такі вартости:

$$\mu = \frac{2(R+r)}{R+2r} = 1; \quad \bar{R} = \varrho.$$

З цего слідує, що коли у випадку $R = 0$ ми зачнемо рахувати лінію епіцикльоїдальну від кождої іншої точки на обводі кола Π, яка не накривається з точкою M цего самого кола, то лінія псевдо-епіцикльоїдальна $\bar{\Gamma}$, яку одержимо, є колом о проміни рівнім ϱ, а тим самим рівнім $\bar{R}$, як променеви цего самого осціляційного кола.

§. 8.

Зовсім інакше однак представляється справа тоді, коли приймемо, що коло Π о проміни $= r$ обертається само у собі, це значить, коли приймемо, що кожда точка цего кола виконує рух довкола його осередка. У випадку, коли цей осередок займає на площі $x - y$ все однакове положення, а точка M лежить на тім колі, ми очевидно одержимо рівнання власне цего самого кола.

До цего висліду ми можемо рахунком дійти теж в цей спосіб:

Ми уявляємо собі загально, що коло Π не лише котиться на підставовім колі Γ, але заразом обертається „само у собі“, це значить, що кожда точка цего кола виконує два рухи: один рух, це рух оборотовий довкруги осередка цего кола, а другий рух, це рух кочення (rollende Bewegung). (Фіґ. 7.)

Ми означуємо s_λ дугу кола Π, яка є вислідом руху кочення (roll. Bew.), а σ дугу цего самого кола, яку отримуємо в наслідок руху оборотового „самого у собі". Підставове коло означуємо буквою Γ, рухоме коло буквою Π, а нову вислідну лінію руху оборотового і руху кочення буквою $\bar{\Gamma}$. (Фіґ. 7.)

На підставі повисше сказаного ми отримаємо отже:

$$\left.\begin{aligned} s &= s_\lambda \\ s' &= s_\lambda + \sigma \end{aligned}\right\} \qquad 39)$$

Точка $P(x, y)$ є нерозлучно звязана з колом Π, отже мусить бути:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds'} &= \frac{y}{R_\lambda} - 1 \\ \frac{dy}{ds'} &= -\frac{x}{R_\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad 40)$$

Рівнання 40) є тотожні з рівняннями 1) і 2) першого уступу.

Але: $$ds' = ds_\lambda + d\sigma = ds + d\sigma \qquad 41)$$

З цего слідує:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \left(\frac{y}{R_\lambda} - 1\right) \quad (ds + d\sigma) \\ dy &= -\frac{x}{R_\lambda} \,.\, (ds + d\sigma) \end{aligned}\right\} \qquad 42)$$

Але супроти кола Γ точка P зміняє постійно своє положенє; в тому випадку ми покористуємося умовними ріжничковими рівняннями 3), 4) другого уступу для пересунень точок кривої лінії $\bar{\Gamma}$ на площі кола Γ.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= \frac{dx}{ds} + \left(\frac{y}{R} + 1\right) \\ \frac{\delta y}{ds} &= \frac{dy}{ds} - \frac{x}{R} \end{aligned}\right\} \text{ гл. рівн. 10), 11)} \qquad 43)$$

Або:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= dx + \left(\frac{y}{R} + 1\right) \quad ds \\ \delta y &= dy - \frac{x}{R} \quad ds \end{aligned}\right\} \qquad 44)$$

Покористуючися рівняннями 42) ми одержимо:

$$\delta x = y\left(\frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R}\right) . ds + \left(\frac{y}{R_\lambda} - 1\right) . d\sigma$$

або:

$$\delta x = \frac{y}{Q} . ds + \left(\frac{y}{R_\lambda} - 1\right) \quad d\sigma \qquad 45)$$

Аналоґічно маємо:

$$\delta y = -\frac{x}{Q} \quad ds - \frac{x}{R_\lambda} \quad d\sigma \tag{46}$$

де: $Q = \frac{R \,.\, r}{R + r}$; для: $R = o$, також: $Q = o$.

У відсутности руху кочення, це є для $R = o$, ми маємо до діла тоді лише з рухом оборотовим; отже: $s_\lambda = s = o$; в тому випадку рівнання 45) і 46) одержують слідуючий вид:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \left(\frac{y}{R_\lambda} - 1\right) \quad d\sigma \\ \delta y &= -\frac{x}{R_\lambda} \quad d\sigma \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

В тому випадку отже осередок кола Π займає на площі x—y все однакове положення. Як сказано, вислідною руху оборотового мусить бути коло. Принявши точку P на обводі кола Π, ми дістанемо як вислідну руху оборотового цеї точки це саме коло Π.

На підставі рівнання 5) третого уступу ми маємо:

$$(d\bar{s})^2 = (\delta x)^2 + \delta y)^2 = (d\sigma)^2 \left[\left(\frac{y}{R_\lambda} - 1\right)^2 + \frac{x^2}{R_\lambda^2}\right] \tag{48}$$

Ми одержимо отже:

$$\bar{s} = \int \frac{d\sigma}{R_\lambda} \sqrt{\varrho^2 - 2 R_\lambda \,.\, y + R_\lambda^2} \tag{49}$$

бо: $\varrho^2 = x^2 + y^2$.

Принявши точку P на обводі кола Π ми маємо:
$R_\lambda = r$, $\varrho = 2r \quad sin\,\theta$, $y = \varrho \quad sin\,\theta = 2r \quad sin^2\theta$ (гл. фіґ. 8).

Вставивши повисші вартости у рівнання 49), ми одержимо:

$$\bar{s} = \int \frac{d\sigma}{r} \sqrt{4r^2 \quad sin^2\theta - 2r \,.\, 2r \,.\, sin^2\theta + r^2} = \int d\sigma \tag{50}$$

для: $\sigma = 2r\,\theta$, $d\sigma = 2r \quad d\,\theta$

тоді: $\bar{s} = 2r \int d\,\theta = 2r\,\theta + C$ 51)

Рівнання 51) власне і є рівнанням кола Π у співрядних природних. (Фіґ. 8.)

У параметричнім представленню маємо два рівнання кола:

$$\begin{aligned} y &= 2r \quad sin^2\theta \\ x &= r \;.\; sin\,2\theta \\ x^2 + y^2 &= \varrho^2 = 4r^2 \,.\, sin^2\theta. \end{aligned}$$

§. 9.

В уступі семім ми показали, що у випадку $R = O$, коло Π обертається довкруги точки M (фіґ. 5 і 6) і точка P_0 на обводі цего кола творить нове коло $\overline{\Gamma}$ о проміню $= \varrho$; у випадку, коли P_0 накривається з точкою M, коло $\overline{\Gamma}$ переходить у тую саму точку M.

Тепер ми приймемо, що не лише коло Π обертається довкруги точки M, але і точка P_0 обертається довкруги осередка цего кола Π (фіґ. 9). Іншими словами, коло Π обертається „само у собі", це є: точка P_0 обертається довкруги осередка цего кола з такою самою скоростю, що пряма MO' довкруги точки M. Це значить, що кут обороту ω є для кождого положення цего кола рівний кутови осередочному кола Γ' о проміни $= r$, по обводі якого порушається осередок оборотового кола. Цей осередочний кут числимо від додатного напряму оси y-онів підставового укладу осий співрядних $x-y$.

Навязуючи до попередних розважувань в уступах першім і другім цеї праці, ми беремо насамперед під увагу два уклады осий співрядних; один із них, означений римською цифрою (I), це кождочасний уклад осий співрядних, якого початок лежить у точці O'. Початок другого укладу осий співрядних лежить у точці M, а вісь y-онів є для обох системів спільною. Супроти кола Γ' точка P постійно зміняє своє положення на площі. Покористуючися отже укладом (I), ми дістанемо слідуючі умовні ріжничкові рівнання (з рівнань 3 і 4 другого уступу):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= \frac{dx}{ds} - \frac{y_1}{R} + 1 \\ \frac{\delta y}{ds} &= \frac{dy}{ds} - \frac{x_1}{R} \end{aligned}\right\} \qquad 52)$$

δx, δy — є пересуненнями точки P на площі $x' - y'$.

Точка P лежить на обводі кола Π, отже ми одержимо для непорушности цеї точки на площі названого кола слідуючі умовні ріжничкові рівнання:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{y_2}{R} - 1 \\ \frac{dy}{ds} &= -\frac{x_2}{R} \end{aligned}\right\} \qquad 53)$$

Рівнання 53) одержуємо з рівнань 1) і 2) першого уступу. x_2, y_2 — належать до укладу осий співрядних, означеного римською цифрою (II).

А що: $R = r$, то з фіґ. 9 одержуємо:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= r\left(1 - 2\,.\,sin^2\frac{\varphi}{3}\right) \\ y_2 &= 2r\,.\,sin^2\frac{\varphi}{3} \\ x_1 &= r\,.\,cos\left(90 - \frac{2\varphi}{3}\right) = r\,.\,sin\ \frac{2\varphi}{3} \\ x_2 &= 2r\,.\,sin\frac{\varphi}{3}\,.\,cos\frac{\varphi}{3} = r\,.\,sin\ \frac{2\varphi}{3} \end{aligned}\right\} \quad 54)$$

Отже: $x_1 = x_2 = r\,.\,sin\ \frac{2\varphi}{3}$;

Вставивши рівнання 53) у рівнанне 52), одержимо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= \frac{y_2}{R} - 1 - \frac{y_1}{R} + 1 = \frac{1}{r}\,(y_2 - y_1) \\ \frac{\delta y}{ds} &= -\frac{2x}{r} \end{aligned}\right\} \quad 55)$$

Вставивши рівнання 54) у рівнання 55), дістанемо:

$$y_2 - y_1 = 2r\,.\,sin^2\frac{\varphi}{3} - r + 2r\,.\,sin^2\frac{\varphi}{3}$$

Отже:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= 4\,sin^2\ \frac{\varphi}{3} - 1 \\ \frac{\delta y}{ds} &= -\,2\,sin\,\frac{2\varphi}{3} = -\,4\,.\,sin\frac{\varphi}{3}\,.\,cos\ \frac{\varphi}{3} \end{aligned}\right\} \quad 56)$$

Для елємента дуги нової кривої лінії, яку в описаний вище спосіб одержано, маємо слідуючий вираз із ріжничкової ґеометрії (гл. рівн. 5 з третого уступу):

$$ds = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \quad 57)$$

З рівнань 56) маємо:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= (4\,sin^2\ \frac{\varphi}{3} - 1)\,.\,ds \\ \delta y &= -\,4\,.\,sin\ \frac{\varphi}{3}\,.cos\ \frac{\varphi}{3}\,.\,ds \end{aligned}\right\} \quad 56')$$

з фіґ. 9 відчитуємо: $s = r\,.\,\omega = r\ \frac{2\varphi}{3}$ 58)

З цего слідує: $(\delta x)^2 + (\delta y)^2 = 16\,.\,sin^4\left(\frac{\varphi}{3}\right) - 8\ \ sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) + 1 +$

$$+ 16\,sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)\ \ \left[1 - sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right]$$

або: $(\delta x)^2 + (\delta y)^2 = 8 \,.\, sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) + 1$ 59)

59) вставляємо у 57):

$$d\bar{s} = \sqrt{8 \quad sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) + 1} \quad \frac{2r}{3} \quad d\varphi$$

Отже: $\bar{s} = \frac{2r}{3} \int \sqrt{8 \,.\, sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) + 1} \,.\, d\varphi$ 60)

Рівнанне 60) є параметричне рівнанне для дуги $\bar{s}$ нової кривої лінії, яку в цей спосіб одержуємо і яку з огляду на її форму і подібність до Паскалевої лінії назвемо лінією слимаковатою.

§. 10.

Конструкція і дискусія слимаковатої лінії у співрядних Декарта (фіґ. 10).

З фіґ. 9 дістаємо слідуючі відношення:

$$\varphi = \frac{3}{2}\omega, \text{ або: } \frac{\varphi}{3} = \frac{\omega}{2}$$

Полярне рівнання (Polargleichung) слимаковатої лінії звучить:

$$\varrho = 2r \,.\, sin\,\frac{\varphi}{3} \qquad 61)$$

В параметричнім представленню маємо:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho \quad cos\,\varphi \\ y &= \varrho \quad sin\,\varphi \end{aligned}\right\} \qquad 62)$$

також: $x^2 + y^2 = \varrho^2 = 4r^2 \quad sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)$

або:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2r \quad sin\,\frac{\varphi}{3} \quad cos\,\varphi \\ y &= 2r \quad sin\,\frac{\varphi}{3} \quad sin\,\varphi \end{aligned}\right\} \qquad 62')$$

Конструкція слимаковатої лінії.

До конструкції слимаковатої лінії ми послугуємося полярними рівняннями: $\varrho = 2r \,.\, sin\,\frac{\varphi}{3}$, або: $\varrho = 2r \,.\, sin\,\frac{\omega}{2}$; ми кладемо $r = 1$ і шукаємо для ріжних вартостий за „ω“ відповідних „radius-vector“-ів $= \varrho$. В цей спосіб ми можемо уложити на примір таку табличку для $r = 1$. $\varrho = 2 \,.\, sin\,\frac{\omega}{2}$, $\varphi = \omega + \frac{\omega}{2}$;

для: $\omega_1 = 30^0$, $\varphi_1 = 45^0$, $\varrho_1 = 0{\cdot}50764$,
$\omega_2 = 60^0$, $\varphi_2 = 90^0$, $\varrho_2 = 1$,
$\omega_3 = 90^0$, $\varphi_3 = 135^0$, $\varrho_3 = 1{\cdot}41422$,
$\omega_4 = 120^0$, $\varphi_4 = 180^0$, $\varrho_4 = 1{\cdot}73206$,
$\omega_5 = 150^0$, $\varphi_5 = 225^0$, $\varrho_5 = 1{\cdot}93186$,
$\omega_6 = 180^0$, $\varphi_6 = 270^0$, $\varrho_6 = 2$,

від $\omega_6 = 180^0$ до $\omega = 360^0$ іде слимаковата лінія симетрально. (У фіґ. 10 ми узяли $r = 2{\cdot}5$ cm.)

Дискусія слимаковатої лінії:

Ми беремо під увагу рівнання 62).

$$\left.\begin{aligned} dx &= -\varrho \,.\, sin\,\varphi \,.\, d\varphi + cos\,\varphi \,.\, d\varrho \,.\, d\varphi \\ dy &= \varrho \,.\, cos\,\varphi \,.\, d\varphi + sin\,\varphi \,.\, d\varrho \,.\, d\varphi \end{aligned}\right\} \quad 63)$$

Отже: $$\left. y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\varrho \,.\, cos\,\varphi + sin\,\varphi \,.\, d\varrho}{cos\,\varphi \,.\, d\varrho - \varrho \,.\, sin\,\varphi} \right\} \quad 64)$$

Але: $\varrho = 2r \,.\, sin\,\frac{\varphi}{3}$, $d\varrho = \frac{2}{3} \,.\, r \,.\, cos\,\frac{\varphi}{3} \,.\, d\varphi = \frac{\varrho}{3} \,.\, ctg\,\frac{\varphi}{3} \quad d\varphi$

З цего слідує: $$y' = \frac{\varrho \;\; cos\,\varphi + sin\,\varphi \;\; \frac{1}{3} \;\; \varrho \;\; ctg\,\frac{\varphi}{3}}{cos\,\varphi \;\; \frac{1}{3} \;\; \varrho \;\; ctg\,\frac{\varphi}{3} - \varrho \;\; sin\,\varphi}$$

або: $$y' = \frac{3 \;\; cos\,\varphi \;\; sin\,\frac{\varphi}{3} + sin\,\varphi \,.\, cos\,\frac{\varphi}{3}}{cos\,\varphi \;\; cos\,\frac{\varphi}{3} - 3 \,.\, sin\,\varphi \,.\, sin\,\frac{\varphi}{3}} \quad 65)$$

a) Maxima i Minima.

Для $y' = 0$ маємо: $$y' = \frac{3 + tg\,\varphi \,.\, cotg\,\frac{\varphi}{3}}{cotg\,\frac{\varphi}{3} - 3 \,.\, tg\,\varphi} \quad 65')$$

Отже мусить бути: $$3 + tg\,\varphi \,.\, cotg\,\frac{\varphi}{3} = 0$$

або: $$3 \,.\, tg\,\frac{\varphi}{3} + tg\,\varphi = 0$$

$$tg\,\varphi = \frac{3 \;\; tg\,\frac{\varphi}{3} - tg^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)}{1 - 3 \;\; tg^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)}$$

З цего слідує: $3 \cdot tg \frac{\varphi}{3} = \frac{tg^3\left(\frac{\varphi}{3}\right) - 3 \cdot tg\left(\frac{\varphi}{3}\right)}{1 - 3 \cdot tg^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)}$

$$3 - 9 \quad tg^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) = tg^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) - 3$$

Отже: $tg \frac{\varphi}{3} = \pm \sqrt{\frac{3}{5}} = \pm 0{\cdot}7746 = tg\left(\pi - \frac{\varphi}{3}\right)$

$$\varphi_1 = 113^0\ 17'\ 04{\cdot}5''$$
$$\varphi_2 = 66^0\ 42'\ 55{\cdot}5''$$

Слимаковата лінія має отже два maxim-a, де $y' = 0$, $tg\bar{\tau} = 0$; ці дві точки мають супроти оси y-онів симетральне положення.

Але: $y' = 0$ також тоді, коли у формулі 65) чисельник є рівний зеру.

Отже: $3 \cdot cos\ \varphi \cdot sin \frac{\varphi}{3} + sin\ \varphi \cdot cos \frac{\varphi}{3} = 0$

оба члени цего рівнання мусять бути рівні зеру; це стається тоді, коли $\varphi = 270^0$, бо дійсно, $cos\ 270^0 = 0$,

$$cos \frac{270}{3} = 0,$$

$$sin \frac{270}{3} = 1,$$

$$sin\ 270^0 = -1.$$

Для $\varphi = 270^0$, ордината y осягає своє minimum; ми маємо:

$$y = 2r \quad sin \frac{\varphi}{3} \quad sin\ \varphi$$

для: $\varphi = 270^0$, $y = y_{min} = -2r$

$\varphi = 90^0$, $y = r = \varrho$ гл. формули: 61, 62'.

$y' = 0$ також для: $\varphi = 0$ і для $\varphi = 540^0$, це значить, що у точці M вісь x-сів є стичною кривої лінії (дві стичні накриваються).

Ми ще завважуємо, що для: $\varphi = 90^0$, $tg\bar{\tau} = y' = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, а для: $\varphi = 450^0$, $tg\bar{\tau} = +\frac{\sqrt{3}}{3}$, отже: $\bar{\tau} = 30^0$, згл.: $\bar{\tau} = 150^0$.

Точка P_2 є подвійною точкою (Doppelpunkt) і крива лінія має в тій точці дві стичні.

Слимаковата лінія має 4 особливі точки, для яких: $y' = tg\bar{\tau} = \infty$, це є такі точки, у яких стичні ідуть рівнобіжно до оси y-онів.

З рівнання 65') одержуємо:

$$cotg\ \frac{\varphi}{3} - 3 \quad tg\ \varphi = 0$$

або: $$tg^4\left(\frac{\varphi}{3}\right) - 4 \quad tg^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) + \frac{1}{3} = 0 \qquad 66)$$

Рівнання 66) є рівнанням 4-ої степени.

З цего слідує: $$tg\ \frac{\varphi}{3} = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{\frac{11}{3}}} \qquad 67)$$

β) Промінь осціляційного кола слимаковатої лінії.

I. Особливий випадок: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Покористуємося формулами 61) і 62)

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho \quad cos\ \varphi \\ y &= \varrho \quad sin\ \varphi \end{aligned}\right\} \qquad 62)$$

$$\varrho = 2r \quad sin\ \frac{\varphi}{3} \qquad 61)$$

$$dx = -\varrho\ .\ sin\ \varphi\ .\ d\varphi + cos\ \varphi\ .\ d\varrho$$
$$dy = \varrho\ .\ cos\ \varphi\ .\ d\varphi + sin\ \varphi\ .\ d\varrho$$
$$d\varrho = \frac{2r}{3} \quad cos\ \frac{\varphi}{3} \quad d\varphi$$

для: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $d\varrho = \frac{r\sqrt{3}}{3} \quad d\varphi$, $\varrho = r$, $d^2\varrho = -\frac{r}{9} \quad d\varphi^2$

$$dx = -r\ .\ d\varphi,\ dy = \frac{r\sqrt{3}}{3} \quad d\varphi$$

$$d^2x = -\varrho \quad cos\ \varphi \quad d\varphi^2 - 2 \quad sin\ \varphi \quad d\varphi \quad d\varrho + cos\ \varphi \quad d^2\varrho$$
$$d^2y = -\varrho \quad sin\ \varphi \quad d\varphi^2 + 2 \quad cos\ \varphi \quad d\varphi \quad d\varrho + sin\ \varphi \quad d^2\varrho$$

для: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $d^2x = -2 \quad d\varphi \quad d\varrho$

$$d^2y = -\varrho\ .\ d\varphi^2 + d^2\varrho$$

або: $$d^2x = -\frac{2r\sqrt{3}}{3} \quad d\varphi^2$$

$$d^2y = -r \quad d\varphi^2 - \frac{r}{9} \quad d\varphi^2$$

$$y'' = \frac{dx\ .\ d^2y - dy\ .\ d^2x}{(dx)^3} = \frac{\frac{10}{9}\ .\ r^2\ .\ d\varphi^3 + \frac{2}{3}\ .\ r^2\ .\ d\varphi^3}{r^3 \quad d\varphi^3}$$

$$y'' = -\frac{16}{9r};\ y' = tg\,\tau = \frac{dy}{dx} = -\frac{r\sqrt{3}}{3r} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad 68)$$

для $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\bar{R} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{3}{9}\right)^3}\ 9r}{16} = \frac{r\sqrt{3}}{2} \qquad 69)$$

або: $$\bar{R} = r \quad cos\ 30^0 \qquad 69')$$

З рівнання 68) слідує, що для: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\bar{\tau} = 150^0$.

Твердженнє: Стична у точці P_2 для $\varphi = \frac{\pi}{2}$ перетинає криву лінію на оси x-сів в точці N (фіґ. 10). Друга стична перетинає цю саму криву лінію по другому боці оси y-онів теж на оси x-сів; вісь y-онів є для обох точок пересічи осию симетрії.

Доказ: У трикутнику рівнобічнім $MO'P_2$ висота $\overline{P_2L}$ є рівна променеви осціляційного кола $\bar{R}$ для точки P_2 слимаковатої лінії (фіґ. 10).

Для $\varphi = 360^0$, $x = \varrho = 2r\ .\ sin\ \frac{\varphi}{3} = 2r\ .\ sin\ 60^0 = \underline{r\sqrt{3}}$

отже: $$tang\ \bar{\tau}' = \frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

З рівнання 68) маємо: для $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$tang\ \bar{\tau} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ або: } tang\ \bar{\tau} = -\ tg\ (180 - \bar{\tau}')$$

Також: $\sphericalangle\ MP_2L = \sphericalangle\ P_2NM$

А що: $\sphericalangle\ MP_2L = 30^0$, то також
$\sphericalangle\ P_2NM = 30^0$

отже: $$tg\ 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} = tg\ \tau'; \quad \tau' = 30^0$$

а: $\bar{\tau}' = 150^0$.

Нота: Формулу 69) ми можемо одержати також в слідуючий спосіб:

$$y'' = \frac{dx\ .\ d^2y - dy\ .\ d^2x}{(dx)^3} = \frac{\varrho\ .\ d\varphi\ (\varrho d\varphi^2 - d^2\varrho) + d\varrho\ .\ 2d\varrho\ .\ d\varphi}{-\ \varrho^3\ d\varphi^3}$$

отже: $$y'' = \frac{\varrho^2\ .\ d\varphi^3 - \varrho\ .\ d\varphi\ .\ d^2\varrho + 2d\varrho^2\ .\ d\varphi}{-\ \varrho^3\ \ d\varphi^3}$$

$$\bar{R} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = -\frac{\left[1 + \left(\frac{d\varrho}{\varrho\ .\ d\varphi}\right)^2\right]^{3/2} .\ \varrho^3 \quad d\varphi^3}{\varrho^2 d\varphi^3 - \varrho\ .\ d\varphi\ .\ d^2\varrho + 2 \quad d\varrho^2\ .\ d\varphi}$$

$$\overline{R} = \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 - \varrho \cdot \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}} = \frac{(12 \cdot \varrho^2)^{3/2}}{27\left(\varrho^2 + \frac{2}{3}\varrho^2 + \frac{\varrho^2}{9}\right)}$$

або: $$\overline{R} = \frac{3 \cdot \varrho \cdot \sqrt{12}}{12} = \varrho \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varrho = 2r \ \sin\frac{\varphi}{3}, \text{ для: } \varphi = \frac{\pi}{2}, \ \varrho = r$$

Отже: $\overline{R} = r\frac{\sqrt{3}}{2} = r \ \cos 30^0$, цей самий вислід, що у формулах 69, 69'.

II. Загальний випадок:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\left(\frac{dy'}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)} \qquad 70)$$

$$y' = \frac{3 \cdot \cos\varphi \ \sin\frac{1}{3}\varphi + \sin\varphi \cdot \cos\frac{1}{3}\varphi}{\cos\varphi \cdot \cos\frac{1}{3}\varphi - 3 \cdot \sin\varphi \ \sin\frac{1}{3}\varphi} = \frac{B}{A} \qquad \text{гл. форм. 65)}$$

$$\frac{dy'}{d\varphi} = \frac{1}{A^2}\left\{ A\left(\cos\varphi \ \frac{1}{3} \ \cos\frac{1}{3}\varphi - 3 \cdot \sin\frac{1}{3}\varphi \cdot \sin\varphi + \right.\right.$$

$$+ \cos\frac{1}{3}\varphi \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin\frac{1}{3}\varphi\Big) - B\left(-\cos\varphi \cdot \frac{1}{3}\sin\frac{1}{3}\varphi - \right.$$

$$\left.\left. - \cos\frac{1}{3}\varphi \cdot \sin\varphi - 3 \cdot \sin\varphi \cdot \frac{1}{3} \cdot \cos\frac{1}{3}\varphi - 3 \cdot \sin\frac{1}{3}\varphi \ \cos\varphi\right)\right\}$$

Або: $$\frac{dy'}{d\varphi} = \frac{1}{A^2}\left\{ A\left(2\cos\varphi \cdot \cos\frac{1}{3}\varphi - \frac{10}{3} \cdot \sin\frac{1}{3}\varphi \cdot \sin\varphi\right) + \right.$$

$$\left. + B\left(2\sin\varphi \cdot \cos\frac{1}{3}\varphi + \frac{10}{3}\sin\frac{1}{3}\varphi \cdot \cos\varphi\right)\right\}$$

Отже: $$\frac{dy'}{d\varphi} = \frac{A.C + B.D}{A^2} = \frac{A.\frac{dB}{d\varphi} + B.\frac{dA}{d\varphi}}{A^2} \qquad 71)$$

A, B, C, D є функціями φ.

$$\left.\begin{aligned} A &= \cos\varphi \,.\, \cos\frac{1}{3}\varphi - 3 \;\; \sin\varphi \,.\, \sin\frac{1}{3}\varphi \\ B &= 3\cos\varphi \,.\, \sin\frac{1}{3}\varphi + \sin\varphi \,.\, \cos\frac{1}{3}\varphi \\ C &= 2\cos\varphi \,.\, \cos\frac{1}{3}\varphi - \frac{10}{3}\sin\frac{1}{3}\varphi \,.\, \sin\varphi = \frac{dB}{d\varphi} \\ D &= 2\,.\,\sin\varphi \,.\, \cos\frac{1}{3}\varphi + \frac{10}{3}\sin\frac{1}{3}\varphi \,.\, \cos\varphi = -\frac{dA}{d\varphi} \end{aligned}\right\} \quad 72)$$

$$x = 2r \,.\, \sin\frac{1}{3}\varphi \,.\, \cos\varphi$$

$$dx = \frac{2r}{3}\left(\cos\varphi \,.\, \cos\frac{1}{3}\varphi - 3\,.\,\sin\frac{1}{3}\varphi \,.\, \sin\varphi\right) = \frac{2r}{3} A \,.\, d\varphi$$

отже: $$y'' = \frac{3\,(A \,.\, C + B \,.\, D)}{2r \,.\, A^3}; \quad y' = \frac{B}{A}; \qquad 73)$$

$$\overline{R} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{2r(A^2 + B^2)^{3/2}}{3\,(AC + BD)} \qquad 74)$$

Окремі випадки: для: $\varphi = 90^0$, $A = -\frac{3}{2}$,

$$B = +\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad C = -\frac{10}{6}, \quad D = +\sqrt{3};$$

$$\overline{R} = \frac{2r\sqrt{\left(\left(\frac{9}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\right)^3}}{3\left(\frac{3}{2} \;\; \frac{10}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \,.\, \sqrt{3}\right)} = \frac{r\sqrt{3}}{2} = r \,.\, \cos 30^0$$

Для: $\varphi = 0^0$, $A = +1$, $B = 0$, $C = +2$, $D = 0$, $\overline{R} = \frac{r}{3}$;

Для: $\varphi = \pi$, $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $C = -1$, $D = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$$\overline{R} = \frac{7r\sqrt{7}}{12}.$$

Для: $\varphi = 2\pi$, $A = -\frac{1}{2}$, $B = +\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $C = -1$, $D = +\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$$\overline{R} = \frac{7r\sqrt{7}}{12};$$

Для: $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ (270^0), $A = +3$, $B = 0$, $C = +\frac{10}{3}$, $D = 0$,

$$\overline{R} = \frac{9}{5} \,.\, r.$$

γ) Дуга слимаковатої лінії.

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2} \qquad 75)$$

але: $y' = \frac{B}{A}$, $dx = \frac{2r\,A}{3} \cdot d\varphi$

Отже: $s = \int \sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}} \cdot \frac{2r\,A}{3} \cdot d\varphi = \frac{2r}{3} \int \sqrt{A^2 + B^2}\ d\varphi$

$C = 0.$

Але:

$$A^2 = \cos^2\varphi \cdot \cos^2\tfrac{1}{3}\varphi + 9\sin^2\varphi \cdot \sin^2\tfrac{1}{3}\varphi - 6 \cdot \cos\varphi \cdot \cos\tfrac{\varphi}{3} \cdot \sin\varphi \cdot \sin\tfrac{\varphi}{3}$$

$$B^2 = 9\cos^2\varphi \cdot \sin^2\tfrac{1}{3}\varphi + \sin^2\varphi \cdot \cos^2\tfrac{1}{3}\varphi + 6 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\tfrac{1}{3}\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \cos\tfrac{1}{3}\varphi$$

Отже: $A^2 + B^2 = 9\ \sin^2\frac{1}{3}\varphi + \cos^2\frac{1}{3}\varphi = 8 \cdot \sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1.$

З цего слідує:

$$s = \frac{2r}{3} \int \sqrt{8\sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1} \cdot d\varphi \qquad 76)$$

Як бачимо, рівнанне 76) є тотожне з рівнанням 60) попереднього уступу.

δ) Параметричне представленне слимаковатої лінії для природних співрядних.

Рівнання 74) звучить: $\overline{R} = \frac{2r\,(A^2 + B^2)^{3/2}}{3\,(AC + BD)}$

Підставивши у цьому рівнанню за A, B, C, D їх вирази з рівнань 72), ми одержимо:

$$\left.\begin{aligned} \overline{R} &= \frac{r}{3} \frac{(8\sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1)^{3/2}}{(4\sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1)} \\ \text{також:}\quad s &= \frac{2r}{3} \int \sqrt{8\sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1} \cdot d\varphi \end{aligned}\right\} \qquad 77)$$

Рівнання 77) є параметричними рівняннями слимаковатої лінії для природних співрядних.

Інтеґрал $\int \sqrt{8\sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1} \cdot d\varphi$ є інтеґралом еліптичним.

ε) Еволюта слимаковатої лінії.

Параметричні рівнання для еволюти слимаковатої лінії у співрядних Декарта звучать:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 2r\left(\sin\frac{\varphi}{3}\,.\,\cos\varphi - B.\,K\right) \\ \eta &= 2r\left(\sin\frac{\varphi}{3}\sin\varphi + AK\right) \end{aligned}\right\} \qquad 78)$$

де: A, B K є функціями φ.

$$K = \frac{8\sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1}{6\left(4\sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1\right)} \qquad 79)$$

або:

$$K = \frac{(3\,.\,\bar{R})^{2/3}}{6\,.\,r^{2/3}\sqrt[3]{4\quad \sin^2\frac{\varphi}{3} + 1}} \qquad 79')$$

Напр. для: $\varphi = 0$, $x = y = 0$

ми маємо: $A = +1$, $B = 0$, $K = +\frac{1}{6}$

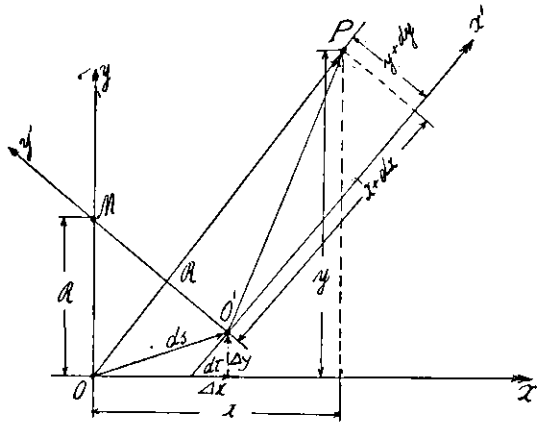
$\xi = 0$, $\eta = \frac{r}{3} = \bar{R}$ гл. стр. 72.

для: $\varphi = 90^0$, $x = 0$, $y = r$

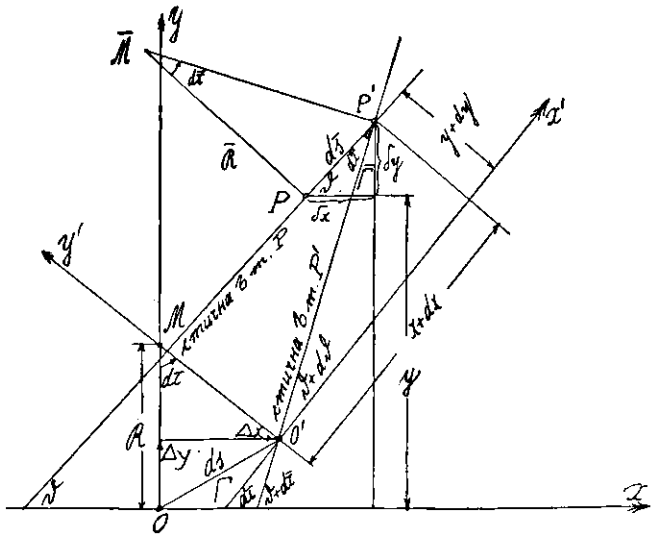
ми маємо: $A = -\frac{3}{2}$, $B = +\frac{\sqrt{3}}{2}$, $K = +\frac{1}{4}$

$\xi = -\frac{r\sqrt{3}}{4}$, $\eta = r - \frac{3r}{4}$ це і співрядні точки L у фіґ. 10.

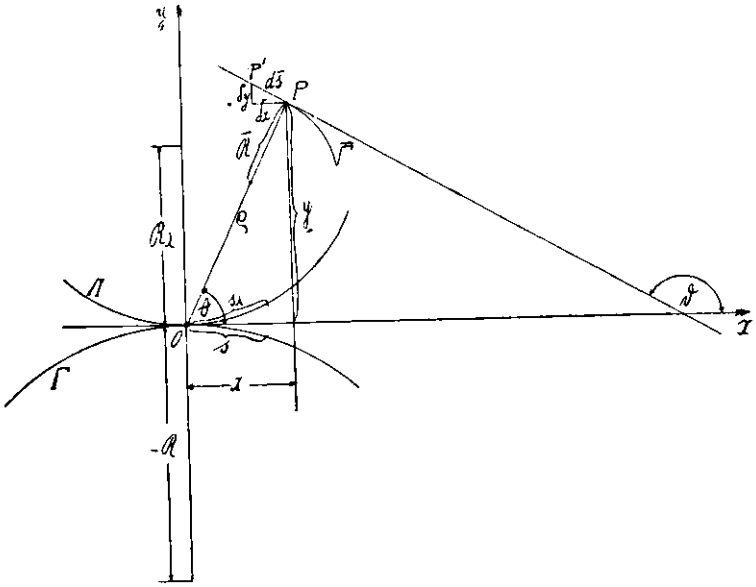
Як бачимо, будова рівнань 78) у дечому подібна до рівнань 62′) для слимаковатої лінії.


P
y+dy
x'
y
y'
M
x+dx
R
R
O'
ds
y
dx
Δy
Δx
O
x
s

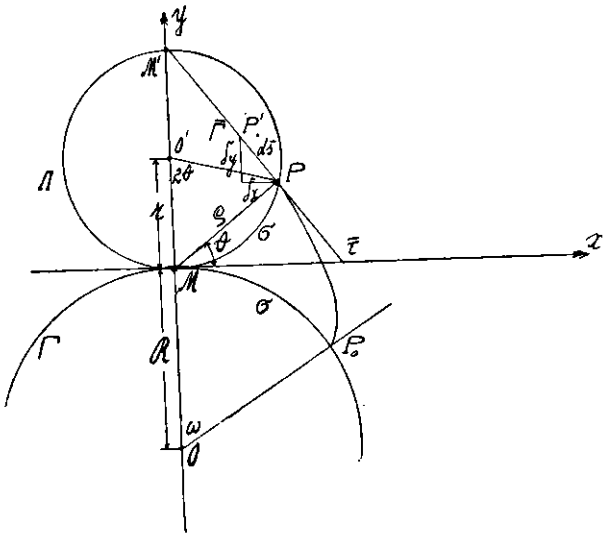
Фіг. 1.


y
M
dR
P'
y+dy
X'
R
dy
P
dx
y'
M
кривина в т. P
кривина в т. P'
dx
R
Δx
O'
Δy
ds
dR
x+dx
Y
O
X

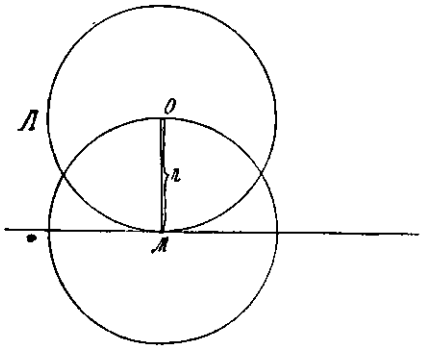
Фіг. 2.


y
P'
dS
δy
δx
P
R
ρ
y
Π
ϑ
dα
O
s
x
Γ
l
-R

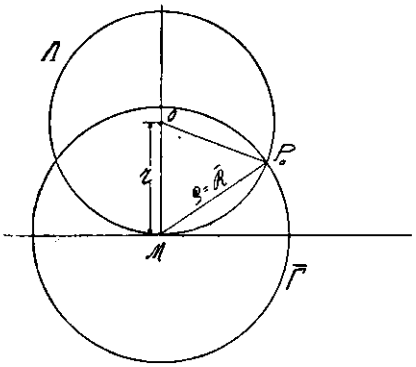
Фіг. 3.


y
M'
Γ
P'
dS
O'
δy
2d
P
Π
y
ρ
δx
ϑ
σ
τ
x
M
σ
Γ
R
P₀
ω
O

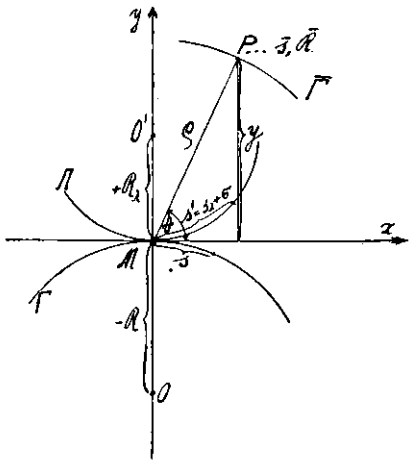
Фіг. 4.



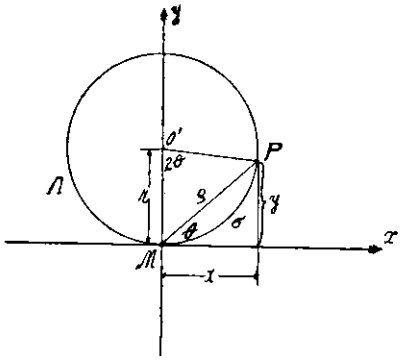
Фіг. 5.



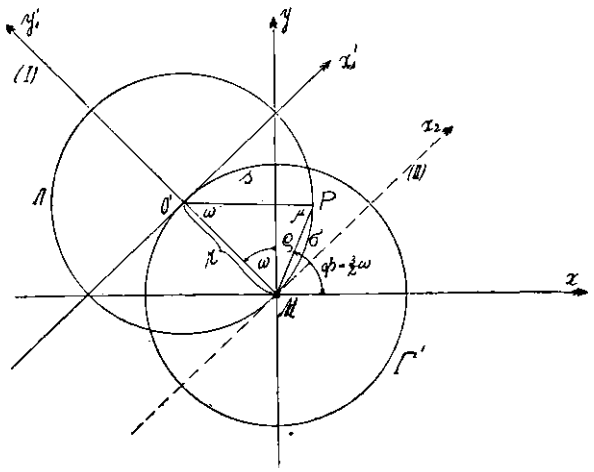
Фіг. 6.



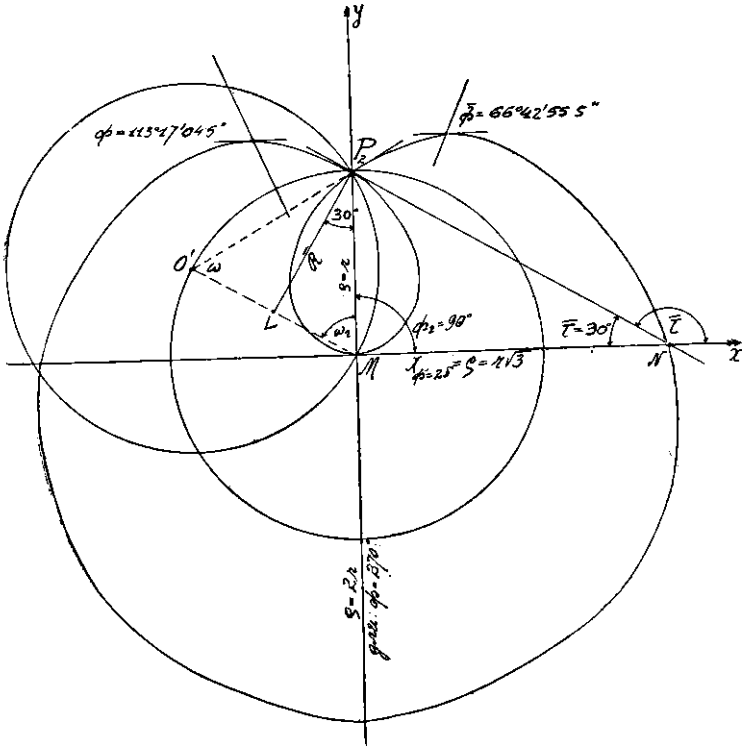
Фіг. 7.



Фіг. 8.


y'
y
x'
(I)
x₂
(II)
A
O'
ω
s
P
μ
ρ
σ
r
ω
φ=½ω
x
M
Γ'

Фіг. 9.


y
φ=113°47'04.5"
φ̄=66°42'55.5"
P₂
30°
O'
ω
ρ
s=r
L
ω₂
φ₂=90°
τ=30°
τ̄
x
M
y_{φ=25°}=s=r√3
N
s=2r
geod. φ=const.

Фіг. 10.

С. Д. Чорний.

Формули довготи періастра та ексцентричности орбіти затемнюваних змінних зір типу β Lyrae.

Щоб визначити довготу періастра α та ексцентричність e орбіти затемнюваних змінних зір типу β *Lyrae*, до цього часу[1]) користуванося приближеним рівнанням

$$w = W + 2\,e\,sin\,(W - \alpha),$$

де w — справжня довгота зорі в орбіті, W — її пересічна довгота. Зазначене вище рівнання є точне до малих величин першого порядку відносно e включно. В цім досліді ми виведемо точні формули[2]) довготи періастра та ексцентричности. Для цього умовимося відчислювати справжні довготи в орбіті від точки перетину орбіти проекцією проміня зору на площу орбіти в хвилю головного minimum яскравости зорі. Нехай t_1, t_2, t_3, t_4 будуть відповідно хвилі головного minimum, першого maximum, побічного minimum та другого maximum зорі, нехай ексцентричні її аномалії будуть відповідно E_1, E_2, E_3, E_4, тоді беручи на увагу, що

$$w_1 = 0,\ w_2 = \frac{\pi}{2},\ w_3 = \pi,\ w_4 = \frac{3\pi}{2},$$

за відомою формулою теоретичної астрономії можемо написати

$$-\,tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\,\frac{E_1}{2};\quad ctg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\,\frac{E_3}{2};\qquad (1)$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\,\frac{E_2}{2};\quad -\,ctg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\,\frac{E_4}{2}$$

[1]) Andrè Ch. Traité d'astronomie stellaire. II-e partie, pp. 199, 290.

[2]) Ці формули були подані мною без виводу в часописі „Astronomische Nachrichten, Band 230, pp. 157—158".

З попередніх формул дістанемо:

$$tg\frac{E_1}{2}\,tg\frac{E_3}{2} = tg\frac{E_2}{2}\,tg\frac{E_4}{2} = \frac{e-1}{e+1}$$

$$1 \pm tg\frac{E_1}{2}\,tg\frac{E_3}{2} = 1 \pm tg\frac{E_2}{2}\,tg\frac{E_4}{2} = \frac{e+1 \pm (e-1)}{e+1}$$

$$\frac{cos\,\frac{E_3 - E_1}{2}}{cos\frac{E_3}{2}\,cos\frac{E_1}{2}} = \frac{cos\frac{E_4 - E_2}{2}}{cos\frac{E_4}{2}\,cos\frac{E_2}{2}} = \frac{2e}{e+1}$$

$$\frac{cos\,\frac{E_3 + E_1}{2}}{cos\frac{E_3}{2}\,cos\frac{E_1}{2}} = \frac{cos\,\frac{E_4 + E_2}{2}}{cos\frac{E_4}{2}\,cos\frac{E_2}{2}} = \frac{2}{e+1},$$

або $cos\frac{E_3 - E_1}{2} = e\,cos\frac{E_3 + E_1}{2}$; $cos\frac{E_4 - E_2}{2} = e\,cos\frac{E_4 + E_2}{2}$ (2)

Назначімо знаком n пересічний добовий рух зорі, тоді за Кеплеровим рівнанням дістанемо

$$n\,(t_3 - t_1) = E_3 - E_1 - 2\,e\,sin\frac{E_3 - E_1}{2}\,cos\frac{E_3 - E_1}{2}$$

$$n\,(t_4 - t_2) = E_4 - E_2 - 2\,e\,sin\frac{E_4 - E_2}{2}\,cos\frac{E_4 - E_2}{2},$$

або за формулами (2) маємо

$$n\,(t_3 - t_1) = E_3 - E_1 - sin\,(E_3 - E_1)$$
$$n\,(t_4 - t_2) = E_4 - E_2 - sin\,(E_4 - E_2), \qquad (3)$$

Коли нам є відомі з спостережень зорі n, $t_3 - t_1$, $t_4 - t_2$, то поступовими наближеннями дістанемо з рівнань (3) $E_3 - E_1$ та $E_4 - E_2$. Для цього можна користуватися з таблиць Радо[1]) та Остранда[2]).

Коли нам будуть відомі $E_3 - E_1$ та $E_4 - E_2$, ми за допомогою рівнань (1) дістанемо

$$sin\,\alpha = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\,ctg\frac{E_3 - E_1}{2},\quad cos\,\alpha = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\,ctg\frac{E_4 - E_2}{2}, \qquad (4)$$

відкіля дістанемо формулу для визначення α

$$tg\alpha = -\,ctg\frac{E_3 - E_1}{2}\,tg\frac{E_4 - E_2}{2} \qquad (5)$$

[1]) Radau R. Solution graphique du problème de Kepler. (Bulletin Astronomique. Vol. I, p. 381).

[2]) Åstrand. Hilfstafeln zur leichten und genauen Auflösung des Kepler'schen Problems. Leipzig. 1890.

З формул (4) дістанемо

$$e = \sqrt{\frac{ctg^2\frac{E_3 - E_1}{2} + ctg^2\frac{E_4 - E_2}{2}}{1 + ctg^2\frac{E_3 - E_1}{2} + ctg^2\frac{E_4 - E_2}{2}}} \qquad (6)$$

Прикладім ці формули до обчислення α та e для зорі *3 Lyrae* на підставі поданих нижче спостережень, тоді дістанемо

Дата	$\frac{t_3 - t_1}{d}$	$\frac{t_4 - t_2}{d}$	α ^{o}	e
1842—1870 [1])	6.40	6.42	122.3	0.008
1870—1895 [1])	6.48	6.41	210.9	0.006
1892—1912 [2])	6.47	6.33	187.3	0,016

Київ,
Астрономічна Обсерваторія.
12 березня 1828 року.

Summary.

Formulae of the longitude of periastron and of eccentricity of the orbits of the eclipsing variable β Lyrae-Stars.

By Prof. S. D. Tschorny.

In this paper I demonstrate the formulae for the calculation of the longitude of periastron α and of the eccentricity e of β Lyrae-Stars:

$$tg\,\alpha = -\,ctg\frac{E_3 - E_1}{2}\,tg\frac{E_4 - E_2}{2},$$

$$e = \sqrt{\frac{ctg^2\frac{E_3 - E_1}{2} + ctg^2\frac{E_4 - E_2}{2}}{1 + ctg^2\frac{E_3 - E_1}{2} + ctg^2\frac{E_4 - E_2}{2}}}$$

which I have given in the Astronomische Nachrichten (Band 230) without demonstration.

Astronomical Observatory, Kiew.
1928 March 12.

[1]) Pannekock A. Untersuchungen über den Lichtwechsel von β Lyrae. (Astronomische Nachrichten. Band 144).

[2]) Curtiss R. H. A determination of the visual light curve of β Lyrae. (Publications of the Astronomical Observatory of the University of Michigan. Vol. I, p. 100).

Константин Танчаківський.

Поляризація ртутних електрод в розчинах ртутних солий.

(Досліди зі ртутною капковою катодою.)

Метода викреслення кривих розкладового напруження при електролізі з капковою ртутною катодою, винайдена професором празького університету I. Heyrovsky'м, є тепер принятим засобом для досліду катодних процесів при електролізі. Значна література, що зявилась в останній час, вказує, що ця метода дає можливість тонкої аналізи багатьох важних електрохемічних проблєм; далі, завдяки цій методі найдено цілком нові визначні явища дуже загального порядку. Одно таке явище є описане в цій праці і торкається характеристичних maxim'ів току на кривих розкладового напруження.

Падання току при збільшенню поляризуючої електромоторичної сили часто спостерігали дослідники анодних процесів при електролізі; але це явище треба приписати майже виключно змінам поверхневих властивостей металю аноди (т. зв. „пасивні металі").

Криві, що одержуємо при електролізі з капковою ртутною катодою, дають нам перебіг тільки катодних процесів і поява maxim'ів току на цих кривих є принціпово цілком новим явищем. Вперше його описав M. Shikata[1]) при редукції нітробензолю. Він спостеріг, що ток редукції нітробензолю при збільшенню поляризуючого напруження зростає до максімум а потім раптом падає на сталу величину (т. зв. ток насичення), що вже не залежить від поляризуючої електромоторичної сили *(ЕМС)*. Подібне явище спостеріг E. B. Sanigar[2]) при виділенню срібла на ртутній капковій катоді з розчинів ціянідів срібла. Одночасно П. Герасименко,[3]) досліджуючи максіма при електроредукції уранілевих солий, найшов, що придання індіферентних електролітів має великий вплив на висоту максімів на поляри-

заційних кривих. Придані соли значно зменшують висоту максімального току або й зовсім „пригноблюють“ максімальний ток аж до звичайного току насичення.

Докладну студію про максіма току і пригноблення їх електролітами та поверхнево активними річевинами перевели у випадку електроредукції ніклевих солий I. Heyrovský та N. Emelianova.[4]) Досліди в фізико-хемічному Інституті Карлового університету в Празі вказали, що поява максімів току супроводить при електролізі майже кожде виділення металів чи редукцію на ртутьній катоді.

Було цікаво пізнати, чи подібне явище можна буде спостерігати і при електролітичному розряді йонів ртути на ртутьній катоді. Це послужило темою цієї моєї роботи.

Експеріментальна часть.

Досліди провадженo при помочи методи капкової ртутьної катоди.[5]) Катоду в цьому успоряджені творять каплі ртути, що капають з тонкої капіляри. На дні електролітичної посудини знаходиться велика поверхня ртути, що служить за аноду. Анода під час електролізи свого потенціялу не міняє цебто не поляризується. Тому криві ток, поляризуюче напруження вказують виключно на зміни, що відбуваються на катоді.

Для автоматичного реґістрування кривих розкладового напруження сконструювали I. Heyrovský і M. Shikata[6]) апарат „полярограф“, в котрому ці криві закреслюються фотоґрафічно. Цего апарату ужив я для дослідів. Як прилад, що вказував натугу току, уживано зеркальний ґальванометер система d'Arsonval'a з чутливістю 6×10^{-10} Amp. на 1 mm скалі, що є на віддалі 1 метру від зеркальця. Чутливість ґальванометру реґульовано відповідними комбінаціями спусту (Schunt) і передопору.

Розчини електролізувались в воздушній атмосфері. В нашому випадку не можна було до розчинів ртутьних солий заводити водня, бо він почасти редукує ртутьні йони на металічну ртуть.

При електролізі розчинів, що містять в собі розпущений кисень, треба памятати, що і кисень редукується на початку електролізи. Але кількість кисня є дуже мала (менше ніж 10^{-3} gr. екв. в літрі), тому ток який припадає на редукцію кисня при електролізі концентрованих розчинів ртутьних солий є дуже малий.

Через те, що з початку (при невеликих поляризуючих EMC) ртутьна катода в розчині ртутьної соли не поляризується, ток

зростає при зрості зовнішньої *EMC* відразу, слідуючи законови Ohm'a. Але нарешті ток досягає максімального значіння і потім падає; характеристичний перебіг такої кривої представлено на рисунках 1, 2 і 3. Ординати на цих кривих дають натугу тока (i), абсціси — поляризуюче напруження P. Закреслення цих кривих провадилось автоматично „полярографом“. Так рисунок 3 предстлвляє один такий „полярограм“, з кривими одержаними з ріжних розчинів. Через те, що катоду творять каплі, які реґулярно зростають і відпадають, то ток хитається навколо середніх вартостей, цілком означених для даної поляризуючої *EMC*. Рисунки 1 і 2 є копіями з таких полярограмів. Я не подаю тут оріґінальних полярограмів по перше з огляду на економію місця (кожна крива була знята на окремому папері); по друге через те, що ці криві були знимані не при однакових чутливостях ґальванометру — це значить ординати не були однакової поділки. Криві на рисунках 1 і 2 злегка схематизовані, але подані в однакових мірах для кождого рисунку, що робить порівнування наочним. Розсяг хитань току представлено двоїстою лінією. Яким розчинам відповідають окремі криві — ясно з підписів під рисунками.

