ЗБІРНИК

МАТЕМАТИЧНО-ПРИРОДОПИСНО-ЛІКАРСЬКОЇ СЕКЦІЇ

Наукового Товариства імени Шевченка.

ТОМ XXXI.

РЕДАГУЄ

ПРЕЗІДІЯ СЕКЦІЇ.

SAMMELSCHRIFT

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LWIW (LEMBERG)

BAND XXXI.

REDIGIERT VOM

PRÄSIDIUM DER SEKTION.

У ЛЬВОВІ 1937.

Накладом Наукового Товариства імени Шевченка.

З друкарні Наукового Товариства імени Шевченка.

ЗМІСТ — INHALT.

Стор.

1. M. K. Kurenśkyj (Kourensky): Die Grundformeln zur Integration der Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. u. 2. Ordnung mit mehreren abhängigen und unabhängigen Variablen (dritter Teil). . . 1—40
2. М. Зарицький: Сучинники кореляції в теорії математичної статистики.
(M. Zarycki: Über die Korrelationskoëffizienten in der Theorie der mathematischen Statistik). 41—50
3. З. Храпливий: Основні поняття електродинаміки а унітарна теорія поля.
(Z. Chraplyvyj: Die Grundbegriffe der Elektrodynamik und die unitare Feldtheorie). . . 51—56
4. О. Монцібович: Елементи зорі SU Cygni.
(A. Moncibovyč: Die Elemente des Sternes SU Cygni). . . 57—60
5. J. Bohačevśkyj: Transformation der Laplace'schen Differentialgleichung im n-Dimensionalen auf generelle Koordinaten. 61—67
6. О. Стасів: Механізм переносу електричности в непровідниках.
(O. Stasiv: Mechanismus des Elektrizitätstransportes in Nichtleitern). . . . 68—79
7. Ю. Богачевський: Формалізм та інтуіціонізм у математиці.
(J. Bohačevśkyj: Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik). . . . 80—98
8. Р. Цегельський: Фізикальні проблеми останньої доби.
(R. Cehelśkyj: Physikalische Probleme der neuesten Zeit). 99—123
9. В. Левицький: Евольвента цисоїди.
(W. Levyćkyj: Evolvente einer Cissoide). . 125—126

Errata.

Die Grundformeln zur Integration der Gleichungen mit partiellen Ableitungen I. und 2. Ordnung mit mehreren abhängigen und unabhängigen Variablen.

Dritter Teil[1]).

von **M. K. Kurenškyj (Kourensky).**

XIII. In folgenden 4 Abschnitten XIII-XVI wurden ausführliche Formeln der vom Verfasser verallgemeinerten Jacobi'schen Integrationsmethode von nichtlinearen Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. Ordnung mit 2 unbekannten Funktionen von 3 und 4 Argumenten, sowie auch mit 3 unbekannten Funktionen von 2 und 3 Argumenten vorgeführt; die Aufgabe reduziert sich zur Integration eines Systemes von linearen Gleichungen mit nur einer unbekannten Funktion. Das erlaubt uns ohne prinzipielle Schwierigkeiten entsprechende Formeln in Falle von 3 und mehr unbekannten Funktionen mit 4 oder mehr Argumenten zu bekommen und die Konstruktion dieser Formeln kennen zu lernen. Wir bemerken dazu, dass der schwierigste von den Anwendungen der Theorie zur Lösung der Aufgaben z. B. der Differentialgeometrie und dazu auch der am meisten komplizierte Fall, welcher in dieser Geometrie vorkommt, der Fall der Gleichungen 1. Ordnung von 3 unbekannten Funktionen

---

[1]) Vgl. die Arbeiten des Verfassers in den Sitzungsberichten der math.-naturw.-ärztl. Sektion, Heft XI, 1929 (die Druckfehler: Heft XII, 1930), wo der Verfasser den I. Theil der Arbeit „Die Grundformeln...", und den Sitzungsberichten..., Heft XVIII, 1933, wo derselbe den II. Teil behandelt. Im II. Teile wurde auch die entsprechende Literatur zu den beiden Teilen angeführt.

Im vorliegenden III. Teil wurden die Formeln, welche sich auf die Arbeiten der Verfassers in folgenden Zeitschriften und besonderen Ausgaben: Bulletin de l'Académie de Belgique, XIX, 5, 7, 1933; XX, 7, 11, 1934; XXI, 12, 1935; XXII, 2, 1936; 1937 (sous presse); Comptes Rendus (Doklady) de l'Acad. des Sc. de l'URSS, X, 6, 1936; XIV, 4, 1937; Communications de la Soc. Math. de Kharkow, t. VI, 1933; t. XII, 1934; Verhandlungen des Intern. Math. Kongress, Zürich, Bd. II, 1932; M. Kourensky - Equations différentielles, livre 2, Ch. IX, § 77; Ch. X, §§ 78 - 90 (en russe) beziehen, zusammengestellt In diesen Arbeiten finden sich auch einige geometrische Anwendungen; dieselben wurden in allen Teilen von „den Grundformeln..." fortgelassen.

Weitere Teile (IV - V) erscheinen demnächts in folgenden Bänden der Sammelschrift der Ševčenko - Gesellschaft.

mit 3 unabhängigen Variablen ist. Im vorletzten XVII Abschnitt wurde die Verallgemeimerung der Charpit-Lagrange'schen Integrationsmethode der nichtlinearen Gleichungen, und im letzten XVIII Abschnitt zwei neue Integrationsmethoden der linearen Gleichungen von n unbekannten Funktionen mit m unabhängigen Variablen dargestellt. Die ganze Theorie des dritten Teiles wurde auf 5 Beispielen erläutert.

Im Falle der Integration eines Systems von 3 unabhängigen Gleichungen mit 3 Funktionen z, z', z'' von 2 unabhängigen Variablen x, y,

$$F_i\,(x, y, z, z', z'', p, q, p', q', p'', q'') = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

führt das Adiungeren einer neuen Gleichung

$$\Phi\,(x, y, z, z', z'', p, q, p', q', p'', q'') = 0 \tag{2}$$

zu den Involutionsbedingungen der Nullgleichheit aller Determinanten 8 Ordnung der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix}
\frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial\Phi}{\partial p} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p''} & \frac{\partial\Phi}{\partial q} & \frac{\partial\Phi}{\partial q'} & \frac{\partial\Phi}{\partial q''} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{dF_1}{dx} & \frac{\partial F_1}{\partial p} & \frac{\partial F_1}{\partial p'} & \frac{\partial F_1}{\partial p''} & \frac{\partial F_1}{\partial q} & \frac{\partial F_1}{\partial q'} & \frac{\partial F_1}{\partial q''} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{dF_2}{dx} & \frac{\partial F_2}{\partial p} & \frac{\partial F_2}{\partial p'} & \frac{\partial F_2}{\partial p''} & \frac{\partial F_2}{\partial q} & \frac{\partial F_2}{\partial q'} & \frac{\partial F_2}{\partial q''} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{dF_3}{dx} & \frac{\partial F_3}{\partial p} & \frac{\partial F_3}{\partial p'} & \frac{\partial F_3}{\partial p''} & \frac{\partial F_3}{\partial q} & \frac{\partial F_3}{\partial q'} & \frac{\partial F_3}{\partial q''} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{dF_1}{dy} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial p} & \frac{\partial F_1}{\partial p'} & \frac{\partial F_1}{\partial p''} & \frac{\partial F_1}{\partial q} & \frac{\partial F_1}{\partial q'} & \frac{\partial F_1}{\partial q''} \\
\frac{dF_2}{dy} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_2}{\partial p} & \frac{\partial F_2}{\partial p'} & \frac{\partial F_2}{\partial p''} & \frac{\partial F_2}{\partial q} & \frac{\partial F_2}{\partial q'} & \frac{\partial F_2}{\partial q''} \\
\frac{dF_3}{dy} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial p} & \frac{\partial F_3}{\partial p'} & \frac{\partial F_3}{\partial p''} & \frac{\partial F_3}{\partial q} & \frac{\partial F_3}{\partial q'} & \frac{\partial F_3}{\partial q''} \\
\frac{d\Phi}{dy} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p''} & \frac{\partial\Phi}{\partial q} & \frac{\partial\Phi}{\partial q'} & \frac{\partial\Phi}{\partial q''}
\end{matrix} \right\|$$

wobei:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad p' = \frac{\partial z'}{\partial x}, \quad p'' = \frac{\partial z''}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad q' = \frac{\partial z'}{\partial y}, \quad q'' = \frac{\partial z''}{\partial y}.$$

Wir nehmen an, dass die in der Matrix umgerandete Determinante 7. Ordnung von Null verschieden ist. Das gibt:

$$D\left(\frac{F_1, F_2, F_3}{p, p', p''}\right) \neq 0; \quad D\left(\frac{F_1, F_2, F_3, \Phi}{p, p', p'', q}\right) \neq 0,$$

und wir bekommen die Involutionsbedingungen eines Systemes der Gleichungen (1), (2) in der Gestalt von 3 nichtlinearen Gleichungen 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion Φ:

$$(p'p''qq'')(pp'p''q) + (pp''q'q)(pp'p''q') + (pp'qq')(pp'p''q'') = 0$$

$$(p'p''qq'')(pp'p''q) + (pp''q''q)(pp'p''q') + (pp'qq'')(pp'p''q'') = 0$$

$$\begin{aligned} &(pp'p''q)[xpp'p''] + (pp'p''q)[yp'p''q] + \\ &\quad + (pp'p''q')[ypqp''] + (pp'p''q'')[ypp'q] = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

wo runde Klammern die Jacobi'schen Determinanten von F_1, F_2, F_3, Φ im Bezug auf die Variablen, die in Klammern stehen, und gerade Klammern die Jacobi'schen Determinanten mit totalen Ableitungen im Bezug auf Variablen x, y bedeuten.

Das Bestimmen von partiellen Integralen $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \ldots$ des Systems der nichtlinearen Gleichungen (3) reduziert sich zur Bestimmung der partiellen Integrale der linearen Gleichungen 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion Φ mit folgenden Formeln.

Indem wir bezeichnen:

$$\frac{(pp'p''q')}{(pp'p''q)} = \lambda; \qquad \frac{(pp'p''q'')}{(pp'p''q)} = \mu$$

$$P = (pp'p''); \; P_1 = (qp'p''); \; P_2 = (q'p'p''); \; P_3 = (q''p'p''); \; P_4 = (pqp'')$$

$$P_5 = (pq'p''); \; P_6 = (pq''p''); \; P_7 = (pp'q); \; P_8 = (pp'q'); \; P_9 = (pp'q'')$$

$$Q = (qq'q''); \; Q_1 = (pq'q''); \; Q_2 = (p'q'q''); \; Q_3 = (p''q'q'') \; Q_4 = (qpq'')$$

$$Q_5 = (qp'q''); \; Q_6 = (qp''q''); \; Q_7 = (qq'p); \; Q_8 = (qq'p'); \; Q_9 = (qq'p''),$$

und folgende Identitäten

$$PQ_1 = \begin{vmatrix} P_5 & P_6 \\ P_8 & P_9 \end{vmatrix}; \quad PQ_2 = \begin{vmatrix} P_3 & P_9 \\ P_2 & P_8 \end{vmatrix}; \quad PQ_3 = \begin{vmatrix} P_2 & P_5 \\ P_3 & P_6 \end{vmatrix}$$

$$PQ_4 = \begin{vmatrix} P_6 & P_9 \\ P_4 & P_7 \end{vmatrix}; \quad PQ_5 = \begin{vmatrix} P_1 & P_3 \\ P_7 & P_9 \end{vmatrix}; \quad PQ_6 = \begin{vmatrix} P_3 & P_1 \\ P_6 & P_4 \end{vmatrix}$$

$$PQ_7 = \begin{vmatrix} P_4 & P_5 \\ P_7 & P_8 \end{vmatrix}; \quad PQ_8 = \begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ P_8 & P_7 \end{vmatrix}; \quad PQ_9 = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_4 & P_5 \end{vmatrix}$$

$$QP_1 = \begin{vmatrix} Q_5 & Q_6 \\ Q_8 & Q_9 \end{vmatrix}; \quad QP_2 = \begin{vmatrix} Q_3 & Q_9 \\ Q_2 & Q_8 \end{vmatrix}; \quad QP_3 = \begin{vmatrix} Q_2 & Q_5 \\ Q_3 & Q_6 \end{vmatrix},$$

in Betracht nehmen, bekommen wir eine kubische Gleichung zur Bestimmung der Funktion $\lambda\,(x, y, z, z', z'', p, p', \ldots)$:

$$\begin{vmatrix} P_4 & P_7 \\ Q_4 & Q_7 \end{vmatrix} \lambda^3 + \left(\begin{vmatrix} P_1 & P_7 \\ Q_1 & Q_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_7 & P_5 \\ Q_7 & Q_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_8 & P_4 \\ Q_8 & Q_4 \end{vmatrix} \right) \lambda^2 + \tag{4}$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} P_5 & P_8 \\ Q_5 & Q_8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_7 & P_2 \\ Q_7 & Q_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_8 & P_1 \\ Q_8 & Q_1 \end{vmatrix} \right) \lambda + \begin{vmatrix} P_2 & P_8 \\ Q_2 & Q_8 \end{vmatrix} = 0,$$

sowie auch eine lineare algebraische Gleichung zur Bestimmung der Funktion $\mu\,(x, y, z, z', z'', p, p', \ldots)$:

$$\mu = \frac{P\lambda^2 + (P_1 - P_5)\,\lambda - P_2}{P_8 - P_7\,\lambda}, \tag{5}$$

und das System der nichtlinearen Gleichungen (3) geht in ein System von 3 linearen Gleichungen

$$P\frac{\partial\Phi}{\partial q'} = (P_2 - \lambda_i P_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p} + (P_5 - \lambda_i P_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (P_8 - \lambda_i P_7)\frac{\partial\Phi}{\partial p''} + \lambda_i P\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$

$$P\frac{\partial\Phi}{\partial q''} = (P_3 - \mu_i P_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p} + (P_6 - \mu_i P_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (P_9 - \mu_i P_7)\frac{\partial\Phi}{\partial p''} + \mu_i P\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$

$$P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}p + \frac{\partial\Phi}{\partial z'}p' + \frac{\partial\Phi}{\partial z''}p''\right) + (P_1 + \lambda_i P_4 + \mu_i P_7)\times \tag{6}$$

$$\times\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}q + \frac{\partial\Phi}{\partial z'}q' + \frac{\partial\Phi}{\partial z''}q''\right) = ([xp'p''] + \lambda_i[yqp''] + \mu_i[yp'q])\frac{\partial\Phi}{\partial p} +$$

$$+ ([xp''p] + [yp''q] + \mu_i[yqp])\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + ([xpp'] + \lambda_i[ypq] + [ypq'])\frac{\partial\Phi}{\partial p''} +$$

$$+ ([yp'p''] + \lambda_i[yp''p] + \mu_i[ypp'])\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$

über, wo λ_i eine Lösung der Gleichung (4) und μ_i ein entsprechender Wert der Funktion μ im Bezug auf λ_i auf Grund der Formel (5) bedeutet.

Wenn wir 2 Integrale $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$, die in der Involution unter einander und mit der Gleichung $F_i = 0$ stehen, bestimmen, dann führt die Elimination der Variablen z'', p'', q'', zur Integration eines Gleichungsystems mit 2 unbekannten Funktionen z, z' von der Form

$$f_1\,(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0; \qquad f_2\,(x, y, z, z', p, q, p'\, q') = 0,$$

auf Grund der Formeln in den Abschnitten III-IV des I. Teiles. Finden wir 3 ähnliche Integrale $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$, $\Phi_3 = C_3$, dann bekommen wir unbekannte Funktionen z, z', z'' mittelst der Quadraturen von Gleichheiten:

$$dz = p\,dx + q\,dy; \quad dz' = p'\,dx + q'\,dy; \quad dz'' = p''\,dx + q''\,dy.$$

XIV. Die Formeln werden bedeutend einfacher für diese speziellen Fälle der Systeme (1), wo die Gleichungen nur 5, 4, 3, 2 oder 1 von allen 6 Ableitungen p, q, p', q', p'', q'' enthalten.

Enthalten gegebene Gleichungen eine Ableitung

$$1)\ q''; \quad 2)\ p''; \quad 3)\ q'; \quad 4)\ p'; \quad 5)\ q; \quad 6)\ p,$$

nicht, dann haben lineare Gleichungen 1. Ordnung mit der unbekannten Funktion Φ und algebraische Gleichungen zur Bestimmung der Funktion λ die Gestalt:

$$1)\quad P\frac{\partial\Phi}{\partial q'} = (P_2 - \lambda_1 P_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p} + (P_5 - \lambda_1 P_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (P_8 - \lambda_1 P_7)\frac{\partial\Phi}{\partial p''} + \lambda_1 P\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$

$$F\frac{d\Phi}{dy} + (P_1 + \lambda_1 P_4)\frac{d\Phi}{dy} = ([xp'p''] + \lambda_1[yqp''])\frac{\partial\Phi}{\partial p} +$$

$$+ ([xp''p] + [yp''q])\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + ([xpp'] + [yqp''] + \lambda_1[ypq])\frac{\partial\Phi}{\partial p''} +$$

$$+ ([yp'p''] + \lambda_1[ypp''])\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$

$$P_4\lambda^2 + (P_1 - P_5)\lambda - P_2 = 0;$$

$$2)\quad Q\frac{\partial\Phi}{\partial p'} = (Q_2 - \lambda_1 P_1)\frac{\partial\Phi}{\partial q} + (Q_5 - \lambda_1 Q_4)\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + (Q_8 - \lambda_1 Q_7)\frac{\partial\Phi}{\partial q''} + \lambda_1 Q\frac{\partial\Phi}{\partial p}$$

$$P\frac{d\Phi}{dx} + (Q_5 - \lambda_1 Q_4)\frac{d\Phi}{dy} = ([xp'q''] - \lambda_1[yq''q])\frac{\partial\Phi}{\partial p} +$$

$$+ ([xq''p] + [yq''q)]\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + ([xpp'] + [yqp'] + \lambda_1[ypq])\frac{\partial\Phi}{\partial q''} +$$

$$+ ([yp'q''] + [yq''p])\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$

$$Q_4\lambda^2 + (Q_1 - Q_5)\lambda - Q_2 = 0;$$

$$3)\quad P\frac{\partial\Phi}{\partial q''} = (P_3 - \lambda_1 P_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p} + (P_6 - \lambda_1 P_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + (P_9 - \lambda_1 P_7)\frac{\partial\Phi}{\partial p''} + \lambda_1 P\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$

$$P\frac{d\Phi}{dx}+(P_1+\lambda_i P_7)\frac{d\Phi}{dy}=([xp'p'']+\lambda_i[yp'q])\frac{\partial\Phi}{\partial p}+$$

$$+([xpp']+[yqp'])\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+([yp'p'']+\lambda_i[ypp'])\frac{\partial\Phi}{\partial q}+$$

$$+([xp''p]+[yp''q]+\lambda_i[yqp])\frac{\partial\Phi}{\partial p'},$$

$$P_7\lambda^2+(P_1-P_9)\lambda-P_3=0;$$

4) Buchstaben p und P wechseln mit q und Q unter einander und umgekehrt.

5) $$P\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=(F_3-\lambda_i F_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(P_6-\lambda_i P_5)\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(P_9-\lambda_i P_8)\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+\lambda_i P\frac{\partial\Phi}{\partial q'}$$

$$P\frac{d\Phi}{dx}+(P_5+\lambda_i P_8)\frac{d\Phi}{dy}=([xp'p'']+[yq'p'']+\lambda_i[yp'q'])\frac{\partial\Phi}{\partial p}+$$

$$+([xp''p]+[yq'p])\frac{\partial\Phi}{\partial p'}++([xpp']+[ypq'])\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+$$

$$+([yp''p]+\lambda_i[ypp'])\frac{\partial\Phi}{\partial q'}$$

$$P_8\lambda^2+(P_5-P_9)\lambda-P_6=0;$$

6) Buchstaben p und P wechseln mit q und Q unter einander und umgekehrt.

Im Falle von 1), 2),... 6) muss man partielle Integrale $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2$,... die entsprechend die Variablen 1) q'', 2) p'',... 6) nicht enthalten, zu finden trachten.

Enthalten 3 Gleichungen keine 2 Ableitungen, dann bekommen wir 15 Fälle. Falls in den Gleichungen Ableitungen

1) p'', q''; 2) p', q'; 3) p, q

nicht vorkommen, dann führen sie zur Integration eines Systems von 2 Gleichungen 1. Ordnung mit zwei unbekannten Funktionen, falls wir entsprechend: 1) z''; 2) z'; 3) z eliminieren.

Andere 12 Fälle, d. h. wenn die Gleichungen die Ableitungen

4) q', q''; 5) p', q''; 6) q, q''; 7) p, q''; 8) q', p''; 9) p', p''
10) q, p''; 11) p, p''; 12) q, q'; 13) p, q'; 14) q, p'; 15) p, p',

nicht enthalten, führen zur Bestimmung von partiellen Integralen $\Phi_1=C_1$... welche entsprechende Abteilungen 4),... 15), nicht enthalten, irgend einer linearen Gleichung erster Ordnung (oder anders — Integralen eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen), von der Gestalt:

$$4)\ P\frac{\partial\Phi}{\partial q} = P_1\frac{\partial\Phi}{\partial p} + P_4\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + P_7\frac{\partial\Phi}{\partial p''}$$

$$5)\ Q_9\frac{\partial\Phi}{\partial p} + P_4\frac{\partial\Phi}{\partial q'} = Q_7\frac{\partial\Phi}{\partial p''} + P_5\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$

$$6)\ P\frac{\partial\Phi}{\partial q'} = P_2\frac{\partial\Phi}{\partial p} + P_5\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + P_8\frac{\partial\Phi}{\partial p''}$$

$$7)\ P_1\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + Q_8\frac{\partial\Phi}{\partial p''} = P_2\frac{\partial\Phi}{\partial q} + Q_9\frac{\partial\Phi}{\partial p'}$$

$$8)\ P_7\frac{\partial\Phi}{\partial q''} + P_5\frac{\partial\Phi}{\partial p} = P_9\frac{\partial\Phi}{\partial q} + Q_5\frac{\partial\Phi}{\partial p'}$$

$$9)\ Q\frac{\partial\Phi}{\partial p} = Q_1\frac{\partial\Phi}{\partial q} + Q_4\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + Q_7\frac{\partial\Phi}{\partial q''}$$

$$10)\ Q_2\frac{\partial\Phi}{\partial p} + P_9\frac{\partial\Phi}{\partial q'} = Q_1\frac{\partial\Phi}{\partial q''} + P_8\frac{\partial\Phi}{\partial q''}$$

$$11)\ Q\frac{\partial\Phi}{\partial p'} = Q_2\frac{\partial\Phi}{\partial q} + Q_5\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + Q_8\frac{\partial\Phi}{\partial q''}$$

$$12)\ P\frac{\partial\Phi}{\partial q''} = P_3\frac{\partial\Phi}{\partial p} + P_6\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + P_9\frac{\partial\Phi}{\partial p''}$$

$$13)\ Q_6\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + P_1\frac{\partial\Phi}{\partial q''} = Q_5\frac{\partial\Phi}{\partial p''} + P_3\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$

$$14)\ Q_3\frac{\partial\Phi}{\partial p} + P_5\frac{\partial\Phi}{\partial q''} = Q_1\frac{\partial\Phi}{\partial p''} + P_6\frac{\partial\Phi}{\partial q'}$$

$$15)\ Q\frac{\partial\Phi}{\partial p''} = Q_3\frac{\partial\Phi}{\partial q} + Q_6\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + Q_9\frac{\partial\Phi}{\partial q''},$$

oder einer linearen Gleichung entsprechend folgender Gestalt:

$$4)\ P\frac{d\Phi}{dx} + P_1\frac{d\Phi}{dy} + [xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p} + ([xpp''] + [yqp''])\frac{\partial\Phi}{\partial p'} +$$
$$+ [yp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial q} + [(xp'p] + [yp'q])\frac{\partial\Phi}{\partial p''} = 0$$

$$5)\ P_5\frac{d\Phi}{dx} + Q_9\frac{d\Phi}{dy} + [xp''q']\frac{\partial\Phi}{\partial p} + ([xpp''] + [yqp''])\frac{\partial\Phi}{\partial q'} +$$
$$+ [yp''q']\frac{\partial\Phi}{\partial q} + ([xq'p] + [yq'q])\frac{\partial\Phi}{\partial p''} = 0$$

$$6)\ P\frac{d\Phi}{dx} + P_5\frac{d\Phi}{dy} + [xpp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + ([xp''p'] + [yq'p''])\frac{\partial\Phi}{\partial p} +$$

$$+ [yp''q]\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + ([xp'p] + [ypq'])\frac{\partial\Phi}{\partial p''} = 0$$

$$7)\ P_1\frac{d\Phi}{dy} + Q_9\frac{d\Phi}{dy} + [xqp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + ([xp'q] + [yq'q])\frac{\partial\Phi}{\partial p''} +$$

$$+ [yqp'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + ([xp''p'] + [yp''q'])\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0$$

$$8)\ P_9\frac{d\Phi}{dx} + Q_5\frac{d\Phi}{dy} + [xq''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p} + ([xpq''] + [yqq''])\frac{\partial\Phi}{\partial p'} +$$

$$+ [yq''p']\frac{\partial\Phi}{\partial q} + ([xp'p] + [yp'q])\frac{\partial\Phi}{\partial q''} = 0$$

$$9)\ Q_1\frac{d\Phi}{dx} + Q\frac{d\Phi}{dy} + [xq''q']\frac{\partial\Phi}{\partial p} + ([xpq''] + [yqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'} +$$

$$+ [yq''q']\frac{\partial\Phi}{\partial q} + ([xq'p] + [yq'q])\frac{\partial\Phi}{\partial q''} = 0$$

$$10)\ P_9\frac{d\Phi}{dx} + Q_1\frac{d\Phi}{dy} + [xpq'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + ([xq''p'] + [yq''q'])\frac{\partial\Phi}{\partial p} +$$

$$+ [ypq'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + ([xp'p] + [yq'q])\frac{\partial\Phi}{\partial q''} = 0$$

$$11)\ Q_5\frac{d\Phi}{dx} + Q\frac{d\Phi}{dy} + [xqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + ([xq''p'] + [yq''q'])\frac{\partial\Phi}{\partial q} +$$

$$+ [yqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + ([xp'q] + [yq'q])\frac{\partial\Phi}{\partial q''} = 0$$

$$12)\ P\frac{d\Phi}{dx} + P_9\frac{d\Phi}{dy} + [xpp']\frac{\partial\Phi}{\partial p''} + ([xp''p'] + [yq''p'])\frac{\partial\Phi}{\partial p} +$$

$$+ [yp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial q''} + ([xpp''] + [ypq''])\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + 0$$

$$13)\ P_1\frac{d\Phi}{dx} + Q_5\frac{d\Phi}{dy} + [xp'q]\frac{\partial\Phi}{\partial p''} + ([xqp''] + [yqq''])\frac{\partial\Phi}{\partial q'} +$$

$$+ [yp'q]\frac{\partial\Phi}{\partial q''} + ([xp''p'] + [yq''p'])\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0$$

$$14)\ P_5\frac{d\Phi}{dx}+Q_1\frac{d\Phi}{dy}+[xq'p]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+([xp''q']+[yq''q'])\frac{\partial\Phi}{\partial p}+$$

$$+[yq'p]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+([xpp'']+[ypq''])\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=0$$

$$15)\ Q_9\frac{d\Phi}{dx}+Q\frac{d\Phi}{dy}+[xq'q]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+([xp''q']+[yq''q'])\frac{\partial\Phi}{\partial q}+$$

$$+[yq'q]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+([xqp'']+[yqq''])\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=0.$$

Enthält das System 3 Ableitungen, dann gelangen wir in 12 Fällen zur Elimination der Funktion z, oder z', oder z'' und zur Integrationen eines Systems von zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Funktionen. Die übrigen 8 Fälle sind diejenigen, wo das System folgende Ableitungen:

1) q, q', q''; 2) p, q', q''; 3) q, p', q''; 4) p, p', q''

5) q, q', p''; 6) p, q', q''; 7) q, p', p''; 8) p, p', p''

nicht enthält.

Im Falle 1) muss man partielle Integrale, die q, aber nicht q', q'' enthalten, von der folgenden linearen Gleichung:

$$1)\ P\frac{d\Phi}{dx}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[xpp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[xp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[yp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0,$$

oder Integrale, die q', aber q, q'', nicht enthalten, von der linearen Gleichung

$$P\frac{d\Phi}{dx}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[xpp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[xp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[ypp'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=0,$$

oder endlich Integrale mit q'', aber ohne q, q' von der Gleichung

$$P\frac{d\Phi}{dx}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[xpp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[xp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[yp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=0$$

bestimmen.

Für andere 7 Fälle haben die Gleichungen folgende Form:

$$2)\ P_1\frac{d\Phi}{dy}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[yqp']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[yp'q]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[yp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0$$

$$P_1\frac{d\Phi}{dx}+[yqp'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+[xqp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[xp'q]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[xp''p]\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0$$

$$P_1\frac{d\Phi}{dx}+[yp'q]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+[xqp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[xp'q]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0$$

3) $$P_5 \frac{d\Phi}{dx} + [yq'p] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} + [xq'p] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [xp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [xpq''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$$

$$P_5 \frac{d\Phi}{dx} + [yp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [xp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [xq'p] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [xpp''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$$

$$P_5 \frac{d\Phi}{dy} + [xpp''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [yp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [yq'p] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [ypp''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$$

4) $$P_9 \frac{d\Phi}{dx} + [yq'q] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} + [xq'q] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [xp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [xqp''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$$

$$P_9 \frac{d\Phi}{dy} + [xp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [yq'q] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [yp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [yqp''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$$

$$P_9 \frac{d\Phi}{dy} + [xqp''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [yq'q] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [yp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [yqp''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$$

5) $$P_9 \frac{d\Phi}{dy} + [xp'p] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [yq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [ypq''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [yp'p] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} = 0$$

$$P_9 \frac{d\Phi}{dx} + [yq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [xq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [xpq''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [xp'p] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} = 0$$

$$P_9 \frac{d\Phi}{dx} + [ypq''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} + [xq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [xpq''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [xp'p] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} = 0$$

6) $$Q_5 \frac{d\Phi}{dx} + [yqq''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} + [xqq''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [xq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [xp'q] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} = 0$$

$$Q_5 \frac{d\Phi}{dy} + [xq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [yqp''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [yq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} + [yp'q] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} = 0$$

$$Q_5 \frac{d\Phi}{dy} + [xp'q] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [yqp''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [yq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [yp'q] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} = 0$$

7) $$Q_1 \frac{d\Phi}{dx} + [yq''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [xpq''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} + [xq'p] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} + [xq''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$$

$$Q_1 \frac{d\Phi}{dy} + [xpq''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [ypq''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} + [yq'p] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} + [yq''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$$

$$Q_1 \frac{d\Phi}{dy} + [xq'p] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [ypq''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} + [yqp] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} + [yq''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$$

$$8)\quad Q\frac{d\Phi}{dy}+[yq''q']\frac{\partial\Phi}{\partial q}+[yqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+[yq'q]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+[xq''q']\frac{\partial\Phi}{\partial p}=0$$

$$Q\frac{d\Phi}{dy}+[yq''q']\frac{\partial\Phi}{\partial q}+[yqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+[yq'q]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+[xqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}=0$$

$$Q\frac{d\Phi}{dy}+[yq''q']\frac{\partial\Phi}{\partial q}+[yqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+[yq'q]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+[xq'q]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}=0.$$

Enthält das gegebene System von Gleichungen 2 oder 1 Ableitung, dann führt die Elimination der Ableitungen zu 1 oder 2 Relationen zwischen x, y, z, z', z'', und das führt zu der Aufgabe der Integration von linearen Gleichungen mit einer kleineren Zahl der unbekanten Funktionen.

XV. Für ein System von Gleichungen mit 2 unbekannten Funktionen z, z' mit 3 Argumenten x_1, x_2, x_3,

$$F_i\,(x_1, x_2, x_3, z, z', p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2, p'_3)=0, \quad (i=1,2)$$

wo
$$p_k=\frac{\partial z}{\partial x_k},\quad p'_k=\frac{\partial z'}{\partial x_k},\qquad (k=1,2,3)$$

hat die entsprechende Matrix folgende Gestalt:

$$\left\|\begin{matrix}
\frac{d\Phi}{dx_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
{}_1X_1 & {}_1P_1 & {}_1P'_1 & {}_1P_2 & {}_1P'_2 & {}_1P_3 & {}_1P'_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
{}_2X_1 & {}_2P_1 & {}_2P'_1 & {}_2P_2 & {}_2P'_2 & {}_2P_3 & {}_2P'_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
{}_1X_2 & 0 & 0 & {}_1P_1 & {}_1P'_1 & 0 & 0 & {}_1P_2 & {}_1P_3 & {}_1P'_2 & {}_1P'_3 & 0 & 0\\
{}_2X_2 & 0 & 0 & {}_2P_1 & {}_2P'_1 & 0 & 0 & {}_2P_2 & {}_2P_3 & {}_2P'_2 & {}_2P'_3 & 0 & 0\\
\frac{d\Phi}{dx_2} & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} & 0 & 0\\
{}_1X_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}_1P_1 & {}_1P'_1 & 0 & {}_1P_2 & 0 & {}_1P'_2 & {}_1P_3 & {}_1P'_3\\
{}_2X_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}_2P_1 & {}_2P'_1 & 0 & {}_2P_2 & 0 & {}_2P'_2 & {}_2P_3 & {}_2P'_3\\
\frac{d\Phi}{dx_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_3}
\end{matrix}\right\|, \tag{7}$$

wobei

$${}_iX_k=\frac{\partial F_i}{\partial x_k}+\frac{\partial F_i}{\partial z}\,p_k+\frac{\partial F_i}{\partial z'}\,p'_k$$

$${}_iP_k=\frac{\partial F_i}{\partial p_k};\quad {}_iP'_k=\frac{\partial F_i}{\partial p'_k}.$$

Für die in der Matrix umrandete von Null verschiedene Determinante 8. Ordnung schreiben wir die Ungleichheiten:

$$1)\ D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1, p'_1}\right) \neq 0;\quad 2)\ D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_1, p'_2, p_2}\right) \neq 0$$

und indem wir die Bezeichnungen:

$$A = (p_1 p'_1 p_2);\quad B = (p_1 p'_1 p'_2);\quad C = (p_1 p_2 p'_2);\quad D = (p'_1 p_2 p'_2);$$
$$E = (p_1 p'_1 p'_3);\quad F = (p_3 p_1 p'_1);\quad G = (p_2 p'_1 p_3);\quad H = (p'_3 p'_1 p_2);$$
$$I = (p_1 p_2 p_3);\quad J = (p_1 p'_3 p_2);\quad K = [p_1 p'_1 x_1];\quad L = [p_2 p'_1 x_2];$$
$$M = [p_1 p_2 x_2];\quad N = [p_2 p'_1 x_3];\quad P = [p_1 p_2 x_3];\quad Q = [p_1 p'_1 {}^s x];$$

wobei gerade Klammern die Jacobischen Determinanten mit totalen Ableitungen bezüglich x_1, x_2, x_3 einführen, bedeuten, bekommen wir 5 Involutionsbedingungen des gegebenen Systems in der Gestalt:

$$AD = BC;\ IAE = BFI;\ A(EG + FH) + (BI + AJ)E = 0$$
$$A(DF + HA) + B(IB + AJ + AG) = CFA$$
$$A(AK + AL + BM + FN + EP) = (AG + BJ)Q.$$

Der zweiten Gleichung wird in folgenden Fällen:

1) entweder $AE = BF$; 2) oder $I = 0$; 3) oder $I = 0$; $AE = BF$

genüge geleistet.

Untersuchen wir genau den ersten Fall. Andere Fälle führen zu einer grösseren Zahl der linearen Hilfsgleichungen 1. Ordnung, damit man partielle Integrale $\Phi_1 = C_1, \ldots,$ die in der Involution zu den gegebenen Gleichungen $F_i = 0$ stehen, finden könnte.

