

Бібліографія.

V, 9. Bachmann P., Über Gauß' zahlentheoretische Arbeiten. (Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß, gesammelt von F. Klein und M. Brendel, I). Nachrichten der kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1911, p. 455—508.

Гетінгенське наукове товариство, що займається виданем творів свого незабутнього члена Карла Фрідріха Гавсса, має дати в X. томі сего видання повну научну біографію того найвищого німецького математика XIX ст. Хто бодай поверховно займався творами того генія, сей буде знати, що перед усіма іншими його працями треба поставити твори з теорії чисел; вони-ж дали підвалину до нинішнього величавого розвитку сеї галузі математики. Вже сам Gauß сказав, що як математика є королевою наук, так арифметика (теорія чисел) є королевою математики. З тої саме причини як перший випуск матеріалів до біографії Gauß'a появилася праця проф. Bachmann'a про його роботи з теорії чисел; сюди належать такі твори:

Disquisitiones arithmeticae, епохальний твір Gauß'a, виданий 1801 р. в Лпску, передрукований опісля як I. том його творів (вид. заходом гетінгського наук. тов. у Teubner'a 1870 р.);

кільканацять розвідок з різних часів по 1801 р., друкованих в записках того-ж тов-а і виданих як II. том творів (1876), а також дещо з його спадщини.

Всі ті твори писані в латинській мові; німецький їх переклад зладив Н. Maser, Berlin (Springer) 1890; видав п. з. „Arithmetische Untersuchungen von C. F. Gauß“.

До наукової біографії Гауґа взята як субстрат його ціла письменницька спадщина, в якій містять ся багато начерків пізніших публікацій, а головню записник Гауґа, проваджений точно від р. 1796 до 1814. (Сей записник передрукований в записках гетінгенського тов-а з 1901 р. і в 57 т. „Mathematische Annalen“).

Disquisitiones появили ся літом 1801 р.; тим проблемом займав ся Гауґа від 1795 р. Одначе можна здогадувати ся, що він вже давнійше нераз ломив собі голову над деякими трудними питаннями теорії чисел. Найдавнішим його занятєм (від 15. року життя) було укладане числових таблиць, які служили йому опісля емпіричним матеріалом для дедукування загальних законів. Деякі з тих законів попали йому — що так скажемо — випадково під руку.

В перших роках творення Disq. Гауґа не був зовсім обізнаний з творами своїх попередників на полі теорії чисел; але вже 1796 р. знав добре праці Euler'а, Lagrange'а і Legendre'а і переконував ся, що його висліди обнимають досліді тамтих математиків, а крім того в численних точках виходять значно дальше поза них. Сліди студіювання тих творів є в цитатах, поміщених в Disq.

З записок Гауґа виходить дальше, що він по кілька разів перероблював поодинокі розділи своїх Disq., а крім того мусів остатній (VIII) розділ відлучити з готової вже майже книжки, раз що не хотів занадто збільшати її обему, а друге — мабуть не вважав її розультатів ще вповні зрілими до друку. Сей розділ зістав невикінчений; фрагменти з нього оголошені в розвідці „Analysis residuorum“, а решта лишилася невидрукована і оголошена вже по смерті як спадщина.

Чотири перші розділи Disq. є посвячені тій дисципліні, яка нині має назву „множної теорії чисел“ (multiplikative Zahlentheorie), отже обіймають теорію цілих чисел, розкладане чисел на чинники, перві числа, останки і т. д. Се не все є ориґінальний доробок Гауґа; є там багато старого, а заслуга Гауґа лежить в научнім уґрупованню матеріалу і систематичнім переведенню його. Вже на самім вступі вводить понятє пристайности і конґруенції¹⁾ і веде теорію конґруенцій, починаючи від першого степеня і переходячи до висших. Се з природи річи потягає за собою теорію степенних останків; най-

¹⁾ На думку Bachmann'а є добір знака пристайности ($\equiv$) дуже щасливий, бо пригадує на велику аналогію поміж конґруенціями а рівняннями (стр. 460); тимчасом значна більшість математиків є противного погляду, бо-ж пристайність слабше вяже числа з собою віж рівність. Все-ж таки сей знак закорінив ся так глибоко в цілій матем. літературі, що нікому навіть не приходить на думку пропонувати зміну.

інтересніші є ті розсліди, що відносять ся до первих чисел, і їм посвячений цілий III. розділ.

Четвертий розділ займаєть ся квадратними останками; тут рішені такі два питання: 1) які числа є квадратними останками даного модула m , і 2) для яких первочисельних модулів p є дане число a останком? Се провадить до означеня квадратного характеру чисел — 1, 2 і довільного першого q для даного модула p ; сюди належить також „закон відворотности“ в теорії квадратних останків, якого перший вдоволяючий доказ повів ся Гауґа'ови.

Дальші розділи (V і VI) займають ся теорією квадратних останків; початки тої теорії виводять ся від тої часті „додавничої“ теорії чисел, де говорить ся про представляване чисел як суми двох квадратів згл. в формі $x^2 + my^2$. Богато з вислідів того рода знали вже Fermat і Euler; були се одначе самі тільки поодинокі епізоди — що так скажемо — з того поля, які що йно Гауґа уняв в одноцільну теорію.