Як бачимо з діяґрамів, придавання азотної кислоти до розчину ртутьної соли зменшує максімальний ток на поляризаційній кривій, а також почасти змінює форму кривої. Подібне пригноблення максімального току викликає не тільки азотна кислота, а й инші електроліти напр. $Ca(NO_3)_2$ чи KNO_3.

В таблицях 1 і 2 подано головні дати з цих дослідів, а саме концентрації розчинів, — величини максімального току і току насичення і поляризуючі напруження при максімальному тоці та при спаді току до насичення.

Таблиця 1.

Концентрація $Hg\,NO_3$	HNO_3 n		HNO_3 0·1 n		HNO_3 0·01 n		
	Π (volt)	i (amp.)	Π (volt)	i (amp.)	Π (volt)	i (amp.)	
0·1	0·323	$8{\cdot}68 \times 10^{-3}$	1·077	$1{\cdot}23 \times 10^{-2}$	—	—	Maximum насичення
	1·1	$3{\cdot}46 \times 10^{-4}$	1·1	$4{\cdot}78 \times 10^{-4}$	—	—	
0·01	0·188	$2{\cdot}19 \times 10^{-4}$	0·371	$5{\cdot}99 \times 10^{-4}$	0·784	$1{\cdot}29 \times 10^{-3}$	Maximum насичення
	1·1	$5{\cdot}3 \times 10^{-5}$	1·1	$4{\cdot}4 \times 10^{-5}$	1·1	$5{\cdot}8 \times 10^{-5}$	

При досить великих поляризуючих напруженнях (між 1·4 і 2 вольтами) ми спостерігаємо на кривих другий зріст току котрий спричинений редукцією нітратового йону і виділенням водня.

Криві розкладового напруження одержані з розчинів ртутьної соли в присутности малої кількости азотної кислоти вказують на лінійний зріст соку на початку поляризації. Цей лінійний зріст току зі зростом поляризуючого напруження буде ясний з наступних міркувань.

При проходженні простого току через електроліт є важний закон Ома в наступній формі: $iR = E - P$ (i — ток; R — опір круга; E — поляризуюча (зовнішня) EMC; P — електромоторична сила поляризації (проти йдуча EMC)). Через те, що в нашому випадку обидві електроди є однакові і занурені до того самого розчину, то $EMC - P$ мусить бути рівна зеро, як що тільки навколо електрод не настане концентраційна поляризація. Тому з поляроґрамів можна вирахувати опір R, як що взяти не дуже великі вартости току i.

Так, для розчину 0·1 n HNO_3 в 0·1 n HNO_3 з величин $E = 0{\cdot}2$ вольта та $i = 38 \times 10^{-4}$ амперу вираховано опір у крузі $R = 79$ омів. На кривій роскладового напруження для цього розчину ток досягає максімальної вартости i max $= 38 \times 10^{-4}$ амп., отже спад потенціялу в розчині є рівний $iR = 79$ омів $\times$ $\times$ 38×10^{-4} амп. $= 0{\cdot}974$ вольт. Цей максімальний ток досягнено при поляризуючому напруженню $P = 1{\cdot}077$ вольта. Звідси ми бачимо, що катода споляризувалась тільки приблизно на $1{\cdot}077 - 0{\cdot}974 = 0{\cdot}103$ вольта. Ток в цьому випадку досягнувши свого максімального значіння падає на значно меншу величину при дальшому дуже незначному збільшенню поляризуючого напруження. Як що вирахуємо спад потенціялу iR після спаду току, то найдемо $iR = 0{\cdot}48 \times 10^{-5} \times 79 = 0{\cdot}038$ вольта. Це вказує на те, що настала нагла поляризація катоди, а саме, потенціял катоди змінився скоком на величину $= 1{\cdot}077 - 0{\cdot}038$ в $= 1{\cdot}039$ вольта. Ця раптова зміна потенціялу катоди є незвичайно фрапантне явище. Ток зменшується при цьому аж приб. у 20 разів. Цей спад току не можна ні в якому разі пояснити тим, що між катодою і розчином витворюється опір, напр. в наслідок творення нероспускального осаду. Якщоби такий опір існував, що цеб впливало на дальші процеси, а саме на розкладове напруження необхідне для редукції азотної кислоти з розчинів.

Але з наших поляроґрамів можемо заключити, що редукція нітратового йону з розчинів азотної кислоти і ртутьної соли настає (після максімального току) при тих самих катодних потенціялах, як і з розчину чистої азотної кислоти. Так для розчину 0·1 n $HgNO_3$ в 0·1 n HNO_3 другий зріст току спричинений редукцією нітратового йону починається при $E = 1{\cdot}8$ вольта; як що з цієї величини віднімемо потенціял аноди, рівний приблизно 0·4 вольта (від кальомелевої електроди), та спад потенціялу $iR =$ прибл. 0·05 вольта, то одержимо для катодного потенціялу величину:

$$-1{\cdot}8 - (0{\cdot}4 + 0{\cdot}05) = -1{\cdot}35 \text{ вольта.}$$

На поляроґрамі одержаному при електролізі чистої азотної кислоти найдено, що зріст току редукції і тут починається при томуж катодному потенціялі: — 1·35 вольта.

Раптові скоки катодного потенціялу доведено також з помірів електрокапілярних. Відомо, що поверхневе напруження поляризованої ртути є функцією потенціялу електроди.

Для визначення поверхневого напруження ртути на катоді ужито методи Kučer'a[7]), що полягає у важенню капель ртути поляризованої на ріжні потенціяли. В кождому разі ловлено по 30 капель до скляного збірника, сушено і важено. Ця метода дає дуже точні висліди. Окрім важення капель спостерігалась також і доба капання, що стоїть у вузькім звязку з поверхневим напруженням. Висліди помірів подано в таблицях 2 — 6 і для наочности на діяґрамі ч. 4. В кожному разі, коли ток на кривій розкладового напруження раптом падає, поверхневе напруження ртути скоком збільшується. Перед цим раптовим зростом поверхневе напруження міняється зі зростом поляризуючої EMC дуже незначно. Це вказує, що потенціял катоди не міняється, тоб то, що катода не поляризується.

Цікаво, що в присутности значної скількости азотної кислоти в розчині ртутьної соли поверхневе напруження змінюється тягло зі зростом поляризуючої EMC, а на кривих розкладового напруження ми не спостерігаємо спаду току (максімальний ток пригноблено). В цьому випадку електрокапілярні криві мають звичайну форму параболі. Отже в цьому випадку (в присутности значної кількости иншого електроліту) катода легко поляризується: збільшенню поляризуючої EMC відповідає зріст неґативного потенціялу катоди (як що прийняти в увагу не дуже великий в цьому випадку спад потенціялу iR в розчині). В тих випадках, де поверхневе напруження скоком підноситься на

значно більшу величину, — дальший хід електрокапілярної кривої цілком відповідає ходови звичайної електрокапілярної параболі це вказує на те, що катода стала пригожою до поляризації.

Дискусія.

Поява максимів на кривих розкладового напруження вже в перших працях, що торкалися цього явища (Shikata, Sanigar, Герасименко) розглядалось як ефект адсорпційних сил. Але в перших дослідах не приймалось на увагу стану поляризації електрод. В цих працях мовчки припускалось, що катода поляризується майже досконало з самого початку і на цілому протязі кривої розкладового напруження. Далі припускалось, що ті річевини, які дають максімум на кривих розкладового напруження, адсорбуються в значній мірі на поверхні катоди. Shikata і Sanigar припускали, що адсорпція ця є спричинена електричним притяганням між поверхнею електроди і молекулами розпущеного тіла. Так Shikata пояснював адсорпцію нітробензолю на ртути тим, що молекули нітробензолю мають діпольну структуру; ці діполі своїми позитивними кінцями електростатично притягаються до неґативної поверхні металю, що викликає збільшення концентрації на цій поверхні. Падання току редукції Shikata приписував тому, що при збільшенню потенціялу катоди взаїмне відпихання між неґативними кінцями адсорбованих молекул і неґативними нарядами електроди досягає такої величини, що адсорбована верства молекул навколо електроди руйнується і тим зменшується концентрація. Це мусить викликати спад току, як що адсорбована річевина редукується. Отже, головна роля при зменшенню концентрації приписувалась електростатичній дії і не приймалось на увагу те, що катода при „максімальних“ токах мало поляризується. На останній факт вказав П. Герасименко в своїй габілітаційній праці;[8]) з нашої роботи (див. експер. часть)| також безсумнівно слідує, що катода при проходженню густих токів (перед спадом) поляризується дуже мало. Інші досліди (ще почасти не опубліковані) вказали на те, що максімум на кривих при електролітичному виділенню дають і такі йони, котрим не має рації приписувати діпольну структуру, напр. Tl^{+}, Zn^{++}, Mn^{++} і інші.

Приймаючи на увагу ці факти I. Heyrovský в своїй праці про максіма на поляризаційних кривих розчинів солий ніклю подав нове висвітлення, котре добре пояснює цей цікавий ефект. Головну ролю у витворенню явища максімального току та спаду

току I. Heyrovský приписує кінетиці реакцій на поверхні електроди, а саме скорости виділення) адсорпції та дифузії. Йони розпущеної соли (в нашому випадку катйони ртути) адсорбуються на поверхні ртутьної катоди. (Адсорпція йонів ртути на поверхні ртути з безперечний факт, як слідує з багатьох дослідів, див. Freundlich Kapillarchemie, 1922). При електролізі йони на поверхні катоди виладовуються, а на їх місце адсорбуються і придифундовують з глибини розчину нові йони. Треба припускати, що скорість адсорпції є в порівнанню зі скорістю дифузії дуже велика. З початку електролізи (при малих *EMC)* скорість електролітичного виділення не є дуже велика, так що в кождій хвилі адсорпція і дифузія поновлюють концентрацію йонів навколо електроди. Але в решті решт при збільшенню поляризуючої *EMC* можна досягнути такого стану, коли скорість виділення рівна скорости адсорпції — цей стан відповідає максімум на поляризаційній кривій. Дальше збільшення поляризуючого напруження веде до того, що скорість виділення стане більшою, як скорість адсорпції: в наслідок цього йони в околиці катоди дуже скоро виладуються, а адсорпція вже не вистарчить поновити концентрацію йонів навколо катоди. Між поверхнею катоди і розчином витворюється „порожна“ верства, в котрій не має даних йонів (в нашому випадку йонів ртути). Адсорпційні сили ділають на невелике віддалення і притягання молекул до поверхні передається через молекули даного роду (у нас йони Hg^{+}). Отже, як що між розчином і поверхнею катоди витвориться верства розчину, в котрій не має даних йонів, то дія адсорпційних сил не може передатися через цю верству. (П. Герасименко називає цю верству „ізоляцією“ для сил адсорпції. Це не значить, що розчин в цій верстві став електричним ізолятором; в цій верстві ще зостаються йони иншого роду, напр., у нас водневі йони, потенціял виділення, котрих ще не досягнено при тих поляризуючих *EMC*, де настає спад току).

Отже спад току Гейровський пояснює тим, що адсорпція йонів припиняється. Ток, як ми бачили в експеріментальній части, не падає аж до зера, але спиняється на тоці насичення. Цей ток насичення викликають ті йони ртути, що мандрують через „порожну“ верству в наслідок звичайного теплового руху цеб то дифузії.

Як ми бачили, придання иншого електроліту до даного розчину викликає зниження максімального току. Це можна пояснити тим, що йони иншого електроліту напр. водневі йони, K^{+},

Ca^{++} також адсорбуються на поверхні катоди; в наслідок цього зменшується кількість йонів ртути, які можуть адсорбуватися. Інші йони займають частину поверхні і тим перешкаджають почасти адсорпції ртутьних йонів. Цей ефект инших йонів називаємо „витисканням“ адсорпції. Цей ефект „витискання“ спостерігається в багатьох явищах адсорпції, і находить своє узагальнення в теорії Райхінштайна т. зв. „Verdrängungstheorie“.[9]) На основі цієї теорії сума концентрацій всіх адсорбованих річевин на поверхні мусить бути стала; отже, як що помимо даної річевини адсорбується і инша річевина, то це мусить викликати зменшення кількости адсорбованих молекул першої річевини.

Цим би було в загальних рисах висвітлено спостережені нами явища при електролізі розчинів ртутьних солий на ртутьних катодах. Дальшого докладного досліду вимагає ефект зниження максімального току ріжними електролітами. Як що порівняємо пригноблююче ділання ріжних солий, то ми пізнаємо, що азотна кислота пригноблює максімум значно більше, ніж нітрат кальція взятий в тій самій концентрації. Це можна висвітлити тим, що водневі йони з азотної кислоти адсорбуються більше, ніж йони кальція. Дальші квантитативні досліди в цьому напрямку автор сподівається подати по опрацьованню пізніше.

Досліди зі сталою ртутьною катодою переведено Д-ром П. Герасименком, які є предметом слідуючої праці в цьому збірнику.

Автор висловлює свою щиру подяку пану професорови Карлового Університету в Празі Д-ру І. Heyrovsk'ому за поміч і раду підчас праці, а також за дозвіл надрукувати цю працю в українській мові. Докторови П. Герасименкови автор вдячний за обговорення і перегляд праці.

В Празі, в серпні 1927 р.

Література.

1. M. Shikata, Trans. Faraday Soc., 1925.
2. E. B. Sanigar, Receuil des Travaux Chim. 44 p., 1925.
3. P. Herasymenko, Chemické Listy XIX, ч. 5, 1925.
4. I. Heyrovský a Emelianova Rozpravy Ceske Akademie Věd. II. tr. 1927; також в Trans. Faraday Society, XXIV. May (1928).
5. I. Heyrovský, Phil. Mag. *45*, 30 (1923); Trans. Faraday Soc. *19*, 692 (1924); Rec. Trav. Chim. *44*, 488 (1925); Compt. Rend. 179, 1044, 1267, 1924; Bull Soc. Chim. Franc. XLI—XLII, 1224 (1927).
6. I. Heyrovský і M. Shikata, Rec. Trav. Chim. *44*, 496 (1925).
7. Kučera, Ann. d. Physik, 1903.
8. П. Герасименко, Електроредукція уранілових солей на ртутній катоді, Записки Українського Педаґоґічного Інституту 1928; в анґл. мові: Trans. of Faraday Soc., XXIV, P. 5, 267, (1928).
9. D. Reichinstein, Eigenschaften des Adsorptionsvolumens, Zürich 1916; „Verdrängungstheorie“, Zeitschr. f. Elektrochemie, 1927.

Електрокапілярні поміри.

Таблиця 2. (Крива 1. на діяґр. 4.)

Розчин: $n\ HgNO_3 + n\ HNO_3$.

Поляризуюча електромотор. сила (мілівольти)	30 капель ртути	
	Час капання (секунди)	Тягар капель (міліґрами)
0	168,4	87,35
200	169,7	89,9
400	167,0	88,7
600	166,6	88,8
800	166,0	89,4
1000	165,8	90,0
1200	164,0	90,0
1400	162,4	90,4
1600	162,4	90,2
1800	159,1	90,9
1860	157,0	90,4
1880	157,8	90,4
1890	157,2	90,4
1900	213,7	112,6

Таблиця 3. (Крива 2. на діяґр. 4.)

Розчин: 0,1 *n* $HgNO_3$ + *n* HNO_3, $t^0 = 15^0$ *C.*

EMC (мілівольти)	Час капання 30 капель (секунди)	Тягар 30 капель (міліґрами)
0	184.5	93,9
100	192.9	98,7
200	195,9	100,8
400	195.6	102.0
500	197,3	103,2
600	196,7	104.1
. . . . .	. . . . .	. . . . .
1110	197.8	105,8
1120	199.5	105.4
1125	198,4	105,3
1130	297,6	148.1
1200	291.3	147,5
1300	286.8	145,7
1400	278,9	142,7

Таблиця 4. (Крива 3. на діяґр. 4.)

Розчин: 0,1 *n* $HgNO_3$ + 0·1 *n* HNO_3.

EMC (мілівольти)	Час капання 30 капель (секунди)	Тягар 30 капель (міліґрами)
0	84.9	116.9
100	89.4	123.0
200	91.0	126 0
400	93.8	129.2
600	94.3	130.9
800	95 8	133.5
1000	95 9	133.5
1100	96.7	134 6
1200	96,7	135,1
1300	131.2	178,1
1400	129.0	175,5
1500	126 3	171.9
1600	123.3	167,7
1700	119.7	162.4
1800	115,2	157,0

Таблиця 5. (Крива 5 на діяґр. 4.)

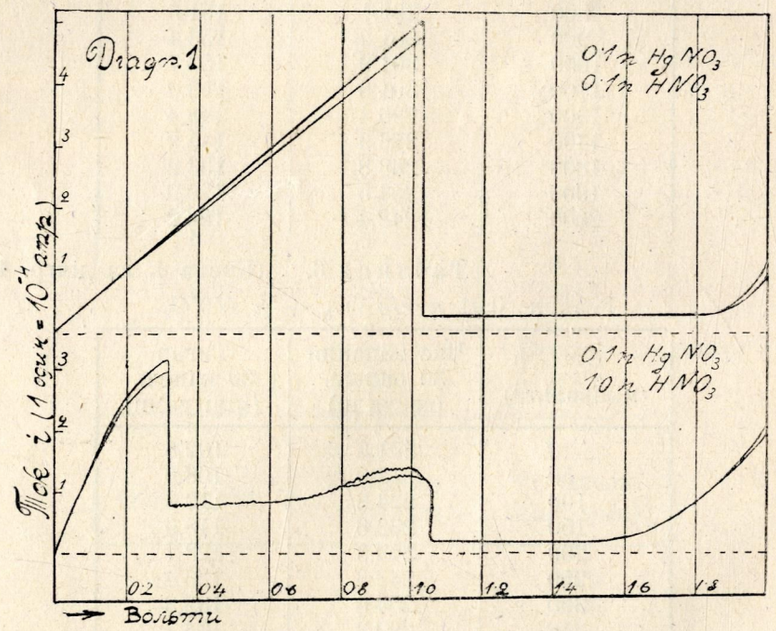
Розчин 0.001 *n* $HgNO_3$ + *n* HNO_3, $t^0 = 19{,}4^0$.

EMC (мілівольти)	Час капання 30 капель (секунди)	Тягар 30 капель (міліґрами)
0	209,1	106,6
200	271,3	127,3
400	290,0	138,6
600	300,0	147,8
800	298,1	151.6
900	301,2	153.4
1000	301.9	153,7
1100	301,3	153,0
1300	296,4	148,4
1400	286,9	145,9
1800	263,8	133,2
1900	254,5	130,0
2000	248,4	126,2

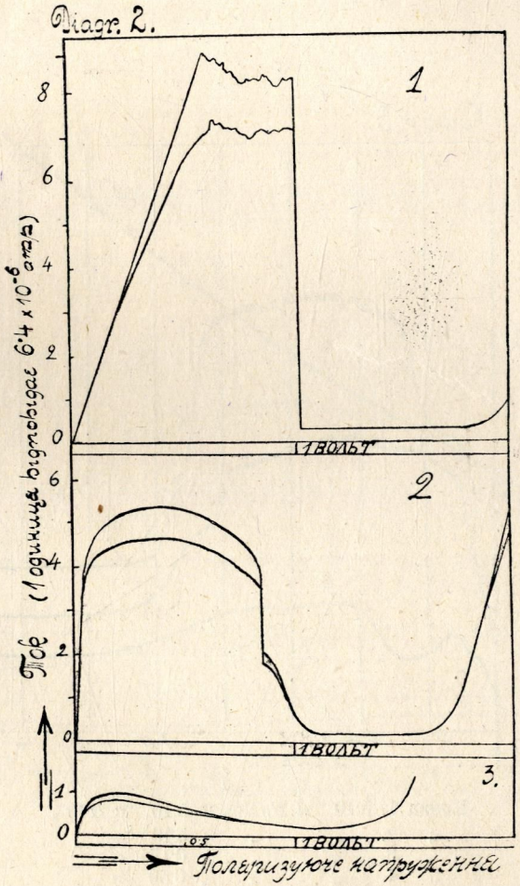
Таблиця 6. (Крива 4. на діяґр. 4.)

Розчин: 0,01 *n* $HgNO_3$ + *n* HNO_3.

EMC (мілівольти)	Час капання 30 капель (секунди)	Тягар 30 капель (міліґрами)
0	201.3	102,6
50	212,0	108,0
100	224,8	113.8
150	232,6	118,0
200	243,6	123,7
250	248.6	126,4
300	254,0	130,3
350	260,3	133,7
400	268,8	136,6
500	275,3	140,8
600	286,1	145,2
700	290,5	148,4
800	295.0	151,0
900	299.0	152,6
1000	301,2	153.2
1100	300.5	152,6
1200	298.2	150.8
1400	297,5	145,2
1600	275,0	138,5
1800	259	131,9
2000	249	115,2



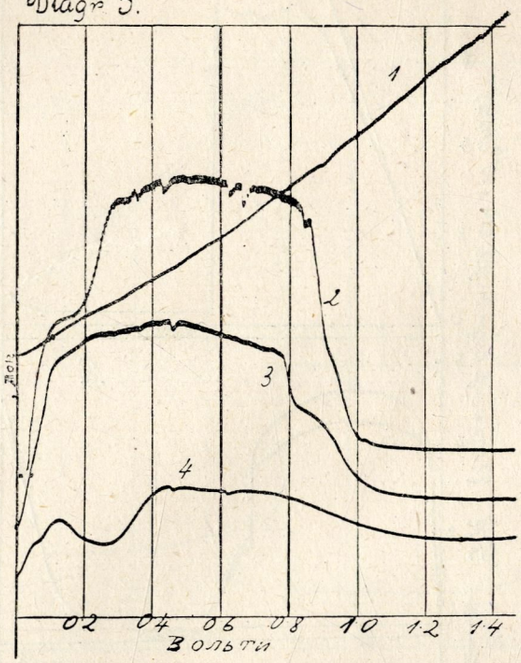
Криві розкладового напруження.
Подвійними кривими зазначено межі, в котрих хитається ток.



Криві розкладового напруження розчинів:
1. 0·01 *n* $HgNO_3$ + 0·01 *n* HNO_3
2. „ „ „ „ 0·1 „ „
3. „ „ „ „ 1·0 „ „

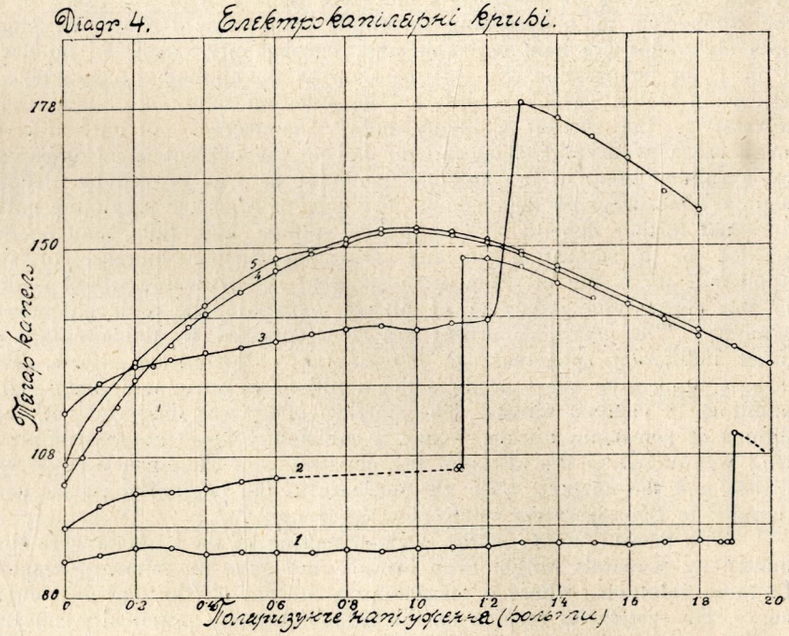
Подвійними кривими зазначено межі, в котрих хитається ток при капанню.

Diagr. 3.



Крива 1. $5 \cdot 10^{-3} n$ $HgNO_3$ + $5.10^{-3} n$ HNO_3.
„ 2. „ „ „ $5.10^{-2} n$ „
„ 3. „ „ „ 0·125 n „
„ 4. „ „ „ 0·50 n „
(Для кождої кривої зеро току рахувати від початку кривої).

Diagr. 4. Електрокапілярні криві.



Summary.

Electrolysis of the solutions of mercurous salts with the mercury dropping kathode.

By K. Tančakivskyj.

The current-voltage curves during electrolysis of mercurous nitrate solutions between mercury electrodes were investigated by present author by means of the Heyrovský's dropping mercury kathode. The current at the beginning of electrolysis increases lineary with the increase of the applied e. m. f. according to simple Ohm's law *(iK = E)*, since both electrodes are nonpolarisable and, consequenty, there in no back e. m. f. (or polarisation P). But, as soon as the applied voltage exceeds a certain value (which is different for different solutions of mercurous nitrate) — the current suddenly falls. The decrease of current is in some cases twentyfold. The sudden fall of the current is accompanied by a sudden jump in the kathode potential as was proved by electrocapillary mesurements (see below). The current after the maximum value does not further depend on the applied voltage, and, thus, may be described as a saturation current. Only at further increase of the applied e. m. f. the increase of the current is observable which is due to the electrolytic reduction of nitrate (compare the adduced polarogramms). The maximal current can be suppressed by the additions of other indifferent substances to the solution of mercurous nitrate. The largest suppresive effect produce the additions of nitric acid, then — the additions of calcium nitrate. The smallest effect was observed with additions of potassium nitrate. When a sufficiently large amount of nitric acid was added to the solution, the maximum on the curve entirely vanishes and the current affer the increase at the beginning passes continually to the saturation value (see fig. 1 und 2).

The measurements of the surface tension of the kathode were conducted by Kučera's weight drop method and gave the following results: In those solutions, where a maximum is present on the current-voltage curve, the interfacial tension on the kathode remains practically constant until a voltage is attained where the current suddenly drops: at this point surface tension increases discontinually to a greater value (see diagram 4. and tables). In the solutions which do not exhibit the current maximum the electrocapillary curves have an ordinary parabolic shape. From the behaviour of the electrocapillary curves it is concluded that in the case where the maxima on current voltage curves are suppressed, the kathode is almost perfectly polarisable. But, in those solutions, which exhibit a maximum, the kathode potential remains unchanged from the beginning until the discontinual fall of current. Here, the kathode potential suddenly shifts to the more negative values, thus producing a discontinual increase of the surface tension (which is known to be a function of kathode potential). In some cases the sudden shifts of the kathode potential amount to 1·7 volt (from + 0·4 v. to — 1·3 v.), this enormous polarisation being comparable with the changes of anode potential observable in passivity phenomena.

The observed phenomena are explained by a theory proposed by I. Heyrovský (Trans. Faraday Society. Paper read 25. I. 1928), which can briefly stated as follows: The deposition of mercury ions on the kathode produces a decrease of the concentration in the surface layer near the electrode. But the adsorption very quickly restores the initial concentration in the interface. At the voltage, corresponding to maximum of cur ent, the velocity of adsorption just equals the velocity of deposition. When, however, the applied voltage is increased further, — the velocity of disappearance of ions from the surface layer (through electrodeposition) becomes greater than the velocity of adsorption: at this moment a surface layer immediately forms which is practically exhausted as to mercurous ions. This layer separates electrode from the bulk solution and thus prevents the adsorption: consequently, the current must greatly diminish. The saturation current after the decrease is due only to electrodeposition of ions diffusing through the exhausted layer. Since termal diffusion is comparatively slower than the adsorption velocity — the saturation current is much smaller than the current produced by adsorption (maximae current). According to the Ohm's law applicaple to the electrolysis in the form: $iR = E - P$ (where i — current, R — resistance, E — applied e. m. f., P — polarisation) after the sudden decrease of the current i at a certain applied e. m. f. E a discontinual increase in polarisation P must ensue. The suppression of maxima by the additions of other electrolytes is explained (compare, Herasymenko's paper in Chemické Listy *19*, № 5, 1925) by the adsorption of the added substance which consequently diminishes the amount of adsorbed mercury ions in the surface layer.

The present investigation was carried out in the Physico-Chemical Institute of Charles' University (Prague). The author wishes to express his best thanks to Professor I. Heyrovský, who suggested this work, for his valuable help and advice. For the discussion and supervision of this paper the author is indebted to Dr. Herasymenko.

Prague, 1927.

Др. П. Герасименко.

Поляризація сталих ртутних електрод в розчинах ртутних солий.

(Досліди спільні зі студ. Старогорським.)

В попередній праці К. Танчаківський[1]) описує цікаві досліди максімів току на кривих ток-волтаж, що він спостерігав при електролізі розчинів ртутних солий при помочи капкової катоди Heyrovsk'ого. Шукаючи причин цього незвичайного явища, я перевів досліди з поляризацією ртутних електрод в инших умовах, а саме з непорушними електродами. При електролізі з капковою ртутною катодою не можна безпосередньо міряти потенціял катоди. Капкова катода має дуже малу поверхню і при компензації її потенціялу (Poggendorf-івська метода) дуже легко поляризується. (Безпосередньо можна булоби потенціял такої малої електроди лише безтоковою методою при помочи абсолютного Томсонівського ґальванометру, але такі поміри тяжкі і вимагають накладної апаратури). Щоби уникнути поляризації електрод при компензаційній методі автор цієї праці ужив катоди з більшою і непорушною поверхнею.

При цих дослідах найдено нові факти, важні для теорії максімів тока на кривих розкладового напруження. На основі нижче поданих дослідів можна правильніше висвітлити недавні експерименти Mc Aulay'я та Bowden'a[2]). (Про це мова далі).

Експеріментальна часть.

Електроліза розчину нітрату ртути *($HgNO_3$)* провадилась в склянці (див. рис. 1.) обсягу 300 cm^3. На дні посуду було налито ртуть, що служила анодою *(A)*; поверхня аноди була прибл. 70 cm^2. Ртутна катода *(K)* з поверхнею 1 cm^2 находилась в невеликій скляній ложці. Для міряння потенціялів катоди ужито Haber-Luggin-івської капіляри *(Г)*, яка була наповнена тим самим розчином, що й в електролітичній посуді. Капілярний кінець

[1]) Vid. попередний артикул.

[2]) Mc Aulay and Bowden, Proc. Roy. Soc. London, 110, May, 1926.

цієї рурки поміщено дуже близько до поверхні катоди, так що цей кінець практично зустрічав свій зеркальний образ на поверхні ртути. Другий кінець рурки, затканий фільтрувальним папером, сполучено через розчин азотної кислоти з нормальною каломелевою електродою *(H)*. При дослідах виявилось необхідним перемішувати розчин над катодою. Скляна мішалка (вітрячок) приводилась у рух електромотором; вітрячок робив 1400 оборотів за мінуту. Крила мішалки находились 3—4 міліметри над поверхнею катоди.

Висліди помірів подано на діяґрамах. Наводимо тут тільки одну характеристичну таблицю, щоби не забирати багато місця.

Діяґрам (рис. 2) представляє криві ток-прикладений волтаж. Ці криві, подібні до кривих Танчаківського, були одержані при сильному перемішуванні розчину. Криві з розчинів з малою концентрацією азотної кислоти (кр. 1 і 2) не виказують максіма аж до 2 волтів і ток на них є порівнюючи менший ніж на дальших кривих. Останнє спричинене малою електропроводністю цих розчинів, бо в наслідок великого опору R, спад потенціялу в розчині $(i\ R)$ є великий. Тому також катода не може досягти потенціялу, при котрому настає спад току. (Спад току можна одержати прикладенням більшого волтажу ніж два волти; на рисунку це не вказано).

Розчини з більшою концентрацією азотної кислоти (від 0·095 n, крива 3) дають максімум і спад току. Дальші придавання азотної кислоти „пригноблюють“ максімум току.

Як що почати електролізу від зера до більшого волтажу, а потім поступати навпаки, то криві і при сильному перемішуванні розчину вказують гістерезу току: ток при зворотному поступі зростає до максіма при меншому зовнішньому волтажі. (Далі будемо коротко означати поступ електролізи від зера до більшого вольтажу як простий поступ, а спостерігання електролізи від більшого вольтажу до меншого, — як зворотний поступ). Особливо велика гістереза спостерігається на кривих тоді, коли розчин не перемішується (див. рис. 3). В цьому випадку ток зовсім не зростає при зворотньому поступі, а тягло йде по низшій кривій.

Як що зменшити вольтаж від C до B' (див. рис. 3), то ток при електролізі без перемішування, як зазначено, зостається на низчій кривій. Але вистарчить торкнутися поверхні ртути на катоді скляним прутом, як ток раптом зросте до максіма. В области потенціялів між B і C такого зросту порушенням поверхні ртути не можна. Цей дослід вияснює причину ріжниці між кривими, одержаними зворотнім поступом при перемішуванні і без перемішування розчину. При сильному перемішуванні є більше шанс порушити поверхневу верству на катоді і тому тут ток зростає до максіма хоч з деякою гістерезою при зворотньому поступі.

З помірів катодних потенціялів при електролізі одержано наступні вислідки. Для того, щоби викликати спад току, катода має досягнути певного потенціялу, характеристичного для даного складу розчину. Ртутна катода не поляризується тільки зпочатку електролізи, потім потенціял її міняється тягло аж до максіма току, де разом зі спадом току потенціял катоди скоком міняється на значно неґативнішу величину. (Див. діяґрам ч. 4 і таблицю 1).

Таблиця 1.

Розчин 0.01 $n\ HgNO_3 + 0{,}095\ n\ HNO_3$.

	Applied e. m. f. Зовнішній волтаж	Current $\times 10^3$ amp. Тік	Kathode potential Катодний потенціял		Applied e. m. f. Зовнішній волтаж	Current $\times 10^3$ amp. Тік	Kathode potential Катодний потенціял
	Розчин перемішувано:				Розчин перемішувано:		
Простий поступ (Polarised onwards)	0 v.	0	+ 427 mv	Зворотний поступ (Polarised backwards)	0 v.	0	+ 427 mv
	0·20	12	+ 344		0·20	10·5	+ 328
	0·40	20·1	+ 213		0·40	18	+ 202
	0·60	29·4	+ 92		0·60	27	+ 96
	0·80	33	— 49		0 80	34·5	— 41
	1·00	39	— 186		1·00	43·5	— 165
	1·20	48	— 310		1·02	45	— 180
	1·24	51	— 331		1·10	49·5	— 224
	1·28	45	— 390		1·20	53·4	— 271
	1·30	42	— 418		1 22	54	— 284
	1·32	9	— 783		1·25	55·5	— 307
	1·34	9	— 803		1·26	9	— 740
	1·40	9	— 860		1·30	9	— 778
	1·60	10·5	—1050		1·40	9	— 860
	Without stirring:						
Простий поступ (onwards)	Без перемішування:			Зворот. пост. (Backwards)	Без перемішування:		
	0	0	+ 427		0	0	+ 428
	0·20	3	+ 255		0·20	0·6	+ 240
	0·40	12	+ 125		0·40	1·5	+ 40
	0·60	21	+ 9		0·60	1·5	— 169
	0·80	27	— 134		0·80	1·5	— 371
	1·00	34·5	— 213		1·00	1·5	— 568
	1·20	39	— 277		1·10	1·5	— 666
	1·30	45	— 357		1·20	1·5	— 762
	1·36	51	— 447		—	—	—
	1·38	52	— 467		—	—	—
	1·40	53·5	— 490		1·40	1·5	— 967
	1·42	1·5	— 980		—	—	—
	1·60	1·5	—1170		1·60	1·5	—1170

Раптовий скок потенціялу на капковій катоді довів К. Танчаківський з помірів електрокапілярних. При зворотньому поступі без церемішування розчину (при відсутности максіма току) катода поляризується тягло: зменшення зовнішнього вольтажу рівне поступові катодного потенціялу в позитивний бік. Раптова зміна потенціялу при спаді току легко вияснюється на основі закону Ohm'a для електролізи: $iR = E - P$ (E зовнішній вольтаж, P поляризація). З цього рівнання бачимо, що раптове зменшення току i мусить викликати раптове збільшення поляризації P; в нашому випадку поляризується тільки катода (бо анода має дуже велику поверхню в порівнанні з катодою і тому свого потенціялу підчас електролізи не міняє).

Потенціял катоди тягло міняється перед спадом току. Можна це виясняти або концентраційною поляризацією ртутьних йонів або тим, що ртуть почасти поляризується воднем: водневі атоми виділюються на поверхні ртути в дуже незначній кількости і катода стає фактично водневою електродою з воднем дуже малої активности. Це друге пояснення поляризації катоди більш правдоподібне. Бо як щоби катода відповідала тільки на ртутьні йони, її потенціял залежавби на поверхневій концентрації ртутьних йонів. В наведеному прикладі (див. табл. 1.) катода перед спадом току поляризується аж на $-0{\cdot}4$ волта: це відповідалоби концентрації: 10^{-15} нормальній; ясно, що, якби це було справді так, то така мала концентрація не моглаби постачати йонів для значного току ($4{\cdot}10^{-2}$ amp.), який спостерігаємо при цьому катодному потенціялі. Отже, при цьому неґативному потенціялі катода не реаґує на ртутьні йони, а вказує рівновагу між атомами водня в електроді і водневими йонами в розчині. Концентрація йонів ртути в поверхневій верстві є при тому дуже значна (майже така сама, як перед електролізою).

Обговорення.

Появу максімів току при катодичній поляризації вперше описав M. Shikata при редукції нітробензену на капковій катоді (Trans. Faraday Soc. **21**, 42, 52, 1925). Потім подібні максіма були спостережені E. Sanigar'ом (Rec. Trav. Chim. 44, 1925) і мною (Chem. Listy 19, № 5, 1925). Дальші досліди Гейровського і його співробітників[1]) вказали, що максіма току можна спостерігати майже при кожній електродукції на капковій катоді: один приклад був досліджений К. Танчаківським і є описаний в біжучім томі Збірника. Цікаво, що Mc Aulay і Bowden (Proc. Roy. Soc. London, **110**, May 1926) досліджували зі сталою електродою той самий випадок, що був студіований в цій праці мною, але теоретичні міркування цих авторів не можна прийняти за правдиве вияснення спостережених фактів. Mc Aulay і Bowden досліджували тільки один розчин ($N.HgNO_3 + N.HNO_3$); зріст току перед максімом вони приписують одночасовому виділенню ртутьних і водних йонів і вважають, що великій зріст спричинений тим, що перенапруження водня з початку є дуже мале. Спад току вони пояснили тим, що на поверхні ртути раптом твориться верства (дуже неясного характеру), яка спричинює перенапруження і тому ток виділення водня падає і виділення його може наставати тільки при вищих катодних потенціялах. Вони спостерігали також тривалість цієї верстви (подібно, як в описаних мною дослідах).

Пояснення цих авторів є хибні: із численних дослідів з капковою катодою слідує, що максімум току на кривих не стоїть у жадному звязку з перенапруженням водня. Далі, перед спадом току водень з розчинів ртутьних солей і азотної кислоти зовсім не виділюється: в наших дослідах ми не спостерігали цього виділення, а Mc Aulay і Bowden не звертали увагу на те, що виділюється в них на катоді, а спостерігали лишень ток на ампермегрі.

Вияснення максімів току було докладно подано в працях I. Heyrovsk'ого і моїй (читано перед Faraday Society 25. I. 1925) і досліди, описані тут, як найліпше потверджують запропоноване нами пояснення.

Коло поверхні катоди в наслідок адсорпції концентрація ртутьних йонів є більша ніж в глибині розчину. При електролізі ток спотрібовує ці йони, але адсорпція з початку є так скора, що страта йонів з поверхневої верстви моментально покривається новими йонами, що адсорбується з глибини розчину. При збільшенні вольтажу скорість виділення зростає, але не має підстав твердити, що скорість адсорпції міняється з потенціялом електроди. Коли катода, нарешті, прибере такий потенція, що скорість виділення йонів рівна скорости адсорпції, то ток досягає максімальної величини. Треба звернути увагу на те, що скорість адсорпції є така велика, що механічне перемішування практично є зайве: максімальні токи однакові при перемішуванні і в спокійному розчині. Дальше збільшення потенціялу катоди при-

[1]) Heyrovský a Emelianova. Rozpravy České Akademie Věd **36**, č. 7, 1927.

водить до того, що скорість виділення перевищить скорість адсорпції: йони з поверхневої верстви швидко зникають і поверхня катоди стає відділеною від глибини розчину верствою, з котрої ртутьні йони вичерпані. Ця верства перешкаджає адсорпції, бо очевидно притягання йонів даного роду до поверхні передається через ці йони. Через верству рочину з якої вичерпані ртутьні йони, адсорпційні сили не в стані діяти. Цю верству я назвав „адсорпційною ізоляцією“. Витворення цієї ізоляції значно зменшує скорість постачання йонів до поверхні електроди і тому ток раптом падає. Адсорпційна ізоляція щільно прилягає до поверхні катоди і, як що тільки витворилась, вимагає значного механічного зусилля, щоби її продерти. Тому при зворотньому поступі без перемішування ток зовсім не зростає, а при перемішуванні спостерігається гістереза. Тут треба пригадати той фізичний факт, відомий з досвіду руху течий, що верстви течи, які находяться коло поверхні ціпкого тіла, порушуються з меншою скорістю ніж остання маса течи. Ця мала порушність верств прилягаючих до катоди надає адсорпційній ізолації значну стійкість. Ток після максіма падає не на зеро, а на певну малу величину. Цей останній ток є спричинений звичайною дифузією йонів ртути через ізоляційну верству[1]). Цей ток насичення або дифузійний ток залежить на перемішуванні розчину, бо при руху розчину грубість прилягаючої до катоди ізоляційної верстви зменшується. При значно неґативних потенціялах катоди (після спаду току) механічне порушення адсорпційної ізолації не веде до зросту току, бо при таких потенціялах скорість виділення так значна, що „діра“ в версті (як що вона появиться) моментально „залатується“.

При досліді максімів спостережених при редукції уранілових солий я найшов, що придавання инших річевин зменшує висоту максіма або й зовсім „пригноблює“ його залишаючи на кривій звичайний ток насичення. Пригноблення току адсорпції означає зменшення адсорпції придаваною річевиною, котра сама адсорбується і витискає з поверхні йони, що редукуються на катоді. Зменшення адсорпції певної річевини придаванням иншої є річ загально відома у явищах поверхневої (колоїдальної) хемії.

Треба вказати, що поява максімів при електролізі і адсорпційна природа пього явища має велике значіння для досліду адсорпції — цього важного, але, поки що, таємничого процесу.

Можна спідіватися, що дальша розробка подібних електричних студій адсорпції дасть змогу освітлити цю проблєму.

Вислідком цих дослідів зі сталими електродами[1]) є встановлення факту існування адсорпційної ізоляції. Бажано, прослідити і виміряти грубість таких ізоляційних верств, щоби тим визначити віддаль, на яку ділають адсорпційні сили а можливо і їх природу. На жаль, при сучасному стані дослідів матеріял не можна привести до математичної формулації.

Досліди ці переведено в Лабораторії Українського Педаґоґічного Інституту в Празі. Автор висловлює свою щиру подяку Ректорові Інституту, Професорові Др. В. Сімовичеві, і Сенатові Інституту за матеріяльне уможливлення дослідів.

Професорові Карлового Університету Dr-ові I. Heyrovsk'ому автор щиро дякує за цінне обговорення праці.

Український Педаґоґічний Інститут
ім. М. Драгоманова в Празі.

[1]) Треба памятати, що „адсорпційна ізоляція“ не значить „електрична ізолація“: в поверхневій верстві, з котрої вичерпані ртутьні йони, зістаються инші йони напр. водневі, так що електроводність цієї верстви значно не міняється.

[1]) Dr. Ellingham (College of Science, London) приватно повідомив мене, що ним найдено максіма на сталих електродах з платини при редукції азотної кислоти.

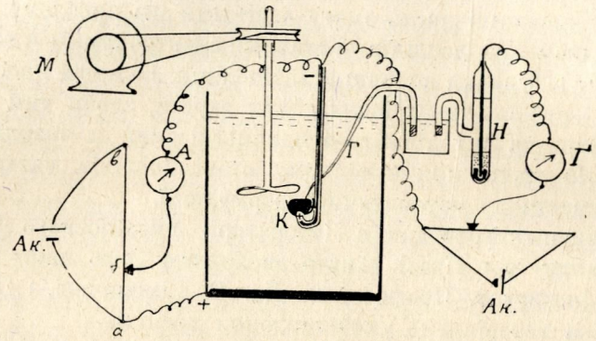


Рис. 1. Схема помірів.

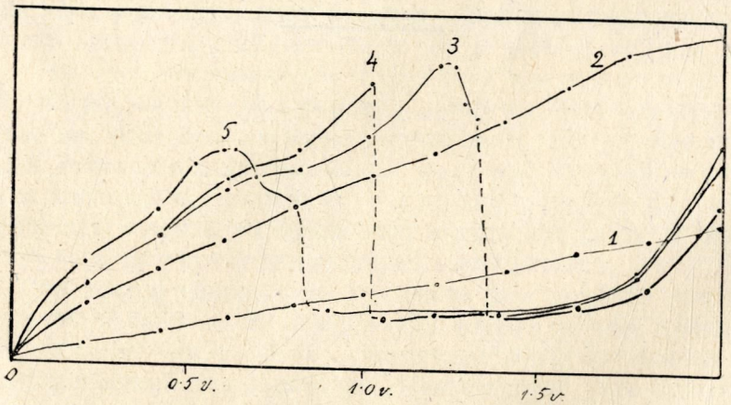


Рис. 2. Криві: ток — зовнішній вольтаж.
Розчини: 1. 0·01 *n* $HgNO_3$ + 0·015 *n* HNO_3
2. „ „ „ „ 0·055 „ „
3. „ „ „ „ 0·095 „ „
4. „ „ „ „ 0·095 „ „
5. „ „ „ „ 0.134 „ „

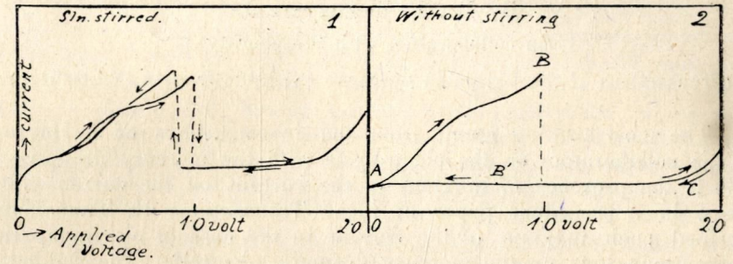


Рис. 3. Розчин: 0·01 *n* $HgNO_3$ + 0·134 *n* HNO_3
Криві: ток — вольтаж.
1. Розчин перемішувано. 2. Без перемішування.

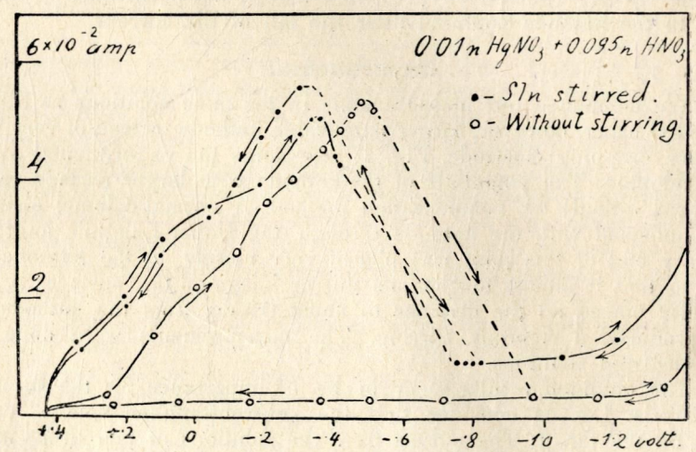


Рис. 4. Криві: ток — потенціял катоди.
●— Розчин перемішувано.
○— Без перемішування.

SUMMARY.

Electric Polarisation of Mercury Kathodes in Solutions of Mercurous Salts.

By **Dr. P. Herasymenko.**

(In collaboration with Starohorśkyj.)

(Transactions of the Ukrainian Ševčenko Scientifie Society in Lemberg).

The most striking result from the investigations of J. Heyrovký and his collaborators on the electrolysis with the mercury dropping kathode is the presence of maxima of the current on the current-voltage curves. In a precedent paper of these Transactions K. Tančakivskyj described such maxima of the current in the case of electrodeposition of mercurous ions on the mercury dropping electrode. The sudden decrease of the current after the maximum must be necessarily accompanied with a sudden change of kathode potential as it is evident from the Ohm's Law applicable to the electrolysis in the form: $iR = E—P$. (Here, i — is current insensity, R — resistance of the circuit, E — applied e. m. f. and P — e. m. f. of polarisation; P is obliviously equal to the sum of the kathode and anode potentials. In the arrangement with the mercury dropping kathode, as also in our experiments given below, the anode has been made unpolarisable.) The electrocapillary measurements by K. Tančakivskyj verified indeed the occurrence of sudden shifts in the kathode potential after the fall of the current.

Experimental.

We conducted our measurements in the same solutions as K. Tančakivskyj using, however, larger immovable kathode instead of very small mercury dropping electrode. Fig. 1. represents the experimental arragement adopted. The potentials of the kathode with larger surface can be measured directly by compensation method. A normal calomel electrode was connected with the kathode through the Haber-Luggin's joint; the capillary end of this joint was placed very closely to the kathode surface, so that it almost touched its mirror image on that surface. A glass propeller placed ad the distance of about 0·3 cm from the kathode surface produced a vigorous stirring. The measurements were done also with unstirred solutions.

The obtained results seem to be of importance for the theory of electrolysis. Let us consider first the „current-applied votage" curves given on the fig. 2. The curves from the solutions of mercurous nitrate with a small content of nitric acid have a linear shape. The slope of current on the curve 1. is small and this is indoubtedly due to the small electric conductance of the solution. With increasing concentration of nitric acid the slope of the current becomes more steep and on the curve 3. we observe the charactreristic maximum of the current. Further additions of nitric acid produce a decrease of the maximal current. The last effect of the additions on the maximal current I observed first on

the reduction curves of uranyl salt solutions (Chem. Listy, N. 5. 1925). The current after the maximum is independent of applied voltage, thus having the properties of a saturation current. The increase of the current at the end of the curves is due to reduction of nitric acid.

A very peculiar feature from our experiments is given by the fact that the height of the maximum current is independent on the stirring of the solution, whereas the saturation current greatly increases on stirring. The current — voltage curves show a hysteresis when the cathode is polarised backwards (i. e. from greater voltages to lower ones). If the solution is stirred the current on backward polarisation increases to maximum at somewhat lower voltage than at which it decreased during onward polarisation. Especially large hysteresis is observable when the solution is electrolysed without stirring. In this case the current after it has been fallen from the maximum does not rise at all on backward polarisation, but continually moves along the saturation current curve (Compare fig. 3.). However, if we disturb the catode interface merely by touching it by a glass rod at the voltage B' (see fig. 3.) the current immediately rises to maximum. At voltages greater than that correspondig to point B ont he curve 2. fig. 3. (potential of the maximum) the mechanical distubance of the surface does not lead to the increase of current.

A similar shape have the cathode potential-current curves. One example of these curves is given in the table 1. and on the fig. 4.

At the beginning of the electrolysis the kathode is unpolarisable but soon afterwards its potential commences to change continually toward negative values. This behaviour of the kathode potential cannot be due to the concentration polarisation of mercurous ions: from the fig. 1. we see that to the same kathode potential can correspond different current intensities according to the direction in which electrode is polarised (onwards or backwards). The polarisation of the kathode is to be ascribed to the charging of the electrode with atomic hydrogen: the kathode becomes a hydrogen electrode with very small activity of hydrogen atoms. Owing to the minute concetration of hydrogen atoms, which is necessary to establish the observed potentials, the current due to the deposition of hydrogen is infinitesimally small in comparison with the current of the deposition of mercurous ions. According to the previous history of electrolysis the concentration of mercurous ions near the surface of the kathode can slightly differ so that the current of their deposition might be not the same at the same kathode potential. With the fall of current the kathode potential changes discontinually, but after this change took place the kathode polarises continually with further increase of the applied e. m. f. Peculiarly enough, the current in this part of the curve has always the same value at the same kathode potential independently of the course of the polarisation.

It must be noted that the potential at which the current falls depends on the concentration of nitric acid in the solution electrolysed: with the increase of the concentration of nitric acid the potential of the maximae current displaces to the negative side.

Discussion.

The occurence of the maxima of the current on the polarisation curves was explained by J. Heyrovský in the following way (Paper read before the Faraday Society, 25 th Jan. 1928; see also, P. Herasymenko, ibidem.): We assume that mercury ions are strongly adsorbed at the surface of the kathode. The electrodeposition diminishes the concentration of mercurous ions in the interfacial layer but this decrease is instantly compensated by the quick adsorption. We assume, that the velocity of adsorption is independent of the kathode potential and that the adsorption forces are negligible at some definite small distance from the cathode surface. With increasing polarisation the rate of exhaustion of mercurous ions by electrodeposition increases so that we reach finally such value of kathode potential at which the adsorption just restores the decrease of mercurous ions: at this potential the current must be maximal. At any greater polarising e. m. f. the velocity of electrodeposition becomes greater than the rate of adsorption; in consequence of this an exhaustion of reducible matter immediately starts in the interfacial layer. Now a thin layer of the solution eshausted as to the mercurous ions surrounds the kathode, the thickness of which prevents the action of the adsorption forces between the cathode surface and mercurous ions in the bulk solution, so that the current rapidly falls. The small saturation current is due to the electrodeposition of only those ions which slowly diffuse through the exhausted layer. This layer has a remarkable stability and once formed can be destroyed only mechanically by direct disturbance or by stirring. When formed in an unstirred solution this layer remains intact on several backward and onward polarisations. This stability explains the hysteresis of the observed curves.

The independence of the adsorption (maximal) current of the rate of stirring of the solution deserves a special attention. It shows that the adsorption velocity is very high; unless the velocity of deposition corresponding to a given kathode potential is not too great, the adsorption instantly restores any loss of reducible matter in the interfacial layer so that the stirring is practically useless. But, as soon as the film-isolation on the kathode is formed, the stirring has a great influence on the saturation (diffusion) current since it evidently diminishes the thickness of the film.

Mc Aulay and Bowden studdied recently (Proc. Roy. Soc. May, 1926) the electrolysis of the solutions of mercurous nitrate and nitric acid, and found also the sudden changes of current and kathode potential similar to that described in this communication. But, they attributed this phenomena to the sudden changes in overvoltage. Since before the fall of current only mercury is deposited on the kathode and as J. Heyrovský found the maxima can be observed on current-voltage curves during each electrodeposition or reduction, the hypothesis of Mc Aulay and Bowden is unjustifiable. The sudden decrease of the mercury electrodeposition has nothing to do with the hydrogen over-voltage.

At the end it must be pointed out that the electrodeposition of

mercury from mercurous nitrate solutions seems to proceed in several stages. It can be concluded from the fact that curves of electrodeposition have several inflections (before the fall of the current). The increase of the current at the beginning is due to the discharge of simple mercurous ions; further bends possibly correspond to the discharge of mercury from complex ion. We are not able at present to describe more precisely the nature of these processes.

The author wishes to express his best thanks to Professor J. Heyrovský for the valuable criticism of this work.

Ukrainian Dragomanov Institute
in Prague.

М. Кравчук (Київ).

Про збіжність деяких ланцюгових (ступанкових) дробів.