Indem wir in Betracht nehmen, dass

$$A \neq 0, \text{ wenn } I \neq 0, \text{ oder } I = 0,$$

wobei:
$$\frac{B}{A} = \frac{D}{C} = \frac{E}{F} = \lambda$$

$$\frac{F}{A} = \mu;\quad \frac{G + \lambda I}{A} = -r,$$

und indem wir die Identität

$$(p_1 p'_1)(p_3 p_2) + (p_1 p_3)(p_2 p'_1) + (p_1 p_2)(p'_1 p_3) \equiv 0$$

erwägen, denn gelangen wir zur Integration eines Systems von 5 linearen Gleichungen 1. Ordnung:

$$
\begin{aligned}
&(p_2 p'_2)\,\lambda_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + [(p'_1 p'_2) + (p'_2 p_1)\lambda_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = (p_2 p'_2) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + \\
&\qquad\qquad + [(p'_1 p_2) + (p_2 p_1)\,\lambda_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} \\
&(p_1 p'_1)\,\lambda_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + [(p'_3 p'_1) + (p'_1 p_3)\,\lambda_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} = (p_1 p'_1) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} + \\
&\qquad\qquad + [(p'_3 p_1) + (p_1 p_3)\,\lambda_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} \\
&[(p'_3 p_2) + (p_2 p_3)\,\lambda_i]\,\lambda_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + \Big\{ (p'_3 p'_1) - [(p_3 p'_1) + (p'_3 p_1)]\,\lambda_i + \\
&\qquad + (p_3 p_1)\,\lambda_i^2 \Big\} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + [(p_2 p'_1) + (p_1 p_2)\,\lambda_i]\,\lambda_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = \qquad (9) \\
&\qquad\qquad = [(p'_3 p_2) + (p_2 p_3)\,\lambda_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + [(p_2 p'_1) + (p_1 p_2)\,\lambda_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} \\
&[(p'_1 p_3) + (p_2 p'_1)\,\mu_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + [(p_3 p_1) + (p_1 p_2)\,\mu_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + \\
&\qquad\qquad + (p'_1 p_1)\,\mu_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + (p_1 p'_1) \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = 0 \\
&(p_1 p'_1) \frac{d\Phi}{dx_1} + [(p_2 p'_1) + (p_1 p_2)\,\lambda_i] \frac{d\Phi}{dx_2} + [(p_2 p'_1) + (p_1 p_2)\,\lambda_i]\,\mu_i \frac{d\Phi}{dx_3} + \\
&\qquad\qquad + ([p'_1 x_1] + [p_2 x_2]\,\lambda_i + [p_2 x_3]\,\lambda_i\,\mu_i) \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + \\
&+ ([x_1 p_1] + [x_2 p_2] + [p'_1 x_3]\,\mu_i) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + \\
&\qquad + ([p'_1 x_2] + [x_2 p_1]\,\lambda_i + [p'_1 x_3]\,\mu_i + [x_3 p_1]\,\lambda_i\,\mu_i) \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = 0,
\end{aligned}
$$

wobei λ_i eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$(p_1 p_2)\,\lambda^2 - [(p_1 p'_2) + (p'_1 p_2)]\,\lambda + (p'_1 p'_2) = 0 \qquad (10)$$

bedeutet, und μ_i mittelst λ_i auf Grund von der Formel:

$$[(p'_1 p_2) + (p_2 p_1)\,\lambda_i]\,\mu_i + (p'_1 p_1)\,\nu + [(p_3 p'_1) + (p_1 p_3)\,\lambda_i] = 0,$$

wo ν eine beliebige Funktion bedeutet, bestimmt werden. Die Willkürlichkeit der Funktion ν kann man benützen, um die linearen Gleichungen zum Bestimmen von Integralen $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \ldots$ abzukürzen. Indem wir z. B. $\nu=0$ setzen, bekommen wir Term μ_i mittelst Lösung λ_i auf Grund von der Formel:

$$\mu_i = \frac{(p'_1 p_3) + (p_3 p_1) \lambda_i}{(p'_1 p_2) + (p_2 p_1) \lambda_i}.$$

Die dritte Gleichung (9) kann man auf Grund von der Elimination der Ableitung $\frac{\partial \Phi}{\partial p_2}$ von der dritten und vierten Gleichung (9) ändern. Auf Grund von Identitäten

$$(p_2 p_3)(p_1 p'_1) + (p_3 p_1)(p_2 p'_1) + (p_2 p_1)(p'_1 p_3) \equiv 0$$
$$(p'_3 p_2)(p_1 p'_1) + (p_2 p'_1)(p_1 p'_3) + (p_2 p_1)(p'_3 p'_1) \equiv 0$$

bemerkt man, dass das Resultat der Elimination gleichbedeutend mit der zweiten Gleichung (9) wird, falls λ_i eine gemeinsame Lösung der quadratischen Gleichung (10) und der Gleichung

$$(p_1 p_3) \lambda^2 - [(p_1 p'_3) + (p'_1 p_3)] \lambda + (p'_1 p'_3) = 0 \qquad (11)$$

ist. Dann reduziert sich das Integrieren zur Bestimmung der partiellen Integrale des Systemes von lediglich 4 linearen Gleichungen (9) und zwar 1-en, 2-ten, 4-ten und 5-ten. Indem wir die Resultante der Gleichungen (10), (11), gleich Null setzen, bekommen wir als Bedingung für die Gleichungen des gegebenen Systemes

$$\begin{vmatrix} (p_1 p_2), & (p_2 p'_1) + (p'_2 p_1), & (p'_1 p'_2), & 0 \\ 0, & (p_1 p_2), & (p_2 p'_1) + (p'_2 p_1), & (p'_1 p'_2) \\ (p_1 p_3), & (p_3 p'_1) + (p'_3 p_1), & (p'_1 p'_3), & 0 \\ 0, & (p_1 p_3), & (p_3 p'_1) + (p'_3 p_1), & (p'_1 p'_3) \end{vmatrix} = 0,$$

und die Formel zur Bestimmung der Funktion λ_i in der Form:

$$\lambda_i = \frac{\begin{vmatrix} (p_1 p_2), (p'_1 p'_2) \\ (p_1 p_3), (p'_1 p'_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (p_1 p_2), (p_2 p'_1) + (p'_2 p_1) \\ (p_1 p_3), (p_3 p'_1) + (p'_3 p_1) \end{vmatrix}}.$$

Beispiel.

$$F_1 \equiv p_1 - p'_2 \equiv 0; \qquad F_2 \equiv p'_1 - p_3 = 0.$$

Nehmen wir die von Null verschiedene Determinante 8 Ordnung der Matrix (7); dann bekommen wir die Ungleichheit

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_3}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial p'_2}\right) \neq 0.$$

Wir haben ein System von 5 nichtlinearen Gleichungen, die den Gleichungen (8) entsprechen:

$$\frac{d\Phi}{dx_1} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_1}\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial p'_2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1}\right) = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p'_2}\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1}\right) = 0.$$

Die zwei letzten Gleichungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + 2\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = 0,$$

führen mit den 3 vorgehenden zu den Integralen

$$\Phi_1 \equiv p_1 + p'_2 = \varphi(x_2, x_3); \qquad \Phi_2 \equiv 2p'_1 - p_3 = \psi(x_2, x_3).$$

Auf Grund der gegebenen Gleichungen und der Bedingungen

$$\frac{dp_1}{dx_3} = \frac{dp_3}{dx_1}; \quad \frac{dp'_2}{dx_1} = \frac{dp'_1}{dx_2}$$

bestimmen wir die Funktionen φ und ψ und bekommen:

$$z = x_1\,\Omega'(x_2) + \Psi(x_3); \qquad z'_1 = x_1\,\Psi'(x_3) + \Omega(x_2),$$

wobei $\Psi(x_3)$ und $\Omega(x_2)$ wie auch ihre Ableitungen $\Psi'(x_3)$ und $\Omega'(x_2)$ beliebige Funktionen bedeuten.

XVI. Die Gestalt der Systeme der nichtlinearen Gleichungen (8) und im Zusammenhange damit der linearen Gleichungen (9) hängt davon ab, welche von den Determinanten 8 Ordnung der Matrix (7) wir als von Null verschieden annehmen werden.

Wenn wir z. B. die Determinante aus den Vertikalreihen 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13 und allen Horizontalreihen, die 3. ausgeschlossen, bilden, bekommen wir für das gegebene System eine Beschränkung in der Gestalt:

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p_3, p'_3}\right) \neq 0; \qquad D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_2, p_3, p'_2}\right) \neq 0,$$

und indem wir noch neue Bezeichnungen

$$A_1 = (p_2 p_3 p'_2); \quad B_1 = (p_3 p'_2 p'_3); \quad C_1 = (p_2 p'_2 p'_3); \quad D_1 = (p_2 p_3 p'_3)$$
$$E_1 = (p_1 p_3 p'_3); \quad F_1 = (p_3 p'_2 p_1); \quad G_1 = (p_3 p'_2 p'_1); \quad H_1 = (p_3 p'_3 p'_1)$$
$$I_1 = [p_3 p'_3 x_3]; \quad J_1 = [p_2 p'_2 x_2]; \quad K_1 = [p_2 p_3 x_1]; \quad L_1 = [p_2 p'_2 x_1]$$
$$M_1 = [p_3 p'_2 x_1]$$

einführen, bekommen wir statt eines Systems von 5 nichtlinearen Gleichungen (8) ein folgendes System:

$$A_1 B_1 = C_1 D_1;\quad A_1 C E_1 = (ID + F_1 C) D_1;\quad G_1 C D = (G D_1 + A_1 E_1) D$$
$$A_1 (A_1 H + C_1 E_1) = D_1 (D D_1 + B_1 C); \tag{8'}$$
$$A_1 (A_1 I_1 + J_1 D_1 + M_1 E_1) = D_1 (K_1 D + M_1 C);$$

desgleichen bekommen wir für eine Determinante, welche zu den Beschränkungen

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p_3, p'_3}\right) \neq 0;\quad D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_2, p_3, p'_2}\right) \neq 0;\quad D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_1, p_2, p_3}\right) \neq 0$$

führt, indem wir noch die Bezeichnung

$$A_2 = [p_1 p_2 x_1]$$

einführen, folgende 5 nichtlineare Gleichungen:

$$\begin{aligned} &A_1 B_1 = C_1 D_1;\quad A A_1 E_1 = D C F;\quad D_1 (DI + C F_1) = A_1 E_1 C \\ &A_1 (I H_1 + J E_1) + C E_1 D_1 = 0;\quad I (A_1 I_1 + J_1 D_1) = A_1 A_2 E_1. \end{aligned} \tag{8''}$$

Dementsprechend ändert sich die Form des Systems der linearen Gleichungen zur Bestimmung $\Phi_1 = C_1, \ldots$ Lineare Gleichungen 1. Ordnung zur Bestimmung der Gleichungen $\Phi_1 = C_1, \ldots$ kann man auch unmittelbar aus der Matrix (7) bekommen, indem wir entsprechend eine von Null verschiedene Determinante 8. Ordnung wählen, oder anders, indem wir die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $\Phi = C$ mittelst anderer Ungleichheiten beschränken. Man muss in Betracht nehmen, dass man verschiedene Systeme von linearen Gleichungen für verschiedene der Null nichtgleiche Determinanten 8. Ordnung schreiben kann. Ausserdem kann man selbstverständlich die Involutionsbedingungen nicht schreiben auf Grund von Determinanten 9. Ordnung, die wir bekommen, indem wir zum Minor 8. Ordnung, der Null identisch ist. Horizontalreihen und je eine Vertikalreihe zuschreiben. Als Beispiel. einer ähnlichen Determinante 8. Ordnung kann eine Determinante aller Horizontalreihen, die erste ausgenommen, und der Vertikalreihen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10. dienen. Endlich muss man auch bemerken, dass die Nullgleichheit der Involutionsbedingungen der Nullungleichheit eines entsprechend gewählten Minors nicht widersprechen darf. Z. B. führt die Nullungleichheit jeder Determinante 8. Ordnung von den Elementen aller Horizontalreihen, eine von drei letzten ausgenommen, und der Vertikalreihen Nr. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 zu den drei verschiedenen Gestalten der Systeme von 5 linearen Gleichungen 1. Ordnung, von denen je zwei der Nullungleichheit des entsprechenden Minors 8. Ordnung widersprechen werden. Diese Gesetzmässigkeiten kann man für die Systeme von nichtlinearen Gleichungen mit zwei und mehr unbekannten Funktionen von drei und mehr unabhängigen Variabeln benützen.

Eine von Null verschiedene Determinante 8. Ordnung der Elemente aller Horizontalreihen der Matrix (7), die letzte ausgenommen, und der Vertikalreihen Nr. 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 13 führt zu den folgenden Beschränkungen für die Gleichungen $F_1=0$, $F_2=0$, $\Phi=C$:

$$1)\ D\left(\frac{F_1, F_2}{p_3, p'_3}\right) \neq 0;\quad 2) \begin{vmatrix} D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_1, p_2, p'_2}\right), & D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_2, p_1, p'_1}\right) \\ D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_1, p_2, p'_2}\right), & D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_2, p_1, p'_1}\right) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (12)$$

und erlaubt folgende 5 lineare Gleichungen 1. Ordnung zur Bestimmung der partiellen Integrale $\Phi_1=C_1,\ldots$ aufzuschreiben:

$$\begin{aligned}
&(p_3 p'_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} + (p'_3 p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + (p'_2 p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} = 0 \\
&(p_3 p'_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + (p'_3 p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + (p_2 p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} = 0 \\
&(p_3 p'_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} + (p'_3 p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + (p'_1 p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} = 0 \qquad (13) \\
&(p_3 p'_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} + (p'_3 p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + (p_1 p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} = 0 \\
&(p_3 p'_3)\frac{d\Phi}{dx_3} + [p'_3 x_3]\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + [x_3 p_3]\frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} = 0
\end{aligned}$$

wobei:

$$\frac{d\Phi}{dx_3} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} p_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial z'} p'_3,$$

so dass das letzte System nur 4 untereinander unabhängige Integrale $\Phi_1=C_1,\ldots\ \Phi_4=C_4$ geben kann.

Indem wir in den Ungleichheiten (12) p_3 und p'_3 mit p_2 und p'_2 und umgekehrt vertauschen, und p_1 und p'_1 unverändert lassen, oder indem wir in dieser neuen Vertauschung p_2 und p'_2 mit p_1 und p'_1 und umgekehrt tauschen und p_3 und p'_3 unverändert lassen, kann man statt (13) folgende 2 Systeme von 5 linearen Gleichungen niederschreiben.

$$\left.\begin{aligned}
&(p_2 p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} + (p'_2 p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + (p_1 p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} = 0 \\
&(p_2 p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} + (p'_2 p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + (p'_1 p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} = 0 \\
&(p_2 p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + (p'_2 p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + (p_3 p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} = 0 \\
&(p_2 p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} + (p'_2 p'_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + (p'_3 p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} = 0 \\
&(p_2 p'_2)\frac{d\Phi}{dx_2} + [p'_2 x_2]\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + [x_2 p_2]\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} = 0
\end{aligned}\right\}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
&(p_1\,p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2}+(p'_1\,p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+(p_2\,p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}=0\\
&(p_1\,p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}+(p'_1\,p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+(p'_2\,p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}=0\\
&(p_1\,p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}+(p'_1\,p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+(p_3\,p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}=0\\
&(p_1\,p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_3}+(p'_1\,p'_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+(p'_3\,p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}=0\\
&(p_1\,p'_1)\frac{d\Phi}{dx_3}+[p'_1\,x_1]\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+[x_1\,p_1]\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}=0
\end{aligned}\right\}.$$

Das System von linearen Gleichungen zur Bestimmung von partiellen Integralen $\Phi_1=C_1,\ldots$ so wie auch die Beschränkungen für die Gleichungen $F_1=0$, $F_2=0$, $\Phi=C$ werden bedeutend einfacher, wenn das gegebene System eine oder mehrere Ableitungen $p_1, p_2,\ldots p_3$ nicht enthält.

Z. B. enthält das gegebene System die Ableitung p'_3 nicht, so bekommen wir die Bestimmung der partiellen Integrale, welche die Variable p'_3 nicht enthalten, bei folgenden Ungleichheiten:

$$1)\ D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_2, p_3}\right)\neq 0,\quad 2)\begin{vmatrix}(p_1\,p'_1\,p_2), & (p_1\,\ p_2\,p'_2)\\ (p_1\,p'_1\,p'_2), & (p'_1\,p_2\,p'_2)\end{vmatrix}\neq 0,$$

vom System von nur 4 linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
&(p'_2\,p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2}+(p_3\,p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}+(p_2\,p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}=0\\
&(p'_2\,p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}+(p_3\,p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}+(p'_1\,p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}=0\\
&(p'_2\,p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+(p_3\,p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}+(p_1\,p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}=0\\
&(p'_2\,p_3)\frac{d\Phi}{dx_3}+[p_3\,x_3]\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}+[x_3\,p'_2]\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}=0,
\end{aligned}$$

und bei den Ungleichheiten:

$$1)\ D\left(\frac{F_1, F_2}{p_2, p'_2}\right)\neq 0;\quad 2)\ (p_1\,p'_1\,p_3)\neq 0;\quad 3)\ (p'_1\,p'_2\,p_3)\neq 0,$$

oder

$$1)\ D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1, p'_1}\right)\neq 0;\quad 2)\ (p_2\,p'_2\,p_3)\neq 0;\quad 3)\ (p'_2\,p_3\,p'_1)\neq 0,$$

vom System

$$\left.\begin{aligned}
(p_2\, p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + (p'_2\, p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + (p_3\, p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} &= 0\\
(p_2\, p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} + (p'_2\, p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + (p'_2\, p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} &= 0\\
(p_2\, p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} + (p'_2\, p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + (p_1\, p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} &= 0\\
(p_2\, p'_2)\frac{d\Phi}{dx_1} + [p'_2\, x_2]\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + [x_2\, p_2]\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} &= 0
\end{aligned}\right\}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
(p_1\, p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + (p'_1\, p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} + (p_2\, p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} &= 0\\
(p_1\, p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} + (p'_1\, p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} + (p'_2\, p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} &= 0\\
(p_1\, p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + (p'_1\, p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} + (p_3\, p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} &= 0\\
(p_1\, p'_1)\frac{d\Phi}{dx_1} + [p_1\, x_1]\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} + [x_1\, p_1]\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} &= 0
\end{aligned}\right\}.$$

Um das System von 2 nichtlinearen Gleichungen mit 2 unbekannten Funktionen z, z' mit 4 unabhängigen Variablen x_1, x_2, x_3, x_4

$$F_i\,(x_1, \ldots x_4,\ z,\ z',\ p_1, \ldots p_4.\ p'_1 \quad p'_4) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

zu integrieren, bilden wir eine entsprechende Matrix mit 12 horizontalen und 21 vertikalen Reihen und nehmen die der Null gleiche Determinante 12 Ordnung. Indem wir eine von Null verschiedene Determinante 11. Ordnung, die zu den Beschränkungen vom Typus:

$$1)\ D\left(\frac{F_1, F_2}{p_4, p'_4}\right) \neq 0; \qquad 2)\ D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_2, p'_2, p_3}\right) \neq 0; \qquad (14)$$

$$3) \begin{vmatrix} (p_2\, p'_2\, p_3), & (p'_2\, p_2\, p'_3) \\ (p_2\, p'_3\, p_3), & (p'_2\, p_3\, p'_3) \end{vmatrix} \neq 0$$

führt, bilden, bekommen wir das folgende System von nur 7 linearen Gleichungen zur Bestimmung von $\Phi_1 = C_1, \ldots$

$$\begin{aligned}
(p_4\, p'_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} + (p'_4\, p'_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_4} + (p'_3\, p_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_4} &= 0\\
(p_4\, p'_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + (p'_4\, p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_4} + (p_3\, p_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_4} &= 0
\end{aligned} \qquad (15)$$

$$(p_4 p'_4) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} + (p'_4 p'_2) \frac{\partial \Phi}{\partial p_4} + (p'_2 p_4) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_4} = 0$$

$$(p_4 p'_4) \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + (p'_4 p_2) \frac{\partial \Phi}{\partial p_4} + (p_2 p_4) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_4} = 0$$

$$(p_4 p'_4) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + (p'_4 p'_1) \frac{\partial \Phi}{\partial p_4} + (p'_1 p_4) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_4} = 0$$

$$(p_4 p'_4) \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + (p'_4 p_1) \frac{\partial \Phi}{\partial p_4} + (p_1 p_4) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_4} = 0$$

$$(p_4 p'_4) \frac{d \Phi}{d x_1} + [p'_4 x_1] \frac{\partial \Phi}{\partial p_4} + [x_1 p_4] \frac{\partial \Phi}{\partial p'_4} = 0.$$

Man kann analog Systeme bilden, in welchen die letzte Gleichung totale Ableitungen in x_2, x_3, x_4 enthalten wird. Die Ungleichheiten (14) kann man durch andere nur 2 Ungleichheiten, z. B. von der Form:

$$1)\ D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1, p'_1}\right) \neq 0; \quad 2)\ D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_1\ p'_1\ p_2}\right) \neq 0,$$

tauschen; dann bekommen wir ein System von 10 nichtlinearen Gleichungen, von denen 3 von anderen 7 abhängig werden; es erübrigt dann diese nichtlineare Gleichungen auf ein System von linearen Gleichungen mittelst algebraischer Gleichungen zu überführen, so wie es schon früher für den Fall der Systeme von zwei Funktionen mit 2 und 3 Argumenten gewesen.

Um das System der Gleichungen mit 3 unbekannten Funktionen z, z, z'' der 3 unabhängigen Variablen x_1, x_2, x_3

$$F_i(x_1, x_2, x_3, z, z', z'', p_1, p_2\ p_3, p'_1, p'_2, p'_3, p''_1, p''_2, p''_3) = 0 \quad (i=1,2,3)$$

zu integrieren, nehmen wir 8 nullgleiche Determinanten 12 Ordnung von einer Matrix mit 12 horizontalen und 19 vertikalen Reihen. Indem wir eine von Null verschiedene Determinante 11. Ordnung wählen, welche z. B. zur Ungleichheit

$$1)\ D\left(\frac{F_1, F_2, F_3}{p_3, p'_3, p''_3}\right) \neq 0;$$

$$2)\ (p_2 p'_2 p_3 p'_3)(p_2 p'_2 p''_2 p''_3) + \begin{vmatrix} (p'_2 p''_2 p_3 p'_3), & (p_2 p'_2 p''_2 p'_3) \\ (p_2 p''_2 p_3 p'_3), & (p_2 p'_2 p''_2 p_3) \end{vmatrix} \neq 0$$

führt, so sind wir dann sicher, dass eine von 8 entsprechenden Determinanten der Null identisch gleich ist, während die anderen zur Berechnung von partiellen Integralen $\Phi_i = C_1, \ldots$ eines folgenden Systems von 7 linearen Gleichungen mit einer unbekannten Funktion Φ:

$$(p'_3 p''_3 p''_2) \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + (p_3 p''_2 p''_3) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} +$$

$$+ (p_3\ p'_3 p''_2) \frac{\partial \Phi}{\partial p''_3} + (p_3 p''_3 p'_3) \frac{\partial \Phi}{\partial p''_2} = 0$$

$$(p'_3\, p''_3\, p'_2)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + (p_3\, p'_2\, p''_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} + $$
$$+ (p_3\, p'_3\, p'_2)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p''_3} + (p_3\, p''_3\, p'_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} = 0$$

$$(p'_3\, p''_3\, p_2)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + (p_3\, p_2\, p''_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} + $$
$$+ (p_3\, p'_3\, p_2)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p''_3} + (p_3\, p''_3\, p'_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = 0$$

$$(p'_3\, p''_3\, p''_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + (p_3\, p''_1\, p''_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} + $$
$$+ (p_3\, p'_3\, p''_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p''_3} + (p_3\, p''_3\, p'_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p''_1} = 0$$

$$(p'_3\, p''_3\, p'_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + (p_3\, p'_1\, p''_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} + $$
$$+ (p_3\, p'_3\, p'_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p''_3} + (p_3\, p''_3\, p'_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} = 0$$

$$(p'_3\, p''_3\, p_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + (p_3\, p_1\, p''_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} + $$
$$+ (p_3\, p'_3\, p_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p''_3} + (p_3\, p''_3\, p'_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} = 0$$

$$[p'_3\, p''_3\, x_1]\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + [p''_3\, p_3\, x_1]\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} + $$
$$+ [p_3\, p'_3\, x_1]\,\frac{\partial \Phi}{\partial p''_3} + (p_3\, p''_3\, p'_3)\,\frac{d \Phi}{d x_1} = 0$$

führen.

Analog bekommt man Systeme, vo die letzte Gleichung totale Ableitungen in x_2 oder x_3 enthalten wird.

Wählen wir eine andere von Null verschiedene Determinante 11 Ordnung, z. B. gleich dem Produkt:

$$(p_1\, p'_1\, p''_1) \cdot (p_1\, p'_1\, p''_1\, p_2)^2,$$

wobei es:

$$1)\ (p_1, p'_1, p''_1) \neq 0; \quad 2)\ (p_1\, p'_1\, p''_1\, p_2) \neq 0,$$

sein muss, dann bekommen wir ein System von 8 nichtlinearen Gleichungen von der Form:

$$\alpha_1\, A + \beta_1\, B + \gamma_1\, C = 0$$
$$\alpha_2\, A + \beta_2\, B + \gamma_2\, C = 0$$

$$\varphi_1 M + \psi_1 N + \chi_1 F + \omega_1 Q = 0 \quad a_1 M + b_1 N + c_1 P + d_1 Q + e_1 R = 0$$
$$\varphi_2 M + \psi_2 N + \chi_2 P + \omega_2 Q = 0 \quad a_2 M + b_2 N + c_2 P + d_2 Q + e_2 \cdot = 0$$
$$\varphi_3 M + \psi_3 N + \chi_3 P + \omega_3 Q = 0 \quad a_3 M + b_3 N + c_3 P + d_3 Q + e_3 T = 0$$

wo $\alpha_1,\ldots \varphi_1,\ldots a_1,\ldots A,\ldots T$ die funktionellen Determinanten 4. Ordnung bedeuten. Diese Gleichungen muss man auf das System von 7 linearen Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. Ordnung einer unbekannten Funktion Φ reduzieren.

Das Gleichungssystem:

$$f_i\,(x, y, z, p, q;\; x', y', z', p', q') = 0, \quad (i = 1, 2) \tag{16}$$

wo die unbekannte Funktion z von zwei Argumenten x, y abhängt und die andere unbekannte z' eine Funktion der zwei anderen unbekannten variablen x', y' ist, kann man analog betrachten wie jenen Teilfall des Systems:

$$F_i\,(x, y, x', y', z, \zeta, p, q, p', q', \pi, \varkappa, \pi', \varkappa') = 0 \tag{17}$$

mit zwei unbekannten Funktionen z und ζ, jede von 4 unabhängigen variablen x, y, x', y' abhängig, wenn wir

$$\frac{\partial z}{\partial x'} = \frac{\partial z}{\partial y'} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F_i}{\partial p'} = \frac{\partial F_i}{\partial q'} = \frac{\partial F_i}{\partial \pi} = \frac{\partial F_i}{\partial \varkappa} = 0,$$

wo:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ldots\; q' = \frac{\partial z}{\partial y'}; \qquad \pi = \frac{\partial \zeta}{\partial x},\ldots\; \varkappa' = \frac{\partial \zeta}{\partial y'} \text{ bedeuten.}$$

Die Matrix des Systems (16) bildet jenen speziellen Fall der Matrix für das schon behandelte System (17), wenn wir entsprechende Elemente gleich Null setzen.

Als Resultat, wenn wir z. B.

$$1)\; D\left(\frac{f_1, f_2}{p_1, p'}\right) \neq 0; \quad 2)\; D\left(\frac{f_1, f_2, \varphi}{p, p', q'}\right) \neq 0, \text{ setzen,}$$

bekommen wir zur Integration der Gleichungen (16) folgendes System von 3 linearen Gleichungen mit einer unbekannten Funktion φ, indem wir zum System (16) die Gleichungen zurechnen:

$$\varphi\;(x, y, z, p, q;\; x', y', z', p', q') = \text{Const.}$$

$$(p'\,q)\frac{\partial \varphi}{\partial p} + (p\,p')\frac{\partial \varphi}{\partial q} + (q\,p)\frac{\partial \varphi}{\partial p'} = 0$$

$$(q'\,q)\frac{\partial \varphi}{\partial p} + (p\,q')\frac{\partial \varphi}{\partial q} + (q\,p)\frac{\partial \varphi}{\partial q'} = 0$$

$$([p'\,x'] + [q'\,y'])\frac{\partial \varphi}{\partial p} + [x'\,p]\frac{\partial \varphi}{\partial p'} + [y'\,p]\frac{\partial \varphi}{\partial q'} + (p\,p')\frac{d\varphi}{dx} + (p\,q')\frac{d\varphi}{dy} = 0$$

Für die Beschränkungen

$$1)\ D\left(\frac{f_1, f_2}{q_1\ q'}\right) \neq 0; \quad 2)\ D\left(\frac{f_1, f_2, \varphi}{p, q, q'}\right) \neq 0$$

bekommen wir:

$$(q'p)\frac{\partial\varphi}{\partial p'} + (p\,p')\frac{\partial\varphi}{\partial q'} + (p'q')\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0$$

$$(q'q)\frac{\partial\varphi}{\partial p'} + (q\,p')\frac{\partial\varphi}{\partial q'} + (p'q')\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0$$

$$([p\,x] = [q\,y])\frac{\partial\varphi}{\partial q'} + [x\,q']\frac{\partial\varphi}{\partial p} + [y\,q']\frac{\partial\varphi}{\partial q} + (q'p)\frac{d\varphi}{dx} + (q'q)\frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Analog können wir andere Systeme von Gleichungen mit unbekannten Funktionen z, z', u. s. w. mit verschiedenen unbekannten Funktionen: $x_1, x_2, x_3, \ldots; x'_1, x'_2, x'_3$, u. s. w. betrachten.

XVII. Die ersten Arbeiten über das Integrieren der Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. Ordnung einer unbekannten Funktion z stammen von Euler, welcher die Bedingung:

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p \tag{18}$$

aufgestellt hat, damit der Ausdruck:

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{19}$$

ein totales Differentiale sei, wenn p und q als Funktionen von $x, y, z,$ durch die zum Integrieren gegebene Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{20}$$

gebunden sind, und stellte die Aufgabe auf, die Integration einer Gleichung mit partiellen Ableitungen (20) auf die Integration eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu überführen. Lagrange hat das umgekehrte Theorem bewiesen, dass die Formel (19) eine Gleichung mit totalen Differentialen bestimmt, falls die Variable $q(x, y, z)$ die Eulersche Bedingung (18) erfüllt. Charpit hat als erster die Methode zur Bestimmung einer zweiten Gleichung

$$\Phi(x, y, z\ p, q) = 0 \text{ angegeben,} \tag{21}$$

um aus dem System (20), (21), zwei Funktionen $p(x,y,z)$ und $q(x,y,z)$ zu bestimmen, und zwar: man muss ein partielles Integral $\Phi_1 = C_1$ einer linearen Gleichung mit partiellen Ableitungen erster Ordnung

$$P\frac{\partial\Phi}{dx} + Q\frac{\partial\Phi}{\partial y} + (Pp + Qq)\frac{\partial\Phi}{\partial z} - (X + p\,Z)\frac{\partial\Phi}{\partial p} - (Y + q\,Z)\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0 \tag{22}$$

bekommen, oder anders — ein Integral des Systemes von entsprechenden gewöhnlichen Differentialgleichungen finden, wobei $X, Y, \ldots Q$ partielle Ableitungen der gegebenen Funktion F in $x, y, \ldots q$ bedeuten. Die Charpit'sche Methode, die Gleichung (22) zu bekommen, erfordert die Ungleichheit:

$$D\left(\frac{F, \Phi}{p, q}\right) \neq 0.$$

Jacobi hat zwei, für die Strenge der Charpit'schen Methode nötige Umkehrungstheoreme bewiesen. Lagrange hat dann spezielle Fälle der Gleichung (20) untersucht, die Resultate der noch nichtgedruckten Charpit'schen Arbeit wiederholt uud ist mittelst einer mehr komplizierten Weise zum Auffinden der Charpit'schen Gleichung (22) gelangt. Diese Gleichung (22) bleibt auch in allen späteren Integrationsmethoden der nichtlinearen Gleichungen (20): in der Cauchy'schen, Jacobi'schen u. a. Methoden dieselbe. Die Charpit'sche Methode kann auch für das System von nichtlinearen Gleichungen mit zwei und mehreren unbekannten Funktionen $z, z', \ldots$ verallgemeinert werden, falls die gegebenen Gleichungen nicht alle Ableitungen der unbekannten Funktionen $z, z', \ldots$ in unabhängigen Variablen x, y besitzen. Schliesslich bekommt man eine Verallgemeinerung der Charpit'schen Gleichung (22) für einige unbekannte Funktionen; diese verallgemeinerten Gleichungen werden eben die Gleichungen, welche wir in früheren Abschnitten als Resultat der Verallgemeinerung der Jacobi'schen Methode für die Gleichungen mit mehreren unbekannten Funktionen bekommen haben.

Es genügt, wenn wir das System von nichtlinearen Gleichungen

$$F_i\,(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{23}$$

untersuchen. Um 4 Funktionen

$$p\,(x, y, z, z'),\ q\,(x, y, z, z'),\ p'\,(x, y, z, z'),\ q'\,(x, y, z\ z'), \text{ zu finden,} \tag{24}$$

welche das Bestimmen der unbekannten Funktionen z, z' mittelst der Quadratur von 3 Gleichheiten

$$dz = p\,dx + q\,dy;\ dz' = p'\,dx + q'\,dy, \text{ gestatten werden,} \tag{25}$$

indem wir die Verallgemeinerung der Eulerschen Bedingungen

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q + \frac{\partial p}{\partial z'} q' = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p + \frac{\partial q}{\partial z'} p' \tag{26}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{\partial p'}{\partial z} q + \frac{\partial p'}{\partial z'} q' = \frac{\partial q'}{\partial x} + \frac{\partial q'}{\partial z} p + \frac{\partial q'}{\partial z'} q',$$

oder anders:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx};\ \frac{dp'}{dy} = \frac{dq'}{dx} \text{ erfüllen,} \tag{26'}$$

zu finden,

muss man zwei neue Gleichungen von der Form:

$$\Phi\ (x, y, z, z', p, q, p', q') = 0 \text{ finden,} \tag{27}$$

welche zusammen mit den Gleichungen (23) die Funktionen (24), die die Bedingungen (26) erfüllen, bestimmen.

Bei Behaltung unserer gewöhnlichen Bezeichnungen gibt das Differenzieren der Gleichungen (23), (27) in Bezug auf (26):

$$\begin{aligned}
&X_1 + Z_1 p + Z_1' p' + P_1 \frac{dp}{dx} + Q_1 \frac{dp}{dy} + P_1' \frac{dp'}{dx} + Q_1' \frac{dp'}{dy} = 0 \\
&\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p + \frac{\partial \Phi}{\partial z'} p' + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \frac{dp}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial p'} \frac{dp'}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial q'} \frac{dp'}{dy} = 0 \\
&Y_1 + Z_1 q + Z_1' q' + P_1 \frac{dp}{dy} + Q_1 \frac{dq}{dy} + P_1' \frac{dp'}{dy} + Q_1' \frac{dq'}{dy} = 0 \\
&\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q + \frac{\partial \Phi}{\partial z'} q' + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{dp}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \frac{dp}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial p'} \frac{dp'}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial q'} \frac{dq'}{dy} = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Enthält das System (23) z. B. die Ableitung q' nicht, dann müssen wir auch die Gleichung (27) suchen, welche diese Ableitung q', $\frac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$ nicht enthält, um einer von den ersten verallgemeinerten Euler'schen Bedingungen (25) genüge zu leisten und mittelst der Quadratur die unbekannte Funktion z von der ersten Gleichheit (25) zu bestimmen. Wird die Ungleichheit

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p, q, p'}\right) \neq 0 \text{ erfüllt,}$$

welche die Charpit'sche Ungleichheit verallgemeinert, dann bekommt man auf Grund von Elimination von 5 unbekannten $\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy}, \frac{dp'}{dx}, \frac{dp'}{dy}, \frac{dq}{dy}$ in 6 linearen Gleichungen eine solche lineare Gleichung 1. Ordnung zur Bestimmung der Funktion Φ, welche die lineare Charpit'sche Gleichung (22):

$$\begin{aligned}
&(p'p) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (p'q) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \{p(p'p) + q(p'q))\} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \{p'(p'p) + q'(p'q)\} \frac{\partial \Phi}{\partial z'} + \\
&+ [xp'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \{[px] + [qy]\} \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [yp'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0 \text{ verallgemeinert.}
\end{aligned} \tag{29}$$

Es ist eben die Gleichung, welche wir im Abschnitt III des Teiles I durch die Verallgemeinerung der Jacobi'schen Integrationsmethode bekommen haben. Analog bekommen wir auch andere, im angeführten

Abschnitte erhaltene lineare Gleichungen, wenn das System (23) eine von anderen Ableitungen p', q, p[1]) nicht enthält.

