

UKRAINISCHE ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.
(ČARNIECKI-GASSE № 26).

SITZUNGSBERICHTE

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-
ÄRZTLICHEN SEKTION

HEFT XV.

(JÄNNER 1931 — APRIL 1931).

VERÖFFENTLICHT

VOM DIREKTOR DER MATH.-NATURWISS.-ÄRZTLICHEN SEKTION.

THE LIBRARY OF THE

AUG 19 1935

UNIVERSITY OF ILLINOIS

LEMBERG, 1931.

VERLAG UND BUCHDRUCKEREI DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.

506
NAUK
NO. 15

THE LIBRARY OF THE

AUG 19 1935

UNIVERSITY OF ILLINOIS

Sitzungen der mathematisch-naturwissenschaftlich- ärztlichen Sektion.

CLXX. Sitzung am 12. Februar 1931.

Vorsitzender: Hr. M. Muzyka.

1. Der Vorsitzende widmet einen Nachruf dem Andenken des plötzlich verstorbenen Frls. Dr. Irene Parankevyč aus Stanislau.

Dr. I. Parankevyč hat als Schülerin des Prof. Ehrenhaft an der Universität Wien in der Bestimmung der Elementarladung, sowie auch in der Photophorese Hervorragendes geleistet (vgl. R. Cehelskýj-Sammelschrift der Sektion Bd. XXI. 1922). Später war dieselbe als Gymnasiallehrerin in Polen – zuletzt in Posen – tätig, aber schwierige Umstände ihres Lebens, sowie auch unverdiente Chikanen haben ihren vorzeitigen Tod verschuldet.

2. Das Erscheinen der Sitzungsberichte Heft XIV. wurde zur Kenntnis genommen.

3. Als Termin für den III. Kongreß der ukrainischen Ärzte, Naturhistoriker und Techniker wurde der 24. und 25. Mai endgültig festgesetzt.

CLXXI. Sitzung am 31. März 1931.

Vorsitzender: Hr. Levyčkyj.

1. Zu wirklichen Mitgliedern der Sektion wurden folgende Herren gewählt: med. Dr. T. Buračynskýj in Lemberg, med. Dr. B. Matiušenko in Prag, phil. Dr. M. Dolnyčkyj in Prag und phil. Dr. Kubijovyč in Krakau.

2. Hr. E. Žarskýj liest seine Arbeit über den Porus aboralis bei Chlorohydra viridissima Schull.

BERICHT.

Über den Porus aboralis bei Chlorohydra viridissima Schull.

(von E. Žarskýj).

Das Vorhandensein eines Aboralporus bei Chlorohydra viridissima Schull. wird als ganz sicher nachgewiesen: bei anderen Hydriden beschrieb schon Kanajew einen solchen Aboralporus bei Pelmatohydra oligactis Pall.

Die Ektodermzellen der Fußscheibe der Chlorohydra bestehen aus einer dichten Schicht großer zylindrischer Zellen; nach der Öffnung des Porus verkleinern sie sich aber einigermaßen. Nach kurzer Zeit erlangen die Zellen ihre Größe wieder zurück. Der Porus öffnet sich vorwiegend nur während der Ablösung der Hydra von der Unterlage, sonst ist er geschlossen. Bei dem Öffnen kann sogar Entoderm für eine kurze Zeit prolabieren.

CLXXII. Sitzung am 24. April 1931.

Vorsitzender Hr. Levyčkyj.

Der Vorsitzende widmet einen Nachruf dem verstorbenen Direktor des Dzieduszycki-Museums Prof. J. Łomnicki in Lemberg.

Eine Übersicht der Tätigkeit des Verstorbenen gibt Hr. G. Polanśkyj.

2. Hr. M. Zaryčkyj liest seine Note u. T. „Eine Bemerkung über den Rand der Menge“ (siehe unten).

3) Der Vorsitzende legt die Arbeit des Prof. M. Krawtchouk (Kyjiw) u. T. „Note sur les déterminants“ vor (siehe unten).

4) Hr. G. Polanśkyj berichtet über den jetztigen Stand des naturwissenschaftlichen Museums der Gesellschaft.