Візьмімо нескінчений ступанковий дріб

(1) $$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 +}}}$$

де a_i та b_i є якісь комплексні числа, і впровадьмо зазначення:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = a_1, \quad A_2 = a_1 b_2,$$

(2) $$A_i = b_i A_{i-1} + a_i A_{i-2}$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = b_1, \quad B_2 = b_1 b_2 + a_2,$$

(3) $$B_i = b_i B_{i-1} = a_i B_{i-2}$$

Тоді, як відомо, буде:

$$\frac{A_n}{B_n} = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 +} \quad + \frac{a_n}{b_n}}.$$

Цей дріб називаємо n-им ступанковим наближенням дроба (1), а A_n та B_n — відповідно чисельником та знаменником n-го ступанкового наближення.

Нагадаймо одну Pringsheim'ову[1]) теорему:

Коли числа a_i та b_i справджують нерівности:

4) $$|a_i| \leqq |b_i| - 1 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

то ступанковий дріб

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} +$$

збігається і його абсолютна вартість є не більша від 1, тоб то існує $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n}$ і

[1]) Див. Sitzgsber. Münch. Akademie, 1898, також O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, ст. 254.

$$\left| \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} \right| \leqq 1.$$

З (2) та (3) легко дістаємо:

$$A_i B_{i-1} - B_i A_{i-1} = (-1)^{i-1} a_1 a_2 \ldots a_i;$$

отже

$$\frac{A_i}{B_i} - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} = (-1)^{i-1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_i}{B_{i-1} B_i}, \tag{6}$$

звідки

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{B_{n-1} B_n}. \tag{7}$$

З другого боку, як показують залежности (3),

$$|B_i| \geqq |b_i| \cdot |B_{i-1}| - |a_i| \cdot |B_{i-2}|$$

$$|B_i| \geqq (|b_i| - 1) \cdot |B_{i-1}| - |a_i| \cdot |B_{i-2}|,$$

що з огляду на (4) дає:

$$|B_i| - |B_{i-1}| \geqq (|b_i| - 1)\,(|B_{i-1}| - |B_{i-2}|),$$

отже

$$|B_n| - |B_{n-1}| \geqq (|b_1| - 1)(|b_2| - 1) \ldots (|b_n| - 1) \geqq |a_1 a_2 \ldots a_n|$$

або

$$\left| \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{B_{i-1} B_i} \right| \leqq \frac{1}{|B_{i-1}|} - \frac{1}{|B_i|} \tag{8}$$

Ряд із додатних чисел (8), очевидно, збігається, бо сума з його перших n членів не перевищує 1; отже збігається й ряд

$$\frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \ldots$$

тобто, як видно з (7), існує $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n}$.

Можна ще завважити, що

$$\left| \frac{A_{n+p}}{B_{n+p}} - \frac{A_n}{B_n} \right| \leqq \sum_{i=n+1}^{n+p} \left| \frac{a_1 a_2 \ldots a_i}{B_{i-1} B_i} \right| \leqq \frac{1}{|B_n|} - \frac{1}{|B_{n+p}|}$$

та

$$\left| \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_m}{B_m} \right| \leqq \frac{1}{|B_m|}.$$

Далі подаємо та використовуємо деякі прості та важливі висновки з цієї теореми.

§. 1.

Маємо наступні твердження:

1) Коли множини чисел $|p_i|$ та $|q_i|$ є обмежені, то ступанковий дріб

$$\frac{p_1}{z+q_1} - \frac{p_2}{z+q_2} - \frac{p_3}{z+q_3} - \tag{9}$$

одностайно збігається поза колом $|z| = R$ досить великого радіюса. Справді, щоб здійснити для цього дроба нерівности (4), досить узяти

$$|z| \geqq |p_n| + |q_n| + 1$$

2) Коли числа q_i всі мають однаковий аргумент Θ і множина чисел $|p_i| - |q_i|$ є обмежена, то ступанковий дріб

$$\frac{p_1}{r_1 z + q_1} - \frac{p_2}{r_2 z + q_2} - \frac{p_3}{r_3 z + q_3} - \tag{10}$$

збігається для всіх тих вартостей змінного z, що справджують умови

$$r_i z e^{-i\Theta} \geqq |p_i| - |q_i| + 1 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

Справді, бо в такім разі

$$|p_i| \leqq |r_i z + q_i| - 1$$

Нехай маємо тепер ряд функцій

$$f_0(z) = f(z),\ f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z), \tag{11}$$

звязаних залежностями:

$$f_i(z) = \frac{s_0^{\,i}}{z - \frac{s_1^{\,i}}{s_0^{\,i}} - s_0^{\,i} f_{i+1}(z)}$$

Тоді

$$f(z) = \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0} - \frac{s_0 s_0^{\,1}}{z - \frac{s_1^{\,1}}{s_0^{\,1}} - \frac{s_0^{\,1} s_0^{\,2}}{z - \frac{s_1^{\,2}}{s_0^{\,2}} - } \quad - \frac{s_0^{\,k-2} s_0^{\,k-1}}{z - \frac{s_1^{\,k-1}}{s_0^{\,k-1}} - s_0^{\,k-1} f_k(z)},}$$

де очевидно повинно бути

$$s_0 \neq 0, \quad s_0^{\,1} \neq 0, \qquad s_0^{\,k-1} \neq 0.$$

Взявши $k = \infty$, можна поставити питання за збіжність ступанкового дроба

$$(12)\qquad \cfrac{s_0}{z - \cfrac{s_1}{s_0} - \cfrac{s_0 s_0^{\,1}}{z - \cfrac{s_1^{\,1}}{s_0^{\,1}} - \cfrac{s_0^{\,1} s_0^{\,2}}{z - \cfrac{s_1^{\,2}}{s_0^{\,2}} - }}}$$

і за правдивість рівности:

$$(13)\qquad f(z) = \cfrac{s_0}{z - \cfrac{s_1}{s_0} - \cfrac{s_0 s_0^{\,1}}{z - \cfrac{s_1^{\,1}}{s_0^{\,1}} - }}$$

в разі, коли дріб (12) збігається.

Для збіжности дроба (12) поза колом $|z| = R$ досить великого радіюса, як бачимо з попереднього, досить, щоб числа $s_0^{\,i}$, $s_1^{\,i}$, справджували нерівности:

$$(14)\qquad |s_0^{\,i-1} s_0^{\,i}| < k, \quad \left|\frac{s_1^{\,i-1}}{s_0^{\,i-1}}\right| < k \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

де k є якесь стале число; ці нерівности правдиві напр., коли дріб (12) є періодичний. Але не можемо твердити, що з умов (14) випливає рівність (13). Припустімо, що крім нерівностей (14) маємо ще для $|z| > R_1$

$$(15)\qquad f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} +$$

отже, що функція $f(z)$ розвивається в степеневий ряд в обсягу точки $z = \infty$. Тоді рівність (13) є правдива в усякім обсягу, що належить одночасно до $|z| > R$ та до $|z| > R_1$.

Справді, як відомо, розвинення n-го ступанкового наближення $\frac{A_n}{B_n}$ дроба (12) у степеневий ряд:

$$(16)\qquad \frac{A_n}{B_n} = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \quad + \frac{s_{2n-1}}{z^{2n}} + \frac{\sigma_{2n}^{(n)}}{z^{2n+1}} + \frac{\sigma_{2n+1}^{(n)}}{z^{2n+2}} +$$

має перші $2n$ членів ті самі, що ряд (15); крім того, з огляду на обмеженість множини функцій $\frac{A_n}{B_n}$ в обсягу $|z| > R$, ряди (16) всі в тім обсягу збігаються, і до тогож для $|z| > \varrho > R$

$$\left|\frac{A_n}{B_n} - \frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \quad - \frac{s_{2n-1}}{z^{2n}}\right| \leq \left|\frac{\sigma_{2n}^{(n)}}{z^{2n+1}} + \frac{\sigma_{2n+1}^{(n)}}{z^{2n+2}} + \quad \cdot\right| \leq$$

$$\leqq M\left(\left|\frac{\varrho}{z}\right|^{2n+1}+\left|\frac{\varrho}{z}\right|^{2n+2}+\quad\right),$$

де

$$M \geqq \left|\frac{A_n}{B_n}\right| \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

Так бачимо, що

$$\left|\frac{A_n}{B_n}-f(z)\right| \leqq \left|\frac{A_n}{B_n}-\frac{s_0}{z}-\frac{s_1}{z^2}-\ldots-\frac{s_{2n-1}}{z^{2n}}\right|+\left|\frac{s_{2n}}{z^{2n+1}}+\frac{s_{2n+1}}{z^{2n+2}}+\ldots\right| \leqq$$

$$\leqq M\left(\left|\frac{\varrho}{z}\right|^{2n+1}+\left|\frac{\varrho}{z}\right|^{2n+2}+\quad\right)+\left|\frac{s_{2n}}{z^{2n+1}}+\frac{s_{2n+1}}{z^{2n+2}}+\ldots\right| \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

Отже

$$f(z) = lim\frac{A_n}{B_n} \tag{17}$$

для

$$|z| > R \text{ та } R_1,$$

що й малося довести.

Слід ще відзначити, що на підставі відомої теореми Stieltjes'a — Vitali[1]), рівність (13) або (що те саме) рівність (17) правдива одностайно в усякім замкненім обсягу площі комплексного змінного z, де множина функцій $\frac{A_n}{B_n}$ є обмежена.

Звідси, між иншим, висновок, що обсяг збіжности ряду (15) є не менший за обсяг $|z| > R$.

§ 2.

Нехай сучинники ряду (15) є дійсні і справджують вимоги:

$$s_0 > 0\,, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0\,, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0, \ldots \text{ [2])} \tag{18}$$

Із нерівностей (18), на підставі відомої Jacobi'євої формули в теорії визначників випливають ще наступні

$$s_{2k} > 0\,, \quad \begin{vmatrix} s_{2k} & s_{2k+1} \\ s_{2k+1} & s_{2k+2} \end{vmatrix} > 0\,, \quad \begin{vmatrix} s_{2k} & s_{2k+2} \\ s_{2k+2} & s_{2k+4} \end{vmatrix} > 0, \ldots \tag{19}$$

Далі з залежности

$$f(z) = \cfrac{s_0}{z-\cfrac{s_1}{s_0}-s_0 f_1(z)}$$

---

[1]) Див. напр. Vitali. Annali di Matematica, (3), т. 10, 1904, Carathéodory und Landau, Sitzgsber. Berl. Akad., 1911, Jacobsthal, Jahresbericht der Deutsch. Math.—Ver., т. 36.

[2]) Цей випадок розібрав Grommer (Crelle's Journal, т. 144.), виходячи з инших засад.

де за $f_1(z)$ беремо ряд того самого, що $f(z)$:

$$f_1(z) = \frac{s_0'}{z} + \frac{s_1'}{z_2} + \frac{s_2'}{z_3} + \tag{20}$$

через порівнання сучинників вираховуємо:

$$s_i' = \frac{(-1)^{i+1}}{(s_0)^{i+3}} \begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & s_{i-2} \ldots s_0 \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} \ldots s_1 \end{vmatrix} \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{21}$$

Далі, знов із допомогою Jacob'євої формули, пишемо:

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & s_{i-2} \ldots s_0 \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} \ldots s_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & .0 \\ s_2 & s_1 & s_0 \ldots\ldots 0 \\ \\ s_i & s_{i-1} & s_{i-2} \ldots s_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 & 0 \\ \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} \ldots s_1 \end{vmatrix}^2 - (s_0)^{i+1} \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 & 0 \ldots . 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \quad 0 \\ \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} \ldots s_2 \end{vmatrix}$$

або, беручи під увагу (21):

$$-\begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \ldots . & 0 \\ \\ s_{i+1} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} \ldots & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_{i-2}' & s_{i-1}' \\ s_{i-1}' & s_i' \end{vmatrix} \cdot (s_0)^{i+3} \tag{22}$$

Так само:

$$\begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \ldots . & 0 \\ \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} \ldots & s_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 \ldots\ldots 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 \ldots\ldots 0 \\ \\ s_i & s_{i-1} & s_{i-2} \ldots s_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s_2 & s_1 s_0 & 0 \ldots . 0 \\ s_3 & s_2 s_1 & s_0 \ldots . 0 \\ \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} s_{i-2} \ldots s_2 \end{vmatrix}^2 = (-s_0)^{i+1} \quad s_{i-2}^i \begin{vmatrix} s_3 & s_2 & s_1 s_0 & 0 \ldots 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 s_1 & s_0 \ldots 0 \\ \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} \ldots s_3 \end{vmatrix}$$

або, беручи під увагу (22):

$$\begin{vmatrix} s_3 & s_2 & s_1 s_0 & 0 \ldots 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 s_1 & s_0 \ldots 0 \\ \\ s_{i+2} & s_{i+1} \ldots\ldots\ldots & s_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_{i-4}' & s_{i-3}' & s_{i-2}' \\ s_{i-3}' & s_{i-2}' & s_{i-1}' \\ s_{i-2}' & s_{i-1}' & s_i' \end{vmatrix} \quad (s_0)^{i+3} \tag{23}$$

І т. д. Поклавши тепер в (21) $i = 0$, в (22) $i = 2$, в (23) $i = 4$, дістанемо:

(24) $$s'_0 = \frac{1}{(s_0)^3} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 \\ s'_1 & s'_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 & s'_2 \\ s'_1 & s'_2 & s'_3 \\ s'_2 & s'_3 & s'_4 \end{vmatrix} > 0,$$

Отож нерівности (18) [а так само і (19)] не порушуються, коли в них числа s_k замінити відповідно числами s'_k.

Тепер з (24) та з (19) маємо:

(25) $$\left| s_0^{i-1} s_0^i \right| \leqq \frac{s_2^{i-1}}{s_0^{i-1}} < \frac{s_4^{i-1}}{s_2^{i-1}} < \frac{s_6^{i-1}}{s_4^{i-1}} <$$

(26) $$\left| \frac{s_{2k+1}^i}{s_{2k}^i} \right| < \left| \frac{s_{2k+2}^i}{s_{2k+1}^i} \right|$$

отже

(27) $$\left| \frac{s_1^i}{s_0^i} \right| < \sqrt{\frac{s_2^i}{s_0^i}} < \sqrt{\frac{s_4^i}{s_2^i}} < \sqrt{\frac{s_6^i}{s_4^i}} <$$

(28) $$\left| \frac{s_3^i}{s_2^i} \right| < \sqrt{\frac{s_4^i}{s_4^i}} < \sqrt{\frac{s_6^i}{s_4^i}} < \sqrt{\frac{s_8^i}{s_6^i}} < \ldots$$

Останні нерівности доводять існування оцих границь:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{s_{2k+2}}{s_{2k}}} = \alpha \leqq R \text{ та } \lim \frac{s_{2k+2}^i}{s_{2k}^i} > 0,$$

і тоді (25), (27) та (28) дають:

(29) $$\left| s_0 s_0^i \right| \leqq \alpha^2, \quad \left| \frac{s_0}{s_1} \right| \leqq \alpha, \quad \left| \frac{s_{2k+1}}{\alpha} \right| \leqq s_{2k}$$

Тепер доведімо, що для всякого i правдиві нерівности:

(30) $$\left| s_0^{i-1} s_0^i \right| \leqq \alpha^2, \quad \left| \frac{s_0^i}{s_1^i} \right| \leqq \alpha, \quad \left| \frac{s_{2k+1}^i}{s_{2k}^i} \right| \leqq \alpha \leqq R$$

Справді, колиб найдальша від $z=0$ особлива точка β функції $f_1(z)$ лежала поза колом

$$|z| = \alpha,$$

то вона моглаб бути лише (простим або кратним) полюсом функції $f_1(z)$, тоб то нулем функції $f(z)$; при тім цей полюс не міг бути дійсним, бо для такого дійсного числа β

$$\beta f(\beta) = \left(s_0 + \frac{s_1}{\beta}\right) + \frac{1}{\beta_2}\left(s_2 + \frac{s_3}{\beta}\right) +$$

$$+ \quad > \left(s_0 - \left|\frac{s_1}{\alpha}\right|\right) + \frac{1}{\beta_2}\left(s_2 - \left|\frac{s_3}{\alpha}\right|\right) + \quad \geqq 0$$

Отож нехай цей полюс є

$$\beta = |\beta| \quad e^{i\Theta} \qquad (\Theta \neq k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots),$$

а його résidu

$$B = |B| \quad e^{i\varphi};$$

коли більше полюсів з модулем $|\beta|$, крім $|\beta| e^{i\Theta}$, функція $f_1(z)$ не має, то дістаємо неможливу нерівність:

$$0 < \lim_{n=\infty} \frac{s'_{2n+2}}{\varrho^2 s'_{2n}} = \lim_{n=\infty} \frac{\cos(2n+2)\Theta + \varphi)}{\cos(2n\Theta + \varphi)} =$$

$$= \lim_{n=\infty} [\cos 2\Theta - \sin 2\Theta\, tg\,(2n\Theta + \varphi)],$$

бо ця границя або не існує або (у випадку $\Theta = \pm\frac{\pi}{2}$) є -1. Той самий висновок і з припущення кількох пар полюсів з модулем $|\beta|$: воно неможливе з огляду на додатність відношення $\frac{s'_{2n+2}}{s_{2n}}$.

Так доведемо, що за умов (18) всі ряди $f_i(z)$ збігаються в обсягу $|z| > R$; одночасно доведемо нерівності (30) і рівність:

$$(31) \qquad f(z) = \cfrac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0} - \cfrac{s_0 s_0^{\,1}}{z - \frac{s_1^{\,1}}{s_0^{\,1}} - }}$$

для досить великих вартостей $|z|$, за тих самих умов.

§ 3.

До типу функцій $f(z)$ попереднього параграфу належать інтеґрали Stieltjes'a — Маркова:

$$(32) \qquad f(z) = \int_a^b \frac{d\psi(x)}{z - x},$$

де функція $\psi(x)$ є обмежена і не меншає на інтервалі (a, b) (інтеґрал узято в розумінні Stieltjes'овім). Тут очевидно $f(z)$ є аналітична функція від z скрізь на площі комплексного змінного z, окрім точок інтервалу (a, b). Поза колом

$$|z| = R$$

досить великого радіюса маємо:

$$f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} +$$

як що a та b є числа скінчені; тут

$$s_i = \int_a^b x^i \, d\psi(x) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

Звідси, з огляду на нерівність:

$$d\psi(x) \geqq 0,$$

як простий висновок нерівности:

$$s_0 > 0, \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0, \ldots$$

Отже функція (32) розвивається в ступанковий дріб, що збігається до цеї функції скрізь поза колом $|z| = R$ досить великого радіюса.

Не так легко стоїть справа досліду збіжности ступанкових дробів, що в них розвиваються інтеґрали (32) з нескінченими межами. Нпр. відомо, шо $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{z-x} \, dx$ розвивається в ступанковий дріб[1])

$$(33) \qquad \cfrac{1}{z - 1 - \cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{z-3}{2} - \cfrac{\frac{m}{m+1}}{\frac{z-2m-1}{m+1} - \cdots}}}$$

Збіжність цього дроба для вартостей змінного

$$z < 0$$

випливає з п. 2) § 1, до слід лише покласти:

$$r_i = \frac{1}{i+1}, \qquad \Theta = \pi;$$

тоді бо буде

$$|p_i| - |q_i| + 1 = \frac{i}{i+1} - \frac{2i+1}{i+1} + 1 = 0$$

---

[1]) Пор. А. Марков, Исчисление конечных разностей, стор. 121.

Але питання, чи правдива рівність

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{z-x} = \cfrac{1}{z-1-\cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{z-3}{2}-}}$$

цим не розвязується. Теорія Маркова та Stieltjes'a дає на нього позитивну відповідь.

Завважмо на останку оце відоме просте твердження: нулі та полюси n-го ступанкового наближення $\frac{A_n}{B_n}$ дроба (31) всі ріжні, дійсні і чергуються, отже résidus всіх полюсів додатні. Ця властивість не залежить від збіжности нашого дроба і правдива для всякого дроба типу

$$\cfrac{p_1}{z+q_1}-\cfrac{p_2}{z+q_2}-\cfrac{p_3}{z+q_3}-$$

де числа q_i *в дійсні*, а *числа* p_i — додатні.

Отож

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{R_1}{z-x_1} + \frac{R_2}{z-x_2} + \quad + \frac{z-x_n}{R_n},$$

де числа x_i дійсні, а числа R_i додатні і при тім

$$R_1 + R_2 + \quad + R_n = s_0 \tag{34}$$

і тому

$$f(z) = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{z-x_i} \tag{35}$$

З огляду на (34) бачимо, що всі $\frac{A_n}{B_n}$ обмежені в усякім обсягу поза дійсною віссю площі комплєксного змінного z. Отже, на підставі теореми Vitali (див. § 1) рівність (35) (або рівноважна рівність (31)) є правдива на всій площі, крім, може, частини дійсної оси.

Що до рівности (35), то вона особливо виявляє, оскільки загальний приклад умов (18) дає функція (32).

§ 4.

Нехай тепер сучинники ряду

$$f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z_2} + \frac{s_2}{z_3} + \quad ,$$

лишаючися дійсними, справджують вимоги

(36)

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{i-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_i \\ \cdot & \cdot \\ s_{i-1} & s_i \dots s_{2i-2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_i \\ s_1 & s_2 \dots & s_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ s_i & s_{i+1} \dots & s_{2i} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_{i+1} \\ s_1 & s_2 & s_{i+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{i+1} & s_{i+2} \dots & s_{2i+2} \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

почавши з якогось значка $i > 0$. Узагальняючи обчислення параграфу 2 легко приходимо до формули:

$$\begin{vmatrix} s_0^1 & s_1^1 \dots\dots s_{i+p-1}^1 \\ s_1^1 & s_2^1 \dots\dots s_{i+p}^1 \\ \cdot & \cdot \\ s_{i+p}^1 & s_{i+p+1}^1 \dots s_{2i+2p-2}^1 \end{vmatrix} = (s_0)^{-2i\ 2p-1} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_{i+p} \\ s_1 & s_2 \dots\dots & s_{i+p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{i+p} & s_{i+p+1} \cdot & \cdot s_{2i+2p} \end{vmatrix}.$$

Так само:

$$\begin{vmatrix} s_0^2 & s_1^2 \dots s_{i+p-2}^2 \\ s_1^2 & s_2^2 \dots s_{i+p-1}^2 \\ \cdot & \cdot \\ s_{i+p-2}^2 & \dots s_{2i+2p-4}^2 \end{vmatrix} = (s_0^1)^{-2i-2p+1} \begin{vmatrix} s_0^1 & s_1^1 \dots\dots s_{i+p-1}^1 \\ s_1^1 & s_2^1 \dots\dots s_{2i+2p-2}^1 \\ \cdot & \cdot \\ s_{i+p}^1 & s_{i+p+1}^1 \dots s_{2i+2p-2}^1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} s_0^i & s_1^i \dots\dots s_p^i \\ \cdot & \cdot \\ s_p^i & s_{p+1}^i \dots s_{2p}^i \end{vmatrix} = \left(s_0^{i-1}\right)^{-2p-3} \begin{vmatrix} s_0^{i-1} \dots s_p^{i-1} & s_{p+1}^{i-1} \\ \cdot & \cdot \\ s_{p+1}^{i-1} \dots s_{2p-1}^{i-1} & s_{2p+2}^{i-1} \end{vmatrix}$$

Перемноживши ці рівности, дістанемо:

(37)
$$\begin{vmatrix} s_0^i & s_1^i \dots\dots s_p^i \\ \cdot & \cdot \\ s_p^i & s_{p+1}^i \dots s_{2p}^i \end{vmatrix} = (s_0)^{-2i-2p-1} \left(s_0^1\right)^{-2i-2p+1} \left(s_0^{i-1}\right)^{-2p-3} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots\dots s_{i+p} \\ s_1 & s_2 \dots\dots s_{i+p+1} \\ \cdot & \cdot \\ s_{i+p} & s_{i+p+1} \dots s_{2i+2p} \end{vmatrix}.$$

Зосібна тут можна взяти $i-1$ замість i та 0 замість p:

(38)
$$s_0^{i-1} = (s_0)^{-2i+1} \left(s_0^1\right)^{-2i+3} \dots \left(s_0^{i-2}\right)^{-3} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{i-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_i \\ \cdot & \cdot \\ s_{i-1} & s_i \dots s_{2i-2} \end{vmatrix}.$$

Дві останні формули показують, що вирази

$$\begin{vmatrix} s_0^i & s_1^i & \dots & s_p^i \\ s_1^i & s_2^i & \dots & s_{p+1}^i \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ s_p^i & s_{p+1}^i & \dots & s_{2p}^i \end{vmatrix} \text{ та } \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & \dots & s_{i+p+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & \dots & s_{i+p} \\ \cdot & & & & \\ s_{i+p} & s_{i+p+1} & \dots & & s_{2i+2p} \end{vmatrix}$$

мають однаковий знак. Отож із умов (36) випливає, коли покласти $p = 0, 1, 2, 3, \dots$:

$$(37) \qquad s_0^i > 0, \qquad \begin{vmatrix} s_0^i & s_1^i \\ s_1^i & s_2^i \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} s_0^i & s_1^i & s_2^i \\ s_1^i & s_2^i & s_3^i \\ s_2^i & s_3^i & s_4^i \end{vmatrix} > 0, \dots$$

Звідси, в звязку з тим, що доведено в параграфі 3, висновок: ступанковий дріб

$$f_i(z) = \cfrac{s_0^i}{z - \cfrac{s_1^i}{s_0^i} - \cfrac{s_0^i s_0^{i+1}}{z - \cfrac{s_1^{i+1}}{s_0^{i+1}} - \dots}}$$

збігається до функції $f_i(z)$ поза колом $|z| = R$ досить великого радіюся; якийби не був значок i, за умов (36) функція $f(z)$ розкладається в збіжний ступанковий дріб так, що

$$f(z) = \cfrac{s_0}{z - \cfrac{s_1}{s_0} - \cfrac{s_0 s_0^1}{z - \cfrac{s_1^1}{s_0^1} - }}$$

поза колом $|z| = R$ досить великого радіюса.

Очевидно умови (37) рівноважні з нерівностями:

$$(38) \qquad s_0^i > 0, \qquad s_0^{i+1} > 0, \qquad s_0^{i+2} > 0, \dots$$

Але з (37) або з (38) не конче випливають нерівности (36), а умови трохи загальні:

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_i \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+1} \\ \cdot & & & \cdot \\ s_i & s_{i+1} & \dots & s_{2i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ s_{i-1} & \dots & & s_{2i-2} \end{vmatrix}} > 0, \qquad \frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ s_{i+1} & s_{i+2} & \dots & s_{2i+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ \cdot & & & \cdot \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix}} > 0,$$

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i+2} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+3} \\ \cdot & & & \cdot \\ s_{i+2} & s_{i+3} & \dots & s_{2i+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ \cdot & & & \cdot \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix}} > 0, \dots,$$

що є цілком рівноважні з умовами (37).

Résumé.

Sur la convergence des certaines fractions continues

par **M. Krawtchouk.**

En se basant sur un critière connu de Pringsheim on peut affirmer que la fraction continue

$$\frac{p_1}{z+q_1} - \frac{p_2}{z+q_2} - \frac{p_3}{z+q_3} - \quad ,$$

converge pour $|z| > R$, si les nombres p_i et q_i vérifient la condition suivante:

$$|p_i| + |q_i| \leqq R+1$$

En développant la fonction

$$f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} +$$

en fraction continue:

$$(1) \qquad \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0} - \frac{s_0 s_0^{1}}{z - \frac{s_1^{1}}{s_0^{1}} - \frac{s_0^{1} s_0^{2}}{z - \frac{s_1^{2}}{s_0^{2}} -}}}$$

on peut établir que

$$f(z) = \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0} - \frac{s_0 s_0^{1}}{z - \frac{s_1^{1}}{s_0^{1}} -}}$$

pour $|z|$ assez grand pourvou que les nombres

$|s_0^{i-1} s_0^{i}| + \left|\frac{s_1^{i}}{s_0^{i}}\right|$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ soient bornés.

L'auteur démontre que cette dernière condition est remplie dans le cas

$$s_0 > 0, \qquad s_0^{1} > 0, \qquad s_0^{2} > 0, \ldots$$

ainsi que dans le cas plus général:

$$s_0^{k} > 0, \qquad s_0^{k+1} > 0, \qquad s_0^{k+2} > 0, \ldots$$

Ce dernières conditions se réduisant aux suivantes:

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_k \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{k+1} \\ & & & \\ s_k & & \ldots & s_{2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \\ \cdot & & & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & \ldots & s_{2k-2} \end{vmatrix}} > 0, \qquad \frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k+1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{k+2} \\ & & & \\ s_{k+1} & s_{k+2} & \ldots & s_{2k+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \\ \cdot & & & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & \ldots & s_{2k-2} \end{vmatrix}} > 0,$$

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k+2} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{k+3} \\ \cdot & & & \\ s_{k+2} & s_{k+3} & \ldots & s_{2k+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \\ \cdot & & \cdot & \\ s_{k-1} & s_k & \ldots & s_{2k-2} \end{vmatrix}} > 0,$$

on parvient de la sorte à la généralisation des inégalités connues

$$s_0 > 0, \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0, \ldots$$

suffisantes pour la convergence de la fraction conitnue (1).

М. Кравчук (Київ).

Замітка про контурні інтеґрали.

Як відомо, загальний довід знаної рівности

$$(1) \qquad \int_C P(x,y)\,dy = \iint_S \frac{\partial P}{\partial x}\,ds$$

зводиться на випадок, коли C є обвід прямокутника з вершками $(x_1\,y_1)$, $(x_2\,y_1)$, $(x_2\,y_2)$, $(x_1\,y_2)$*). Ми доведемо тут правдивість рівности (1) для всякого замкненого контура C в данім обсягу Σ, як що для всякого такого контура права й ліва сторона цеї рівности існують (не вимагаючи напр. суцільности функцій P та $\frac{\partial P}{\partial x}$).

Зазначивши через C_n обвід згаданого прямокутника та через s_n його поле, можемо дібрати числа b та B на інтервалі $(y_1\,y_2)$ так, що буде:

$$(2) \qquad [P(x_2\,b) - P(x_1\,b)](y_2 - y_1) \leqq \int_{C_n} P\,dy =$$

$$= \int_{y_1}^{2} [P(x_2\,y) - P(x_1\,y)]\,dy \leqq [P(x_2\,B) - P(x_1\,B)](y_2 - y_1),$$

тоб то:

$$(3) \qquad \frac{\partial P}{\partial x}(a,b)\,.\,s_n \leqq \int_{C_n} P\,dy \leqq \frac{\partial P}{\partial x}(A,B)\,.\,s_n \qquad (x_1 < a,\ A < x_2)$$

А що поле s можна з довільним наближенням заступити сумою піль типу s_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$, то

$$lim \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial P}{\partial x}(a,b)\,.\,s_n = \iint_S \frac{\partial P}{\partial x}\,ds = lim \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial P}{\partial x}(A,B)\,.\,s_n$$

*) Пор. артикул „Про Green'ове та Stokes'ове перетворення“ в т. XXV цього „Збірника“ (рік 1926); в цій замітці взагальнено деякі з його висліків. При цій нагоді завважмо, що помічну теорему на стор. 86 у тім артикулі слід опустити (що не порушить дальших висліків).

і так само

$$\int_C P\,dy = \lim \sum_{n=1}^{N} \int_{C_n} P\,dy\,;$$

це, з огляду на (3), і доводить наше твердження.

Подібнимиж міркуваннями дійдемо рівностей:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \int_C (P\,dy - Q\,dx) &= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) ds\,, \\ \int_C (P\,dx + Q\,dy) &= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) ds\,, \end{aligned}$$

як що для довільного числа $\varepsilon > 0$ можна обсяг Σ поділити на такі квадратові обсяги типу s_n, що в кожнім із них бодай одна точка (a, b) справджує нерівности:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\left| P(x\,y) - P(a\,b) - (x-a)\frac{\partial P}{\partial x}(a\,b) - (y-b)\frac{\partial P}{\partial y}(a\,b)\right| \leqq \varepsilon \sqrt{s_n} \\ &\left| Q(x\,y) - Q(a\,b) - (x-a)\frac{\partial Q}{\partial x}(a\,b) - (y-b)\frac{\partial Q}{\partial y}(a\,b)\right| \leqq \varepsilon \sqrt{s_n}\,, \end{aligned}$$

коли точка (x, y) перебігає контур C_n.

Справді, останні нерівности дозволяють написати:

$$\left| \int_{C_n} \left[P(x\,y) - P(a\,b) - (x-a)\frac{\partial P}{\partial x}(a\,b) - (y-b)\frac{\partial P}{\partial y}(a\,b)\right] dy \right| =$$

$$= \left| \int_{C_n} P\,dy - \frac{\partial P}{\partial x}(a,b)\,.\,s_n \right| \leqq \varepsilon \sqrt{s_n}\,(y_2 - y_n) = \varepsilon\,.\,s_n$$

$$\left| \int_{C_n} Q\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}(a,b)\,.\,s_n \right| \leqq \varepsilon\,.\,s_n$$

З цих двох формул дістаємо:

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \int_{C_n} (P\,dy - Q\,dx) - \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{\partial P}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a,b)\right].s_n \right| \leqq 2\,\varepsilon\,.\sum_{n=1}^{N} s_n\,,$$

що, по переході до границі і зведеться на першу формулу (4). Як приклад, візьмімо функцію

$$f(z) = P(x\,y) + i\,Q(x\,y)$$

комплєксного змінного $z = x + i\,y$, що має скрізь у обсягу Σ похідну (не конче суцільну); рівність

(6) $$lim\,\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}-i\frac{\partial P}{\partial y}$$

показує, що умови (5) можна справдити, а тому, з огляду на (4) та (6), маємо:

$$\int_C(P\,dy-Q\,dx)=0,\quad \int_C(P\,dx+Q\,dy)=0,\quad \text{тоб то}\quad \int_C f(z)\,dz=0.$$

Наведені міркування взагальнюються на функції кількох змінних та на кратні інтеґрали.

Д-р Ю. Русов
Доцент Української Господарської Академії в Подєбрадах.

Бокова мускулятура риб деяких етольоґічних типів.

I. Рух і форма тіла.

§ 1. Плавці — орґани руху.

Життє тварини так тісно звязане зі способом руху, що трудно провести межу між укладом життя і рухом. Чи уклад життя примушує тварину так чи инакше рухатися, чи спосіб руху викликає ті чи инші пристосовання в орґанізмі, не будемо зараз рішати. Розглянемо, як впливає уклад життя, отже і тісно звязаний з ним спосіб руху риби на форму тіла взагалі і на мускулятуру, від якої й залежить рух, — зокрема. Спосіб руху водяних тварин взагалі, а риб зокрема вимагає від спостерігача дуже великої уваги і звичайно досвідів над живими обєктами. Ми звикли бачити, що хребетні тварини рухаються головним чином завдяки своїм кінчинам. Так само як земні тварини, мають вищі представники риб характеристичні для хребовців чотири кінчини, виявлені грудними (Pectorales) і черевними (Ventrales) паристими плавцями. Але крім цих паристих плавців мають риби й непаристі, яких бракує у земних форм і які виявлені хвостовим (Caudalis), анальними (Anales) і спинними плавцями (Dorsales); нижчі форми риб (Acrania і Cyclostomata) мають один нездиференціований, непаристий плавець, що тягнеться по спині і загинається, утворюючи хвостовий плавець кругом заднього кінця тіла та переходить у анальний плавець.

Спостереження над розвитком риб вказують, що такий плавець у вигляді одної складки, що тягнеться медіально довкруги тіла є фільоґенетичною ознакою. Причинами, що викликали розпад цієї первісної одностайної фалди, вважає Dean[1]) утвореннє при швидших ундуляторних рухах ґудзів неоднакової

[1]) За Шмальгаузеном „Непарние плавники“, Кіев, Зап. Общ. Ест. 1913.

механічної праці. Разом з проґресивним розвитком швидкости при плавбі і в звязку з цим необхідности швидших ундуляторних рухів риби і цілого плавця мусіли утворитися ґудзи слабої механічної праці, де плавець редукувався. У відступах між цими ґудзами максімальна праця викликала сильний розвиток окремих лопатів, які й дали непаристі плавці. H. Braus[1]) звязує розпад суцільної фалди на окремі плавці з придбанням рибою міцного скелету і слабим звязком плавця з тулубом (Selachiae, Chondroganoidei), коли тимчасом у риб з гнучким скелетом (Cyclostomata, Malacopteri) плавці лишаються суцільною складкою. Безперечно гнучкість або твердість скелету має дуже велике значіннє не лише в утворенні, але й у формі плавців, про що ми ще будемо згадувати. Fürbringer[2]) думає, що розпад на окремі плавці викликується проґресивним розвитком хвостового плавця, який переймає на себе головну льокомоторну функцію і поволи заміняє ундуляторний рух цілого тіла. Це пересуваннє пропульзорного апарату назад викликує потребу в сильних лопатях, які кермувалиби рухом, але одночасно і не утворювалиб великого опору; це й викликало (зновуже очевидно в звязку з отвердіннєм вісевого скелету, що зменшило змогу в ундуляторних рухах цілого тіла) розпад суцільної складки на окремі сильні плавці спинні і анальний.

Як би то не було, непаристий суцільний первісний плавець у типової форми риб розпався на окремі спинні, хвостовий і анальний (анальні) плавець.

Утвореннє паристих плавців виявляє багато неясного. Досить правдоподібною гіпотезою є те, що вони походять теж з одної суцільної ектодермальної складки. Непариста складка завернувши на черевну сторону тіла, розкололася на дві бокові, які тягнулися по боках тіла спочатку суцільно, а потім розбилися на окремі участки, з яких лишилися у сучасних риб 2 пари. O. Abel[3]) доказує, що найстарші фузіформні риби не мали паристих плавців, а пізніше дістали їх у більшій скількости. Так у Birkenia, Lasanius медіально по черевній стороні тіла тягнеться ряд непаристих плавців. У них не знаходимо жадного сліду паристих плавців і очевидно „при швидкій плавбі мусіло бути обертаннє тіла круг поздожньої воси“[4]). Y Climatius (Девон)

[1]) Теж. [2]) Теж.

[3]) O. Abel: Grundzüge der Palaeobiologie. Stuttgart 1912.

[4]) Приводжу ці слова, бо далі при розгляді ролі паристих плавців буде згадано про їх функцію як горізонтальних кермуючих апаратів.

бачимо ряд плавців, які йдуть по боках тіла, що й відповідає гіпотетичному типови з двома складками.

Можливо, що ті самі фактори, які викликали розпад суцільної медіальної складки, причинилися й до розпаду лятеральних складок, з яких у типової форми знаходимо тепер два черевні і два грудні плавці.

У риб знаходимо звичайно кінчини:

1. Непаристі: Спинний плавець (Dorsalis D), що буває або один, два або й кілька (напр. Polypterus). У Salmonidae знаходимо ще т. зв. туковий спинний плавець. Хвостовий (Caudalis) плавець ріжної форми і будови. Анальний (Analis) один, в ріжнах випадках.

2. Парисні плавці виявлені двома черевними (Ventrales), що відповідають заднім кінчинам земних тварин і двома грудними (Pectorales), що відповідають переднім кінчинам.

Форма і розташованнє плавців дуже змінливі та відповідають укладови життя тварини.

Парисні плавці у риб рідко виконують важливу льокомоторну ролю (Gasterosteus, Lophius) риби депресіформного типу і часто стають зредуковані у сильно спеціалізованих форм. Так черевні плавці часто зовсім зникають (напр. у сильно стислих з боків форм, де їх значіннє як горізонтальних стерен зменшується; у сильно видовжених форм теж). Черевні плавці можуть лежати в заднім кінці тіла (абдомінально), в грудній частині (торакально), на горлі риби (югулярно) і на підборідді (ментально). Пересуваннє черевних плавців вперід відбувається у тих риб, яких висота стає більшою ніж у фузіформного типу або у форм, яких голова є найвищою частиною тіла. Грудне і горлове становище черевних плавців у фузіформних, з боків стислих риб, пояснюється поворотом цих риб з високотілих до фузіформних[1]) (напр. Thynnus, Seriola, Naucrates).

Грудні плавці менше підлягають редукції і зміні становища, хоч в деяких випадках вони переходять далеко назад (напр. Malthopsis spinosa). Їх роля і призначеннє (крім головної функції направлення течій при плавбі — горізонтального і вертікального стерна) бувають досить ріжноманітні. Велика скількість молодих риб користується грудними плавцями для піддержки тіла, „стоючи“ на них на дні, з дорослих форм ми це саме знаходимо у (Polypterus, Neoceratodus, Zoarces) риб, що

[1]) Abel. ibid.

лазять по землі чи по деревах. Вони теж головним чином вживають для цього оріґінального для риб способу пересування грудних плавців. Деякі сомові (Periophthalmus) летучі риби вживають сильно поширених плавців як крил; у деяких форм (напр. Trigla) передні проміні грудних плавців утворюють перстніваті додатки і теж служать для пересування по дну.

Спинний плавець (або плавці) служить головним чином для стабілізації риби і лише в деяких випадках виконує головну льокомоторну функцію (напр. Hippocampus). Його форма і становище досить ріжноманітне; иноді спинний плавень переформовується у колючки чи присмочки.

Анальоґічний спинному анальний плавець, що часто лежить проти першого на черевній стороні, виконує подібну головну ролю орґану стабілізації і стерна напрямку, иноді переймаючи на себе головну льокомоторну ролю (Xenomystus). Головним пропульзорним орґаном у більшости риб є хвіст та його плавець і тому на ньому спинимося докладніще.

Ми бачили, що найбільш примітивною формою хвостового плавця являється складка, що медіально оточує задній кінець тіла. Це знаходимо вже у Amphioxus'a й у Cyclostomata. У пажорів знову бачимо, що ця складка завдяки загинанню кінця хорди в гору став дволопатньою, при чім верхня лопать значно менша від нижньої, а до того зміцняється крім внутрішнього (проксімального) скелету роговими елястичними промінняими. У костистих риб плавець зовні став симетричним, але його внутрішня будова лишається несиметричною.

Agassiz визначує два типи будови хвоста:

1. симетричний з двох однакових лопатів — гомоцеркний, і 2. несиметричний, з двох неоднакових лопатів — гетероцеркний. Завдяки працям багатьох дослідників установлено, що сліди гетероцеркії лишилися у більшости костистих риб.

Соу установив ще тип діфіцеркний себ то симетрично розташований обабіч хребта. Соре зазначив симетрію хв. пл. так звану ізоцеркну форму у Protopterus, Polypterus і деяких костистих (Apoda, Gymnarchidae, Anacanthini). Ryder[1]) указує на такий фільоґенетичний ряд в розвиткові хв. плавця відповідно до онтоґенези:

1. Архіцеркна форма без плавцевих складок (у дорослих форм немає),

[1]) Ryder як і попередні за Шмальгаузеном.

2. Льофоцеркна — з суцільною плавцевою складкою без внутрішнього скелету, з роговими промінняими або без них,

3. Діфіцеркна — симетрична,

4. Гетероцеркна — несиметрично лопатна,

5. Гомоцеркна — симетрична зовні,

6. Гефіроцеркна — друготно симетрична зовні і в середині (напр. Fierasfer).

Whitehous[1]) дає такі определення форми хвоста:

1. Протоцеркія — примітивно симетрична форма зовні і по внутрішній будові (у дорослих риб немає, бо Cyclostomata автор вважає за деґенеровані форми, завдяки паразитичному життю). „Автори часто вважають назви protocercal і diphicercal як синоніми, але diphicercal значить симетричний зовнішно і внутрішно, але друготно. Примітивна diphicercy = protocercy; а друготна diphicercy = gephirocercy і цей термін ліпше випустити".

2. Гетероцеркія — се така форма, при якій кінець хорди направлений вгору і завдяки цьому зовнішня і внутрішня будова несиметричні, а вентральна лопать плавця більша ніж дорзальна. Часто хорда лише незначно повернена вгору (напр. у Chlamidoselachus; Amia має зовнішню симетрію хвоста; Polyodon наближається до симетрії, але внутрішня асиметрія лишається у всіх цих форм).

3. Гомоцеркія — се така форма, коли хвіст симетричний [більшість костистих риб зовні, але в нім більшість промінів сидить на ґіпуральних (підхордових, вентральних) елєментах] і в якім є уростіль (див. далі). Виключенням є Fierasfer і Orthagoriscus.

4. Гефіроцеркія — друготно симетричний хвіст цілком як зовні так і в середині утворений з дорзального і анального плавця (of the dorsal and median fins) обабіч сильно скороченого кінця восі тіла (Fierasfer, Orthagoriscus). Кількість лучів дорзальних і вентральних є однакова. Dollo[2]) поширює цю назву і на другі риби. Досліди над розвитком хвоста багатьох вчених приводять до думки, що всі спеціялізовані форми походять від протоцеркного хвоста. Зачинання кінця вісевого скелету вгору повело до утворення гетероцеркії, спеціялізація гетероцеркії повела до гомоцеркії. Утворення діфіцеркії не є цілком зясоване.

[1]) Rich. Whitehous — The caudal Fin of Fishes — Proceeding of The Royal Soc. of London LXXXII 1910

[2]) Dollo — Sur la phylogenie des dipneustes — Bul. de la Soc. Belge de Geologie Vol. 9—1895.

Whitehouse[1]), Ryder, Agassiz, Dollo і Abel доводять, що перехід від гетероцеркії можна пояснити приєднанням до хв. пл. ще одного вентрального плавця. Шмальгаузен[2]) заперечує цю думку „эта мысль основана главным образом на основании общего сходства, а скелет вентральной лопасти гетероцеркного плавника не похож на скелет другого анального". Лише в утворенні гефіроцеркної форми можна приняти, що властиво хвостовий плавець зник і замінився функціонально. Не ясною лишається і справа з хвостом у Dipnoi.

Я зараз не буду спинятися на цих питаннях, бо це не входить у моє завдання.

§ 2. Рух риб.

У ріжних форм риб плавці відограють не однаково важливу ролю. Тепер же ми роздивимося, як пояснюють ріжні автори рух „звичайної", типової (фузіформної) риби.

Вже Borelli[3]) (1685) каже: грудні плавці відносно маси тіла за малі і слабі і можуть надавати тілу лише слабі імпульси. Риба пливе вперед, бючи хвостом вправо і вліво; хвіст працює як весло на кермі човна" (рис. 1). Він же аналізує цей спосіб руху і знаходить такі моменти:

1. Все тіло витягнене і хвіст зі своїм плавцем знаходиться в медіяльній площі тіла; це його середній стан.

2. Скороченням тіла хвіст одводиться в бік, а випростуванням приводиться знов до середнього стану. Перший удар в бік є шкідливий для руху вперед, другий дає корисний рух вперед.

3. Щоби уникнути опору води по змозі при шкідливім ударі, плавець складається і рухається в бік опуклою стороною; навпаки рухаючися до середнього стану, щоби збільшити корисний опір, плавець розкривається і рухається вігнутою стороною вперед.

4. При кориснім ударі хвоста вліво, риба посувається вперед і вправо; при кориснім ударі вправо, риба посувається вперед і вліво.

5. При шкідливім ударі хвостового плавця, кінець його (або край) лишається позаду.

[1]) Whitehous l. c. (...a detailed study of The...).
[2]) Шмальгаузен l. c. 1913.
[3]) J. A. Borelli — De motu animalium pars prima — Lugduni Batavorum 1685.

У цих спостереженнях мало приймається на увагу загальну гнучкість як тіла риби так і пружність елементів плавця — його промінів, що як ми побачимо далі, має дуже велике значіння. Лише в останнім пункті ми бачимо вказівку на одставання дістальних кінців плавця.

Ці самі думки і уяви про спосіб руху риб знаходимо й у пізніших авторів аж до кінця XIX століття. Та у J. Bell Pettigrew[1]) знаходимо тіж самі положення. Він як і Borelli приймає, що бувають моменти, коли ціле тіло риби витягнене і випростоване. Він теж завважає шкідливий удар, себ то той, коли хвіст іде в бік від свого середнього стану і вказує на те, що при цім ударі хвіст йде вперед опуклою стороною, щоб зменшити тертє. Далі Pettigrew звертає увагу на те, що тіло риби при плавбі звивається принаймні у дві криві, а саме криву голови і хвоста; у довгих риб цих кривих може бути ще більше. На його думку тіло риби то випростовується то звивається в один і в другий бік; таким чином він гадає, що утворюється ряд середніх точок чи ґудзів (Schwingungsknoten). Наведені міркування примушують Pettigrew'a розійтися в думках з Borelli і він зазначує, що коли хвіст виконує удар вліво, то голова не рухається вправо, (як думав Borelli) але вліво і вперед, а тіло рухається по кривій, яка в цім випадку вигнута теж вліво. При ударі вправо ефект буде противний. Таким чином крива хвоста і голови доповнюють одна другу, служачи опорними точками одної для другої (рис. 2). Отже риба бє хвостом вправо і в ліво як веслом при веслуванні на кермі човна.

Нарешті у Strasser'a[2]) знаходимо дуже докладний опис руху риб, який дивує своєю гострою спостережливістю. Strasser приймає тіло риби подібним до гнучкої дощечки. Коли така дощечка згинається, то частини в середині рухаються у протилежний бік, від тих, що по краям. Удари хвоста пояснює він слідуючими схемами (рис. 3).

Кожний поперечний відтинок тіла, який рухається в бік, зустрічає опір з боку води, при чім середні частинки зустрічають менший опір, а задні більший і тому останні виконують найсильнішу працю. Сила опору, на яку небудь частину в задній хвостовій частині буде напр. *W*, яка є прямовою до вісі

[1]) Bell Pettigrew: „Die Ortsbewegung der Tbiere". Intern. Bibl X. Leipzig 1875.
[2]) Dr. H. Strasser: Zur Lehre von der Ortsbewegung der Fische durch Biegung und der unparen Flossen etc. Stuttgart 1882.

даного відтинка. Опір до середини буде — W. Сума цих сил буде R, яка прикладається до певної точки (на тілі) O. Ця сила обертає тіло в моменті RF (де F є віддаленнє її напрямку від центра ваги); трансляторне пересуванне таке ж велике, як колиб маса тіла була зосереджена у центрі ваги і сила була прилоэюена до нього, ділаючи в рівнобіжному напрямкові. R є перекутнею паралєльограму, якого боками є сили W' і W. F можна вирішити з рівнання $RF = W'f - Wf$. Чим більша маса тіла відносно хвоста і чим більше однесено вигиб тіла назад, тим більше R наближається до W'.

Коли отже риба бє хвостом вправо або звиває все тіло так, що воно приймає форму кривої з направленою вправо вгнутою стороною, то пересуванне тіла буде йти назад і вліво. Це спостерігаємо, коли риба помалу пливе назад.

Але ціле тіло риби є гнучке і коли утворюється принаймні дві криві, то вислідна загальних сил опору R є перекутнею паралєльограму зі сторонами W' і W. Вона направлена вперед і заміняє впливові всіх окремих опорів на загальну масу, коли $RF = W'f' - Wf$. Цей випадок буде тоді, коли риба зігнена в одну дугу й випростується. Тут кінець хвоста іде спереду проти води. Рух буде направлений вперед.

Автори сходяться в думці, що хвіст проходить середню лінію у випростованім стані так, що знаходиться в певнім моменті в одній прямій з цілим тілом.

Але Strasser спостерігає, що хвіст проходить цей момент в косому напрямкові і приходить до висновків, що:

1. весь рух хвоста з одного екстремного положення до другого виявляє один корисний пропульзорний удар,

2. площі повернені проти води мають напрямок назад; коли кінець хвоста займає середне положенне, то він не є зорієнтований у вертікальній площі напрямку плавби, але направлений назад тою своєю стороною, що іде в бік,

3. Треба одріжняти зміну положень частинок хвоста, коли він іде проти води і між поворотом його звивання. Звиванне виконується для кожної частини плескатого кінця хвоста в його крайньому боковому положенню. Це відбувається не для всіх частин одночасно, але задні частини, так би мовити, одстають і досягають пізнійше крайнього стану. Це саме відноситься й до цілого тіла.

В протилежність попереднім авторам Strasser доводить, що тіло риби ніколи не буває цілком випростоване підчас льокомоторної праці. Звиванне тіла і хвоста підчас руху вперед йде хвилями здовж тіла спереду назад. Тому рибу не можна рівняти з заднім веслом човна, бо все тіло звивається в більшій або меншій степені в залежности від форми риби.

Цікавим висновком Strasser'a є те, що він вважає рух риби як поступове діланнє окремих відтинків (які відповідають міотомам). Ці частинки тіла виявляють одиничні мотори, які між собою менше більше однакові. Вони працюють не ізольовано, але ритмічно: кожний попередній членик використовує працю, яка улекшує роботу сусіда і кожний відтинок приймає в спільній праці таку участь, яка відповідає його розмірам.

З инших авторів згадаю ще Cuvier-a[1]), який упевнює, що головним орґаном руху є хвіст, натомість грудні плавці служать орґанами статики як крила, а черевні як весла і стерна. З ним сходяться і Milne Edwards[2]) і Pettigrew. З новійших авторів Houssay[3]) і Dean[4]) теж згоджуються, що непаристі плавці є пропульзорними орґанами і стернами в опірнім околі, а паристі є орґанами рівноваги. Таким чином навіть без кінематоґрафічної аналізи всі автори між собою згоджуються у дуже важливій ролі задньої частини тіла, а головно хвоста в льокомоції риб (звичайної чи веретенуватої форми тіла). Звичайно є дуже багато ухилів від цього основного типу, але їх розглянемо, ознайомившися з ріжними формами пристосования у риб.

У Marey[5]), який використовує хронофотоґрафію для вивчення руху риб, знаходимо докладний аналіз хвилеватої пропульзії у ріжних форм. Хронофотоґрафічні знимки показують, як іде хвиля у видовжених риб (Conger, Anguilla) від голови до хвоста і риба посувається вперед. Угор може пускати хвилю від хвоста до голови і тоді рухається назад. У плоских риб (Raja) хвиля йде поземо вздовж тіла, при чому її амплітуди збільшують великі поширені плавці. У пажорів в разі тихої плавби тіло хвилює то звивається, а в разі швидкої плавби головну ролю пропульзії приймає хвіст.

---

[1]) Cuvier — Histoire Naturelle des poissons 1828 Paris.
[2]) Milne Edwards „Lecons d'anatomie comparé" 1874.
[3]) Houssay, Forme puissance et stabilité des poissons. Paris 1912.
[4]) Dean, Fisches living and fossil. New Jork 1895.
[5]) Marey — Le mouvement Paris 1884. Marey — La Chronophotographie Rev. Gener. des Sc. pures et Appliqués Paris 1891. Marey — La locomotion animale Extrait du traité de Physique biologique t. I.

Завдяки ввічливости пана О. Крата зроблено мені кінематоґрафічну стяжку з руху линів у акварії. Щоби зілюструвати вище сказане, наводжу репродукцію частини фільму, на якім видно, як лини плавають головним чином, звиваючи задню частину тіла.

Як ілюстрацію ролі ріжних плавців у риб (типової форми) наведу висліди досвідів A. Dugés-a[1]) з обрізанням плавців у Goedea atripinnis (Poecilidae).

I. Зрізанне спинного плавця не викликає жадної зміни ні в русі ні в статиці.

II. Зрізанне паристих грудних D і черевних V плавців після першої хвилини, коли „L'animal parait dabord un peu étonné et hesitant" теж не відбивається на русі і через годину риба плаває як завше.

III. Зрізанне хвостового плавця C сильно відбивається на плавбі: риба плаває значно гірше, використовуючи непаристі плавці як спинний D (анальний A).