Nachdem wir ein partielles Integral $\Phi_1 = C_1$ gefunden und auf Grund des gegebenen Systems $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ die Variable p' eliminiert haben, finden wir $p\,(x, y, z, z')$ und $q'\,(x, y, z, z')$ und gelangen mittelst einer Quadratur zur Relation

$$z = \varphi\,(x, y, z', C_1, C_2)\,;$$

dann führt die Substitution des Gliedes für z in eine von den Gleichungen $F_1 = 0$; $F_2 = 0$ zur Integration der Gleichung 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion z'. Nachdem wir zwei Integrale $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$ gefunden und die Ableitungen p, q, p' mit der Hilfe der Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, eliminiert haben, bekommen wir

$$\varphi\,(x, y, z, z', C_1, C_2) = 0.$$

Man könnte die Gleichung (29) und analoge andere Gleichungen auch auf einem anderen Wege bekommen, indem wir p, q, p', q' als Funktionen von 4 von einander unabhängigen Variablen x, y, z, z' betrachten. Dann bekommen wir mittelst der Differentiation in x, y, z, z' statt des Systemes (28):

$$\begin{aligned}
&X_i + P_i\frac{\partial p}{\partial x} + Q_i\frac{\partial q}{\partial x} + P_i'\frac{\partial p'}{\partial x} + Q_i'\frac{\partial q'}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial x} = 0\\
&Y_i + P_i\frac{\partial p}{\partial y} + Q_i\frac{\partial q}{\partial y} + P_i'\frac{\partial p'}{\partial y} + Q_i'\frac{\partial q'}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial y} = 0\\
&Z_i + P_i\frac{\partial p}{\partial z} + Q_i\frac{\partial q}{\partial z} + P_i'\frac{\partial p'}{\partial z} + Q_i'\frac{\partial q'}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial z} = 0\\
&Z_i' + P_i\frac{\partial p}{\partial z'} + Q_i\frac{\partial q}{\partial z'} + P_i'\frac{\partial p'}{\partial z'} + Q_i'\frac{\partial q'}{\partial z'} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z'} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial z'} = 0.
\end{aligned} \qquad (30)$$

Ist $Q_1' = Q_2' = \dfrac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$, dann führt die Substitution der Ausdrücke für $\dfrac{\partial q}{\partial x}, \ldots \dfrac{\partial p}{\partial z'}$, die vom System (30) gefunden wurden, in die erste von den Bedingungen (26) zur linearen Gleichung (29).

Man kann das System von linearen Gleichungen

$$a_i p + b_i q + a_i' p' + b_i' q' + c_i = 0 \qquad (i = 1, 2) \qquad (31)$$

wo $a_i, \ldots c_i$ die Funktionen von x, y, z, z' sind, manchmal auf das System von linearen Gleichungen überführen, welche eine von den Ableitungen p, q, p', q' nicht ent-

[1]) Die Bezeichnungen x, y, z, z' statt x_1, x_2, z_1 z_2 habe ich in den Abschnitten III, IV des I. Teiles eingeführt, sowie auch entsprechende Gleichungen in § 81 Ch. X meines Buches „Équations différentielles, livre 2, Leningrad, 1934 aufgeschrieben.

halten, und auf eine in diesem Abschnitte dargestellte Weise integrieren. Zu diesem Zwecke führen wir neue Funktionen ζ und ζ' ein, welche mit den früheren durch die Transformationsformeln

$$z = f(x, y, \zeta, \zeta'); \quad z' = f'(x, y, \zeta, \zeta') \text{ gebunden sind.}$$

Dann ist:
$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\pi + \frac{\partial f}{\partial \zeta'}\pi'; \ldots q' = \frac{\partial f'}{\partial y} + \frac{\partial f'}{\partial \zeta}\varkappa + \frac{\partial f'}{\partial \zeta'}\varkappa',$$

wobei:
$$\pi = \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \; \varkappa = \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \pi' = \frac{\partial \zeta'}{\partial x}; \; \varkappa' = \frac{\partial \zeta'}{\partial y}.$$

Dann bekommt die Gleichung (31) die Gestalt:

$$\left(a_1 \frac{\partial f}{\partial \zeta} + a_1' \frac{\partial f'}{\partial \zeta}\right)\pi + \left(a_1 \frac{\partial f}{\partial \zeta'} + a_1' \frac{\partial f'}{\partial \zeta'}\right)\pi' + \left(b_1 \frac{\partial f}{\partial \zeta} + b_1' \frac{\partial f'}{\partial \zeta}\right)\varkappa +$$
$$+ \left(b_1 \frac{\partial f}{\partial \zeta'} + b_1' \frac{\partial f'}{\partial \zeta'}\right)\varkappa' + a_1 \frac{\partial f}{\partial x} + b_1 \frac{\partial f}{\partial y} + a_1' \frac{\partial f'}{\partial x} + b_1' \frac{\partial f'}{\partial y} + c_1 = 0.$$

Sollte die Gleichung z. B. die Ableitung $\varkappa'$ nicht enthalten, so muss

$$b_1 \frac{\partial f}{\partial \zeta'} + b_1' \frac{\partial f'}{\partial \zeta'} = 0 \text{ sein,} \tag{32}$$

und das gibt

$$b_1' b_2 = b_2' b_1; \tag{33}$$

das führt zur algebraischen Relation, welche die Transformationsformeln f und f' mit einander verbindet:

$$\Omega\,[x, y, f(x, y, \zeta, \zeta'), f'(x, y, \zeta, \zeta')] = 0. \tag{34}$$

Eine Funktion f' drückt sich durch die andere f mittelst von (34) aus, und die zweite wird mittelst der Integration der homogenen Gleichung (32) mit einer unbekannten f gefunden.

Beispiel.

$$F_1 \equiv xq + xp' - z' = 0; \; F_2 = xp + 2yq - z = 0.$$

Die Gleichung (29) hat die Gestalt:

$$x^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2xy \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (x^2 p + 2xyq) \frac{\partial \Phi}{\partial z} +$$
$$+ (x^2 p' + 2xyq') \frac{\partial \Phi}{\partial z'} - xq \frac{\partial \Phi}{\partial q} + 2yq' \frac{\partial \Phi}{\partial p'} = 0.$$

Wir haben zwei partielle Integrale, die die Ableitung q' nicht enthalten:

$$\Phi_1 \equiv xq = C_1; \; \Phi_2 \equiv \frac{z}{2x} + \frac{p}{2} = C_2.$$

Mit Hilfe der Gleichung $F_2 = 0$ finden wir $xz = C_1 y + C_2 x^2$, und die Gleichung $F_1 = 0$ gibt mit Hilfe von $\Phi_1 = C_1$, $z' = xp' + C_1$; dann bekommen wir das totale Integral:

$$xz = C_1 y + C_2 x^2;\ z' = C_1 + C_3 x + C_4 xy.$$

Man könnte die zweite gegebene Gleichung abgesondert integrieren und auf diese Weise dieses totale Integral bekommen.

XVIII. In früheren Abschnitten wurde die Verallgemeinerung der Jacobi'schen Integrationsmethode der nichtlinearen Gleichungen 1. Ordnung, der Darboux'schen Methode für die nichtlinearen Gleichungen 2. Ordnung, und zuletzt der Charpit-Lagrange'schen Methode für die nichtlinearen Gleichungen 1. Ordnung dargestellt. Wir gehen nun zur Integration der linearen Gleichungen 1. Ordnung über.

Die einzige Integrationsmethode solcher Gleichungen ist die Hamburger'sche Methode. Im Abschnitt I. des I. Teiles wurde das System der linearen Gleichungen 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion für den Fall, wenn gegebene Gleichungen homogen sind und wenn die Hamburger'schen Formeln nicht angewandt werden können, vorgeführt. Im Abschnitt I. des I. Teiles meiner Arbeit: „Die Grundformeln der Integrationsmethode..." Kyjiv, 1931 habe ich die algebraischen Bedingungen, die die Hamburger'schen Bedingungen für homogene Gleichungen vertraten, angeführt und eine Methode dargestellt zum Finden von partiellen und totalen Integralen für die in Jacobi'schen Determinanten linearen Gleichungen mit 2 und 3 Funktionen und einer beliebigen Zahl unabhängiger Variablen, wenn die algebraischen Hamburger'schen Bedingungen keinen Platz finden.

Die Hamburger'sche Methode beschränkt die gegebenen Gleichungen mittelst einer Reihe von algebraischen und differentiellen Bedingungen für die Koeffizienten, so wie auch die Gestalt des Integrales, welches die Form:

$$\varphi(u_1, u_2 \dots u_m) = 0; \quad \psi(v_1, v_2, \dots v_m) = 0; \dots,$$

haben muss,

wo φ, ψ,... beliebige Funktionen von $u_1, \dots u_m$; $v_1, \dots v_m$, welche ausgerechnete Funktionen der abhängigen Variablen z_1, z_2,.. und unabhängigen x_1, x_2,... x_m sind, bedeuten. Die Hamburger'sche Methode gründet sich auf das Erlernen von Relationen zwischen den Gleichungskoeffizienten, welche bei der Differentiation der Gleichungen (34) in $x_1, \dots x_m$ auftreten. Wir behandeln weiter eine Methode der Integration von linearen Gleichungen, für welche die Form des Integrales lediglich durch die Möglichkeit der Auflösung im Bezug auf die unbekannten Funktionen $z, z', \dots$ beschränkt wird. Diese Methode erfordert dieselbe Zahl $(n-1)(m-2)$ der algebraischen Bedingungen für n unbekannte Funktionen der m Argumente, wie die Hamburger'sche Methode, doch sind jene Bedingungen andere als die Hamburger'schen und werden dann angewendet, wenn die Hamburger'sche Methode zur Integration untauglich ist Diese Methode erlaubt allgemeine totale und partielle Integrale aufzufinden, ist ebenso gültig für homogene, wie auch für nichthomogene Gleichungen, anders wie bei der Hamburger'schen Methode, welche für die homogenen Gleichungen versagt. Diese Methode ist auch dann gültig, wenn eine Gleichung solche Ableitungen, die in der anderen Gleichung vorkommen, nicht enthält d. h. auch für solche Gleichungen, für welche unmöglich ist, die charakteristische Hamburger'sche Gleichung zu bilden und seine Integrationsmethode zu gebrauchen. Diese Methode erheischt keine algebraischen Bedingungen für die Koëffizienten der Gleichungen mit n unbekannten Funktionen von nur zwei Argumenten wie in der Hamburger'schen Methode.

Für ein System von Gleichungen mit 2 Funktionen z, z' von 2 Argumenten x, y:

$$a_i p + b_i q + a_i' p' + b_i' q' + c_i = 0, \quad (i = 1, 2) \tag{35}$$

muss man das Integral in der Gestalt von endlichen Gleichungen

$$F_1(x, y, z, z') = 0; \quad F_2(x, y, z, z') = 0, \tag{36}$$

welche die unbekannten Funktionen $z(x, y)$ und $z'(x, y)$ bestimmen, finden. Wird eine von den Gleichungen (36) z. B. in z' aufgelöst, dann schreiben wir:

$$z' = \omega(x, y, z) \tag{37}$$

und die Einführung des Ausdruckes (37) in die Gleichung (36) gibt $f_1(x, y, z) = 0$ und $f_2(x, y, z) = 0$ zur Berechnung von $z = \varphi_1(x, y)$, $z' = \varphi_2(x, y)$. Nehmen wir an, dass die Funktion $\omega(x, y, z)$ bekannt ist, so bekommen wir:

$$p' = \omega_1 + \omega_3 p; \quad q' = \omega_2 + \omega_3 q,$$

wo

$$\omega_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \omega_2 = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \omega_3 = \frac{\partial \omega}{\partial z}.$$

Die Substitution in die gegebenen Gleichungen (35) gibt:

$$\begin{aligned} (a_1 + a'_1 \omega_3) p + (b_1 + b'_1 \omega_3) q + (a'_1 \omega_1 + b'_1 \omega_2 + c_1) &= 0 \\ (a_2 + a'_2 \omega_3) p + (b_2 + b'_2 \omega_3) q + (a'_2 \omega_1 + b'_2 \omega_2 + c_2) &= 0 \end{aligned} \tag{38}$$

Die Gleichungen (38) müssen äquivalent unter einander sein und sie bestimmen die Funktion $z(x, y)$ mit Hilfe der Integrierung einer linearen Gleichung mit einer unbekannten Funktion z. Wir bekommen:

$$\frac{a_1 + a'_1 \omega_3}{a_2 + a'_2 \omega_3} = \frac{b_1 + b'_1 \omega_3}{b_2 + b'_2 \omega_3} = \frac{a'_1 \omega_1 + b'_1 \omega_2 + c_1}{a'_2 \omega_1 + b'_2 \omega_2 + c_2}. \tag{39}$$

Indem wir die Bezeichungen

$$(a' b') = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{vmatrix}; \quad (a' b) = \begin{vmatrix} a'_1 & b_1 \\ a'_2 & b_2 \end{vmatrix}; \ldots, \text{ einführen,}$$

bekommen wir aus der Gleichheit der ersten zwei Beziehungen (39):

$$(a'\,b')\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2+[(a'b)+(a\,b')]\frac{\partial\omega}{\partial z}+(a\,b)=0, \tag{40}$$

und aus der Gleichheit der letzten und ersten Beziehung, oder der letzten und der zweiten:

$$(aa')\frac{\partial\omega}{\partial x}+[(a\,b')+(a'\,b')\,\alpha]\frac{\partial\omega}{\partial y}+[(a\,c)+(a'\,c)\,\alpha]=0 \tag{41'}$$

$$[(ba')+(b'a')\alpha]\frac{\partial\omega}{\partial x}+\qquad(b\,b')\frac{\partial\omega}{\partial y}+[(b\,c)+(b'\,c)\,\alpha]=0, \tag{41''}$$

wobei α eine von den Auflösungen der Gleichung (40):

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\alpha(x,y,z,\omega)\ \text{darstellt.} \tag{40'}$$

Ist das System der linearen Gleichung (40') und einer der Gleichungen (41'), (41'') integrierbar, dann können wir die Funktion ω finden. Die Substitution der Ausdrücke ω, ω_1, ω_2, ω_3 in die Gleichung (38) führt zur linearen Gleichung 1. Ordnung von der Form:

$$A\frac{\partial z}{\partial x}+B\frac{\partial z}{\partial y}+C=0$$

zur Bestimmung der Funktion $z(x,y)$.

Beispiel:

$$x\,q-q'=0;\ (x\,y+1)\,p-y\,p'+y\,z=0.$$

Die Hamburger'sche Methode findet hier keine Anwendung. Die quadratische Gleichung (40) ist:

$$\left(x-\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)\left(x\,y+1-y\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)=0.$$

Die erste Auflösung gibt mit den Gleichungen (41'), (41''):

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=x;\ \frac{\partial\omega}{\partial y}=0;\quad \omega=x\,z+\varphi(x),$$

wobei $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion ist. Die Einführung der Funktion $z'=\omega(x,y,z)$ in die Gleichungen des gegebenen Systems gibt

$\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{d\varphi}{dx}=0$ und führt zum allgemeinen Integral des gegebenen Systems:

$$z=y\,\varphi(x)+\psi(y);\ z'=(x\,y+1)\,\varphi(x)+x\,\psi(y),$$

wo $\psi(y)$ auch eine beliebige Funktion ist. Die zweite Auflösung gibt mit den Gleichungen (41'), (41'')

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = x + \frac{1}{y};\ \frac{\partial \omega}{\partial x} = z;\ \ \omega = xz + \frac{z}{y} + \Psi(y)$$

und führt zu einer anderen Gestalt des allgemeinen Integrales:

$$z = y\,[\varphi(x) + \Psi(y)];\ z' = (xy + 1)\,\varphi(x) - xy\,\Psi(y),$$

welches in die erste Gestalt übergeht, wenn wir die beliebige Funktion des y mittelst der Formel

$$\psi(y) = -y\,\Psi(y) \text{ bestimmen.}$$

Für das System der Gleichungen mit zwei Funktionen z, z' der 3 unabhängigen Variablen x_1, x_2, x_3,

$$a_{1i}\,p_1 + a_{2i}\,p_2 + a_{3i}\,p_3 + a'_{1i}\,p'_1 + a'_{2i}\,p'_2 + a'_{3i}\,p'_3 + b_i = 0, \qquad (i=1,2)$$

bei der Bezeichnung

$$\omega_k = \frac{\partial \omega}{\partial x_k},\ \ \omega_4 = \frac{\partial \omega}{\partial z} \qquad (k=1, 2, 3),$$

bekommen wir analog

$$\frac{a_{11} + a'_{11}\,\omega_4}{a_{12} + a'_{12}\,\omega_4} = \frac{a_{21} + a'_{21}\,\omega_4}{a_{22} + a'_{22}\,\omega_4} = \frac{a_{31} + a'_{31}\,\omega_4}{a_{32} + a'_{32}\,\omega_4} = \tag{42}$$

$$= \frac{a'_{11}\,\omega_1 + a'_{21}\,\omega_1 + a'_{31}\,\omega_3 + b_1}{a'_{12}\,\omega_1 + a'_{22}\,\omega_2 + a'_{32}\,\omega_3 + b_2}$$

Auf Grund von Bezeichnungen

$$(a'_1\,a'_2) = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{21} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix};\ (a_1\,a'_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{21} \\ a_{12} & a'_{22} \end{vmatrix};\ldots,$$

bekommen wir aus ersten zwei Beziehungen (42):

$$(a'_1\,a'_2)\,\omega_4^2 + [(a_1\,a'_2) + (a'_1\,a_2)]\,\omega_4 + (a_1\,a_2) = 0$$
$$(a'_1\,a'_3)\,\omega_4^2 + [(a_1\,a'_3) + (a'_1\,a_3)]\,\omega_4 + (a_1\,a_3) = 0,$$

und das führt zur algebraischen Bedingung für die Koëffizienten

$$\begin{vmatrix} (a'_1\,a'_2), & (a_1\,a'_2) + (a'_1 a_2), & (a_1\,a_2), & 0 \\ 0\ , & (a'_1\,a'_2), & (a_1\,a'_2) + (a'_1 a_2), & (a_1\,a_2) \\ (a'_1\,a'_3), & (a_1\,a'_3) + (a'_1 a_3), & (a_1\,a_3), & 0 \\ 0 & (a'_1\,a'_3), & (a_1\,a'_3) + (a'_1\,a_3), & (a_1\,a_3) \end{vmatrix} = 0 \tag{43}$$

und zur ersten linearen Gleichung zur Bestimmung der Funktion $\omega\,(x_1, x_2, x_3, z)$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \alpha\,(x_1, x_2, x_3, z, \omega), \tag{44}$$

wo:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} (a_1 a_2), & (a'_1 a'_2) \\ (a_1 a_3), & (a'_1 a'_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a'_1 a'_2), & (a_1 a'_2) + (a'_1 a_2) \\ (a'_1 a'_3), & (a_1 a'_3) + (a'_1 a_3) \end{vmatrix}}.$$

Die Gleichheit der letzten Beziehung (42) mit einer vorangehenden führt zur zweiten linearen Gleichung zur Bestimmung der Funktion ω:

$$(a_1 a'_1) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + [(a_1 a'_2) + a'_1 a'_2) \alpha] \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \qquad (45')$$

$$+ [(a_1 a'_3) + (a'_1 a'_3) \alpha] \frac{\partial \omega}{\partial x_3} + (a_1 b) + (a'_1 b) \alpha = 0$$

$$[(a_2 a'_1) + (a'_2 a'_1) \alpha] \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + (a_2 a'_2) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \qquad (45'')$$

$$+ [(a_2 a'_3) + (a'_2 a'_3) \alpha] \frac{\partial \omega}{\partial x_3} + (a_2 b) + (a'_2 b) \alpha = 0$$

$$[(a_3 a'_1) + (a'_3 a'_1) \alpha] \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + [(a_3 a'_2) + (a'_3 a'_2) \alpha] \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \qquad (45''')$$

$$+ (a_3 a'_3) \frac{\partial \omega}{\partial x_3} + (a_3 b) + (a'_3 b) \alpha = 0.$$

Auf Grund der Bestimmung der Funktion ω aus der Gleichung (44) und einer von den Gleichungen (45'), (45''), (45'''), kommen wir nach der Durchführung der Substitution $z = \omega$ in eine beliebige von den gegebenen Gleichungen zur Integration der Gleichung von der Form

$$A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial z}{\partial x_3} + A = 0$$

zwecks Bestimmung der Funktion $z\ (x_1, x_2, x_3)$.

Beispiel:

$$\left. \begin{aligned} x_1 x_2 p_1 + x_2 x_3 p_3 - x_1 p'_1 - x_1 x_2 p'_3 &= 0 \\ x_2 (x_3 - x_1 x_2) p_1 - (x_3 - x_1 x_2) p'_1 + x_2 (x_2 z - z') &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Die erste der quadratischen Gleichungen für ω_4 wird identisch erfüllt; es gibt also auch die algebraische Bedingung für die Koëffizienten. Die zweite Gleichung wird:

$$x_1 \omega_4^2 - (x_1 x_2 + x_3) \omega_4 + x_2 x_3 = 0.$$

Für die Lösung $\omega_4 = x_2$ aus den Gleichungen (45') — (45'''), von welchen die ersten zwei identisch erfüllt werden, haben wir:

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = x_2 ; \ (x_1 x_2 - x_3) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = x_2 (\omega - x_2 z)$$

$$\omega = x_2 z + (x_3 - x_1 x_2) \varphi (x_2, x_3),$$

wo φ eine beliebige Funktion ist. Das Einführen von $z' = \omega$ in die erste gegebene Gleichung gibt

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3},$$

und — indem wir mit ψ die zweite beliebige Funktion bezeichnen — bekommen wir das allgemeine Integral:

$$z = x_1 \varphi (x_2, x_3) + \psi (x_1, x_2);\; z' = x_2 \psi (x_1, x_2) + x_3 \varphi (x_2, x_3).$$

Für das System von zwei unbekannten Funktionen mit m Argumenten

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} p_i + \sum_{i=1}^{m} a'_{i1} p'_i + b_1 = 0;\; \sum_{i=1}^{m} a_{i2} p_i + \sum_{i=1}^{m} a'_{i2} p'_i + b_2 = 0,$$

bekommen wir nach der Elimination von ω_{m+1} aus $m-1$ quadratischen Gleichheiten $m-2$ algebraische Bedingungen für die Koëffizienten:

$$(a_1 a_j) \begin{vmatrix} (a'_1 a'_2), & (a_1 a'_2) + (a'_1 a_2) \\ (a'_1 a'_j), & (a_1 a'_j) + (a'_1 a_j) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} (a_1 a_2), & (a'_1 a'_2) \\ (a_1 a_j), & (a'_1 a'_j) \end{vmatrix}^2 (a'_1 a'_j) +$$

$$+ \begin{vmatrix} (a'_1 a'_2), & (a_1 a'_2) + (a'_1 a_2) \\ (a'_1 a'_j), & (a_1 a'_j) + (a'_1 a_j) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (a_1 a_2), & (a'_1 a'_2) \\ (a_1 a_j), & (a'_1 a'_j) \end{vmatrix} [(a_1 a'_j) + (a'_1 a_j)] = 0,$$

$$(j = 3, 4, \ldots m)$$

so wie auch ein System von zwei linearen Gleichungen 1. Ordnung für die Bestimmung der Funktion ω:

$$\begin{vmatrix} (a'_1 a'_2), & (a_1 a'_2) + (a'_1 a_2) \\ (a'_1 a'_k), & (a_1 a'_k) + (a'_1 a_k) \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} = \begin{vmatrix} (a_1 a_2), & (a'_1 a'_2) \\ (a_1 a_k), & (a'_1 a'_k) \end{vmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left\{ (a_1 a'_i) \begin{vmatrix} (a'_1 a'_2), & (a_1 a'_2) + (a'_1 a_2) \\ (a'_1 a'_k), & (a_1 a'_k) + (a'_1 a_k) \end{vmatrix} + (a'_1 a'_i \begin{vmatrix} (a_1 a_2), & (a'_1 a'_2) \\ (a_1 a_k), & (a'_1 a'_k) \end{vmatrix} \right\} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} +$$

$$+ (a_1 b) \begin{vmatrix} (a'_1 a'_2), & (a_1 a'_2) + (a'_1 a_2) \\ (a'_1 a'_k), & (a_1 a'_k) + (a'_1 a_k) \end{vmatrix} + (a'_1 b) \begin{vmatrix} (a_1 a_2), & (a'_1 a'_2) \\ (a_1 a_k), & (a'_1 a'_k) \end{vmatrix} = 0,$$

wo k eine von den Zahlen $j = 3, 4, \ldots m$ bedeutet. Die Funktion $z (x_1, \ldots x_m)$ finden wir durch das Integrieren der linearen Gleichung 1. Ordnung, indem wir die gefundene Funktion $z' = \omega$ in eine von gegebenen Gleichungen einsetzen.

Das System von n Gleichungen mit n unbekannten Funktionen $z_1, \ldots z_n$ der m unabhängigen $x_1, \ldots x_m$ reduziert sich zum System von $n-1$ linearen Gleichungen mit $n-1$ unbekannten Funktionen $z_1, \ldots z_{n-1}$ der m unabhängigen, falls entsprechende $m-2$ Bedingungen für die Koëffizienten erfüllt werden. Wir gehen nun zum System $n-2$

unbekannten Funktionen $z_1, \dots z_{n-2}$ bei neuen $m-2$ Bedingungen für die Koëffizienten über und haben im allen

$$(n-1)(m-2)$$

Bedingungen für die Koëffizienten, um zur Integration einer linearen Gleichung mit einer unbekannten Funktion z_1 zu gelangen. Die Integrationsmethode erfordert keine algebraischen Bedingungen im Falle von n Funktionen und 2 unabhängigen Variablen x, y.

Es genügt die Detailformeln für das System von 3 Gleichungen mit 3 Funktionen z, z', z'' der zwei Argumente x, y:

$$a_i p + b_i q + a_i' p' + b_i' q' + a_i'' p'' + b_i'' q'' + c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

anzuführen.

Hätten wir eine von den notwendigen Gleichungen des totalen oder allgemeinen Integrals $F_i(x, y, z, z', z'') = 0$ z. B. auf Bezug von z'' aufgelöst, so dass

$$z'' = \omega\ (x, y, z, z'),$$

dann hätten wir

$$p'' = \omega_1 + \omega_3 p + \omega_4 p'; \; q'' = \omega_2 + \omega_3 q + \omega_4 q',$$

wobei:

$$\omega_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \omega_2 = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \omega_3 = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad \omega_4 = \frac{\partial \omega}{\partial z'}.$$

Das Einsetzen der Funktion ω und der Ableitungen p'', q'' in das gegebene System führt dann zu den linearen Gleichungen mit zwei unbekannten Funktionen z, z':

$$(a_i + a_i'' \omega_3)\ p + (b_i + b_i'' \omega_3)\ q + (a_i' + a_i'' \omega_4)\ p' +$$
$$+ (b_i' + b_i'' \omega_4)\ q' + a_i'' \omega_1 + b_i'' \omega_2 + c_i = 0.$$

Eine von diesen Gleichungen muss aus zwei anderen Gleichungen folgen, und das führt zur Nullgleichheit aller Determinanten 3. Ordnung der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} a'_1 + a''_1 \omega_4, & b'_1 + b''_1 \omega_4, & a_1 + a''_1 \omega_3, & b_1 + b''_1 \omega_3, & a''_1 \omega_1 + b''_1 \omega_2 + c_1 \\ a'_2 + a''_2 \omega_4, & b'_2 + b''_2 \omega_4, & a_2 + a''_2 \omega_3, & b_2 + b''_2 \omega_3, & a''_2 \omega_1 + b_2'' \omega_2 + c_2 \\ a'_3 + a''_3 \omega_4, & b'_3 + b''_3 \omega_4, & a_3 + a''_3 \omega_3, & b_3 + b''_3 \omega_3, & a''_3 \omega_1 + b''_3 \omega_2 + c_3 \end{matrix} \right\|.$$

Für die Nullgleichheit aller Determinanten 3. Ordnung ist es notwendig und genügend, dass nur 3 Determinanten, der Unterdeterminante 2. Ordnung zugeschrieben, null seien. Z. B wir bekommen aus den Elementen der ersten zwei Vertikalreiben — bei der Bezeichnung:

$$(a'\, b'\, a) = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & a_1 \\ a'_2 & b'_2 & a_2 \\ a'_3 & b'_3 & a_3 \end{vmatrix}; \; (a'\, b''\, a) = \begin{vmatrix} a'_1 & b''_1 & a_1 \\ a'_2 & b''_2 & a_2 \\ a'_3 & b''_3 & a_3 \end{vmatrix}; \dots, \; —$$

zuerst

$$(a'b'a) + [(a'b''a) + (a''b'a)]\,\omega_4 + (a''b''a)\,\omega^2_4 + [(a'b'a'') + $$
$$+ (a'b''a'')\,\omega_4]\,\omega_3 = 0$$

$$(a'b'b) + [(a'b''b) + (a''b'b)]\,\omega_4 + (a''b''b)\,\omega^2_4 + [(a'b'b'') + $$
$$+ (b'b''a'')\,\omega_4]\,\omega_3 = 0,$$

was eine Gleichung 3. Grades für ω_4:

$$\begin{vmatrix} (a''b''a), & (a''b''b) \\ (a''b''a'), & (a''b''b') \end{vmatrix} \omega^3_4 + \tag{46}$$
$$+ \left\{ \begin{vmatrix} (a''b''a), & (a''b''b) \\ (a'a''b'), & (a'b''b') \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (a'b''a) + (a''b'a), & (a''b''a') \\ (a'b''b) + (a''b'b), & (a''b''b') \end{vmatrix} \right\} \omega^2_4 +$$
$$+ \left\{ \begin{vmatrix} (a'b'a), & (a'b'b) \\ (a''b''a'), & (a''b''b') \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (a'b''a) + (a''b'a), & (a'a''b') \\ (a'b''b) + (a''b'b), & (a'b''b') \end{vmatrix} \right\} \omega_4 +$$
$$+ \begin{vmatrix} (a'b'a), & (a'b'b) \\ (a'a''b'), & (a'b''b') \end{vmatrix} = 0,$$

und eine lineare Gleichung 1. Ordnung

$$[(a'b'a'') + (a'b''a'')\,\alpha]\frac{\partial\omega}{\partial z} + (a'b'a) + [(a'b''a) + (a''b'a)]\,\alpha + $$
$$+ (a''b''a)\,\alpha^2 = 0 \tag{47}$$

gibt, wo α eine Lösung der kubischen Gleichung (46):

$$\frac{\partial\omega}{\partial z'} = \alpha\,(x, y, z, z', \omega) \text{ ist,} \tag{48}$$

und zweitens wir bekommen noch eine folgende lineare Gleichung zur Bestimmung der Funktion ω:

$$[(a'b'a'') + (a'b''a'')\,\alpha]\frac{\partial\omega}{\partial x} + [(a'b'b'') + (b'b''a'')\,\alpha]\frac{\partial\omega}{\partial y} + $$
$$+ (a'b'c) + [(a'b''c) + (a''b'c)]\,\alpha + (a''b''c)\,\alpha^2 = 0. \tag{49}$$

Ist für eine von den Lösungen der Gleichung (46) das System von 3 linearen Gleichungen (47), (48), (49) integrierbar, dann führt das Einsetzen der gefundenen Funktion ω in das gegebene System zur Integration von zwei linearen Gleichungen mit zwei unbekannten Funktionen z, z', von der Form:

$$A_i p + B_i q + A'_i p' + B'_i q' + C_i = 0. \quad (i = 1, 2) \tag{50}$$

Beispiel:

$$-yp' + yq' + p'' - q'' + z' = 0;\ 2xzp - (1+y)p' + p'' + z^2 = 0;$$
$$(2xz + 3z^2)\,q - 2yp' - q' + 2p'' = 0.$$

Die kubische Gleichung (46) wird dann:

$$2\,\omega^3_4 - 3\,(2y+1)\,\omega^2_4 + (6y^2 + 6y + 1)\,\omega_4 - y\,(2y^2 + 3y + 1) = 0.$$

Für die Auflösung $\alpha = y$ haben wir lineare Gleichungen (47), (48), (49):

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = 0\,;\ \frac{\partial\omega}{\partial z'} = y\,;\ \frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\omega}{\partial y} + z' = 0$$

und finden $\omega = yz + \chi(x+y)$, wo χ eine beliebige Funktion von $u = x + y$ ist. Das Einsetzen der Ausdrücke für z'', p'', q'' in das gegebene System gibt zwei lineare Gleichungen (50) mit 2 unbekannten Funktionen z, z':

$$2xzp - p' + z^2 + \frac{d\chi}{du} = 0\,;\ \ (2xz + 3z^2)\,q - q' + 2\,\frac{d\chi}{du} = 0.$$

Indem wir $z' = \Omega\,(x, y, z)$ bezeichnen, bekommen wir quadratische Gleichung (40):

$$\Omega^2_3 - z\,(4x + 3z)\,\Omega_3 + 2xz^2(2x + 3z) = 0.$$

Für die Auflösung $\alpha = 2xz$ geben die Gleichungen (40') und (41'), (41'')

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 2xz;\ \frac{\partial\Omega}{\partial x} = z^2 + \frac{d\chi}{du}\,;\ \ \Omega = xz^2 + \chi\,(x+y) + \psi\,(y),$$

wo ψ eine neue beliebige Funktion ist. Das Einsetzen der Ausdrücke z', p', q' in das System (50) gibt eine lineare Gleichung zum Bestimmen der Funktion z u. z. $3z^2\,\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\chi}{du}$, und wir bekommen

$$z^3 = \varphi\,(x) + \psi\,(y) - \chi\,(x+y)\,;\ \ z' = xz^2 + \psi\,(y) + \chi\,(x+y)\,;$$
$$z'' = xyz^2 + y\,\psi\,(y) + (1+y)\,\chi\,(x+y),$$

wo φ die dritte beliebige Funktion ist.

Leningrad, 2. X. 1935.

Nachtrag.

Die Integrationsmethode der linearen Gleichungen, wie sie im letzten Abschnitte dargestellt wurde, bleibt richtig auch für die in Jacobi'schen Determinanten linearen Gleichungen; die Koëffizienten der algebraischen und Differential-hilfsgleichungen werden lediglich mit neuen Koëffizienten, die leicht zu bestimmen sind, vertauscht.

Der Verfasser hat heuer in „Comptes Rendus de l'Academie des Sc. de l'URSS" eine zweite Methode der Integrierung der in Jacobi'schen Determinanten linearen Gleichungen entwickelt, wobei es nicht nötig ist, ein System der linearen Hilfsgleichungen mit einer unbekannten Funktion zu integrieren, sondern es genüge eine spezielle lineare Gleichung 1. Ordnung mit einer Funktion zu integrieren. Folgend, man kann der Reihe nach jede von n Gleichungen des gegebenen Systems mit den n unbekannten Funktionen $z_1 .. z_n$ integrieren. Zuletzt es ist nicht nötig die algebraischen Hilfsgleichungen n. Grades bei n unbekannten Funktionen, wie in der letzten Methode und auch in der Methode von Hamburger, aufzulösen.