У нього виступають квадратні форми в виді

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

але що тут не так ходить о змінні x, y , як о постійні сочинники, значить він форму так: $f = (a, b, c)$; її сочинники є цілі числа, а понад те ще середній сочинник $2b$ є паристий.

Теорія Гауґа полягає на двох основних прикметах квадратних форм; одна з них містить ся в ідентичности

$$f(x, y) \cdot f(x', y') = [(ax + by)x' + (bx + cy)y']^2 - D(xy' - x'y)^2,$$

де $D = b^2 - ac$ є виріжником (у Гауґа: determinans) форми f . Звідси слідує сейчас, що коли якесь число n має бути „представлене“ тою формою, то виріжник форми D мусить бути його квадратним останком, т. зн. мусить бути рішима конґруенція $z^2 \equiv D \pmod{n}$. Се такий важний факт, що говоримо про представлене, яке „належить“ до даного корія конґруенції.

Друга прикмета лежить в трансформації форм при помочи лінійних субституцій

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y';$$

коли нова форма $\varphi = \alpha'x'^2 + 2\beta'x'y' + \gamma'y'^2$ має визначник D , то мусить бути $D' = D(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$. Щоби обі форми містили взаїмно одна другу, мусить бути $D' = D$, отже $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. Дві форми, що переходять в себе при помочи такої „одномодулової“ субституції, називають ся рівноважні (äquivalent). Через те зводять ся проблема представляваня чисел до шуканя найпростіших форм, рівноважних з даною (се т. зв. редукція форм). З редукції форм слідує т. зв. рівняне Pell'а

$$t^2 - Du^2 = 1,$$

яке конечно треба розв'язати, щоби знати всі бажані форми. Відповідно тому, чи визначник є додатний чи від'ємний (зером ані повним квадратом він не може бути, бо тоді форма розпадається на два лінійні чинники), треба до розв'язки рівняння Pell'а примінити відповідну методику. Від'ємні визначники ставлять нас перед значно легшою задачею, ніж додатні.

Дальші здобутки в теорії квадратних форм є власністю Гауґ'а. Сюди належить: розділ форм з даним визначником на класи, розділ класу на порядки, на роди (genera) і т. д. Потім іде складання форм, яке дає перший в історії математики примір Абелевих груп, обчислюване скількості класу, скількості родів, а врешті екскурс в теорію трійкових форм

$$f = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'x''x + 2b''xx',$$

з якої переведена тільки елементарна частина; вищу частину перевели що йно пізніші математики.

Те все є змістом епохального п'ятого розділу; шостий розділ подає тільки деякі приміненія тої теорії. Зате сьмий розділ порушує зовсім нову до того часу в математиці матерію, теорію поділу кола. Вийшовши з найпростішого геометричного problemu, поділити обвід кола на n рівних частин, доходять Гауґ до алгебраїчного сформулювання тої задачі: розв'язки рівняння $x^n = 1$. Він мабуть не сподівався, яке значіння буде мати його теорія для цілої пізнійшої математики та які горизонти вона отворить! Люди ждали звиж 2000 літ, щоби посунути вперед питанє про поділ кола; сталося се 1796 р., коли Гауґ подав конструкцію правильного 17-кутника, і то на чисто алгебраїчній дорозі.

Bachmann здогадується, що до тої теорії дійшов Гауґ з алгебраїчних розслідувань, займаючи ся рівнянням $x^n = 1$, яке стоїть в очевидній зв'язі з поділом кола. Як в теорії конгруенцій, так і тут грають перші числа особлившу роль, отже Гауґ обмежується до первостепенних рівнянь того роду. Він виказує, що рівнянє $(p-1)$ -ого степеня

$$X = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$$

є незведиме та що його всі корінні є $r, r^2, r^3, \dots, r^{p-1}$, де $r = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$. Коли через g означимо первісний корінь $(\text{mod. } p)$, то всі ті корінні r можна виразити таким рядом:

$$r, r^g, r^{g^2}, \dots, r^{g^{p-2}}.$$

На таким уставленю в ряд і розкладаню того ряду на „ f -членні періоди“ в числі e ($e \cdot f = p-1$) полягає розв'язка того рівняння. Коли розложимо $p-1$ на перві чинники, $p-1 = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$, то маємо до розв'язки a рівнянь a -того степеня, β рівнянь b -того степеня і т. д. В разі коли $p = 2^{2^k} - 1$, є всі помічні рівняння другого степеня, отже конструкція того p -кутника дасться перевести при помочі ліній і циркуля; сюди належить згадана вже конструкція 17-кутника.

На тім розділі кінчається „Disquisitiones“; осьмий розділ, про який є згадка навіть в передмові, відпав. Його змістом є, як згадано, теорія двочленних конгруенцій з первочисельним модулем:

$$x^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

Вона поміщена в частині в „Analysis residuorum“. Тут є передовсім доказ, що n мусить містити ся в $p-1$ та коли $\varphi(n) = a^\alpha b^\beta \dots$ то — подібно як при рівняннях поділу кола — маємо розв'язати a конгруенцій a -того степеня, β b -того степеня і т. д. І тут стрічаємо ся з розкладом на періоди.