IV. Зрізанне всіх плавців крім хвостового C не заваджає рибі добре плавати як звичайно. Дрожанне хвостового плавця передавалося всьому тілу.

Таким чином рух відбувається завдяки звиванням чи коливанням (flexions) всієї задньої частини тіла (як це видно у осібника III). Непаристі плавці (D і A) своїми ундуляціями прецізують загальні рухи.

Наприкінці Dugés згадує, що одрізані плавці реґенерували, при чому у осібника III спинний плавець збільшився.

Щоби уникнути ненормальних явищ звязаних з ампутацією і неминучому при цьому болю, втратою крови і взагалі хоробливих порушень в цілім орґанізмі, перевів я ряд досвідів з рибами типової форми, анестезуючи плавці двох-процентним розчином кокаїни.

Висліди були ті самі. Як матеріял брав я Tinca, Seriola, Labrus, Boops і др. Риба цих форм втрачала найвиразнійше здібність нормально рухатися при анестезії хвостового плавця. Коли я зробив спробу з Hippocampus і анетезував йому спинний плавець, то він теж втратив змогу рухатися, бо у нього головний локомоторний орґан є спинний плавець. Досвіди над рибами инших форм тіла переводив я, щоби провірити значінне

[1]) Dr Alf. Dugés „Role des nageoires chez les poissons" Bulletin de la Soc. Zool. de France Paris 1905.

головного льокомоторного орґану, який у ріжних етольоґічних типів є ріжний.

Дуже докладно спиняється на русі риб і ролі плавців Houssay[1]) і на його праці уважаю за потрібне спинитися.

§ 3. Рух і форма.

Узявши за принціп, що кожний орґанізм є пластичним тілом, яке (чим менше воно спеціялізоване) підлягає моделяції з боку того окола, в якім воно живе, Houssay проводить ряд дуже цікавих досвідів.

„Плисти у воді, — говорить автор — це значить переміщувати воду поза себе". Напр. ми знаємо велику скількість тварин, що рухаються, викидаючи з свого тіла воду. Так головоножці рухаються поворотним ударом, випускаючи з силою воду з лійки, медузи теж, скорочуючи ритмично свій дзвін, рухаються завдяки викиданню води, креветки сильно штовхають воду, звиваючи тіло і т. под.

Риби набираючи воду у рот, випускають її назад через зябри, від чого повстає пропульзорний удар, не слабший від удару грудних плавців (не в окремих випадках, де грудні плавці виконують головну локомоторну функцію).

Houssay дає такі механічні правила що до руху риб.

1. Видовжене гнучке тіло привязане за один кінець і умішене у плин, який тече, починає хвилюватися і хвиля йде вздовж нього. Це є перехід руху течії (в назві автора mouvement tourbillonnaire) у рух вібраторний.

2. Видовжене гнучке тіло, що рухається в напрямку своєї великої восі у нерухомім плині, детермінує своєю транслятацією струйчатість (fenomenes tourbillonaires), наслідком чого завдяки своїй гнучкости здобуває трансверзальну ундуляцію.

3. Видовжене гнучке тіло, яке в нерухомім плині має ундуляторний трансверзальний рух, тим самим здобуває змогу поступування (транслятації) в напрямку головної восі тіла і протилежнім тому, в якім йде хвиля.

Риба робить активно те, що робила б стяжка і підходить під третю точку. Серед форм видовжених риб, які рухаються ундуляцією свого тіла, находимо цей приклад (Regalecus). Чим коротшу форму має риба, тим більше льокалізується ундуляція в задній частині тіла і орґан руху, програючи в продовжености виграє в силі.

[1]) Houssay — Forme, puissance et stabilité des poissons. Paris 1912.

Так розглядаючи рух пажорів, бачимо, що при повільних рухах звивається ундулярно все тіло (завдяки гнучкости хрящевого скелету), при швидких рухах відбуваються енергійні удари хвоста, а тіло залишається майже випростованим.

В разі, коли ундуляція цілого тіла зменшується (напр. завдяки негнучкости скелету), хвіст дістає в своїй поздовжній вісі ротаторний рух, або нахиляється під більшим або меншим кутом. Форма хвоста має дуже велике значіннє. Він мусить бути високий, тонкий і широкий. Завдяки гнучкости промінів весь удар хвоста виявляє з себе один корисний удар.

Крім цілком активного руху, риби посуваються і в силу інерції після удару хвостом. Цей рух автор називає лінійною плавбою (nage filée) дуже докладно експериментальним шляхом студіює, які при цьому утворюються струї і як вони „моделюють" форму тіла риби (рис. 4).

Хід струй води є вировий (tourbillonaire) і найпростійше виявляється у пажорів. Плавці, як парисні так і непарисні дають напрямки цим струям і вирам, утримуючи рибу в певнім стабільнім стані.

Далі Houssay провадить ряд досвідів, щоби зясувати як вода, властиво опір води моделює форму тіла у риби. Спосіб плавби викликає певні течії, які знову викликують відповідні реакції з боку орґанізму.

Спосіб життя і руху у воді дуже відмінний від життя на землі, бо тоді, як земні тварини мають головним чином протиділяти силі тяготи (вазі) при незначнім опорі повітря при русі, водяні тварини навпаки, будучи приблизно тоїж ваги що й вода (отже не відчуваючи ваги свого тіла), мусять протиділяти при русі опорови води, що є у 800 разів більший ніж повітрє. Отже форма тіла риби мусить бути такою, щоби могла як найлекше протиділяти цьому опорови. Ряд досвідів з моделями ріжної форми приводить Houssay до висновку, що найменший опір буде мати тіло заокруглене спереду і конічно звужене до заду. Houssay доказав це експериментально, тягнучи з ріжною швидкістю у волі моделі з дерева ріжних форм.

Досвіди з моделями риб ріжної форми (Cyprinus, Pagellus) показали, що форма тіла тої чи иншої риби виявляє повну досконалість лише в межах звичайної швидкости. з якою дана риба плаває. Коли збільшувати швидкість, то опір теж буде збільшуватися, а коли переступиться межу звичайної швидкости даної риби, модель риби починає гірше функціонувати.

Після ряду досвідів автор приходить до слідуючих висновків:

А. Лише форми en veine inversée a bord souple і форми округлих риб чи стислі здібні дістати прямолінійний рух у всіх випадках.

Б. Дісиметрія ходу виправляється напруженнєм в ріжній степені паристих плавців.

В. При повних швидкостях на видовжених моделях риб la permanence du mouvement n'est atteinte que par le dispositif des nageoires falciformes.

Розглядаючи рух первісної риби, напр. пажора і простеживши за течіями води круг тіла, Houssay виводить ряд механічних законів. Плавба у селяхій завдяки їхній формі тіла і хвоста з окрема, виявляє з себе пірнаннє після удару хвостом, яке поправляється підчас лінійної плавби, указує напрямок течії води на тілі пажора, що виправляє свій рух напруженнєм грудних плавців, Неоднаковолопатний хвіст витягається течією *a* у однаковолопатний; течія *b* округляє голову і ставить рот термінально; инші струї стискають тіло з боків. Таким чином моделяцією вода може надати ознаки, які відріжняють Squalidae від Teleostomi.

Коли гнучкість скелету первісних хрящевих риб зникає і тіло стає менше елястичним, починаються ріжні зміни. Анальний плавець видовжується вперед і черевні переходять теж вперед, а коли вони притім посунуться далі від центра ваги, то починають піднімати голову вгору; тоді задня частина опускається і течія води буде витягати спинний плавець.

Не розглядаючи зараз, чи у всіх випадках форма тіла риб утворюється по механічним принципам наведеним Houssay, я зазначу за згаданим автором ще один факт, який свідчить про моделюючу ролю струї води викликаної рухом риби. Так швидкі плавуни мають голову просто збудовану відповідно до головної течії, яку зустрічає риба; донні риби, що пересуваються не швидко, часто раптовними скоками, мають дуже ріжноманітно скульптовану голову завдяки другорядним течіям і струям води з зябрів. Вусики у багатьох форм і їх становище одмічають місце вирів, які їх витягали.

Якби то не було, але струї води при плавбі риби мають не аби яке значіннє на реакцію з боку орґанізму і безперечно причиняються в значній мірі до утворення певної форми тіла риби.

У праці Polimanti[1]) находимо спробу пояснення і ґрафічного представлення звязку межи формою тіла риби і рухом. Він вважає, що тисненнє води (опір), швидкість плавби і форма тіла риби се три фактори міцно між собою звязані. Опускаючи рибу постепенно у градуований циліндр і одмічаючи єї вагу, обсяги витисненої води відповідно певному зануренню, автор будує дві криві: одну, яка виявляє перерізи риби і другу — яка показує відповідний еквівалент солідної форми чи обсягу. Не спиняючись на способі викреслення кривих[2]), наведу висновки, до яких приходить автор. Фіґури, які представляють обрис (ареу) ріжних риб, наближаються або до трикутника, або до трапеза, при чому у донних форм вершина трикутника виявляє опір води в перерізі основи голови і грудних плавців. Тому можна сказати, що чим більше виразно бентонною є риба, тим гостріший є трикутник (Lophius, Torpedo), а опір води особливо сильний в згаданому перерізі. Чим більше форма риби наближається до нектонного типу, тим більше крива наближається до трапеза. Чим більше риба наближається до бентонного типу, тим більше поверхня міцного опору переноситься на перед. У тих риб, що рухаються лятеральним звиваннєм, опір значно менший ніж у тих, що рухаються головно завдяки плавцям. Ті форми, що рухаються завдяки ундуляції широких грудних плавців (напр. Raja), мають переходову форму. Чим ліпше плаває риба, тим більше рівномірним є опір води в ріжних перерізах тіла. У риб, що рухаються змієвато, досягається максімум рухового ефекту, бо опір води є мінімальний.

З цієї праці ми бачимо, що форма риб стоїть у тісній залежности від їх руху і що швидкість руху (як і у Houssay) стоїть у тісній залежности від того способу, яким риба бореться з опором води.

Принявши на увагу ці фактори, які впливають на форми тіла риби, „моделюють“ її, розглянемо ті типи пристосования або етольоґічні типи, які виявляють із себе вислід впливу місцеперебування, звязаного з ним способу руху і моделюючої діяльности струї води, викликаних тим чи иншим переміщеннєм тіла.

[1]) Polimanti — Influenza della forma sulla locomotione dei pesci Ztschr. f. algem. Physiologie Bd 12, 1911.

[2]) Ці ж досвіди я повторяв із тими самими вислідами.

II. Форми тіла.

Форму тіла риби визначає Amans[1]) трйома лініями, а ними є:

1. Профіль пересічення поверхні з площею симетрії.

2. Горизонт або крива контакту поверхні риби з циліндром, якого твірні є рівнобіжні до площі симетрії і прямові до восі.

3. Фронт або крива контакту поверхні тіла з циліндром, якого твірні є рівнобіжні до восі тіла.

Положеннє тіла риби підчас плавби буває здебільшого горизонтальне, але є багато форм, що ухиляються від цього способу руху і займають при плавбі инше становище. У одних є це тимчасове положеннє тіла себто рух в певнім напрямку (прямо, вгору, вниз тощо), у других є це нормальний стан при плаванні.

Abel[2]) одріжняє такі положення риби:

I. Вісь тіла горизонтальна:

А. Спина зверху (Gastronectonisches Schwimmen), приклад: більшість наших риб (Salmo).

Б. Черевом вверх (Notonectonisches Schwimmen) приклад: Synodontes, а крім риб приклад й инших тварин як Gastropoda, Branchipus, комах і др.

В. Площа симетрії тіла лежить горизонтально (риба плаває на боку); зразок Pleuronectidae.

II. Вісь тіла йде навскіс до поверхні води:

Klinonectonisches Schwimmen.

А. Голова вгору (амфібії, крокодилі).

Б. Голова вниз. Зразком служать Antennarius, Melanocetus.

III. Вісь тіла вертикальна до поверхні води:

Hypsonectonisches Schwimmen.

А. Голова вгору. Зразок Hippocampus.

Б. Голова вниз. Зразок Amphisyle, Acantharchus, з инших тварин амфібії, пуголовки.

Тепер уважаю за потрібне розглянути, яку властиво ролю грає в пропульзії та чи нпша форма хвоста. Ми вже згадували, що рух риби і становище її у воді не у всіх форм однакове (може бути рівнобіжне до горизонту, навскісне і прямовисне).

[1]) Amans — Comparaison des organes de la locomotion aquatique Ann. des Se. Nat de Zoologie 7 serie 1888 Paris.

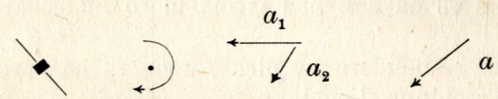
[2]) O. Abel Grundzüge d. Palaeobiologie.

За Abel'ем[1]) подаю таку табличку:

Стан риби у воді	Форма хвоста	Напрямок	Зразок
1. Ізобатичний стан	Хв. пл. симетричний	Горизонтальний	Salmo
2. Епібатичний стан	Верхня лопать більша і довша	Косо вниз	Acipenser
3. Гіпобатичний стан	Нижня лопать більша	Косо вгору	Exocoetus

Ahlborn[2]) розглядаючи значіннє гетероцеркної риби для руху у воді, висловлюється так: „der heterocerke Fisch einer abwärts gekrümmten Bahn folgen soll". Цьому протиділають у осетруватих і пажорів, тяжчих від води під оглядом питомої ваги, також і грудні плавці, що направляють підчас nage filée (Houssay) рух вниз (plongée), після удару гетероцеркного епібатичного хвоста. Противно бачимо у іхтіозаврів (і Exocoetus'a), де нижня лопать більша і сильніша. Обидві форми лекші від води (питома вага 1); у іхтіозавра завдяки легеням, у Exocoetus'a завдяки плавному пухірю. Спільна праця грудних плавців і гіпобатичного хвостового допомагають пірнавати. Der Rückschlag des Exocoetus ruft gleichfalls eine Abwärtsbewegung der hinteren Körperhälfte, eine Schrägstellung des Thieres hervor, welche bei gleichzeitiger Fortbewegung eine Aufwärtssteuerung bewirkt, die nur durch geeignete Gegensteuerung vermieden werden kann, до чого служать центральні плавці. Розглядаючи нектонні і бентонні риби, той же автор зазначує, що гетероцеркіа захищає хвіст від верхньої (повітря) чи нижньої (дна) границі води. Так для осетра є гетероцеркіа епібатично потрібна, щоби не черкати нижньою лопатью дна (теж у Abel-a Jackel-a), а для Exocoetus-a, щоби не робити верхною лопатью плавця зайвих рухів. У повітрі є дуже зручна гіпобатична гетероцеркіа; до того-ж при взлеті над водою такий плавець дає величезну швидкість, бо коли тіло вже в повітрі (себ то в околі з кілька сот раз меншим опором), тоді хвіст не лишається джерелом руху (Шмальгаузен).

Таким чином праця гетероцеркних плавців проходить в такий спосіб: При умові однакових лопатів (для простоти) загнутого вгору хвоста, утвориться наслідком його ундуляторних рухів сила, що йде під кутом до тіла (схема),



яка роскладається на дві: більшу a_1, що рухає тіло вперед і меншу a_2, що обертає тіло круг центра ваги, опускаючи хвіст і піднімаючи (тяжку у пажорів і осетрів) голову одночасно з грудними плавцями[1]). Вісь тіла є гнучка і робить боковий рух, але не вся одночасно, а кожна її частина вигибається вбік послідовно, завдяки скороченням міотомів бокового мускула; це утворює хвилю, яка ідучи спереду назад згинає й основи шкіряної лопаті, що передають хвилю здовж промінів до дістальної частини. Утворюється складна поздовжньої хвилі з хвилею, яка іде навскізь назад (Шмальгаузен).

Праця симетричних паристих плавців не є така складна і полягає на звиванні цільного хвоста. Шкіряна лопать не бере тут активної участи. Завдяки опорови води рухам хвоста проміні спочатку згинаються у основі і послідовно випростовуючися завдяки своїй пружности, викликають хвилю, що йде від основи плавця до його дістального краю. Тому що обидві лопаті в гомоцеркнім плавці є однакові, то рух буде направлений прямо вперед. Це ми бачимо у костистих риб з плавним піхурем, яких питома вага є більше менше рівна питомій вазі води. До цього слід додати, що в плавцях костистих риб використовується пружність, а в хвостах хрящевих безпосередньо мускульна енерґія (Шмальгаузен).

Положення тіла риби стоять в тісній залежности від місцеперебування і укладу життя.

По місцеперебуванню ъдріжняємо бентонні або донні риби і нектонні форми або риби вільної води. Ці останні можна поділити на властиво нектонні, що рухаються активно і добре плавають і планктонні, що маючи слабо розвинені орґани власного активного руху, плавають чи фльотують по волі хвиль і течій.

[1]) Abel l. c.

[2]) Dr Fl. Ahlborn, Über die Bedeutung der Heterocerkie Ztschr. f. Wiss. Zool. Leipzig 1896.

[1]) Слід згадати тут за Houssay, що у риб „Le centre de gravitée est audessu du centre de poussée. C'est une cause fondamentale dans l'evolution du poisson et la base meme de sa phisiologie locomotrice.

Бентонні форми виявляють надзвичайну ріжноманітність, залежну від характеру дна, і Polimanti[1]) одріжняє:

1. риби, що живуть на тонкім піску, дуже наближаються до тих, що живуть на намулі і здебільшого є плескаті (Rhombus Solea),

2. що живуть почасти на піску, почасти на грузі (Torpedo, Uranoscopus, Trachinus, Lophius),

3. що живуть поміж скелями (Scorpaena, Scyllium, Gobius, Motella, Mustellus, Conger, Muraena),

4. живуть на піску, на камінях (Blennius, Mullus, Trigla, Squatina, Raja почасти) і

5. живуть на рослинах, на піску (Hippocampus, Syngnatus). Останню ґрупу однесемо до планктонних риб, бо як Hippocampus так і Syngnatus не звязані власне з дном, а головно з рослинами.

Нектонні риби також підлягають ріжним умовам, хоч вони і не є такі ріжноманітні у вільній воді як коло дна. Можна одріжнити риби тихої води, яким не доводиться боротися з хвилями і течією. Одні живуть осіло в тім самім районі, другі виявляють пелаґічні форми (типові добрі плавці, що прекрасно плавають). Форма тіла нектонних риб, як пелаґічних так і планктонних може бути дуже ріжна і ми часто знаходимо в ріжних ґрупах однакові типи пристосування.

Що до подібности як форм тіла так і окремих орґанів, то за Plate-ом[2]) слід згадати такі подібности:

Анальоґія — фізіольоґічна подібність орґанів ріжного філетичного походження. (Крила птиць, комах, лиликів).

Конверґенція — морфольоґічна подібність на ґрунті подібного пристосування далеких в систематиці форм. (Дзюб птиці, черепахи, однопроходних).

Гомольоґія — морфольоґічна подібність наслідком одного походження, хоч функція може бути ріжна. (Ніжка ящірки, крило птиці).

Гомойольоґія — незалежно придбана морфольоґічна і фізіольоґічна подібність у тварин, які незалежно розвивалися від того самого пня. (Фасеточні очі 4 рази утворювалися незалежно в типі членоножців: у раків, у Limulus, у Scutigera і у комах).

Дуже часто бачимо зміну функцій орґану, як поширенне

[1]) Polimanti l. c.

[2]) Plate — Allgemeine Zoologie — I. Jena 1922.

цих функцій (наприклад черевний плавець у Gobiidae стає присоскою, перший промінь спинного плавця у Lophius стає „вудкою“ для приваблення добичі).

Schlesinger[1]) одріжняє такі шляхи пристосування і утворення етольоґічних типів:

1. Паралєльне пристосованнє (дає у висліді форми гомойольоґічні Plate), коли близькі форми незалежно розвиваються і йдуть шляхом однакового пристосування (наприклад Equidae і Proterotheridae).

2. Конверґентне пристосованнє: Анальоґічний незалежний розвиток ріжних або не близьких форм наслідком однакового пристосування, завдяки чому повстає подібність типу. (іхтіозаври, дельфіни).

3. Діверґентне пристосованнє: Ріжний розвиток однакових або близьких форм наслідком ріжних пристосувань. (іхтіозаври і мезозаври).

Принявши на увагу ці шляхи пристосування до життя в ріжних умовах, розглянемо вкоротці головні етольоґічні типи серед риб. В цім випадку приймаємо на увагу лише саму форму тіла, не звертаючи уваги на систематичне положенне.

Спроби уґрупування риб в такі типи робили ріжні автори і ми розглянемо деякі спочатку лише для познайомлення з ними, а потім на окремих прикладах познакомимося з мускулятурою і скелетом більше або менше виразно спеціялізованих форм.

Особливо важним в цім відношенні буде конверґентний шлях пристосування, при якому представники далеких в систематиці ґруп обєднуються завдяки подібній формі у один етольоґічний тип.

У старих підручниках і іконоґрафіях ми майже завше помічаємо тенденцію до розташування риб по їх зовнішній формі: видовжені, плоскі і т. д. Так напр. у M. E. Bloch-a[2]) в його описах і картинках риб можна пізнати етольоґічні типи, до яких зараз перейдемо.

У Amans'a[3]) знаходимо опис скелету і мускулів риб, які він ділить на такі типи:

[1]) Schlesinger — Der sagittiforme Anpassungstypus nectonischer Fische — Verhdl. Zool. Bot. Ges. Wien 1909. Osleorn.

[2]) M. E. Bloch — Naturgeschichte der ausländischen Fische — Berlin 1786.

[3]) Dr P. C. Amans — Comparaison des organes de la locomotion aquatique — Annales des Sc. Nat. Zoologie I. YI Paris 1888.

1. Тип Scyllium
2. „ Raja
3. „ Trigla
4. „ Leuciscus
5. „ Exocoetus
6. „ Hippocampus
7. „ Pleuronectes

Ми ще повернемося до цього ж автора при розгляді мускулятури ріжних форм пристосування, тепер же згадаємо инші уґрупования риб по їх формі тіла і способі плавби.

За Abel-ем[1]) подаю таке уґрупованнє, якого будемо додержуваться:

1. Нектонні форми.

1. Фузіформний або веретенуватий тип виявляє, так би мовити, типову для риб форму. Тіло веретенувате, локомоторний орґан знаходиться ззаду так, що головна роля в руху припадає на хвіст. Парисні кінчини функціонують як стерна (керми) і прилади для стабілізації тіла. Передні плавці є завше у нині живучих риб (у верхнесілурських їх не було); задні плавці можуть бути або змиршавілі або їх бракує; спинний плавець здебільшого є. Як зразок наведу пструга.

2. Сагітіформний або стрілкуватий тип обєднує в собі риби, що мають видовжене тіло більше менше однакової висоти, стисле з боків; голова загострена, непаристі плавці мають міцні проміні і розташовані в задній частині тіла, як пера на стрілі; анальний і дорзальний сидять один проти другого і утворюють разом з хвостовим могутній локомоторний прилад. Зразком може служити щука. Риби цього типу мають здібність до швидких раптових рухів.

Schlesinger доказує, що сагітіформний етольоґічний тип досягається трьома способами завдяки спеціялізації фузіформних риб конверґентно[2]):

а) Конверґенція досягається з фузіформного типу завдяки видовженню спинного і анального плавця при стрілкуватій формі тіла:

[1]) Abel — Grundzüge der Palaeobiologie — Stutgart 1912. Abel — Die Anpassungsformen der Wirbeltiere an das Wasserleben — Schrift d. Ver. z. Verbr. naturw. Kent. in Wien 48, 1905.

[2]) Schlesinger — Der sagittiforme Anpassungstypus nectonischer Fische — Verhandl. d. k. k. Zool. Bot. Gesel. Wien 1909.

A. Chondrostei		Belonorhynchus
B. Holostei		Aspidorhynchus
		Lepidosteus
C. Catosteomi		Aulostoma
a) Isospondili		Chirocentrus
		Photonectes
b) Haplomi		Esox
		Rhinellus
c) Catosteomi		Aulostoma
d) Percesoces		Scombresox
		Tylosaurus
		Belone
		Sphyraena

б) Утвореннє довгого спинного і також анального плавця при фузіформній будові:

Teleostei

a) Isospondyli	Xenodermichthys
b) Ostariophysi	Callichrous
c) Percesoces	Ammodytes
d) Anacanthini	Molva
	Rhinonemus
	Merlucius
e) Acanthopterygii	
f) Jugulares	Percophis
	Hypsicometes
	Cryodraco
	Bathydraco
	Chaenichthys
	Gerlachaea
	Campsocephalus

в) Сагітіформний тип досягається з високо спеціялізованих фузіформних риб в ґрупі Scombriformes і Haplomi.

a) Haplomi	Alepisaurus
b) Scombriformes	Gempylus
	Thyrsites
	Lemnisoma
	Histiopharus
	Coryphaena

г) Конверґентне пристосованнє до сагітіформного типу дає Cyema atrum з родини Nemichthydae, які є властиво теніформні (див. далі).

Головний локомоторний орґан перенесений на задній кінець тіла виявляє з себе хвіст, який рухається оборотними ударами і дає поступ вперед. Чим більше заходить потреба завдяки укладови життя в раптових рухах (напр. при нападах), тим більше зміняється прилад руху ззаду і тим більше збільшується поверхня опору ззаду і риба стає подібною до стріли. Згадаємо тут і про ролю паристих плавців, розглянувши слід схеми (за Günther-Schlesinger-ом (рис. 5).

При веретенуватім типі, коли риба після удару хвоста пливе вперед, невелике висуненнє напр. правого грудного плавця викликає невеликий поворот направо, бо сила опору води на передню частину веретена буде більша ніж на задню (сила *b*). Коли ж спинний (D) і анальний плавець (A) одсунені назад і утворюють разом з хвостовим плавцем (Ca) одну фізіольоґічну цілість, при такім же повороті грудного плавця (напр. вправо) утвориться випростованнє, бо в останнім випадкові, себ то у риб стрілковатого типу (сагітіформних) сила опору b > a, бо площа D + A + Ca велика.

3. Веліформний тип відзначається видовженим тілом і сильним розвитком 2-го спинного плавця. Анальний і 2-ий спинний часто росташовані один проти другого, як в сагітіформнім типі. Тіло часто поступово звужується від голови до хвоста. Риби цього типу плавають близько поверхні води і великий передній спинний плавець служить їм за вітрило. Як зразки можна назвати Histiophorus gladius і Plagyodus ferox.

4. Теніформний тип.

Тіло видовжене як бинда. При плавбі ні хвостовий плавець ні паристі не грають ролі. Сильно стиснене збоків тіло рухається завдяки ундуляції. Спинний і анальний плавець тягнеться як стяжка вздовж цілого тіла.

Schlesinger[1]) подає таку табличку конверґентного пристосування ріжних риб до цього типу і розглядає докладнійше скелет і мускулятуру (див. далі) найвиразнійшого представника цього типу (Regalecus banksii).

Теніформні риби цілком відповідають досвідови Houssay (див. вище) зі стяжкою уміщеною у течію води, бо роблять активно ті рухи, що робилаб стяжка пасивно.

[1]) Schlesinger — Die Locomotion der täniformen Fische — Zool. Jahrb. 1911. Jena.

Subordo	Familia	Genus
Apodes	Anguillidae Nemichthydae	Venefica Jardon Nemichthys Rich. Avocettina Jrerd Serrivomer Gil
Anacanthini	Macruridae	Ateleopus Schley
Acanthopterigii		
Gr. Perciformes	Cepolidae	Cepola Linnee
Gr. Scombriformes	Trichiuridae	Lepidopus Gouan Euoxymatopon Gil. Benthodesmus Good Trichiurus Linnee
Gr. Taeniusomi	Trachypteridae	Regalecus Brum Stylephorus Schon
	Lophotidae	Lophotes Giorn

2. Бентонні або донні риби.

1. Депресіформний тип дуже характеристичний для донних риб. Тіло дорзовентрально сплощене. Очі на верхній (спинній) стороні. Грудні плавці (коли є) поширені і нерідко одмежовані від тіла у формі щита. Задня частина тіла дуже витоншена. Хвостовий плавець малий або перетворюється у довгий бич. Тіло часто голе або з панцирем. Рух відбувається у панцирних форм завдяки хвостовому плавцю, у непанцирних (напр. скати) завдяки грудним плавцям. Хвиля йде горізонтально спереду назад і завдяки цій ундуляції широких грудних плавців риба пливе вперед.

Як зразки цього типу згадаю Chirolophius, Lophius, Auchenipterus, Hariotta, Rhina, Torpedo, Raja, Myliobatis.

2. Макруріформний тип. Тіло сильно[1]) видовжене, найбільша висота є одразу за черепом, а до заду поступово витончене і кінчається вістрєм. Хвостовий плавець рудіментарний. Голова велика, очі здебільшого великі; дорзальний і анальний плавець тягнеться у вигляді стяжки здовж тіла.

[1]) Способом руху не є плаванне, а скаканнє завдяки сильно одсуненим назад грудним плавцям.

Наводжу за Abel-ем табличку конверґентного пристосування до цього етольоґічного типу:

Підкляса	Ряд і підряд	Родина	Рід
Arthodira		Coccosteidae	Coccosteus
Elasmabranchi	Ichthyotomi	Pleuracanthid.	Pleuracanthus
	Holocephali	Chimeridae	Chimera
		Holosauridae	Holosauropsis
		Lipogenidae	Lipogenys
	Heteromi	Nothacanthid.	Nothacantus
		Fierasferidae	Fierasfer
	Anacanthini	Macruridae	Macrurus
Telestomi		Pleuronectidae	Cynogloscus
		Zoarcidae	Typhlonus
		Liparidae	Paroliparis
	Acanthopterygii	Scopelidae	Tachynectes
		Clupeidae	Coilia

3. Компресіформний несиметричний тип. Тіло дуже сильно стиснене з боків. Спинний і анальний плавець виявляють довгі стяжки, що тягнуться вздовж цілого тіла. Обидва ока на одній стороні тіла (правій чи лівій, фізіольоґічно верхній). В молодім віці риби цього типу є симетрично компресіформні і лише в дорослім віці стають асиметричними. Цей тип знаходимо лише серед Pleuronectidae. Рух відбувається завдяки горізонтальному коливанню тіла. Хвиля йде здовж тіла, при чому особливо йде ундуляція спинного і анального плавця. Як зразки назвемо Psettodes, Psetta, Solea, Pleuronectes, Rhombus Arnoglossus.

4. Ангуіліформний або угреватий тип. Тіло видовжене як у змії. Паристі плавці дуже зредуковані або їх нема. Ці риби плазують як змії або плавають, звиваючи тіло змієвато. Як зразки назвемо Anguilla, Conger, Muraena, Gymnothorax.

5. Астеролепіформний тип. Передня частина тіла вкрита кістяними платівками як панцирем, ізза чого рухливість риби зведена до мінімум. Черевна поверхня плоска, тіло в передній частині пірамідально підняте так, що переріз в цім місці виявляє трикутник. Рух відбувається завдякй хвостови. Як зразок назвемо Ostracion cornutus.

3. Планктонні риби.

1. Акулеіформний тип. Тіло видовжене иноді як голка. Здібність до самостійного руху дуже незначна. Локомоція відбувається або шляхом звивання тіла змієвато або завдяки ундуляції спинного або анального плавця.

З риб цього типу згадаємо Syngnattus, Hippocampus, Amphisyle.

2. Компресіформний симетричний тип. Тіло високе, сильно стиснене з боків. Спинний і анальний плавці стоять один проти другого і здебільшого дуже високі. Черевних плавців у високоспеціялізованих форм нема. Хвостовий плавець здебільшого великий і глибоко вирізаний, але й він може не бути. Здібність до власного руху дуже незначна. Риби цього типу здебільшого є мешканцями коралевих рифів.

Як зразки згадаємо Psettus sebae, Orthagoriscus mola.

3. Глобіформний або кулястий тип. Тіло кулясте і може надутися як пухир, коли риба ковтає повітрє (Tetrodon). Черевних плавців нема. Активний рух мінімальний. Живуть або межи коралевими рифами або на глибинах.

Як зразки назвемо Diodon, Tetrodon, Antennarius.

4. Літаючі риби.

Окремим типом пристосування риб є літаючі риби, у яких дуже сильно розвинені грудні плавці, що служать як крила. Одріжняємо два типи:

А. Тип Exocoetus з великим ізобатичним хв. плавцем, спинним і анальним сильно одсуненим назад, черевні плавці великі; грудні плавці видовжені і загострені на кінцях; їх проміні розчленовані і сильно розгалужені. Тіло фузіформне.

Б. Тип Dactylopterus, хвостовий плавець менший ізобатичний, спинний і анальний довгі; черевні плавці маленькі; грудні плавці в откритому стані утворюють широкі заокруглені крила; їх проміні нерозгалужені і нерозчленовані. Тіло дорзовентрально плесковате.

Предки першого типу (А), який наближається до Scombresocidae були пеляґічними формами, предки другого типу (Б) були бентонними (Scorpaenidae, Cottidae, Pegasidae).

За Abel-ем наводжу табличку цього етольоґічного типу:

Родина	Рід
Dactylopteridae	Dactylopterus
Scombresocidae	Exocoetus
	Thoracopterus (Tpiac)
Pholidopharidae	Gigantopterus (Tpiac)
Semionotidae	Dollopterus
Pantodontidae	Pantodon

III. Мускулятура.

Вже у Amphioxus'a бачимо бокову мускулятуру у вигляді метамерно розташованих міотомів. Межи ритмом в розташованні міотомів і опором мусить бути певний звязок і відносна кількість міотомів (розташованих більше менше гомометамерно на тілі риб) зменшується разом зі зменшенням гнучкости тіла[1]). Це явище розберу докладнійше далі, а тепер за ріжними авторами подам загальний огляд мускулятури риби.

Вже Lacepede[2]) одріжняє такі мязи:

1. По боках тіла від голови до хвоста йде мускул, що складається з поперечних подібних мязів.

2. Зверху йдуть два довгі спинні мязи, які виповнюють на спині місце, незаняте боковими мязами, вклиняючися межи них і перериваючись в місцях, де знаходяться спинні плавці.

3. Знизу тіла йдуть два повздовжні мязи, що теж перериваються анальним плавцем.

4. На голові є більша кількість мязів, з яких 4 найбільші: два під очима і два у внутрішній частині підборіддя. Помітні також мязи щелеп і мязи лучів.

5. Кожний грудний плавець має два мязи піднімачі, що сидять на зовнішній поверхні кістки плечового пояса і два мязи опускачі під нею.

6. Проміні спинного і анального плавця мають по 4 мязи, з яких два піднімачі, а два опускачі.

7. Черевні плавці мають по три мязи: випростувач, що вкриває поверхню кістки червоного пояса і два других, що опускають плавець і починаються на внутрішній поверхні тоїж кістки.

8. На хвостовім плавці одріжняє автор мязи, з яких один прямий і два косих, четвертий зветься ніжним.

Cuvier[3]) теж перечисляє ці самі мязи і одріжняє такі:

1. Один боковий (з кожного боку), який іде від голови зверху і до мязів плечового пояса внизу спереду, а ззаду до основи хвостового плавця. Цей мяз дуже складний і виявляє три жмутки (sacro spinalis висших тварин); але що у риб нема шиї, ці жмутки тягнуться від голови до хвоста без розділів.

---

[1]) Houssay — Forme puissance et stabilité des poissons.

[2]) Lacepede — Naturgeschichte der Fische — nach dem Französischen mit einigen Bemerkungen begleitet von Ph. Loos Berlin 1799.

[3]) Cuvier et Valencienne — Histoire Naturelle des poissons — Paris 1828.

Межи собою обидва бокові мязи (правий і лівий) розділені костистими відростками хребта і її апофізами, глибшими мязами міжостистих кісточок і ребрами, що охоплюють черевну дутину. Знизу бокові мязи росходяться, даючи місце черевному поясови і черевним плавцям; спереду розділяється, охоплюючи грудні плавці з їх поясом і мязами. Спереду бокові мязи інсерують до черепа, до кісток плеча і навіть у деяких риб до тої частини раменної кости (humerus), яка йде над пекторальною. Частина жмутків спиняється коло першого ребра і від цього ребра иноді одходить пасмо до цмокової кости черепа (mastoideus) і яку можна порівняти зі скаленусом вищих тварин. Її нижня частина інсерує до нижньої части раменної кости (humerus), а особливо до її сімфізи. Вона продовжується до підязичної кости (hioideum). Ця нижня частина великого бокового мяза вкриває плечовий пояс. Обидва бокові мязи поділені поперек на відтинки лучнотканними плівками. Ці відтинки (див. далі міотоми) ідуть навскіс і утворюють зікзак, при чому верхні і нижні їх частини прямують навскіс ззаду наперед, а середні частини навскіс зпереду назад, утворюючи кут, направлений вперед. Весь боковий мяз, як було згадано, ділиться на три частини: верхня легко одділяється від середньої; вона привязується своєю нижною частиною до апофізів лучнотканними пасмочками направленими навскіс назад; верхня внутрішня частина дає теж тужні (лучнотканні) до апофізів, але навскіс вперед. Із зовнішньої поверхні також одходять часто тужні, особливо там, де є плавці, до шипів; ці тужні направляються навскіс вперед. Середня частина своєю внутрішньою верхнею дає жмутки направлені навскіс назад до боків апофізів; середня її частина йде від ребра до ребра як міжреберні мязи (intercostales). Нижнє пасмо тіснійше звязане з середнім ніж верхне. Збоку йде легка межа, яка відповідає боковим виросткам додаткових ребер, але повного поділу між мязами немає принаймні у риб зі стисненим тілом.

Ззаду боковий мяз переходить у тужні, які інсерують до основи промінів хвостового плавця, вкриваючи маленькі мязи якраз того плавця. Верхні і нижні жмутки інсерують до крайніх промінів хв. плавця і допомагають їх одсуванню при розкриванні плавця.

Головною ролею бокових мускулів є звиванне тіла і тому звичайно при русі вони є головними локомоторними мязами.

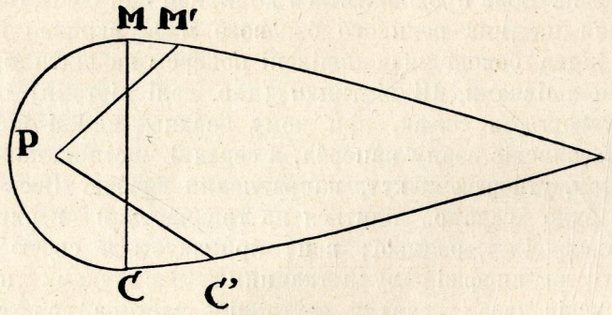
2. Межи боковими автор зазначує „ніжні“ (grêles), спинний і черевний, перервані плавцями, що підходять до їх передніх

основ і якими вони порушають. Крім того вони згинають тіло дорзовентрально, коли гнучкість тіла на це дозволяє.

Бокову мускулятуру ділить т. зв. бокова лінія на дві частини: спинну або дорзальну і черевну або вентральну. Як дорзальна так і вентральна частина діляться лініями, утвореними кутами загибів міотомів на верхню і нижню частину. Таким чином в бокових мязах можна одріжнити 4 головні частини, які ріжними авторами ріжно називаються.

Тіло типової риби виявляє найбільш зручну форму в змислі найменшого опору води; це овоїд ширший спереду і втоншений назад.

Головним перерізом



або „maitre couple“ Houssay [1]) вважає переріз по площі в M C. З огляду на те, що форма риби не є точним овоїдом, а сплощена спереду (в голові) дорзовентрально, а по боках лятерально, то проєкція головного перерізу спроєктується на медіяльній площі не по лінії M C, а по лінії M' P C', так само як проєкція перерізу на трансверсальній плян не буде кругом, а контуром риби en face. Ряд обслідувань приводить Houssay до висновку, що між головним перерізом і формою міотомів є певна залежність.

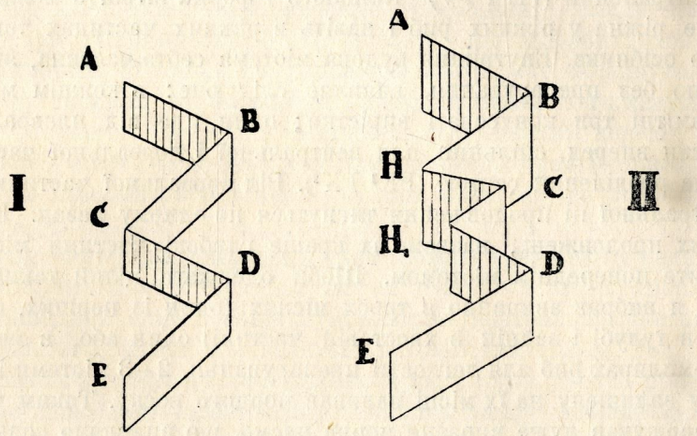
Кожний міотом на зовні виявляє з себе ломану лінію або зікзак.

Chevrel [2]) подає таку схему міотома:

В точці B є вершина спинної задньої піраміди (darsal posterior pyramid); в H передньої піраміди (anterior darsal pyramid).

[1]) Houssay — „Forme puissance etc.“
[2]) E. W. Shann — „On the... etc...“

Перший рисунок (I) показує нам відомий вигляд міотома, а другий (II) справжню конструкцію міотома, яка є складнійшою.



У Maurer'a [1]) знаходимо докладний опис вентральної бокової мускулятури. Дорзальна частина відділяється від вентральної боковою лінією. Обидві частини виявляють з себе ряд міотомів. В хвостовій частині як дорзальна так і вентральна мускулятура виявляє в кожнім сеґменті два порожніх конуси мускульних волокон, що лежать пасмами один понад другим. Вершини цих конусів дорзально і вентрально направлені назад. Міосепти з поверхні (коли зняти шкіру трохи підваривши обєкт) виявляють ряд зіґзаків. В кожнім міотомі Dietz [2]) одріжняє 4 частини: дорзальну, вентральну, плевродорзальну і плевровентральну (рис. 6).

Кожний міотом (і міоком) виявляє тричи зігнуту лінію: спочатку маленький кут вперед (P), потім гострий кут назад і знов вперед до бокової лінії.

Нижня частина під боковою лінією не виявляє продовження верхньої частини, а не збігається з нею, будучи трохи висуненою вперед. Це особливо замітне в сегментах тулуба. Нижня частина повертає назад, потім дугою вперед і знов дає частину назад на череві і зустрічається з протилежним міотомом. Отже

[1]) Dr. Fr. Maurer — Die ventrale Rumpfmuskulatur der Fische Selachier, Ganoiden, Teleostier, Crossopterygier u. Dipnoer. Jenaische Ztsch. f. Natwiss. 1913.
[2]) Dietz — „Über die Form der Myotome der Teleostier“ — Anat. Anz. 1913 Bd 24 Jena.

вже зовні видно 4 відтинки: властиво спинний і властиво черевний (D і V); по боках бокової лінії плевродорзальний і плевровентральний (PD і PV). Кількість і форма зіґзаґів може бути дуже ріжна у ріжних риб і навіть в ріжних частинах того самого осібника. Внутрішня будова міотома себто частина, якої не видно без препарування, виявляє слідуюче: в кожнім міотомі є замітні три конусоваті вирістки; один йде від плєвральних частин вперед, спільний для вентральної і дорзальної частини, лише розділений септою (PK[1] PK[2]). Від дорзальної частини і від вентральної ці продовження тягнуться по-одному назад. Кожне з цих продовжень, назвемо їх краще глибокі частини міотома, вкрите попереднім міотомом. Щоби одержати цілий такий міотом, я вибрав звичайно в трьох місцях (один із перших, середній в тулубі і задній в хвостовій частині) один або, в менших екземплярах риб для легкости препарування, 2—3 міотоми і в дутину залишену на їх місці наливав чорного воску. Таким чином я одержував дуже виразне чорне пасмо. що виявляло зовнішню частину міотома і крім того модель цілого міотома.

Загальну довжину міотома можна зміряти, ставлячи ніжки циркля поступово (напр. починаючи зверху) в кожний кут. Крім цього міряється по прямій лінії відступ між двома крайніми точками (верхнім і нижнім). Відношенне цих двох величин називає Dietz[1]) коефіцієнтом складкування (Faltungskoeffizient). З огляду на те, що останній верхній і останній нижній кінець тяжко одпрепаровуються і часто непомітно зливаються з сусідніми, Dietz випускає їх обмірюванне і міряє міотом від першого дорзального кута оберненого вперед і до першого вентрального оберненого теж вперед. Цьогож способу додержувався і я (між P_1 і P_2).

У риби фузіформного типу[2]) коефіцієнт складкування збільшується від голови до хвоста головним чином завдяки косому стану дорзальних і вентральних відтинків.

Автор знаходить, що взагалі риби „von der normalen Fischgestalt“ мають тіло більше стисле в хвостовій ніж в тулубній частині. У молодих і лярвальних форм немає такої великої ріжниці у складкуванні в передній і задній частині, як у дорослих форм. Тому можна припустити, що праформа риби була більше менше одноманітно висока і нагадувала Amphioxus'a та була

[1]) Dietz — Über die Form der Myotome.

[2]) Dietz бере як приклади Gadus morrhua, Pleuronectes platessa, Trigla hirundo.

мало пристосована до нектонічного життя. У низьких депресіформних риб помічаємо секундарне складкуванне чи то простопадне до вісі тіла чи рівнобіжне. Коефіцієнт складкування у цих форм дуже високий[1]). Це доказує, що ці риби походять від нектонних. Цікаво, що у пажорів коефіцієнт складкування теж дуже великий (не зважаючи на фузіформний тип і нектонне життя). Можливо, що у них помічаємо секундарний перехід від бентонного життя (і в звязку з цим депресіформного пристосування) до нектонного (і в звязку з цим повороту до фузіформного типу[2]).

Langelaan[3]) дає докладний опис міотома у міноги і у селяхій і я обмежуюся наведенням рисунку зі згаданого автора (рис. 7).

Докладний опис бокової мускулятури (вентральної частини) подає Maurer[4]), даючи порівнююче анатомичний огляд. Тоді, як у Amphioxus'a і Petromyzon-a бокова мускулятура досить проста, у Mixine вона вже складнійша і виявляє певну спеціялізацію. У селяхій (пажорів) бачимо дальший поступ і диференціяцію на мязи кінчин, а у костистих риб знаходимо ще більшу спеціялізацію.

Maurer одріжняє 4 такі головні ізгиби у вентральній (очевидно і у дорзальній можна признати ті самі означення) частині міосепта (рис. 8): *a* від бокової лінії перший в другий ізгиб і *c* і *d* маленькі, що йдуть майже по середині черева входячи (у Chlamydoselachus) в будову глибокого мяза, що начинається від вентральної середньої лінії і тягнеться до плечового поясу. Відтинок *b* можна в свою чергу поділити на $\alpha\beta\gamma$, при чому γ досягає linea alba. Мускульний відтинок, який відповідає ізгибови міосепта *b*, автор називає M. obliquus superior; відтинок $b\alpha$ M. obliquus medius, $b\beta$ M. obliquus inferior по черевній стороні в разі закручування міосептів, коли вони зійдуться на linea alba, утворюється ще M. rectus profundus (M. rect. prof. mit keinem der ebenso bezeichneten Muskeln der höheren Wirbeltiere vergleichen kann).

При розгляді окремих зразків ми ще повернемося до докладнійшого розгляду бокових мязів, тепер зазначу головну

[1]) У Trigla I, 6 і 2,0 (Dietz).

[2]) Langelaan — On the form ol trune Miotome Konink. Akad v. Wetenschappen Amsterdam 1904.

[3]) Dietz числить, що це є один із доказів Abel'a про те, що предки пажорів були донними формами.

[4]) Maurer — Die ventrale Rumpfmusculatur der Fische. Jenaische Ztschr. Naturwissensch. Jena 1913.

ріжницю в мускулятурі риб ріжних систематичних ґруп за Maurer'ом.

У пажорів хід мускульних жмутків у всіх відтинках (a, b, c, d) дуже простий і повторюється у всіх представників більше менше однаково. Двохшаровість зявляється тому, що M. obliquus inferior накладається на M. obl. medius, жмутки перехрещуються. M. rectus може бути у живородячих (Chlamydoselachus), граючи ролю при вагітности (Tragmuskel).

Хрящеві ганоїди (напр. Acipenser) наближаються до селяхій, а костисті ганоїди і дводишні до костистих риб.

На протязі цього переходу відбувається утвореннє двохшарової вентральної мускулятури з одношарової. У костистих Maurer одріжняє два типи:

1. Коли M. obl. superior (гомольоґ. селяхіям і ганоїдам) дістає сильний розвиток і займає більшу частину бокової стіни тіла, а M. obl. inferior (вкритий M. obl. superior) дуже слабо розвинений. (До цього типу належать Cyprinoidea, Salmonidae, Anguilla).

2. Коли M. obl. inferior сильно поширений і як у селяхій і хрящових ганоїдів вкриває M. obl. superior. (Сюди належать Lota, Silurus, Cottus, Malapterus).

Esox lucius займає середнє положеннє між цими типами.

Локомоторна функція бокових мязів є найважнійша. Відтинок a, що лежить зараз же під боковою лінією, має разом з дорзальною частиною безпосередній вплив на хреби, що оточують хорду. Відтинок $b\alpha$ несе ту ж ролю в загальних рисах. Навпаки $b\beta$ і $b\gamma$ одночасно з ролею черевного пояса мають великий вплив на плечевий пояс і на рухи голови в боки. Ця частина особливо розвинена у тих форм, де вони витісняють відтинок $b\alpha$. Працюючи одночасно зправа і зліва, цей мускул може рухати голову вниз при ріжних способах плавби. Коли ребра сильно розвинені (як у костистих риб нижні ребра), то рух тулуба може бути лише боковий. Коли ж ребра короткі і хрящеві, то може бути і дорзовентральний рух. Форма і кількість міотомів дуже залежить від форми і способу життя, особливо руху тої чи иншої форми.

У Houssay[1]) знаходимо ряд табличок, де він порівнює відношеннє довжини тіла до ширини міотома у риб ріжних систематичних ґруп, розташовуючи кожну в порядку швидкости

[1]) Houssay (Forme puissance etc...).

плавби. Висновком цих його обрахунків є те, що відносна кількість міотомів зменшується одночасно зі збільшеннєм негнучкости тіла. Так у селяхій L/e: у Scilliumcanicula 34, а у Lamna carnulica 109; у Malacopterygia: Gobio flaviatilis 52, а Esox lucius 90; у Acanthopterygia: Mugil capito 32, а Zeus faber 60.

Хід волокон і інсерація мускулів міотома відповідає напрямкам сили при рухах. Sella[1]) указує, що є дві системи лучнотканей: одна охоплює половину конуса міомера оберненого до термінального крила (дорзального чи вентрального) і ґрупується у жмуток, який направляється до спинного чи черевного кутка, де сполучається зі жмутком, що тягнеться здовж дістальної плівки.

Друга складається з волокон, які індивідуалізуються в анальоґічний спосіб на тій половині конуса, що обернена до бокового септума, там охоплює або сполучується в один жмуток при лятеральнім оберненім куті, де ця фасція зєднується з тою, що є гомольоґічною симетрично розташованого конуса (рис. 9).

З наведеного сисунку видно напрямки, в яких працюють окремі частини міотома.

Виявляючи, як було згадано, окремий мотор, кожний міотом має й свою нервацію. Van Bisselick[2]) зазначує, що (рис. 10) один спінальний нерв інервує один міотом і міжміотомову лучноткань, через яку цей нерв проходить. Корінь розгалуження спінального нерва, має положеннє під міотомом; гилки нерва пробивають міотом, але весь час іде в інтерміотомальнім септум-і до шкіри. Звичайно він знаходиться між перімізіумом і міжміотомовим септум-ом. Спінальний нерв виявляє прімарний розподіл на три частини: задню, лятеральну і передню частину в звязку з диференціяцією міотома на дорзальну, лятеральну і вентральну частину. Всі більші галузі се змішані нерви, що мають елєменти як переднього так і заднього корінця.

Щоби закінчити цей огляд бокової мускулятури і її елєментів окремих міотомів, наведу таблицю складену з моїми доповненнями за Shann-ом[3]), у якій зазначую, як у авторів називаються ті чи інші частини міотома. (Табл. I.).

[1]) Sella — Struttura ed atachi tendinei dei miesetti e del setto laterale dei teleostei R. Comitato Talassografico italiano. Venezia 1925.

[2]) I. W. Van Bisselick — Note on the innervation of the trunk myotome — Koninklijke Akademie van Wetenschappen Amsterdam 1905, 25/V.

[3]) E. W. Shann — On the lateral Muscles in teleostei — Proceedings of the... Zoologie Society of London 1914, st. 319.

Схема назв відтинків боко-

Lacepedes	Cuvier	Owen	Humpfray		Gegenbauer	March	Langelaan	V. Tricht
			Зовнішні мязи	Внутрішні мязи				
Спинний	Спинний	Супракаріальна секція				1 порція		
Боковий мускул	Боковий мускул Верхня частина	Дорзальна секція	Мезіо-дорзальна порція		Неповний конус звернений назад	2 порція	Дорзальний ріг (Dors. cornu)	Дорзальна частина
	Середня частина	Дорзально-середня секція	Лятеро-дорзальна порція		Повний конус звернений вперед		Лятеральна частина	Лятеральна частина
			Червоні волокна				Дорзальна частина	
			Червоні волокна					
	Нижня частина	Вентрально-середня секція	Лятеро-вентральна порція = Obliquus externus		Повний конус звернений вперед	3 порція	Вентральний ріг (Ventr. cornu)	Лятеральна частина
		Вентральна секція	Мезіо-вентральна порція (= Pectoralis) (= Latissimus dorsi)	Obliquus internus	Неповний конус звернений назад	4 порція	Вентральна частина	Лятеральна частина
Черевний	Черевний	Інфракаріальна секція	Каріальний мяз			5 порція		

вого мускула у ріжних авторів.

Wiedersheim	Knauer		Maurer		Dietz	Chevrel	Shann	Sella
	Зовнішні мязи	Внутр. мязи	Зовнішні мязи	Внутр. мязи				
Дорзальна частина	Тонкі мязи спини		Дорзальна порція		Дорзальна порція	Дорзальна частина Задні зовнішні або поверхневі піраміди (Superficielles piramides)	Дорзальна задня піраміда	Паралятеральні дорзальні конуси
	Спинні мязи				Плевродорзальна порція	Передні внутрішні або глибокі піраміди	Дорзальна передня піраміда	
Вентральна частина Закладкосого мяза (Anlage v. obliquus)			Червоні волокна		Плевровентральна порція	Червоні волокна	Вентральна піраміда	Паралятеральні вентральні конуси
Ніжні мязи	Косо мускулятура спини		Червоні волокна		Плевровентральна порція	Вентральна частина Передні внутрішні або глибокі піраміди		
Тонка черевна мускулатура			Косий зовнішній (Obliquus externus)			Задні зовнішні або поверхневі піраміди		
Тонка черевна мускулатура			Косий внутрішній (Obliquus internus)					
Закладпрямого мяза (Anlage v. rectus)								
Тонка черевна мускулатура	Косо мускулятура спини		Прямий (Rectus)		Вентральна порція			
Тонка черевна мускулатура			Прямий (Rectus)					

В приведеній таблиці подаю перегляд назв і описів ріжних авторів, які всі сходяться в тім, що правий і лівий боковий мускул риби виявляє з себе серію гомольоґічних поперечних мязів міоморів (міотомів), що мають форму зіґзаку і розділені між собою лучнотканю.

Отже автори здебільшого ділять боковий мяз на дві частини, відмежовані одна від другої т. зв. боковою лінією (яка не сходиться з боковою зовнішньою лінією), верхня частина знову в свою чергу розпадається на дві частини як і нижня.