Um die Gleichung:

$$Ap + Bq + C + A'p' + B'q' + D(pq' - qp') = 0, \tag{I}$$

welche bei der Bedingung $AB' - BA' = CD$ ein allgemeines Integral von der Form

$$u_1(x, y, z, z') = \varphi\,[u_2(x. y, z, z')] \tag{II}$$

wo φ eine beliebige Funktion ist, besitzt, zu integrieren, führen wir die Bezeichnungen

$$\frac{\partial\,(u_1, u_2)}{\partial\,(x, y)} = (xy),\ \frac{\partial\,(u_1, u_2)}{\partial\,(x, z)} = (xz), \ldots\ \frac{\partial\,(u_1, u_2)}{\partial\,(z, z')} = (zz')$$

ein. Dann bekommt man durch die Differentiation der Gleichheiten

$$u_1(x, y, z, z') = c_1, \quad u_2(x, y, z, z') = c_2$$

$$(zz')p + (xz') = 0, \quad (zz')q + (yz') = 0, \ldots \quad (zz')(pq' - qp') - (xy) = 0$$

und statt (I) die Gleichung:

$$(xz')A + (yz')B - (zz')C + (zx)A' + (zy)B' - (xy)D = 0. \tag{III}$$

Andererseits bekommen wir durch die Elimination dz' aus den totalen Differentialen

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}dx + \frac{\partial u_i}{\partial y}dy + \frac{\partial u_i}{\partial z}dz + \frac{\partial u_i}{\partial z'}dz' = 0 \quad (i = 1, 2)$$

$$(xz')dx + (yz')dy + (zz')dz = 0. \tag{IV}$$

Wenn wir also eine solche Funktion $u_1(x, y, z, z')$ finden, dass:

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{-C}$$

ist, dann ist für jede Funktion $u_2(x, y, z, z')$ die Gleichheit (IV) der Gleichheit:

$$(xz')A + (yz')B - (zz')C = 0$$

äquivalent und statt (III) bekommt man:

$$(zx)A' + (zy)B' - (xy)D = 0.$$

Wenn wir also die Funktion u_1 als ein partielles Integral einer folgenden linearen Gleichung 1. Ordnung mit einer ubekannten Funktion

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} - C\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{V}$$

bestimmen, so bekommen wir u_2 als ein partielles Integral der linearen Gleichung mit einer Funktion:

$$(A'u_{13} + Du_{12})\frac{\partial u}{\partial x} + (B'u_{13} - Du_{11})\frac{\partial u}{\partial y} - (A'u_{11} + B'u_{12})\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{VI}$$

wobei:

$$u_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x},\ u_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial y},\ u_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial z} \text{ bedeuten.}$$

Die Variable z' wird in den Gleichungen (V) und (VI) parametrisch.

Man könnte auch u'_1 aus einer analogen Gleichung (V) bestimmen, wobei A und B mit A', B' vertauscht werden, und z in der Ableitung bei C in z' übergeht; dann wird Glg. (VI) zur Bestimmung von u'_2 entsprechend umgearbeitet.

Für die Gleichung mit zwei Funktionen z, z' von drei Argumenten x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + C + A'_1 p'_1 + A'_2 p'_2 + A'_3 p'_3 + \\ + D_1(p_2 p'_3 - p_3 p'_2) + D_2(p_3 p'_1 - p_1 p'_3) + D_3(p_1 p'_2 - p_2 p'_1) = 0 \end{aligned} \tag{VII}$$

geht die Gleichung (V), wenn wir das allgemeine Integral von der Form:

$$u_1(x_1, x_2, x_3, z, z') = \varphi[u_2(x_1, \ldots z');\ u_3(x_1, \ldots z')]$$

suchen, in die Gleichung:

$$A_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + A_3\frac{\partial f}{\partial x_3} - C\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{VIII}$$

über, und wir bekommen statt (VI):

$$\begin{aligned} (A'_1 u_{14} - D_2 u_{13} + D_3 u_{12})\frac{\partial u}{\partial x_1} + (A'_2 u_{14} - D_3 u_{11} + D_1 u_{13})\frac{\partial u}{\partial x_2} + \\ + (A'_3 u_{14} - D_1 u_{12} + D_2 u_{11})\frac{\partial u}{\partial x_3} - A'_1 u_{11} + A'_2 u_{12} + A'_3 u_{13})\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \end{aligned} \tag{IX}$$

wobei

$$u_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots\ u_{14} = \frac{\partial u_1}{\partial z} \text{ bedeuten.}$$

Analog schreibt man lineare Hilfsgleichungen für zwei unbekannte Funktionen mit beliebigen Argumenten $x_1 \ldots x_m$.

Für 3 unbekannte Funktionen $z\, z'\, z''$ — für z. B. zwei Argumente x, y — wenn wir

$$u_k\,(x\,y\,z\,z'\,z'') = c_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

betrachten und die Jacobi'schen Determinanten 3. Ordnung einführen, geht die Gleichung:

$$Ap + Bq + C + A'p' + B'q' + A''p'' + B''q'' + \\ + D_1\,(p'q'' - p''q') + D_2\,(p''q - p\,q'') + D_3\,(p\,q' - p'q) = 0$$

in die Gleichung:

$$(x z' z'')\,A + (y z' z'')\,B + (z x z'')\,A' + (z y z')\,B' + (z z' x)\,A'' + \\ + (z z' y)\,B'' - (z z' z'')\,C - (z x y)\,D_1 - (y z' x)\,D_2 - (x y z'')\,D_3 = 0$$

über.

Drei totale Differentiale $d u_1 = 0$, $d u_2 = 0$, $d u_3 = 0$ führen zur Bestimmung eines partiellen Integrals u_1 der Gleichung von der Form (V) mit den Parametern $z'\, z''$, so wie auch zur Bestimmung eines partiellen Integrals v_1 einer in den Jacobi'schen Determinanten linearen Gleichung mit zwei unbekannten Funktionen $u_2\, u_3$ der Argumente x, y, z, z', z''. Analog werden die Gleichungen mit 3 Funktionen der 3,... m Argumente integriert u. s. w.

S p e z i e l l e F ä l l e: 1) Sind die Koëffizienten D gleich Null, dann hat man den Fall der Integration der linearen Gleichungen 1. Ordnung einer unbekannten Funktion z.

B e i s p i e l e. Für das im letzten Abschnitt untersuchte System

$$x\,q - q' = 0, \quad (x\,y + 1)\,p - y\,p' + y\,z = 0,$$

wenn man die Hamburger'sche Methode nicht antwenden kann, gibt die Glg. (V) $u_1 = z' - x\,z$, und die Glg. (VI) $u_2 = x$ und wir bekommen:

$$z' - x\,z = \varphi\,(x).$$

Die zweite Gleichung führt zu den Integralen

$$u_3 = (x\,y + 1)\,z - y\,z', \; u_4 = y$$

und gibt die zweite Abhängigkeit des allgemeinen Integrals des Systemes:

$$(x\,y + 1)\,z - y\,z' = \psi\,(y).$$

Für das zweite Beispiel:

$$-x_1\,x_2\,p_2 + x_1\,x_3\,p_3 + x_2\,z\,p'_2 - x_3\,z\,p'_3 + x_1\,x_2\,(p_1\,p'_2 - p_2\,p'_1) + \\ + x_1\,x_3\,(p_3\,p'_1 - p_1\,p'_3) = 0$$

gibt die Gleichung (VIII): $u_1 = x_1 + z'$, und die Glg. (IX) $u_2 = x_2\,x_3$. Ausserdem gibt noch die Glg. (VIII) $u_2 = x_2\,x_3$, $u_3 = x_1\,z$; diese Integrale genügen der Glg. (IX). Das allgemeine Integral ist:

$$x_1\,z = \varphi\,(x_1 + z'\,;\; x_2\,x_3).$$

Leningrad, am 25. März 1937.

МИРОН ЗАРИЦЬКИЙ (Львів)

Сучинники кореляції в теорії математичної статистики.

У західноевропейських народів і в Америці бачимо в післявоєнних роках незвичайно інтензивний розвиток статистичної техніки, а з другого боку численні праці математиків, природознавців і економістів поклали ясні основи під абстрактну теорію математичної статистики. Щойно найновіші роки принесли нам точні дефініції статистичних понять і логічні сформулования проблем теоретичної статистики. Усі, що їм була потрібна статистика при їх спеціяльних дослідах, зрозуміли, що тільки математична аналіза й абстрактна теорія ймовірности можуть дати наукову основу до будови статистики й до інтерпретації її висновків у приложенні до економіки, соціології й природознавства.

У нас цею ділянкою ще ніхто не зацікавився. А чейже проблеми наукової статистики моглиби сьогодні заінтересувати не тільки математиків. Статистичними методами послугується кожний фізик, антрополог, зоолог і ботанік. Але мабуть найбільше користи принесла б наукова статистика дослідникам економічного життя нашого народу. Кожна — і найменша і найбільша — економічна установа зладжує періодично „біляпси“ і „статистичні викази“, але вони дають хиба тільки сирий матеріял до статистичних дослідів. До них треба щойно прикласти цілий математичний апарат теорії статистики, щоби на основі математичних обчислень можна було подати якісь загальні висновки. Щойно математична аналіза статистичних табель може довести до якоїсь інтерпретації безлічи числових даних, що їх подибуємо у виказах і білянсах. Математична статистика відкриває звязки між економічними явищами і подає числа, що оцінюють ступінь залежности між економічними фактами. Практик-економіст використовує ці висновки для доцільного організовання економічного життя, а теоретик досліджує причини й наслідки відкритих математиком фактів і формує загальні закони теоретичної економіки.

Це все навело мене на думку подати короткий фрагмент із теорії найновішої статистики і з'ілюструвати деякі статистичні методи на білянсах кооператив приналежних до Ревізійного Союза Українських Кооператив у Львові.

I.

Буду зазначувати основні поняття теорії статистики символами, що їх увів професор університету в Осло *А. Чупров* у своїй знаменитій монографії: „Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie" (B. G. Teubner, 1925) і яких уживають, ізза їх простоти й доцільности, майже всі новіші автори, як нпр. *R. Risser - C. E. Traynard* у своїй книзі „Les principes de la Statistique mathématique" (Gauthier-Villars, 1933).

Величину x називаємо припадковою змінною величиною [1]) k-того ступня, коли ця величина може мати k різних вартостей і коли є все точно означена ймовірність, що вона буде мати якунебудь із тих вартостей. Коли нпр. маємо у скрині 5 карток із числом 1, 3 із числом 2 і 2 із числом 3 і тягнемо на сліпо одну картку, то величина добутого на картці числа може мати три різні вартости: $x_1=1$, $x_2=2$ і $x_3=3$. Притім імовірність, що буде $x=1$, є рівна $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, імовірність, що $x=2$, є $\frac{3}{10}$, а ймовірність, що $x=3$, є $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$. Отже добуте зі скрині число є припадковою змінною величиною 3-тього ступня.

Припустім, що дві припадкові змінні величини x і y можуть мати вартости:

$$x=x_1,\ x_2,\ x_3, \dots\ x_k$$
$$y=y_1,\ y_2,\ y_3, \dots\ y_l.$$

Символом $p_{i|}$ зазначуємо ймовірність, що величина x дістане вартість x_i, а знак $p_{|j}$ це ймовірність, що буде $y=y_j$.

Символ $p_{i|j}$ нехай зазначує ймовірність, що $x=x_i$ і рівночасно $y=y_j$.

Знак $p_{i|}^{(j)}$ це ймовірність, що змінна x буде мати вартість x_i, коли вже знаємо, що величина y має вартість y_j, а $p_{|j}^{(i)}$ це ймовірність, що буде $y=y_j$, коли вже знаємо, що $x=x_i$.

Припадкові змінні x і y називаємо стохастично [2]) незалежними величинами, коли $p_{|j}^{(i)}=p_{|j}$ для $i=1,\ 2,\dots\ k$, $j=1,\ 2\dots\ l$. Тоді маємо також: $p_{i|}^{(j)}=p_{i|}$ для $i=1,\ 2,\dots\ k$, $j=1,\ 2,\dots\ l$.

[1]) zufällige variable Grösse.

[2]) Слово „стохастичний" (від στοχάζομαι = відгадую, додумуюся) має значіння прикметника до назви „теорія ймовірности". У німецькій мові маємо: stochastisch-wahrscheinlichkeitstheoretisch. Тяжко в нашій мові найти відповідний прикметник, що характеризувавби те все, що відноситься до теорії ймовірности (як нпр. ботаніка-ботанічний).

Достатньою й необхідньою умовою незалежности величин x і y є рівність: $p_{i|j}=p_{i|} \cdot p_{|j}$.

II.

Моментом ступня $f+g$ називаємо математичне сподівання добутка $x^f \cdot y^g$, отже:

$$m_{f|g} = E\, x^f \cdot y^g = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} p_{i|j}\, x_i^f\, y_j^g.$$

Математичні сподівання:

$$\mu_{f|g}=E\,(x - m_{1|0})^f\,(y - m_{0|1})^g = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} p_{i|j}\,(x_i - m_{1|0})^f\,(y_j - m_{0|1})^g$$

називаємо середніми відхиленнями. Це моменти відносно точки:

$$x_0 = m_{1|0} = \sum_{i=1}^{k} p_{i|}\, x_i, \quad y_0 = m_{0|1} = \sum_{j=1}^{l} p_{|j}\, y_j.$$

Величини $\mu_{2|0} = \sigma^2_x$ і $\mu_{0|2} = \sigma^2_y$ називаємо дисперсіями величин x і y (це квадрати середніх квадратичних відхилень).

Число $m_{1|0}$ є математичним сподіванням змінної x, а $m_{0|1}$ це математичне сподівання величини y.

Збір усіх можливих вартостей величини x і відповідних імовірностей, що x буде мати котрунебудь із тих вартостей, називаємо законом розділу припадкової величини x.

Колиж маємо дві припадкові змінні величини x і y з їх можливими вартостями і знаємо, яка є ймовірність кожної пари тих вартостей, то кажемо, що знаємо закон залежности обох величин. Отже закон залежности подає всі вартости x_1, x_2, x_3,... x_k і y_1, y_2, y_3,... y_l і всі ймовірности $p_{i|j}$ для $i=1, 2,... k$ і $j=1, 2... l$.

Збір усіх вартостей, які може мати величина y тоді, коли знаємо вже, що величина x має якусь точно означену вартість $x=x_i$, і збір усіх імовірностей, що y буде мати котрунебудь із своїх вартостей, (при данім $x=x_i$) називаємо умовним законом розділу величини y. Отже умовний закон розділу величини y (для $x=x_i$) мусить подати вартости величин $p_{|j}^{(i)}$ для $j=1, 2,... l$.

Коли умовний закон розділу величин y є такий самий для всіх вартостей величини x, то y є стохастично незалежне від величини y.

Треба точно відрізнити поняття стохастичної залежности від поняття функційної залежности межи двома величинами. Величина y є функцією величини x, коли є даний закон, на основі якого кожній вартости величини x відповідає якась одна вартість величини y, або коли для якоїсь вартости „аргументу" x

величина y може мати різні (але точно означені) вартости, причім не можна говорити про ймовірність, що y дістане одну з тих вартостей. Коли нпр. $y=\sqrt{x}$, то для $x=4$, може бути $y=+2$ або $y=-2$, але ту не можна питати, яка є ймовірність, що буде $y=+2$.

Умовним математичним сподіванням величини y називаємо математичне сподівання величини y, коли x має якусь точно означену із своїх можливих вартостей. Означуємо його формулою:

$$E^{(i)}\,y = \sum^{l} p_{|j}{}^{(i)}\,y_j\,.$$

Аналогічно означуємо умовне сподівання величини x:

$$E^{(j)}\,x = \sum_{i=1}^{k} p_{i|}{}^{(j)}\,x_i\,.$$

Умовне математичне сподівання величини y є функцією величини x:

$$E^{(i)}\,y = F(x_i).$$

Це рівняння називаємо рівнянням регресії величини y відносно величини x. Рівняння $E^{(j)}\,x=\Phi\,(y_j)$ є рівнянням регресії змінної x відносно змінної y. Образи тих рівнань називаємо лініями регресії. Ті „лінії“ будуть складатися очевидно з поодиноких точок, якщо можливі вартости величин x і y не творять континуум.

Pearson називає змінну y корелятивно (не-) залежною від змінної x, коли умовне математичне сподівання величини y є (не-) залежне від вартости величини x. При корелятивній незалежности величини y від величини x маємо: $E^{(i)}\,y = \mathrm{const}$, а лінія регресії y відносно x є простою рівнобіжною до оси X.

Із стохастичної незалежности виходить незалежність корелятивна, але з корелятивної незалежности не виходить незалежність стохастична. З корелятивної незалежности величини y відносно x не виходить корелятивна незалежність величини x відносно y.

Можемо також досліджувати середнє квадратичне відхилення величини y при якійсь точно означеній вартости $x = x_i$. Зазначимо його символом $\sigma^{(i)}(y)$. Це є умовне середнє квадратичне відхилення величини y. Рівнання $\sigma^{(i)}(y)=f(x_i)$ називаємо скедастичним рівнанням величини y відносно величини x. Рівнання $\sigma^{(j)}(x) = \varphi(y_j)$ називаємо скедастичним рівнанням величини x відносно величини y. Коли $\sigma^{(i)}\,(y) = \mathrm{const}$ (для $i=1, 2, \ldots k$), то називаємо величину y гомоскедастичною відносно величини x, коли $\sigma^{(i)}(y) = \mathrm{const}$, то y є гетероскедастичне відносно змінної x.

III.

Основною проблємою теорії стохастичної залежности між двома припадковими змінними величинами є математичне означення тої залежности. Зміна одної величини може менче або більше зміняти розподіл можливих вартостей другої величини і їх імовірностей. Отже треба також означити якось міру взаємної залежности між двома припадковими змінними величинами.

Pearson увів міру, яку назвав середньою квадратичною стичністю (Mean square Contingency) і яку означив рівністю:

$$\varphi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{\{p_{i|j} - p_{i|} \cdot p_{|j}\}^2}{p_{i|} \cdot p_{|j}}$$

Коли величини x і y є стохастично незалежні, то маємо $p_{i|j} = p_{i|} \cdot p_{|j}$, отже $\varphi^2 = 0$. Коли y є функцією величини x, то: $l = k$ і маємо: $\varphi_2 = k - 1$.

Отже величина

$$\tau^2 = \frac{1}{\sqrt{(k-1)(l-1)}} \cdot \varphi^2$$

є мірою стохастичної залежности, якої вартість лежить між 0 і 1, залежно від ступня залежности, від повної незалежности аж до функційної залежности. Число τ^2 як міру залежности увів замість φ^2 *А. Чупров.* Коли $k \to \infty$, $l \to \infty$, тоді треба в кожнім випадку доказати існування границі $\lim \tau^2$.

Найважнішим числом у теорії кореляції є с у ч и н н и к к о р е л я ц і ї означений формулою:

$$r_{1|1} = \frac{\mu_{1|1}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\mu_{1|1}}{\sqrt{\mu_{2|0} \cdot \mu_{0|2}}}$$

Коли x і y є стохастично незалежні, то $r_{1|1} = 0$. Але з рівности $r_{1|1} = 0$ не виходить стохастична незалежність. З другого боку рівність $r_{1|1} = 1$ не є необхідною умовою функційної залежности між x і y. Тільки тоді, коли лінії регресії y відносно x і x відносно y є прості, виходить з рівности $r_{1|1} = 1$ функційна залежність між величинами x і y. Маємо все: $0 \leq r^2_{1|1} \leq 1$.

Ще іншою мірою залежности є „корелятивне відношення“:

$$\eta^2_{y|x} = 1 - \frac{1}{\mu_{0|2}} \sum_{i=1}^{k} p_{i|} \, \mu^{(i)}{}_{|2}.$$

Коли регресія є простолінійна, то $r^2_{1|1} = \eta^2_{y|x}$, а в інших випадках є все $r^2_{1|1} < \eta^2_{y|x}$.

Коли $\eta^2_{y|x} = 0$, то x і y є корелятивно незалежні, але для даного $x = x_i$ може бути різна амплітуда змін вартостей величини y

IV.

Для ілюстрації подаю обчислення статистичних сталих на однім конкретнім прикладі, де ймовірности є дані a priori. Припустім, що в скрині A є 3 картки з числом 1, дві картки з числом 2 і одна картка з числом 3, а в скрині B є дві картки з числом 1 і одна картка з числом 2. Тягнемо рівночасно одну картку зі скрині A і одну картку зі скрині B. Нехай x зазначує число добуте зі скрині A, а літера y нехай зазначує суму чисел добутих з обох скринь. Щоби дослідити стохастичну залежність межи припадковими величинами x і y, випишемо всі можливі випадки. Тому, що в скрині A є 6 карток, а в скрині B є їх 3, дістанемо 18 можливих випадків: [1])

$$x = 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3.$$
$$z = 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2.$$
$$y = 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5.$$

Маємо: $i = 3$, $j = 4$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$; $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 4$, $y_4 = 5$. Число можливих випадків $N = 18$. Зазначім: $\eta_{i|}$ = число випадків, у яких $x = x_i$, $\eta_{|j}$ = число випадків, у яких $y = y_j$, $\eta_{i|j}$ = число випадків, у яких $x = x_i$ і рівночасно $y = y_j$.

Кореляційна табеля.

	$y_1 = 2$	$y_2 = 3$	$y_3 = 4$	$y_4 = 5$	
$x_1 = 1$	6	3			$n_{1\|} = \sum_{j=1}^{4} n_{1\|j} = 9$
$x_2 = 2$		4	2		$n_{2\|} = \sum_{j=1}^{4} n_{2\|j} = 6$
$x_3 = 3$			2	1	$n_{3\|} = \sum_{j=1}^{4} n_{3\|j} = 3$
	$n_{\|1} = 6$	$n_{\|2} = 7$	$n_{\|3} = 4$	$n_{\|4} = 1$	$N = \sum_{i=1}^{3} n_{i\|} = \sum_{j=1}^{4} n_{\|j} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} n_{i\|j} = 18$

Табелі ймовірностей.

$$p_{1|} = \tfrac{1}{2},\quad p_{2|} = \tfrac{1}{3},\quad p_{3|} = \tfrac{1}{6},\qquad \sum_{i=1}^{3} p_{i|} = 1 \qquad \text{I.}$$

$$p_{|1} = \tfrac{1}{3},\quad p_{|2} = \tfrac{7}{18},\quad p_{|3} = \tfrac{2}{9},\quad p_{|4} = \tfrac{1}{18};\qquad \sum_{j=1}^{4} p_{|j} = 1$$

---

[1]) Літера z зазначує число добуте зі скрині B.

$$p_{|1}^{(1)} = \tfrac{2}{3},\quad p_{|2}^{(1)} = \tfrac{1}{3},\quad p_{|3}^{(1)} = 0,\quad p_{|4}^{(1)} = 0;\qquad \sum_{j=1}^{4} p_{|j}^{(1)} = 1 \qquad \text{II.}$$

$$p_{|1}^{(2)} = 0,\quad p_{|2}^{(2)} = \tfrac{2}{3},\quad p_{|3}^{(2)} = \tfrac{1}{3},\quad p_{|4}^{(2)} = 0;\qquad \sum_{j=1}^{4} p_{|j}^{(2)} = 1$$

$$p_{|1}^{(3)} = 0,\quad p_{|2}^{(3)} = 0,\quad p_{|3}^{(3)} = \tfrac{2}{3},\quad p_{|4}^{(3)} = \tfrac{1}{3};\qquad \sum_{j=1}^{4} p_{|j}^{(3)} = 1$$

$$p_{1|}^{(1)} = 1,\quad p_{2|}^{(1)} = 0,\quad p_{3|}^{(1)} = 0;\qquad \sum_{i=1}^{3} p_{i|}^{(1)} = 1 \qquad \text{III.}$$

$$p_{1|}^{(2)} = \tfrac{3}{7},\quad p_{2|}^{(2)} = \tfrac{4}{7},\quad p_{3|}^{(2)} = 0;\qquad \sum_{i=1}^{3} p_{i|}^{(2)} = 1$$

$$p_{1|}^{(3)} = 0,\quad p_{2|}^{(3)} = \tfrac{1}{2},\quad p_{3|}^{(3)} = \tfrac{1}{2};\qquad \sum_{i=1}^{3} p_{i|}^{(3)} = 1$$

$$p_{1|}^{(4)} = 0,\quad p_{2|}^{(4)} = 0,\quad p_{3|}^{(4)} = 1;\qquad \sum_{i=1}^{3} p_{i|}^{(4)} = 1$$

$$p_{1|1} = \tfrac{1}{3},\quad p_{1|2} = \tfrac{1}{6},\quad p_{1|3} = 0,\quad p_{1|4} = 0;\qquad \sum_{j=1}^{4} p_{1|j} = p_{1|} \qquad \text{IV.}$$

$$p_{2|1} = 0,\quad p_{2|2} = \tfrac{2}{9},\quad p_{2|3} = \tfrac{1}{9},\quad p_{2|4} = 0;\qquad \sum_{j=1}^{4} p_{2|j} = p_{2|}$$

$$p_{3|1} = 0,\quad p_{3|2} = 0,\quad p_{3|3} = \tfrac{1}{9},\quad p_{3|4} = \tfrac{1}{18};\qquad \sum_{j=1}^{4} p_{3|j} = p_{3|}$$

$$\sum_{i=1}^{3} p_{i|1} = p_{|1},\quad \sum_{i=1}^{3} p_{i|2} = p_{|2},\quad \sum_{i=1}^{3} p_{i|3} = p_{|3},\quad \sum_{i=1}^{3} p_{i|4} = p_{|4}$$

Табеля математичних сподівань.

$$\mathrm{E}\,y^{(1)} = \tfrac{7}{3},\quad \mathrm{E}\,y^{(2)} = \tfrac{10}{3},\quad \mathrm{E}\,y^{(3)} = \tfrac{13}{3};\qquad \mathrm{E}\,y = 3 \qquad \text{V.}$$

$$\mathrm{E}\,x^{(1)} = 1,\quad \mathrm{E}\,x^{(2)} = \tfrac{11}{7},\quad \mathrm{E}\,x^{(3)} = \tfrac{5}{2},\quad \mathrm{E}\,x^{(4)} = 3 \qquad \mathrm{E}\,x = \tfrac{5}{3}$$

Табеля моментів.

$$m_{1|0} = \tfrac{5}{3},\quad m_{0|1} = 3,\quad m_{0|2} = \tfrac{88}{9},\quad m_{1|1} = \tfrac{50}{9},\quad m_{2|0} = \tfrac{10}{3}. \qquad \text{VI.}$$

$$\mu_{1|0} = 0,\quad \mu_{0|1} = 0,\quad \mu_{0\,2} = \tfrac{7}{9},\quad \mu_{1|1} = \tfrac{5}{9},\quad \mu_{2|0} = \tfrac{5}{9}.$$

Дисперсії: $\sigma_x^2 = \mu_{2|0} = \tfrac{5}{9}$, $\sigma_y^2 = \mu_{0|2} = \tfrac{7}{9}$.

З табелі математичних сподівань дістаємо рівнання регресії: $\mathrm{E}\,y^{(i)} = x_i + \tfrac{4}{3}$. Бачимо, що лінія регресії y відносно x є простою.

Коли регресію x відносно y представимо рівнанням третього ступня, дістаємо параболю третього ступня:

$$\mathrm{E}\,x^{(j)} = -\tfrac{11}{84}\,y_j^3 + \tfrac{19}{14}\,y_j^2 - \tfrac{313}{84}\,y_j + \tfrac{57}{14}.$$

Наближена лінійна регресія x відносно y має форму:

$$\mathrm{E}\,x^{(j)} = \tfrac{5}{7}\,y_j - \tfrac{10}{21}.$$

Табеля відносних моментів.

$\mu_{|2}^{(1)} = \frac{2}{9}, \quad \mu_{|2}^{(2)} = \frac{2}{9}, \quad \mu_{|2}^{(3)} = \frac{2}{9}.$

$\mu_{2|}^{(1)} = 0, \quad \mu_{2|}^{(2)} = \frac{12}{49}, \; \mu_{2|}^{(3)} = \frac{1}{4}, \quad \mu_{2|}^{(4)} = 0.$

Із цеї табелі бачимо, що y є відносно x гомоскедастичне, а x відносно y гетероскедастичне.

Сучинник кореляції: $r_{1|1} = \sqrt{\frac{5}{7}} = 0{,}845$

Сучинники регресії: $b_{1|} = \frac{5}{7}, \quad b_{|1} = 1.$

Відношення кореляції: $\eta_{y|x}{}^2 = \frac{5}{7}, \quad \eta_{x|y}{}^2 = \frac{51}{70}.$

Маємо $\eta_{x|y} = r_{1|1}$, бо регресія y відносно x є лінійна.

Середня квадратична стичність: $\varphi^2 = \frac{43}{42}.$

Сучинник Чупрова: $r^2 = \frac{43}{42\sqrt{6}} = 0{,}418.$

V.

Розгляньмо тепер корелятивну залежність межи коштами адміністрації й оборотами за 1935-ий рік звичайних кооператив для закупу і збуту об'єднаних в окружних осередках тернопільського воєвідства [1]). Не вчислюю ту гуртівень, кооператив з молочарськими відділами, ані кредитових кооператив. Розглядаю тільки кооперативи уміщені в „Білянсах" під знаком 8 а) і з них відкидаю ще кількадесять кооператив, що їх обороти є більші як 25.500 зл., або кошти адміністрації більші як 1.850 зл. Ті неузгляднені кооперативи занадто рідко розсіяні в корелятивній табелі й тому не можна до них прикладати статистичних метод досліду.

У корелятивній табелі будемо зазначувати літерою x оборот кооперативи (в тисячах золотих), а літерою y кошти адміністрації (у сотках золотих). Позиція $x = n$ обіймає кооперативи, що їх обороти лежать у межах: $1000\,n - 500 < x < 1000\,n + 500$, а позиція $y = m$ обіймає кооперативи, що їх кошти адміністрації лежать у межах: $100\,m - 50 < y < 100\,m + 50$.

Треба памятати, що корелятивна табеля є тут емпірична і тому всі ймовірности не будуть дані a priori. Висновується їх вартість з числових даних табелі на основі закону великих чисел. Корелятивні параметри буду обчислювати так, якби ймовірности були дані a priori, отже поминаю (впрочім дуже малі) систематичні похибки при обчислюванню корелятивних сталих з емпіричного матеріялу.

---

[1]) Білянси кооператив приналежних до Ревізійного Союзу Українських Кооператив у Львові, об'єднаних в окр. осередках терноп. воєвід. Львів, 1936. Накладом Рев. Союзу Укр. Кооп. у Львові.

Кореляційна табеля.

y / x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Σ
1	1	1																	2
2	1		2	1															4
3	1	1	4	4	3	1													14
4				3	4	1													8
5	1		2	3	8	2													17
6			1	7	5	5	2												20
7			1	6	8	12	3	1											31
8				1	6	9	9	4	2	2									33
9					3	10	15	10	3	2	1	2							46
10					1	3	18	11	11	1	2								47
11					1	1	7	10	12	3	1								35
12						4	7	8	11	5	1	2	2	1	1				42
13							1	6	14	9	3	6		1		1			41
14							2	7	6	11	5	6	2	1			1		41
15							1	4	3	2	8	3		2					23
16							2	2	4	5	6	1	4	1	2				27
17					1				5	3	3	4	4	1	3	1			25
18										2	3	3	2	1	1				12
19								1	2	5	5	5		5		3			26
20											2	3	3	7	3	2	1		21
21					1				1	3	2	2	5	4	4	1	4		27
22								1					4	3	2	1	2	1	14
23												3		1	1	1		2	8
24													1	1	1	1	1	1	6
25										1						2		3	6
Σ	4	2	10	25	41	48	67	65	74	54	42	40	28	29	18	13	9	7	576

Середні (аритметичні) вартости: $m_{1|0} = 12{,}7$; $m_{0|1} = 9$.
Дисперсії: $\sigma_x{}^2 = 28{,}5$; $\sigma^{y2} = 12$.
Сучинники регресії: $b_{1|} = 1{,}28$; $b_{|1} = 0{,}54$.
Сучинник кореляції: $r_{1|1} = 0{,}83$.
Середня квадратична стичність: $\varphi^2 = 2{,}76$.
Сучинник Чупрова: $\tau^2 = 0{,}14$.

Із корелятивної табелі і (докладніше) з великої вартости сучинника $r_{1|1}$ бачимо (впрочім самозрозумілий факт), що кошти адміністрації є позитивно залежні від оборотів. Легко також виянснити причину великих вартостей дисперсій. Рішає тут велика ріжнородність числа населення і маєткового стану галицьких сіл. Сучинники, що я їх обчислив, не дають ще змоги висновувати якісь глибші залежности між поодинокими позиціями кооперативних білянсів. Требаби ще прослідити залежність коштів адміністрації від інших даних білянсів, нпр. від величини товарових кредитів або від величини уділів. Треба направити деякі друкарські похибки і зверифікувати евентуальні позиції, що є наслідком т. зв. „фабрикації“ білянсів. Цікаві булиби зміни вартостей статистичних сучинників, колиб брати під розвагу кооперативи всіх воєвідств, дослідити залежність даних білянсів від майна громад, від величини консумції алькоголю, від флюктуацій вартости гроша і порівнати статистичні параметри українських кооператив з відповідними статистичними сталими білянсів кооператив необ'єднаних Ревіз. Союзом Українських Кооператив. Економісти моглиби через інтерпретацію математичних даних не тільки стверджувати факти економічного розвитку, але й находити вказівки для практичеої роботи.

Я хотів тут подати тільки малий фрагмент з приложення математичної статистики до економіки для ілюстрації основних понять і методи досліду модерної статистики.

ЗЕНОН ХРАПЛИВИЙ (Львів)

Основні поняття електродинаміки а унітарна теорія поля.*)

За останні десятки літ доводилося не один раз піддавати ревізії найбільш фундаментальні поняття фізики; зокрема поняття макрофізики показалися непридатні в мікрофізиці. Чинником, що спроваджував переворот у традиційному описі природи, була головно квантова теорія. Але тут буде мова про ревізію основ електродинаміки, переведену без зужитковування квантових ідей, такби сказати клясичними засобами. Цю ревізію переводить унітарна теорія поля, що її почин дав в 1933. р. Борн [1]), а розбудували Борн з Інфельдом.[2]) [3]) [4]) Вона приходить на зміну давнійшим теоріям Мексвеля та Льоренца.

Електронова теорія Льоренца є дуалістична, тобто відрізнює два окремі та до деякої міри протиставні фізичні чинники, а саме наснагу (заряд) та поле. Наснага, розміщена в просторі з густотою ϱ, є джерелом поля; вона поділена на окремі цілості — електрони. Мимо успіхів теорії два основні питання вона мусіла залишити без відповіді: 1) яка є структура електрону, тобто в який спосіб в ньому розміщена наснага, 2) які сили протидіють взаємному відштовхуванні однойменних наснаг в електроні, та споюють його в одну цілість.

Цих труднощів не булоб в унітарній теорії, яка знає тільки поле, без ніяких простірних наснаг, для якої електрони це тільки точки, особливості поля. Тоді, очевидно, нема клопотів зі структурою електрону — просто тому, що точка ніякої структури не має. Такі пунктові наснаги подибуємо вже в Мексвеля — щож, коли у нього власна енерґія електрону-точки виходить нескінченою. Отож нова теорія Борна-Інфельда є унітарна, а всеж-таки дає скінчену енерґію електрону.

---

*) Реферат, виголошений на VI. З'їзді українських природників та лікарів 17. травня 1937. р.

Щоби порівняти нову й давню теорію, вийдемо з їх диференціяльних рівнань:

Мексвель-Льоренц	Борн-Інфельд
(I) $rot\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\varrho\mathbf{v}$	(I') $rot\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
(II) $rot\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$	(II') $rot\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
(III) $div\,\mathbf{E} = 4\pi\varrho$	(III') $div\,\mathbf{D} = 0$
(IV) $div\,\mathbf{H} = 0$	(IV' $div\,\mathbf{B} = 0.$

($\mathbf{v}$ це вектор скорості руху наснаги).

Коли давня теорія описувала поле за допомогою двох векторів **E**, **H**, то нова теорія уживає до цього аж чотирьох векторів: двох електричних **E**, **D** та двох магнетних **H**, **B**. Але тільки два з них є незалежні; два інші звязані з ними додатковими (альґебричними) рівнаннями:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \mathbf{B} &= k\,\mathbf{H} \\ \mathbf{E} &= k\,\mathbf{D} \end{aligned} \qquad k = k(\mathbf{D}^2, \mathbf{H}^2)$$

або

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mathbf{D} &= l\,\mathbf{E} \\ \mathbf{H} &= l\,\mathbf{B} \end{aligned} \qquad l = l\,(\mathbf{B}^2, \mathbf{E}^2)$$

Користуючися цими звязками, можна р. (I') — (IV') переписати так, щоби в них виступала одна тільки пара векторів **E**, **B**, абож тільки пара **D**, **H**. Одначе тоді диференціяльні рівнання перестають бути лінійними; ця характеристична для нової теорії обставина є причиною великих аналітичних труднощів.