В дальшій частині маємо загальний розсліду конгруенцій висших степенів $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$, які мають багато спільних точок з теорією рівнянь. Врешті є згадка про розклад функцій на чинники, коли модулем є зложене число.

Дальшими розвідками з того поля є: „Theorematis arithmetici demonstratio nova“ (1808), „Summatio quarundam serierum singularium“ (1811) і „Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae“ (1818). В них містяться чотири нові докази основної теореми квадратних остатків; головну трудність робило в однім з тих доказів визначення знака $\pm$ при однім квадратнім корені. На се стратив Гауґ цілих 4 роки! — Замітна тут є ще т. зв. „лемма Гауґ'а“: коли (q, p) означає скількість чисел

$$q, 2q, 3q, \dots, \frac{p-1}{p}q,$$

яких абсолютно найменші остатки $(\text{mod. } p)$ є від'ємні, то

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{(q, p)} \pmod{p}.$$

Загалом дав Гауґ 8 доказів основної теореми.

Так вичерпали ми всі праці Гауґ'а, що вяжуть ся з теорією квадратних остатків; остає ще сказати дещо про теорію двоквадратних остатків, опубліковану в двох розвідках: „Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio prima“ (1828) і „commentatio secunda“

(1832)^а. Тут є бесіда тільки про перші числа типу $4n+1$, бо тип $4n+3$ зводиться до квадратних остатків. Всі ті числа розпадаються на чотири класи після того, яка є вартість

$$z^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1, f, f^2, f^3 \pmod{p},$$

де $f^2 \equiv -1 \pmod{p}$; перша й третя класа дають квадратні остатки, а друга й четверта не-остатки.

В Comm. prima подає Гаусс ще двоквадратні характеристики чисел — 1 і 2 і розклад перших чисел $p+4n+1$ на a^2+b^2 ; в Comm. secunda знаходить через індукцію характерні кількох інших чисел і вказує на неможливість переведення тої теорії, коли обмежимося на цілих дійсних числах. Повну теорію будемо мати, коли возьмемо під увагу звичайні злучені числа $a+bi$. Гаусс подає передовсім арифметику тих чисел і висловлює дуже точно — одначе без доказу — закон відворотності для двоквадратних остатків.

Третя обіцяна розвідка не появилася. — Зате в кількох уривках (друкованих і в спадщині) знаходяться натяки на те, як будувати теорію кубових остатків; до тої цілі треба розширити дійсні цілі числа на числа форми

$$a+b\rho+c\rho^2, \text{ де } \rho = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \text{ отже } \rho^3=1.$$

Для повноти треба згадати, що Гаусс займався також студіями над числом π і дав доказ на невимірність стичних вимірних дуг.

Поза тим не друкував Гаусс нічого більше з теорії чисел, хоча в його спадщині лишилося багато матеріалів, які дають доказ, що він займався ще й іншими питаннями, а саме т. зв. „аналітичними методами теорії чисел“, які розвинув щойно Dirichlet; належать сюди головні деякі „асимптотні закони теорії чисел“.

Як бачимо з того короткого начерку, є становище Гаусса в теорії чисел перворядне; він дав їй основу, дав зміст і вказав нові дороги, якими пішов дальший розвиток тої науки. Теорія квадратних форм, теорія поділу кола й двоквадратних остатків вказали пізнішим наслідникам прямо невичерпані скарби, яких ще досі вони не використали вповні.

Праця проф. Bachmann'a, знаменитого знатока літератури з того поля, а головні творів Гаусса, є дуже цінним причинком до історії математики XIX ст., яка щойно твориться. Ми ще знадто стоїмо під впливом минулого віку, щоби могли дати об'єктивний огляд тих теорій і дисциплін, що в ній зродилися й зро-

сли. — Реферована тут праця повинна причинити ся у великій мірі до глибокого розуміння й пізнання Гаусса'ового генія. М. Ч.

A2aa, c, D6a. Mertens F., Über die Zerfällung einer ganzen Funktion einer Veränderlichen in zwei Faktoren. Sitzungsberichte, Wien, CXX. Band, Abt. II a, 1911, p. 1485—1502.

Щоби перевести розклад функції n -того степеня $f(x) = \sum c_i x^i$ на добуток двох інших функцій степенів m і $n-m$, $f(x) = \sum a_i x^i$ і $h(x) = \sum b_i x^i$, вводить автор такі неозначені величини: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Основні симетричні функції тих n величин називає $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, основні симетричні функції перших m неозначених $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, а симетричні функції прочих $n-m$ означених $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-m}$. При помочі інших m змінних $u_1, u_2, \dots, u_m$ творять лівійну функцію

$$\omega = u_1 \omega_1 + u_2 \omega_2 + \dots + u_m \omega_m,$$

яка є з огляду на $xv = \binom{n}{m}$ — вартісна, отже сповнює рівнянє

$$F(z; \sigma; u) = \Pi(z - \omega) = 0.$$

Рівнянє $F(\omega) = 0$ є ідентичне в $\omega_1, \dots, \omega_m$ і $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-m}$, тому можна в ній величини ω_i і ϑ_k заступити сочинниками функцій $g(x)$ і $h(x)$, а проте величини σ_j сочинниками функції $f(x)$, отже