По спині медіяльно йде тоненький мяз (supracarinalis) або спинний, що вклинюється між боковими. Медіяльно по черевній лінії йде теж тонкий мяз. Перш ніж перейти до розгляду бокової мускулятури у ріжних етольоґічних типів, оглянемо також мускулятуру плавців.

Мускулятура плавців теж виявляє ріжні ступені розвитку. У кругоротих знаходимо початки мускулятури непаристих плавців. У Myxina немає ще власної мускулятури плавцевої складки. Thacher[1]) зазначає, що: I haw been unable to detect any muscular fabres in the composition of fin.

У Myxina теж немає власної мускулятури хвоста (Шмальгаузен[2]), але має вже цілком незалежну від бокових мязів мускулятуру плавця. Ці мускули не відповідають сегментації бокових мязів, виразно одмежовані од них і йдуть в иншому напрямкові. Вони виявляють з себе маленькі жмутки, які вклинюються межи боковими мязами обох сторін.

Самі плавці находяться на ряді хрящових промінів, які щільно сидять по медіяльній лінії в кількости 3—4—5 на сегмент. Ці проміні незвязані з верхніми дугами, їх верхні кінці подвоюються, доходять до верхнього краю спинного плавця. В хвостовій частині проміні зєднуються з одною суцільною платівкою верхніх дуг. Нижні дуги теж зрослі в цій частині з основами нижніх промінів. Весь хрящовий скелет виявляється тут як один хвостовий хрящ. Взагалі будова плавця у кругоротих виявляє дуже багато примітивних ознак: брак звязку з метамерією тулуба, нестала форма, брак поперечного розчленовання промінів, простирання хрящового скелету до самого окраю первісно симетричного плавця, (протоцеркна) форма хвостового плавця і неповний розділ плавцевої складки на відділи (Шмальгаузен).

[1]) I. Thacher — Median and Poired Fins — Transaction of Connecticut Academie of Art akd Science 1874—78.

[2]) Schmalhausen „Zur Morphologie der unpaaren Flossen". Ztschr. Wiss. Zool. Leipzig 1912.

Вже з опису Cyclostomata видно, що мускулятура плавця незалежна від лятеральної. Праці багатьох вчених над морфольоґічним значіннєм непаристих плавців доводять, що як скелет виявляє незалежну закладку від восевого скелету так і мускулятура непаристих плавців незалежна від лятеральної мускулятури. У Dipnoi Gegenbauer доводить, що насади лучів птерігіоформ є розвиненими остистими відростками[1]).

Праці Шмальгаузена показують, що мускулятура (і скелет) всього гіпохордального відділу хвостового плавця виявляє з себе одну цілість і що вона розвинулася иншим шляхом ніж мускулятура инших непаристих плавців. В цім сходяться з ним і Whitehouse: The present hypaxial supports are only a modification of this primary form — себто, коли хвостовий плавець підносився in a manner si milar to that of other median fins.

У селяхій скелет обох спинних плавців, анального і гіпохордальної частини хвостового плавця закладається ембріонально незалежно від восевого скелету і лише додатково наближаються до нього. Наслідком цього гіпохордальна частина виявляє ряд утворів змішаної природи (елєменти гемальних дуг, самостійні проміні). Передні проміні лишаються самостійними часто й у дорослих форм, бо приростанне йшло ззаду і привело до повного поглинення первісного скелета восевими утворами, що були викликані необхідністю міцної опори підчас руху.

У осетрових риб лишаються ще рудіменти у вигляді дістальних хрящів, що виявляють останки первісного скелету.

У костистих риб первісний незалежний скелет зникає і заміняється цілком утворами з остистих відростків (Шмальгаузен).

У селяхій кожному (вже розгляненому) проміню спинного і анального плавця відповідає по одному мязови. Ця мускулятура почасти двошарова[2]) дістально прикріплюється до рогових. промінів. В хвостовім плавці дорзальна частина немає своєї власної мускулятури, а вентральна частина має мязи, що прикріплюються до гіпохордальних хрящів.

В мускулятурі плавців Harrison[3]) одріжняє три пари мязів, що прикріплюються до кожного проміння: поверхневі мязи, M. inclinator йде від шкіри; протилежний йому по функції M. errector йде від двох птерігіофорів до кожного проміня спе-

[1]) За Шмальгаузеном. „Непарные плавники"....

[2]) У Chimaera.

[3]) Harrison „The develonement of the fins of teleosts" Hopkins Univ. Circular III.

реду; M. depressor йде від одного птерігіофора до променя, що знаходиться на попереднім (спереду) сегменті. В хвості одріжняють два поверхневі, два глибокі і один середній, що йде до деяких дорзальних промінів.

У осетрових є теж поділ на поверхневі і глибокі мязи, які по свойому положенню відповідають птерігіофорам.

У костистих знаходимо гомольоґічні утвори (Шмальгаузен).

Вже з положення мязів хвоста у селяхій можна зрозуміти їх ролю. Двосторонні скорочення їх викликає опусканнє піднятої в гору частини хребта; одностороннє скороченнє викликає крім того і загинаннє хвоста в бік. При скороченню найбільш поверхневих жмутків рогові проміні стягаються, бо мязи інсеруються на шкірі там де лежать проксімальні кінці промінів. Звичайно ці рухи не є льокомоторні бо цю функцію виконують бокові мязи, а хвостова мускулятура регулює (у селяхій) напрямок рухів у вертікальній площі.

У ганоїдів починається дальша диференціяція, яка виявляється в поділі на два шари з ріжним напрямком волокон. Поверхневий шар вкриває вентральний край бокового мускула тіла; волокна прикріпляються на деякій віддалі від нижнього кінця хрящевих виростків; глибокий шар тягнеться аж до заднього кінця хвостового плавця і його волокна перехрещуються з волокнами поверхневого шару.

У костистих риб дістальні і проксімальні закладки такі як й у Holostei. З них розвиваються M. flexor ventralis і невеликий мяз, що не має звязку зі шкіряним скелетом; крім того розвивається сильний M. interradialis (який лише намічається у Amia), що дає цілу систему musculi plicatores. На рахунок міотомів розвиваються: M. flexor ventralis і M. flexor dorsalis гіпохордально розвивається поверхневий мяз M. flexor interior.

Обидва M. flexores прикриваються боковим мускулом тіла, який продовжується у тужні, що ними прикріпляється до шкіряних промінів.

Отже мускулятура хвостового плавця розвивалася в двох етапах і ріжним способом та у примітивних форм має иншу будову ніж у других плавців, лишаючись цілком своєрідною.

Розглянемо за Hinderson'ом [1]), як заховується мускулятура хвостового плавця у форм з хвостами ріжного типу:

У риб з явно виявленою гетероцеркією хвостова мускулятура виявляє асиметрію: вентральна частина має більший розвиток і диференціяцію ніж дорзальна. Це особливо замітне на внутрішніх мязах, бо поверхневі шари часто секундарно дорзовентрально симетричні. У форм зі слабо виявленою гетероцеркією напр. Gadus morrhua [1]), Anguilla vulgaris немає й виразної асиметрії в мускулятурі.

[1]) Hinderson — Über die Schwanz-Flossenmusculatur der Teleostei — Anat. Anz. m. XXXVI 1910 Jena.

IV. Бокові мязи риб ріжних етольогічних типів.

Не спиняючися на рибах фузіформних sensu strictu, розглянемо спочатку, як поводиться мускулятура у риб стиснених збоків, по мірі їх більшої й більшої спеціялізації, а потім спинимося на екстремній формі. Тут же слід зазначити, що стислі збоків риби можуть виявляти або нектонні форми, наближаючися до теніформного типу, коли тіло є сильно видовжене, або планктонні форми або форми компресіформного типу. Ріжниця в способі руху у цих типів буде дуже значна. Тоді як теніформні риби рухаються ундуляцією цілого тіла і добре плавають, компресіформні чим більше спеціялізовані тим більше втрачають здібність до ундуляції тіла, ба навіть хвостової частини і рухаються слабо за допомогою плавців. В компресіформнім асиметричнім типі (камбали) ми знову бачимо рух за допомогою ундуляції тіла. В разі коли риба рухається ундулятивним способом (звиваючи хвилевато тіло), непаристі плавці (дорзальний і вентральний) видовжуються і в формі стяжки тягнуться здовж спини і черева або лише здовж черева чи спини. Їх роля — збільшувати корйсну поверхню при хвилюватім коливанні тіла; самі вони мають теж здібність утворювати хвилі, ізза чого кожний промінь має відповідне риштованнє. Тому сильні видовження дорзального і анального плавця указують на то, що донна риба рухається ундуляцією тіла в більшій чи меншій мірі у всякім разі тої частини тіла, що має ці мягкі, здебільшого одноманітні плавці.

У риб компресіформного типу ми теж здибуємо ундулюючі плавці, але тіло у них в більшій або меншій мірі не є гнучке. Звичайно ундуляція плавців одних не може дати такої сильної пропульзії як ундуляція цілого тіла (згадаємо морського коника) і тому риби з негнучким тілом є поганими плавунами.

Розглянемо кілька зразків бокової мускулятури, починаючи від фузіформних риб до найбільш екстремних форм компресі-

[1]) Dallo називає хвіст Gadus'a гефіроцеркним — друготно симетричним (див. вище).

формного, сагітіформного, теніформного і ангуіліформного пристосування.

Методи, яких я вживав при праці, полягали на препаруванні мускулятури і по змозі на досвідах з живими обєктами.

Свіжу рибу уміщав я на 2—5 секунд в окріп, після чого шкіра легко знімалася. Далі я обчислював коефіцієнти складкування міотомів і відношення довжини всього тіла по способу Dietz'a [1]) (довжина суми всіх відтинків міотома поділена на довжину прямої між дістальними кінцями міотомів є коефіцієнтом складкування). Потім обчислював я відношення довжини цілого тіла (L) до середньої грубости одного міотома.

Щоби не виводити середно аритметичної з суми ширин міотомів на їх кількість, я ділив довжину тіла заняту міотомами (від їх початку при тімені до кінця при хвостовім плавці) на їх кількість $\frac{L \times Miot}{l}$.

Це робив я за Houssay-ом [2]), який твердить, що ця релятивна кількість міотомів зменшується разом із збільшеннєм негнучкости (rigidité) тіла.

Вже з тої незначної кількости риб, що я їх опрацював (понад 60), можна зробити деякі висновки, які й наведу в кінці.

Форму тіла риби можна зрозуміти, знаючи довжину (L) висоту (H) й ширину (B); тому я розташовую опис риб по відношенню L/H і H/B. Відношеннє L : H рівне 3,5 до 6-и дає нам більше менше видовжені риби (фузіформні) з переходом до високих і коротких, де це відношеннє менше 3,5 і до довгих, де це відношення більше 6-и. Риба стисла з боків дає відношеннє H : B і завдяки йому довгі видовжені риби можемо поділити на теніформні, у яких H : B є коло 2-х і більше і на ангуіліформні, у яких це відношеннє є коло 1.

У коротких риб відношеннє висоти до ширини тіла H : B вказує нам, чи риба є компресіформна чи депресіформна. Коли $H > B$ (напр., у Zeus-a H : B коло 5-и), то форма стисла з боків. Коли $H < B$, то форма сплощена дорзовентрально.

Видовжені форми по зовнішному виді можна також однести до сагітіформних риб.

Фузіформні: Mugil chelo (2 осібн. 150—52 мм.) L : H = 5,3; H : B = 1,8. Тіло фузіформне. Хвостовий плавець добре розви-

[1]) Dietz — Über die form.... — 1913.
[2]) Houssay — Forme.... — Paris.

нений, сильно вирізаний. Перший спинний і другий спинний (D_1 і D_2) невеликі, майже одної висоти, причім останній (D_2) сидить проти анального (A). Плавун добрий і швидкий [1]).

Міотоми складковані сильно і їх коефіцієнт поступово збільшується до заду. Коеф. 1,8 — 2,1 — 2,6.

Релятивна кількість міотомів невелика, бо вони досить широкі (напр., середній має 4,3 — 4,6 мм.) $\frac{L \times Miot}{l} = 37$. Мускулятура починається проти заднього краю ока.

Box boops (4 осібники) L : H = 4,8; H : B = 1,6.

Ця риба цілком фузіформного типу являється добрим плавуном. Добре розвинений хвостовий (C), сильно вирізаний плавець; довгий спинний (D), що починається перед половиною тіла і тягнеться назад до хвостового стебла і вдвоє коротший анальний (A). Початок міотомів помічаємо над оком.

Міотоми виявляють сильне зікзакуваннє коефіцієнта, який поступово збільшується до заду. Коеф. 1,5 — 2,1 — 2,8.

Релятивна кількість міотомів невелика, бо ширина їх досить велика $\frac{L \times Miot}{l} = 33$.

Mullus surmuletus (2 осібники 125—145 мм.) L : H = 4,6; H : B = 2.

Тіло видовжене. Спинні плавці високі трикутні. Підхвостовий відповідає другому спинному розміром і розташованнєм.

Хвостовий плавець сильний, вирізаний. Коефіцієнт складкування рівномірно повишається до заду. Коеф. 1,5 — 1,7 — 2,5.

Релятивна кількість міотомів невелика $\frac{L \times Miot}{l} = 37$.

Плаває добре, хоч держиться радше дна.

Smaris vulgaris, рис. 11. (3 осібники 80—160 мм.) L : H = = 4,5 — 5,5. (у молоді є довші в порівнанні з більшими осібниками) H : B = 1,5 — 1,7.

Тіло фузіформне. Хвіст великий, сильно вирізаний. Спинний плавець довгий, починається над заднім краєм зяберної покришки і тягнеться до хвостового стебла. Анальний більш ніж вдвоє коротший за нього. Плавун добрий. Міотоми сильно зікзаковані, особливо в задній частині. Коеф. 1,6 — 1,7 — 2,7.

Релятивна кількість міотомів невелика $\frac{L \times Miot}{l} = 40$.

---

[1]) Mugil capito Hossay относить до formes rapides et peu resistances і дає для релятивної кількости міотомів 32.

Міотоми широкі в передній частині тіла. Мускулятура починається над оком.

Umbrina cirrhosa (2 осібники 160 — 163 мм.) L : H = 4, H : B = 1,7.

Тіло стисле фузіформне. Дорзальний плавець довгий і тягнеться довше ніж до половини тіла, анальний малий. Лінія спини круто піднімається вгору одразу за головою.

Складкуваннє міотомів ріжне в ріжних частинах тіла. Спереду і в середній частині тулуба коефіцієнт невисокий, в хвостовій частині стає одразу вищий. Коеф. = 1,7 — 1,7 — 3,3.

Релятивна кількість міотомів невисока. $\frac{\text{Lx Miot}}{\text{l}} = 36.$

Плаває добре, звиваючи головне хвостове стебло.

Pagellus erythrinus (3 осібники 52—75 мм.) L : H = 3,3, H : B = 2,5.

Рибка фузіформна з довгими спинним і анальним плавцем. Хвіст добре вирізаний. Плаває досить добре [1]).

Бокова лінія в передній частині трохи зігнута. Міотоми складкуються досить сильно і коефіцієнт їх піднімається в хвостовій частині. Коеф. 1,3 — 1,4 — 2,3.

Релятивна кількість міотомів невелика. $\frac{\text{Lx Miot}}{\text{l}} = 40.$

Примітка: осібники малі і тому в кількости міотомів я міг помилитися на 1 — 2.

Corvina nigra (1 осібник 145 мм.) L : H = 3,6, H : B = 4.

Тіло більше менше фузіформне, але сильно стисле з боків. Лінія спини відразу круто піднімається за головою так, що тіло має півмісячну форму.

Міотоми найменше складковані спереду і в середній частині, де висота тіла найбільша. Коеф. = 1,3 — 1,2 — 2,3.

Хвостове стебло, найбільш гнучка частина тіла, поволи переходить в тулуб. Плаває добре.

Релятивна кількість міотомів невелика. $\frac{\text{Lx Miot}}{\text{l}} = 43.$

Crenilabrus pavo (3 осібники 90 — 185 мм.) L : H = 3,5, H : B = 2,3.

Видовжене тіло (подібне до коропового). Спинний плавець довгий — починається скоро за головою і тягнеться до хвостового стебла. Анальний коротший. Обидва найдовші в задній частині. Хвостовий плавець тупо заокруглений. Складкуваннє міотомів невисоке. Коеф. = 1,3 — 1,6 — 2,2.

Рухається крім звивання цілого тіла (задньої частини особливо) завдяки ундуляції задніх частин. Мускулятура D і A добре розвинена і пристосована до ундуляції промінів.

Релятивна кількість міотомів розмірно невелика $\frac{\text{Lx Miot}}{\text{l}} = 50.$

Apogon rex mullorum, рис. 12. (2 осібники 100—105 мм.) L : H = 3,5, H : B = 2·3.

Тіло скорочене — фузіформне з виразним хвостовим стеблом. Другий спинний (D), трикутний і стоїть проти такогож анального. Складкуваннє міотомів не дуже високе; особливо випростовані середні. Коеф. = 1,3 — 1,4 — 2,1.

Мускулятура сильних D і A добре розвинена і входить легким півмісяцем в бокову мускулятуру. Бокова лінія зігнута (скороченнє тіла). Складкуваннє міотомів у хвостовім стеблі високе, бо це є при негнучкости передньої частини тіла найбільш рухома частина.

Релятивна кількість міотомів широких і виразних досить значна. $\frac{\text{Lx Miot}}{\text{l}} = 47,7.$ Початок мускулятури над оком.

Релятивна кількість міотомів невелика. $\frac{\text{Lx Miot}}{\text{l}} = 40.$

Oblatta melanura (3 осібники 140 — 150 мм.) L : H = 3,1, H : B = 3,5.

Тіло стисле збоків, але гнучке. Хвостове стебло виразне, дорзальний плавець довгий, починається над зяберною покришкою. Анальний більш як вдвоє (майже втроє) коротший за нього. Хвостовий плавець сильний, вирізаний. Міотоми сильно складковані, широкі в середніх відтинках і тонкі в дістальних.

Коеф. = 1,5 — 1,6 — 2,0.

Релятивна кількість міотомів невелика. $\frac{\text{Lx Miot}}{\text{l}} = 35.$

Мускулятура починається над переднім краєм ока.

Haliases chromis, рис. 13. (1 осібник 82 мм.) L : H = 3,1, H : B = 2,6.

Тіло коротке подібне до карася. Спинний плавець довгий і високий в задній частині. Анальний вдвоє менший і теж високий в задній частині. Хвостове стебло вирізане. Хвостовий плавець дуже великий і сильно вирізаний.

Складкуваннє міотомів невисоке. Риба плаває жваво, але не швидко. Коеф. = 1,5 — 1,5 — 1,9.

[1]) Houssay зараховує Pagellus-а до форм мало швидких, але резистентних по компресії і дає для релятивної кількости міотомів 45.

[1]) Houssay dae 45.

Релятивна кількість міотомів значна (завдяки великому хвостови) $\frac{L \times Miot}{l} = 52$.

Компресіформні: Sargus annularis, рис. 14. (5 осібників 108 — 130 мм. L : H = 2,5, H : B = 3,4).

Тіло стисле, овальне, більш компресіформне ніж фузіформне, так що тут вже маємо перехід до першого типу. Спинний плавець займає майже всю спину, анальний більш ніж вдвоє менший. Хвіст великий сильно вирізаний; хвостове стебло виразне. Міотоми складковані слабо і лише в хвостовім стеблі сильнійше. Коеф. = 1,4 — 1,3 — 1,5.

Релятивна кількість міотомів невелика. $\frac{L \times Miot}{l} = 32$.

Міотоми досить широкі. Мускулятура D і A сильно розвинена, хоч типових риштованих для ундуляції немає. Плаває досить добре головно завдяки рухам хвоста.

Zeus faber[1]) (8 осібн. 75—540 мм.) L : H = 2,40, H : B = 3,4.

Тіло сильно стисле з боків, високе. Голова дуже велика. Перший спинний (D), високий і стоїть напроти довгим черевним. Другий спинний (D) стоїть проти мнягкій частині анального і має всі риштування для ундуляції. Хвіст цільно крайний, добре розвинений на виразнім стеблі. Мускулятура D і A дуже добре розвинена. Міотоми сильно складковані лише в хвостовій частині. Коеф. = (1,4 — 1,6) — (1,1 — 1,2) — (1,6 — 1,7). Бокова лінія виразно загнута вгору. Релятивна кількість міотомів велика. $\frac{L \times Miot}{l} = 60$, бо тут маємо явище скорочення тіла.

Плаває Zeus двома способами і то або за допомогою хвоста для швидких рухів або за допомогою ундуляції D і A. Взагалі не є добрим плавуном[2]).

Як зразок компресіформної риби розглянемо докладнійше:

Capros aper, рис. 15. (4 осібники 75 — 95 мм.) L : H = 2,2, H : B = 4.

По спостереженнях над живими осібниками видно, що Capros, плаває дуже помалу поміж водоростинами, ловлячи (наче то дзьобаючи) ріжні дрібні тварини на підводних листях чи скелях. Звичайне положенне тіла нахилене вперед. В цім становищу рибка плаває головним чином, ундулюючи другим мягким дорзальним і анальним плавцем; обидва грудні плавці теж весь час знаходяться у віяловатім русі. При такім положенні високий перший спинний і такіж черевні плавці або випростовані або трохи схилені назад. Вони не приймають участи в русі риби. Коли риба чогось злякається, то рухається в инший спосіб. Хвіст, що при тихій плавбі в нахиленому стані цілого тіла служить лише для поворотів, переймає в разі потреби раптового руху головну льокомоторну фунцію. Швидко пливе злякана риба за допомогою хвостового плавця. Грудні плавці в цім випадку притуляються тільки до боків тіла. Твердий дорзальний схиляється назад як і другий дорзальний. Черевні теж схиляються назад. Отже як і у Zeus'a так і у Capros'a бачимо два відмінні способи руху. Один для тихої плавби шляхом ундуляції мягких непаристих, спинного і анального з участю грудних; другий для швидкої плавби за допомогою хвостового плавця і почасти звивання всієї задньої частини тіла. В останнім випадку Capros пливе горізонтально.

При анестезуванні стебла хвостового плавця риба плаває цілком нормально спокійно, ундулюючи трохи енергійнійше мягкими непаристими плавцями. Повороти робить за допомогою грудних. При анестезуванні грудних нормальний нахилений стан вперед стає більше виразним.

Порівнюючи мускулятуру Capros'a і Zeus'a, помічаємо велику подібність. Подібними є також риштування для розсікання води і утворення трамового сліду для ундулюючих плавців.

Перший (або краще мовити передня частина спинного) у Capros'a спинний плавець складається з 8—9 могутніх міцних промінів. Перший промінь дуже маленький і прилягає до більшого другого. Третій є найвищий. Будова кожного проміня нагадує надзвичайно то, що ми бачимо у Zeus'a.

Такаж тригранчаста форма, такіж бокові виростки внизу. Цей плавець утворює трамовий слід, приймаючи на себе весь опір води. Струї направляються обабіч його згаданими виростками. Далі охороняють мягкий другий спинний, що складається з 22—23-х розгалужених членистих промінів, ряд кісточок як і у Zeus'a. Таким чином тут ундуляція другого спинного відбувається в розріженім околі.

Знизу бачимо те саме. Груди і горло Capros'a виявляють стерно. Міцні черевні плавці, що складаються з 6-ти твердих лучів, дають напрямок течіям обабіч тіла. Перші три проміні

[1]) Ю. Русов — Мускулятура Zeus faber як зразок мало спеціялізованої компресіформної риби — Збірник Укр. Госп. Академії — 1926.

[2]) Houssay относить Zeus faber до форм не швидких, але резістентних по компресії і дає релятивну кількість міотомів 60.

анального плавця є тверді, але маленькі. Зовні обабіч мягкої ундулюючої частини анального плавця теж іде по ряду кісточок. З огляду на те, що риба плаває клінопектонічно себто спиною вперед, описаний апарат знизу не такий виразний, бо вентральна сторона риби не приймає на себе такого опору води як дорзальна, і особливо анальний є в трамовім сліді, утворенім цілим тілом.

Знявши шкіру, помічаємо картину дуже подібну до того, що виявляє мускулятуру Zeus'a.

Медіяльно на спині йде міцний мяз, що піднімає проміні першого спинного плавця. Він інсерує до потилиці з одного боку, а другим кінцем підходить до попередньої частини другого проміня. Перший промінь маленький і сидить над цим мязом притуплений до другого проміня. З боків цей піднімач (errector radii) почасти вкритий першими міотомами бокових мязів. Від поперечних одростків промінів першого спинного плавця одходять маленькі і слабо розвинені мязи, які в дуже незначній мірі одводять проміні в бік (adductores). Вони налягають на бокову мускулятуру. Задній мягкий спинний плавець має таку саму „клявіатуру" мускулів, як це ми бачили у Zeus'a. Ці поверхневі одводячі мязи відповідають кількости мягких промінів (23). Своїми дістальними кінцями вони підходять до промінів під згаданими вище кісточками, що охоронюють плавець з боку. Проксімальні кінці цих мязів лежать на боковій мускулятурі.

Нижній плавець — анальний має ряд таких самих мязів, що одводять промінь вбік.

Три передні міцні проміні мають дуже маленькі одводячі мязи (як і мягкі проміні) і медіяльний невеликий мяз, що піднімає проміні плавця.

Бокова мускулятура складається з 25-ти міотомів сильно випростованих в середній частині тіла. Коефіцієнти їх зіжакування (складкування) є такі: в перших міотомів, що загинаються коло голови, згинають зяберну покришку, коеф. = 1,1; в середній частині тіла приблизно межи міцним промінем спинного, а першим промінем анального коеф. = 1,2; в задній частині тіла (від середини мягкого спинного до середини мягкого анального) коеф. = 1,3. Відношеннє цілої довжини тіла до пересічної ширини міотома рівне 46 [1]).

Дуже виразні є останні міотоми, верхній і нижній, які йдуть під проксімальними кінцями ряду мускулів плавців і переходячи в тужень, підходять до хвостового плавця.

[1]) Houssay 46,7.

Знявши бокову мускулятуру, бачимо таку саму картину як у Zeus'a в мініатурі [1]).

Так само птерігіофор кожного проміня спинного плавця має гостру бокову платівку, яка розділяє пару жмутків мязів проміня.

Передній мускул цієї пари підходить до заднього кінця попереднього проміня і опускає його (plicator), а задній підходить до слідуючого проміня і піднімає його (errector interior). Ця будова повторюється як в мускулах твердих промінів так і у мягких.

Від спинного стрижня одходить вверх (до верхніх непаристих плавців) і вниз до анального нерва; трохи вище над кінцем остистих одростків кожний нерв ділиться на дві галузки в формі V. Ці галузки інервують мускули окремих промінів.

Centriscus scolopax, рис. 16. (3 осібники 60 — 115 мм.) L : H = 4,7, H : B = 3,2.

Ця невелика рибка багато в чому нагадує Capros aper, хоч зовні й сильно одріжняється від нього. Дуже видовжений ніс і складає $^1/_3$ цілої довжини. Перший спинний виявляє довгий шип, другий спинний пристосований до ундуляції. Хвостове стебло тонке, хвостовий плавець заокруглений. Анальний відповідає другому спинному по будові і формі, але більший. Черевні плавці маленькі, грудні великі. Від заднього краю operculum до 1-го спинного по боках тягнеться платівка, що як панцир вкриває передню частину тіла, роблячи її цілком не гнучкою.

Складкування міотомів невисоке.

Коеф. = 1,2 — 1,4 — 1,8.

Релятивна кількість міотомів висока (завдяки довгому носови, що збільшує довжину тіла). $\frac{\text{Lx Miot}}{\text{l}} = 67.$

Плаває клінотектонічно головою вниз. Рух відбувається головним чином завдяки швидкій ундуляції D і A. Грудні плавці теж приймають значну ролю в русі. Цю рибу можна, незважаючи на L : H = 4,7, однести до пляктонних, компресіформних риб.

Balistes balistes, рис. 17. (1 осібник 90 мм.) L : H = 2,1, H : B = 3,8.

Тіло овальне, компресіформне. Перший спинний плавець з 4-х міцних промінів утворює трамовий слід для ундуляції другого

[1]) Houssay — Forme puissance stabilité et des poissons — Paris 1912.

спинного. На череві цю-ж ролю грає непаристий виріст, бо (як часто буває у компресіформних типів) черевних плавців нема. Хвостовий плавець округлий, на дуже виразнім тонкім хвостовім стеблі. D, хвостовий і A виявляють пропульзорний прилад. D і A типові плавці пристосовані до ундуляції і завдяки їх хвилеватому рухови риба головним чином плаває, держучися трохи похило. Тіло не дуже гнучке.

Міотоми середньої частини тіла випростовані. Коеф. = 1,1 — — 1,4 — 1,6.

Orthagoriscus mola, рис. 18. (1 осібн. 540 мм.) L : H = 1,5.

Типово компресіформна риба з дуже незначною здібністю до самостійного руху. Дорзальний і анальний плавці дуже великі, стоять один проти другого. (H : HD = 1,4; H : HA = 1,6). Хвостовий плавець тягнеться здовж заднього кінця тіла у вигляді шкіристого пасма зміцненого 12 хрящевими промінями і може слабо ундулювати.

Бокової мускулятури, цього головного приладу пропульзії риб, у Місяць-риби немає зовсім і вона є замінена могутньою мускулятурою дорзального і анального плавця.

Отже релятивна кількість міотомів = 0. Плаває дуже зле, здебільше лежучи на боці на поверхні води дуже пасивно, віддаючися хвилям і течії. Від ворогів захищений дуже міцним хрящовим панцирем, завдяки якому тіло його має мінімальну гнучкість. Рух тіла відбувається завдяки незначній ундуляції хвостової складки шкіри і завдяки рухам D і A.

Спинюся докладнійше на мускулятурі дорзального і анального плавця. Під грубою шкірою (хрящевим панцирем) лежать два великі мязи розділені боковою лінією, по якій тягнеться лучнотканна пластинка.

У Rosen'a [1]) знаходимо опис мускулятури Місяць-риби, але рисунок я даю свій, бо у згаданого автора не докладно вказано на перехід мязів в тужні.

Спинний плавець трохи більший ніж анальний і мускулятура його теж більш розвинена та складається з могутнього жмутка мускульних пасем, що тягнуться від голови (початок над оком), завертаючись дугою і розпадаючись на окремі жмутки відповідно до кількости промінів спинного плавця.

Від задньої частини цього мязя відокремлюються жмутки до промінів хвостового плавця. Нижній мускул себ-то мяз черевного плавця ширший і тягнеться понад черевною дутиною до заднього краю голови. Від нього також відокремлюються жмутки мязів до хвостових промінів.

[1]) N. Rosen — Studies on the Plectognaths the body muscles — Arkiv hör zoologi Bd. 8 Upsala Stokholm 1913/14.

Кожний промінь властиво має свій комплекс мускульних жмутків, які заховують свою окремішність (особливо в нижнім мускулі) майже до місця інсерції себ-то до бокового лучнотканного пасма (рис. 19).

Можна одріжнити виразно в нижнім мускулі, а менше виразно в верхнім, дві частини: одну, що рухає передніми промінями плавця і другу, що рухає задніми промінями спинного або анального, а також хвостового плавця.

Особливо це замітне на мускулах анального плавця. Ґрупа мускулів 9-и перших (спереду) промінів відділяється складкою від ґрупи мускулів 7—10 слідуючих промінів; остання ґрупа утворює начеб то віяло разом з мязом хвоста. В дорзальній частині помічаємо те саме, то є: 14 виразних жмутків перших промінів та ґрупу більше скупчених мязів і тужнів решти промінів D. Разом 13 промінів хвоста мають кожний свій жмуток, яких є 6 над хребтом і 7 під ним.

Кожний мускул проміня розпадається на кілька жмутків, що інесрують до міцного тужня на деякім віддаленні від хрящевої платівки, утвореної зі зростанням птеріґіофорів. Крізь цей суцільний птеріґіофор проходять тужні з міцної лучноткані до плавців. Згаданий вище розпад мускулятури на дві ґрупи є зрозумілий з руху самого плавця. Передня частина є міцна і тверда, а задня мягча і шкіриста.

Ундуляція (перпендікулярна) хоч і дуже незначна механічно відповідає теж незначній ундуляції хвоста. Головні рухи обох плавців це коливання збоку на бік, а їх роля це установка тіла в певнім положенні. Але це коливання викликає і рух вперед, завдяки корисному коливанню мягкої складки задньої частини плавця. Розташованнє мускулів і тужнів як і спостереженнє над рухом Місяць-риби показує, що проміні не здібні до самостійного руху.

Весь плавець більше менше суцільний. Але натяганнє тих чи инших тужнів (чи цілої серії) викликає деяке згинанне плавця. Тому ми й помічаємо, що ґрупа мязів переходить до тужня в кількох місцях; найбільші жмутки переходять в тужень з боків (лятерально) менші і ніжнійші переходять до тужня спереду і ззаду. Бокові нахиляють промінь (отже і весь плавець) в бік. Передні і задні до деякої міри (дуже незначно) нахиляють про-

мінь (і плавець) вперед чи назад. З огляду на те, що на передню частину проміня найбільше ділає опір води (особливо на дорзальний, бо знизу голова і черево утворюють деякий трамовий слід), найсильнійші мязи підходять до передніх промінів. Одночасно діланнє цих мязів лівої і правої сторони викликає нахиленнє плавця вперед.

Якби то не було, і A і D не є пристосовані до доброго руху. Хвостовий плавець грає теж ролю приладу для стабілізації риби, але його здібність до хвильоватого руху простопадного до головної вості тіла риби є одночасно й здібністю для посування тіла вперед.

В той час як проміні A і D щільно зростаються, як і птеріґіофори, їх проміні хвоста цілком окремі, як і їх птеріґіофори.

Кожний промінь виявляє дуже видовжений хрящевий конус, що сидить на конічнім хрящевім птеріґіофорі.

Зправа і зліва до проміня підходять тужні від мускулів. Жмутки мязів, як було згадано, є розділені по кількости промінів. Таким чином кожний промінь може самостійно коливатися в боки і утворювати хвилю, яка проходить по плавцю зверху вниз або відворотно. Але великої досконалости і прудкости в ундуляції ми тут не помічаємо як в плавцях пристосованих до ундуляції (напр., у Zeus-a або Capros'a, анальний плавець у Notopteridae і инш.).

Отже взагалі у Orthagoriscus mola немає риштування для швидкого руху, тіло не гнучке і роля мязів D і A припадає у ліпшім випадку (крім стабілізації тіла) веслуватого руху плавцям. Її сильний розвиток цілком відповідає великим розмірам цих плавців.

На описі цієї екстремної форми з посеред компресіформних риб закінчу огляд мускулятури цього типу.

Ми бачили, що здібність до руху в цім типі разом зі спеціялізацією падає. Разом з цим зменшується і гнучкість тіла. Бокова мускулятура стає менше складкована в середній частині, бо звиваннє тіла зникає.

Мускулятура непаристих плавців спинного і анального розвивається і набуває значіння. Ціж плавці стають почасти орґанами не лише стабілізації й льокомоції. Значіннє хвоста в пропульзії залишається правда навіть в екстремних формах, але теж втрачає свою головну ролю.

Коли ми спробуємо виявити ґрафічно (Табл. II, від 1—5) законність випростовання зікзаку міотома разом зі скороченнєм тіла і переходу до компресіформного типу, то побачимо певну залежність.

Одкладемо на горізонтальній координаті відношеннє довжини тіла до висоти, а на вертікальній коефіцієнти складкування міотомів.

З кривої цілком виразно видно, що коефіцієнт складкування міотомів зменшується тим більше чим вище тіло.

При цьому слід приймити на увагу, не лише відношеннє L : H, але й відношеннє цілої довжини тіла до цілої висоти риби (H) себто висоти тіла (H) + висоти спинного плавця (HD) і черевних плавців, якщо вони стоять напроти спинного.

Релятивна кількість міотомів не залежить від висоти тіла, бо при скороченню тіла їх кількість не зменшується.

Тепер розглянемо як поводиться бокова мускулятура у риб теж стислих з боків, але несиметричних, яких рух є головним чином ундуляторний.

Несиметричний компресіформний тип.

Цей ориґінальний тип пристосування зустрічаємо лише у камбалових (Pleuronectidae).

Судячи по розвитку, ці риби виявляють собою секундарне пристосуваннє до життя на дні. Молоді форми є цілком симетричні і лише дорослі дістають характеристичну несиметричну форму (ліву або праву).

В цім випадку бачимо приблизно те саме, що й у депресіформних риб. Роля хвоста тут зникає і пропульзія відбувається завдяки ундуляції. Але у скатів (напр., Raja) ролю пропульзорних орґанів, скажемо крил, переймають грудні плавці. Тут-же ми бачимо, що ундулюють сильно розвинені спинний і анальний плавці, які тягнуться довкруги цілого тіла.

Отже в руху є велика принціпіяльна ріжниця межи компресіформними симетричними і несиметричними рибами. Коли у перших (Zeus, Capros Balistes) тіло не є гнучке, а пропульзорну ролю грає або хвіст зі своїм стеблом або ундуляція плавців (D і A), у других рух відбувається завдяки ундуляції цілого тіла і плавців (D і A).

Досвіди над живими осібниками переконали мене, що камбали рухаються головним чином ундуляцією тіла, плавці теж ундулюють, але не самостійно, тільки разом, так-би мовити, в такт із тілом. У камбалових D і A не є самостійними пропульзор-

ними приладами як напр. у Zeus'a D і A, а при унерухомленні, позбавленні гнучкости тіла, риба одними тими не користується. Очевидно не можна порівнувати компресіформних симетричних і несиметричних риб, бо перші виявляють пристосування до планктонного життя, а другі до донного, перші рухаються стоючи у воді прямовісно, а другі боком, перші мають тіло не дуже гнучке, другі навпаки, і коли перші рухаються завдяки хвостовому плавцеві і ундуляції D і A, то другі завдяки вертікальній ундуляції тіла і довгих D і A. Але в мускулятурі бачимо низький коефіцієнт складкування міотомів (напр., Solea ocellata = 1,7; 1,6; 2) в обох випадках, тільки у несиметричних форм складкуваннє міотомів значно одноманітнійше ніж у симетричних і повишається лише в хвостовім стеблі, бо хвіст дає досить сильний пропульзорний удар.

Solea lascaris, рис. 20. (2 осібн. 340—350 мм.) L : H = 3,4.

Тіло видовжене яйцевате плоске.

Коефіцієнти складкування міотомів низьке.

Коеф. = 1,9 — 1,4 — 2,2.

Релятивна кількість міотомів висока. $\frac{\text{LxMiot}}{\text{l}} = 65.$

Риба плаває ундулюючи цілим тілом, а особливо задньою частиною.

Arnoglossus Grohmanii, рис. 21. (3 осібн. 97—103 мм.) L : H = 3,0.

Спинний і анальний плавці мають найдовші проміні в 2-ій третині спереду. Хвостовий плавець заокруглений, трохи загострений до кінця.

Коеф. = 1,4 — 1,6 — 2,0.

Релятивна кількість міотомів 47.

Плаває, звиваючи тіло особливо в останній третині.

Solea ocellata, рис. 22. (2 осібн. 133—140 мм.) L : H = 2,6, H : B = 4,7.

Тіло видовжене еліптичне, D і A тягнуться здовж тіла. Їх мускулятура у вигляді клявіятури займає значну частину по боках тіла, (спинну і черевну). Тому бокова мускулятура розташовується на вужчім просторі ніж висота тіла (H). Складкуваннє міотомів одноманітне.

Коеф. = 1,7 — 1,6 — 2,0.

Релятивна кількість міотомів досить велика. $\frac{\text{LxMiot}}{\text{l}} = 57.$

Плаває, ундулюючи цілим тілом, при чому задня частина з хвостом дає швидкі і коротші хвилі.

Platessa vulgaris, рис. 23. (4 осібники 260 — 270 мм.), L : H = 2,4.

Тіло широке ромбічне. Дорзальний і анальні плавці великі, їх найдовші проміні є середні. Мускулятура їх сильно розвинена і складає $^1/_5$ висоти тіла.

Складкуваннє міотомів рівномірно збільшується спереду до заду тіла.

Коеф. = 1,5 — 1,3 — 2,5.

Перші міотоми мають сильнійший коефіцієнт складкування, бо обгинають голову. Хвіст розвинений добре і дає сильний пропульзорний удар, рухаючися зверху вниз.

Релятивна кількість міотомів досить велика. $\frac{\text{LxMiot}}{\text{l}} = 65.$

Rhomboidychthys podas, рис. 24. (3 осібн. 140—150 мм.), L : H = 2.

Тіло коротке, еліптичне. Анальний і дорзальний плавці мають найдовші проміні в третій четвертині спереду тіла. Рух відбувається головно задною третиною тіла.

Коеф. = 1,5 — 1,5 — 2,3.

Релятивна кількість міотомів 57.

Rhombus rhombus, рис. 25. (2 осібн. 208—245 мм.), L : H = 1,8, H : B = 8.

Тіло майже округле. Бокова лінія сильно загнута в передній частині тіла. Спинний і анальний тягнуться здовж всієї спини згл. черева. Хвостовий плавець округлий. Міотоми складкованні досить рівномірно в передній і задній частині тіла, в хвостовій сильнійше.

Коеф. = 1,5 — 1,5 — 2,3.

Плаває зле і то головним чином завдяки ундуляції D і A, а також завдяки швидким рухам хвоста.

Релятивна кількість міотомів досить висока. $\frac{\text{LxMiot}}{\text{l}} = 56.$

Тут знов бачимо залежність між вигибом бокової лінії і релятивною кількістю міотомів.

Теніформний тип. Коли будемо розглядати бокову мускулятуру видовжених риб (ангуіліформних і теніформних), то побачимо, що кількість міотомів разом з видовженнем тіла сильно зростає. Складкуваннє міотомів знову залежить не від видовження тіла, а від його стиснення з боків.

Коли тіло видовжене циліндрично, то складкуваннє є високе, до тогож міотом вигнутий по площі перерізу тіла.

Коли тіло стисле з боків, то міотоми випростовуються і я вважаю це характеристичним для риб теніформного типу, які рухаються ундуляцією цілого тіла.

Це є рух нектонних тварин і завдяки цьому деякі форми дуже добре плавають, але в спокійній воді.

Докладний опис цього руху знаходимо у Schlesinger'a [1]). У риб теніформного типу дутина тіла здебільшого невелика (напр., у Xenomystus nigri займає лише $^1/_9$ довжини всього тіла), а решта є мускулистим хвостовим стеблом.

Непаристі плавці в разі руху ундуляцією звичайно дуже довгі і рівнаються довжині тіла.

У Regalecus розвинений спинний, у Cepola і спинний і анальний, у Ateleopus лише анальний.

Роля цих плавців є або збільшенне поверхні при ундуляції цілого тіла або самостійна ундуляція, при чому по них ідуть швидкі хвилі. У теніформних риб тіло звивається лише латерально і самий скелет не пристосований до дорзо-вентральних рухів [2]).

У риб округлих в перерізі (напр., Conger), що живуть на дні і властиво не плавають, а порпаються, плазують у намулі чи серед каміння, можливе й дорзо-вентральне згинанне. Остисті відростки (сильно розвинені у теніформних риб і взагалі у тих, що рухаються ундуляторно), зменшуються. Мускулятура виявляє більше складкування і коефіцієнти стають вищі.

Є також видовжені форми, які можна однести до сагітіформного [3]) (напр., Belone), що є теж нектонними плавунами і то дуже добрими, що можуть боротися з хвилями і течією. У них мускулятура виявляє свої особливости, а саме: високий коефіцієнт складкування особливо в задній частині тіла. Тому видовжені форми розглянемо по їх етольогічних типах.

Теніформні є стислі з боків і у них знаходимо в мускулятурі дещо спільного з тим, що бачимо у довших компресіформних несиметричних риб, бо властиво і в тім і в другім випадку маємо той самий спосіб руху ундуляцією (чи в горізонтальній чи у вертікальній площі).

---

[1]) D. G. Schlesinger: Über undulatorische Bewegung bei Fischen — Verh Zool. Bot. Ges. Wien 1911, Bd. 61.

[2]) G. Schlesinger — Die Locomotion der täniformen Fische — Zool Jahrb. Jena 1911.

[3]) Schlesinger — Der sagittiforme Anpassungstypus — Verhdl. Zool. Bot. Ges. Wien 1909.

Розглянемо кілька зразків менш спеціялізованих до більш спеціялізованих.

Jullus vulgaris, рис. 26. (2 осібн. 135—140 мм.), L : H = 6; H : B = 2.

Тіло видовжене, гнучке. Спинний плавець довгий (од потилиці майже до хвоста), анальний майже вдвоє коротший.

Плаває, звиваючи ундулярно тіло. Міотоми досить сильно, але рівномірно складковані.

Коеф. 2,0 — 1,8 — 2,6.

Релятивна кількість міотомів розмірно невелика. $\frac{L \times Miot}{l} = 33.$

Trachinus draco, рис. 27. (1 осібник 170 мм.), L : H = 6,1, H : B = 1,5.

Видовжене тіло. Перший спинний плавець має 5 міцних промінів і стоїть зразу за головою. Другий починається за ним, і тягнеться майже до сильного і виразного хвоста.

Анальний такоїж довжини як і спинний.

Міотоми складковані рівномірно.

Коеф. = 1,4 — 1,8 — 2,7.

Релятивна кількість міотомів 55.

Плаває як ундуляцією тіла так і особливо ундуляцією спинного і анального плавця, які пускають хвилі швидче і менші ніж тіло.

Atherina hepsetus, (1 осібник 82 мм.), L : H = 7, H : B = 1,6.

Видовжене тіло. Маленький D^1, якому знизу відповідають черевні і D_2, якому знизу відповідає A.

Коефіцієнт складкування рівномірно повишається до заду.

Коеф. = 1,6 — 1,8 — 2,6.

Релятивна кількість міотомів досить велика 69,8.

Blennius ocellaris, рис. 28. (1 осібн. 143 мм.), L : H = 4,1, H : B = 1,7.

Тіло стисле, з боків видовжене. Дуже сильно розвинений спинний плавець (перші його проміні довші ніж висота тіла). Анальний розвинений значно менше. Хвостовий плавець заокруглений.

Мускули промінів спинного плавця розвинені дуже сильно і вкривають бокову мускулятуру до бокової лінії.

Те саме і на черевній стороні, де бокові мязи (в задній частині) вкриті мускулами промінів анального плавця.

Складкуванне міотомів незначне.

Коеф. = 1,4 — 1,5 — 2,2.

Релятивна кількість міотомів невелика. $\frac{L \times Miot}{l} = 36.$

Плаває, звиваючи ундуляторно тіло, як теніформна риба.

Спинний плавець особливо в задній частині і анальний теж ундулюють.

Ophidium barbatum, рис. 29. (1 осібн. 185 мм.), L : H = 9, H : B = 2.

Видовжене гнучке тіло. Спинний плавець тягнеться здовж цілого майже тіла і огинає задній кінець тіла; анальний тягнеться від анального отвору в передній третині тіла і переходить в хвіст.

Міотоми складковані дуже рівномірно.

Коеф. = 1,6 — 2,0 — 2,1.

Релятивна кількість міотомів 63.

Плаває, ундулюючи цілою задньою частиною тіла.

Cepola rubescens, рис. 30. (2 осібн. 110—111 мм.), L : H = 12, H : B = 2.

Типово теніформне тіло, видовжене і поступово витончене до хвоста.

Спинний плавець тягнеться здовж цілої спини і підходить до хвостового плавця округлої форми.

Анальний плавець починається одразу за анальним отвором, тягнеться здовж хвостового стебла (дуже довгого) і теж підходить до хвостового плавця.

Складкуваннє міотомів незначне.

Коеф. = 1,3 — 1,5 — 2,2.

Релятивна кількість міотомів велика. $\frac{L \times Miot}{l} = 72.$

Плаває, ундулюючи цілим тілом і непаристими плавцями.

Ангуіліформний тип. З ангуіліформних риб розглянув я лише Conger, тому про цей змієватий тип майже округлий на перерізі не можу вивести певних даних. Слід зазначити лише, що у цих риб коефіцієнт складкування вищий ніж у теніформних.

Conger vulgaris, (2 особники 305—310 мм.), L : H = 19, H : B = 1,3.

Тіло видовжене, змієвате. Спинний плавець тягнеться здовж цілої спини, починаючися негайно за головою.

Анальний трохи коротший, бо починається за анальним отвором приблизно в першій третині тіла.

Спинний і анальний переходять в хвостовий плавець.

Коефіцієнт складкування рівномірно високий.

Коеф. = 2,3 — 2,9 — 3,1.

Релятивна кількість міотомів дуже велика 160 [1]).

Плаває, звиваючи тіло змієвато.

Саґітіформний тип. Саґітіформні риби можуть бути ріжної довжини і з них я опрацював лише 4 відміни, при чому у всіх знайшов те саме [2]). Дуже високий коефіцієнт складкування в задній частині тіла.

Ammodites tobianus, рис. 31. (2 осібн. 115 — 113 мм.), L : H = 11.

Тіло дуже видовжене. Спинний плавець тягнеться майже здовж цілої спини, але не переходить у хвостовий; останній загострений.

Анальний більше ніж вдвоє коротший. Дуже рівномірне складкуваннє міотомів.

Коеф. = 1,7 — 1,7 — 2,3.

Релятивна кількість міотомів велика [3]). $\frac{L \times Miot}{l} = 80.$

Плаває швидко, звиваючи тіло в кілька ізгибів.

Belone acus, рис. 32. (2 осібн. 250 — 260 мм.), L : H = 2,1, H : B = 1,3.

Тіло видовжене саґітіформне. Дорзальний і анальний плавці протистоючі далеко на задній частині тіла.

Як у видовжених форм взагалі складкуваннє міотомів одноманітне, але як у саґітіформної риби раптом збільшується в районі хвостового стебла. Коеф. = 2,0 — 2,0 — 4,0.

Релятивна кількість міотомів, як у риби видовженої, велика.

$$\frac{L \times Miot}{l} = 84.$$

Плаває дуже добре, при чому може робити раптовні швидкі рухи.

Esox lucius, (2 осібники 210 — 250 мм.), L : M = 1,7, H : B = 1,4.

Тіло видовжене, типово саґітіформне. Спинні і анальний протистоять один другому, обидва одсунені далеко назад.

Це дає змогу щуці робити дуже швидкі, блискавкові рухи.

Коефіцієнт складкування міотомів невисокий і одноманітний, лише в хвостовій частині звишується. Коеф. = 1,4 — 1,4 — 3,1.

---

[1]) У Houssay 168.

[2]) Maurer подаючи малюнок щуки (Esox), не звертає уваги на сильне складкуванне у хвостовій частині.

[3]) У Houssay 85,5.

Релятивна кількість міотомів велика. $\frac{L \times Miot}{l} = 127.$

Lichia amia, рис. 33. (2 осібники 130—132 мм.), L : H = 4, H : B = 4.

Тіло стисле збоків, голова трохи сплющена дорзовентрально. Перший спинний плавець низький, другий високий і добре розвинений; останньому протистоїть анальний.

Хвостовий плавець великий і вирізаний. Зараз-же за головою знаходиться на спині гостре стерно. В загальних рисах форма тіла наближається до саґітіформного типу. Судячи по двічі загнутій боковій лінії, ця форма походить з більше видовжених форм. Складкуванне міотомів високе.

Коеф. = 2,0 — 2,6 — 4,0.

Релятивна кількість міотомів $\frac{L \times Miot}{l} = 40.$

Риба добре плаває і здібна до дуже швидких рухів.

Trachurus trachurus, (3 осібн. 130—135 мм.), L : H = 5,1, H : B = 2.

Тіло фузіформне. Бокова лінія виявляє загнуту лінію, що свідчить про те, що тіло скорочується і у предків було порівнюючи довше. Хвіст добре розвинений, вирізаний; хвостове стебло витончене, D і A довгі, розташовані один проти другого і досягають майже до половини тіла. Плавець добрий [1]).

Міотоми сильно зікзаковані, особливо ті, що є в хвостовім стеблі.

Коеф. = 1,7 — 2,1 — 3,2.

Релятивна кількість міотомів невелика [2]). $\frac{L \times Miot}{l} = 35.$

Передні міотоми є широкі, а в задній частині значно вужчі. Мязи починаються за оком.

Депресіформний тип. Депресіформний тип у костистих риб не виявлений так яскраво, як у селяхій, у яких знаходимо цілком плескаті форми (Raja, Torpedo). Серед костистих заміняють їх властиво компресіформні несиметричні. Рух перших і других є ундуляторний, але у плескатих селяхій ундулюють дуже великі грудні плавці, а у камбал спинний і черевний.

Серед костистих плескатих форм бачимо звичайно риби з широкою головою (Uranoscopus, Lophius).

[1]) Houssay зачисляє Trachurus trachurus до швидких і мало резістентних форм.

[2]) У Houssay теж 35.

У них не спостерігаємо дорзовентральної ундуляції.

Рух відбувається або скоком або завдяки швидкому коливанні задньої частини тіла.

Scorpaena scrofa, (2 осібники 88 — 120 мм.), L : H = 3, і H : B = 1,8, H : BC = 1,5 [1]).

Тіло валькувате. Голова дуже груба. Спинний перший великий. Другий теж. Хвостовий заокруглений. Анальний проти D, але розвинений слабше.

Коефіцієнт складкування міотомів у передній частині невисокий, в задній більший.

Коеф. = 1,2 — 1,2 — 2,1.

Релятивна кількість міотомів невелика. $\frac{L \times Miot}{l} = 39.$

Плаває зле або завдяки хвостовому плавцю або „перелітає“ завдяки великим грудним плавцям.

Закриваючи зяберні покришки, „скаче“ також швидко і раптово вперед.

Trigla cuculus, (2 осібники 150 — 156 мм.), L : H = 5,5, H : B = 1,3.

Видовжене, брускувате тіло з кремезною головою.

Перший спинний плавець короткий, високий; другий довший, але низший. Другому спинному відповідає анальний, хоч останній трохи коротший.

Коефіц. = 1,4 — 2,0 — 3,5.

Рухається, „ходячи“ по дну видовженими першими за промінями черевних плавців, які сидять під грудьми. Плаває, звиваючи швидко хвостову частину тіла.

„Перелітає“ у воді завдяки ундуляції великих грудних плавців.

Релятивна кількість міотомів досить висока. $\frac{L \times Miot}{l} = 52.$

Gobius niger, (3 осібн. 82—90 мм.), L : H = 7,1; H : B = 1,1.

Тіло брускувате, широке в передній частині і стисле в задній. H : BC = 0,8; H : B = 1,1; H : BK = 3, де BC ширина голови, а BK ширина хвостового стебла.

Перший спинний малий, другий більший і довший; хвостовий плавець округлий, підхвостовий трохи менший за D.

Міотоми складковані більше менше рівномірно.

Коеф. = 2,0 — 1,6 — 2,2.

Релятивна кількість міотомів невелика. $\frac{L \times Miot}{l} = 32.$

---

[1]) BC ширина голови.

Плаває швидко звиваючи задню частину тіла. Як донна форма не є добрим плавунцем.

Uranoscopus scaber, рис. 34. L : H = 6, H : B = 0,8, H : BC = 0,6.

Тіло плескате особливо в передній частині, до заду конічно звужується. Перший спинний маленький, другий довший. Хвостовий заокруглений. Анальний плавець довгий.