Треба додати, що існує декілька відгалужень теорії (які в головному ведуть до ідентичних вислідів), тому що запропоновано різні форми сучинників k, l.[5]) Дискусія над добором тзв. Ляґранжової та Гамільтонової функцій, з яких їх випроваджують, тривала досить довго, щойно остання робота Гофмана та Інфельда[13]) здається її закінчує. Після цих авторів повинно бути

$$(3) \qquad k = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{D}^2 - \mathbf{H}^2}{b^2}} \qquad \text{(b стала, тзв. абсолютне поле, ряду 10^{15} од. cgs)}$$

Всеж таки до тепер доводилося оперувати реляціями (1), (2) у їх загальному виді, без спеціялізації сучинників k, l.

Електронові в спочинку відповідає статична центрально-симетрична розвязка диференціяльних рівнань поля. Ці рівнання в електростатичному випадку зводяться до

$$(4)\qquad \begin{aligned} div\ \mathbf{D} &= 0 \\ rot\, k\,\mathbf{D} &= 0, \end{aligned}$$

якщо поле описуватимемо вектором **D**; а якщо послужимося другим електричним вектором **E**, то

$$(5)\qquad \begin{aligned} div\, l\,\mathbf{E} &= 0 \\ rot\ \ \mathbf{E} &= 0. \end{aligned}$$

Оба ці способи опису поля, очевидно, рівновартні. Після першого дістанемо розвязку

$$(6)\qquad \mathbf{D}_r = \frac{e}{r^2},$$

а що $div\ \mathbf{D} = 0$, то простірно розміщених джерел немає, а електрон є точкою. Після другого способу

$$(7)\qquad \mathbf{E} = \frac{e}{r^2}\,\frac{1}{1+\frac{e^2}{b^2\,r^4}} = \frac{e}{r^2}\,\frac{1}{1+\frac{r_0^4}{r^4}} \qquad \left(b = \frac{e}{r_0^2}\right);$$

тут $div\ \mathbf{E} \neq 0$, отже джерело поля не є пунктом, воно розміщене в просторі з густотою

$$(8)\qquad \varrho = \frac{1}{4\pi}\,div\ \mathbf{E} = \frac{err_0^4}{\pi\,(r^4+r_0^4)}.$$

Ця густота „свобідної наснаги" практично рівна нулі поза кулею, якої промінь r_0 є ряду 10^{-13} cm. Так отже теорія має начеб два аспекти — електрон можна вважати або за точку („унітаристичне становище"), або за кульку наснаги („квазідуалістичне становище"), залежно від того, котрий з векторів приймемо за основний. Довго нерозвязане питання, чи електрон є твором пунктовим чи простірним, находить неждану відповідь: він є одним і другим. Справа тут стоїть подібно як з фотонами та хвилями в оптиці.

Але навіть, коли станемо на „квазідуалістичному" становищі, то й так ще між новою а давньою теорією остане ось яка основна різниця: у Льоренца наснага була первинним самостійним фізичним чинником, тоді, як у Борна-Інфельда первинна річ це тільки поле, а „свобідна наснага" є допомічним поняттям. У Льоренца проблеми формуловано математично так: знаючи розміщення та стан руху наснаг, найти з р. (I) — (IV) витворене ними поле; а в новій теорії проблема звучить: добираючи відповідні початкові та крайні умови з рівнань (I') — (IV') (в яких ϱ не виступає), найти поле, а тоді вже можна вичислити розміщення ϱ у просторі. З цього така консеквенція. В давній теорії до р. (I) — (IV) як необхідне доповнення додавали Льоренцове рівнання руху

$$\text{(V)} \qquad \sigma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varrho \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]\right) \qquad (\sigma = \text{густота маси}),$$

яке править рухом електричності під впливом зовнішнього поля Це було окреме заложення, оперте на експерименті. В новій теорії, якщо такий звязок між наснагою а полем існує, він не може бути окремою гіпотезою, а хиба тільки висновком, який можна випровадити з рівнань поля (I') — (IV'), при допомозі якихсь простих, самозрозумілих умов. Дійсно зробили це Фінберґ[6]) та Прайс[7]), оперуючи вектором **D**, меніж[8])[9]) вдалося зробити те саме з „квазідуалістичного“ становища, при чому треба було тільки приняти, що особливість поля **D** є завжди ідентична з центром маси (енерґії) поля („постулят однозначності“). Це заложення насувається само собою, а в статичному випадку воно автоматично сповнене.

Таким чином таке основне поняття електродинаміки, як наснага, підпало ревізії і набрало зовсім нового значення. Виявилося опісля, що подібна мусить бути доля потенціялу.

Електростатичним потенціялом називали в давній теорії функцію φ, якої відємний градієнт рівний електричному векторові поля:

$$-grad\ \varphi = \mathbf{E};$$

В полі пунктового чи кулькового електрону виходило

$$\varphi = \frac{e}{r} \text{ (Кульонів потенціял).}$$

Якщо в даній точці цього поля находиться інша наснага e', то взаємна потенціяльна енерґія обох наснаг

$$V = \frac{ee'}{r} = e' \varphi.$$

Іншими словами, потенціял можна теж здефініювати як потенціяльну енерґію, що припадає на одиницю наснаги; обі дефініції потенціялу були в давній теорії згідні. Дехто з дослідників[11])[12]) приймав мовчки, що так воно є теж в новій унітарній теорії. На ділі ж ця згідність обох дефініцій є начеб припадкова; нема її в новій електродинаміці, де давньому поняттю потенціялу відповідають дві окремі величини φ і Φ, здефініовані так:

$$\text{(9)} \qquad -grad\ \varphi = \mathbf{E}$$

$$\text{(10)} \qquad e' \Phi = V.$$

Першу з них обчислюємо способом в прінціпі простим. Користуючися нпр. розвязкою (7), матимемо

$$(11)\quad \varphi(a)=\int_a^\infty \mathbf{E}_r\,dr=\frac{e}{r_0}\left\{\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{a^2+ar_0\sqrt{2}+r_0^2}{a^2-ar_0\sqrt{2}+r_0^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\,arc\,tg\left(\frac{a\sqrt{2}}{r_0}-1\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\,arc\,tg\left(\frac{a\sqrt{2}}{r_0}+1\right)\right\}.$$

Дещо більш складна справа з функцією Φ. Правильна дорога для найдення V (а з тим і Φ) булаб ось яка. Сконструувавши поле з двома особливостями (нпр. $+e$ та $-e$) требаб обчислити його цілу енерґію; колиб від неї відіймити власну енерґію обох наснаг зокрема — осталаб власне потенціяльна енерґія V. Так робили у Мексвелевій теорії. Одначе ця дорога в новій теорії не веде до цілі, бо 1) рівнання поля не допускають статичної розвязки з двома особливостями, 2) наслідком нелінійності диференціяльних рівнань рахунки стають надто трудними. Остається друга дорога, теж часом стосована у давній теорії. Беремо під увагу одну пунктову особливість $+e$, а другу поверхневу, кулисту, з цілковитою наснагою $-e$ розміщеною на кулі з промінем a; дальше поступаємо як передше. Цей спосіб є дозволений принайменше, коли відступ a обох частинок значно більший від критичного проміння r_0.

Дійсно, статичні рівнання (4) допускають м. ін. розвязку

$$(11)\qquad \mathbf{D}r=\begin{cases}\dfrac{e}{r^2} & (r<a)\\ 0 & (r>a)\end{cases}$$

Таке поле можна вважати за зложене з поля пунктової наснаги $+e$

$$(12)\qquad \mathbf{D}r^{(p)}=\frac{e}{r^2}$$

та поля наснаги $-e$, розложеної на кулі з промінем a

$$(13)\qquad \mathbf{D}r^{(e)}=\begin{cases}0 & (r<a)\\ -\dfrac{e}{r^2} & (r>a).\end{cases}$$

Відійнявши від енерґії цілого поля енерґію піль $\mathbf{D}^{(p)}$ та $\mathbf{D}^{(e)}$, взятих окремо, дістаємо

$$(14)\quad V(a)=\frac{e^2}{r_0}\left\{\frac{a^3}{3r_0^3}\log\left(1+\frac{r_0^4}{a^4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{6}\log\frac{a^2+ar_0\sqrt{2}+r_0^2}{a^2-ar_0\sqrt{2}+r_0^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{2}}{3}\,arc\,tg\left(\frac{a\sqrt{2}}{r_0}-1\right)+\frac{\sqrt{2}}{3}\,arc\,tg\left(\frac{a\sqrt{2}}{r_0}+1\right)-\frac{\sqrt{2}}{3}\,\pi\right\}.$$

Обі наші потенціяльні функції, річ ясна, для великих віддалень a переходять у давній Кульонів потенціял:

$$
(15) \qquad -e\varphi \sim \frac{-e^2}{r_0}\left\{\frac{r_0}{a} - \frac{1}{5}\frac{r_0^5}{a^5} + \dots\right\}
$$

$$
V \sim \frac{-e^2}{r_0}\left\{\frac{r_0}{a} - \frac{1}{10}\frac{r_0^5}{a^5} + \quad\right\}.
$$

Наприкінці треба ще додати, що ціла справа виникнула при нагоді розглядання квестії, на скільки зміняться енерґетичні рівні атому водня, коли в квантовому рівнанні хвилі заступимо давній (Кульонів) потенціял новим (Борновим). Досліди піднято в надії, що у висліді зникне дрібна різниця, яка ще існує між вартостями експериментальними а теоретичними (ця різниця відноситься до відступів центрів складових у дублетах спектру). Геллер і Моц[11]), а опісля Майкснер[12]) за потенціяльну енерґію протону з електроном приймають, як ми бачили, неслушно, $-e\varphi$; я пробував зробити це саме, послуговуючися функцією V. Вислід не виправдав покладаних надій; поправка для енерґетичних рівнів виходить у всякому випадку надто мала.

Література.

1) M. Born, Proc. Roy. Soc. A, **143**, 410 (1933).
2) M. Born and L. Infeld, Proc. Roy. Soc. A, **144**, 425 (1934).
3) „ „ Proc. Roy, Soc. A., **147**, 522 (1934).
4) M. Born, Papers and Discussions of the Intern. Conference of Physics London 1934, vol. I.
5) L. Infeld, Proc. Camb. Phil. Soc. **32**, 127 (1936).
6) E. Feenberg, Phys. Rev. **47**, 148 (1935)
7) M. H. L. Pryce, Proc. Roy. Soc. A, **155**, 597 (1936)
8) Z. Chrapływyj, Acta Phys. Pol. **4**, 395 (1935)
9) Acta Phys. Pol. (друкується)
10) „ C. R. **202**, 396 (1936)
11) G. Heller and L. Motz, Phys. Rev. **46**, 502 (1934)
12) J. Meixner, Ann. Phys. **23**, 371 (1935)
13) B. Hoffmann and L. Infeld, Phys. Rev. **51**, 765 (1937)

О. МОНЦІБОВИЧ (Львів)

Елементи зорі SU Cygni.*)

Вже обсервації сильних місцевих змін на поверхні сонця піддержують нас в тому, що статичний модель зорі, що всі єї частини є в спокої, можна розуміти лиш як перше наближення. Часто наближення це вповні вистарчає, дозволяє нам проникнути в суть природи зір та не обтяжує нас скомплікованими умовинами. Одначе можна вказати цілу громаду зір, що для них статичний модель навіть в першому наближенню непридатний. Це змінні зорі, що їхня ясність зміняється наслідком незнаних нам гігантських процесів, що відбуваються на поверхні чи у внутрішних шарах зорі.

Перші наші відомості про змінні зорі сягають XVI. віку, коли то Фабриций в 1596-му році відкрив першу змінну зорю названу „Дивною" або з латинська „Міra" в сузір'ю Кита (Cetus), Ця зоря зветься тепер Міra Ceti. В 1800-му році знано усього лиш 11 змінних зір, в 1854-му — 24, на початку 1935 року близько 6200.

Якщо зміна ясности зорі відбувається наворотно, періодично, то насувається питання, визначити елементи зміни ясности зорі або коротко „елементи зорі".

До величин, що характеризують зміну ясности змінної зорі, належать:

1) P — періода, протяг часу поміж двома сусідними *maxim*-ами чи *minim*-ами.

2) Епоха — це є час T_0, що від нього зачинається числення періоди.

3) Амплітуда A — різниця ясности в *maxim.* і *minim.*

4) Величина $\frac{M-m}{P}$, що характеризує асиметрію кривої ясности.

*) Доклад читаний на VI. З'їзді укр. природників і лікарів у Львові 17. травня 1937.

На основі вище сказаного моменти якогонебудь *maxim.*, або *minim.* визначуються формулою:

$$T = T_0 + EP,$$

де T_0 початкова епоха, P періода, а E скількість період, що минула від початкової епохи.

Колиж періода змінности підлягає незначним періодичним ваганням, тоді долучається ще гармонійний вираз, так що дістаємо формулу:

$$T = T_0 + PE + A \sin (kE + B).$$

В випадку вікових змін періоди змінности уживається параболічної формули: $T = T_0 + EP + RP^2$, де R це означена стала.

Зоря SU Cygni має рівникові сурядні: $\alpha = 19^h\,40^m\,48^s$, $\delta = 29^0\,1'\,4$ і $BD + 28^0$ 3460. Змінність її блеску (яскравости) ствердили уперше Müller і Kempf в 1897-му році в Потсдамі. Пізнійші обсервації потвердили це відкриття та з'ясували, що зміни ясности відбуваються періодично, причім зоря належить до нормальних змінних зір типу δ Cephei, себто таких, що їхня періода лежить в границях від 1—45 днів. Періода її змінности виносить приблизно $3^d,845$. Крива ясности цеї зорі, як я вже згадав, є зближена до типу δ Cephei, себто має несиметричний перебіг. Зріст ясности багато швидший ніж її спадок. Різниця в зоряних величинах ясности maxim. і minim. виносить приблизно $0^m,8$. Ряд визначних авторів як Luizet, Hellerich, Robinson, Parenago з щораз більшою докладністю визначували елементи наведеної зорі й так Luizet подає ось такі елементи:

	Max.: $= 2414202^d,826$ (сер. час Париж) $+ 3^d,845612\,E$
Hellerich:	Max.: $= 2414202^d,855 + 3^d,845472\,E$
Robinson:	Max.: $= 2421278^d,435 + 3^d,845442\,E$
Parenago:	Max.: $= 2421278^d,503 + 3^d,845507\,E$

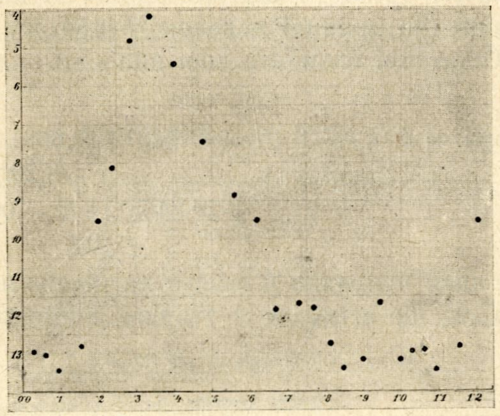
Рівночасно визначувано спектральний тип, власний рух, параляксу та інші властивості зорі. В цей спосіб протягом приблизно 40 літ зібрали великий обсерваційний матеріял зорі SU Cygni. Моя ціль була опрацювати однородно всі дотеперішні доступні мені обсервації, що дає підставу докладнійшої й більш імовірної певности елементів зорі.

Опирався я на 184-ох оцінках ясности зорі, переведених методою Арґеляндера, що їх виконав проф. львів. університету др. Е. Рибка в Варшаві в роках 1926-1928. Ця метода полягає в тому, що ясвість змінної зорі порівнюємо з ясністю нерухомих зір з відомою ясністю т. зв. з і р п о р і в н а н н я. При оцінках ужито 6 зір порівнання.

Моменти часу поодиноких оцінок зредуковано до геліоцентричного часу Ґрініч, причому числено в юліянських днях. Щоби було можливо порівнати так розкинені обсервації, обчислено фази поодиноких обсервацій на основі взору:

$$\Phi = \frac{1}{P}\,(J.D. - 2400000)$$

Щойно тоді зґруповано разом по двайцять обсервацій, обчислено середні аритметичні, що творять т. зв. „н о р м а л ь н і т о ч к и", які позволили мені визначити криву ясности зорі SU Cygni (пор. рисунок)



Подібні перечислення зроблено із всіми іншими обсерваціями, що в сумі дало около 2000 однородно зредукованих обсервацій. Наведені автори послуговувалися не лиш методами візуальної обсервації, але також величинами фотографічними, фотовізуальними та фотометричними. В своїх рахунках змушений я був користуватись безпосередніми, подекуди ще не опублікованими обсерваціями. Лиш завдяки ввічливости Цвєрева, астронома Пулковської обсерваторії, та Кукаркіна і Фльорії з астрон. інституту ім. Штернберґа в Москві, міг я користуватись їхніми недавніми обсерваціями, ще дотепер не оголошеними.

Найчастійше вживаний спосіб визначувати періоди спирається на тому, що визначається епохи поодиноких max. ясностий. Однак з огляду на недавні праці Hertzsprunga, як також досліди проф. Рибки покористувався я іншою методою, а саме методою ясностий середньої точки. На зростаючій галузи кривої вибирається точку, що лежить на середині поміж вартістю maximum і minimum та визначується моменти, що в них зоря переходить через цю точку. Конечне притому є заложити, що приріст ясности на зростаючій галузі є прямолінійний. Це заложення є в випадку зір типу δ Cephei оправдане. При так великій скількости оцінок ясности зорі не обмежився я до докладнійшого визначення періоди, натомість занявся я питанням постійности періоди змінности, а саме, чи в випадку єї змінности єствують вирази гармонічно-періодичні чи лиш вирази вікові — квадратові. Розвязуючи ряд нормальних рівнань вдалось мені відкрити вікову зміну періоду змінности ясности зорі SU Cygni, а разом усталити вартість сталої R на $= 0{,}0036 . 10^{-6}$. Періодичних змін (по причині невеликого протягу часу) не міг я завважити. Остаточні елементи зорі виносять на основі моїх обчислень:

$$\textit{Med. magn.} = \textit{J.D. hel.}\ \text{t.}\ \textit{Greenw.}\ 2421278^{d}{,}0691 \underset{\pm 29}{} + 3^{d}{,}8455114 \underset{\pm 10}{E} - 0^{d}{,}0036 \underset{\pm 12}{E^2} . 10^{-6}.$$

Відємний знак поправки R вказує на це, що періода з бігом часу зменшається, що згідне є з теорією Eddingtona зір типу δ Cephei.

Dr. JULIAN BOHAČEVŠKYJ (Stryj)

Transformation der Laplaces'chen Differentialgleichung im n-Dimensionalen auf generelle Koordinaten.

Es seien n zueinander ortogonale n-dimensionale Gebilde gegeben:

$$\begin{aligned} f_1(x_1\, x_2\, x_3 \dots x_n) &= \varrho_1 \\ f_2(x_1\, x_2\, x_3 \dots x_n) &= \varrho_2 \\ &\cdot \qquad \cdot \\ f_n(x_1\, x_2\, x_2 \dots x_n) &= \varrho_n \end{aligned} \tag{1}$$

Nach Auflösung nach $x_1, x_2 \dots x_n$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(\varrho_1\, \varrho_2 \dots \varrho_n) \\ x_2 &= \varphi_2(\varrho_1\, \varrho_2 \dots \varrho_n) \\ &\cdot \qquad \cdot \\ x_n &= \varphi_n(\varrho_1\, \varrho_2 \dots \varrho_n) \end{aligned} \tag{2}$$

Die Ortogonalitätsbedingungen sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_2} + \dots + \frac{\partial \varphi^n}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_2} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_2} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_3} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_3} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_3} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_3} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_{n-1}}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_{n-1}}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_n} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_{n-1}}\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_n} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_{n-1}}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_n} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

oder auch:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_n}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_i}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varrho_3}{\partial x_1}+\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_2}\frac{\partial\varrho_3}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_n}\frac{\partial\varrho_3}{\partial x_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_i}\frac{\partial\varrho_3}{\partial x_i}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varrho_{n-1}}{\partial x_1}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_1}+\frac{\partial\varrho_{n-1}}{\partial x_2}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial\varrho_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varrho_{n-1}}{\partial x_i}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_i}=0.$$

Es sei nun die Potentialgleichung gegeben:

$$\Delta_2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}=0 \tag{5}$$

und diese Gleichung möge auf generalisierte n-dimensionale Koordinaten transformiert werden. Die neuen Koordinaten seien $\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_n$ und sie mögen mit den Koordinaten $x_1 x_2\ldots x_n$ durch die Gleichungen (1) und (2) verknüpft sein. Wir haben nun infolge (2):

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_i}+\frac{\partial V}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x_i}+\ldots+\frac{\partial V}{\partial\varrho_n}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_i}\quad(i=1,2,\ldots n) \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_1^2}\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_i}\right)^2+\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_2^2}\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial x_i}\right)^2+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_n}\left(\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_i}\right)^2+$$

$$+2\sum_{\substack{k,l=1\\k<l}}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_k\partial\varrho_l}\frac{\partial\varrho_k}{\partial x_i}\frac{\partial\varrho_l}{\partial x_i}+\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}\frac{\partial^2\varrho_1}{\partial x_i^2}+\frac{\partial V}{\partial\varrho_2}\frac{\partial^2\varrho_2}{\partial x_i^2}+\ldots+\frac{\partial V}{\partial\varrho_n}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_i^2}\quad(i=1,2,\ldots n) \tag{7}$$

Addieren wir die n Gleichungen (7) und berücksichtigen die Ortogonalitätsbedingungen (4), so erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}=\Delta_2 V=$$

$$=\Delta_1(\varrho_1)\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_1^2}+\Delta_1(\varrho_2)\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_2^2}+\ldots+\Delta_1(\varrho_n)\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_n^2}+\Delta_2(\varrho_1)\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}+$$

$$+\Delta_2(\varrho_2)\frac{\partial V}{\partial\varrho_2}+\ldots+\Delta_2(\varrho_n)\frac{\partial V}{\partial\varrho_n} \tag{8}$$

Dabei bedeuten $\Delta_1(\varrho_i)$ und $\Delta_2(\varrho_i)$ die verallgemeinerten Lamé-schen Differentialparameter:

$$\Delta_1(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \tag{9}$$

$$\Delta_2(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}. \tag{10}$$

Diese Differentialparameter berechnen wir wie folgt:

Durch Differentiation der Gleichungen (2) nach x_1 erhalten wir:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_n}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_1}=1$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_n}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_1}=0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_n}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_1}=0$$

Multiplizieren wir nun die erhaltenen Gleichungen bzw. mit $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}, \ldots \frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}$ und addieren mit Berücksichtigung von (3), so ergibt sich

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}\right)^2\right]\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_1}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1} \text{ und analog}$$

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}\right)^2\right]\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_2}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1} \tag{12}$$

$$\cdot\ \cdot$$

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}\right)^2\right]\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_n}=\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}.$$

Quadrieren wir und addieren diese Gleichungen, so ergibt sich

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}\right)^2\right]^2\Delta_1(\varrho_1)=$$

$$=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}\right)^2$$

und hieraus

$$\Delta_1(\varrho_1)=\frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}\right)^2}.$$

Analog

$$\Delta_1(\varrho_2)=\frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_2}\right)^2} \tag{13}$$

$$\Delta_1(\varrho_n)=\frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_n}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_n}\right)^2}.$$

Führen wir noch die Bezeichnung ein:

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_i}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_i}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_i}\right)^2=H_i\,,$$

dann bekommen die Gleichungen (13) die Form:

$$\Delta_1(\varrho_1) = \frac{1}{H_1},\ \Delta_1(\varrho_2) = \frac{1}{H_2}, \ldots\ \Delta_1(\varrho_n) = \frac{1}{H_n} \tag{13a}$$

Die Parameter $\Delta_2(\varrho_i)$ berechnen wir nach Lamé wie folgt: mit Hilfe der Bezeichnungen (13a) erhält die Identität (8) die Form:

$$\Delta_2(V) = \frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_1{}^2} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_2{}^2} + \ldots + \frac{1}{H_n}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_n{}^2} + \Delta_2(\varrho_1)\frac{\partial V}{\partial \varrho_1} + \tag{8a}$$

$$+ \Delta_2(\varrho_2)\frac{\partial V}{\partial \varrho_2} + \ldots + \Delta_2(\varrho_n)\frac{\partial V}{\partial \varrho_n}.$$

In dieser Identität setzen wir der Reihe nach: $V = \varphi_1$, $V = \varphi_2, \ldots V = \varphi_n$. Es ergibt sich

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varrho_1{}^2} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varrho_2{}^2} + \ldots + \frac{1}{H_n}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varrho_n{}^2} + \Delta_2(\varrho_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1} +$$

$$+ \Delta_2(\varrho_2)\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_2} + \ldots + \Delta_2(\varrho_n)\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_n} = 0$$

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varrho_1{}^2} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varrho_2{}^2} + \ldots + \frac{1}{H_n}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varrho_n{}^2} + \Delta_2(\varrho_1)\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1} +$$

$$+ \Delta_2(\varrho_2)\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_2} + \ldots + \Delta_2(\varrho_n)\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_n} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \varrho_1{}^2} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \varrho_2{}^2} + \ldots + \frac{1}{H_n}\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \varrho_n{}^2} + \Delta_2(\varrho_1)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1} +$$

$$+ \Delta_2(\varrho_2)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_2} + \ldots + \Delta_2(\varrho_n)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_n} = 0.$$

Daraus können wir schon $\Delta_2(\varrho_i)$ berechnen. Multiplizieren wir nämlich (14) bzw. durch $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1}, \ldots \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1}$ und addieren, so ergibt sich mit Rücksicht auf (3)

$$\frac{1}{H_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_1{}^2}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{H_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_2{}^2}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} + \ldots + \tag{15}$$

$$+ \frac{1}{H_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_3{}^2}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} + \Delta_2(\varrho_1)\, H_1 = 0.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1}\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_1{}^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left[\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1}\right)^2\right] \tag{16}$$

und
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_1{}^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_1}. \tag{16a}$$

Differenzieren wir wieder die erste der Gleichungen (3) nach ϱ_2, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_2{}^2} = 0$$

und analog

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_2{}^2} = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1} \\
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_3{}^2} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial \varrho_1} \\
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_n{}^2} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial H_n}{\partial \varrho_1}
\end{aligned}\right\} \tag{16b}$$

Hiemit ist:

$$\Delta_2(\varrho_1) = -\frac{1}{2H_1{}^2} \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{2H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1} + \\ + \frac{1}{2H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \varrho_1} + \ldots + \frac{1}{2H_1 H_n} \frac{\partial H_n}{\partial \varrho_1} \tag{17}$$

oder $\Delta_2(\varrho_1) = -\frac{1}{2H_1} \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(lg \frac{H_1}{H_2 H_3 \ldots H_n} \right)$

Analog

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_2(\varrho_1) &= -\frac{1}{2H_1} \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(lg \frac{H_1}{H_2 H_3 \ldots H_n} \right) \\
\Delta_2(\varrho_2) &= -\frac{1}{2H_2} \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left(lg \frac{H_2}{H_1 H_3 \ldots H_n} \right) \\
\Delta_2(\varrho_n) &= -\frac{1}{2H_n} \frac{\partial}{\partial \varrho_n} \left(lg \frac{H_n}{H_1 H_2 \ldots H_{n-1}} \right)
\end{aligned}\right\}. \tag{18}$$

Um nun negative Vorzeichen durch positive zu ersetzen und den Nenner 2 fortzuheben, setzen wir noch

$$H_1 = \frac{1}{h_1{}^2},\ H_2 = \frac{1}{h_2{}^2}, \ldots H_n = \frac{1}{h_n{}^2};$$

dadurch erhalten die Gleichungen (18) die Form:

$$\begin{aligned}
\Delta_2(\varrho_1) &= h_1{}^2 \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(lg\,\frac{h_1}{h_2 h_3 \ldots h_n}\right) \\
\Delta_2(\varrho_2) &= h_2{}^2 \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(lg\,\frac{h_2}{h_1 h_3 \ldots h_n}\right) \qquad (18a) \\
\Delta_2(\varrho_n) &= h_n{}^2 \frac{\partial}{\partial \varrho_n}\left(lg\,\frac{h_n}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

und die Gleichung (8) die Form:

$$\begin{aligned}
\Delta_2 V = {} & h_1{}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_1{}^2} + h_2{}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_2{}^2} + h_3{}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_3{}^2} + \ldots + h_n{}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_n{}^2} + \\
& + h_1{}^2 \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(lg\,\frac{h_n}{h_2 h_3 \ldots h_n}\right)\frac{\partial V}{\partial \varrho_1} + h_2{}^2 \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(lg\,\frac{h_2}{h_1 h_3 \ldots h_n}\right)\frac{\partial V}{\partial \varrho_2} + \ldots + \qquad (8b) \\
& + h_n{}^2 \frac{\partial}{\partial \varrho_n}\left(lg\,\frac{h_n}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}}\right)\frac{\partial V}{\partial \varrho_n}
\end{aligned}$$

oder kürzer

$$\begin{aligned}
\Delta_2 V = h_1 h_2 \ldots h_n \Bigg[& \frac{h_1}{h_2 h_3 \ldots h_n} \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_1{}^2} + \frac{\partial V}{\partial \varrho_1} \frac{h_1}{h_2 h_3 \ldots h_n} \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(lg\,\frac{h_1}{h_2 h_3 \ldots h_n}\right) + \\
& + \frac{h_2}{h_1 h_3 \ldots h_n} \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_2{}^2} + \frac{\partial V}{\partial \varrho_2} \frac{h_2}{h_1 h_3 \ldots h_n} \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(lg\,\frac{h_2}{h_1 h_3 \ldots h_n}\right) + \ldots + \qquad (8c) \\
& + \frac{h_n}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}} \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_n{}^2} + \frac{\partial V}{\partial \varrho_n} \frac{h_n}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \varrho_n}\left(lg\,\frac{h_n}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}}\right) \Bigg].
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
& \frac{h_1}{h_2 h_3 \ldots h_n} \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(lg\,\frac{h_1}{h_2 h_3 \ldots h_n}\right) = \\
& = \frac{h_2 h_3 \ldots h_n \frac{\partial h_1}{\partial \varrho_1} - h_1 h_3 \ldots h_n \frac{\partial h_2}{\partial \varrho_1} - \ldots - h_1 h_2 \ldots h_{n-1} \frac{\partial h_n}{\partial \varrho_1}}{(h_2 h_3 \ldots h_n)^2} = \\
& = \frac{h_2 h_3 \ldots h_n \frac{\partial h_1}{\partial \varrho_1} - h_1 \frac{\partial (h_2 h_3 \ldots h_n)}{\partial \varrho_1}}{(h_2 h_3 \ldots h_n)^2} = \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{h_1}{h_2 h_3 \ldots h_n}\right)
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\frac{h_2}{h_1 h_3 \ldots h_n} \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(lg\,\frac{h_2}{h_1 h_3 \ldots h_n}\right) &= \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{h_2}{h_1 h_3 \ldots h_n}\right) \\
\frac{h_n}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \varrho_n}\left(lg\,\frac{h_n}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}}\right) &= \frac{\partial}{\partial \varrho_n}\left(\frac{h_n}{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

Hiemit erhält die Gleichung (8) endlich die Form:

$$\Delta_2 V = h_1 h_2 \dots h_n \left[\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{h_1}{h_2 h_3 \dots h_n} \frac{\partial V}{\partial \varrho_1}\right) + \right. \tag{8d}$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{h_2}{h_1 h_3 \dots h_n} \frac{\partial V}{\partial \varrho_2}\right) + \dots + \frac{\partial}{\partial \varrho_n}\left(\frac{h_n}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}} \frac{\partial V}{\partial \varrho_n}\right)\right]$$

Die Anwendung der letzterhaltenen Gleichung auf n-dimensionale Kugelkoordinaten und ihre Lösung bleibe einer besonderen Arbeit vorbehalten.

ОСТАП СТАСІВ (Ґетінґен).

Механізм переносу електричности в непровідниках.[1]

Наперед мусимо здефініювати „непровідники“. На основі дотеперішних експериментальних досвідів, — коли полишаємо на боці металі, — кожна кристалічна сітка це ідеальний досконалий непровідник. І навпаки: кожний досконалий непровідник стане ліпшим або гіршим провідником, якщо в довільно малих царинах заколотиться строгий стехіометричний порядок, т. є. коли у цій царині стане за богато або за мало одної цеглини, чи то у виді йона чи атома. Збурення (Störung) строгого стехіометричного порядку йонами спричинює йонову провідність, а збурення атомами — йонову, а одночасно, як побачимо, і електронову. На примір: ідеальна сітка кристалічної соли, коли нема збурення строгого стехіометричного складу, тобто збурення ідеального порядку нарядів Na^+ і Cl^-, що наступають по собі, буде завсіди досконалим непровідником. Збурити стехіометричний склад можна термічно за поміччю тепляних коливань. Одначе можна це зробити й штучно за поміччю відповідного процесу, пр. додатком Tl Cl при творенні кристалів Na Cl. Отже відповідним збуренням можна замінити ідеальний ізолятор на ліпший або гірший провідник. В моїй розвідці хочу розібрати лиш одно питання, а саме обмежитися до проводу електричности в алькалігальоґенідових кристалах при стехіометричному надмірі алькаліїв або гальоґену. Механізм проводу електричности у тих солей можна відповідно перенести і на інші соли.

Соли алькалігальоґенідових кристалів розсліджено основно в І. фізикальному інститутї університету в Ґетінґен під проводом проф. Pohl'а. На основі дотеперішніх наших відомостей про ціпкі тіла алькаліґальоґеніди в однокристалічній формі мають дуже просту будову. У чистому стані вони — оптично прозорі (в видній царині спектра) і можна їх докладно розслідити методами оптичними, електричними та термодинамічними. Алькалігальоґеніди в кімнатній температурі є злими провідниками. В міру зросту температури провідність їх росте виразно і то експоненціяльно. Рис. І. вказує залежність питомої провідности алькалігальоґенідів від температури; абсцисою є відворотність абсолютної температури, ординатою, поділеною логаритмічно, питома провідність. У вищих температурах має перевагу лиш термічне збурення строгого стехіометричного складу. В наслідок тепляних коливань кристалу поодинокі йони відділюються, переміщуються і опісля порушаються в електричному полі. У нижчих температурах переважає збурення, заморожене в часі творення кристалу. Це збурення може проявлятися у формі дір в кристалічній сітці або у формі йонів, втиснених в міжсіткові місця. Алькалігальоґенідові кристали знаємо в чистім стані як типові провідники йонів у протиставленні до металів, цих типових провідників електронів. Це розрізнення є добре. Одначе на основі нових дослідів воно вимагає доповнення. Несподівано можуть кристали алькалігальоґенідів виявляти побіч своєї йонової провідности нераз і переважаючу провідність електронову.

[1]) Термінологія згідна із „Словником фізичної термінології“ ВУАН (Матеріяли до україн. термінол. і номенклятури т. IV), Харків 1932

Кожний хемік знає, що кристал алькалігальоґеніду творить в парі свойого катіонового металю, пр. хльорід калія в парі калія при около 700° C, надмір металю в кристалі. Він дає кристалеві, що передше був для ока прозорий, сильне видне забарвлення. Для носія цього забарвлення придумано назву „центр барви“. Формально можна вважати центри барв атомами алькаліїв т. є. злукою катіона і електрона. Центри барв є ввиду цього невтральними атомами алькаліїв, що підлягають силам сіток кристалу. Абсорбційний спектр центрів барв виявляє дзвоноподібну смугу. Частоту максіма смуги можна обчислити із емпіричної формули:

$$\nu d^2 = \mathrm{const.}$$

Приклади спектрів подає рис. II.

Світло, що впадає в абсорбційні смуги, вириває (abspalten) електрони і вони в сітці порушаються свобідно. В електричному полі проявляють такі кристали внутрішній світлоелектричний ефект.