$$F(a_1 u_1 + \dots + a_m u_m; c; u) = 0$$

є знова ідентичне в u . Для того всі u можна заступити довільними числами $g_1, g_2, \dots, g_m$. Коли напишемо

$$F(z; c; g) = G(z)$$

і положимо $g_1 a_1 + g_2 a_2 + \dots + g_m a_m = A$, то одержимо

$$G(A) = 0.$$

По тім приготованню ставить собі автор питанє, чи знаючи один корінь рівняня $G(z) = 0$ можна при відповіднім доборі чисел g спричинити бажаний розклад. Різничкуючи $F(\omega)$ після всіх змінних u і кладучи $\frac{\partial F(z)}{\partial u_i} = -F_i(z)$, одержуємо

$$g_0(x) = \prod_{i=1}^m (x + x_i) = x^m + \frac{F_1(\omega)}{F'(\omega)} x^{m-1} + \dots + \frac{F_m(\omega)}{F'(\omega)}.$$

Звідси доходимо до такої ідентичності:

$$F'(z)^{n-m+1} f_0(x) = Q[F'(z)x^m + F_1(z)x^{m-1} + \dots + F_m(z)] + RF,$$

де $f_0(x) = \prod_{i=1}^n (x + x_i)$, а Q і R є цілими функціями змінних

$x; z; \sigma; u$. Тут можна покласти замість σ і u : c і g , а через це перейде та ідентичність в

$$G'(z)^{n-m+1} f(x) = Q_0(x, z) [G'(z)x^m + G_1(z)x^{m-1} + \dots + G_m(z)] + R_0 G(z).$$

Коли вдасться числа g так дібрати, щоб рівняне $G(z) = 0$ не мало многократних корінїв, то кождий його корінь w дає розклад:

$$f(x) = \left(x^m + \frac{G_1(w)}{G'(w)} x^{m-1} + \dots + \frac{G_m(w)}{G'(w)} \right) \frac{Q_0(x, w)}{G'(w)^{n-m}}.$$

Такий добір чисел можливий завжди, коли виразник Δ функції f не є зером; се слїдує з одної давнїшої теореми автора (Sitzungsberichte, 1892). Проте бажаний розклад довершений.

Отсей розклад дає безпосередно другий доказ Gauss'a для основної теореми альгебри.

В дальшій уступі подає автор конечну й достаточну вимогу, щоб функція $f(x)$ мала чинник $g(x)$ приписаного степеня m ; ся вимога лежить в тім, щоб рівняне $G(z) = 0$ мало один вимірний корінь.

Примінене тх вислїдів до загальних альгебраїчних тіл веде перше до питання, коли рівняне

$$G(x, \alpha) = x^r + \psi_1(\alpha)x^{r-1} + \dots + \psi_r(\alpha) = 0,$$

де α належить до даного альгебраїчного тіла R , має в тім тілі R вимірний корінь. Коли $\psi(\alpha)$ є коренем того рівняня, то він має форму $\psi(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_{r-1} \alpha^{r-1}$, де r є степенем рівняня $\chi(z) = 0$, яке дефінює величину α ; з істнованя того коріня слїдує, що добуток

$$\Psi(x, z) = \Pi G\left(x, \frac{\chi_i(z, \alpha)}{\chi'_i(\alpha)}, \alpha\right)$$

в яким $G(x, y, z) = y^r G\left(\frac{x}{y}, z\right)$, а добуток розтягаєть ся на всі

α , — має чинник $T(x, z)$ з вимірними сочинниками типу

$$x^{r-1}(x - \psi(z)) + M X(z),$$

де $M(x)$ не переступає в x степеня $r - 1$.

Врешті доказує автор, що ціла функція $F(x, t)$, яка має для кождої цілої вартості t лінійний чинник $x - g$, мусить мати лінійний чинник $x - T$, де T є цілою функцією змінної t . М. Ч.

A. 3 c. Jeřábek A., O vyhledávání resolvent methodou neurčitých součinitelův. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, ročník XLII, str. 65—97, v Praze 1912.

Дорога до творення ресольвенти загального альгебраїчного рівняня n -того степеня складаєть ся з двох кроків:

а) При помочи неозначеного сочинника α творить ся вимірну функцію перших $n - 1$ корінїв даного рівняня

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-2})$$

так, щоб вона мала тільки $n - 2$ вартостей: $f_0, f_1, \dots, f_{n-2}$. Опісля добираючи позісталий корінь і другий неозначений сочинник β , кладемо

$$y_k = f_k + \beta x_{n-1} \\ (x = 0, 1, \dots, n - 2),$$

а через те одержимо помічні функції y_k всіх корінїв. Їх визначуємо методом неозначених сочинників так, щоб добуток $n - 1$ величин $y_0, y_1, \dots, y_{n-2}$ був симетричною функцією всіх корінїв x . Потім творимо помічне рівняне степеня $n - 1$, якого корінї є $y_0, y_1, \dots, y_{n-2}$; його сочинники R_i будуть містити в собі і x_{n-1} .