Міотоми сильно складковані, при чому слід зважати не лише зікзак, але й вигиб по окружности тіла, тому коефіцієнт буде вищий. Коеф. = 2 — 2,3 — 2,8.

Релятивна кількість міотомів невисока. $\frac{\text{Lx Miot}}{\text{l}} = 47.$

Плаває зле або швидко звиваючи задню частину тіла або за допомогою великих грудних плавців.

Lophius piscatorius, рис. 35. (3 осібники 175—1030 мм.), L : H = 8,8, H : B = 0,52, H : BC = 0,3.

Тіло типово депресіформне нагадує пуголовку. Дуже сильно розвинені грудні плавці, що перенесені назад служать рибі для скоків, як ноги у жаби. Їх мускули покривають собою з боків бокову мускулятуру тулуба.

Хвостове стебло з усіченим хв. плавцем дуже гнучке і міотоми сильно складковані: коефіц. = 2,3 — 3,1 — 3,3. Релятивна кількість міотомів велика (завдяки великій голові, що має довжину рівну майже половині довжини тіла) $\frac{\text{Lx Miot}}{\text{l}} = 52.$

Макруріформний тип. Fierasfer acus, (1 осібник 105 мм.), L : H = 11,6, H : B = 2,2.

Тіло типово макруріформне і виявляє дуже витягнений конус трохи плесковатий із боків. Найбільша висота зразу за головою. Спинний і анальний плавці тягнуться здовж цілого тіла, переходячи у загострений хвіст. Живе у голотурії і має тіло пристосоване до цієї симбіози. Плаває завдяки ундуляції цілого тіла.

Релятивна кількість міотомів велика. $\frac{\text{Lx Miot}}{\text{l}} = 135.$

Коефіцієнти складкування досить грубих міотомів поступово збільшуються до заду. Коеф. = 1,8 — 1,7 — 2,3.

Висновки.

Розглянувши складкуванне міотомів та релятивну їх кількість у ріжних риб, можна висліди представити графічно (Табл. III).

Хоч не годен вивести певних законів по тому матеріялу, який був у мене під руками й який залежав головним чином від вислідів уловів, то мимо цього певні правила виявляються досить очевидно.

Збудуємо криву, в якій на горізонтальній вості одкладемо відношення довжини до висоти, а на вертикальній — коефіцієнти складкування міотомів: перші за головою дадуть нижню криву чертковану коефіцієнти середини тіла середню криву а коефіцієнти складкування міотомів у хвостовім стеблі дадуть верхню криву (точковану).

Будуючи цю криву, ми не звертаємо уваги на форму тіла риби взагалі, ні на тип, до якого вона належить, а лише на те, чи риба довга чи коротка. Відношення L : H можуть бути у плескатих риб більші (напр. Lophius) ніж у риб видовженої форми (напр. Esox) і риби ріжних етологічних типів можуть станути рядом, а подібні можуть бути далеко.

Розташувавши риби про цьому відношенню, бачимо, що криві не виявляють якоїсь закономірности, хоч з розгляду їх ми можемо винести деякі дані.

Крива коефіцієнтів складкування міотомів передньої частини тіла (за головою) показує, що взагалі перші міотоми мають низчі коефіцієнти складкування як міотоми середньої частини тіла. Лише у риб стислих з боків (компресіформних, симетричних і несиметричних) і тих, що мають велику голову (напр. Platessa, Zeus, Sargus, Corvina, Solea і з другого боку Gobius, Scorpaena), перші коефіцієнти вищі ніж середні, бо міотом огинає задню лінію голови.

Ріжниця у висоті коефіцієнтів перших за головою й середини тулуба здебільшого незначна, лише у таких як Trygla і Lophius, тоб то виразно сплощених з кремезною головою коефіцієнт складкування раптом повишується.

Як загальне правило ми бачимо, що коефіцієнти складкування найбільш гнучкої і найважнійшої для рухів, хвостової частинн є високі і завше більші ніж коефіцієнти міотомів тулуба. Особливо високі є коефіцієнти складкування міотомів хвостового стебла, там де риба рухається як пуголовка швидким звиванням хвостової частини тіла, посуваючи вперед тяжку голову (напр. Trygla і Lophius). Цеж можна сказати і про риби саґітіформного типу, де знов-же задня частина тіла разом з A D плавцями дають раптовий удар, результатом якого є скок вперед. (Esox, Lychia, Trachurus, Bellone).

Таким чином ця крива дає нам вказівку на те, що складкування міотомів є тим більше, чим більшу працю мусить виконувати міотом.

І дійсно. У риб стислих з боків мало рухомих (компресіформних) коефіцієнти складкування міотомів невисокі й більше менше одноманітні. У риб теніформних (теж стислих з боків, але довгих і добрих плавунів) бачимо те саме себто порівнююче невисокі і одноманітні коефіцієнти складкування (Cepola). В першім випадку (у компресіформних симетричних) випростовані, бо не виконують сильних рухів при негнучкости тіла. В другім (у теніформних і компресіформних несиметричних), у риб, що рухаються чи горизонтальною чи вертукальною ундуляцією тіла, міотоми теж випростовані й одноманітні, бо при ундулятивнім русі на кожну окрему ґрупу міотомів припадає при ундуляції незначна праця.

Типи саґітіформний і депресіформний дуже ріжняться між собою, але й той й другий у типових представників мають високі коефіцієнти хвоста, у перших як головного пропульзорного органу, у других як єдиного гнучкого відтинку тіла.

Розташувавши риби по їх грубости, тоб то по відношенню висоти до грубости H : B, можемо збудувати знов три криві коефіцієнти складкування міотомів. В загальних рисах всі три криві повишаються разом зі збільшеннєм грубости тіла, але правильність сильно нарушується рибами таких типів як саґітіформні, а також фузіформні, які я взяв лише як зразки. Неясне також відношенне у Corvina і Seriola.

З обох кривих видно, що складкуванне міотомів не знаходиться в прямій залежности від довжини (L : H) або грубости риби (H : B).

На мою думку кожний міотом, будучи одиноким мотором, має форму, залежну від праці, яку він несе в тім чи в иншім відтинкові тіла.

Розташувавши риби по етольогічним типам і в порядку все більшої спеціялізації, можемо вивести найбільш характеристичні дані для особливо виразних форм.

Так у компресіформнім симетричнім етольогічнім типі (найбільш спеціялізованими були в моєму розпорядженню Ortagoriscus, Capros, Balistes, Zeus, Sargus, Centriscus, а лише стислі з боків не спеціялізовані (Heliases, Oblatta, Pagellus, Corvina) ми бачимо низькі коефіцієнти складкування, при

чому немає великої ріжниці в коефіцієнтах складкування передних, середних і задних. Чим менше риба спеціялізована, тим більша буде ріжниця в складкуванню міотомів перших і середних в порівнанню з міотомами хвостового стебла.

В компресіформнім асиметричнім типі помічаємо трохи инші залежности. (з Pleuronectidae у мене оброблено Rhomboidychtys, Arnoglossus, Solea laskar., Rhombus, Platessa). Тут теж коефіцієнти низькі, особливо середних міотомів. Міотоми хвостової частини тим вищі, чим більше риба пливає лише за допомогою хвоста, не звиваючи або мало звиваючи ундуляторно ціле тіло. Досвіди переведені над живими Solea, Rhombus і Platessa показали мені, що спосіб руху цих риб є ріжний. Короткі ромбічні форми як Platessa, Rhombus, виявляють найсильнійшу пропульзію, швидко кидаючися вперед завдяки швидким рухам хвоста. Більше видовжена Solea, бажаючи сильно плисти, вживає звивання тіла в поземій площині. При ундуляційнім способі руху нема різкої ріжниці в складкуванні міотомів, бо всі виконують більше менше однакову працю, при чім в цьому випадку (Solea) передні й задні більшу ніж середні. Отже у несиметричних риб форма міотомів залежить від способу руху.

У теніформного типу (з розглянених мною форм Cepola, Ophidium, Blennius) та у мало спеціялізованих Atherina, Iullus, Trachinus і почасти Crenilabrus помічаємо в загальних рисах одноманітне зікзаґуваннє міотомів без значної ріжниці в передних, середних і задних міотомах, причім чим більша риба і більше спеціялізована, тим рівномірнійше складкуваннє. В цім типі помічаємо, що ундуляторний спосіб руху або захоплює ціле тіло і риба тоді рухається, звиваючись як стяжка, або обмежується лише задньою й середньою частиною тіла, відповідно чому витягнені більше або менше непаристі плавці. Плавці анальний й спинний приймають в цім типі значну ролю в русі і ми знаходимо в їх промінях тіж пристосування, що описано вище у Zeus'a в D_2. Складкуваннє міотомів відповідає протяженню цих плавців, а саме воно є рівномірне там, де є ундулюючі плавці, тоб то там, де відбувається ундуляція тіла.

Щоби провірити спосіб руху і силу залежну від цього способу, я перевів ряд досвідів (в Роскові) над Rhombus, Solea і Platessa. Щоб зміряти силу, з якою пливе та чи инша риба, я пришивав до хвостового стебла петлю з нитки й давав загоюватися незначному ушкодженню. До петлі привязував нитку та перекидав єї через легкий бльок, уміщений на висоті двох метрів. До вільного кінця нитки

привязував легкий паперовий циліндр. Це приладдє не перешкаджало рухам риби. Примусивши рибу плисти, я досипав потрохи піску у паперовий циліндр, доки риба не спинилася у воді, хоч і продовжувала робити звичайні для її плавби рухи. Вагу цієї кількости піску я записував. Другі досвіди давали мені вагу, яку риба піднімає раптовим рухом, так-би мовити з місця. Для цього я насипав у циліндр піску, а потім лякав рибу. Вона або піднімала зразу циліндр з піском і пропливши басейн, потім пасивно тяглася назад завдяки силі ваги піску або не могла зовсім рушити з місця. Поступово додаючи або однімаючи пісок, з великої кількости досвідів я виводив середню вагу, яку риба може одразу підняти, але не може утримати, пливучи своїм нормальним способом. Solea звиваючися ундулярно, могла тягти більшу нагрузку, а Platessa і Rhombus могли зразу підняти більшу вагу, але не могли з нею плисти.

У риб саґітіформного типу (з яких у мене під руками були виразні Esox і Belone та менше спеціялізовані Trachurus і Lichia) помічаємо дуже різку ріжницю в складкуванню міотомів тулуба і хвоста. У спеціялізованих форм коефіцієнти перших і середних міотомів майже однакові і то невисокі, а міотоми задньої частини тіла дуже високі. Це знов-же зрозуміло із способу руху саґітіформних риб, у яких пропульзорний орган є ззаду і мускулам доводиться виконувати велику працю, звиваючи хвіст разом з анальним і дорзальним плавцем, які дають сильний опір [1]).

Бокова мускулятура депресіформних риб (Lophius, Trygla, Uranoscopus, Gobius) нагадує те, що ми бачили у саґітіформних, але тут слід прийняти на увагу, що коефіцієнт складкування збільшується не лише завдяки складкуванню міотомів в площі рівнобіжній до медіяльної площі риби, але міотоми загинаються завдяки округлому перерізови здебільшого в перерізі тіла і в площі рівнобіжній до поперечного перерізу. Чим більше спеціялізована форма (Lophius, Trygla), тим виразнійша ріжниця в складкуванню тулуба і хвоста чи взагалі задньої частини тіла. У риб в формі бабки (Gobius, Scorpaena, Uranoscopus) це не так помітне і в них складкуванне міотомів значно рівномірнійше. Це зрозуміло зі способу руху цих риб. Коли пливе бабка (Gobius), то вона звиває майже ціле тіло, отже виконує рух,

[1]) Не ясним є для мене відношенне мускулятури у Seriola Dumerili, яка не маючи ознак саґітіформної риби, по складкуванню міотомів цілком подібна до саґітіформних риб.

що наближає його до теніформної риби (порівняти Gobius niger і Blennius). Те саме знаходимо й у Uranoscopus'a, хоч тіло його є й більше валькувате, відповідно чому й складкуванне міотомів вище [1]).

З инших типів пристосовання були у мене лише Conger з ангуіліформних і Fierasfer з макруріформних, тому я не можу вивести для них певних даних, лише зазначу, що у них, як у форм видовжених, складкуванне міотомів рівномірне і у першого високе, а у другого — низьке.

Література.

Abel — Grudzüge der Paläobiologie — Stuttgart 1912.

Ahlborn — Bedeutung der Heterocerkie für Ortsbewegung — Ztschr. Wiss. Zool. 1895 Bd 61.

Amans — Comparaison des organes de la locomotion aqatique — Ann. Soc. Not. Zool. 1888. T. 6.

Borelli — De motu animalium — Lugduni Batavorum 1685.

Casta — Fauna del regno di Napoli —

Cuvier et Valenciénne — Histoire naturelle des poissons — 1828, Paris.

Cuvier — Le regne animal... — 1836 Bruxelles.

Dietz — Ueber die Form der Myotome der Teleostier: Anat. Anz. 1913. Bd 24 Jena.

Dean — Fisches living and fossils — New Jork 1895.

Dugés — Role des nageoires chez les poissons — Bull. d. 1. Soc. Zool. d. France 1905. T. XXX.

Chevrel — Essai sur la morphologie et la physiologie des muscles laterales chez les poissons osseux — Arch. de Zool. Experet General 1913.

Dubois-Reymond — Zur Physiologie des Schwimmens — Arch, L. Anat. und Physiol. 1905.

Schlesinger — Die Locomotion der Notopteriden: Zool. Jahrb. Syst. 1910. Bd. 29.

J. T. Cunningham — A treatise on the common sole (Solea vulgaris) — Plymouth 1890.

Van Bisselick — Note on innervation of the Trunkmyotome — Proc. K. Akad. Wetenschappen Amsterdam 1905.

M. Sella — Struttura et attacchi Tendinei dei miosette e dell setto laterale dei Teleostei — Venezia 1925 Memaria CXII.

Baudelot — Observations sur la Structure et le Developement des Nageoires des poissons osseux — Arch. Zool. Exp. 1873. Vol. II,

[1]) Слід зазначити, що в роді Gobius знаходимо як виразно депресіоноформні риби, наприклад: Gob. Kessleri так і подібного до Blennius'a Gob. gymnotrachelus, що рухаються ріжно і мають ріжну мускулятуру.

Shann — Lateral muscles of Teleost — Proc. Zool. Soc. London 1914.

Van Tricht — On the influence of the fins upon the form ot the Trunkmyotome – Proc K. Akad. Wetenschappen. Amsterdam 1907.

Maurer — Die Ventrale Rumpfmusculatur der Fische — Jennaische Zschr. Natw. 1912 m. 49.

Monoyer — Recherches experimentales sur l'equilibre et la locomotion des poissons — Ann. d. Sc. Nat. Zool. 1866 Vol. 6.

Marey — La Chronophotographie — Rev. General. des Sc. pures et Appliques Paris 1891.

Marey — La locomotion animale — Extrait du Traité de Physique biologique. T. I.

Pettigrew — Die Ortsbewegung d. Tiere 1875 Leipzig.

Polimanti — Influenza della forma sulla locomotione dei pesci — Ztschr. Zool. Phys. 1911.

Rosen — Body muscles of Plectognaths 1913. Stokholm Ark. Zool. 18.

Stannius — Zootomie der Fische — Berlin 1854.

Strasser — Zur Lehre von d. Ortsbewegung durch Biegung und der unp. Fl... — Stutgart 1882.

Schlesinger — Über die undulatorische Bewegung — Verhandl. Zool. Bot. Ges. Wien 1911. Bd 61.

Schlesinger — Die Locomotion der taeniformen Fische — Zool. Jahrb. Syst. 1911. Bd. 31.

Schlesinger — Der sagittiforme Anpassungstypus — Verhdl. Zool. Bot. Ges. Wien 1909.

Schmalhausen — Zur Marphologie der unparen Flossen — Zschr. Wiss. Zool. Leipzig 1912.

Schmalhausen — Непарние плавники (Скелет, мускулатура, функція і форма). Кіев 1913. Записки Кіевского Общ. Ест.

Theacher — Media and paired Fins — Transact. of. The Connecticut Acad. 1874 — 8 Bd. III.

Whitehouse — The caudal Fin. Proc. of The R. Society of London Series 1910. Val. LXXXII.

Zalenskyj — Развитие вертикальних плавников у осетрових — С. Петербург. Анн. Мич. 1899.

Rollett — Ueber die Flossenmusculatur des Seepherdchens 1888. Arch. Mikr. Anat. Bd. 32.

Goodrich — Notes en development structure and origine of the median and paired fines... — Quort Jarn. of. micr. Sc. 1906. Val. 50.

Harrison — The Metamerism of the Dors a Ventr. Longitudinals Muscles of the Teleostemi — J. Hopkins Univ. Circ. III.

Harrison — The Developement of the Fins of Teleosts — J. Hopkins Univ. Circular III.

Hinderson — Schwanzflossenmusculatur der Teleostei Anat. Anz. 1910. Jena XXXVI.

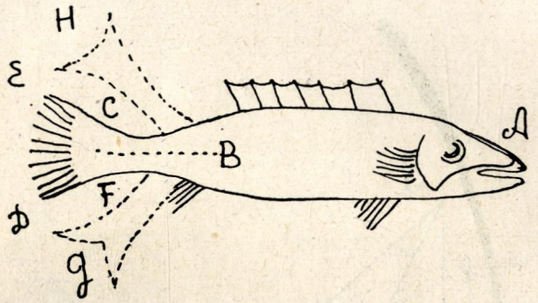


Рис. 1. Рух риби за Borelli-ом (стор. 138).

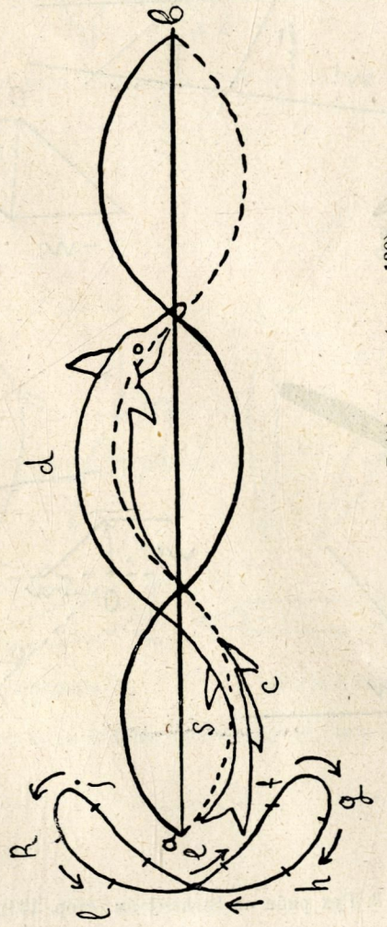


Рис. 2. Рух риби за Pettigrew-ом (стор. 139).

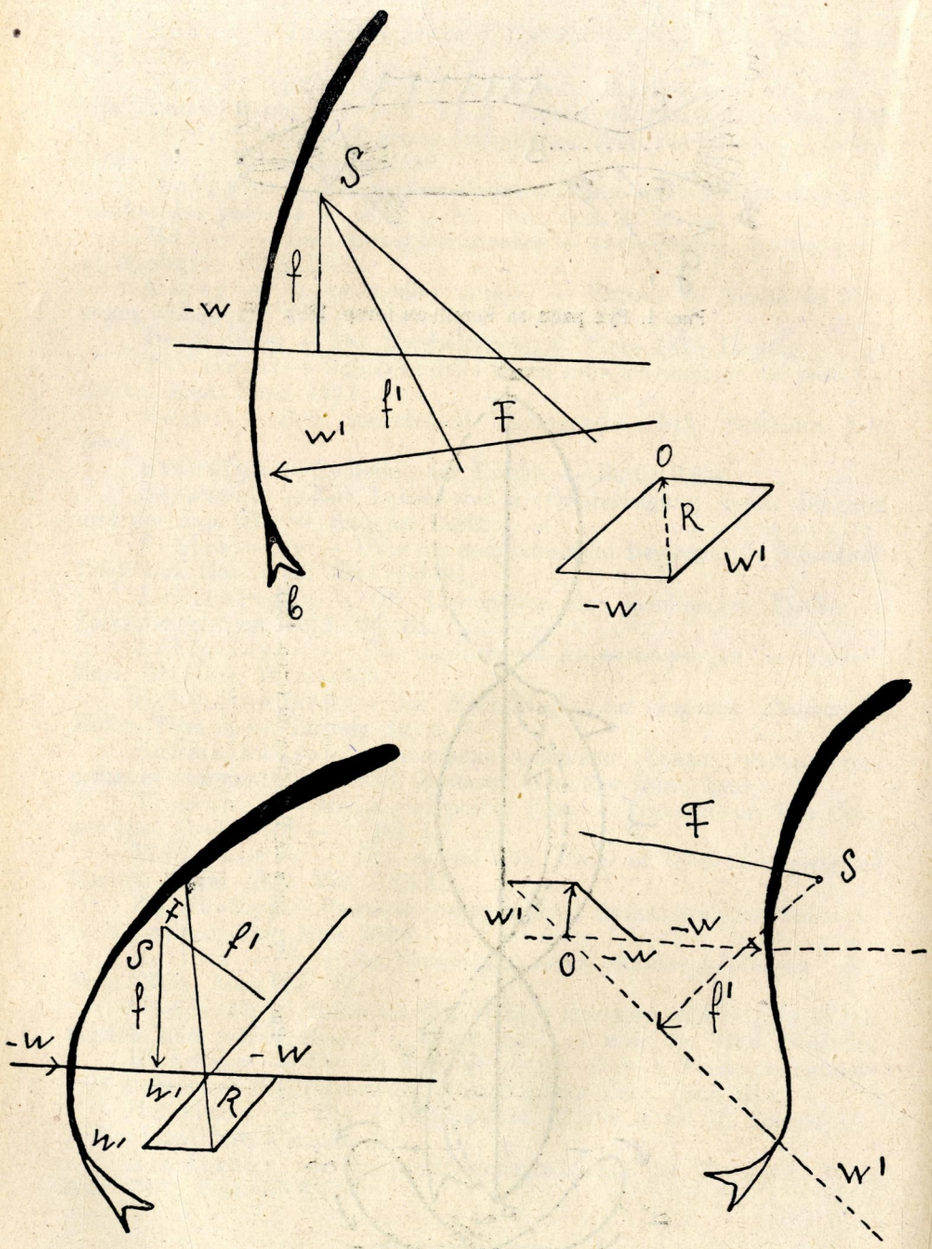


Рис. 3. Рух риби за Strasser-ом (стор. 139).

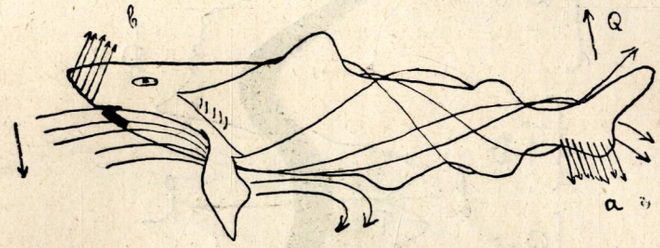
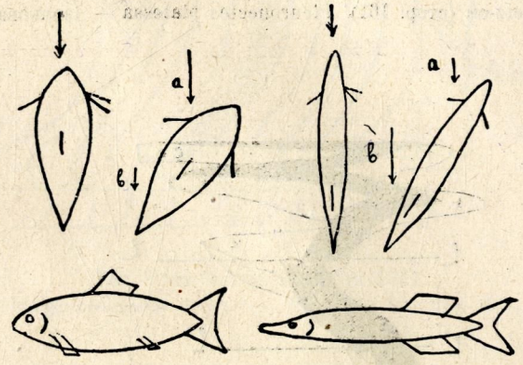


Рис. 4. Струї води на тілі риб — за Houssay-ом (стор. 144).



фузіформна сагітіформна

Рис. 5. за Günther-Schlesinger-ом (стор. 154).

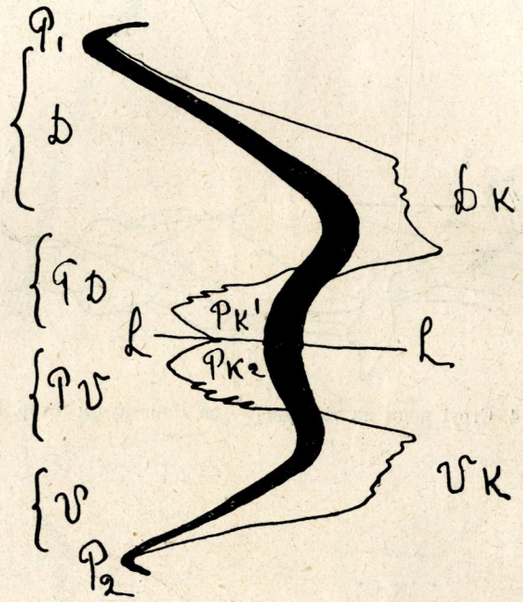


Рис. 6. за Dietz-ом (стор. 161). Pleuronectes platessa — ізольований міотом.

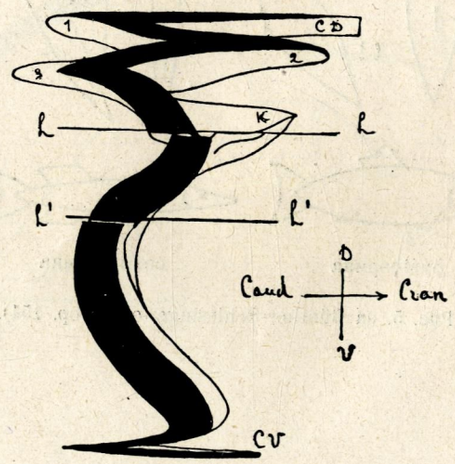


Рис. 7. за Langelaan-ом (стор. 163). Міотом пажора.

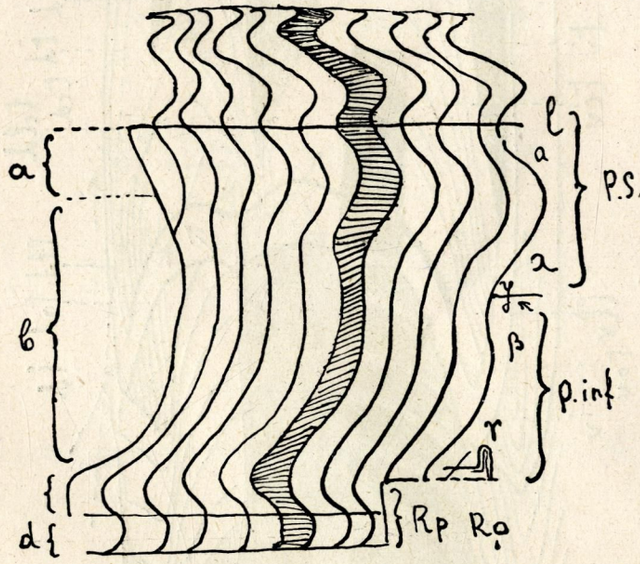


Рис. 8. за Maurer-ом (стор. 163).
Chlamidoselachus anguneus — бокова частина тіла.

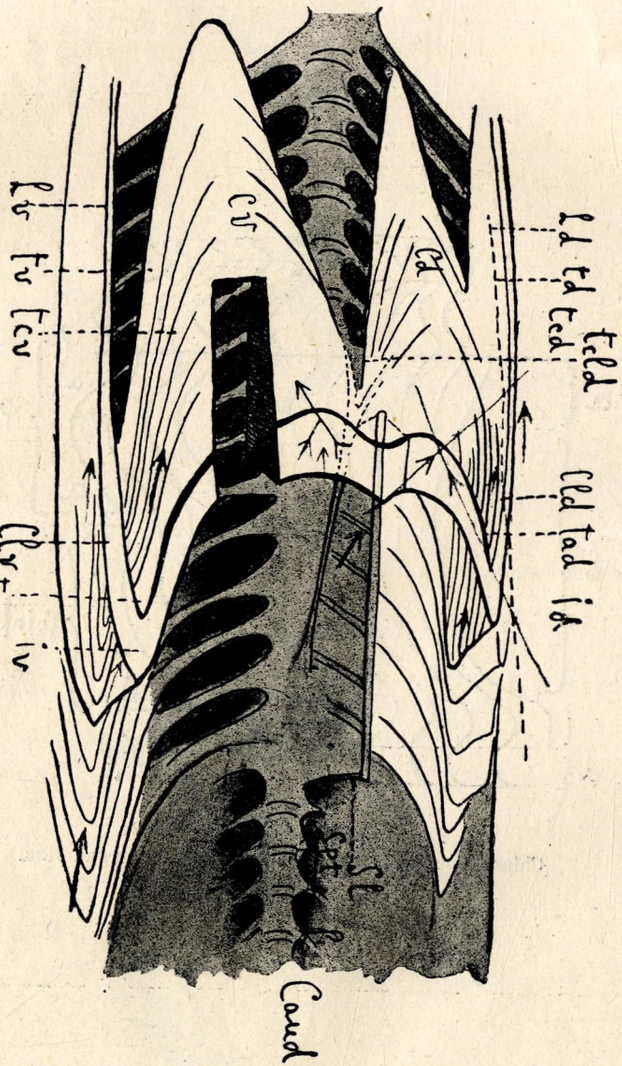


Рис. 9. за Sella-ом (стор. 165). Ізольований міотом і його фасції.

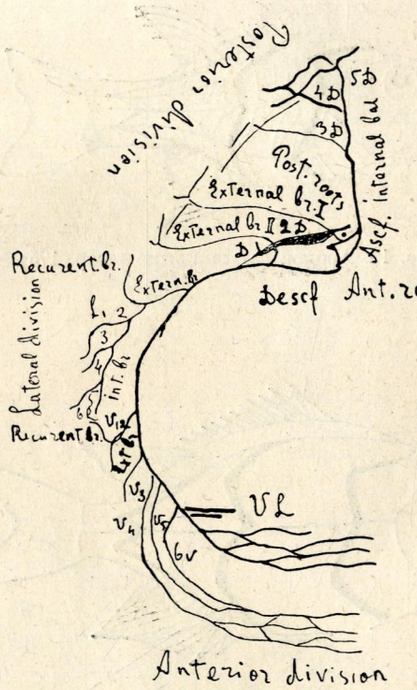


Рис. 10. за van Bisseluk-ом. Інервація міотола (стор. 165).

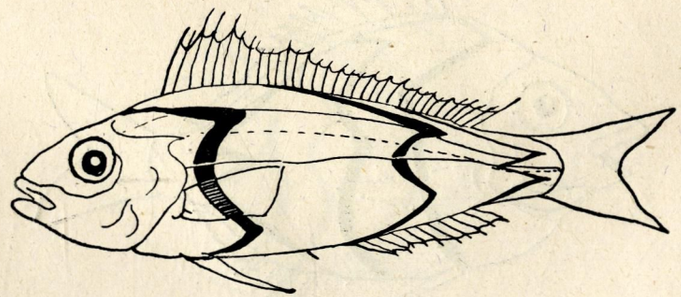


Рис. 11. Smaris vulgaris (стор. 173).

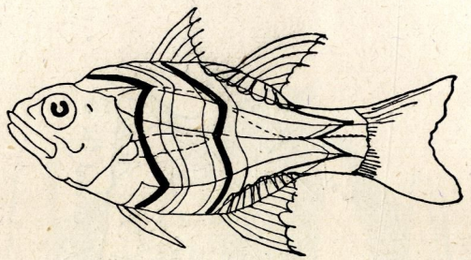


Рис. 12. Apogon rex mullorum (стор. 175).

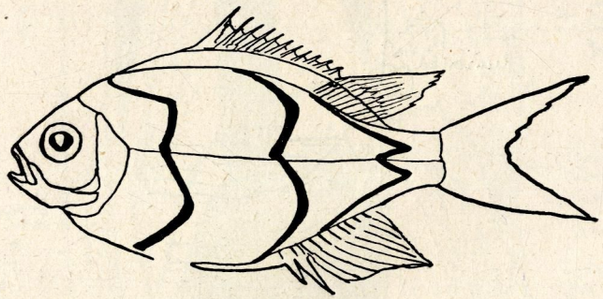


Рис. 13. Haliases chromis (стор. 175).

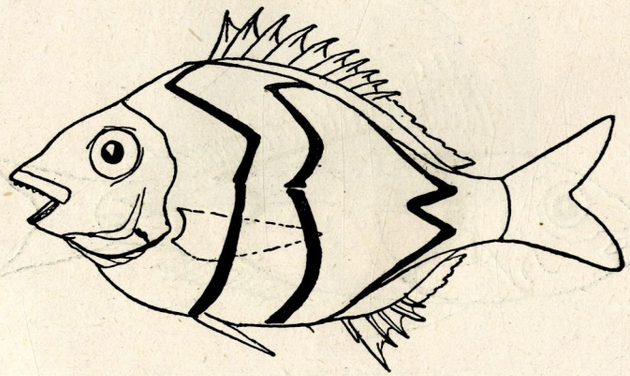


Рис. 14. Sargus annularis (стор. 176).

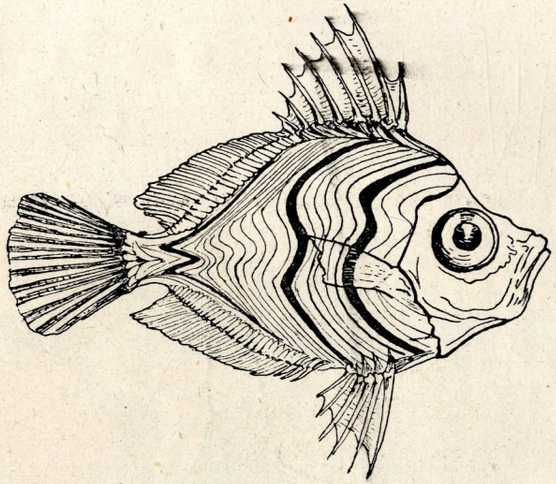


Рис. 15. Capros aper (стор. 176).



Рис. 16. Centriscus scolopax (стор. 179).

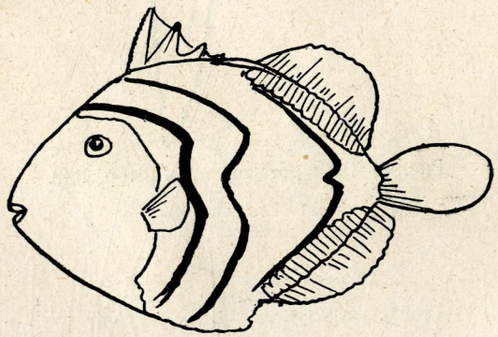


Рис. 17. Balistes balistes (стор. 179).

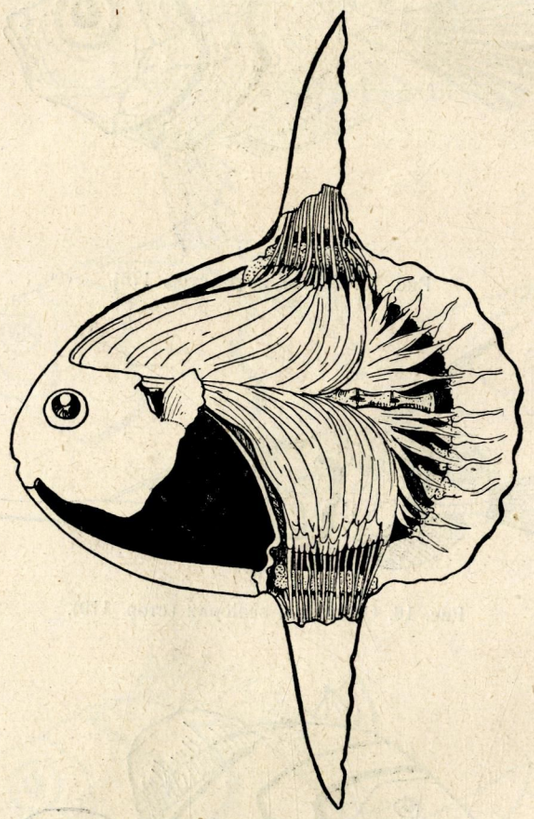


Рис. 18. Orthagoriscus mola (стор. 180).

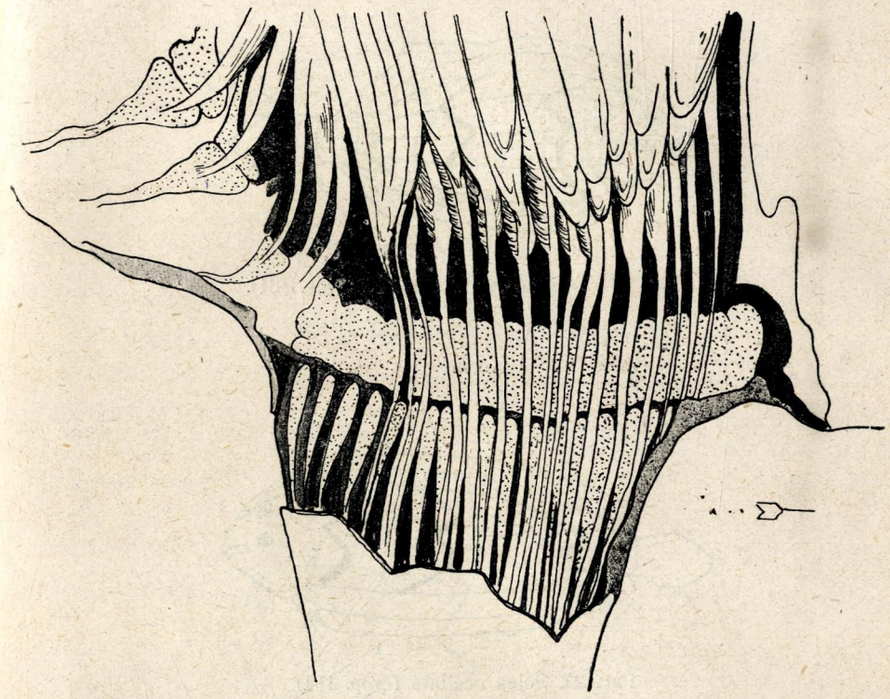


Рис. 19. Подрібний перехід мязів в тужні у Orthagoriscus mola (точковані місця представляють хрящі (стор. 181).

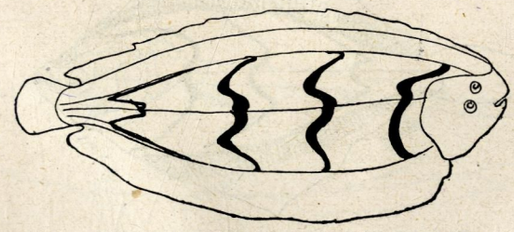


Рис. 20. Solea lascaris (стор. 184).

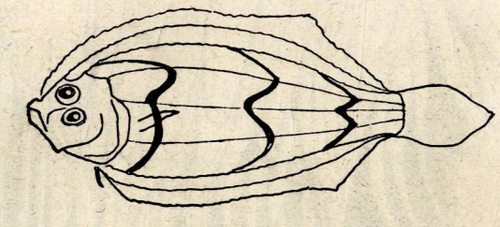


Рис. 21. Arnoglossus Grohmanii (стор. 184).

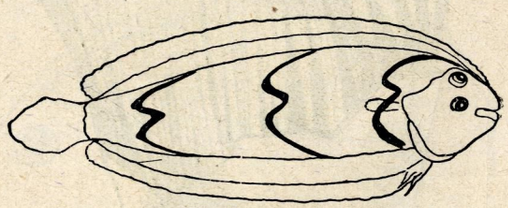


Рис. 22. Solea ocellata (стор. 184).

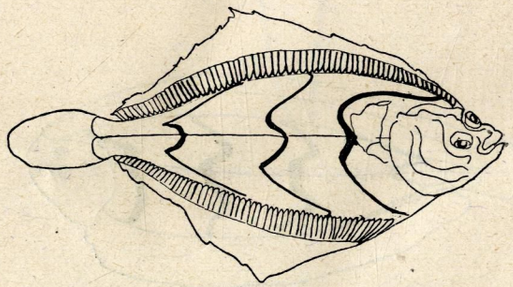


Рис. 23. Platessa vulgaris (стор. 185).

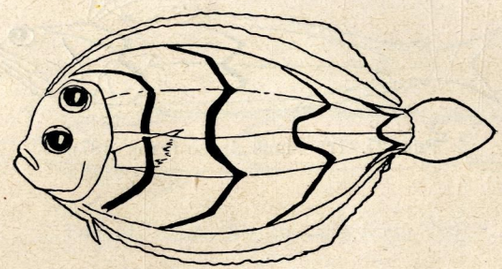


Рис. 24. Rhomboidychthys podas (стор. 185).

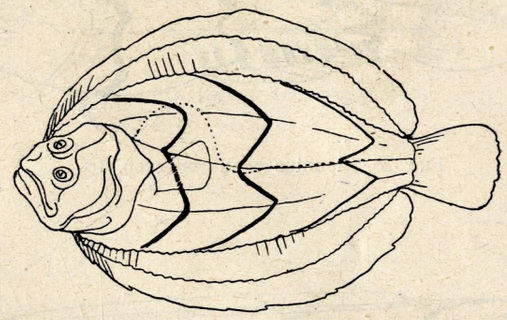


Рис. 25. Rhombus rhombus (стор. 185).

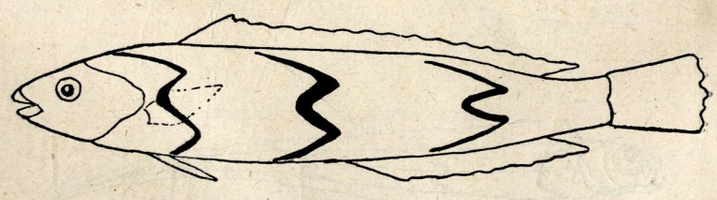


Рис. 26. Jullus vulgaris (стор. 187).

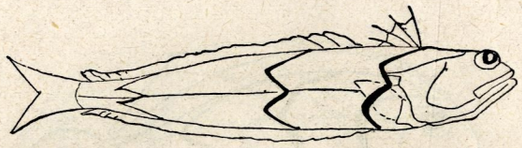


Рис. 27. Trachinus draco (стор. 187).

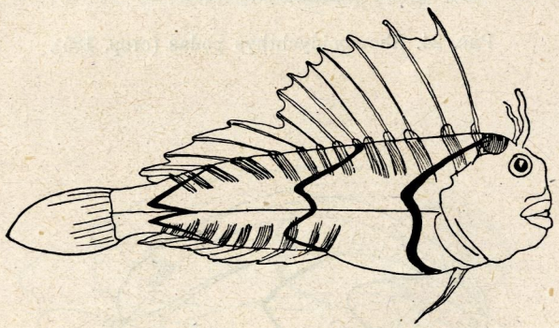


Рис. 28. Blennius ocellaris (стор. 187).

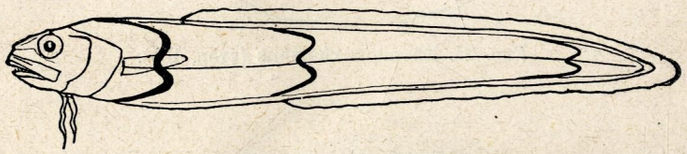


Рис. 29. Ophidium barbatum (стор. 188).

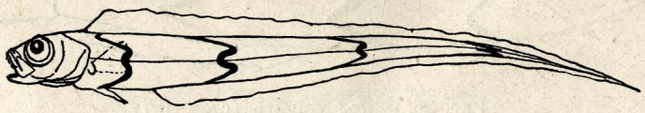


Рис. 30. Cepola rubescens (стор. 188).

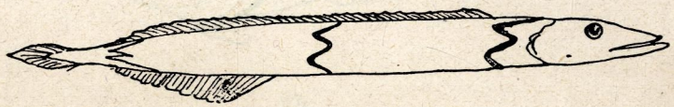


Рис. 31. Ammodites tobianus (стор. 189).

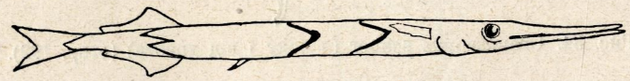


Рис. 32. Belone acus (стор. 189).

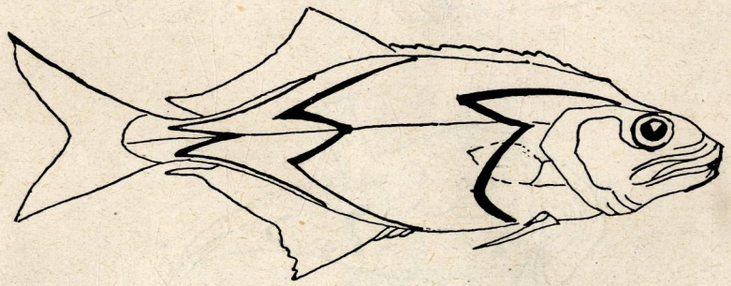


Рис. 33. Lichia amia (стор. 190).

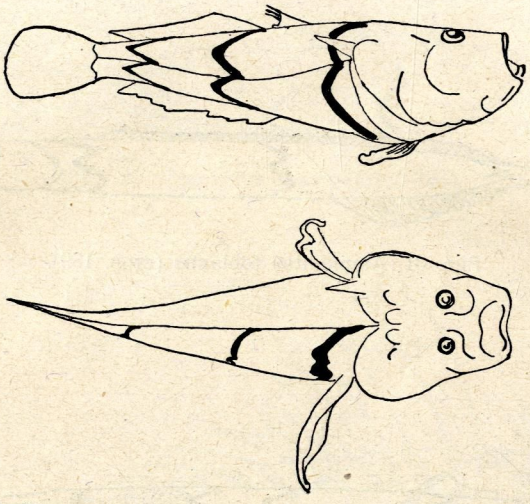


Рис. 34. Uranoscopus scaber (з боку і від хребта) (стор. 192).

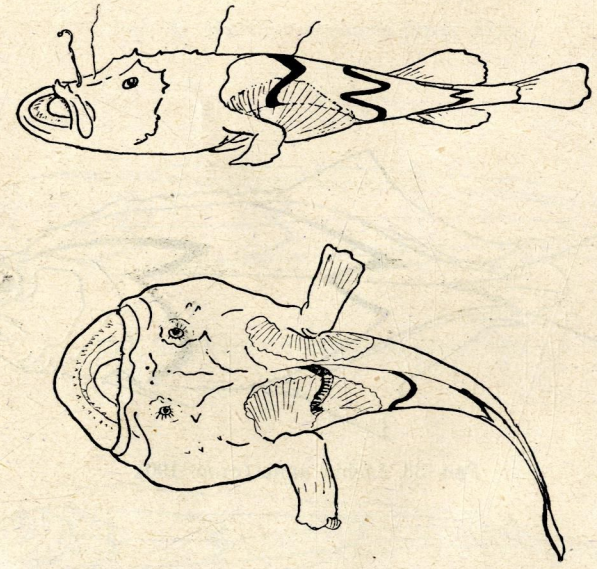
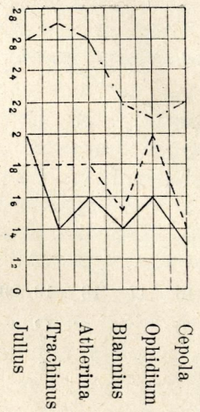


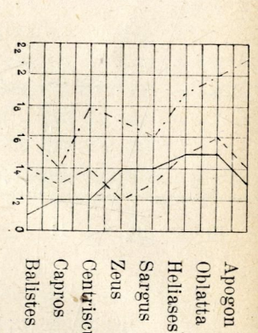
Рис. 35. Lophius piscatorius (з боку і від хребта) (стор. 192).

Табл. II.

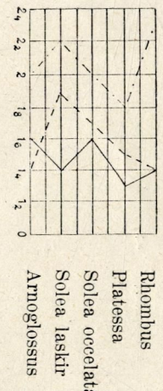
Взаємновідношення складкування міотомів і степені спеціалізації в ріжних типах пристосування.



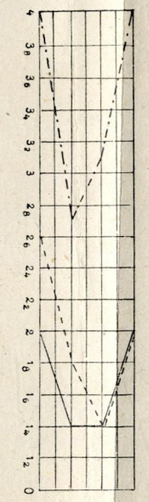
Теніформні



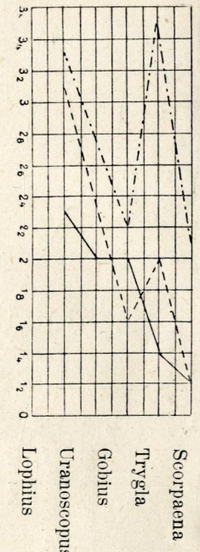
Компресіформні



Компресіформні асіметричні



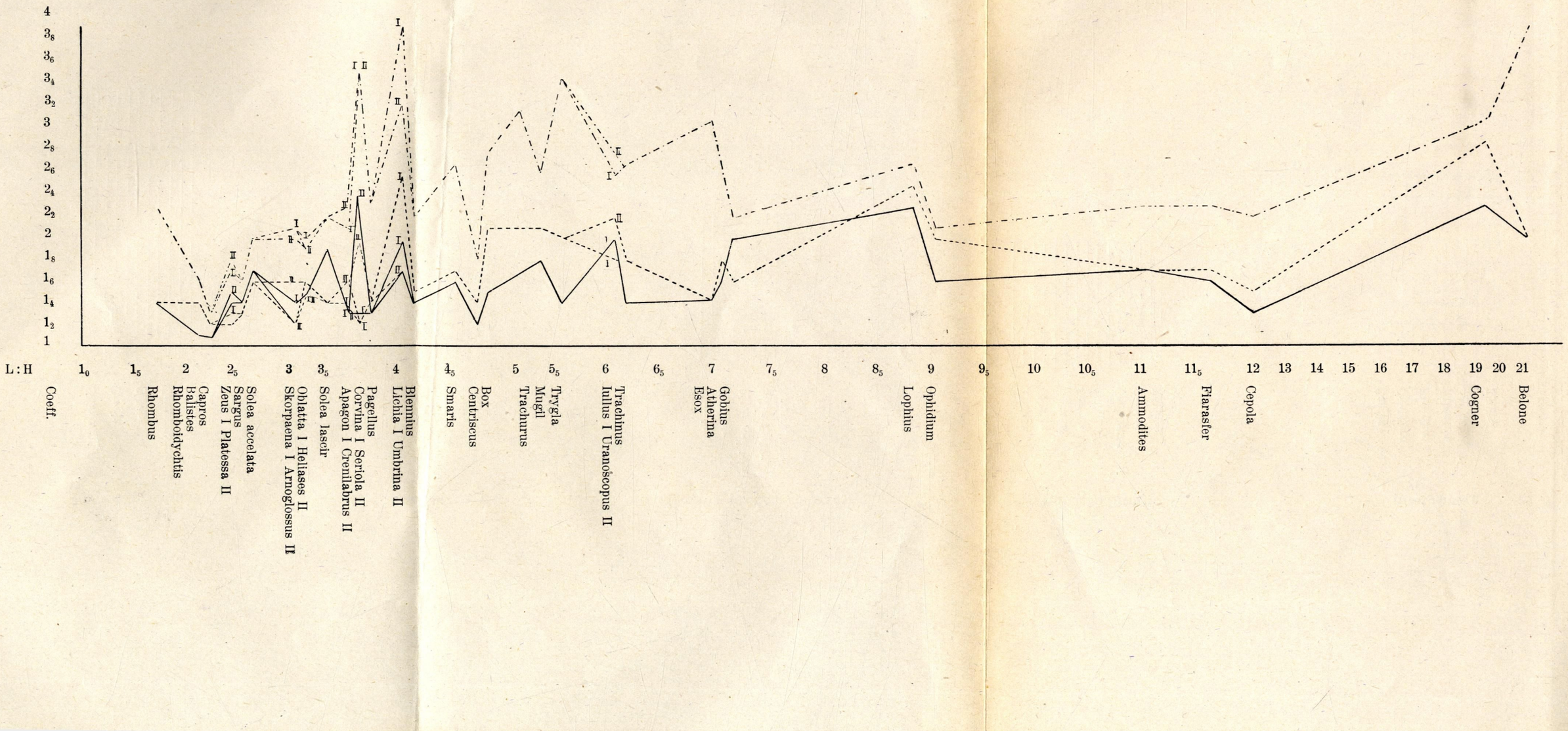
Сагітіформні



Депресіформні

Табл. III.

Взаємновідношення довжини тіла риби (L : H) і коефіцієнтів (Coeff) складкування міотомів.



N. Kryloff et N. Bogoliouboff
(à Kiew, Ucraïne).

„Sur quelques critères concernant l' existance des dérivées d' une fonction d' une variable réelle".

Dans son article „Sur la dérivée séconde géneralisée de Riemann-Schwarz" (Comptes rendus du 4-me Congrès des Mathématiciens Scandinaves, 1920) Prof. Dr. Bendixson a démontré un théorème, qui donne un critère de l' existance de la dérivée et dont la géneralisation aux dérivées d' ordre supérieur peut présenter, ce semble, un certain intêret, vu les conséquences et les différentes applications qui en découlent.

A cette question qui a été jadis l' objet des savantes recherches de Prof. Dr. P. Montel[1]) ont été consacrées aussi ce dernier temps les importants articles de Prof. Dr. M. Krawtchouk[2]) et l' un d' eux a paru récemment sur les pages de ce journal. Tout dérnièrement le problème dont il s' agit a été traité avec une grande géeralité dans un travail[3]) étendu soutenu par M. Marchaud comme thèse de doctorat devant la Faculté des Sciences de Paris.

Ce que précède prouve déjà l' intêret du sujet qui, vu son ampleur, est loin d' être épuisé.

L' objet de cette note est de présenter quelques remarques rélatives au sujet considéré et faites au cours du séminaire mathématique de Prof. Dr. N. Kryloff (Kiew).

La démonstration du § 1. appartient à N. Kryloff, celle du § 2. à N. Bogoliouboff.

Le § 3 contient un théorème qui a paru aux auteurs pas depourvu de tout l' intêret.

---

[1]) Montel. Notice sur ses travaux. Paris 1920.

[2]) t. XXVI. V. aussi М. Кравчук. До теорії функцій дійсного змінного. Київ 1926.

[3]) M. Marchand. Sur les dérirées et sur les différences des fonctions de variables réelles. Paris. G. Villars 1927.

§ 1. Théorème. Si la $(k+1)$ diférence divisée d'une fonction $y(x)$ est uniformément bornée, c. à d. si

$$\left| \frac{\Delta^{k+1} y}{\Delta x^{k+1}} \right| \leqq \lambda$$

alors $y(x)$ possède la k-me dérivée, vérifiant la condition de Lipschitz.

Ce téorème connu encore à M. Montel et à M. Brouwer et généralisant celui de M. Bendixson peut être démontré en peu des mots de la manière que voici.

Soit

$$(1) \quad y_h(x) = \frac{1}{h^{k+1}} \int_x^{x+h} \int_x^{x+h} y(x)\, dx^{k+1}, \text{ d' où } \frac{\Delta^{k+1} y}{\Delta x^{k+1}} = y_h^{(k+1)}(x);$$

alors d'après (1) on aura indépendemment de h

$$\left| y_h^{(k)}(x'') - y_h^{(k)}(x') \right| \leqq \lambda \left| x'' - x' \right|;$$

ceci prouve déjà que la suite des fonctions

$$(2) \qquad y_{h_1}^{(k)}, \quad y_{h_2}^{(k)}, \qquad y_{h_n}^{(k)}$$

est également continue. Pour démontrer que cette suite (2) est aussi uniformement bornée partons de l' identité

(3)

$$y_h(x) = \int_0^x \int_0^x y_h^{(k+1)} dx^{k+1} + C_{0,h} + C_{1,h} x + \quad + C_{k,h} x^k;$$

Or $y_h(x) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} y(x)$, donc $|y_h(x)| < M$, par conséquent

$$(4) \quad P_{k,h}(x) = \left| C_{0,h} + C_{1,h} x + \quad + C_{k,h} x^k \right| \leqq M + \frac{\lambda}{(k+1)!};$$

d' autre part on a évidemment

$$C_{j,h} = \sum_{i=0}^{x} a_{ji}^{(k)} P_{k,h}\left(\frac{i}{k}\right),$$

où $a_{ji}^{(k)}$ ne dépendent que de k, donc en vertu du (4) on s' assure que la suite (2) est uniformément bornée.