Електрони центрів барв можна вирвати не лиш світлом, але також можна їх висвободити часово термічно. Вище 200° C термічна спонука перевищає навіть світлоелектричну. При температурі яких 550° C можна центри барв видістати з кристалу в напрямі аноди електричним полем яких 220 вольт/цм в кількох секундах. Рис. III. подає кристал, що в нім ліва половина стала знову ясна через відхід електронів. Струм осягає по долученню поля найвищу вартість і паде опісля по відході електронів до певної постійної вартости. Рис IV. вказує перебіг струму. Постійний струм походить від власної електролітичної провідности кристала, струм, що часово спадає, від руху електронів. Шрафована поверхня виказує половину наряду, транспортованого електронами. Транспортовану кількість електричности можна визначити, а тим способом обчислити центри барв. Число так вичислених центрів барв згоджується вповні з числом електронів дисперзії, що його можна дістати за поміччю поміру — оптичною методою — сталої абсорбції і півквартісної ширини.

Досвід з мандрівкою електронів можна представити ще наглядніше (пор. рис. V.). Через відповідний катод, через вістря або через анодно споляризовану плиту входять у високій температурі електрони у виді хмари центрів барв в кристал. При цьому очевидно провідність йонів кристалу мусить дбати про своє вирівнання. По примандруванню електронів з вістря або анодно поляризованої плити має кристал попри своє стехіометричне збурення йонами ще додаткове збурення атомами. Рис. VI. вказує нам механізм т. зв. надчисельної провідности електронів. Електрон віддисоціовується термічно, порушається невидно, а опісля знову осідає як центр барви.

У такий самий спосіб, через огрівання кристалів в парі гальоґенів або через вихід з вістря, можна видістати стехіометричний надмір гальоґену в алькалігальоґенідових кристалах. Як приклад маємо абсорбційний спектр йоду в кристалі йодака калія (рис- VII). Це є спектр умісцевленого молекула йоду в йодаку калія. Через приложення поля мандрує надмірний гальоґен пр. йод із острим заднім фронтом до катода. Напрям мандрівки у електричному полі є напрямом додатнього наряду, зн. відворотно як у надмірних електронів алькаліїв. Невтральний йод не може очевидно мандрувати в електричному полі. Механізм мандрівки сповняється на заступній провідности електронів (рис. VIII). Атоми йоду, приявні в високій температурі, дістають від свойого йодового йона, положеного в їх сусідстві в напрямі катоду, один електрон. Через те перемінюється роля цеглин (Baustein). Воно видається, немов атоми йоду як додатний наряд посуваються в напрямі катоду. Ті досліди мають значіння в царині провідности електронів в ціпких тілах, а головно у царині півпровідників.

Видиму мандрівку електронів можна було легко пояснити. Термічна дисоціяція центрів барв постачала невидимі йони і невидимі електрони. Електрони можуть дифундувати з великою скорістю, бо перебігають свобідні довжини доріг. В електричному

полі дістає ця дифузія визначний напрям. Рівнож можна мірити рухливість центрів барв. Найлекше обсервувати їх як малу хмару центрів барв в чистім зрештою кристалі, або мірити струм електронів в стаціонарнім стані та числити:

$$K = n\,e\,v$$

(K = питома провідність електронів, e = елементарний наряд, v = рухливість).

Рухливости мірені цим способом, ростуть експоненціяльно з температурою кристалу (рис. IX), ц. є. із ростом температури росте термічна дисоціяція центрів барв в йони і електрони, або павзи спочинку електронів в звязанню центрів барв стають менші. Рухливість центрів барв в залежности від температури можна представити формулою:

$$v = v_0\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}.$$

Добором іншого мірила можна довести криві з рівним аніоном з останнього члена до накриття (рис. X.). Ординатами є рухливости центрів барв, абсцисами абсолютна температура, ділена характеристичною температурою. Величину Θ дістаємо з залежности температури питомого тепла. Електрони, відірвані теплом, можуть в кристалі дифундувати і дістають, як ми бачили, в електричному полі визначний напрям. Без електричного поля можна мірити лиш термічну дифузію, наколи є спад концентрації. Дифузійне число D визначуємо найкраще оптичним поміром розділу концентрації при забарвленню чистого алькалігальоґенідового кристалу в парі алькалія. Механізм дифузії центрів барв дасть нам іще краще зрозуміння транспорту електричности. Найдемо між числом дифузійним D і рухливістю електронів та додатних нарядів такий самий звязок, знаний нам в електролізі. Всеж таки з деяким застереженням. В електролізі знаємо лиш провідність носія, ц. є. провідність від'ємних і додатних йонів. Тут мусимо представити собі, що від'ємні йони є заступлені електронами — з тим додатком, що не лиш електрони центрів барв можуть мандрувати із своїми додатними нарядами, але що в транспорті електричности беруть також участь носії, приналежні до сітки. Вони витворюють в кристалі без центрів барв елекролітичний струм. Звязок між рухливістю електронів, додатніх електронів та сталих дифузії дає формула:

$$D = \frac{k_+\, v_-}{k_+ + k_-}\,\frac{kT}{e}$$

(D = стала дифузії, v_- = рухливість електрону, k_+ = питома провідність катіонів, k_- = питома провідність електронів k = стала Boltzmann'a, T = абсолютна температура, e = елементарний наряд).

В граничному випадку високих температур та малої концентрації центрів барв це рівнання зводиться до простої форми:

$$D = v_- \frac{kT}{e}.$$

Останній звязок показує наглядно ось що. В високій температурі в граничному випадку переважаючої провідности електронів дифундують електрони в спадку концентрації без перепон у кристал. Рухливість електронів є визначена виключно часом побуту в злуці центрів барв. В низьких температурах, коли переважає провідність електронів, вже не вистарчає електролітичне вирівнання. Мандрівку електронів спиняють додатні залишкові наряди. Термічна дифузія електронів пояснює також повставанне кристалів стехіометричним надміром алькалічного металю. Не дифундують атоми алькаліїв, а електрони.

В нестаціонарному стані визначує все додатний характер рухливість електронів в електричному полі. Це перенесене на наші центри барв значить: в нижчих температурах та переважаючій провідности електронів можна лиш в разі ідеального постачування електронів без льокального нарушування поля в кристалічній сітці діставати транспорт електричности без перепон. Можливо, що це льокальне нарушення поля спричинює розпорошення скорости в нижчих температурах.

Проблема транспорту електричности в непровідниках грає в техніці велику ролю. Кожний знає значіння Cu_2O в техніці. На жаль ця субстанція не надається до оптичних розслідів. При досліді транспорту електричности в алькалігальоґенідових кристалах (технічно речовини менше важливі) можна було, як я це вже сказав, примінити оптичні, електричні та термодинамічні методи. Чисто термодинамічну дорогу запропонували W a g n e r та S c h o t t k y. До цього приневолив їх вибір розсліджуваної речовини. Як вихідного матеріялу вживали вони металів, отже оптично непрозорих речовин, і робили їх відповідним способом, пр. покриттям міддю в атмосфері кисня, ліпшим або гіршим провідником. В обох разах — висліди однакі. Ми вибрали як вихідні речовини оптично прозорі. Із за того можна транспорт електричности носіїв представити наглядно.

Висновки.

1. Ідеальна, неметалічна сітка з досконалим стехіометричним складом є досконалим непровідником.

2. Відповідно до збурення цього складу можна непровідник зробити гіршим або ліпшим провідником.

3. Збурення стехіометричного порядку йонами спричинює провідність йонів, атомами провідність йонів і електронів.

4. Ці відношення можна добре представити на алькалігальоґенідах з стехіометричним надміром алькалія або гальоґена.

5. Алькалігальоґеніди з надміром алькалія спричиняють збільшену провідність електронів, алькалігальоґеніди з надміром гальоґена додаткову провідність електронів.

6. Поміром числа дифузії визначено вплив залишкових нарядів на рухливість електронів.

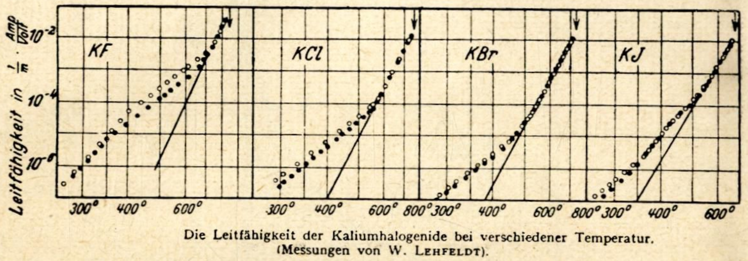


Рис. I.

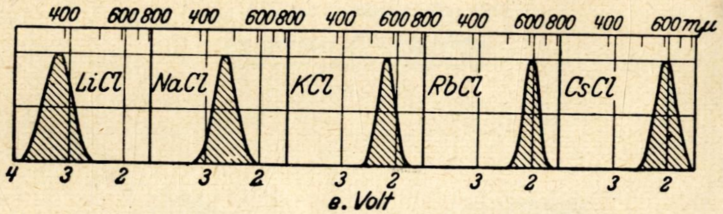


Рис. II.

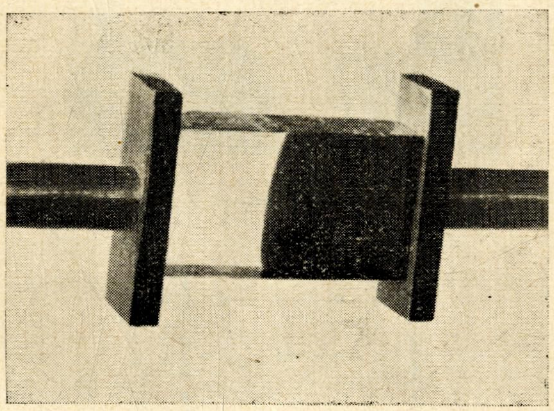


Рис. III.

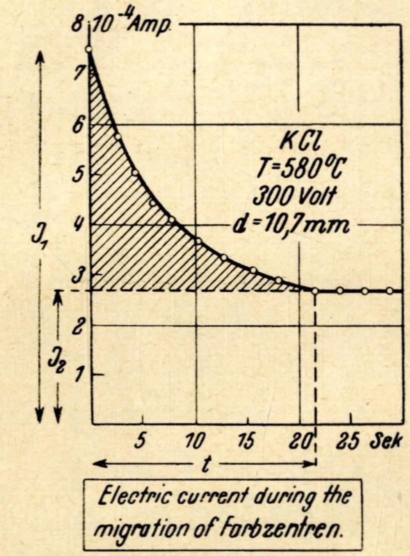


Рис. IV.

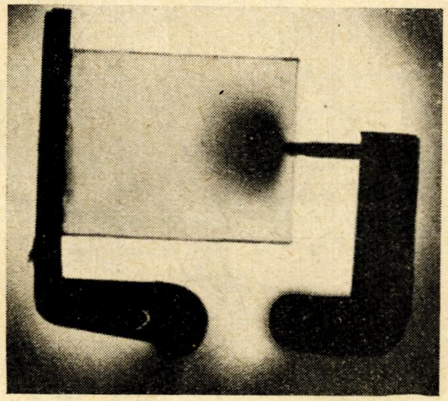


Рис. V.

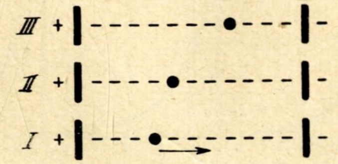


Рис. VI.

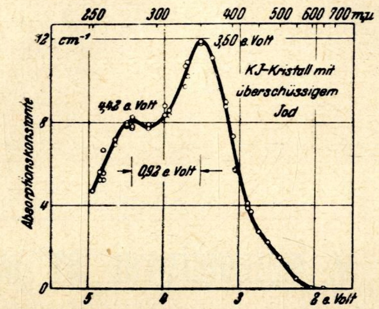


Рис. VII.

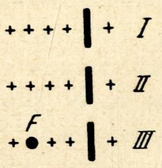


Рис. VIII.

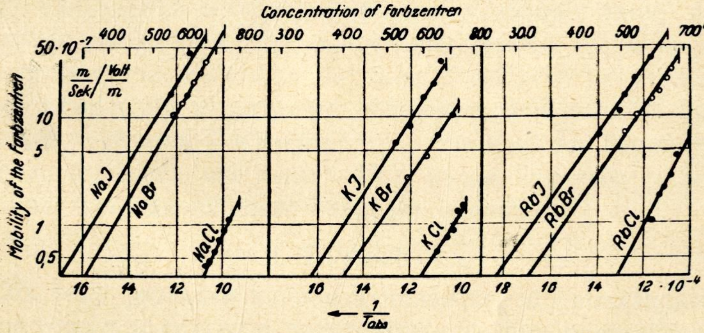


Рис. IX.

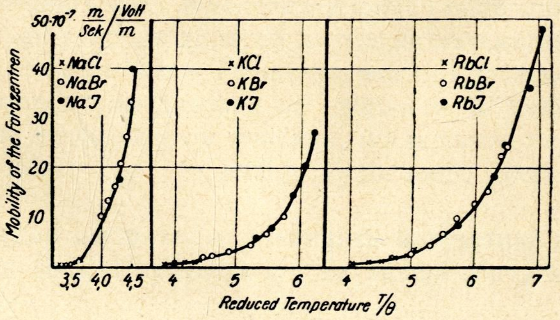


Рис. X.

Ю. БОГАЧЕВСЬКИЙ (Стрий).

Формалізм та інтуїціонізм у математиці.[1]

Оцей доклад виходить в дещо зміненому виді. А саме додано до нього деякі пояснення, необхідні на це, щоби читач, не все математик, міг як слід зорієнтуватись у проблємі. Всеж таки доклад (реферат) остане докладом та не слід ставити до нього таких самих вимог, як до моноґрафії тої ділянки математики, що її в такому чи інакшому місці заторкує. Його ціль — поінформувати, заінтересувати. І якщо така, що правда, скромна ціль буде осягнена, то здається, що завдання докладу можу вважати сповненим. Та в ніякому випадку такий доклад, хоч би в десятеро поширений, не буде надаватись до студії. Тому подаю наприкінці літературу предмету, бодай таку, як знаю, крім цього згадуватиму принагідно ориґінальні твори та розвідки, що з них можнаби річ студіювати. Не хочу вплутувати ненаукових афоризмів. та мимохіть нагадуються та насуваються слова віденського фізика Лєхера: „... Stecken wir das Ziel bescheidener, so erreichen wir mehr". Маю надію, що оцей доклад сповнить своє ось так скромно закроєне завдання.

I. ПРОБЛЄМА.

Як тему розвідки вибрав я полєміку, що вивязалась поміж математиками в останніх десятиліттях та яку порушувано трохи не на кожному з'їзді математиків — з післявоєнних згадати б тільки про з'їзд в Навгайм 1920 р., Єні 1921 р., Лайпціґу 1922 і др., а з останніх з'їзд німецьких лікарів і природників в Празі, на якому брали участь в дискусії не тільки математики, а й представники льоґіки, а також і критики мови. Полєміка торкається питання вартости математики та стійности її тверджень. Питання можна сформулувати словами, що їх тяжко перекласти на українську мову: „Ist die jetzige Mathematik überhaupt logisch zwingend?"

Відповідно до цього, як ставились математики до цього питання, та чи давали притакуючу, чи заперечуючу відповідь на

[1] Реферат читаний на VI. з'їзді укр. природників і лікарів у Львові 17. травня 1937.

нього, ділились вони на два табори. Противники тези про безоглядну стійність та „певність“ математики називають себе **інтуіціоністами**, приклонників називають **формалістами**. Цікаво, що саме оці математики, яким наука дуже багато завдячує, подали з часом в сумнів багато тверджень та доказів, між ін. навіть своїх власних. Ця обставина є доказом, що таке їх становище це вислід еволюції їхніх поглядів, та приневолює ставитись до їхнього становища дуже серіозно та схилити голову перед їх самокритикою, гідною справді вченої людини.

Щоби як слід з'ясувати становище представників обидвох напрямків на прикладах, вибираю підстави ґеометрії, що на них найкраще можна з'ясувати становище формалістів, та теорію множин, на якій найперше почали показуватись риси і прогалини, що й довели опісля до кріЗи, чи радше розбудови підстав. Маючи на увазі читачів, не обізнаних із математичними поняттями, постараюсь пояснити поняття, які прийдеться заторкнути, по змозі ясно і докладно, пресумуючи тільки такі відомости з математики, що їх дає середньошкільне образування.

II. ОСНОВИ ҐЕОМЕТРІЇ.

Перші відомости про ґеометрію, трактовану формально, тобто не як практичне землемірство (як вказувала б сама назва), а як замкнену в собі систему правд, залежних одна від одної, маємо від греків. Менш-більш з VI. ст. пер. Хр. ґеометрія (а ґеометрією називали фільософи все те, що сьогодні називаємо математикою) вважалась ділянкою льоґіки, та й то чи не найважніщою, як на це вказує хочби висказ **Плятона** *„Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰςίτω μοῦ τὴν στέγην“*. Оці фільософи, в боротьбі з софістами, видосконалили ґеометрію, як абстракційну науку, так що через більш як 2000 літ підстави ґеометрії, вложені в **Евклідових** *„Στοιχεῖα“* лишились ненарушені. Що більше, наука ґеометрії ще до недавна була майже однозначна з наукою Евклідових елементів. Щоби порівнати **Евклідову** аксіоматику з новітньою **Гільбертовою**, дозволю собі задержатись найперше на деяких дефініціях, постулятах та аксіомах Евкліда. Притім покликуватисьму на липське видання **Heiberg'a**: Euclidis Elementa Vol. I libros I—IV. continens. Lipsiae 1883, 333 S..

Отже перша книга зачинається 23-ма дефініціями, 5-ма постулятами і 5-ма аксіомами. З поміж усіх 118 дефініцій (*ὅροι*) пригляньмося н. пр. I *„Σημεῖόν ἐστιν, οὐ μέρος οὐθέν“* (точка це щось, що не дається поділити) або до II *„Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές“* (лінія це довжина без ширини) або до IV *„Εὐθεῖα γραμμή *ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*" (проста лінія це така, що однаково [„в однаковий спосіб"] лежить поміж своїми точками). В оцих і декількох дальших таких самих дефініціях Евклід намагається викликати в читача наглядне зображення, уявління цих творів, про які говорить. Цілком інакше Д. Гільберт, у якого ґеометрія цілком сформалізована. Та над цим задержуся небавом.

Постуляти (*αἰτήματα*) і аксіоми (*κοιναὶ ἔννοιαι*) — це деякі правди, що відносяться до оцих основних понять, описаних дефініціями, та й то такі правди, що з них уже методами чистої льоґіки можна вивести усі твердження ґеометрії. Оця величня льоґічна будівля, що спочиває на фундаменті оцих постулятів та аксіомів, це ще й до сьогодні зразок математичної аксіоматики. Та оця будівля виказує одну хибу: система аксіом неповна. Так нпр. в XVII дефініції (поперечник кола — це яканебудь проста, поведена через середину і з обидвох боків обмежена обводом кола, вона переполовлює коло) або в XXIII (рівнобіжні це такі лінії, що лежать на одній площі і, продовжені з обидвох боків в безконечність, не перетинаються з жадного боку) — приймається як самозрозумілий, ненаписаний, постулят, що кожна точка ділить просту на дві частини, в V. постуляті (якщо проста перетинає дві прості і творить з ними з одного боку середові кути менші від двох прямих кутів, то ті прості перетинаються з цього боку, по якім лежать ці середові кути, менші від двох прямих кутів) — принимається мовчки, що кожна проста ділить площу на два обшири, в IV. аксіомі (це, що накривається одне з одним, є одне одному рівне), говориться про накривання (*τὰ ἐφαρμόζοντα*), отже вводиться поняття руху і т. д. Деякого доповнення аксіоматики довершив у 1882 р. M. Pasch у своїх „Vorlesungen über neuere Geometrie„. Між ін. вводить він до ґеометрії т. зв. „Zwischen-Axiom"-и — слово, що його тяжко перекласти на якунебудь іншу мову.

Довгі *досліди* „*Елементів*" Евкліда та спроби перебудови його аксіоматики, особливо невдачні зусилля, щоб доказати т. зв. V-ту аксіому Евкліда та відкинути її накінець як залежну від других, довели до відкриття т. зв. неевклідової ґеометрії.

Тут маленьке пояснення; говорю про неевклідову ґеометрію і так називаю ґеометрію Лобачевського, що в ній побіч аксіомів т. зв. „абсолютної" ґеометрії (тобто такої, що не робить ужитку з V. Евкл. аксіоми, а занимається тільки твердженнями, що дадуться вивести з усіх інших аксіом крім V-ої) важна замість V. аксіоми Евкліда аксіома Лобачевського: „Існує проста g і точка P поза простою g, така, що щонайменше дві прості, поведені через P, не перетинають простої g.

(Rich. Baldus: Nichteuklidische Geometrie стор. 70). Існує ще крім цього ґеометрія Riemann-а, що в ній важна замість Евклідової аксіоми аксіома Рімана, а саме, що з точки поза простою не дасться повести до простої жадна рівнобіжна. Та прийнявши цю аксіому, мусимо відкинути деякі аксіоми абсолютної ґеометрії. Так нпр. в абсолютній ґеометрії, так само в Евклідовій і Лобачевського, дві прості можуть перетинатись щонайбільше в одній точці (якщо не накриваються), а в ґеометрії Ріманна дві прості перетинаються усе в двох точках. Або інший приклад: в абсолютній ґеометрії, так само в ґеометрії Лобачевського, важна м. ін. аксіома: з трьох точок на простій усе одна з них лежить поміж двома другими. Натомість в теорії Ріманна маємо аксіому: Кожна з трьох точок на якійнебудь простій лежить поміж двома другими.

Вже на оцих прикладах видно, що аксіома Ріманна, поставлена на місце V. Евклідової аксіоми (або однозначної з нею іншої) нарушує інші аксіоми абсолютної ґеометрії, натомість аксіома Лобачевського не нарушує їх. Тимсамим можна розбудовувати абсолютну ґеометрію або приймаючи додатково V. аксіому Евкліда або V. аксіому Лобачевського. В першому випадку маємо Евклідову, в другому неевклідову ґеометрію. Хоч дехто зачислює ще й ґеометрію Ріманна до „неевклідових" ґеометрій.

Пізнання цієї неевклідової ґеометрії, та критика підстав ґеометрії довели до повстання новітньої аксіоматики, що найшла зразковий вислів в Гільбертових „Grundlagen der Geometrie", оцьому ще досі не перевисшеному творі, хоч сам Гільберт доповнював підстави ґеометрії, хоч дехто, як нпр. A. Rosenthal виказував, що деякі з аксіом зайві, хоч дехто (як нпр. M. Dehn) розбудовував їх дальше, інколи на зазив самого Гільберта. В цьому творі піддано Евклідові аксіоми основній критичній аналізі та перерібці. Різниці поміж постулятами та аксіомами там уже немає, говориться тільки про аксіоми.

Замість дефініцій виступають там уже тільки пояснення (Erklärungen).

У вступі каже Гільберт: „Die Geometrie bedarf — ebenso wie die Arithmetik — zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundsätze. Diese Grundsätze heißen Axiome der Geometrie... Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein vollständiges und möglichst einfaches (підчеркнення самого автора) System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, daß dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen (підчеркнення моє) möglichst klar zutage tritt".

„Vollständiges System" значить, що усе там повинно бути ясно сказане, отже немає там місця для аксіомів, впроваджуваних „мовчки", як це діється у Евкліда. Тяжше вже приходиться сказати, що значить „möglichst einfaches System". Це відчуваеться радше інтуіційно. Натомість новим являеться домагання далекосяглости (Tragweite) аксіом. У Евкліда всі аксіоми однаково важні; у Гільберта вони поділені на ґрупи і нова ґрупа виступае у нього щойно тоді, як вже з попередньої не дасться вивести більше тверджень.

На початок кладе Гільберт ось такі пояснення: Подумаймо собі три різні системи предметів (drei verschiedene Systeme von Dingen). Предмети першої системи (Dinge des ersten Systems) назвім точками і зазначім їх A, B, C,..., предмети другої системи простими і зазначім їх a, b, c,..., предмети третьої системи площами і зазначім їх α, β, γ,... Точки називаемо також елементами лінійної ґеометрії, точки і прості елементами ґеометрії на площі, а точки, прості і площі елементами просторової ґеометрії. Оці елементи хай стоять одні до одних у деяких відношеннях. Оці взаемовідношення елементів зазначуемо словами: „лежати", „поміж", „рівнобіжний", „приставати", „суцільний"; докладний опис оцих взаемовідношень дають аксіоми ґеометрії.

Свої аксіоми ділить Гільберт на 5 ґруп, а саме:

I. 1—8. Аксіоми злуки (Axiome der Verknüpfung).
II. 1—4. Аксіоми впорядкування (Axiome der Anordnung).
III. 1—5. Аксіоми приставання (Axiome der Kongruenz).
IV. Аксіома рівнобіжних (Axiom der Parallelen).
V. 1—2. Аксіоми суцільности (Axiome der Stetigkeit).

Якщо порівняемо Гільбертові дефініції з Евклідовими, то вдаряе нас тут чистий sit venia verbo — вербалізм. Для Гільберта цілком байдуже, що собі подумаемо під „точкою", „простою", чи „площею". Ніде не сказано, щоб це доконче були такі точки, як їх собі уявляемо звичайно. Важне тільки те, щоби оці твори уяви, які собі виберемо як інтерпретацію оцих назв, сповнювали вимоги, висказані в аксіомах і більш нічого! Ґеометрія таким чином вповні сформалізована. Висловлючись приступно, а водночас досадно, можна сказати, що ґеометрія з не те, що нарисуемо, а те, що говоримо, чи навіть напишемо, навіть не те, про що говоримо, чи пишемо, а те, що ми говоримо, чи пишемо.

II. МОЖЛИВІСТЬ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ ТА ПИТАННЯ ПОВНОТИ АКСІОМ.

Ще одна різниця виступае наявно поміж Евклідовими і Гільбертовими аксіомами: а саме, що Гільбертові поняття можна реалізувати. інтерпретувати в якийнебудь спосіб, аби тільки були сповнені аксіоми. Таку довільність інтерпретації можна показати на ось такому прикладі: в математиці дуже часто послуговуємось т. зв. стереоґрафічною проекцією, а саме беремо під увагу кулю (ґльоб) Ґ, відзначуємо на ньому обидва бігуни і ведемо опісля через рівник площу π. Кожну точку тої площі лучимо простою з північним бігуном. Така проста перетинає кулю все в одній точці (крім того в північному бігуні). Кажемо, що відтворюємо площу π на кулю Ґ, а саме часть площі поза рівником на північну, внутрішню часть на полудневу півкулю. Значить, що кожній точці площі π відповідає (є припорядкована) одна і тільки одна точка на кулі Ґ і навідворот. Кожній простій на площі π відповідає на ґльобі Ґ коло, яке переходить через північний бігун, простим, що переходять через осередок рівника, відповідають на Ґ великі кола (полуденники). Двом рівнобіжним на площі π відповідають на Ґ два кола, що переходять через півн. бігун. Цей бігун є для них точкою стичности. Та притім треба памятати, що північний бігун як т. зв. „окремішну точку“ виключується з математичних розважань. Приймім тепер, що двох математиків говорять про ґеометрію, а саме про Гільбертові аксіоми та виводять з них відповідні твердження; один з них має на думці точку і прості на площі, другий натомість відповідні твори на відповідному ґльобі. Як довго вони нічого не рисують, так довго вони дійдуть до повного порозуміння. Їх обидві „ґеометрії“ будуть однаково важні, однаково „правдиві“, а саме тому, що вони погоджуються відносно своєї аксіоматики*).

Оцього зрозуміння, що під точкою, простою, чи площею можна розуміти щось інакше, чим ми звичайно розуміємо, у Евкліда ще не було. Ґеометрію Гільберта ціхує, в противенстві до Евкліда, льоґічний формалізм.

Тут іще насувається питання, чи така довільність інтерпретації не посунена занадто далеко; значить, що якщо придумаємо собі дві якінебудь інші інтерпретації ґеометричних понять, то щоби вони усе далися відтворити одна на одну в вищеописаному змислі, та й то однозначно. Система аксіом мусить бути повна. Чи система аксіом Гільберта повна, значить чи там не пропущено якої ще потрібної аксіоми, на це може дати відповідь щойно критика тверджень, виведених з оцих аксіом.

---

*) Rich. Baldus: Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik. Karlsruhe in Baden 1924, стор. 11.

IV. ПИТАННЯ ЗГІДНОСТИ АКСІОМ ОДНИХ З ОДНИМИ ТА ЇХ ВЗАЇМНОЇ НЕЗАЛЕЖНОСТИ.

Згідність аксіом одних з одними доказує Гільберт так, що відтворює (також в поясненому попереду змислі) предмети першої системи на множину дійсних чисел, предмети третьої системи (площі) на множину лінійних рівнань з трьома змінними (з дійсними сучинниками), а предметів другої системи, простих, на множину пар таких рівнань.

Для не-матиматиків подам ось таке пояснення: відтворення множини точок на множину дійсних чисел (а радше трійки таких чисел) значить встановлення одно-однозначної відповідности поміж точками і трійками чисел, так щоб кожній трійці чисел відповідала одна і тільки одна точка і навідворот. Як це робиться на площі, знаємо із шкільної науки альґебри: рисуємо т. зв. систему сорядних Декарта і зазначуємо початок укладу парою чисел (0, 0), всі інші точки відповідними парами чисел. В просторовій ґеометрії мусимо вибрати систему Декарта з трьома осями, простопадними одна до одної, початкову точку зазначуємо трійкою (0, 0, 0), всі інші точки відповідними трійками чисел. Так само знаємо із шкільної альґебри, що кожній простій відповідає якесь рівнання з двома змінними

$$ux + vy + w = 0,$$

а що дві прості (нерівнобіжні) перетинаються в одній точці, то ми могли б також точки на площі означувати парами таких рівнань. В просторовій аналітичній ґеометрії площі зазначуються лінійними рівнаннями з трьома змінними

$$ux + vy + wz + t = 0,$$

а що дві площі нерівнобіжні перетинаються в простій, то прості лінії в просторовій ґеометрії зазначуються парами таких лінійних рівнань з трьома змінними.

Отож, якщо яканебудь суперечність мала б місце поміж аксіомами або висновками з цих аксіом, то така суперечність виступила б таки зараз в множині дійсних чисел. Таким чином Гільберт узалежнює згідність ґеометрії з собою від згідности аритметики з собою. Та саме оцю згідність аритметики з собою треба було таки доказати і це завдало Гільбертові згодом навіть чимало мороки.

Що ж торкається взаємонезалежности аксіом, то незалежність аксіоми рівнобіжних від других аксіом доказує Гільберт можливістю неевклідової ґеометрії, незалежність аксіом приставання від других аксіом можливістю інакшої ґеометрії, незалежність аксіом суцільности можливістю не-Архимедової ґеометрії. Та годі отрястися з подиву для ґеніяльної інтуїції Евкліда, що, не знаючи модерної аритметики та аналітично-ґеометричних метод, поставив свій V. постулят на належному місці.

V. НЕРОЗВЯЗАНІ ПРОБЛЄМИ.

Тому що для формалістів та інтуїціоністів — характеристичне м. ін. їхнє становище до нерозвязаних проблєм та до т. зв. доказів існування, представлю в оцьому уступі бодай декілька таких проблєм.

Теорія чисел знає т. зв. проблєму Fermat'-a, що лежить у тому, щоб найти доказ т. зв. великого твердження Fermat'-a, а саме, що неможливо найти такі три цілі числа x, y, z, аби було сповнене рівнання

$$x^n + y^n = z^n$$

де n було б більше чим 2. Дотепер переведено докази тільки в поодиноких випадках для $n = 3, 4, 5$ і т. д. та доведено аж до числа 257, натомість не вдалось подати загального доказу для всіх натуральних чисел, підставлених за n.

До сьогодні немає відповіді на питання, чи маємо скінчену, чи нескінчену кількість пар первісних чисел з різницею 2, як н. пр. 5 і 7, 11 і 13, 41 і 43 і т. д.

До сьогодні ще не маємо доказу т. зв. твердження Ґольдбаха, а саме, що кожне паристе число дасться бодай в один спосіб представити як сума двох первісних чисел, н. пр.: $10 = 7 + 3$, $18 = 11 + 7$, $22 = 19 + 3$ і т. д.

До тепер ще не знаємо, чи т. зв. Ойлерівська (Euler) стала (Konstante)

$$C = \lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log (n + 1)\right]$$

є алґебричним, чи трансцедентним числом. [Алґебричним називаємо число, що може бути коренем (розвязкою) алґебричного рівнання з цілочисловими сучинниками. Числа, що не можуть бути розвязкою таких рівнань, називаємо трансцедентними].

Таких нерозвязаних проблєм математика знає більше. Не від речі буде згадати, що ще до недавна, бо до 1871 р. не було доказу, що число π переступне.

VI. ДОКАЗИ ІСНУВАННЯ.

В математиці переводиться часто т. зв. докази існування деяких математичних понять, хоч самого поняття при тім не твориться, не показується ефективно. Так н. пр. в альґебрі зокрема доказується існування розвязок рівнань, а зокрема показується вираження, що їх представляють. Що більше, Абель доказав, що для рівнань V. і вищих ступінів неможливо (в загальному випадку) найти альґебричне вираження (себто при помочі чергового корінювання) на розвязки рівнання, а проте ці розвязки існують! Та й не тільки існують, а й маємо величню будівлю теорії альґебричних чисел, отже чогось такого, що ефективно маємо тільки в виняткових випадках, для виняткових рівнань.

Так само маємо докази існування інтеґралів диференціяльних рівнань, що їх треба відрізнити виразно від ефективного заподавання таких інтеґралів (розвязок)*).

Та бувають і ефективні докази існування. Щоби показати хоч на одному прикладі різницю між ефективним а неефективним доказом, наведу доказ існування трансцедентних чисел, так як його подає G. Cantor на підставі своєї теорії множин, а як доказують існування оцих чисел Liouville, Hermite і Lindemann. Доказ Cantor-а, що його він перевів на з'їзді природників в Галлє 1891 р., переповідаю за Кляйном. Цей доказ дещо відмінний від цього, що його Кантор оголосив 1873 р. (в 77-му томі Journal f. reine u. angew. Mathematik). Та передтим дам декілька необхідних пояснень з теорії множин.

Множиною називаємо (за Кантором) скінчений або й нескінчений збір (комплекс) предметів, різних один від одного. Ці предмети називаємо елементами множини.

Найбільш типовим прикладом множини в нескінченою кількістю елементів є множина натуральних чисел

$$\{1, 2, 3, \ldots\}$$

або множина усіх паристих чисел

$$\{2, 4, 6, \ldots\}$$

або усіх можливих дробів

$$\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \ldots\}.$$

В деяких випадках можна встановити одно-однозначну відповідність поміж поодинокими елементами двох множин, так щоб кожному елементові одної множини відповідав один, але тільки один елемент другої. Така відповідність існує н. пр. поміж множиною чисел природного ряду і множиною усіх паристих чисел

$$\begin{array}{cccccc} \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \text{in inf.}\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \{2, & 4, & 6, & 8, & 10, & \text{in inf.}\} \end{array}$$

Такі дві множини називаємо рівноважними одна з одною.

---

*) Про значіння доказів існування див. Д-р В. Левицький: Докази існування інтеґралів ріжничкових рівнань. Збірник матем.-природн.-лік. Секції Н. Т. Ш. т. І. 1897 р.

Множину, рівноважну з множиною чисел природного ряду, звемо **перелічимою** (abzählbare Menge). Отож н. пр. множина паристих чисел перелічима.

Так само перелічима множина усіх дробів. Доказ переводиться при помочі т. зв. 1-го косинного процесу (erstes Diagonalverfahren). А саме виписується всі цілі числа й дроби (всі вимірні числа) в ось такому порядку

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, \\ \frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{2}, \\ \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{3}, & \frac{4}{3}, \\ \frac{1}{4}, & \frac{2}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{4}, \end{matrix}$$

Кажемо, що таким способом „вичерпаємо", тобто випишемо „всі" вимірні числа, значить цілі числа і дроби. Тепер виймаємо їх по черзі ось так:

$$1,\ 2,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{2},\ 3,\ 4,\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},$$

Зараз видно, що вони дадуться припорядкувати кожне по черзі одному і тільки одному з чисел природного ряду. (Можна б, як хто хоче, іще перекреслити числа, які повторюються):

$$\begin{matrix} 1, & 2, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & 3, & 4, & \frac{3}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{1}{4}, \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, \end{matrix}$$

З такого представлення видно рівноважність множин вимірних чисел з множиною чисел прир. ряду, значить перелічимість множини вимірних чисел.*)

Назва „Diagonalverfahren" походить звідси, що за оцими числами слідкуємо по косинах.