б) З того помічного рівняня одержимо шукану ресольвенту, вводячи в нїм нову незвісну, т. зв. „розв'язуючу функцію“

$$\eta = \varphi(y),$$

і вибираючи φ так, щоб всі сочинники нового рівняня були вимірними функціями всіх R , але x_{n-1} в ній вже не приходить.

Автор переводить свою теорію на рівнянях 3. і 4. степеня і вказує, що при загальнім рівняню степеня вишого над 4-ий крок а) не дасть ся перевести, бо веде до суперечности. М. Ч.

B. 16. Moritz R. E., On the Cubes of Determinants of the Second, Third and Higher Orders. Bull. of the American Math. Society, vol. XVIII (1911/12), p. 182—189.

Коли квадрат визначника є визначником того самого порядку, то в разї куба звісне доси се явище тільки в двох виїмкових випадках: 1) $\Delta_4^3 \equiv \Delta_4'$, де Δ_4 є визначником четвертого порядку, а Δ_4' є відворотним визначником супроти Δ_4 (т. є утворений з його мінорів), і 2) визначник з першим рядком $x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \dots, xy^{n-1}, y^n$, а всі прочі його рядки можна утворити символічно так: $x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy}$, $\frac{1}{1.2} (x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy})^{(2)}, \dots, \frac{1}{n!} (x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy})^{(n)}$. — Маючи визначник другого ряду,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

одержує автор як його куб

$$\Delta_2^3 \equiv - \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & (a_1 + a_2)^2 \\ a_1 b_1 & a_2 b_2 & (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \\ b_1^2 & b_2^2 & (b_1 + b_2)^2 \end{vmatrix};$$

для третього ряду

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3^3 = \frac{-1}{c_1 c_2 c_3} \begin{vmatrix} A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1 B_1 & A_2 B_2 & A_3 B_3 \\ B_1^2 & B_2^2 & B_3^2 \end{vmatrix},$$

$$A_i = \frac{\text{minor } a_i}{c_{i+1} c_{i+2}}, \quad B_i = \frac{\text{minor } b_i}{c_{i+1} c_{i+2}} \quad (\text{index mod. } 3).$$

На основі двох помітних теорем знаходить автор загально:

$$\Delta_n^3 = \frac{-1}{(c_1 d_4 \dots n_n)(c_2 d_4 \dots n_n)(c_3 d_4 \dots n_n)} \begin{vmatrix} A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1 B_1 & A_2 B_2 & A_3 B_3 \\ B_1^2 & B_2^2 & B_3^2 \end{vmatrix},$$

а A_i і B_i є мінорами дотичних елементів в Δ_n . Порядок куба визначника $\Delta_n \in 3n$. М. Ч.

J. 4. d. Fite W. B., Irreducible Homogeneous Linear Groups of Order p^m and Degree p or p^2 . Ibid., Vol. XVIII, (1911/12) p. 117—121.

До груп, що не можуть бути одноступенно-ізоморфні з незведимими групами різних степенів, належать групи порядку p^m першої, другої та третьої класи. В одній розвідці розбирає автор питання, які групи порядку p^m можуть бути одноступенно-ізоморфні з незведимими групами різних степенів, і рішає його в кількох спеціальних випадках. Висліди, до яких доходить, є: 1) Незведима група порядку p^m і степеня p не може бути ізоморфна з незведимою групою нашого степеня, бо вона містить в собі Абелеву підгрупу о показнику p , а група порядку p^m , що має Абелеву підгрупу о показнику p^d , не може бути ізоморфна з незведимою групою степеня $> p^d$. 2) Незведима група порядку p^m і степеня p^2 не може бути ізоморфна з незведимою групою якого нашого степеня; коли група степеня p^m належить до k -тої класи ($k > 2$) і є ізоморфна з незведимою групою степеня p^2 , то вона містить Абелеву підгрупу о показнику $< p^k$. Коли $k = 2$, то показник тої підгрупи є p^2 . М. Ч.

J. 4. d. Miller G. A., Note on the Maximal Cyclic Subgroups of a Group of Order p^m . Ibid., Vol. XVIII (1911/12), p. 189—191.

Коли H є не-визначною підгрупою групи G порядку p^m , то H трансформується в саму себе через всі спряжені з нею підгрупи в G ,

отже через всі оператори поза H . Коли H є циклічною групою і не містить ся в ніякій вишшій циклічній підгрупі групи G , то називається вона найбільшою циклічною підгрупою в G . До неї відносять ся така теорема: Конечною й достатчною умовою, щоби кожда найбільша циклічна підгрупа порядку p^a в групі G порядку p^m ($m > 3$) була трансформована в саму себе тільки p^{a+1} операторами групи G , є те, щоби G містило в собі одну і тільки одну циклічну підгрупу порядку p^{m-1} . М. Ч.