BERICHTE.

Eine Bemerkung über den Rand der Menge von Miron Zaryčkyj (Lemberg).

1. Ich bezeichne mit A^f die Begrenzung einer Menge A , d. h. die Menge der Punkte der Raumes C , welche keine inneren Punkte von A und keine inneren Punkte von A^c ($A^c =$ Komplementärmenge von A in C , $A^c = C - A$) sind. Mit A^b bezeichne ich den Rand von A , d. h. die Menge der Punkte von A , welche auch Punkte der Begrenzung von A sind, $A^b = AA^f$.

2. H. Hausdorff¹⁾ beweist die Formel

$$(A + B)^f < A^f + B^f \text{ für offene Mengen } A \text{ und } B.$$

Janiszewski²⁾ hat bewiesen, daß diese Formel für beliebige Mengen gilt.

Ich habe³⁾ eine allgemeinere Formel aufgestellt, in welcher anstatt der Relation der Inklusion das Gleichheitszeichen auftritt:

$$(A + B)^f + (A + B) (A^f + B^f) = A^f + B^f.$$

Was den Rand anbetrifft, so gilt auch hier die spezielle, sowie die allgemeinere Formel:

$$(A + B)^b + (A + B) (A^b + B^b) = A^b + B^b.$$

Beide allgemeinere Formeln lassen sich aber durch noch schärfere Formeln vertreten, die nur von den speziellen Formeln und von den allgemeinen Formeln des Logikkalküls abhängen.

1) Grundzüge der Mengenlehre, 1914, S. 219.

2) Sur les coupures du plan, Prace mat.-fiz. XXVI. 1915, s. 20

3) Fund. Math. IX. p. 6.

Es gelten nämlich die Gleichheiten:

$$(A + B)^f + (A + B)^{fc} (A^f + B^f) = A^f + B^f,$$

$$(A + B)^b + (A + B)^{bc} (A^b + B^b) = A^b + B^b.$$

Die linken Summanden dieser Formeln bilden offensichtlich fremde Mengen.

Note sur les déterminants

(par M. Krawtchouk).

§ 1.

Soit

$$f = \sum_{i,j=1}^h a_{ij} x_i \bar{x}_j \quad (a_{ij} = \bar{a}_{ji})$$

une forme hermitienne positive. Alors le déterminant de la matrice

$$(1) \quad A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} = \left. \begin{matrix} A_1 & A_3 \end{matrix} \right\} k \text{ lignes} \\ \left. \begin{matrix} A_3^* & A_2 \end{matrix} \right\} n-k \text{ lignes} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{k \text{ colonnes}}$$

est positif, ainsi que tous ses mineurs appartenant à la diagonale principale.

Il est connu qu'on peut présenter A sous la forme:

$$(2) \quad A = Y Y^*,$$

$$\text{où} \quad Y = \begin{matrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{matrix}, \quad Y^* = \begin{matrix} \bar{y}_{11} & \bar{y}_{21} & \dots & \bar{y}_{n1} \\ \bar{y}_{12} & \bar{y}_{22} & \dots & \bar{y}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{y}_{1n} & \bar{y}_{2n} & \dots & \bar{y}_{nn} \end{matrix}$$

En introduisant la notation

$$Y = \left. \begin{matrix} Y_1 \\ Y_2 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} k \text{ lignes} \\ n - k \text{ lignes} \end{matrix}$$

on obtient de l'égalité (2):

$$(3) \quad A = \begin{matrix} Y_1 Y_1^* & Y_1 Y_2^* \\ Y_2 Y_1^* & Y_2 Y_2^* \end{matrix}$$

D'autre part le théorème de Laplace donne:

$$(4) \quad |Y| = \sum Y(i_1, i_2, \dots, i_k) \cdot y(i_1, i_2, \dots, i_k).$$

$$\text{où} \quad Y(i_1, i_2, \dots, i_k) = \begin{vmatrix} y_{1i_1} & y_{1i_2} & \dots & y_{1i_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{ki_1} & y_{ki_2} & \dots & y_{ki_k} \end{vmatrix}$$