Важний і інтересний приклад перелічимої множини маємо на множині альґебричних чисел. Її перелічимість доказуємо так, що доказуємо перелічимість усіх многочленів з цілочисловими сучинниками $a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots a_1, a_0$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

В тій цілі впроваджується поняття т. зв. „висоти" многочлена

$$h = n + a_n + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|;$$

це, як видно, сума абсолютних вартостей сучинників і ступня. Якщо за h прийматимемо по черзі числа 2, 3, 4, і т. д., то для означеного h маємо тільки закінчену кількість многочленів

---

*) E. **Kamke**: Mengenlehre, Sammlung Göschen, ч. 999, 8-ма і сл. стор.

з висотою h. Так н. пр. для $h = 2$ маємо само x або рівнання $x = o$, для $h = 3$ маємо многочлени x^2, $2x$, $x + 1$, $x - 1$, 3, або рівнання $x^2 = 0$, $2x = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$. Так можемо впорядкувати усі многочлени, чи відповідні рівнання, або, що на одно виходить, їх розвязки, отже альґебричні числа, і кожне з них припорядкувати одному з чисел природного ряду. Таким чином перелічимість множини альґебричних чисел буде доказана. (Kamke, op. cit.).

Що не всі множини перелічимі, що існують множини неперелічимі, а саме н. пр. множина чисел, що не є ані вимірні, ані альґебричні, доказує Cantor при помочі т. зв. 2-го косинного процесу (zweites Diagonalverfahren). Він бере під увагу всі альґебричні числа поміж 0 і 1. Кожне з них дасться виписати одним способом при помочі цифер як нескінчений (а хочби й скінчений) десятковий дріб, а їх „кількість", множина є перелічима.

$$
\begin{array}{l}
0,\ a_{11}a_{12}a_{13} \\
0,\ a_{21}a_{22}a_{23} \\
0,\ a_{31}a_{32}a_{33}
\end{array}
$$

Виберім тепер цифри на косині, значить цифри 0, a_{11}, a_{22}, a_{33}, і т. д. і створім нове число 0, $b_1b_3b_3$, так щоб b_1 не було рівне a_{11}, дальше $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$ і т. д. Такого числа немає поміж вже виписаними (бо від кожного з них різниться бодай одною цифрою від якогонебудь іншого). З цього видно, що усі альґебричні числа ще не виповнюють цілого інтервалу поміж 0 і 1, отже що є, існують іще числа, які не є альґебричні.

В оцьому доказі не показується ефективно, як перевести конструкцію неальґебричного числа. Інакше поступає Liouville (Comptes rendus 1844 або Journal de Mathématiques vol. 16 з р. 1851). Він виводить одну характеристичну прикмету альґебричних чисел, та показує на прикладах, що є, існують числа, які не мають тої прикмети, отже не є альґебричними числами. Між іншим подає він ось таке число

$$\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^{1.2}} + \frac{1}{10^{1.2.3}} + \frac{1}{10^{1.2.3.4}} + \cdot \quad \text{in inf.} = 0{,}11000100.$$

Подібним, хоч дещо відмінним способом доказує Hermite, що число $e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} +$ є переступне число, так само

Lindemann, що число $\pi = 3{,}14159\ldots$ це переступне число.*) Тут переводиться доказ, що немає такого альґебричного рівнання з цілочисловими сучинниками, якого коренем було б число e, чи π, а тим самим, що це переступні числа. Та годі тут переводити,. а радше повторювати ці докази in extenso. Для не-математика вони за тяжкі і за довгі і ніякий популяризатор тут нічого не вдіє, а математик знає їх і без того. Те саме можна завважити, що торкається теорії Lindelöf-а, Fréchet-а, Лузіна та др. Математикові і так не скажу нічого нового, а не-математика тільки непотрібно задержу. (Це все виложено ясно і докладно в цитованому в списі літератури підручнику В. Серпінського).

VII. ОСНОВНІ ЗАКОНИ ЛЬОҐІКИ.

Їх згадую на оцьому місці тому, що саме інтуїціоністи заперечують важність 3-ої аксіоми льоґіки навіть в математичних розумуваннях. Підставовими законами льоґіки або „законами думання“ називаємо звичайно чотири аксіоми льоґіки, а саме:

1. Закон тотожности: Те, що є, є, або: $A = A$;

2. Закон суперечности: Жадна річ не може бути і не бути водночас, або: A не є non — A;

3. Закон виключеної середини (principium exclusii medii): кожна річ мусить або бути, або не бути, або інакше: A є або B, або не — B, третьої можливости немає (tertium non datur);

4. Закон достаточної причини: Нічо не діється без достаточної причини.

В льоґіці не приймається оцих законів думання так зовсім беззастережно. Друга і третя аксіома насуває зовсім поважні труднощі. Дехто не вважає третьої аксіоми самостійною аксіомою Sigwart**) є тої думки, що третя „аксіома“ виходить з другої і подвійного заперечення. Wundt***) підносить щодо неї поважні сумніви. Та за те в математиці приймається оці закони беззастережно, бодай математик-формаліст послуговується згаданими законами, як чимсь самозрозумілим.

VIII. СПРОБА ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕМАТИКІВ-ФОРМАЛІСТІВ.

На оцьому місці можна, думаю, подати характеристику математика-формаліста, а саме:

*) Див. Д-р Володимир Левицький: Про переступ чисел e і π. Збірник т. І. 1897. — **) Sigwart, Logik стор. 213. — ***) Wundt. Logik I. стор. 555.

Він є аксіоматиком в такому розумінні, як вище вияснено. Згідність ґеометрії з собою у нього залежна від згідности аритметики з собою.

В противенстві до математика-інтуїціоніста, чи як висловлюється H. Poincaré — праґматиста, він непохитно переконаний у можливості розвязання кожної математичної проблеми. Типовим висказом Гільберта, оцього формаліста par excellence, висказом, що його він ще до сьогодні не перестає повторювати трохи не на кожному конґресі, є слова: „Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus“.

В противенстві до інтуїціоніста послуговується формаліст залюбки згаданими трьома основними законами льоґіки. Він приймає їх як щось де як де, а в математиці самозрозумілого, без якихнебудь застережень.

В противенстві до інтуїціоніста займається формаліст залюбки описаними вже доказами існування та вважає їх чимсь високовартісним. Він приймає якесь поняття як існуюче, якщо в ньому тільки нема суперечностей. Натомість цілі числа „існують“ для нього щойно тоді, як вдасться доказати, що в їхніх законах немає суперечностей.

IX. ТЕОРІЯ МНОЖИН ТА ЇЇ ПАРАДОКСИ.

Одним з найбільш плідних умів поміж формалістами був Georg Cantor (1845–1918), творець згаданої вже теорії множин. Сьогодні маємо аксіоматику теорії множин, яку завдячуємо Zermelo. Кантор пробує іще дефініювати поняття множини і в цьому він нагадує трохи Евкліда. Він подає ось таку дефініцію: „Eine Menge ist eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unseser Anschauung oder unseres Denkens — welche die Elemente der Menge genannt werden — zu einem Ganzen“. Аксіоматика Zermelo подає інакшу дефініцію, подібну до Гільбертових дефініцій. В Канторовій можна добачувати льоґічну похибку idem per idem. Не входячи в дальшу аналізу понять, зверну таки зараз увагу на недомагання оцієї теорії, які не мають анальоґії в жадній іншій ділянці математики. А саме вже з самого поняття множини виходять парадокси теорії множин, до яких ми в математиці не привикли. З тих парадоксів згадаю перш за все славнозвісний *парадокс Russell-a. Його* можна описати менш-більш ось так: Якась множина може містити в собі саму себе, *як елемент, або ні.* Так н. пр. множина усіх абстрактних понять є сама абстрактним поняттям і містить в собі саму себе як елемент. Знову н. пр. множина всіх чисел від 1 до 10 не містить в собі самої себе як елементу. Візьмім тепер під увагу якусь множину N, що не містить в собі самої себе як елементу і візьмім під увагу множину M усіх таких множин.

Чи M містить в собі саму себе як елемент, чи ні?

Отож з одного боку можна довести, що не містить, бо сказано, що це має бути множина тільки таких множин, що не містять себе в собі як елементу.

Та знову якщо вона не містить себе сама в собі, то таки є елементом множини M, отже таки містить себе сама в собі.

З чисто формального боку оця антиномія нагадує н. пр. процес софіста Протаґора з його учнем Еватльосом за заплату за перший виграний процес. Протаґор доказує, що Еватльос повинен йому заплатити, бо якщо програє, то на основі присуду, а якщо виграє, то на основі умови. Зновже ж тамтой з рівною силою арґументації доводить, що якщо виграє, то не заплатить на основі присуду, а якщо програє, то не заплатить на основі умови.

Або антиномію Епіменіда з Крети: „Усі Кретийці говорять неправду".

Сьогодні можна навіть подати загальну рецепту, як творити такі парадокси, що з теорією множин, ані з математикою не мають нічого спільного. Russell подає н. пр. ось такий: Назвім якесь поняття присудимим (praedicable), якщо воно дасться прикласти до себе самого. Так н. пр. вираз „абстрактний" є присудимий, бо поняття абстрактности є абстрактне, отже дасться до себе прикласти. Зновже ж н. пр. вислів „конкретний" є абстрактний, не дається до себе прикласти, отже є неприсудимий. Роздивімся тепер, чи вислів „неприсудимий" є присудимий, чи ні. Отже з одного боку він неприсудимий, бо не дасться прикласти до себе самого. Але ж знову з другого боку вже через те саме він сáме ось тут прикладається до себе самого, є він присудимий. Таким чином оце поняття суперечне в собі, так само як поняття множини всіх множин, що не містять себе самих в собі як елементу.

Теорія множин має ще й інші антиномії, так н. пр. антиномію Burali-Forti, Zermelo-König-а, Richarda, Berry та ін. Та суттєво вони поміж собою не різняться.

X. РІЗНІ СПРОБИ ЗВІЛЬНЕННЯ МАТЕМАТИКИ ВІД АНТИНОМІЙ.

Зрозуміло, що такі антиномії стають нестерпні в математиці, яка має бути зразком точности. Не диво, що були спроби усунути ці неточности. Одною з них була аксіоматизація теорії множин, що її довершив Zermelo. Його аксіоматика в багатьох детайлях нагадує Гільбертову аксіоматику ґеометрії. В оцій аксіоматиці обмежено поняття множини до таких множин, що не доводять до парадоксів. Та немає ніякої запоруки, що такі самі антиномії не виступлять десь на іншому місці. Інші спроби ратувати математику йшли в напрямі базування математики на льоґіці. Проти цього напрямку Frege і Russell-а були поважні застереження (див. н. пр. Bernays — гл. літературу). Ці спроби Frege і Russell-а також не давали запоруки, що оминуть раз на все парадоксів. Та їхня заслуга ця, що вони звернули увагу на це, чим, на ділі, є взагалі математична конклюзія.

XI. ІНТУЇЦІОНІСТИ, ГОЛОВНО BROUWER.

Та найбільш революційним показався в реформуванні математики напрямок, що веде свій початок від Kronecker-а, а репрезентований в останніх часах такими математиками як Poincaré, Borel, Brouwer, Weyl. Brouwer назвав свій напрямок інтуїціонізмом, Poincaré називає його приклонників праґматистами. Вони з цілою силою пари звертаються проти тих помічних понять, що їх математика запозичує від льоґіки, та доходять до цього, що відкидають цілу низку конклюзій, якими математика до тепер так пишалась. Щораз яркіще зарисовується різниця поміж новим інтуїціоністичним і формалістичним напрямком, що все ще не дає за виграну. Оця різниця показується вже в самих вихідних точках розважувань одних і других. Отож для інтуїціоністів є каноном, системою основних аксіом математики збір властивостей чисел природного ряду. Вони навязують до слів Кронекера: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk“. Тут видно також противенство до теорії згаданого вже Frege і Russell-а, що пробують подавати дефініцію цілих чисел. Та вже Гільберт закидує їм (Grundlagen VI-те вид. стор. 244.), що саме в цій дефініції вони попадають в небезпеку антиномій. Для інтуїціоніста немає ніякого змислу, шукати на оці основні закони цілих чисел якогонебудь доказу та розчленовувати їх так, як це робить формаліст. Тим самим всякі намагання, перевести для них т. зв.

„Widerspruchlosigkeitsbeweis“, для інтуіціоніста зовсім безпредметові. Так само без доказу і дефініції приймає він іще деякі поняття з теорії множин.

В противенстві до математика-формаліста він не визнає чисто формальних доказів існування. Йому замало сказати, що якесь поняття існує, тому, що воно вільне від суперечностей. Він хоче, щоби йому це поняття показати, перевести його конструкцію. Він визнає тільки ефективні докази існування.

Інтуіціоніст не приймає беззастережно аксіоми „tertium non datur“. Так н. пр. для формаліста якесь число є або альґебричне, або трансцедентне, — tertium non datur. Інтуіціоніст допускає ще третю можливість, що питання взагалі не дасться вирішити.

Так само приймає інтуіціоніст можливість, що є проблеми, що взагалі не дадуться розвязати.

Таке становище інтуіціоністів викликало доволі горячкову дискусію в 1900-их р.р. (Hilbert: Axiomatisches Denken, або Pasch: Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 27. з р. 1918, 228—232.).

Ясно, що так далеко посунений критицизм мусів довести по просту до відкинення неодного гарного твердження математики. Між іншим для інтуіціоніста відпадає твердження, що кожна суцільна в якомусь обмеженому промежуткові функція має своє maximum, або що кожна суцільна монотонна функція дасться зріжничкувати в цілому промежуткові за вїмком скінченої множини точок. Інтеґрал Лебеґа (Lebesgue), тай взагалі багато тверджень теорії функцій дійсних змінних не існує. Вона ж опирається на осьтакі твердження: 1) Що точки суцілля (Punkte des Kontinuums) творять впорядковану множину, значить, що поміж якиминебудь двома точками має місце ось таке взаємовідношення $a \gtreqless b$. 2) Що кожна множина є або скінчена, або нескінчена. А інтуіціоніст відкидає саме оці закони.

Та інтуіціоніст вже найбільш безпощадний супроти теорії множин. Вона виходить сильно обкроєна та здеформована; особливо становище інтуіціоністів до питання суцілля дуже відмінне від становища формалістів (Brouwer: Intuitionistische Mengenlehre). Це вже виглядає на велике спустошення. Говориться про крізу основ математики. Прийшлося ратувати становище формалістів, та таки конче перевести згаданий вже доказ згідности аритметики зі собою. Таке завдання Гільберт поставив собі в своїх „гамбурських“ працях. Останні роки принесли деяке злагіднення різниці становищ обидвох таборів. Останній з'їзд в Празі 1929 р.

показав, що можливо найти спільну мову. Інтуїціоністи визнають вже, що математика Гільберта таки вільна від суперечностей, з другого боку формалісти признають, що вихідні точки їхніх розважувань суттєво не різняться від Бравверових. Обидва напрямки погоджує льоґістика (математична льоґіка).

XII. ЗАКІНЧЕННЯ.

Чи полеміка поміж обидвома таборами колинебудь закінчиться, можна сумніватись. „Правдивими" можна визнати обидва напрямки в тому розумінні, що зі становища чистої льоґіки годі котрому з них щонебудь закинути. Сьогодні обидва напрямки заксіоматизовані, так що тільки інтуїційно можна приймати або одну або другу систему аксіом. Тут виразно виступило значіння аксіоматики взагалі. Гільберт каже н. пр.: „Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik. In dem Zeichen der axiomatischen Methode erscheint die Mathematik berufen zu einer führenden Rolle in der Wissenschaft überhaupt". Сьогодні вже ясно, що всяке думання залежне від аксіом і про „правду" приходиться говорити на стільки, на скільки правдиві аксіоми. І оця провідна роля математики лишилася її величнім завданням.

ЛІТЕРАТУРА.

H. Weyl.: Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. — Mathematische Zeitschrift, Bd. 10, 1921, S. 39—79.

H. Weyl.: Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik. — Mathematische Zeitschrift, Bd. 20, 1924, S. 131—150.

D. Hilbert.: Mathematische Probleme. — Vortrag, gehalten auf dem internationalen mathematischen Kongresse zu Paris 1900. Abgedr. im Archiv für Mathem. und Physik, 3 Reihe, Bd. 1, 1901, S. 44—63 u. 213—237. — Пор. також Збірник мат.-прир.-лік. секції т. VII. вип. II. 1901. бібліогр. ст. 21.

D. Hilbert.: Axiomatisches Denken. — Züricher Vortrag 1917. Mathematische Annalen, Bd. 78, 1918, S. 404—415.

D. Hilbert.: Neubegründung der Mathematik. — Abhandlungen a. d. mathem. Seminar d. Hamburgischen Univ. Bd. 1, 1922, S. 157—177.

D. Hilbert.: Die logischen Grundlagen der Mathematik. — Mathem. Annalen, Bd. 88, 1922, S. 151—165.

A. Pringsheim.: Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. Festrede 1904. München, K. B. Akademie der Wissenschaften, 44 S.

L. E. I. Brouwer.: Intuitionism and Formalism. — Bulletin of the American Mathematical Society, XX, 1913, S. 81—96

L. E. I. Brouwer.: Intuitionistische Mengenlehre. — Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 28, 1919, S. 203—208.

D. Hilbert.: Grundlagen der Geometrie. 6-te Aufl. — Wissenschaft und Hypothese, Berlin u. Leipzig, 1923.

H. Weyl.: Das Kontinuum. — Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis, 1932, 84 S.

F. Hausdorff.: Mengenlehre. 2-te Aufl., 285 S. 1927. — Göschens Lehrbücherei, Bd. 7.

W. Sierpiński.: Zarys teorji mnogości. 2 томи. Warszawa, MCMXXIII.

F. Klein.: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Dritte Auflage, 1-ter Bd. Berlin, 1924.

B. Russell.: The principles of mathematics. — Cambridge 1903.

A. N. Whitehead and B. Russell.: Principia mathematica I—III. Cambridge, 1910—1913.

A. Fraenkel.: Einleitung in die Mengenlehre. 2-te Aufl. Berlin, 1923, 251 Seiten.

A. Fraenkel.: Die heutigen Gegensätze in der Grundlegung der Mathematik. — „Erkenntnis", Bd. 2/4.

Rudolf Carnap.: Bericht über Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik. — Diskussion über Grundfragen der Mathematik und Logik. — ibid.

Д-р РОМАН ЦЕГЕЛЬСЬКИЙ (Львів).

Фізикальні проблеми останньої доби.*)

I.

Двадцяте століття зазначилося небувалими успіхами фізикальних дослідів. Після епохальних відкрить електромагнетних хвиль, променів Рентґена та радіоактивних первнів, що припадають на кінець XIX. століття, насунулися, почавши від 1900 р., проблеми, що в зв'язку з удосконаленням експериментальних метод останніх десяток літ захитали основами клясичної фізики та приневолили до їх ревізії. Ці проблеми — це квантова теорія Плянка, теорія релятивности Айнштайна, теорії будови атомів, пр. теорія Бора та теорія матеріяльних хвиль, що їх поставили Де Бролі (De Broglie), Шредінґер і Гайзенберґ. Вони в своїй хвилястій механіці впровадили у фізику в часі від 1925 до 1930 р. цілу плеяду нових понять та при допомозі їх вияснили велику кількість явищ, відкритих експериментальним шляхом, що їм не могли дати ради теорії клясичної фізики. Ті всі проблеми внесли у фізику живий фермент, що ще досі ворушиться, висуває щораз то нові питання і факти та не дає збагнути, коли вона прийде до відносної рівноваги.

Спільний предмет згаданих проблемів це атомова будова матерії. Її впровадив ще в глибокій старині грецький філософ Демокрит, але вона здобула щойно в XIX. столітті наукові підстави, завдяки дослідам Дальтона та відкриттю рухів Бравна (Brown). Дальтон відкрив закон постійних та многократних тягарових відношень у хемічних сполуках і виказав цілочисельність останніх реляцій. Рух Бравна став знов одною з підвалин молекулярно-кінетичної теорії тепла. Вона, нав'язуючи до закону непропащої енерґії, що його відкрили Роберт

*) Реферат, виголошений дня 16. травня 1937 р. на спільнім засіданні обидвох секцій VI. з'їзду українських природників і лікарів у Львові. Хоч він має характер інформативний, одначе з огляду на вагу теми вважаємо вказаним помістити його в Збірнику секції. — *Редакція.*

Маєр, Джемс Джюль (James Joule), Уілям Томзен (William Thomson) та Гельмгольтц, розвинулася завдяки працям Клявзіуса (Clausius), Мексуеля (Maxwell), Больцмана (Boltzmann) і Смолюховського. Рівнобіжно з тим дійшла до великого розвитку хемія, послугуючися в своїх дослідах поняттям атомів.

Не зважаючи на ті великі успіхи мала атомова теорія чимало ворогів серед визначних фізиків, хеміків та філософів. Ніхто інший, тільки саме славний німецький хемік Вільгельм Оствальд писав у своїх „Vorlesungen über Naturphilosophie“ (2-е видання, Липськ, 1902 р.) отсі слова: „Стехіометричні закони залишаться у хемії ще й у тих часах, коли атоми вже довгий час буде можна находити лише в поросі бібліотек“. Противники атомової теорії вважали поняття атомів тільки за помічні образи та моделі, але рішуче заперечували їхнє існування.

Аж у девятдесятих роках XIX. століття атомова теорія побідила теорію суцільности матерії. Допомогло їй до того у значній мірі відкриття атомової будови електричности, що проявилася в явищах електролізи, йонізації газів та катодових променів. Відкриття радіоактивности дало безпосередній доказ існування атомів і позволило числити їх та бачити їхні рухи; згадаймо хочби численння атомів при допомозі явища сцинтиляції та фотографування частинок α, виконане методою Вільсона[1] (пор. рис. 1). Радіоактивність не лиш ствердила існування атомів, але також виявила, що атоми можуть розпадатися на дрібніші частиці.

Якраз останній факт повалив дві тези, що їх до недавна вважали за незрушні правди, а саме: 1) Атоми одного і того самого первня зовсім однакові і мають однаковий тягар. 2) Атоми різних первнів зовсім відмінні і ніяк не можна атому одного первня перемінити в атом другого первня. Міжтим явища радіоактивности виказали, що первні підчас радіоактивного розпаду перемінюються одні в другі. І так рад розпадається на гелій

[1]) Англ. фізик Г. А. Вільсон збудував прилад до витворення штучної мраки. Цей прилад названо коморою Вільсона. Це прозорий циліндер, в якому може нагло спадати щільний толок. У нутрі циліндра над толоком находиться повітря, насичене парою, але зовсім очищене від порошинок. Коли в цьому повітрі повстануть йони під впливом якогось проміння н. пр. променів α, то вони будуть зародками, на яких зможе скроплюватися водяна пара. Це станеться, якщо толок нагло спаде. Тоді повітря в коморі нагло розшириться і остудиться; краплі, що повстануть з мраки, осядуть на йонах і ми побачимо їх. Коли н. пр. промінь α перебіжить через комору, то він зйонізує здовж свойого шляху повітря і ми побачимо слід того шляху в виді простої лінії. Шляхи променів α в коморі Вільсона можна фотоґрафувати.

ірадон, званий давніше еманацією, радон на гелій і рад A і т. д., вкінці останнім звеном розпаду стає рад G, тотожний з оловом. Але також і посереднє звено тієї переміни, рад D — це олово. Обидва роди олова мають однакові хемічні прикмети, одначе різняться один від одного атомовим тягарем. Рад G має атомовий тягар 206, рад D 210. Незабаром відкрито більше первнів такого типу. Співробітник Радерфорда (Rutherford) Ф. Содді (Soddy) назвав їх **ізотопами**.

Дослідами ізотопів займалися спершу J. J. Thomson у Кембрідж (Cambridge) та його ученик F. W. Aston (Естон). Останній ужив до своїх дослідів масового спектрографу з каналовими променями й дійшов до отсих висновків: 1) Знані нам первні це майже завсіди мішанина кількох ізотопів, що їх атомові тягарі групуються довкола атомового тягару, знаного із звичайної хемічної аналізи; 2) атомові тягарі ізотопів це цілі числа, якщо прийняти атомовий тягар кисня 16. Н. пр. селен має ізотопи з атомовим тягарем 74, 75, 77, 78, 80, 82.

Крім ізотопів відкрито ще й **ізобари** т. є. хемічно різні первні, що мають однаковий атомовий тягар. Н. пр. селен і криптон мають ізобари з атомовим тягарем 78, 80, 82.

Коли відкрили ізотопію, атомовий тягар перестав бути характеристичною прикметою первня. На його місце впровадили нове поняття: **атомове або порядкове число** первня, що стоїть у тіснім зв'язку з внутрішньою будовою атому.

Поняття порядкових чисел вийшло спершу з понумерування первнів, списаних у періодичнім укладі (див. Табл. I) Лотара Маєра (Meyer) та Димитрія Менделеєва за зростаючим атомовим тягарем. Воно набрало фізикального значіння, коли англійський фізик H. G. J. **Moseley** (Мозлі) відкрив у 1913 р. зв'язок поміж дуговинами (спектрами) променів Рентґена і періодичним укладом первнів. Його можна виразити отими двома законами: 1) Всі первні мають дуже подібну будову лінійних Рентґенівських дуговин (пор. рис. 2 і 3). 2) Відповідно до зросту порядкового числа первнів аналогічні спектральні лінії пересуваються в напрямі коротших хвиль так, що квадратовий корінь з частоти коливань (ν) — це приблизно лінійна функція порядкового числа (N) первня, а саме $N = a\sqrt{\nu}$, де a — це сталий чинник. Праця Moseley-а мала дуже велике значіння тому, що дала змогу поправити та доповнити періодичний уклад первнів і виказала, що атоми всіх первнів мають ідентичну внутрішню будову, зв'язану з емісією променів Рентґена.

II.

Рівнобіжно з тими важними відкриттями виринули проблеми, що стрясли основами клясичної фізики. Цими проблемами були: теорія квантів і релятивности. Творцем теорії квантів є Макс Плянк. Тому, що теорія промінювання, сперта на законах клясичної фізики, попала в різьку суперечність з вислідами експериментів, Плянк зірвав у 1900 р. з клясичним поглядом, що абсорбція та емісія відбувається у суцільний спосіб; він поставив тезу, що ці процеси відбуваються несуцільно, а саме атом, що промінює, не може виділити довільної кількости енерґії, лише таку, що є чисельною многократтю означеного мінімального кванта, пропорціонального до частоти коливань. Цей мінімальний квант енерґії виражається рівнанням $E = h\nu$, де h — це універсальна стала т. зв. Плянковий квант діяння, а ν частота коливань; числова вартість:

$$h = 6{,}55.10^{-27} \text{ erg. sec.}$$

Квантову теорію примінили кілька літ пізніше, коли пояснювали деякі важні явища (питоме тепло, йонізацію), а передусім фотоелектричний ефект та явище Комптена.

Фотоелектричний ефект полягає на тім, що через насвітлення металів світлом хвилі короткої довжини, н. пр. фіялковим, спричинюємо емісію електронів. Вони вилітають з металю з означеною скорістю, що не залежить від натуги насвітлення, тільки від частоти коливань світла. Отже й при найсильнішім насвітлюванні не відбувається емісія електронів, доки частота коливань не зросла до певної кричичної вартости. Навпаки емісія відбувається негайно, якщо на металеву плиту кинути світло слабої натуги, але достаточно високої частоти. Щоб пояснити фотоелектричне явище, сперся Айнштайн на теорії квантів і подав у 1905. р. ось таку фотоелектричну теорію: джерело світла викидає енерґію, сконцентровану в певних точках, неначе стрільна, що їх називатимемо фотонами, а кожне стрільно несе з собою квант енерґії $h\nu$ та визволяє електрон із атомового зв'язку металевої поверхні.

Фотоелектричний ефект важний тому, що хвиляста природа світла зникає в ньому зовсім, зате висуваються на перше місце світляні кванти, а це означає до певної міри ренесанс Нютонової еманаційної теорії світла в поглибленому виді. Таким чином при поясненні взаємин поміж промінюванням і матерією з'являється дуалізм: одні явища, як н. пр. угинання та інтерференцію промінювання пояснює дуже добре лише клясична теорія, другі, як н. пр. процеси емісії й абсорбції тільки квантова теорія.

Явище Комптена (Artur H. Compton) торкається розсіяного промінювання. Розсіяння видимого світла можна легко обсервувати в затемненій кімнаті, куди крізь щілину вдирається в'язка соняшних промінів; їх перебіг зарисовується виразно через те, що частинки пороху, які носяться в повітрі, розсівають світляні промені на всі боки. Одначе світло розсівається також у середовищах, вільних від порошинок. Комптен досліджував розсівання променів Рентґена при переході через деякі тіла н. пр. через ґрафіт. Клясична теорія світла передвиджує, що в розсіяному світлі виступатимуть завжди ті самі довжини хвилі, що їх має випущене світло. Міжтим Комптен ствердив у 1923 р., що в розсіяних променях Рентґена появляються промені Рентґена із зміненою довжиною хвилі, а саме з частотою коливань ν' меншою від частоти коливань ν падучих променів. Вияснити це явище можна лише квантовою теорією, а саме падучі кванти $h\nu$ передають частину своєї енерґії електронам атомів і відскакують від електронів у виді нових квантів $h\nu'$, бідніших в енерґію. Довжина хвилі розсіяного світла залежить від кута, що його замикають розсіяні промені з падучими променями подібно, як енерґія кулі, що в бігу вдаряє в нерухому кулю, залежить по ударі від кута, що його творить напрям бігу її з напрямом первісного руху. Перебіг променів Рентґена та електронів, викинених з атомів, обсервували при допомозі комори Вільсона.

У 1928 р. відкрив індійський учений Раман (C. V. Raman) з Калькути в царині видимого світла явище, подібне до явища Комптена. Також у явищі Рамана частота коливань світла маліє в наслідок розсіяння. Одначе це зменшення частоти коливання не залежить від кута розсіяння, лише відмінно від явища Комптена — від розсіваючого середовища. Явище Рамана можна виснити лише квантовою теорією.

III.

Спираючись на квантову теорію та на висліди експериментальних дослідів, данський учений Нільс Бор (Niels Bohr) виступив у 1913 р. із смілою концепцією атомового моделю. Давніші концепції будови атомів J. J. Thomson-а і E. Rutherford-а не могли остоятися тоді, як теорія Бора дала змогу обчислити довжину хвилі спектральних ліній водня і гелія згідно з обсервацією. Його теорію примінив А. Зоммерфельд (Sommerfeld) до обчислення Рентґенових дуговин; при тому виявилось, що закон Мозлі-я випливає безпосередньо з теорії Бора.

Концепція атомового моделю Бора — це модифікація теорії Rutherford-а з 1912 р. Останній прийняв, що атом складається з додатнього електричного ядра. Довкруги нього кружать електрони неначе планети довкруги сонця. Атом виповняє простір, що його промір виносить 10^{-8} cm т. є одну стоміліонову частину центиметра. Це простір, що до його поверхні доходять найкрайніші шляхи електронів. Саме ядро займає простір міліон разів менший; його промір це біліонова частина центиметра (10^{-12} cm). Одначе в ньому зібрана ціла маса атому. Голяндський учений Van der Broek прийняв гіпотезу, що кількість електронів, які кружать довкола ядра, рівнається порядковому числові первня N. До цього треба ще зазначити, що, як виходить з помірів, наряд електрону має $4{,}78.10^{-10}$ електростатичних одиниць, а його маса це $\frac{1}{1840}$ маси атому водня.[1]) Ядро атому водня назвали протоном.

У 1913 р. появилися три праці Бора, що містили нову теорію будови атому. Від тієї хвилі настає нова ера в історії фізики; теорія будови атому і теорія повставання дуговин (спектрів) творять тепер нерозривну цілість. Бор приймає модель Rutherford-а, доповнений Van der Broek-ом, але додає до нього оті три постуляти:

I. Електрон може порушатися довкруги атомового ядра лише по певних постійних шляхах (орбітах), для яких добуток довжини обводу орбіти $2r\pi$, скорости електрону v і маси його m рівнається сталій Плянка h, помноженій цілим числом. Отже заходить рівнання:

$$2\pi r v m = k.h, \text{ де } k = 1, 2, 3, 4 \text{ і т. д.}$$

II. Коли електрон кружляє по якійсь постійній орбіті, тоді не випроміньовує енерґії.

III. Промінювання енерґії відбувається при переході електрону з одної постійної орбіти на другу постійну орбіту, що находиться ближче ядра. Тоді атом емітує один квант енерґії промінювання. Якщо атом мав енерґію W_1, коли його електрон кружив на дальшім шляху і перейшов на ближчий постійний шлях, що йому відповідає запас енерґії W_2, то згідно з третім постулятом Бора емітована енерґія $W_1 - W_2 = hv$, звідки $v = \frac{W_1 - W_2}{h}$; v — кількість коливань емітованого промінювання. Очевидно, якщо атом приймає енерґію ззовні, то електрон пересувається з ближчої орбіти на дальшу. Поодинокі лінії дуговини, що з них кожна має своє v, відповідають третьому постулятові.

[1]) Маса атому водня $= 1{,}65.10^{-24}$ ґрамів.

У дальшім розвитку розгалузився дослід будови атому на дві відноги: 1) на фізику атомового ядра, що займається явищами радіоактивности, ізотопії та розпаду атомів і 2) на фізику електронової поволоки, що досліджує теорію дуговин, питання, як повстають молекули, вартісність первнів та теорію періодичного укладу первнів.

Досліди над атомовим ядром пригадали наново гіпотезу Віліяма Правта (Prout) з 1815 р. Згідно з нею атоми всіх первнів це конґльомерати атомів водня. Н. пр. атом гелія складається з чотирьох атомів водня. В міру того, як росла докладність помірів атомових тягарів ця гіпотеза не могла вдержатися, бо атомові тягарі багатьох первнів сильно відбігали від цілих чисел, н. пр. атомовий тягар хльору є 35,46. Одначе явище ізотопії, відкрите в XX. столітті, дало змогу вияснити відхили атомових тягарів від цілочисельности. І так хльор має два ізотопи з атомовими тягарами 35 і 37, а легшого ізотопу у хльорі є 75%. Це дає середній атомовий тягар 35,46 згідно з помірами. Також усі інші первні, що їх атомові тягарі значно відбігають від цілочисельности, це мішанини ізотопів. Aston допровадив у своїй робітні у Кембрідж досліди над ізотопами при допомозі масового спектрографу до незвичайної прецизії і на їх основі привернув гіпотезі Правта знову почесне місце, хоч у дещо зміненому виді.

Але насунулася ще одна трудність. Атомовий тягар водня рівнається 1,008. Атомові тягарі інших первнів, що в нормальних умовинах не мають ізотопів, повинні бути многократями цього числа. Н. пр. атомовий тягар гелія повинен рівнатися 4,032, а рівнається фактично 4, отже він фактично менший. Цей дефект маси можна пояснити висновками з теорії релятивности. На основі цієї теорії між енерґією і масою існує зв'язок, що його можна виразити рівнанням: $E = mc^2$, де m маса, а c скорість світла (3.10^{10} cm/sec.). Гіпотетичний процес повставання ядра гелія (частинки α) з 4-ох протонів (ядер водня) був екзотермічний; виділення енерґії спричинило дефект маси 0,032, рівноважний цій енерґії. Для 4-ох ґрамів гелія, себто для одного моля гелія дає цей дефект маси $0{,}032.9.10^{20}$ ерґів т. є $0{,}28.10^{20}$ ерґів. Коли перечислимо це на великі кальорії, приходимо до висновку, що при повставанні з протонів ґраматому т. є. 4-ох ґрамів гелю виділюється 645 міліонів великих кальорій. Це дуже велика енерґія. Навпаки, на розщіплення частинки α необхідно було б зужити таку саму кількість енерґії. Тим пояснюється незвичайна тривалість атому гелія. Частинки α, викинені з радіоактивних субстанцій, осягають скорості більші як 10000 km/sek. та тому розбивають атоми інших тіл, що їх стрічають у своїм леті, одначе самі не розбиваються.

По вияснені згаданих труднощів прийнято, що атоми всіх первнів складаються з протонів і електронів. Якщо порядкове число первня є N, то зовнішня поволока атому містить N електронів. Ядро первня з атомовим тягарем A складається з А протонів, якщо прийняти тягар одного протону = 1. Для всіх первнів з винятком водня порядкове число менше від атомового тягару. Тому, що A протонів має A одиниць додатного електричного наряду, а N електронів зовнішньої поволоки N одиниць від'ємного електричного наряду, то для скомпензування надвишки додатного наряду приймала давніша теорія приявність електронів також у ядрі. Їх кількість є А — N, н. пр. для літу 7 — 3 = 4. (7 є атомовий тягар літу, 3 порядкове число).