J. 4 d. Miller G. A., A few Theorems Relating to Sylow Subgroups. Ibid., Vol. XIX (1912/13), p. 63—66.

Доказані такі теореми: 1) Коли група G , що має підгрупи Sylow'a порядку p^m , містить визначну підгрупу H , яка зі своєї черги має підгрупи Sylow'a порядку p^b , то число підгруп порядку p^b в H є дільником числа підгруп порядку p^m в G . Коли перше число є більше ніж друге, то G трансформує свої підгрупи порядку p^m після одної неперехідної групи. 2) Число підгруп Sylow'a порядку 2^m в симетричній групі степеня $n > 5$ є таке саме, як число тих підгруп порядку 2^{n-1} в альтернуючій групі того самого степеня. М. Ч.

J. 4 d. Miller G. A., The Product of Two or More Groups. Ibid., Vol. XIX (1912/13), p. 303—310.

Щоби добуток двох груп H_1 і H_2 був зі своєї черги групою, є конечною і достатчною вимогою те, щоби було $H_1 \cdot H_2 = H_2 \cdot H_1$, отже щоби сей добуток містив в собі відворотність кожного оператора. Коли $H_0 = \{H_1, H_2\}^1$, а h_1, h_2, h_0 є порядками дотичних груп, то $H_1 \cdot H_2$ містить в собі $\frac{h_1 h_2}{h_0}$ різних операторів. Теорія добутоків двох груп є елементарна, зате як в добуток виходить кілька чинників, то теорія є доволі скomплікована.

Автор доводить перше, що коли добуток $H_1 \cdot H_2 \dots H_r$ містить в собі циклічну групу тих чинників, то мусить містити рівно-ж і „двостінну групу“ (Diedergruppe) тих всіх чинників. Дальше займається субституціями, що трансформують добуток груп в себе самого і доводить, що ті субституції творять групу, а доказ переводить на трьох групах порядків 3, 4, 5. Врешті займається групами, які є добутками підгруп Sylow'a і показує, що коли G є групою

¹⁾ Се означення ввів Netto (Gruppentheorie, Samml. Schubert LV, p. 35) для перекрою обох груп, т. є групи операторів, спільних обох груп H_1 і H_2 .

порядку $p^\alpha q^\beta r^\gamma$, де p, q, r є первими числами, а G_1, G_2, G_3 є підгрупами Sylow'a порядків $p^\alpha, q^\beta, r^\gamma$, то число ріжних операторів в $G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$ має форму $p^\alpha q^\beta r^\gamma - k p^\alpha r^\gamma$; щоби було $G = G_1 G_2 G_3$, мусить бути $k = 0$. Кожда рішима група є добутком не-спряжених (non-conjugate) підгруп Sylow'a, а порядок тих чинників в тім добутку є довільний. — Ті результати дають приступ до розвязки таких двох нерішених доси питань: 1) чи існує проста (незложена) група зложеного порядку, яка є добутком всіх можливих рядів не-злужених підгруп Sylow'a? 2) Чи існує група, яка не є таким добутком? М. Ч.

J. 4 d. Miss Cummings L. D., Note on the Groups for Triple-Systems. Ibid., Vol. XIX, (1912/13). p. 355—356.

Авторка конструує трійкову систему (Trippelsystem) з 15 елементів і доказує, що дві несприятливі трійкові системи можуть мати ту саму групу. М. Ч.

A. 4 d. Miller G. A., A Third Generalization of the Groups of the Regular Polyhedrons. Annals of Math., II ser. Vol. 13 (1912), p. 103—113.

Під назвою груп Hamilton'a розуміємо групи, здефініювані рівняннями

$$s_1^2 = s_2^3 = (s_1 s_2)^r = 1 \quad (r = 3, 4, 5);$$

се групи оборотів правильних многостінників. Їх узагальнив Dye так, що три реляції Hamilton'a заступив одною. Другим узагальненням є одна давніша розвідка автора, в якій $(s_1 s_2)^r$ заступлене реляцією $(s_1 s_2)^r = (s_2 s_1)^r$. Третє узагальнення, яке є предметом нинішньої розвідки, є

$$s_1^2 = s_2^3 = (s_1 s_2)^r \quad (r = 3, 4, 5);$$

тут ходять о доказ, що для кожного r існує minimum дві, а maximum чотири групи. Крім того розбирає автор ще кілька інших, подібних реляцій.

Вислід є такий: для $r = 3$ маємо узагальнене групи чотиростінника $s_1^2 = s_2^3 = (s_1 s_2)^3$, яке дає чотири групи: 1) групу чотиростінника, 2) не-дванадцяткову групу порядку 24, 3) і 4) групу, одержану через потрібний ізоморфізм одної з тих груп і циклічної групи порядку 9. Коли s_1 і s_2 є перемінні, то творять циклічну групу порядку 9 або групу порядку 3.

Реляція $s_1^3 = s_2^3 = (s_1 s_2)^2$ дефініює: коли оператори неперемінні, або чотиростінну групу або не-дванадцяткову групу порядку 24. Коли $s_1 s_2 = s_2 s_1$, то група є порядку 3.

Неперемінні оператори, що сповнюють рівняне $s_1^3 = s_2^4 = (s_1 s_2)^2$, творять або групу осьмистінника, або групу порядку 48, яку автор вже давнійше назвав G_{52} . Перемінні оператори того рода творять групу порядку 2.