Cela étant, d' après le théorème bien connu d' Arzélà on peut extraire de (2) des suites uniformément convergentes $[y_{h_\nu}]$ telles que $y_{h_\nu}^{(k)} \longrightarrow \varphi(x)$ pour $\nu \longrightarrow \infty$.

En prenant donc l'identité

$$(5)\quad y_{h_\nu}(x) = \int_0^x \int_0^x y^{(k)}_{h_\nu}\, d\bar{x}^k + C_{0,h_\nu} + C_{1,h_\nu} x + \qquad C_{k-1,h_\nu} x^{k-1}$$

et en remarquant que $y_{h_\nu}(x) \underset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} y(x)$ on s'assure comme précedemment que $P_{k-1,h_\nu}(x) \underset{h_\nu \to 0}{\longrightarrow} P_{k-1}(x)$, où $P_{k-1}(x)$ est un polynome du dégré $k-1$. Le passage à la limite conduit donc à la rélation

$$y(x) = \int_0^x \int_0^x \varphi(x)\, d\bar{x}^k + P_{k-1}(x)$$

d'où l'on voit entre autre que la fonction limite $\varphi(x)$ est unique. De (5) on tire

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leq \lambda |x'' - x'|,$$

ce que prouve le théorème dont la démonstration peut encore être simplifiée. Il va sans dire que le texte du théorème peut être énnoncé comme il suit: „la condition nécessaire et suffisante pour que $y(x)$ posséde la k-me dérivée satisfaisant à la condition de Lipschitz est que la $(k+1)$ différence divisée est uniformément bornée“[1]).

§ 2. Pour obtenir les différentes géneralisations du théorème précedent on peut procéder de bien de manières et entre autre on peut raisonner comme il suit, en supposant, ce qui est toujours possible, que $y(x)$ possède la période égale à un dans $(-\delta, 1+\delta)$, où $\delta > 0$; alors pour Δx suffisamment petit $[(k+1)\Delta x \leq \delta]$ les différences divisées $\frac{\Delta^i y}{\Delta x^i}$, $i = 1, 2 \ldots k+1$ sont aussi périodiques.

D'autre part on a:

$$\sum_{i=0}^{n} y(x_i) \sin m\pi x_i \Delta x = \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{\lambda_m^{\frac{k+1}{2}}} \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^{k+1} y(x_i)}{\Delta x^{k+1}} \sin m\pi x_i \Delta x;$$

(si $(k+1)$ est pair)

$$\sum_{i=0}^{n} y(x_i) \sin m\pi x_i \Delta x = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{\lambda_m^{\frac{k+2}{2}}} \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^{k+1} y_i}{\Delta x^{k+1}} \frac{\Delta \sin m\pi x_i}{\Delta x} \Delta x;$$

(si $(k+1)$ est impair)

---

[1]) v. Krawtchouk. Zur Théorie der Funktionen der reellen Veränderlichen. p. 99.

$$\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\cos m\pi x_i\,\Delta x = \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{\bar{\lambda}_m^{\frac{k+1}{2}}}\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^{k+1}y(x_i)}{\Delta x^{k+1}}\cos m\pi x_i\,\Delta x\,;$$

(si $(k+1)$ est pair)

$$\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\cos m\pi x_i\,\Delta x = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{\bar{\lambda}_m^{\frac{k+2}{2}}}\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^{k+1}y_i}{\Delta x^{k+1}}\frac{\Delta\cos m\pi x_i}{\Delta x}\Delta x\,;$$

(si (k+1) est impair)

où $\bar{\lambda}_m = 2\left(\frac{1-\cos m\pi\Delta}{\Delta^2}\right) = m^2\pi^2 - \frac{m^4\cdot\pi^4}{12}\Delta^2 +$

alors

$$2\sum_{m=N}^{m=M}\left[\bar{\lambda}_m^{k+1}\left\{\left(\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\sin m\pi x_i\Delta x\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\cos m\pi x_i\,\Delta x\right)^2\right\}\right] =$$

$$= 2\sum_{m=N}^{n=M}\left\{\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^{k+1}y_i}{\Delta x^{k+1}}\sin m\pi x_i\,\Delta x\right)^2 +$$

$$+\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^{k+1}y_i}{\Delta x^{k+1}}\cos m\pi x_i\,\Delta x\right)^2\right\} \leqq \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\Delta^{k+1}y(x_i)}{\Delta x^{k+1}}\right)^2\Delta x\,;$$

(si $(k+1)$ est pair)

$$2\sum_{m=N}^{m=M}\left[\bar{\lambda}_m^{k+1}\left\{\left(\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\sin m\pi x_i\,\Delta x\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\cos m\pi x_i\,\Delta x\right)^2\right\}\right] =$$

$$= 2\sum_{m=N}^{m=M}\frac{1}{\bar{\lambda}_m}\left\{\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^{k+1}y(x_i)}{\Delta x^{k+1}}\frac{\Delta\sin m\pi x_i}{\Delta x}\right)^2 +\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^{k+1}y(x_i)}{\Delta x}\frac{\Delta\cos m\pi x_i}{\Delta x}\Delta x\right)^2\right\} \leqq \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\Delta^{k+1}y(x_i)}{\Delta x^{k+1}}\right)^2\Delta x$$

(si $(k+1)$ est impair)

où N et M sont deux nombres entiers positifs. D'ici pour $n\to\infty$, M et N étant fixés, on tire

$$2\sum_{m=N}^{m=M}[m^2\pi^2]^{k+1}\left\{\left(\int_0^1 y(x)\sin m\pi x\,dx\right)^2 + \left(\int_0^1 y(x)\cos m\pi x\,dx\right)^2\right\} \leqq \lambda^2,$$

si l'on suppose qu'indépendemment de Δ on a

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\Delta^{k+1}y(x_i)}{\Delta^{k+1}x}\right)^2\Delta x \leqq \lambda^2;$$

par conséquent la série

$$2\sum_{1}^{\infty}(m^2\pi^2)^{k+1}\left\{\left(\int_0^1 y(x)\sin m\pi x\,dx\right)^2+\left(\int_0^1 y(x)\cos m\pi x\,dx\right)^2\right\}$$

est convergente. Donc d'après le théorème bien connu de Riesz-Fischer il existe presque partout dans (0,1) une fonction $\varphi(x)$ de carré sommable, dont les coéfficients de Fourier sont:

$$\sqrt{2}(-1)^{\frac{k+1}{2}}(m\pi)^{k+1}\int_0^1 y(x)\sin m\pi x\,dx,$$

$$\sqrt{2}(-1)^{\frac{k+1}{2}}(m\pi)^{k+1}\int_0^1 y(x)\cos m\pi x\,dx,$$

(si $(k+1)$ est pair)

$$\sqrt{2}(-1)^{\frac{k}{2}}(m\pi)^{k+1}\cdot\int_0^1 y(x)\cos m\pi x\,dx;$$

$$-\sqrt{2}(-1)^{\frac{k}{2}}(m\pi)^{k+1}\int_0^1 y(x)\cos m\pi x\,dx,$$

(si $(k+1)$ est impair).

Cela étant, soit $F(x)$ l'integrale du système différentiel

$$\frac{d^{k+1}F(x)}{dx^{k+1}} = \varphi(x);\quad F(0) = F(1);\quad F^{(i)}(0) = F^{(i)}(1),\quad i = 1, 2,\qquad k$$

en intégrant par parties on s'assure que

$$\int_0^1 F(x)\sin m\pi x\,dx = \int_0^1 y(x)\sin m\pi x\,dx;$$

$$\int_0^1 F(x)\cos m\pi x\,dx = \int_0^1 y(x)\cos m\pi x\,dx;$$

donc en vertu de la fermeture des fonctions trigonométriques on a $y(x) = F(x)$, c. q. f. d.

Ceci prouve le théorème:

„La condition necessaire est suffisante pour que $y(x)$ possède $(k+1)$-me dérivée presque partout dans $(0,1)$ est que

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\Delta^{k+1}y(x_i)^2}{\Delta x^{k+1}}\right)^2\Delta x \leqq \lambda^2$$

où $\lambda^2 = const.$

§ 3. Pour conclure établissons le théorème suivant généralisant le resultat de M. P. Montel[1]):

„Si

$$\left|\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right| < \omega(\Delta x)$$

où $\omega(\delta)$ pour $\delta \to 0$ est une fonction positive non croissante et telle que la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\omega\left(\frac{1}{2^m}\right)$$

est convergente, alors $y(x)$ possède la prémière dérivée continue"[2]).

En effet, soit

$$F_h = \frac{y(x+h)-y(x)}{h},$$

alors

$$F_h(x) - F_{\frac{h}{2}}(x) = \frac{y(x+h)-2y(x+\frac{h}{2})+y(x)}{h};$$

donc

$$\left|F_h(x) - F_{\frac{h}{2}}(x)\right| \leq 2\,\omega\left(\tfrac{h}{2}\right).$$

Envisageons la série

$$F_1(x) + \left(F_{\frac{1}{2}}(x) - F_1(x)\right) + \qquad + \left(F_{\frac{1}{2^{m+1}}}(x) - F_{\frac{1}{2^m}}(x)\right) +$$

où

$$\left|F_{\frac{1}{2^{m+1}}}(x) - F_{\frac{1}{2^m}}(x)\right| < 2\,\omega\left(\frac{1}{2^{m+}}\right);$$

---

[1]) Notice sur le travaux scientifiques de M. Paul Montel. 1920 p. 15 lignes 34—36.

[2]) Comp. avec les resultats de M. Marchand. Thèse. pp. 43—60.

cette série, d' après l' hypothèse admise, converge absolument et uniformément vers une fonction continue $\varphi(x)$, c. à d.:

$$F_{\frac{1}{2^m}}(x) \longrightarrow \varphi(x), \qquad \text{pour } m \longrightarrow \infty .$$

Or on a identiquement

$$y(x_i) = \sum_{0}^{i-1} F_{\frac{1}{2^m}}(x_i)\,\Delta x + y(0),$$

où

$$x_i = \frac{i}{2^m}, \qquad i = 1, 2, \ldots 2^m; \qquad \Delta x = \frac{1}{2^m},$$

donc en passant à la limite on aura

$$y(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx + y(0),$$

d' où l' on tire $\varphi(x) = y'(x)$, ce que démontre le théorème.

D' ici découle comme cas particulier le théorème de M. Montel: si $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^{1+\alpha}}$ est bornée $(0 < \alpha \leq 1)$ on peut affirmer que la dérivée prémière existe partout.

Il est évident que le resultat de ce § se géneralise immédiatement pour les différences d' ordre supérieur.

En explicitant la fonction $\omega(\Delta x)$ de différentes façons on peut obtenir du théorème ci-dessus démontré bien de resultats assez curieux.

12. V. 1928.
Kiew, Ucraïne.

Володимир Кучер.

О двійности в ґеометрії і фізиці.

I. О двійности в геометрії.

Поняття двійности є запозичене з ґеометрії, де означує воно правильну звязь тверджень, яка увидатнюється у тім, що на основі деяких замін понять можна твердження двійковим способом взаїмно підпорядкувати. Двійність може бути двояка, а саме — ґеометрична і метрична. Перша займається відношеннями положень в просторі, друга знов метрикою в просторі.

Для пізнання першої двійности вистарчить вказати на прості твердження звичайної ґеометрії простору, які взаїмно з себе виходять через заміну понять:

Точка → площа,
площа → точка,
проста → проста.

Наприклад: Дві точки визначують одну просту, а саме їх лучну. Двійне твердження: Дві площі визначують одну просту, а саме їх грану пересічи.

Дві прості, які переходять через одну точку, лежать в тій самій площі. Двійне твердження: Дві прості, що лежать в одній площі, мають одну спільну точку.

В тих судах поняття простої має значіння інваріянта.

Для вияснення двійности в метричнім пониманню можуть служитц твердження сферичної триґонометрії і відповідні їм твердження гіперболічної ґеометрії. Як відомо, — з кождого твердження першої можна вивести твердження другої в сей спосіб, що дійсну вартість луча кулі r заступаємо уявною вартостю ir, або що на одно виходить, коли поміняємо звичайні кутові функції квотів $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ з гіперболічними функціями тих квотів.

І так: Твердженню достав сферичної тригонометрії:

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\alpha \tag{1}$$

відповідає в ґеометрії гіперболічної площі взір:

$$ch\frac{a}{r} = ch\frac{b}{r}ch\frac{c}{r} - sh\frac{b}{r}sh\frac{c}{r}\cos\alpha; \tag{1a}$$

взірцеви на поверхню сферичного трикутника:

$$p = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \tag{2}$$

відповідає в гіперболічній ґеометрії взір на поверхню трикутника:

$$p = r^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma). \tag{2a}$$

Уклад замін понять, який ту промощує перехід з одної ґрупи взорів до другої, є ось такий:

$$\begin{gathered} r \longrightarrow ir \\ \cos\frac{a}{r} \longrightarrow ch\frac{a}{r}, \quad \cos\frac{b}{r} \longrightarrow ch\frac{b}{r}, \quad \cos\frac{c}{r} \longrightarrow ch\frac{c}{r}, \\ \sin\frac{a}{r} \longrightarrow -ish\frac{a}{r}, \quad \sin\frac{b}{r} \longrightarrow -ish\frac{b}{r}, \quad \sin\frac{c}{r} \longrightarrow -ish\frac{c}{r}. \end{gathered} \tag{3}$$

Наведені вище приміри вказують, яку науково-теоретичну вартість має основа двійности. Вона передовсім упрощує галузь науки в сей спосіб, що розділює загал тверджень на дві великі ґрупи, собі взаїмно протиставлені. Лучником, що посередничить між обома ґрупами, є підпорядкування понять немов в роді якогось словника так, що знання понять одної ґрупи потягає за собою пізнання другої, о скільки стоять до розпорядимости поняття, які даються взаїмно підпорядковувати. Тому основа двійности є дійсно помічним середником, що веде до обєднання думання; можна її отже уважати льоґічно-економічною основою.

Хосей основи двійности виступає тим наглядніше, чим ширший є обсяг судів, до яких її стосується. В наведених вище випадках основа двійности була лучником між судами одної і тої самої дисципліни — ґеометрії. Питання і висліди новішої теоретичної фізики виказують, що основа двійности лучить також дві ріжні дисципліни, а саме фізику і ґеометрію.

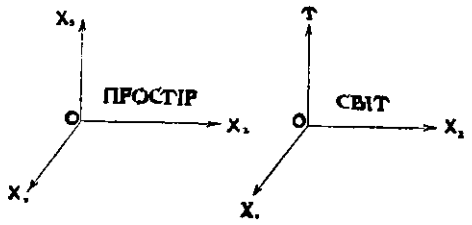
II. О двійности в ґеометрії і фізиці.

Праці Германа Мінковського показали нам дорогу, якою можна перейти з области фізикальних явищ в обсяг ґеометрії. А сею дорогою є чотиророзмірна ріжноманітність, утворена з трирозмірного простору і одноразмірного часу. Нагоду до сього кроку дала Мінковському електродинаміка тіл в русі, з якої опісля повстала спеціяльна теорія релятивности А. Айнштайна. Остання, спираючись на клясичній основі релятивности і на постуляті постійности скорости світла, позволила відтворити „світ“ на чотиророзмірній ріжноманітности в евклідовій метриці. Ту по раз перший відкрито двійність між фізикальними і ґеометричними теоремами. Так відкрита двійність найшла згодом поширення і поглублення, коли Айнштайн розтягнув постулят рівноправности для опису законів природи на всі уклади віднесення, які можуть довільно порушатися відносно себе. А зробив він це в своїй загальній теорії релятивности, яка є рівночасно теорією ґравітації. Справа двійности між фізикальними а ґеометричними теоремами, яка виринула в спеціяльній теорії релятивности, виступила в загальній теорії релятивности ще яркійше. Розуміється, що не можна ту уживати метрики Евкліда; треба було закинути евклідову ґеометрію, а заступити її ріманівською ґеометрією. В загальній теорії релятивности маємо сю велику синтезу ґеометрії і фізики, яка представляє може найбільший крок вперед на дорозі до одноцільного пізнання природи. А при тій синтезі приходить до значіння в цілій повні економічний характер основи двійности.

A. Евклідова ґеометрія а світ спеціяльної теорії релятивности.

Трирозмірний простір є предметом евклідової ґеометрії. Кожда точка такого простору є все визначена трома числами, які її підпорядковуємо в обранім укладі віднесення; сі три числа називаємо сорядними простору. Фізикальні явища відбуваються в просторі і часі, тому до опису якоїсь події (події точкової) треба вже чотирох чисел, а саме: трох співрядних простору і співрядної часу. З тої причини говоримо, що загал всякого фізикального явища становить чотиророзмірну ріжноманітність, яку називаємо „світом“. Співрядні простору і співрядна часу творять разом „співрядні світа“.

Коли хочемо протиставити собі простір і світ, то показується як конечне в стиснути бодай одну простірну співрядну світа. Тоді світ буде складатися з дворозмірного простору (площі) і часу, так що відтворення його на трирозмірнім евклідовім просторі буде можливе. В такім разі можемо звичайному простірному прямокутному укладові віднесення (x_1, x_2, x_3) протиставити формально такий самий уклад, який, построєний з двох співрядних простору (x_1, x_2) і співрядної часу t, представлятиме наш трирозмірний світ (Рис. 1.).



(Рис, 1.)

Коли в укладі сорадних світа поведемо рівнобіжний переріз до площі (x_1, x_2) в якімсь означенім відступі, т. зн. для якогось означеного часу t, тоді поведена площа відтворює всі простірні відношення в хвилі t. Кождий такий переріз рівнобіжний до площі (x_1, x_2) подає відношення в просторі все в иншім часі t; творить він збір рівночасових відношень в просторі. Такі плоскі перерізи в густо стисненім слідуванню по собі, або инакше площу рівнобіжну до площі (x_1, x_2), що порушається здовж додатної оси часу, можемо обсервувати на екрані кождого кінематоґрафу.

Своєрідна природа трирозмірного евклідового простору має свій характер в означенню міри. Його основою є теорема Пітаґора:

$$d^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \tag{4}$$

яка в такім виді означає квадрат віддалення точки $(x_1, x_2, x_3$ від початку укладу співрядних. Найважнійша істотна прикмета цього означення міри полягає у тому, що величина відступу d не залежить від добору укладу співрядних. Коли виберемо довільно другий прямокутний уклад співрядних $(x'_1, x'_2, x'_3$ тоді:

$$d^2 = x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{4a}$$

Говоримо отже, що пітаґорейська сума квадратів, яку можемо уважати характеристичною, основною формою метричного евклідового простору, є інваріянтом супроти пересунень і скручень укладу співрядних.

Питання, чи цього рода інваріянтне означення міри існує у трирозмірнім світі, який що правда може бути відвзорований на трирозмірнім просторі, однак в дійсности є від нього зовсім ріжний. Як анальоґію до теореми Пітаґора для трирозмірного світа з погляду спеціяльної теорії релятивности маємо квадратову форму:

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 - c^2 t^2, \tag{6}$$

де c означає скорість світла. Форма (6) є інваріянтом кождої трансформації між двома укладами віднесення, які порушаються з огляду на себе рівномірно і простолінійно. Тому величину s можемо назвати „просторо-часовим відступом“ світової точки (x_1, x_2, t) від початку укладу співрядних O.

Підпорядковуючи отже кождій точці світа означене, від укладу співрядних незалежне число s, т. зн. її просторо-часовий відступ від початку укладу сорядних O, робимо те саме, що зробив у трирозмірнім евклідовім просторі Пітаґорас, будуючи свою теорему. В сей спосіб творимо в світі метрику незалежну від укладу віднесення, а в ній уґрунтовуємо ґеометрію явищ природи. В творенню цьої ґеометрії нема ніякої довільности, бо дорогу до неї показали строгі досліди фактів природи.

Питома прикмета цього нового уняття природи світа полягає в тім, що ним вводимо фізику в область ґеометрії; тим самим промощуємо дорогу між обома дісциплінами, яка веде з ґеометричного простору в світ явищ природи і навпаки зі світа до простору; а вираженням сього є субституція:

$$x_3^2 = -c^2 t^2, \quad \text{або:} \quad x_3 = +ict, \tag{7}$$

яка перетворює основну метричну форму світа:

$$x_1^2 + x_2^2 - c^2 t^2$$

на основну метричну форму трирозмірного евклідового простору:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Субституція (7) лучить обсяг ґеометрії з обсягом фізики і навпаки. Показує вона, що хотяй час t як такий є в істоті чужий для змінних простору, однак уявна вели-

чина $i\,c\,t$ має характер спірядної простору, подібно як x_1 і x_2.

Субституція (7) веде до взаїмної відповідности на переміну ґеометричних і фізикальних теорем та протиставить двійно просторови — світ. Завдяки їй можна отримати з чисто ґеометричних звязків фізикальні і навпаки кожда фізикальна правильність мусить відбиватися в такійже ґеометричній. Істнування двійности фізики і ґеометрії унаглядняють низше подані її приміри.

а) Евклідова площа (x_1, x_2) *— дворовмірний світ* (x_1, t).

Ограничуємось поки-що до таких фізикальних явищ, які відбуваються тільки в однім вимірі, а передовсім в одній простій. Усуваємо отже ще одну співрядну (x_2), так, що світ зводимо до дворозмірного твору (x_1, t) і можемо його відвзорувати на плоскім укладі віднесення (x_1, x_2). Фундаментальна метрична форма цього світа буде:

$$x_1^2 - c^2 t^2, \tag{7}$$

яка через субституцію:

$$x_2 = \pm i\,c\,t \tag{9}$$

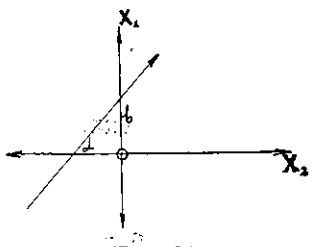
переходить в:

$$x_1^2 + x_2^2, \tag{10}$$

т. зн. в фундаментальну метричну форму евклідової площі (x_1, x_2). Таким способом буде можна висловлювати твердженнями плоскої ґеометрії — суди о фізикальних явищах, які відбуваються в одній простій.

1. Проста — рівномірний простолінійний рух.

Евклідову просту в прямокутнім укладі співрядних (x_1, x_2) (рис. 2) виражуємо рівнанням:



(Рис. 2.)

$$x_1 = x_2\,tg\,\alpha + b. \tag{11}$$

Стосуючи субституцію

$$x_2 = \pm i\,c\,t$$

до рівнання простої, дістанемо в мові фізики:

$$x_1 = \pm i\,c\,tg\alpha\,t + b. \tag{12}$$

Дістали ми отже лінійну функцію часу t, яка визначує рівномірний рух, в данім випадку на співрядній X_1. Співчинник

при t представляє скорість руху v. Таким способом дістаємо фізикальне значіння для ґеометричного поняття кута, а радше для його триґонометричної танґенти, помноженої уявною одиницею. Отже:

$$\left.\begin{aligned} v &= i\,c\,tg\alpha \\ tg\alpha &= \frac{v}{i\,c} \end{aligned}\right\} \quad \text{або:} \tag{13}$$

Підставивши останню вартість для $tg\alpha$ у взорі (12), тоді дістанемо просту дворозмірного світа (x_1, t):

$$x_1 = \pm v\,t + b, \tag{12 a}$$

яка визначує рівномірний рух точки оживленої скоростю v в світі (x_1, t), де b означує відступ точки в часі $t = o$ від початку O укладу віднесення. Подвійний знак при v говорить, що рух точки може відбуватися або в додатнім або у відємнім напрямі оси X_1. Задержавши отже подвійний знак при субституції: $x_2 = \pm i\,c\,t$ бачимо, що кождій евклідовій простій відповідають у фізиці два рівномірні рухи з однаковою скоростю v, але в противних напрямах на оси X_1; при тім можемо ограничити для α інтервал: $0^0 < \alpha < 90^0$. Допустім натомість також відємні вартости для α, тоді для повного опису вистарчить брати:

$$x_2 = + i\,c\,t \tag{14}$$

З того виходить, що кождій простій відповідає тільки один рівномірний рух на оси X_1, а всім простим з додатним наклоненням α відповідають рухи з додатними скоростями v в напрямі додатної оси X_1.

Завважмо дві прості з наклоненнями α' і α'', то на основі (13) і (14) преставляють вони два рівномірні простолінійні рухи зі скоростями v' і v'', а саме:

$$v' = i\,c\,tg\alpha',\ v'' = i\,c\,tg\alpha'', \tag{15}$$

з чого слідує:

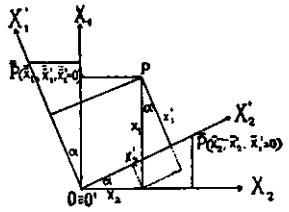
$$v' : v'' = tg\alpha' : tg\alpha''. \tag{15 a}$$

Скорости рухів є пропорційні до кутів наклонення.

2. Скрут укладу сорядних — трансформація Льоренца.

Возмім тепер під увагу скрут укладу співрядних около його початку O. Най α означає кут, о який скрутилася вісь X_2 в додатнім змислі.

Дістаємо отже знані взори (рис. 3):



(Рис. 3.)

$$x_1' = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, \qquad x_2' = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha. \tag{16}$$

Положім:

$$x_2 = i\,c\,t,\ x_2' = i\,c\,t',$$

і:

$$tang\,\alpha = \frac{v}{i\,c} = \frac{\beta}{i},$$

де $\beta = \frac{v}{c}$, та визначім:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},\ \sin\alpha = \frac{\beta}{i\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{17}$$

то підставивши ці вирaження в рівнання (16), дістанемо:

$$x_1' = \frac{x_1 - \beta\,c\,t}{\sqrt{1 - \beta^2}},\ i\,c\,t' = \frac{-\,i\beta x_1 + i\,c\,t}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

або:

$$x_1' = \frac{x_1 - v\,t}{\sqrt{1 - \beta^2}},\ t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{18}$$

т. зн. трансформаційні взори Льоренца.

Спираючись на висновках попереднього уступу, пізнаємо зараз значіння останніх трансформаційних взорів. Викручена о кут α від оси X_2 — вісь X_2', представляє в фізикальному значінню рівномірний і простолінійний рух обсерватора зі скоростю v; він нотує свої обсервації в укладі віднесення (x_1', t). Трансформаційні взори промощують перехід від подуманого укладу віднесення в спочинку (x_1, t) до укладу, що порушається з релятивною скоростю v.

Звернути ту треба увагу ще на слідуючі обставини:

1) Трансформаційні взори (18) мають дійсну вартість під умовою, що:

$$\beta \leqq 1, \text{ або: } v < c, \tag{19}$$

т. зн. скорість світла c є в спеціяльній теорії релятивности нескінчено великою скоростю; від неї немає більшої скорости.

2) Для точки $\bar{\bar{P}}$ на оси X_1' (рис. 3), яку в рухомім укладі визначує в хвилі $t' = o$ $(x_2' = o)$ відтинок $O'\bar{\bar{P}} = \bar{\bar{x}}_1'$ умовленої міри, заходить реляція:

$$\bar{\bar{x}}_1' = \frac{\bar{\bar{x}}_1}{\cos\alpha} = \bar{\bar{x}}_1 \sqrt{1-\beta^2} \tag{20}$$

Правда, що $\bar{\bar{x}}_1$ має таку саму довготу, що $\bar{\bar{x}}_1'$, однак беручи річ зі становиська спочинкового укладу в хвилі $t = o$ ($x_2 = o$), тоді рівнання (20) говорить, що довгота рухомої міри скоротилася у віднесенню до спочинкової довготи у відношенню $1 : \sqrt{1-\beta^2}$; є це т. зв. контракція Льоренца.

3) Для точки $\bar{P}$ на оси X_2' (рис. 3), в руховім укладі зазначує фізикально годинник, установлений в початку укладу ($x_1' = o$), якийсь інтервал часу t' — мірений від хвилі коінцеденції обох укладів. Співрядня часу рухомого укладу є:

$$\bar{x}_2' = \frac{\bar{x}_2}{\cos\alpha} = \bar{x}_2 \sqrt{1-\beta^2}, \tag{21}$$

або в мові фізики:

$$\bar{t}' = \bar{t} \sqrt{1-\beta^2} \tag{21 a}$$

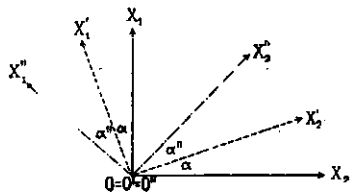
А що інтервали $\bar{t}$ і $\bar{t}'$, мірені годинником наставленим в початку спочинкового укладу ($x_1 = o$) є рівні, тому заключаємо з взору (21 a), що в наслідок вірномірного і простолінійного руху укладу зі скоростю v, хід годинника опізнюється в такій мірі, в якій скорочуються міри довготи.

3. Теорема додавання функції танґентів — теорема додавання скоростий.

Возмім під увагу три прямокутні уклади співрядних, викручені відносно себе около спільного початку $O = O' = O''$ (рис. 4). Теорема додавання функції танґентів:

$$tg\,(\alpha + \alpha') = \frac{tg\,\alpha + tg\,\alpha'}{1 - tg\alpha\, tg\alpha'} \tag{22}$$

позваляє обчислити танґенту кута цілого скруту безпосередно з танґентів кутів поодиноких скрутів.



(Рис. 4.)

По мисли взору (13) маємо:

$$tg\alpha = \frac{v_1}{ic}, \quad tg\alpha' = \frac{v_{21}}{ic}, \quad tg\,(\alpha + \alpha') = \frac{v_2}{ic}, \tag{23}$$

де означують: v_1, v_2 скорости укладів (x_1', t'), (x_1'', t'') у відношенню до укладу (x_1, t), а v_{21} скорість укладу (x_1'', t'') у відношенню до укладу (x_1', t'). З (22) і (23) дістаємо:

$$v_2 = \frac{v_1 + v_{21}}{1 + \frac{v_1 v_{21}}{c^2}}, \tag{24}$$

а з того дальше дістаємо:

$$v_{21} = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \tag{24 a}$$

Є це теорема додавання скоростей спеціяльної теорії релятивности.

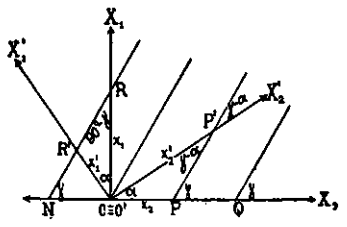
Коли підставимо в (24) $v_1 = c$, одержимо дуже дивний, вислід, а саме:

$$v_2 = \frac{c + v_{21}}{1 + \frac{v_{21}}{c}} = c. \tag{25}$$

Сей вислід дістали ми в попереднім уступі з льоренцової трансформації, а саме, що по думці спеціяльної теорії релятивности, ніяка скорість не може перевищити скорости світла.

4. Сінусова теорема — ефект Допплєра.

Зауважмо прямокутні укладн співрядних (X_1, X_2) і (X_1', X_2') зі спільним початком $O = O'$; оси другого з них творять з вісями першого укладу кут α. Поведім дальше з початку укладів O і в точках P, Q, N рівновіддалені прості рівнобіжні, наклонені до X_2 під кутом γ (рис. 5).



(Рис. 5.)

З трикутника $O P P'$ маємо звязь:

$$\frac{x_2}{x_2'} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin \gamma},$$

або:

$$\frac{x_2}{x_2'} = \cos \alpha \left(1 - \frac{tg\, \alpha}{tg\, \gamma}\right). \tag{26}$$

Підставивши:

$$tg\alpha = \frac{v}{ic}, \quad tg\gamma = \frac{w}{ic}, \tag{27}$$

дістаємо при застосуванню (14) і (17) двійне твердження фізики:

$$\frac{t}{t'} = \frac{1 - \frac{v}{w}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{28}$$

якого значіння заналізуємо.

Представмо собі якесь періодичне явище, хай би це був якийсь тяг филь, то обсерватор в початку укладу $O\,(x_1, t)$ запримітить, що цей самий стан буде знов повертати по упливі якогось відступу часу. Сей відступ часу T буде наворотом дрогання.

Глядач знов в початку рухомого укладу (x_1', t') визначить инший наворот дрогання T'.

Приймім, що скорість розходження филі в нерухомім укладі є w, то ґеометричний образ світової лінії наворотного стану представляє проста $P\,P'$ наклонена під кутом γ до оси X_2', а відтинок $O\,P$ на оси X_2 є ґеометричним образом навороту дрогання T. Ця світова лінія перетинає ґеометричний образ світової лінії глядача рухомого укладу, отже вісь X_2', в точці P'. Відтинок $O'\,P' = x_2'$ є образом навороту дрогання T', який визначує глядач рухомого укладу.

Спираючись на відношенню часів реляції (28), маємо:

$$\frac{T}{T'} = \frac{1 - \frac{v}{w}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{28 a}$$

Завважмо дальше, що маємо до діла з филями світла, тоді:

$$w = c, \tag{29}$$

а в такім разі:

$$\frac{T}{T'} = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{30}$$

що подає основу Допплєра з погляду спеціяльної теорії релятивности. Заступаючи навороти T і T' частотами дрогання ν і ν', дістанемо:

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{31}$$

Коли в тім рівнанню занедбаємо 2-ий степень дроба β, тоді дістанемо:

$$\frac{\nu'}{\nu} = 1 - \frac{v}{c}, \tag{31 a}$$

знане виражіння на основу Допплєра з клясичної оптики.

Кожда з рівнобіжних в рівних відступах (рис. 5), поведених до оси X_2 під кутом γ, є ґеометричним образом, як вище було згадане, світової лінії якогось означеного, все навертаючого стану руху; на примір можуть вони уявляти ґеометричні образи світових ліній всіх хребтів филі. В такім випадку ці рівнобіжні є ґеометричним образом тягу по собі наступаючих филь. Відтинки на оси X_2:

$$O\,P = O\,N = P\,Q = \qquad = x_2$$

дають ґеометричний образ навороту дрогання T.

Ця громада рівновіддалених рівнобіжних відтинає на оси X_1 і до неї рівнобіжних відтинки між собою рівні, величини $O\,R = x_1$, які треба уважати за ґеометричні образи довготи филі λ, коли x_2 є ґеометричним образом навороту T.

Сей спосіб розумування примінений до рухомого (викрученого) укладу веде до висновку, що як $O'\,P' = x_2'$ представляє ґеометричний образ навороту дрогання T', так відтинок $O'\,R' = x_1'$ є ґеометричним образом довготи филі λ' для глядача в рухомім укладі. В такім разі:

$$x_1 = \lambda, \; x_1' = \lambda'. \tag{32}$$

Коли застосуємо до трикутника $O\,R\,R'$ сінусове твердження, отримаємо:

$$\frac{x_1}{x_1'} = \frac{cos\ (\gamma - \alpha)}{cos\ \gamma},$$

або:

$$\frac{x_1}{x_1'} = cos\ \alpha\ \ (1 + tg\ \alpha\ tg\ \gamma). \tag{33}$$

Коли до останнього рівнання введемо взори (17) і (27), дістанемо таку фізикальну звязь:

$$\frac{x_1}{x_1'} = \frac{1 - \frac{v\,w}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \left(\text{де } : \beta = \frac{v}{c}\right). \tag{34}$$

або:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{1 - \frac{v\,w}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{34 a}$$

Принявши знов:

$$w = c,$$

дістаємо:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c}} \tag{35}$$

Занедбуючи другий і вищий степень дроба β, дістаємо знов знаний взір клясичної оптики:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} = 1 + \frac{v}{c}. \tag{36}$$

в) Евклідовий простір (x_1, x_2, x_3) *— тривимірний світ* (x_1, x_3, t).

Варта звернути увагу ще на одну звязь в ґеометрії, яка веде до явища відклонення світляного луча в наслідок релятивного руху глядача.

Підпорядкуймо в евклідовім просторі (x_1, x_2, x_3) співрядній X_2 — вісь часу t тривимірного світа (x_1, x_3, t), тоді на основі субституції (14) маємо:

$$x_2 = i\,c\,t.$$

Відношення площі (x_1, x_3) простору переносяться безпосередно на площу (x_1, x_3) світа, яка представляє поле фізикальних явищ; площі (x_1, x_2) і (x_3, x_2) задержають свою роль як в просторі (x_1, x_2, x_3). З огляду на визначення оси X_2 субституцією (14), має з тої причини наш евклідовий простір бігуновий характер.

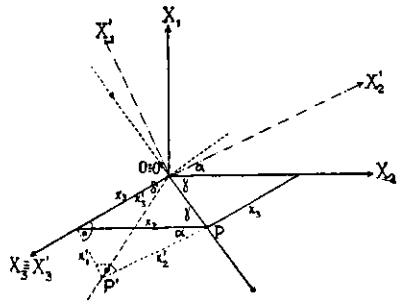
Скрутім дальше уклад співрядних (x_1, x_2, x_3) (рис. 6.) о кут α в додатнім напрямі около X_3 як оси скруту; отримаємо уклад співрядних

$$(x_1', x_2', x_3'),$$

в якім:

$$x_3' \equiv x_3. \qquad (37)$$

А дальше поведім в площі (x_2, x_3) просту $O\,P$ під кутом γ до оси X_2; мет її на площу (x_1', x_3') є проста $O'\,P'$ (рис. 6.), наклонена до оси X_3 під кутом δ. З рисунку 6. маємо:



(Рис. 6.)

$$x_2 = x_3\ ctg\,\gamma \qquad (38)$$

і:

$$x_1' = x_2\ sin\,\alpha = x_3\ tg\delta, \qquad (39)$$

з чого:

$$tg\delta = sin\,\alpha\ ctg\,\gamma. \qquad (40)$$

Для фізикальної інтерпретації положім як передше в (13):

$$tg\,\alpha = \frac{v}{ic}, \quad tg\,\gamma = \frac{w}{ic}, \qquad (41)$$

тоді з огляду на (17) дістанемо:

$$tg\,\delta = \frac{v}{ic\sqrt{1-\beta^2}}\ \ \frac{ic}{w}$$

або:

$$tg\,\delta = \frac{v}{w\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (42)$$

де $\beta = \frac{v}{c}$.

В інтерпретації фізики скрут укладу співрядних (x_1, x_2, x_3) около X_3 як оси о кут α означає після (41) рівномірний поступний рух площі (x_1, x_3) в напрямі оси X_1 з релятивною скоростю v. Проста $O\,P$ є знов ґеометричним образом світової лінії проміння світла в додатнім напрямі оси X_3, а кут її наклонення γ до оси X_2 означає після (41) скорість світла w, яка в порожнім просторі є:

$$w = c. \qquad (43)$$

Така буде інтерпретація світляного явища глядача, що обсервує перебіг явища в початку укладу O у світі (x_1, x_3, t).

Приймім, що в хвилі появи проміння світла початок рухомого укладу O' покривався з початком нерухомого укладу O. Глядач, що находиться в початку O' укладу рухомого заобсервує в світі (x_1', x_3', t) напрям проміння світла як мет його світової лінії на площу (x_1', x_3') в напрямі оси часу T; є це, як знаємо, проста $O'P'$; вона визначує напрям світляного проміння, поміченого глядачем рухомого укладу. Напрям його замикає з напрямом проміння нерухомого укладу, т. зн. осею X_3 кут δ, який означуємо як кут аберрації. Коли у взорі (42) застосуємо реляцію (43), дістанемо для кута аберрації δ:

$$tg\,\delta = \frac{v}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{44}$$

або з огляду на (17):

$$sin\,\delta = \beta, \tag{44 a}$$

де: $\beta = \frac{v}{c}$.

Пропускаючи β^2 як дуже малий дріб, дістаємо:

$$tg\,\delta = \beta = \frac{v}{c}, \tag{45}$$

взір добре знаний з клясичної оптики.

B. Неевклідова ґеометрія а світ загальної теорії релятивности.

Відвзорування світа матеріяльної точки в спочинку на оборотовій поверхні.

Зауважмо світ матеріяльної нерухомої точки і обмежім його знов до двох розмірів; в такім разі маємо в нім до діла з однорозмірними явищами, отже з радіяльним рухом в поли ділання матеріяльної точки. Для визначення міри сього дворозмірного світа не буде вже можна ужити метричної основної форми (8) евклідової ґеометрії, якою послугується спеціяльна теорія релятивности. Але є можливе відвзорувати такий дворозмірний світ на кривій поверхні в трирозмірнім евклідовім просторі. Тоді кождому законови фізики мусить відповідати твердження, яке належить до ґеометрії тої кривої по-

верхні. Тому необхідним показується, зазнайомитися з ґеометрією такої кривої поверхні, щоби послугуючись двійнуванням дійти до фізикальної правильности.

Вже Ґавсс в своїй „теорії поверхні“ (Flächentheorie) опрацював зовсім загально ґеометрію на довільній кривій поверхні. В сей спосіб подав він основу метрики кривих поверхний, якої висловом є квадрантна ріжничкова форма:

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + 2\, g_{12}\, dx_1\, dx_2 + g_{22}\, dx_2^2; \qquad (46)$$

вона заступає пітаґорейську теорему евклідової площі. Квадрат елєменту лука ds є функцією dx_1 і dx_2 а також представляє місцеву функцію, о скільки співчинники g_{11}, g_{12}, g_{22} є функціями x_1 і x_2.

Возьмім як примір оборотову поверхню (що в дальших уступах використаємо). Най ϱ означає радіяльну співрядну, змірену прямово до оборотової оси, z — співрядну в напрямі оборотової оси (вісь Z), а φ — кут, який рахуємо від якогось означеного зерового полуденника. Тоді в загальній формі рівнання кривої полуденника виглядає:

$$z = f(\varrho), \qquad (47)$$

а квадрат лука (46) приймає знаний вид:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{df}{d\varrho}\right)^2\right] d\varrho^2 + \varrho^2\, d\varphi^2. \qquad (48)$$

Вернім знов до питання поля матеріяльної точки. Стосуючи звичайні співрядні бігунові: r, ϑ, ψ і час t для визначення квадрату лінійного елєменту світа для масового осередка в спочинку, дістанемо по думці загальної теорії релятивности:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} + r^2\,(d\vartheta^2 + sin^2\vartheta\, d\psi) - c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2\ ^{1}), \qquad (49)$$

де α означає промінь ґравітаційного ділання поля; він є звязаний з масою m клясичної динаміки реляцією:

$$\alpha = 2\,\frac{km}{c^2} = 1{\cdot}48.10^{-28}\, m\ ^{2}), \qquad (50)$$

---

[1]) H. Bauer: Matemat. Einführung in die Gravitationstheorie Einsteins nebst u. s. w. 1922. S. 54. 62.

[2]) Ibidem, pp. 60.

де співчинник $k = 6{\cdot}68.10^{-8}\ cm^2\ gr^{-1}\ sec^{-2}$, означає ґравітаційну постійну, а $c = 3.10^{10}\ cm\ sec^{-1}$, скорість світла.

Для явищ, які відбуваються тільки в радіяльнім напрямі, треба у рінанню (49) положити:

$$d\vartheta = d\psi = o,$$

тоді дістанемо:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} - c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2, \tag{49 a}$$

як визначення міри для дворозмірного світа масової точки.

Застосуймо дальше трансформацію:

$$\varphi = i\,t, \tag{51}$$

анальоґічну до трансформації (7) Мінковського, тоді (49 a) переходить в квадрат лінійного елемента кривої поверхні в трирозміровім просторі Евкліда, а саме:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} + c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right) d\varphi^2. \tag{52}$$

Згадану криву поверхню можна легко відвзорувати на оборотовій поверхні особлившого рода.

В такім випадку треба приняти:

$$\varrho = c \sqrt{1 - \frac{a}{r}}, \tag{53}$$

або:

$$\frac{a}{r} = 1 - \frac{\varrho^2}{c^2},$$

і утворити:

$$\frac{d\varrho}{dr} = \frac{a\,c}{2\,r^2 \sqrt{1 - \frac{a}{r}}}$$

або:

$$\frac{d\varrho}{dr} = \frac{c^2}{2\,a\varrho} \left(1 - \frac{\varrho^2}{c^2}\right)^2 \tag{54}$$

Підставивши одержані звязки (53) і (54) в (52), дістаємо (52) у виді подібнім як (48), а саме:

$$ds^2 = \frac{4\,a^2\,d\varrho^2}{c^2 \left(1 - \frac{\varrho^2}{c^2}\right)^4} + \varrho^2\,d\varphi^2. \tag{55}$$

З порівнання (55) з (48) виходить ріжничкове рівнання для полуденникової кривої $z = f(\varrho)$ таке:

$$1 + \left(\frac{df}{dt}\right)^2 = \frac{4\,a^2}{c^2\left(1 - \frac{\varrho^2}{c^2}\right)^4} = \frac{4\,r^4}{a^2\,c^2}, \tag{56}$$

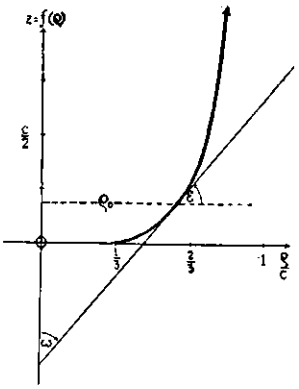
або:

$$\frac{df}{dt} = \pm \frac{\sqrt{4\,\frac{a^2}{c^2} - \left(1 - \frac{\varrho^2}{c^2}\right)^4}}{\left(1 - \frac{\varrho^2}{c^2}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{4\,r^2 - a^2\,c^2}}{a\,c}. \tag{56 a}$$

Зі звязків (53) і (56 а) слідує, що тільки в области

$$c \geqq \varrho \geqq c\sqrt{1 - \sqrt{\frac{2\,a}{c}}} \tag{57}$$

полуденникова крива приймає дійсні вартости. (Рис. 7.) представляє образ такої кривої для $\frac{a}{c} = \frac{32}{81}$.



(Рис. 7.)

Приклади до двійности геометрії та фізики.

1. Ґеодетичні лінії на оборотовій поверхні — радіальний рух в полі масової точки.

З теорії поверхней знаємо для ґеодетичних ліній оборотової поверхні ріжничкове рівнання[1]):

[1]) H. Bauer, l. c. pp. 17 і 18.

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{\varrho}{K}\sqrt{\frac{\varrho^2 - K^2}{1 + \left(\frac{df}{d\varrho}\right)^2}}, \tag{58}$$

де K означає постійну інтеґрування.

Означім луковий елемент полуденникової кривої ds_m і порівнаймо звязки (52) і (48), то виходить, що:

$$ds_m = d\varrho\sqrt{1 + \left(\frac{df}{d\varrho}\right)^2} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}. \tag{59}$$

В такім разі звязь (58) можна написати у виді:

$$\frac{ds_m}{d\varphi} = \frac{\varrho}{K}\sqrt{\varrho^2 - K^2}. \tag{60}$$

При помочи взорів (51) і (53) переводимо рівнання для ґеодетичної лінії оборотової поверхні на мову фізики, а саме дістанемо:

$$\frac{ds_m}{dt} = \frac{i\,c}{K}\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}\;\sqrt{c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) - K^2}. \tag{61}$$

Елемент ds_m означає також елемент дороги в радіяльнім напрямі, отже відношення $\frac{ds_m}{dt}$ представляє скорість руху v в радіяльнім напрямі, якої виразом є:

$$v = -\frac{c}{K}\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left[K^2 - c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\right]}. \tag{62}$$

В нескінченнім віддаленню від масової точки, т. зн. для $lim\ v = \infty$ маємо:

$$v_\infty = -\frac{c}{K}\sqrt{K^2 - c^2}.$$

або:

$$K = -\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v_\infty^2}{c^2}}}. \tag{63}$$

Підставивши так визначену відємну вартість для K у (62), отримаємо:

$$v = c\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left(1 - \frac{v_\infty^2}{c^2}\right)\right]}, \tag{64}$$

або:

$$v = c\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{v_\infty^2}{c^2} - \frac{\alpha v_\infty^2}{r c^2}\right)}. \qquad (64\,\text{a})$$

Пропускаючи виличини, зложені з $\frac{\alpha^2}{r^2}$ і здобутка $\frac{\alpha}{r}$ і $\frac{v_\infty^2}{c^2}$ як нескінчено малі, дістанемо з (64 а) вартість для v в першім приближенню:

$$v = c\sqrt{\frac{\alpha}{r} + \frac{v_\infty^2}{c^2}} \qquad (65)$$

Піднесім останнє вираження до квадрату і поділім на 2, дістанемо:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\alpha c^2}{2r} = \frac{v_\infty^2}{2} = W\ (const), \qquad (65\,\text{a})$$

т. зн. вираження енергії класичної механіки; другий член (65 а) представляє після (50):

$$-\frac{\alpha c^2}{2r} = K\frac{m}{r} = V, \qquad (65)$$

т. є. ґравітаційний потенціял Ньютона. В такім разі (65 а) приймає вид:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_\infty^2}{2} = V. \qquad (65\,\text{в})$$

Визначім дальше ґравітаційне прискорення γ. З огляду на (59) і (64 а) маємо:

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{ds_m}{dt}\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}\frac{d(v^2)}{dr}} \qquad (67)$$

а дальше:

$$\gamma = -\frac{\alpha c^2}{2r^2}\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}\left(1 - \frac{2\alpha}{r} - \frac{2v_\infty^2}{c^2} + \frac{2\alpha v_\infty^2}{r c^2}\right). \qquad (68)$$

Абстрагуючи від знаку і стосуючи (50), дістанемо з останнього рівнання в першім приближенню ньютонівську вартість прискорення тяготіння:

$$g = \frac{\alpha c^2}{2r^2} = k\frac{m}{r^2}. \qquad (69)$$

2. Стіжок стичности на рівнобіжнику оборотової поверхні — однородне поле тяготіння.

а) Sinus половини кута стіжка стичности — прискорення тяготіння Нютона.

Зауважмо оборотовий стіжок, виставлений на рівнобіжнику оборотової поверхні $z = f(\varrho)$, якого промінь виносить:

$$\varrho_0 = c\sqrt{2 - \frac{a}{r_0}}, \tag{70}$$

тоді для нього маємо:

$$\frac{df}{d\varrho} = const.$$

Означім дальше 2ω як кут осевого перерізу стіжка, тоді дістанемо звязь, яку бачимо на (рис. 7.), а саме:

$$\frac{df}{d\varrho} = tg\,\varepsilon = tg\,\omega; \tag{71}$$

з того знов дістанемо:

$$1 + \left(\frac{df}{d\varrho}\right)^2 = 1 + ctg^2\,\omega = \frac{1}{sin^2\omega}. \tag{71a}$$

Коли в рівнанню (56) напишемо r_0 місто r [стосовно до (70)] і порівнаємо його з (71 а), тоді отримаємо:

$$\frac{1}{sin\,\omega} = \frac{2r_0^2}{a\,c}$$

або:

$$sin\,\omega = \frac{a\,c}{2r_0^2}. \tag{72}$$

Порівнуючи знов (72) з (69), маємо:

$$g = c\,sin\,\omega, \tag{73}$$

т. зн. sinus половини кута стіжка стичности, є пропорційний до прискорення тяготіння g Нютона в одроднім поли.

б) Ґеодетичні лінії оборотового стіжка — свобідне падання.

Ріжничкове рівнання ґеодетичних ліній стичного стіжка виходить з взору (58) при застосуванню звязку (71 а), отже:

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{\varrho\,sin\,\omega}{K}\sqrt{\varrho^2 - K}, \tag{74}$$

або:

$$\frac{K}{\varrho^2\sqrt{1-\frac{K^2}{\varrho^2}}} = \sin\omega\, d\varphi. \tag{74 a}$$

По з'інтеґруванню отримаємо:

$$(\varphi - \varphi_0)\sin\omega = arc\cos\frac{K}{\varrho}, \tag{75}$$

або:

$$\varrho\cos[(\varphi - \varphi_0)\sin\omega] = K, \tag{75 a}$$

де φ_0 є постійною інтеґрування. Коли заложимо, що для $\varphi = \varphi_0$ приймає вартість $\varrho = \varrho_0$, то в такім разі:

$$K = \varrho_0. \tag{76}$$

Рівнання (75 a) приймає тоді вид:

$$\varrho\cos[(\varphi - \varphi_0)\sin\omega] = \varrho_0. \tag{77}$$

Коли до останнього рівнання введемо взір трансформаційний:

$$\varphi_0 = i\,t_0 \tag{78}$$

і застосуємо попередні взори (53), (70) і (73), тоді (77) напишемо у виді:

$$\sqrt{1-\frac{2\,g\,r_0}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{2\,g\,r_0^2}{c^2 r}}\cos\left[i\,(t-t_0)\frac{g}{c}\right]. \tag{79}$$

Знаючи однак, що:

$$\cos i\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

можемо (79) написати також у виді:

$$\sqrt{1-\frac{2\,g\,r_0}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{2\,g\,r_0^2}{c^2 r^2}}\left[e^{\frac{g}{c}(t-t_0)} + e^{-\frac{g}{c}(t-t_0)}\right]. \tag{80}$$

Отримане рівнання визначує нам рух матеріяльної точки в однороднім полі тяготіння з ньютонівським прискоренням з погляду загальної теорії релятивности є це релятивістичне представлення свобідного падання. r_0 є ту відступом (і то дуже великим) вихідної точки руху від маси, що витворює поле; отже:

$$r_0 - r = s << r_0 \tag{81}$$

означає в першім приближенню дорогу, відбуту свобідним паданням.

В кінці звернім ще увагу на перехід до класичної фізики. Дістанемо се, коли $\frac{g}{c}$ і $\frac{s}{r_0}$ уважатимемо як малі величини першого ряду і обчислимо (80) з огляду на (81) в першім приближенню; тоді найдемо:

$$\frac{r_0}{r} = \frac{r_0}{r_0 - s} \backsim 1 + \frac{s}{r_0}. \tag{82}$$

Положім дальше для упрощення:

$$t_0 = 0, \tag{83}$$

тоді з (80) дістанемо:

$$1 - \frac{g r_0}{c^2} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{g r_0}{c^2}\left(1 + \frac{s}{r_0}\right)\right]\left(2 + \frac{g^2}{c^2} t^2\right),$$

або:

$$1 - \frac{g r_0}{c^2} = 1 - \frac{g r_0}{c^2} - \frac{g}{c^2} s + \frac{g^2}{2 c^2} t^2$$

та наконець:

$$s = \frac{g}{2} t^2, \tag{84}$$

т. зн. знаний взір на дорогу свобідного падання класичної механіки.

У Львові, в травні 1928 р.

Мирон Зарицький.

Похідна і когеренція абстрактної множини.

В теорії точкових множин означуються деякі операції, на основі яких кождій множині A відповідають однозначно инші множини. Так н. пр. кождій множині A припорядковується її похідну A^d, її замкнення (fermenture, abgeschlossene Hülle) A^r, її обмеження (frontiere, Begrenzung) A^f, її беріг (bord, Rand) A^b, її середовину (l' interieur, das Innere der Menge) A^i, та її когеренцію A^k.