Описана теорія ядра вдержалася більше, як 20 літ тому, що була дуже проста й гармонізувала з бігуновими явищами в світі, що проявляються в існуванні двох родів електричности, двох родів магнетизму, в протиставленні кислот і основ, в двополовости організмів. Лише питання, чому додатний наряд електричности в'яжеться з 1840 разів більшою масою, як від'ємний, не давало дослідникам спокою аж до останніх років.

IV.

Міжтим учинився рух у інших ділянках фізики. Зусилля визначних фізиків, щоб усунути дуалізм з оптики, що пояснювала одні явища при допомозі хвилястої, другі при допомозі квантової теорії, не принесли успіхів, навпаки дуалізм поглибився та поширився в ділянках, що досі були однотипові. Люі де Бролі (Louis de Broglie) кинув у 1924 р. смілу думку, що цей дуалізм у природі щось суттєве, та переніс його також на матерію. Так, як світляні хвилі несуть із собою кванти енерґії т. зв. фотони, так само всяким частицям (корпускулам), що порушаються в просторі, товаришать хвилі, звані хвилями матерії. Довжину матеріяльної хвилі дає взір $\lambda = \frac{h}{mv}$, де h це звісна стала Плянка, m маса частиці, v скорість її.

Погляди де Бролі-я ствердили вже в 1926 р. американські фізики Davisson і Germer та доказали через експерименти існування хвиль матерії. Вони обсервували явища угинання та інтерференції корпускулярних (електронових) променів на кристалах і одержали ефекти подібні до ефекту, що його дістав фізик Laue у 1912 р. при переході променів Рентґена крізь кристали. Інші дослідники, як F. Kirchner, Thomson, Trillat, O. Stern, Kikuchi, потвердили ці спостереження й виказали, що не лиш електрони, але також йони, атоми і молекули проявляють підчас руху хвилясті властивості.

Оцих фактів не можна було змістити в укладі понять клясичної фізики. Тому насунулася конечність перевести зміни в укладі закорінених понять.

Тієї реформи піднялися передовсім Ервін Шредінґер (Schrödinger) і Вернер Гайзенберґ (Heisenberg) у 1925 р. Шредінґер найшов славне рівнання хвиль[1]), що подає закони переміни енерґії в атомі. Це різничкове рівнаня хвиль де Бролі. Його примінення довело до великих успіхів у науці; висліди числення, переведені при його допомозі, знаменито годяться з обсервацією, одначе багато в ньому незрозумілого. Передусім неозначений у хвилях Шредінґера підмет коливань тоді, коли досі в усіх хвилястих явищах підмет, що відбуває коливання, був докладно означений, н. пр. у голосових хвилях коливалися частинки повітря, в електронових натуга поля. Хвилі, що виступають у розвязках Шредінґерових рівнань — це не хвилі в звичайнім фізикальнім значенні, т. зн. процеси, що періодично змінюються у просторі й часі. Вони не розпросторюються навіть у тривимірнім просторі реального світа, але в т. зв. конфіґураційнім просторі укладу, т. зн. у подуманім просторі, що має тільки разів по три виміри, скільки уклад має частинок, що діють взаємно на себе. Н. пр. атом урану мав би простір з 276 вимірами.

Майже рівночасно із Шредінґером створив свою квантову механіку Гайзенберґ. Він поставив вимогу, щоб теорія розглядала лише ті величини, що їх можна безпосередньо мірити, як н. пр. довжину хвилі, а не впроваджувала напів метафізичних величин, що їх годі безпосередно змірити, як н. пр. сурядні й скорості поодиноких електронів. У математичнім розвиненні теорії впровадив Гайзенберґ особливе угрупування однородних величин т. зв. матриці. Щоб виконати альґебричні дії на матрицах, необхідно було впровадити окремі дефініції.

Ундуляційна механіка Шредінґера і квантова механіка Гайзенберґа, не вважаючи на інший підхід, дали згідні фізикальні

[1]) $\Delta S + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V)S = o$, де E = енерґія, V = потенціяльна енерґія, S = функція коливання.

висліди. Характеристичною рисою обох теорій те, що вони не займаються індивідуально електронами й протонами, лише висказують статистичні висновки про імовірність їхньої появи в означених місцях або в означених станах. На погляд Гайзенберґа таке трактування проблеми в'яжеться з характером внутрішньоатомових явищ, а детерміністичне обхоплювання явищ у мікрокосмі неможливе.

У макроскоповім світі спираємося на засаді причиновости. Вона в тому, що, знаючи дотеперішній стан даних тіл, чи то початковий їх стан і закони перебігу явищ, можемо передбачити майбутні явища. Засаду причиновости вважали цілі ґенерації природників і філософів за ненарушиму догму. Йоган Бернулі (Jean Bernouilli) на початку XVIII. століття висказав погляд, що, коли відкинути засаду причиновости, ціла природа стане безладним хаосом. Також Кант вважав причиновість за одну з підставових апріорних катеґорій наукового думання, що без неї пізнання природи неможливе. Засада причиновости дала усім природничим наукам великі успіхи, а вершком її успіхів було передбачування руху небесних тіл із математичною точністю.

Одначе справа не така проста, як здавалося б. Коли фізики перейшли з макроскопних дослідів до механіки атомового світа, з'явився індетермінізм і засада причиновости заломилася, коли переступила границі мікрокосму.

Клясичний приклад того — промінювання раду. Кожний атом раду в якійсь хвилині перетворюється вибухово в атом радону, викидаючи з себе частицю α. Половина атомів, що з них складається якийнебудь препарат раду, зміниться протягом 1580-ох літ. Уявім собі два відокремлені атоми раду, що находяться в ідентичних умовинах. Заходить питання, коли для кожного з них наступить переломова хвилина перетворення. Фізики не в силі відповісти на це питання. Один атом може підлягти переміні в отій мінуті, другий за міліон літ, хоч нема між ними ніякої різниці, яку можна було б ствердити фізикальними методами. А все те діється на основі певного закону, а саме закону імовірности. В кожній хвилині існує означена й завсіди та сама імовірність, що атом раду переміниться н. пр. за годину. І хоч той атом раду не розпадається й по міліоні літ, то шанси його розпаду не зміняться. Число, що виражає імовірність розпаду, це характеристична стала раду. Коли маємо перед собою препарат раду з великою кількістю атомів, то можемо докладно

обчислити, кілько з них розпадеться протягом одної години, але не можемо знати, котрі з них розпадуться і чому.

Рівнож коли на якусь скляну плиту падає промінь світла себто більша кількість фотонів, то на основі закону імовірности можемо докладно сказати, кілько фотонів відібється від плитки, а кілько з них увійде в плитку, але доля кожного фотона зокрема й причина його поведінки в кожнім випадку невідома.

Отже маємо тут статистичні закони, знані в клясичній фізиці вже й давнійше, н. пр. другий закон термодинаміки. Одначе в клясичній фізиці можна було сперти статистичні закони на засаді причиновости тоді, коли в квантовій механіці, як це доказав Нойман (J. v. Neumann), статистичні закони не можуть спиратися на причинових законах. Отже мусимо числитися, як каже Бор, із свободою вибору природи поміж різними можливостями.

Та існує ще один бік справи в засаді причиновости. Коли обсервуємо якесь явище, нам здається, що наша обсервація не має жадного впливу на перебіг явища. Так дійсно й є підчас обсервації великих предметів н. пр. планет. Інакше діється, коли предмет обсервації належить до атомового світа. Тоді кожний експеримент, переведений при допомозі найніжніших приладів, внесе такий заколот у перебіг явища, що його не зможемо визначити. Коли хочемо визначити положення маленької частиці н. пр. електрону, мусимо освітлити його; одначе фотони світла, вдаряючи на електрони, зміняють його скорість і визначення його положення стає ілюзоричне. Подібні факти стрічаємо також у біології і психології. Строге примінення фізико-хемічних понять до живих організмів попадає на межу, що її витичила природа так, що досліджування життєвих проявів фізикальними методами, які вникалиб до їх найглибших елементів, мусіло би спровадити зовсім певну смерть організму (думка Бора). Тільки мертве тіло піддається довільному експериментуванню, натомість життя заникає, втікаючи при надмірно поглибленім досліді. Бор добачує паралелізм поміж почуттям свободи волі, питомим свідомому життю, а органічними функціями, що не допускають ані причинового органічного опису ані настирливого фізикального досліду. Він вказує також на труднощі, що їх стрічає психологічна аналіза з причини факту, що зміст свідомости підлягає модифікації з хвилиною, коли наша увага зосередиться на одній складовій подробиці тієї свідомости. Ця обставина унеможливлює докладне усталення фактів свідомости й тому не можна домагатися детерміністичного її опису.

Ще далі відбігає від клясичної інтерпретації фізикальних помірів засада невизначальности Гайзенберґа. Клясична фізика приймала можливість пізнати якийсь уклад при допомозі помірів. Н. пр. щоби визначити стан електрону, треба передусім визначити в даній хвилині його положення та скорість. Клясичний фізик вірив, що це зробиться подібно, як це зроблено, визначаючи стани планет. Одначе Гайзенберґ доказав, що визначення одної з тих величин виключає визначення другої. Н. пр. можемо визначити положення електрону, але збурення, що товаришитиме цьому помірові, зробить скорість його неозначеною величиною й навпаки: докладний помір скорости зміняє положення.

У дальшім розвитку хвилястої механіки Шредінґера заслужився в великій мірі англійський фізик Дірак (Dirac). Примінюючи до неї теорію релятивности, дійшов він до висновку, що електрони обертаються довкола осей. Зрештою гіпотезу про оборот електронів впровадили були ще в 1924 р. Uhlenbeck і Goudsmit для потреб спектроскопії. Другим важним висновком Дірака — це можливість існування додатних електронів або т. зв. позитронів.

V.

Незалежно від висновків Дірака ствердив американський фізик Андерсон (C. D. Anderson) у Пасадені (Каліфорнія) в 1932 р. існування позитронів. Він досліджував йонізацію та розбивання атомів під впливом космічних променів. Космічні промені це промені, що їх відкрив Гесс 1911 р. Вони приходять із світових просторів і визначаються далеко більшою проникливістю, як промені Рентґена. Коли їх фотони ударяють в атоми, то можна сподіватися, що викинуть із атомового з'вязку електрони з дуже великою енергією. Андерсон досліджував енерґію цих електронів при допомозі комори Вільсона, що її примістив у дуже сильнім магнетнім полі. Він найшов попри сліди електронових шляхів також сліди шляхів частинок, що їх маса була рівна масі електронів, а наряд був додатний (рис. 4 і 5). Ці висліди потвердили опісля Blackett і Occhialini в Cambridge, Ліза Майтнер (Meitner) у Берліні і Тібó (Thibaut) в Парижі.

Майже рівночасно з відкриттям позитрону відбулося відкриття ще одної цеголки атомової будівлі, а саме невтрону. Це елементарна частиця без електричного наряду, що її маса майже дорівнює масі протону. Перші кроки в напрямі відкриття невтрону зробили у 1930. р. W. Bothe і H. Becker. Вони обстрілювали променями α легкі первні і ствердими, що деякі з них, особливо бериль, а також бор, літ і флюор виділюють дуже тверде проникливе промінювання, що у випадку берилю і бору пропикає оловяні плити, грубі на кільканадцять центиметрів. Дальші досліди над цим явищем почали в 1934 р. Ірина Кюрі-Жоліó (Curie-Joliot) і її чоловік Фридрих Жоліó у радовім інституті в Парижі. Досліджуючи ці промені у йонізаційній коморі, доказали, що ті промені, вдаряючи на парафіну або на інші сполуки водня, викидають з атомів цих тіл протони незвичайної енерґії (до 5 міліонів вольтів).[1]) Завдяки цій енерґії перелітають оті протони в повітрі около 30 cm дороги.

Чедвік (J. Chadwick) повторив у 1932 р. ці спроби в робітні Кевендіша (Cavendish Laboratory) в Кембрідж (Cambridge) і на основі своїх дослідів прийшов до висновку, що причиною викидання протонів і ядер інших первнів в описаних і подібних явищах були вищезгадані невтрони, що попри промені γ вилітають з берилю під впливом обстрілу променями α. Процес повставання невтронів з берилю на погляд Чедвіка ось який:

$$ {}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} = {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}, $$

де Be це атом берилю, He атом гелю, C атом вугля, n невтрон. Числа 9, 4, 12, 1 означають атомові тягарі відносних первнів, зате 4, 2, 6, 0 це їх порядкові числа.

Теоретичну концепцію невтрону висунув був ще давніше бо в 1920. р., Rutherford, найбільший сучасний авторитет у царині атомового ядра. Невтрон, не маючи електричного наряду, може переходити свобідно через матерію тому, що він не відхилюється в сильних електричних полях атомових ядер. Це й ствердили дальші спроби.

З відкриттям невтрону розпоряджує сучасна фізика отсими елементарними частицями себто найпростішими цеголками, що з них збудована матерія:

Елементарні складники матерії:

Назва	Символ	Наряд	Маса
Електрон	e^-	-1	0,00054
Протон	${}^{1}_{1}\mathrm{H}\ (\pi)$	$+1$	1,00724
Позитрон	e^+	$+1$	0,00054
Невтрон	${}^{1}_{0}\mathrm{n}$	0	1,0080.

[1]) 1 електроновольт = $1{,}55.10^{-12}$ ергів.

Одиниця електричного наряду, наведена в табельці, має $4,796 . 10^{-10}$ то є 4,796 десятьтисячміліонових частин електростатичної одиниці електричного наряду. Атомова одиниця маси рівнається $\frac{1}{16}$ маси атому кисня або $1,66 . 10^{-24}$ g т. зн. 1,66 квадриліонових ґрама.

Відкриття невтрону дало змогу змодифікувати дотеперішній погляд на будову атомового ядра. Тепер прийняли погляд, що всі атомові ядра складаються лише з протонів (π) і невтронів (n). Отже відпала потреба впроваджувати до ядра внутрішні електрони тимбільше, що досліди спектральних ліній промовляють проти того. Зате невтронам приписують фізики ролю цементу, що споює в ядрі протони, які відпихають себе, маючи одноіменні електричні наряди. Згідно з новим поглядом ядро гелія складається з двох протонів і двох невтронів. Давніше думали, що воно зложене з чотирьох протонів і двох внутрішних електронів. Отже склад ядра гелія можна представити рівнанням:

$$^{4}_{2}\mathrm{He} = 2\pi + 2\mathrm{n},$$

а для ядра азоту маємо:

$$^{14}_{7}\mathrm{N} = 7\pi + 7\mathrm{n}.$$

В 1933 р. з'явилося ще одно замітне відкриття, а саме H. C. Urey, F. G. Brickwedde і O. M. Murphy відкрили тяжкий ізотоп водня з масою 2. У звичайнім водні є його лише 1‰, а решта водень з масою 1. Цей ізотоп назвали девтерієм (deuterium) і дали йому символ D, а його атомове ядро назвали девтон. У звязку з тим крім звичайного молекула води H_2O з молекулярною масою 18 існують ще молекули тяжкої води D_2O з молекулярною масою 20 і мішані HDO з молекулярною масою 19. Прикмети тяжкої води відмінні від звичайної, н. пр. нормальна точка кипіння 101,42° (звич. 100°), температура ціпнення 3,8° (звич. 0°), найбільша густота при 11,6° (звич. 4°). Тяжку воду одержують через електролізу заквашеної або лугової води.

VI.

Дуже важна проблеме останньої доби — це проблема переміни атомових ядер. Догма незмінности первнів захиталася вперве, коли Rutherford і Soddy поставили у 1902. р. гіпотезу самочинного розпаду атомів, щоб вияснити радіоактивні процеси. Тоді пізнали первні, що перемінюються одні в други і творять цілі ряди похідних первнів. Н. пр. уран це перше звено раду, що через рад, радон та інші добутки розпаду веде

до олова. Одначе не було змоги впливати на ці переміни з зовні т. зн. викликувати їх штучно.

Другий етап науки про переміни первнів наступив у 1919. р., коли Rutherford у Кембрідж при допомозі променів α, висиланих радіоактивними субстанціями, розбив атоми азоту, алюмінія та інших легких первнів і таким чином перемінив їх у інші атоми. Віденці Кірх, Петтерссон, Штеттер та інші розбили цією методою ядра багатьох інших первнів.

Третій етап розбивання атомів припадає на 1932. р., коли J. D. Cockcroft і E. T. S. Walton у Кембрідж розбили протонами атоми легких первнів. Вони наповнили рурку до витворювання каналових променів розрідженим воднем та діяли на нього напругою 100000 вольтів. Протони й девтони набирали під впливом цієї напруги дуже великої скорости. Коли обидва дослідники пускали їх на різні первні, н. пр. літ, бериль, бор, — видатність перетворених атомів була далеко більша, як при ужиттю радіоактивних препаратів.

Процеси переміни атомів це не лише розбивання атомових ядер, але також їхня перебудова та добудова. Н. пр. Rutherford обсервував у 1919. р. переміну азоту під впливом променів α, що підчас неї витворився ізотоп кисня з атомовою масою 17 і водень згідно з рівнанням:

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow ^{17}_{8}\mathrm{O} + ^{1}_{1}\mathrm{H}.$$

Працюючи над дослідами переміни атомів, відкрили м. ін. Жоліó (Joliot) у 1934. р. штучну радіоактивність. Вони обстрілювали алюміній, опісля також інші первні частицями α (геліонами) і ствердили повставання радіоактивного ядра фосфору. Цьому процесові відповідає рівнання:

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow ^{30}_{15}\mathrm{P}^{*} + ^{1}_{0}\mathrm{n}.$$

$^{1}_{0}\mathrm{n}$ це невтрон, $^{30}_{15}\mathrm{P}^{*}$ це радіоактивний ізотоп фосфору. Ця відміна фосфору дуже швидко перетворюється на сіліцій (крем Si), при чому виділюється позитрон e^{+} згідно з рівнанням:

$$^{30}_{15}\mathrm{P}^{*} \rightarrow ^{30}_{14}\mathrm{Si} + e^{+}.$$

Час половини розпаду радіоактивного фосфору $3\frac{1}{4}$ мінути. Радіоактивні первні означуємо звіздкою.

Отсе важне відкриття п.п-а Жоліó довело до пізнання трьох ось таких фактів:

1. Крім досі знаних природних радіоактивних речовин, до яких належать первні з найвищою атомовою масою, існують також радіоактивні ізотопи найлегших первнів.

2. Останні можна витворити штучно із звичайних первнів.

3. Крім досі знаного радіоактивного розпаду, що відбувається при рівночасній емісії частинок α (геліонів) або частинок β (електронів), існує ще один рід радіоактивного розпаду; підчас того ядро викидає позитрони. Дальші досліди ствердили радіоактивні переміни, коли ядра викидають невтрони або протони.

У 1935-ім році витворив Lawrence у Каліфорнії радіоактивний сод у більшій кількості обстрілюванням звичайного соду та його солей девтонами (тяжким воднем) великої скорости. Цьому процесові відповідає рівняння:

$$^{23}_{11}\mathrm{Na} + ^{2}_{1}\mathrm{D} \rightarrow ^{24}_{11}\mathrm{Na}^* + ^{1}_{1}\mathrm{H}.$$

Радіоактивний сод $^{24}_{11}\mathrm{Na}^*$ виділює електрон e^- і перемінюється в маґнезій:

$$^{24}_{11}\mathrm{Na}^* \rightarrow ^{24}_{12}\mathrm{Mg} + e^-.$$

Описана метода провадить до витворювання радіоактивної кухонної соли, що може придатися для лікувальних цілей.

Щоб збільшити видатність ядрових перемін, збудовано інфлюенційні машини, що дають до 5 міліонів вольтів напруги. Вона надає протонам і девтонам дуже великої скорости (рис. 6). Також ще інакше можна збільшити скорості частинок, а саме піддаючи їх кількакратно діянню електричного поля 100.000 вольтів. В тій цілі піддають їх рівночасно діянню електричного і маґнетного поля так, що вони описують спіральні дороги з більшою кількістю обігів, а підчас кожного обігу діє на них електростатичне поле напруги 100.000 вольтів. Останньої методи вживають Lawrence і Livingstone у технологічнім інституті в Пасадені у Каліфорнії.

Фермі і його співробітники в Римі вжили до переміни первнів невтронових променів, емітованих берилем під впливом протонів радону (еманації), та одержали поверх 50 радіоактивних первнів з дуже коротким часом тривання. Їх досліджували числильним приладом Geiger-а і Müller-а. Ці досліди у примінені до урану довели до витворення трансуранів, себто первнів із вищим порядковим числом, як уран, але дуже коротко живучих.

У ядрових реакціях закон про непропащу енерґію задержує своє значіння, якщо взяти під увагу зміни маси перед і по реакції. Н. пр. розторощення ядра ізотопів літу при допомозі протонів і девтонів відбувається згідно з рівняннями:

$$1)\ ^{7}_{3}\mathrm{Li} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{4}_{2}\mathrm{He};\quad 2)\ ^{6}_{3}\mathrm{Li} + ^{2}_{1}\mathrm{D} \rightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Маси цих ядер визначили дуже докладно масовим спектроґрафом Естон і Бенбрідж (Aston, Bainbridge). Різниця мас лівої і правої сторони рівнання (1) виносить в атомовій мірі 0,0181, що відповідає енерґії 17,1 міліонів електроновольтів. Рівнож енерґія викинених частинок α рівнається 17,1 міліонів електроновольтів. Для реакції, зображеної другим рівнанням, виносить кінетична енерґія визволених частинок α 22,5 міліонів вольтів згідно з енерґією, що відповідає обосторонній різниці мас.

У всіх ядрових реакціях, що в них визволюється енерґія в виді тяжких частинок, зберігає своє значіння закон про збереження енерґії, імпульсу та ядрового наряду. Одначе в випадках, що в них повстають підчас переміни додатні або від'ємні електрони, насуваються певні трудноші, ще досі невияснені. Щоб і в цім випадку зберегти засаду непропащої енерґії, запропонували Павлі (Pauli) і Fermi впровадження нової елементарної частиці атомового ядра т. зв. невтріно, що підчас радіоактивного розпаду визволюється з ядра, крім частинки β.

Професор Cockroft з Кембрідж реферував 1936. р. у Цюріху на конґресі, посвяченім ядровій фізиці, про свої дуже дбайливо переведені досліди над білянсом енерґії підчас розпаду штучних радіоактивних речовин. Коли підчас радіоактивного процесу α вилітає геліон завжди з однаковою енерґією з атому, що розпадається, — то підчас як природнього, так також штучного розпаду β електрони вилітають з атому, що розпадається, з різною скорістю. Таким чином існує суцільний спектр (дуговина) електронових скоростей, що в ньому находяться всі енерґії від зера до найбільшої енерґії електрону E_0. Замітне те, що атомова маса радіоактивної субстанції після розпаду докладно така завелика, немов би кожний атом стратив підчас розпаду β максимальну енерґію E_0. Отже якщо електрон вилітає з атому з меншою скорістю, якби це відповідало максимальній енерґії, то з того можна виснувати, що атом віддає частину енерґії також куди інде. І якраз носієм цієї частини енерґії є частиці невтріно. Йордан, Кроніґ та інші фізики видвигнули значіння їх для оптики. На їх думку кванти світла це або невтріни або складаються з двох невтрінів: додатного і від'ємного.

VII.

При кінці нашого огляду годиться ще кілька слів присвятити **космічним променям**. Про них була вже мова вище. Існування їх ствердив німецький фізик V. E. Hess ще в 1912-ім році на висоті 5,2 km, пізніше W. Kohlhörster у висоті 9,3 km. В 1932. р. міряли A. Piccard і Cosyns особисто їх натугу до висоти 18 km, а E. Реґенер при допомозі реєстраційних бальонів і самочинних приладів до висоти 30 km. Поміж роком 1920 і 1930 R. A. Millikan у північній Америці розвинув незвичайну енерґію у дослідах над космічними променями. В тій цілі відбув ряд подорожей по Північній та Південній Америці, щоб у високоположених озерах досліджувати вглитання космічних променів водою. Голяндський дослідник J. Clay мірив натугу космічних променів в часі кількох подорожей поміж Амстердамом і голяндськими посілостями на Яві, а A. H. Compton з Чікаґо зорґанізував ряд експедицій, що, послугуючися приладами однакового типу, виконали поміри в кількадесяти точках земської кулі в ріжних географічних ширинах і різних висотах.

Згадані та інші дослідники переводили свої досліди переважно при допомозі комори Вільсона, уміщеної в магнетнім полі, та числильного приладу Ґайґера. Ці досліди виказали, що космічні промені складаються із хвилястих променів високої проникливости та з корпускулярних променів. Первісні промені — це корпускулярні промені. На це вказують досліди в стратосфері та в різних географічних ширинах. Магнетне поле землі має вплив на їх перебіг тоді, коли хвилясті промені не підлягали б цьому діянню. Ті корпускулярні промені складаються з протонів, електронів і позитронів незвичайної скорости, отже також незвичайної енерґії. Найпроникливіші з-поміж них зложені мабуть з електронів, що їх скорість майже дорівнює скорості світла, а енерґія рівна 10^{11} електроновольтів.

Первісні космічні промені витворюють у земській атмосфері вторинні промені хвилястої природи, що мають коротшу довготу хвилі, як найтвердші промені Рентґена. Вторинні промені витворюють третинні корпускулярні промені таким чином, що фотони їх, маючи дуже багато енерґії, при зударенні з матерією розпадаються на електронові близнята: позитрони й електрони. Тут маємо процес **матеріялізації** фотонів, що перемінюються в матеріяльні частинки, а саме на електрон і позитрон. Фотографічні знимки, що їх зробили Blackett, Андерсон і Neddermeyer у Вільзоновій коморі, вказують виразно відхилення частинок у магнетнім полі в протилежних напрямах. Рівнож обсервовано

цілі в'язки космічних променів. Поодинокі промені в'язки виходять виразно з однієї точки, отже напевно повстають через абсорбцію одного космічного променя в матерії.

Процес матеріялізації енерґії передбачив був Айнштайн ще перед 25 літами у теорії релятивности і, спираючись на погляд, що енерґія рівноважна матерії, уложив рівнання: $E = mc^2$. Воно надається також й до того, щоб пояснити відворотний процес, а саме, як повстають космічні промені через знищення матерії в глибинах всесвіта. Ці висновки й дальші досліди позволять мабуть вже небаром збагнути процеси, що відбуваються в далеких світах.

ЛІТЕРАТУРА.

Thirring. Die Wandlung des Begriffsystems der Physik. (Fünf Wiener Vorträge, Leipzig u. Wien. 1933.).

Mark. Die Erschütterung der klassischen Physik durch das Experiment. (Fünf Wiener Vorträge. 1933.).

Thirring. Die physikalischen Entdeckungen der letzten Jahre. (Fünf Wiener Vorträge. 1936.).

Heisenberg. Prinzipielle Fragen der modernen Physik. (Wiener Vorträge. 1936.).

Lord Rutherford. Radioaktivität und Atomtheorie. (Die Naturwissenschaften 1936. S. 678.).

Erich Regener. Die kosmische Ultrastrahlung. (Die Naturwissenschaften 1937. S. 1).

Czesław Białobrzeski. Ogólno naukowe konsekwencje spółczesnej fizyki. (Fizyka i chemia w szkole. 1937. Marzec. Str. 243.).

Зміст реферату проф. Cockroft-а на конґресі „Tagung über Kernphysik an der Techn. Hochschule. Zürich. (Die Naturwissensch. 1936. S. 718.).

Т А Б Е Л Я.

Періодична система хемічних первнів.

Періода	I. громада	II. громада	III. громада	IV. громада	V. громада	VI. громада	VII. громада	VIII. громада	0. громада
I	1 H *1,008*								2 He *4,00*
II	3 Li *6,94*	4 Be *9,02*	5 B *10,82*	6 C *12,000*	7 N *14,008*	8 O *16,000*	9 F *19,00*		10 Ne *20,18*
III	11 Na *23,00*	12 Mg *24,32*	13 Al *26,97*	14 Si *28,76*	15 P *31,04*	16 S *32,06*	17 Cl *35,46*		18 Ar *39,94*
IV	19 K *39,10*	20 Ca *40,07*	21 Sc *45,10*	22 Ti *47,90*	23 V *51,0*	24 Cr *52,01*	25 Mn *54,93*	26 Fe 27 Co 28 Ni *55,84 58,94 58,69*	
	29 Cu *63,57*	30 Zn *65,38*	31 Ga *69,72*	32 Ge *72,60*	33 As *74,93*	34 Se *79,2*	35 Br *79,92*		36 Kr *82,9*
V	37 Rb *85,45*	38 Sr *87,63*	39 Y *88,93*	40 Zr *91,92*	41 Nb *93,5*	42 Mo *96,0*	43 Ma *(98)*	44 Ru 45 Rh 46 Pd *101,7 102,9 106,7*	
	47 Ag *107,88*	48 Cd *112,4*	49 In *114,8*	50 Sn *118,7*	51 Sb *121,8*	52 Te *127,5*	53 J *126,93*		54 X *130,2*
VI	55 Cs *132,8*	56 Ba *137,4*	57—71 Рідкі земельні металі	72 Hf *178,6*	73 Ta *181,4*	74 W *184,0*	75 Re *186,3*	76 Os 77 Ir 78 Pt *190,9 193,1 195,2*	
	79 Au *197,2*	80 Hg *200,6*	81 Tl *204,4*	82 Pb *207,2*	83 Bi *209,0*	84 Po *(210)*	85 —		86 Rd(Em) *222*
VII	87 —	88 Ra *226,0*	89 Ac *(227).*	90 Th *232,1*	91 Pa *(231)*	92 U *238,1*			

Рідкі земельні металі (57—71)

57 La *138,9*	58 Ce *140,1*	59 Pr *140,9*	60 Nd *144,3*	61 Il —	62 Sm *150,4*	63 Eu *152,0*	64 Gd *157,3*	65 Tb *159,2*	66 Dy *162,5*	67 Ho *163,5*	68 Er *167,6*	69 Tu *169,4*	70 Yb *173,5*	71 Cp *175,0*

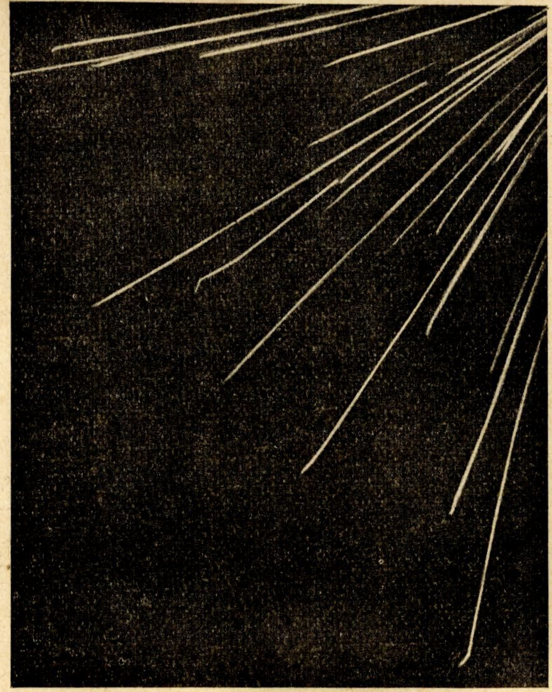


Рис. 1. Сліди шляхів променів α в коморі Вільсона.

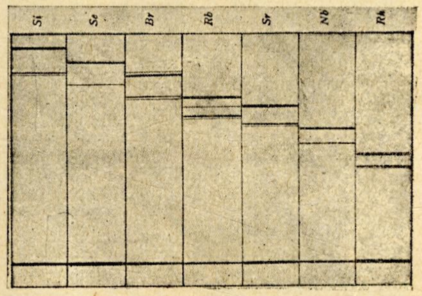


Рис. 2. Лінії ряду K Рентгенових дуговин деяких первнів.

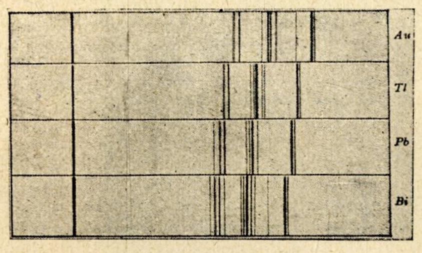


Рис. 3. Лінії ряду L Рентґенових дуговин деяких первнів.

Рис. 4. Сліди пари електронів, додатного та від'ємного, витворених фотоном променів γ в коморі Вільсона, уміщеній у магнетнім полі.

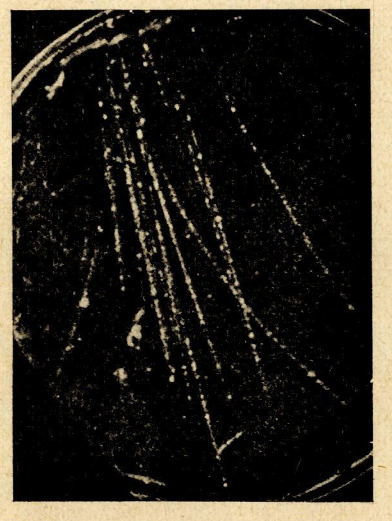


Рис. 5. Вільсонові в'язки шляхів частинок, що виступають під впливом космічних променів.

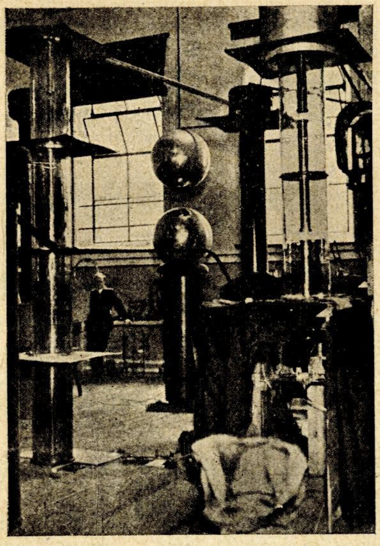


Рис. 6. Електростатична машина високої напруги Cockcroft-а і Walton-а.

В. ЛЕВИЦЬКИЙ (Львів).

Евольвента цисоїди.*)

Коли маємо рівнання цисоїди

$$\xi(\xi^2+\eta^2)=2r\eta^2. \qquad 1).$$

тоді найдемо її евольвенту, коли виелімуємо ξ та η з рівнання 1) і рівнань:

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \qquad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}. \qquad 2).$$

Напишім рівнаннє 1) у виді:

$$\eta^2=\frac{\xi^3}{2r-\xi},$$

тоді різничкове рівнаннє евольвенти дістане форму:

$$\left[y+\frac{1+y'^2}{y''}\right]^2=\frac{\left[x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]^3}{2r-\left[x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]}. \qquad 3).$$

Щоби це рівнання з'інтегрувати, покладім:

$$y=a\pm\sqrt{b^2-(x-c)^2} \qquad 4).$$

де a b c є якісь сталі.

Тоді дістанемо:

$$y'=\pm\frac{(x-c)}{\sqrt{b^2-(x-c)^2}}, \quad y''=\pm\frac{b^2}{\left[b^2-(x-c)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xi=x-(x-c)=c, \qquad \eta=a.$$

---

*) пор. розвідки автора: 1) До теорії евольвенти (Збірник математ. природн. лікарск. секції т. XXI). 2) Кривина евольвенти (ibid. т. XXIII.—XXIV). 3) La spirale logarithmique et sa développante (ibid. т. XXVII). 4) Трактриса як евольвента ланцової лінії (Записки Київськ. Інстит. Народн. Освіти 1928). 5) La astroide y su envolvente (Revista de Ciencias, Lima 1931).

Рівнаннє 1) дає в виду цього:

$$c(c^2 + a^2) = 2ra^2,$$

$$c^3 = a^2(2r - c)$$

$$a^2 = \frac{c^3}{2r - c}, \quad a = \pm \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2r - c}}. \tag{5}$$

Тоді дістанемо з 4):

$$y = \pm \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2r - c}} \pm \sqrt{b^2 - (x - c)^2}$$

або:

$$\left[y \pm \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2r - c}}\right]^2 = b^2 - (x - c)^2,$$

а з цього вкінці слідує:

$$(x - c)^2 + \left(y \pm \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2r - c}}\right)^2 = b^2. \tag{6}$$

Отже:

Евольвенти цисоїди творять подвійну громаду кіл.