З $s_1^4 = s_2^2 = (s_1 s_2)^3$ слідує: в разі неперемінності операторів з чотирох груп: осьмистінна, або G_{52} , або прямий добуток одної з них і група порядку 5. Перемінні оператори дають групи порядків 2 або 5, або циклічну групу порядку 10.

В разі $s_1^2 = s_2^3 = (s_1 s_2)^4$ маємо: з неперемінних операторів 1) групу осьмистінника, 2) групу G_{52} , 3) і 4) прямий добуток одної з них з групою порядку 7; з перемінних: групи порядків 2 і 7 або циклічну порядку 14.

В разі $s_1^3 = s_2^5 = (s_1 s_2)^2$ маємо або групу або 20-стінника, або групу порядку 120, звісну як G_{120} .

Коли дефініюючим рівнянем є $s_1^2 = s_2^5 = (s_1 s_2)^3$, то маємо: 1) групу 20-стінника, 2) G_{120} , 3) і 4) прямий добуток одної з них і групи порядку 11. Коли $s_1 s_2 = s_2 s_1$, маємо групу порядку 11.

Врешті $s_1^2 = s_2^3 = (s_1 s_2)^5$ дає ті дві групи, що висше або їх добутки з групою порядку 19. Перемінні оператори творять групу порядку 19. М. Ч.

J. 4 d. B. 2 c. B. Miller G. A., Groups which Contain an Abelian Subgroup of Prime Index. Ibid. Vol. 14 (1913), p. 95—100.

Поданий доказ, що показчик підгрупи, утвореної із спільних операторів двох спряжених підгруп, супроти одної з тих підгруп, є завжди менший, ніж показчик одної з тих підгруп супроти даної групи. Звідси слідує, що спільні оператори двох визначних підгруп того самого показчика p творять визначну підгрупу показчика p супроти кожної з тих визначних підгруп. Автор уживає тих теорем, щоби випроводити умови, серед яких неподільна не-абелева група містить в собі не-визначну, а серед яких визначну абелеву підгрупу о первочисельнім показчику. М. Ч.

J. 4 a, d. V 2. Bortolotti E., Un teorema di Paolo Ruffini sulla „Teoria delle sostituzioni“. Atti della R. Accademia dei Lincei, Serie V. Vol. XXII. 1 sem. 1913, p. 679—683.

В згаданім творі доказує Ruffini таку теорему: „Коли група підставлень поміж 5 елементами 1, 2, 3, 4, 5 обіймає разом з яким небудь підставленням t всі трансформовані з нього при помочи циклю $S_5 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, то вона містить в собі рівно-ж і сей цикл“. На

одним з примірників тої книжки дописав Ruffini власноручно таку замітку: „Отею теорему можна розширити на перше число елементів; коли число елементів є зложене, теорема не має приміненя“, відсилаючи за доказом до своїх манускриптів, там його одначе не найдено.

Тому автор подає доказ тої теореми, і опирає його на двох леммах: I. субституція

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix},$$

що переставлює не більше як p елементів, тільки тоді може бути перемінна з циклом

$$S_p = (1, 2, \dots, p),$$

коли є степенню того циклу, і II. „ріжні субституції, трансформовані при помочи S_p з якоїнебудь субституції T поміж елементами $1, 2, \dots, p$, неперемінної з S_p , творають перехідну групу G “. Порядок тої групи є p або мноюкратно числа p . Звідси легко слідує теорема Ruffini'я і представлення субституції T_p о p елементах в формі

$$T_p = S_p^{\alpha_p} S_{p-1}^{\alpha_{p-1}} S_{p-2}^{\alpha_{p-2}} \dots S_3^{\alpha_3} S_2^{\alpha_2},$$

де $S = (1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n)$, $n = 1, 2, \dots, p$ (се аналогія до розкладу цілого числа на перші чинники), а врешті і друге представлення в формі:

$$T_p = S_p^{\alpha} T_{p-1},$$

де T_{p-1} є субституцією поміж $p-1$ першими елементами, а α якимнебудь числом поміж 1 і p .

М. Ч.

I. a. b a, 19 b. Meissner W., Über die Teilbarkeit von $2^p - 2$ durch das Quadrat der Primzahl $p = 1093$. Sitzungsberichte, Berlin, 1913, p. 663—667.

Коли три числа x, y, z сповнюють реляцію Fermat'a $x^p + y^p + z^p = 0$, то мусить бути, як вказав Wieferich,

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2};$$

се стоїть в звязи з теоремою Furtwängler'a, що для таких трех чисел x, y, z без спільного чинника мусить бути

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$$

для кожного чинника r числа x , коли $x \not\equiv 0 \pmod{p}$ і для кожного чинника r числа $x^2 - y^2$, коли ся різниця $\not\equiv 0 \pmod{p}$.

Для $r > 2$ знайшов Jacobi такі числа, які сповнюють конгруенцію Furtwängler'a, зате конгруенція Wieferich'a не була доси провірена на з'якім конкретнім примірі. Робить се автор,

вказуючи, що в перших двох тисячках є число $p = 1093$ одиное того рода, що сповнює ту конгруенцію. Врешті обчисляє вартости величин $\lambda \equiv \frac{2^t - 1}{p}$ і $\tau \equiv \frac{p-1}{t}$, де t є виложником, до якого належить $2 \pmod{p}$, для всіх $p < 200$.