Кромі сего досліджується там деякі особливі множини, що мають якісь особливі властивости, як н. пр. замкнені (fermé, abgeschlossen), розімкненні (ouvert, offen), густі (dense, dicht), берегові (ensemble frontière, Randmengen), та ізольовані (isolé, isoliert) множини.

Тому, що оба роди наведених особливих множин є дуже важні в теорії точкових множин, давно вже досліджували учені їх основні властивости. При тому від часу появи дисертації проф. Fréchet вибирається одну із особливих припорядкованих множині A множин як основне поняття теорії, означується його істотні властивости при помочі кількох незалежних аксіомів, із сих аксіомів висновується инші властивости вибраного основного поняття, при його допомозі означується инші основні поняття і висновується їх властивости і так повстає теорія абстрактних множин, себто теорія множин, що не мають ніякої означеної якости, та про які знаємо лише се, що нам про одну якусь виконувану на них операцію каже основний уклад аксіомів.

Поняття граничної точки точкового поступу було основним поняттям в першій праці проф. Fréchet[1]). Проф. Riesz[2]) прослі-

[1]) M. Fréchet: Thèse. Paris 1905.

[2]) F. Riesz: Stetigkeit und abstrakte Mengenlehre. Atti del IV, Congresso internationali dei Matematici, Roma 1908.

джував поняття точки скупчення множини, а проф. Hausdorff[1]) поняття оточення точки. Проф. Куратовскі[2]) вибрав поняття замкнення множини, а проф. Сєрпіньскі[3]) поняття похідної множини як основне поняття теорії абстрактних множин.

В IX томі журналу Fundamenta mathematicae[4]) прослідив я загальні прикмети наступних основних понять топології: „збір околишніх точок" (l' extérier), „збір середових точок" (l' intérieur), обмеження (la frontière) і беріг (le bord). В журналі Transactions of the American Mathematical Society подав я недавно загальні властивости поняття когеренції.

В 1 § отсеї праці просліджую деякі загальні властивости поняття похідної множини. Сі властивости висновую з укладу чотирох аксіомів, які подав в згаданій вже праці проф. Куратовскі[6]).

В 2 § подаю властивости поняття когеренції і показую, як можна при помочі сего поняття означити инші основні поняття теорії абстрактних множич[7]).

§ 1.

1. Означім поняття похідної A^d множини A наступними чотирома формулами:

I_d: $(A+B)^d = A^d + B^d$

II_d: $C^d = C$

III_d: $O^d = O$

IV_d: $A^{dd} \subset A^d$.

Літерою C зазначую простір, у якому є уміщені всі обговорювані множини, множину без елєментів зазначую через O. Символ A^c значить доповнення множини A: $A^c = C - A$. Замість

[1]) F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre 1914.

[2]) C. Kuratowski: Sur l'Operation $\overline{A}$ d'Analysis Situs. Fundam. Math. III.

[3]) W. Sierpiński: La notion de derivée comme base d'une théorie des ensembles abstraits. Mathematische Annalen. 97. 1926.

[4]) M. Zarycki: Quelques notions fondamentales d'Analysis Situs au point de vue de l'Algébre de la Logique. Fund. Math. IX.

[5]) M. Zarycki: Allgemeine Eigenschaften der Cantorschen Kohärenzen, Transactions of the Americ. Mathem. Society, 1928.

[6]) Більшу часть сих властивостей найшов проф. Куратовскі, але досі не оголосив їх друком.

[7]) Деякі висновки про когеренцію (без доказів) подав я в рефераті на I. польськім математичнім конгресі у Львові (1927). Протоколи сего конгресу ще не видруковані.

$(A^d)^d$ пишу A^{dd}. Символом $A \subset B$ або $A \longrightarrow B$ зазначую, що множина A є частію множини B.

2. Тепер на основі I_d — IV_d докажу наступні теореми:

1_d: коли $A \subset B$, то $A^d \subset B^d$

2_d: $(AB)^d \subset A^d B^d$

3_d: $A^d B^{dc} \subset (AB^c)^d$

4_d: $A^{dc} \subset A^{cd}$

5_d: $A^{dcdcdcd} = A^{dcd}$.

Доказ теорем 1_d — 5_d:

1_d: Коли $A \subset B$, то $B^d = A^d + B^d$ (I_d), отже $A^d \subset B^d$.

2_d: З формул $AB \subset A$ і $AB \subset B$ виходить:

$(AB)^d \subset A^d$ і $(AB)^d \subset B^d$ (1_d), отже:

$$(AB)^d \subset A^d B^d$$

3_d: Згідно з законами альгебричної логіки маємо:

$$A \subset AB^c + B, \text{ отже:}$$

$$A^d \subset (AB^c + B)^d = (AB^c)^d + B^d \quad (1_d, I_d).$$

Коли обі сторони останньої реляції помножимо через B^{dc}, дістанемо:

$$A^d B^{dc} \subset (AB^c)^d B^{dc} + B^d B^{dc} = (AB^c) B^{dc} \subset (AB^c)^d.$$

4_d: З ідентичности: $A^{dc} = CA^{dc}$ виходить:

$$A^{dc} = C^d A^{dc}, \quad (II_d)$$

отже: $A^{dc} \subset (CA^c)^d = A^{cd}$ (3_d).

5_d: З формул 4_d і IV_d дістаємо:

$A^{dcdc} \subset A^{dccd} = A^{dd} \subset A^d$, отже на основі 1_d і IV_d:

$A^{dcdcd} \subset A^{dd} \subset A^d$, отже також:

$A^{dc} \subset A^{dcdcd}$ і на основі формули 1_d:

$$A^{dcd} \subset A^{dcdcdcd} \qquad (\alpha)$$

З другої сторони з формул 4_d і IV_d виходить, що:

$$A^{dcdcdc} \quad A^{dcdccd} = A^{dcdd} \subset A^{dcd}$$

а дальше з формул 1_d і IV_d:

$$A^{dcdcdcd} \subset A^{dcdd} \subset A^{dcd} \qquad (\beta)$$

формули (α) і (β) разом взяті дають теорему 5_d.

3. При помочі аксіом I_d — IV_d і теорем 1_d — 5_d докажемо тепер реляції зазначені в наступних таблицях:

$$A \xrightarrow{cdc} A \xrightarrow{cddc} A \xrightarrow{cddcc} \cdots A \xrightarrow{cdd\ldots c} A \xrightarrow{cdcdcdc} \begin{matrix} \nearrow A^{cdcd} \searrow \\ \searrow A^{dcdc} \nearrow \end{matrix} A \xrightarrow{dcdcd} A \xrightarrow{ddd\ldots} \cdots$$

$$\cdots A \xrightarrow{dd} A \xrightarrow{ddd} A^d \qquad (T_1)$$

$$A \xrightarrow{dc} A \xrightarrow{ddc} A \xrightarrow{dddc} \cdots A \xrightarrow{dd..c} A \xrightarrow{dcdcdc} \begin{matrix} \nearrow A^{dcd} \searrow \\ \searrow A^{cdcdc} \nearrow \end{matrix} A \xrightarrow{cdcdcd} A \xrightarrow{cddd} \cdots$$

$$\cdots A \xrightarrow{cddd} A \xrightarrow{cdd} A^{cd} \qquad (T_2)$$

Наперед докажу, що коли: $A \subset B$ то: $A^{cdc} \subset B^{cdc}$. (γ)

Доказ: коли $A \subset B$, то $B^c \subset A^c$ і $B^{cd} \subset A^{cd}$ (1_d),

отже: $A^{cdc} \subset B^{cdc}$.

Тепер докажу по черзі правдивість всіх реляцій, що містяться в таблиці (T_1):

1) Т.) $A^{cdc} \subset A^{cdcdcdc}$

Д.) $A^{cddc} \subset A^{cdcd}$ (4_l)

отже: $A^{cdcdc} \subset A^{cdd} \subset A^{cd}$ (IV_d)

$A^{cdcdcd} \subset A^{cdd} \subset A^{cd}$ (1_d, IV_d)

$A^{cdc} \subset A^{cdcdcdc}$.

2) Т.) $A^{cdcdcdc} \subset A^{cdcd}$

Д.) $A^{cdcddc} \subset A^{cdcdcd}$ (4_l)

$A^{cdcdcdc} \subset A^{cdcdd} \subset A^{cdcd}$ (IV_d)

3) Т.) $A^{cdcdcdc} \subset A^{dcd}$

Д.) Маємо: $A^{dc} \subset A^{cd}$ (4_d)

$A^{dcd} \subset A^{cdd} \subset A^{cd}$ (1_d, IV_d), а на основі теореми (γ): $A^{dcdcdc} \subset A^{cdcdc}$.

Остання реляція є правдива для кождої множини, отже і для множини A^c, отже дістаємо:

$A^{cdcdcdc} \subset A^{dcdc}$.

4) Т.) $A^{cdcd} \subset A^{dcdc}$

Д.) З доказаної вже реляції $A^{cdc} \subset A^{dcdc}$ 1), 3) виходить що: $A^{cdcd} \subset A^{dcdcd}$ (1_d).

5) Т.) $A^{dcdc} \subset A^{dcdcd}$

Д.) Маємо: $A^{cdcdcdc} \subset A^{cdcd}$, отже коли ту замість A положимо A^c, дістаємо:

$A^{dcdcdc} \subset A^{dcd}$ і дальше:

$A^{dcdc} \subset A^{dcdcd}$.

6) Т.) $A^{dcdcd} \subset A^d$

Д.) $A^{dcdc} \subset A^{dccd} \subset A^{dd} \subset A^d$ (4_d, IV_d)

$A^{dcdcd} \subset A^{dd} \subset A^d$ (1_d, IV_d).

Тепер мусимо доказати правдивість двох важних формул:

m) $A^{cdcdd} = A^{cdcd}$

n) $A^{dcdd} = A^{dcd}$.

Доказ: Маємо: $A^{cdcdcdc} \subset A^{cdcd}$ 2)

$A^{cdcdcdcd} \subset A^{cdcdd}$ (1_d)

отже: $A^{cdcd} \subset A^{cdcdd}$, бо згідно з теоремою 5_d маємо:

$A^{cdcdcdcd} = A^{cdcd}$.

З другої сторони маємо: $A^{cdcdd} \subset A^{cdcd}$ (IV_d).

Формули: $A^{cdcd} \subset A^{cdcdd}$ і $A^{cdcdd} \subset A^{cdcd}$ дають теорему (m).

Теорему (n) дістанемо з теореми (m), коли замість A положимо там A^c.

Тепер можемо доказати нову теорему:

(p): $A^{dd\ldots cdc} = A^{dcdc}$.

Доказ: $A^{dcdcd} \subset A^{d}$ (6)

а через многократне приложення теореми (n) дістаємо:

$A^{dcdcd} \subset A^{dd\ldots}$

а дальше: $A^{dcdcdcdc} \subset A^{d\ldots cdc}$ (γ)

(1'): $A^{dcdc} \subset A^{d\ldots cdc}$ (5_1)

З другої сторони маємо: $A^{dd\ldots} \subset A^{d}$ (IV_d)

отже:

(2'): $A^{dd\ldots cdc} \subset A^{dcdc}$ (γ).

Реляції (1') і (2') дають теорему (p).

Тепер легко вже можна доказати наступні формули:

(r): $A^{dd\ldots cd} = A^{dcd}$

(s): $A^{cdd\ldots cd} = A^{cdcd}$

(t): $A^{cdd\ldots cdc} = A^{cdcdc}$.

Докажемо тепер реляцію:

7) Т.) $A^{cdc} \subset A^{cdd\ldots c} \subset A^{cdcdcdc}$

Д.) $A^{cdd\ldots} \subset A^{cd}$, отже:

$A^{cdc} \subset A^{cdd\ldots c}$.

Дальше: $A^{cdcdcd} \subset A^{cd}$ (6)

а також: $A^{cdcdcd} \subset A^{cdd\ldots}$ (1_d), (n)

отже: $A^{cdd\ldots c} \subset A^{cdcdcdc}$.

8) Т.) $A^{dcdcd} \subset A^{dd\ldots} \subset A^{d}$.

Д.) Коли в формулі 7) замість A положимо A^c, дістанемо:

$A^{dd\ldots c} \subset A^{dcdcdc}$

отже також: $A^{dcdcd} \subset A^{dd\ldots}$

Реляція: $A^{dd\ldots} \subset A^{d}$ виходить з (IV_d).

Так доказали ми всі реляції, що містяться у таблиці (T_1). Реляції поміщені в таблиці (T_2) дістанемо, коли в таблиці (T_1) підставимо всюди A^c замість A.

4. Зазначім тепер знаком A^σ множину, що повстала з множини A через приложення до неї скінченого числа операції A^d і A^c у довільнім порядку. Так отже покажчик σ зазначує скінчений поступ, що його елементами є літери d і c.

Докажемо тепер наступні твердження:

I. Для загальної множини A всі множини типу A^σ, що містяться у таблицях (T_1) і (T_2) є ріжні (нема між ними двох множин ідентичних).

II. Ніякі інші реляції типу $A^{\sigma_1} \subset A^{\sigma_2}$ не є правдиві для ніяких σ_1 і σ_2 (взятих із наведених таблиць) крім сих реляцій, що їх находимо у таблицях.

III. Кожда множина типу A^σ є ідентична з одною з множин, що є поміщені в таблицях (T_1) і (T_2). Правдивість твердження III. виходить з теорем (5_d), $m)$ $n)$ $r)$ $s)$ і $t)$.

Щоби доказати теореми I і II треба сконструювати таку множину M, що має наступні властивости:

1) Коли σ_1 і σ_2 є двома ріжними покажчиками, що їх можна найти в таблицях (T_1) і (T_2), то все є: $M^{\sigma_1} \neq M^{\sigma_2}$.

2) Коли σ_1 і σ_2 є двома ріжними покажчиками, що находяться у таблицях, то ніякі реляції типу $M^{\sigma_1} \subset M^{\sigma_2}$ (ані $A^{\sigma_2} \subset A^{\sigma_1}$) не є правдиві, крім сих, що є вписані у таблицях.

Подамо тепер конструкцію такої множини.

Нехай простором C буде збір дійсних чисел відтинка: $0 \leq x \leq 1$.

A_1 = множина дійсних чисел відтинка: $0 \leq x < 1$,

A_2 = „ вимірних „ $2 \leq x < 3$,

A_3 = „ чисел: $x = 5 - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

A_4 = „ відтинків: $7 - \frac{1}{2^n} < x < 7 - \frac{1}{2^{n+1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

A_5 = „ дійсних чисел відтинка: $7 < x \leq 8$,

A_6 = довільна добре упорякована (bien ordonné) множина типу ω^ω чисел положених на відтинку: $8 < x < 9$,

A_7 = ріжниця між множиною чисел відтинка: $9 \leq x \leq 10$ і довільною добре упорядкованою множиною типу ω^ω чисел положених на сім відтинку.

Коли означимо тепер похідну як множину точок скупчення, то легко можна провірити, що множина $M = \sum_{n=1}^{7} A_n$ має обі властивости 1) і 2).

5. Означимо тепер при помочі поняття похідної найважнійші поняття топології.

Множину A називаємо замкненою, коли: $A' \subset A$.

Множину A називаємо у собі густою (dense en soi), коли: $A \subset A^d$.

Множину A називаємо завершеною (parfait), коли: $A = A^d$.

Множину A називаємо ізольованою (isolé), коли: $A^d \subset A^c$.

Множину A називаємо розімкненою (ouvert), коли: $A \subset A^{cdc}$.

Множину A називаємо всюди густою (partout dense), коли: $A^d = C$.

Множину A називаємо береговою (ensemble frontière), коли: $A^{cdc} = 0$.

Множину A називаємо негустою (non dense), коли: $A^{dcdc} = 0$.

Через відповідні операції можна з кождої множини A дістати инші множини, що є функціями сеї множини. Подаю означення найважнійших із таких функій:

Множину $A^i = A \cdot A^{cdc}$ називаємо середовиною (intérieur) множини A.

Множину $A^f = A A^{cd} + A^c A^d$ називаємо обмеженнєм (frontière) множини A.

Множину $A^b = A A^{cd}$ називаємо берегом множини A.

Множину $A^r = A + A^d$ називаємо замкненнєм (fermeture) множини A.

Легко можна провірити, що множина A^d є все замкнена, A^{dc} є все у собі густа, а множина A^{dcd} є завершена.

6. Усі теореми, що їх досі доказано, є логічними консеквенціями аксіомів $I_d - IV_d$. Легко можна доказати, що спійність (connexité) простору не є консеквенцією сих аксіомів. Коли хочемо мати уклад аксіомів, з якого можна вивести спійність простору, треба до аксіомів $I_d - IV_d$ додати ще аксіому:

V_d: Коли: $A^d \subset A \subset A^{cdc}$, то: $A = 0$ або $A = C$.[1]

Докажемо тепер дві наступні теореми:

I. Простір C є спійною множиною.

II. Лише множина без елементів (O) і простір C є множинами і замкненими і розімкненими.

Доказ теореми I:

Множину A називаємо спійною, коли не можна найти таких двох множин M і N, щоби:

$$\alpha)\ M \neq O,\ N \neq O,$$
$$\beta)\ M + N = A,$$
$$\gamma)\ MN + MN^d + M^d N = O.$$

[1]) Дещо аксіому рівноважну аксіомі V_d і її консеквенції можна найти у моїй ноті: Про спійність простору, Збірник, мат.-прир.-лік. секції Н. Т. ім. Ш., том XXVI.

Приймім умову, що простір C можна розділити на такі дві множини M і N, щоби для них формули $\alpha)$, $\beta)$ і $\gamma)$ були правдиві.

З формул виходить, що: $N = M^c$ (бо $M + N = O$). Отже дістаємо: $MM^{cd} + M^d M^c = O$, або:

$$MM^{cd} = O, \quad M^d M^c = O.$$

З останних формул виходить:

$$M \subset M^{cdc} \text{ і } M^d \subset M, \text{ отже:}$$

$$M^d \subset M \subset M^{cdc}$$

На основі формул $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ множина M не може бути ані множиною без елементів, ані ідентична з цілим простором. Із сего виходить на основі акс. V_d, що формула $M^d \subset M \subset M^{cdc}$ є неможлива. А що остання формула є консеквенцією умови, що простір не є спійний, то і ся умова є незгідна з акс. V_d і простір є множиною спійною.

Доказ теореми II.:

Множина без елементів і простір є множинами замкненими і розімкненими, бо:

$$O^d = O, \quad O \subset O^{cdc} = O; \qquad C^d = C, \quad C \subset C^{cdc} = C.$$

Треба ще доказати, що ніяка инша множина не може бути і замкнена і розімкнена. Така множина A мусілаби мати наступні властивости:

$$A^d \subset A \text{ і } A \subset A^{cdc},$$

а се є незгідне з акс. V_d.

7. Щоби доказати незалежність аксіом $I_d - V_d$, треба означити для якогось простору похідну на пять ріжних способів так, щоби кожда дефініція була згідна із всіми аксіомами крім одної.

Нехай простір складається з трох елементів a, b, c, отже $C = (a, b, c)$. В наступній таблиці подаємо пять дефініцій похід-

	I_d	II_d	III_d	IV_d	V_d
$O^d =$	O	O	(a, b, c)	O	O
$(a)^d =$	O	O	(a, b, c)	(a, b)	(a)
$(b)^d =$	O	O	(a, b, c)	(b, c)	(b)
$(c)^d =$	O	O	(a, b, c)	(c, a)	(c)
$(a, b)^d =$	(a, b, c)	O	(a, b, c)	(a, b, c)	(a, b)
$(b, c)^d =$	(a, b, c)	O	(a, b, c)	(a, b, c)	(b, c)
$(c, a)^d =$	(a, b, c)	O	(a, b, c)	(a, b, c)	(c, a)
$(a, b, c)^d =$	(a, b, c)	O	(a, b, c)	(a, b, c)	(a, b, c)

ної множин сего простору. Кожда з дефініцій є згідна з чотирома аксіомами, а незгідна з одною аксіомою зазначеною над тим стовпцем, у якім є виписані означення похідної всіх множин простору.

Легко можна переконатися, що аксіоми I_d — V_d є правдиві в евклідовім просторі, коли A^d означимо як множину точок скупчення множини A. Однак крім сего можна їх також прикладати у загальнійших абстрактних просторах.

Аксіома I_d каже, що операція A^d є аддитивна.

З аксіоми IV_d виходить, що похідна є все замкнена.

Аксіома V_d є рівноважна теоремі: Множина без елементів і простір є одинокими множинами, яких обмеження є множиною без елементів.

§ 2.

1. G. Cantor назвав множину $A^k = A A^d$ когеренцією множини A. Колиж хочемо означити похідну множин A через її когеренцію, то бачимо, що похідної не можна означити як функцію когеренції, т. зн. що коли на загальній множині A будемо виконувати операції A^k і A^c, та будемо творити логічні суми і добутки на множинах типу A^n, то не дістанемо такої множини, що означувалаби загально похідну множини A. Про правдивість сеї замітки можна легко переконатися. Означім похідну так, як її означується в теорії точкових множин і нехай A буде множиною, якої елементами є обернені вартости цілих додатних чисел: $A = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$. Коли C є множиною дійсних чисел, то легко можна переконатися, що всякі можливі льоґічні операції виконувані на множинах A, A^k і A^c дають все лише одну з наступних множин: A, A^c, O, C, а нема між ними похідної множини A, яка є множиною, що має лише один елемент, яким є число O.

Однак похідну можна означити при помочі когеренції, коли допустимо також формули, що представляють реляції між множиною і її елементами. Кажемо іменно, що елемент „a“ є елементом похідної A^d, коли: $a \varepsilon \{A + (a)\}^k$. [1])

Гокажемо, що ся дефініція є рівноважна звичайній дефініції похідної в таких клясах, у яких для похідної є правдиві дві наступні формули:

---

[1]) $a \varepsilon A$ значить, що „a“ є елементом множини A. (a) значить множина, що має лише один елемент „a“.

$$a)\quad (A+B)^d = A^d + B^d$$
$$b)\quad (a)^d = O.$$

Доказ:

Коли $a \varepsilon \{A + (a)\}^k$, то:

$(a) \subset \{A + (a)\}^k = \{A + (a)\}\{A^d + (a)^d\} = \{A + (a)\} A^d \subset A^d.$

З другої сторони, коли:

$(a) \subset A^d$, то також:

$(a) \subset (a) . A^d \subset (a) A^d + A A^d = \{A + (a)\}\{A^d + (a)^d\} = \{A + (a)\}^k.$

Бачимо, що наша дефініція похідної придатна в клясах (L) і (H) Fréchet'a. Можна її також прикладати і в таких просторах, у яких похідна не мусить бути замкнена. Треба лише, щоби були правдиві формули $a)$ і $b)$.

Коли вже маємо означення похідної при помочі когеренції, то можна вже означити при помочі когеренції і инші основні поняття топології.

Так н. пр. множину A називаємо замкненою, коли з реляції:

$$a \varepsilon \{A + (a)\}^k$$

виходить що: $a \varepsilon A$.

Множину A називаємо в собі густою коли з реляції: $a \varepsilon A$ виходить, що: $a \varepsilon \{A + (a)\}^k$.

Замкнення A^r множини A можна означити в наступний спосіб: $a \varepsilon A^r$ коли: $a \varepsilon A + \{A + (a)\}^k$.

2. Загальні властивости когеренції виведемо з наступних трох незалежних аксіомів:

I_k: $A^k + B^k \subset (A + B)^k$

II_k: $A^k \subset A$

III_k: $A^{ckck} = A^{kckc}$.

Правдивість сих формул виходить з дефініції поняття когеренції ($A^k = A A^d$), та з аксіомів I_d — IV_d.

Доказ I_k:

$$A^k + B^k = A A^d + B B^d, \quad (A+B)^k = (A+B)(A+B)^1 =$$
$$= (A+B)(A^d + B^d) = A A^d + B B^d + B A^d + A B^d,$$

отже: $A^k + B^k \subset (A+B)^k$.

Доказ II_k: $A^k = A A^d \subset A$.

Доказ III_k:

$$A^{ckck} = (A^c A^{cd})^{ck} = (A + A^{cdc})^k = (A + A^{cdc})(A + A^{cdc})^d =$$
$$= (A + A^{cdc})(A^d + A^{cdcd}) = (A + A^{cdc}) A^d = A A^d + A^{cdc} A^d =$$
$$= A A^d + A^{cdc}.$$

$$A^{kckc} = (A A^d)^{ckc} = (A^c + A^{dc})^{kc} = \{(A^c + A^{dc})(A^c + A^{dc})^d\}^c =$$
$$= \{(A^c + A^{dc})(A^{cd} + A^{dcd})\}^c = \{A^c A^{cd} + A^{dc} A^{cd} + A^c A^{dcd} + A^{dc} A^{dcd}\}^c =$$
$$= \{A^c A^{cd} + A^{dc} + A^c A^{dcd} + A^{dc}\} = \{A^{dc} + A^c (A^{cd} + A^{dcd})\}^c =$$

$= \{A^{dc} + A^c A^{cd}\} = A^d(A + A^{cdc}) = AA^d + A^d A^{cdc} = AA^d + A^{cdc}$,

отже: $A^{ckck} = A^{kckc}$.

3. При помочі аксіом I_k — IV_k докажемо тепер наступні формули:

1_k: коли $A \subset B$, то $A^k \subset B^k$

2_k: $(AB)^k \subset A^k B^k$

3_k: $O^k = O$

4_k: $C^k = C$

5_k: $A^{ck} \subset A^{kc}$

6_k: $(A - B)^k \subset A^k - B^k$

7_k: $A^{kckk} = A^{ckckck}$

8_k: $A^{kkck} = A^{kckckc}$.

Докази:

1_k: Коли $A \subset B$, то з акс. I^k виходить:

$$A^k + B^k \subset B^k, \text{ отже:}$$
$$A^k \subset B^k.$$

2_k: Маємо: $AB \subset A$ і $AB \subset B$, отже:

$$(AB)^k \subset A^k \text{ і } (AB)^k \subset B^k, \qquad (1_k)$$

а через вимноження дістаємо:

$$(AB)^k \subset A^k B^k.$$

3_k: З акс. II_k виходить:

$$O^k \subset O, \text{ або: } O^k = O.$$

4_k: Щоби доказати теорему 4_k, треба наперед доказати, що когеренція кождої множини є частиною когеренції простору, т. зн. що для кождої множини M є правдива реляція $M^k \subset C^k$.

Коли в акс. I_k положимо: $A = M$, $B = C$, то дістанемо:

$$M^k + C^k \subset (M + C)^k = C^k, \text{ отже:}$$
$$M^k \subset C^k.$$

Положім тепер: $M = A^{ckc}$,

то дістанемо: $A^{ckck} \subset C^k$, а також:

$$A^{kckc} \subset C^k. \qquad (\text{акс. } III_k)$$

Положім: $A = O$, то:

$$O^{kckc} \subset C^k.$$

Але: $O^{kckc} = O^{ckc} = C^{kc}$, (3_k)

отже: $C^{kc} \subset C^k$,

$$C^{kc} \cdot C^{kc} = O, \quad C^k = C.$$

5_k: Маємо: $A^{ck} \subset A^c$ (акс. II_k)

а дальше: $A \subset A^{ckc}$,

але: $A^k \subset A$ (II_k)

отже: $A^k \subset A^{ckc}$

$A^{ck} \subset A^{kc}$.

6_k: Згідно з теоремою 2_k маємо:

$$(AB^c)^k \subset A^k B^{ck} \subset A^k B^{kc} = A^k - B^k.$$

7_k: Коли в акс. III_k за A положимо A^c, то дістаємо:

$$A^{kck} = A^{ckckc}$$

$$A^{kckk} = A^{ckckck}.$$

8_k: При доказі останньої теореми мали ми реляцію:

$$A^{kck} = A^{ckckc}.$$

Положім ту A^k за A, то дістанемо:

$$A^{kkck} = A^{kckckc}.$$

4. Тепер розглянемо проблєму анальоґічну до сеї, яку ми досліджували в § 1. 4.

Докажемо, що правдиві є реляції інклюзії, що містяться у наступних таблицях:

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \to & A^{ckc} & \to & A^{ckkc} & \to & A^{ckkkc} \to \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
A^k & \to & A^{ckck} & \to & A^{ckkck} & \to & A^{ckkkck} \to \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
A^{kk} & \to & A^{ckckk} & \to & A^{ckkckk} & \to & A^{ckkkckk} \to \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
A^c & \to & A^{kc} & \to & A^{kkc} & \to & A^{kkkc} \to \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
A^{ck} & \to & A^{kck} & \to & A^{kkck} & \to & A^{kkkck} \to \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
A^{ckk} & \to & A^{kckk} & \to & A^{kkckk} & \to & A^{kkkckk} \to \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot
\end{array}$$

Що кожда множина є частиною множини, яка лежить у таблиці над нею, виходить з акс. II_k.

Треба ще лише доказати, що кожда множина є частиною, що лежить у таблиці на право від неї. Вистане доказати се для першого ряду таблиці.

(II_k) $A^{ck} \subset A^c$, отже $A \subset A^{ckc}$

(1_k) $A^{ckk} \subset A^{ck}$, $A^{ckc} \subset A^{ckkc}$

(1_k) $A^{ckkk} \subset A^{ckk}$, „ $A^{ckkc} \subset A^{ckkkc}$ і т. д.

Другу таблицю дістаємо з першої через підставлення A^c на місці A.

При помочі теорем III_k, 7_k і 8_k можна кожду множину, що повстала через приложення до неї скінченого числа операції A^c і A^k перетрансформувати ідентично на одну з множин, що містяться у таблицях. Отже нема инших множин типу A^σ крім сих, що їх находимо у таблицях.

Всі множини, що є у таблицях, є ріжні і нема між ними ніяких инших реляцій інклюзії, крім сих, що їх находимо у таблицях. Можна се легко провірити на множині M, що є сумою двох множин A_1 і A_2, які означиємо в наступний спосіб:

A_1 є якою небудь упорядкованою (bien ordonné) множиною типу $(\omega+1)^{\omega+1}$ зложеною з точок відтинка: $0<x<1$,

A_2 є ріжницею між відтинком: $1<x<2$ і якоюсь добре упорядкованою множиною типу $(\omega+1)^{\omega+1}$ зложеною з точок сего відтинка.

5. Доказом незалежности аксіомів I_k — III_k є наступна табеля:

$C=(a,b,c)$	I_k	II_k	III_k
$(O)^k=$	O	O	O
$(a)^k=$	(a)	O	O
$(b)^k=$	(b)	O	O
$(c)^k=$	(c)	O	O
$(a,b)^k=$	O	(a,b,c)	O
$(b,c)^k=$	O	(a,b,c)	O
$(c,a)^k=$	O	(a,b,c)	O
$(a,b,c)^k=$	(a,b,c)	(a,b,c)	O

Простір C є ту множина зложена з трох елєментів: $C=(a,b,c)$.

Під кождою аксіомою находимо такі дефініції усіх множин простору, що не є згідні з сею аксіомою, а згідні з иншими аксіомами.

Ч(с)У-3:54+54(014)

Др. Роман Цегельський.

Про українську хемічну термінольоґію.

(Реферат на засіданню мат.-прир.-лік. Секції Наукового Товариства ім. Шевченка у Львові дня 18. лютого 1928).

Українська хемічна термінольоґія має вже за собою історію. Початки її сягають ще сімдесятих років XIX. століття. Тоді саме впроваджено українську викладну мову в академічній ґімназії у Львові і тим самим зайшла потреба вчити хемії по українськи. В слід за тим появилися українські підручники фізики та хемії для ґімназій (Полянського, Огоновського Петра), де находимо перші українські хемічні назви. Перший авторитетний „Начерк термінольоґії хемічної“ зладив др. В. Левицький та напечатав його у IX. т. Збірника мат.-прир.-лік. Секції Наук. Тов. ім. Шевченка у Львові 1903. Називаю його авторитетним тому, що основи сього начерку приняла і затвердила мат.-прир.-лік. Секція Наук. Тов. ім. Шевченка у Львові[1]).

Др. В. Левицький, а за ним і мат.-прир.-лік. Секція Наук. Тов. ім. Шевченка у Львові станули були тоді на становищі національзації хемічних термінів, ідучи за прикладом инших народів, нпр. Поляків, Чехів, Росіян. В рік опісля подав проф. др. Ів. Горбачевський у X. т. згаданого Збірника критику сеї термінольоґії п. з. „Уваги о термінольоґії хемічній“. Його становище було принціпіяльно відмінне від становища др. В. Левицького. Він висказав погляд, що українська термінольоґія мусить бути передусім така, щоби як найтіснійше прилягала до міжнародньої термінольоґії і що витворення та ви-

---

[1]) Проф. Анатолій Семенцов називає у своїх „Увагах до української хемічної термінольоґії“, виданих в II. кн. Записок Київського Інституту Народньої Освіти, єдиним авторитетним джерелом словник хемічної термінольоґії, який склала О. Курило й ухвалила термінольоґічна Комісія Київського Наук. Товариства, а видало 1923. року ДВУ. Я думаю, що всеж таки праця д-ра В. Левицького з 1903 р. мала велике значіння і дала привід до дискусії над українською хемічною термінольоґією.

ключне уживання народньої, зовсім ориґінальної термінольоґії або термінольоґії, переробленої з якоїсь славянської мови не лише невигідне і непотрібне, але навіть некорисне. Виїмок допускає проф. Горбачевський лише для найвизначнійших загально знаних сполук, але жадає, щоби основою цілої термінольоґічної системи була міжнародня термінольоґія тай щоби знаціоналізовані терміни відповідали їй. Сю вимогу вважає проф. Горбачевський оправданою також тому, що в орґанічній хемії властиво нема ніяких народніх термінольоґій, лише міжнародня з виїмком небогатьох імен сполук, які були вже давнійше звісні перед надзвичайно скорим розвитком орґанічної хемії у другій половині XIX. віка. Творити народню термінольоґію орґанічної хемії було би прямо неможливим з причини надзвичайно великої скількости матеріялу, а впрочім се було би зайвше і без вартости. В неорґанічній хемії у ріжних народів є по части ориґінальна народня термінольоґія, по части і міжнародня. Сі народні терміни неорґанічної хемії витворилися були ще в часах, коли наукові міжнародні звязки не були такі живі, як тепер, і коли неорґанічна хемія розвивалася ще дуже поволи.

Одначе тепер починає розвиватися сильно також неорґанічна хемія. Нові сполуки, особливо нові досі незнані типи, дістають міжнародні назви. Міжнародня термінольоґія випирає чим раз більше т. зв. народні терміни тим більше, що останні є переважно неприцизні і часто утворені доволі незугарно. За міжнародньою термінольоґією промовляє у нас також і те, що Українець, навчившися міжнародньої термінольоґії з українського підручника, зможе легко познакомлюватися з всесвітньою літературою.

Після цих уваг подав проф. Горбачевський подрібну критику термінів д-ра В. Левицького і заразом проєкт иншої термінольоґії, опертої на інтернаціональнім принціпі.

На сім спинилася на довший час дискусія над хемічною термінольоґією. Але праця над нею поступала поволи вперед з огляду на практичні потреби. І так у передвоєнних числах „Здоровля“, орґану львівського товариства українських лікарів, находимо термінольоґію, зібрану д-ром Е. Озаркевичем, що відносилася здебільша до лікарської хемії. Рівночасно появився ряд шкільних та популярних підручників хемії та хемії і мінеральоґії (Р. Цегельського, Ю. Гірняка, М. Мельника, Мазуренка), в котрих автори були приневолені впровадити значну скількість хемічних термінів в українській мові. В подібнім положенню був д-р Ю. Гірняк при писанню своїх праць з теоретичної хемії[1]). В 1922. появилося ще два підручники в Камянці Подільськім (автор М. В.) і в Київі (Мазуренка II. вид.).

У всіх тих підручниках термінольоґія дуже ріжнородна, оперта здебільша на принціпі націоналізації.

Само життя посувало справу бистро вперед. В 1917. р. вибухла в Росії революція, що принесла за собою утворення Української Держави. На Україні, не зважаючи на війну, закипіла жива праця на науковім полі. При Українськім Народнім Товаристві в Київі повстала Термінольоґічна Комісія, якої завданням було складати шкільну термінольоґію. Голова сеї Комісії П. І. Холодний доручив ще з початку 1918. р. О. Куриловій скласти словник української хемічної термінольоґії для шкільного вжитку. Авторка використала крім згаданих вище жерел також матеріяли колишньої Термінольоґічної Комісії, Гуртка Натуралістів при Київській Політехніці, словники Е. Тимченка і Грінченка тай ще кілька менших підручників. Термінольоґічна Комісія виділила з поміж себе Хемічну Підкомісію, якої головою був М. І. Доманицький. Остаточним вислідом сеї праці є „Словник хемичної терінології“ що появився 1923. р. в Київі під редакцією О. Курило як 4. випуск Природничого Відділу Інституту Наукової Мови при Всеукраїнській Академії Наук накладом Державного Видавництва України. Укладчики сього словника старалися погодити педаґоґічний та науковий принціпи. Вони вийшли з того погляду, що інтернаціональні, чужі терміни можуть побільшити труднощі при навчанню хемії в нижчих школах, де при науці необхідно виходити від понять, знаних ученикам. Тому основи, на яких оперлася Хемічна Підкомісія, мало ріжняться від основ „Начерку“ д-ра В. Левицького, а рівнорядно попри народні чи знаціоналізовані терміни стрічаємо у „Словнику“ також міжнародні. Але поки-що сей „Словник“ є проєктом без загально обовязуючої сили.

Міжтим почалися виклади хемії в українській мові на українських університетах в Празі і у Львові, на українській політехніці у Львові, в Господарській Академії в Подєбрадах тай у ріжних школах Радянської України. Ізза того устійнення української хемічної термінольоґії стало пекучою потребою і сю справу необхідно полагодити у як найкоротшому часі.

З того приводу забрав проф. І. Горбачевський вдруге

[1]) Гл. Збірники мат.-прир.-лік. Секції Наук. Тов. ім. Шевченка у Львові. Т. IX, XI—XV.

голос у цій справі і помістив в 1. ч. „Українського Медичного Вістника“ в Празі з 1923. р. статтю п. з. „Уваги до хемічної термінольоґії“, де попри критику поглядів Левицького, Мазуренка і Подєбрадської Академії подав досить подрібний проєкт своєї термінольоґії, опираючися на тих самих основах, що в 1904. р. А в 1924. р. видав обємистий підручник „Орґанічної Хемії“, де находимо богатий термінольоґічний матеріял і уваги до хемічної термінольоґії у „Переднім Слові“.

Погляди проф. Горбачевського, людини найбільше у нас авторитетної на полі хемії і хемічної термінольоґії, відбилися голосним відгомоном у працях Номенклятурної Комісії Хемічного Відділу Київського Товариства Природознавців, що відбувала свої засідання в протягу 1927. р. під проводом проф. А. П. Семенцова. Комісія оперлася на назвах, які запропонувала Комісія Німецького Хемічного Товариства у 1925. р., зробивши у німецьких назвах лише такі зміни, які треба було зробити, щоби пристосувати ці назви до української мови. Номенклятура Німецької Комісії є дуже раціональна і може бути примінена до будь-якої мови. Ізза того Комісія припускала, що ця номенклятура буде основою міжнародньої номенклятури і тоді номенклятура, що її пропонує Комісія, буде так само міжнародньою. А хочби надії Комісії не здійснилися, все ж таки Українці матимуть міжнародню номенклятуру, що позволить їм легко орієнтуватися в німецькій та иньшій західноевропейській хемічній номенклятурі.

Ідучи за сею думкою консеквентно, Комісія наблизилася до становища проф. Горбачевського та прийняла богато позицій його. Голова Комісії проф. Семенцов навів у своїй доповіди[1]) арґументи, що промовляють за інтернаціональною термінольоґією, зближені до арґументів проф. Горбачевського, і зазначив, що Українці мають надзвичайно сприятливі обставини для запровадження раціональної та міжнародньої номенклятури, бо на Україні ще майже нема хемічної літератури.

Про висліди своєї роботи Комісія зробила доповідь плєнуму Відділу 7. червня 1927. Плєнум затвердив всі постанови Комісії з виїмком постанови про зазначення стехіометричних відношень, що її принято у редакції меншости Комісії.

На сім місци подаю до відома, що мат.-прир.-лік. Секція Наукового Товариства ім. Шевченка у Львові радила над постановами Київської Комісії на двох засіданнях та заявилася за впровадженням міжнародньої хемічної номенклятури після основ, предложених цею Комісією, однак висказала думку, що у нижчих школах з педаґоґічних причин необхідно буде при науці хемії послугуватися також повсякденними назвами бодай у мінімальних розмірах.

[1]) А. Семенцов. Про раціональну номенклятуру хемічних індивідуумів. Записки Київ. Т-ва Природ. Т. XXVII, в. 2.

Понижче подаю подрібно постанови Київської Комісії[1]) і в звязи з ними з'ясовую погляди свої та мат.-прир.-лік. Секції Н. Т. ім. Ш. на кожду з них з окрема.

I. Назви елємєнтів.

Назви елємєнтів складаються з їх латинських назв, замінюючи закінчення „ium“ на закінчення „ій“ та відкидаючи зовсім закінчення „um“. Н. пр. *Na* натрій, *Mg* маґнезій, *As* арсеник, *B* бор.

З цього загального правила робить Комісія два виїмки, по перше для всіх елємєнтів, що мають назву в повсякденній мові, залишає ці назви, н. пр. *Fe* залізо, *Pb* олово, *S* сірка, *Sn* цина. По друге, для елємєнтів *O* кисень, *H* водень, *N* азот та *C* вуглець залишає ці назви, що стали вже традиційними.

Ту зверну увагу, що проф. Горбачевський[2]) промовляє за задержанням латинського закінчення „ium“ (іум) з огляду на назви хемічних сполук, н. пр. баріум, баріумкарбонат. Замісць „арсеник“ уживає коротшої назви „арсен“, замісць „вуглець“ назви „вугіль“, а попри „кальціум“ назви „вапень“, попри „сіліціум“ назви „кремій“.

Тому, що в „Переднім Слові“ до своєї „Орґанічної Хемії“ проф. Горбачевський не противиться закінченню „ій“, можна згодитися на нього. Крім того думаю, що необхідним є впровадити також інтернаціональні терміни попри ті народні, що є загально прийняті н. пр. назву „нітроґен“ попри „азот“ з огляду на назви хемічних сполук. Попри назву „сіліціум“ можна би уживати назви, впровадженої від народньої, у формі „крем“ замісць „кремій“, бо це не є латинська назва. Зате референтови, як і членам Секції здається доцільнійшим, уживати назви „вугіль“.

Трудність є з назвою ртути, яку нарід зчаста називає „живим сріблом“. На думку референта не лишається нічого иншого, як впровадити як головну назву „гідрарґірій“, а обі народні

[1]) Гл. „Звіт Номенклятурної Комісії Хемічного Відділу Київського Товариства Природознавців“. (Записки Київ. Т-ва Природ. Т. XXVII, в. 2).

[2]) Укр. Медичний Вістник. Прага 1923, 1 ч. 8 стр.

назви вважати побічними. Мат.-прир.-лік. Секція Н. Т. ім. Ш. заявляється взагалі против назви „живе срібло“, а задержує назву „ртуть“.

Обговорюючи назви елєментів, мушу разом з проф. Горбачевським[1]) і згідно зі своєю Секцією виступити за задержанням букви ґ (латинське G) в назвах, в яких вона приходить, — чого не бачимо у „Словнику хемичної термінольоґії“ О. Курилової, — а саме „Gallium“ треба писати „ґалій“ в супротиставленню до „гелія“ (Helium) тому, що можуть вийти непорозуміння, н. пр. Acidum gallicum є по українськи „ґальова кислота“, а не „гальова“, бо гальовими кислотами є *HF*, *HCl*, *HBr*, *HI*.

II. Назви сполук.

Назви всіх сполук за виїмком назв кислот та їх ангідрідів складаються в проєкті Київської Комісії з двох частей — аніону і катіону. Назви аніонів творить вона, додаючи відповідні закінчення до пня латинської назви центрального атому аніону. Назву катіону ставить у 2. відмінку. За прикладом Німецької Термінольоґічної Комісії для зазначення валєнтности катіону на письмі ставить після назви катіону відповідну римську цифру у дужках, а у вимові вставляє перед назвою катіону відповідно „двохвалєнтного“, „трохвалєнтного“ і т. д.

Коли валєнтність елєменту у сполуці невідома, то для зазначення ріжних сполук тих самих елєментів зазначує стехіометричні відношення, додаючи до назв відповідних елєментів грецькі числівники.

На основі цих загальних принціпів зложила Київська Номенклятурна Комісія назви для окремих кляс сполук у такий спосіб:

Бінарні сполуки. Аніони їх дістають закінчення „ід“, н. пр. *NaCl* хльорід натрія, *HF* флюорід водня[2]), Fe_2O_3 оксід трохвалєнтного заліза, MnO_2 діоксід манґану, AsH_3 арсенід водня. Оксіди, що з кислотами виділюють H_2O_2, називає Комісія пероксідами: BaO_2 пероксід барія.

Для ціяну та амоніяку Комісія залишила ці назви.

На цьому місці хочу зауважати, що досі уживали у нас замісць „оксід“ назви „окис“. Вона має вже у нас „традицію“ і є дуже популярна. Ізза того проф. Горбачевський уживає попри „оксід“ також назви „окис“ і на мою думку, а також і на

[1]) Орґанічна Хемія. Прага 1924. IV. стр.

[2]) У Звіті Комісії читаємо „водню“, „барію“.

погляд Секції необхідно буде залишити її ізза педаґоґічних причин як побічний термін.

Дуже практичними є назви проф. Горбачевського для більшої кількости оксідів того самого елєменту, н. пр.:

N_2O_5 — діазотпентоксід, двоазотпятиокис,
N_2O_4 — діазоттетроксід, двоазотчотироокис,
N_2O_3 — діазоттріоксід, двоазоттроокис,
NO — азотмоноксід, азотодноокис,
N_2O — діазотмоноксід, двоазотоднокис.

В термінольоґії, пропонованій Київською Комісією, одержить N_2O_5 назву оксід (V) азоту себто оксід пятивалєнтного азоту.

В „Орґанічній Хемії“ проф. Горбачевського находимо на H_2S, CS_2, AsH_3 назви: сірководень, сірковуголь і арсеноводень. Після київського проєкту сі сполуки одержать мабуть назви: сульфід водня, сульфід вугля і арсенід водня. Ці назви треба приняти як головні, а другі випроваджувати поволи з ужиття.

Отвертим лишається питання, чи такі сполуки, як N_3H, N_2H_4, PH_3 називати дальше інтернаціональними термінами, досі уживаними, як азоімід, гідразін, фосфін, чи перетворювати їх відповідно до основ, принятих Комісією. Мені здається, що краще лишити назви азоімід, гідразін і фосфін.

Розчин хльоріду водня (*HCl*) у воді називають загально сільною кислотою; сю назву треба буде задержати з педаґоґічних причин.

Соли кисневих кислот. Для утворення аніонів кисневих кислот Комісія вживає дві приставки „гіпо“ та „пер“ та два закінчення „іт“ та „ат“, щоби зазначити ріжну валєнтність центрального атому аніону. При найнижчому ступені окислення центрального атому вживає приставки „гіпо“ та закінчення „іт“, при наступному ступені окислення закінчення „іт“ без приставки, далі закінчення „ат“ без приставки і вкінці приставку „пер“ та закінчення „ат“. Н. пр. для кисневих аніонів кислот хльору одержуємо назви:

ClO' гіпохльоріт,
ClO'_2 хльоріт,
ClO'_3 хльорат,
ClO'_4 перхльорат.

Якщо є тільки два ступені окислення, Комісія не впроваджує приставок н. пр. для кислот азоту і сірки:

NO'_2 нітріт, SO''_3 сульфіт,
NO'_3 нітрат, SO''_4 сульфат.

Після того одержуємо такі назви: $NaClO$ гіпохльоріт натрія, $KMnO_4$ перманґанат калія, $CuSO_4$ сульфат міди, $Fe(NO_3)_3$ нітрат трохвалєнтного заліза, K_3AsO_3 арсеніт калія.

Для солей кислот, утворених з того самого ангідріду з ріжною кількістю води, Комісія пропонує приставки „орто“, „мета“ та „піро“, які вже і давнійше уживано, отже Na_2SiO_4 ортосилікат натрія, KBO_2 метаборат калія, $Na_4P_2O_7$ пірофосфат натрія, а для солей складних кислот зазначує кількість молєкулів ангідріду грецькими числівниками, н. пр. $R_2B_4O_7$ тетраборат, $R_4Si_3O_8$ трісилікат, $R_2Wo_8O_{25}$ октовольфрамат.

Аніони кислот, що в їх молєкулі замінено атоми кисня[1]) на атоми сірки, одержують приставку „тіо“, н. пр. $Na_2S_2O_3$ тіосульфат натрія, $(NH_4)_3AsS_3$ тіоарсеніт амонія.

Приставка „гідро“ призначена до зазначення присутности атомів водня у аніоні, н. пр. $NaHSO_4$ гідросульфат натрія, $Ca(H_2PO_4)_3$ дігідрофосфат кальція, $NaOH$ гідроксід натрія, KSH гідросульфід калія.

Назви основних солей дістають приставку „гідроксі“ або „оксі“ залежно від того, чи в молєкулі є „гідроксіль“ OH чи лише атоми кисня, н. пр. $CrOH(SO_4)_2$ гідроксісульфат хрому, $BiOCl$ оксіхльорід візмуту[2]).

Ті всі терміни є дуже влучно утворені. Але все таки не обійдеться у нижчих школах без деяких народніх термінів, як н. пр. салітра (нітрат калія і натрія).

Кислоти та їх ангідріди. Ідучи за проф. Горбачевським, Комісія впровадила для кислот терміни, що складаються з назв їхніх аніонів з долученням закінчення „ова“ та слова „кислота“ н. пр. H_2SO_4 сульфатова кислота, $HMnO_4$ перманґанатова кислота, $HClO$ гіпохльорітова кислота, HNO_2 нітрітова кислота. Відси можна випровадити легко назви ангідрідів: Cl_2O гіпохльорітовий ангідрід, N_2O_5 нітратовий ангідрід, SO_2 сульфітовий ангідрід, Mn_2O_7 перманґанатовий ангідрід.

Також деякі кисневі кислоти мають у практичнім житті назви, які необхідно буде уживати в школі попри міжнародні, н. пр. сульфатова кислота (H_2SO_4) — сірчана (сіркова), карбонатова (H_2CO_3) — вугляна (вуглева), нітратова (HNO_3) — азотова (салітрова).

Подвійні соли. Назви їх творить Комісія, сполучаючи два катіони їх словом „та“, н. пр. $(NH_4)_2Fe(SO_4)_2$ сульфат двохвалєнтного заліза та амонія, $NaNH_4HPO_4$ гідрофосфат натрія та амонія. Якщо подвійна сіль має два аніони, то сполучається обидва аніони в одно слово, н. пр. $MgClBr$ хльоробромід маґнезія.

[1]) В звіті київської Комісії уживається форма „кисеню“.

[2]) Київська Комісія уживає назви „бісмут“, проф. Горбачевський „візмут“

Для комплєксних сполук впровадила Комісія назви Вернера, що спеціяльно займався ними тай утворив для них послідовну термінольоґію. На ті всі терміни можна згодитися без ніяких застережень.

Крім справи самої хемічної номенклятури необхідно ще порішити справу загальних термінів. Згідно з проф. Семенцовим[1]) можемо прийняти терміни: матерія, субстанція, валєнтність замість вартісність, альотропія, ізотопи, ізомерія, атом, молєкул (чи молєкула), елємент. Крім останньої назви маємо також українську назву „первень“, що має вже за собою „традицію“ і є признана проф. Горбачевським. Сю назву можемо задержати як побічну.

Що до инших назв, то Секція рішається на терміни: „кислота“ замість „квас“ (Säure), „основа“ замість „засада“ (Base), „хемічна сполука“ замість „сполучення“ або „злука“.

Природні громади первнів найкраще називати за проф. Горбачевським[2]): гальоґени або гальові первні, металі алькаліїв, металі алькалічних земель, металі рідких земель. Инші громади треба би називати іменем першого елємнту відносної громади н. пр. громада кисня, азоту, вугля. Впрочім можна би взяти під увагу валєнтність і називати: громада одно-, дво-, три- і чотировалєнтних метальоідів і металів.

Термінами орґанічної хемії Київська Комісія не займалася. Одначе ту стоїть справа куди краще тому, що можна творити міжнародні терміни на основі принціпів, установлених міжнародньою хемічною Комісією, що зібралася була в Женеві 1892. р., та впровадити їх прямо в українську хемічну термінольоґію[3]).

Проф. Горбачевський виконав кольосальну підготовну працю і зібрав у своїй „Орґанічній Хемії“ назви, які можна буде прийняти майже без дискусії. Виїмком могли би бути лише назви, взяті з практичного життя, для яких подекуда буде необхідна рада фільольоґів. Стрічаємо там такі влучні терміни, як подвійні вязання, скуплення (н. пр. нітрозоскуплення $N = O$, азове скуплення $N = N$, алькілеве скуплення CH_3, C_2H_5 і т. д.), мочовина (карбанід), але є і назви „односитні і більшеситні алькоголі

[1]) А. Семенцов. Уваги до укр. хем. термінольоґії.

[2]) Укр. Мед. Вістник. Прага 1923. ч. 1. стр. 9.

[3]) Гл. Горбачевський. Орґанічна Хемія. Прага 1924.

(кислоти)“ попри „одно- більше вартісні“, „алькоголічне квашення“, „масні“ кислоти, над якими необхідно застановитися. Що до першої, найлутше було би уживати назви „одно- і більше валєнтні алькоголі та одно- і більше основні кислоти“. Слово „квашення“ радив би я заступити назвою „ферментація“. Проф. Горбачевський уживає алькоголічне, оцтове квашення. Хоч ся назва незла, одначе має ту хибу, що вона повинна виражувати неперехідну чинність, а вона виражає фактично перехідну, н. пр. говориться про квашення огірків, капусти. Таксамо неясним є для мене, чому має бути „масні“ кислоти, а не „товсті“, коли вони мають звязь з товщами; подібно „масний“ ряд, а не „товщевий“.

Також можна би ще дебатувати над закінченням прикметників, утворених від назв орґанічних сполук. Проф. Горбачевський уживає послідовно „бензольовий“, „фенольовий“, „алькільовий“ і в звязи з тим „вуглюводні“. Я заявивсяб за закінченням „евий“; отже „бензолевий“, „фенолевий“, „алькілевий“ і в звязи з тим „вуглеводні.

Інші назви, що не належать до номенклятури, можна буде устійнити на основі „Словника“ О. Курило. Там находимо цілий ряд назв, на які легко всі погодяться н. пр. сполукова одиниця, подвійне заміщення (субституція), полива, пальник, дмухало, поволока, проціджувати (фільтрувати) і т. д., але є і назви, над якими необхідна дискусія. Н. пр. годі уживати назви „вага“ у двох значіннях: німецьке Gewicht і Wage. Треба рішитися на дві окремі назви. В Галичині уживають тягар на означення нім. терміну „Gewicht“, а вага це прилад до важення (Wage). Після того є атомовий, питомий, сполуковий тягар, тягарове відношення.

Свої уваги кінчу побажанням, щоби Хемічний Відділ Київського Товариства Природознавців засягнув опінії Академії Наук та других українських наукових установ в сій важній справі, стежив пильно за її розвитком як ініціятор її та допровадив як найшвидше до всеукраїнського хемічного з'їзду, де вирішено би її остаточно.