A l'aide de l'inégalité de Cauchy on en tire:

$$(5) \quad |Y Y^*| \leq \sum Y(i_1, i_2, \dots, i_k) Y^*(i_1, i_2, \dots, i_k) \cdot \sum y(i_1, i_2, \dots, i_k) y^*(i_1, i_2, \dots, i_k)$$

$$(5_1) \quad |Y Y^*| \leq |Y_1 Y_1| \cdot |Y_2 Y_2^*|,$$

se qui donne le résultat suivant:

$$(6) \quad |A| \leq |A_1| \cdot |A_2|$$

Il s'en suit la formule définitive:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} a_{11}, \dots, a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1}, \dots, a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1, k+1}, \dots, a_{k+1, l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l, k+1}, \dots, a_{ll} \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} a_{p+1, p+1}, \dots, a_{p+1, n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n, p+1}, \dots, a_{nn} \end{vmatrix},$$

se réduisant dans les deux cas particuliers:

$$1) \quad k = l - k = \dots = n - p = 1$$

$$2) \quad k = s, \quad l = n$$

aux inégalités classiques de J. Hadamard:

$$(7) \quad |A| \leq a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \quad *)$$

$$(7_1) \quad |A| \leq a_{11} \frac{\partial |A|}{\partial a_{11}}$$

Si l'on pose

$$A = \mathfrak{A} \mathfrak{A}^*,$$

où

$$(8) \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 \\ \mathfrak{A}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_r \end{pmatrix} \quad (m \geq n)$$

est une matrice complexe quelconque, alors on obtient de (6):

$$(9) \quad 0 \leq |\mathfrak{A} \mathfrak{A}^*| \leq |\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_1^*| \cdot |\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_2^*| \dots |\mathfrak{A}_r \mathfrak{A}_r^*|$$

En particulier

$$|\mathfrak{A} \mathfrak{A}^*| \leq \prod_{i=1}^n (\alpha_{i1} \bar{\alpha}_{i1} + \alpha_{i2} \bar{\alpha}_{i2} + \dots + \alpha_{im} \bar{\alpha}_{im})$$

*) Cf. les notes de R. Frisch et de J. Hadamard (Comptes rendus de l'Académie de Sciences de Paris, 1927, pp. 1244-1246) et l'article de l'auteur de cette note (Memoires der Veterinär-Zootechn. Instituts in Kiew, Bd IV, 1926, p. 57).

§ 2.

Démontrons l'inégalité (6) d'une autre manière.

Pour se but rappelons qu'il existe une matrice carrée P satisfaisant aux égalités:

$$P A_1 P^* = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{vmatrix}, \quad P P^* = I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k > 0$

sont les racines de l'équation caractéristique:

$$| A_1 - \lambda I | = 0.$$

Alors la matrice

$$B = \begin{vmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \cdot A \cdot \begin{vmatrix} P^* & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k & & \\ \hline & & & & B_3 & \\ & & & & & A_2 \end{vmatrix}$$

appartient aussi à une forme hermitienne positive et satisfait aux conditions:

$$(10) \quad | B | = | A |, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k = | A_1 |.$$

En appliquant aux déterminants

$$| B |, \quad \frac{\partial | B |}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial^2 | B |}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^k | B |}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2 \dots \partial \lambda_k}$$

la formule (7₁) de J. Hadamard on obtient:

$$\begin{aligned} | B | &\leq \lambda_1 \cdot \frac{\partial | B |}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial | B |}{\partial \lambda_1} &\leq \lambda_2 \cdot \frac{\partial^2 | B |}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \\ &\dots \\ \frac{\partial^{k-1} | B |}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_{k-1}} &\leq \lambda_k \frac{\partial^k | B |}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_{k-1} \partial \lambda_k}, \end{aligned}$$

ce qui donne:

$$(11) \quad | B | \leq \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k \frac{\partial^k | B |}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2 \dots \partial \lambda_k}$$

L'inégalité (11), à l'aide des formules (10), prend la forme (6):

$$| A | = | A_1 | \cdot | A_2 | \quad \text{C. q. f. d.}$$

THE LIBRARY OF THE

AUG 19 1935

UNIVERSITY OF ILLINOIS