М. Ч.

I. 19 b. Bernstein F., Über den letzten Fermat'schen Satz. Nachr. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl., 1910, p. 382—488. — Über den zweiten Fall des letzten Fermat'schen Satzes. Ibid., p. 507—516.

Перша розвідка подає доказ, що: 1) коли другий чинник $h_2 = l^\mu h_2'$ числа класу $h = h_1 h_2$ тіла $k(\xi)$ l -тих корінїв з одиниці є що найменше раз ділимий через l ($\mu > 0$, h_2' перше супроти l), і 2) в частиннім тілі класу степеня l^μ , що належить до чинника l^μ величини h_2 , всі ідеали тіла $k(\xi)$, яких l -ті степені є головними ідеалами, є вже самі головними ідеалами, — рівняне Fermat'a $a^l + b^l + c^l = 0$ неможливе до сповнення в числах ріжних від 0 і перших супроти l . — Ся теорема, як також і друга, поміщена в другій розвідці, обіймають як спеціальні випадки результати, одержані Kummer'ом, так що ті дві праці становлять упрощене і узагальнене остатньої розвідки Kummer'a.

В другій розвідці, згаданій в заголовку, міститься доказ, що рівняне Fermat'a для l першого супроти тільки двох чисел a і b є неможливе, коли число класу тіла $k(Z)$ l^2 -тих корінїв з одиниці є ділиме тільки через першу степеня числа l , — і що воно неможливе також тоді, коли те тіло $k(Z)$ не містить в собі класу, що належить до виложника l^2 , а число класу h_2 тіла $k(J + J^{-1})$ є супроти l перше.

М. Ч.

I. 19 b. Carmichael R. D., Note on Fermat's Last Theorem. Bulletin of the American Math. Society, Vol. XIX (1912/13), p. 233—236. — Second Note on Fermat's Last Theorem. Ibid., 402—403.

В першій ноті доказує автор, що коли p є перше, а рівняне

$$x^p + y^p + z^p = 0$$

має цілочисельну розвязку (x, y, z) , а всі ті числа перші супроти p і поміж собою, тоді існує таке ціле число $s < \frac{1}{2}(p-1)$, що

$$(s+1)^{p^2} \equiv s^{p^2} + 1 \pmod{p^3}.$$

В другій ноті заступає отсю вимогу простійшою, а саме:

$$(s+1)^p \equiv s^p + 1 \pmod{p^3}.$$

Оба докази є елементарні.

М. Ч.

I. 19. b. Plemelj J., Die Unlösbarkeit von $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ im Körper $k(\sqrt{5})$. Monatshefte f. Math. u. Phys. XIII. (1912), p. 305—308.

Автор подає елементарний доказ теореми Фермата для $n = 5$. В тілі $k(\sqrt{5})$ дасться се рівнянє представити в виді

$$x^5 - y^5 = (\sqrt{5})^{5+\mu} \cdot z^5, \quad (1)$$

де $(x, y, z) = 1$, а всі ті числа неділимі через $\sqrt{5}$. Розкладаючи ліву сторону на два чинники, з тих одні лінійний, знаходимо, що $x \equiv y \pmod{5}$, отже можна дійти до того, що коли $x \equiv 1$, то буде і $y \equiv 1 \pmod{5}$. Нелінійний чинник многочлена $x^5 - y^5$, скорочений через 5, розпадається знова на два чинники

$$xy + \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2\sqrt{5}}(x - y)^2; \quad (2)$$

вони оба мусять бути добутками якихось п'ятих степенів і якихось одиниць, однак ті остатні можна пропустити. Тому одержимо:

$$x - y = (\sqrt{5})^{3+\mu} \cdot \zeta^5$$

а звідси:

$$\zeta^5 - \eta^5 = (\sqrt{5})^{5+2\mu} \cdot \zeta^{10}, \quad (3)$$

до ξ і η в обома чинниками (2), а $\xi \eta \zeta = z$. Отже рівнянє (3) має ту саму форму, що (1), але о стільки простіше, що тут ζ має менше перших чинників, як z , бо ξ і η не в рівночасно одиницями. Повторене того самого процесу на рівнянню (3) веде до суперечности, отже неможливість розв'язки $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ з $k(\sqrt{5})$ доказана. М. Ч.

I. 18 c., Hilbert D., Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n -ter Potenzen. (Waring'sches Problem). Dem Andenken Hermann Minkowskis gewidmet. Nachrichten der kgl. Ges. J. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse, 1909, p. 17—26.

Англійському математикови Waring'ови приписують загально висказ такої теореми: „Кожде додатне ціле число дасться представити як сума n -тих степенів додатних цілих чисел так, що їх скількість лежить нижче границі, залежної тільки від виложника n , а незалежної від представляваного числа“. — Доси вдався був сей доказ тільки в кількох спеціальних випадках, а саме для $n = 2 \dots 10$ з виїмком 9. Автор подає загальний доказ при помочи „нового примінення аналізу до теорії чисел“, яке полягає в тім, що — відворотно, як се звичайно діється — автор виходить з одної інтегральної формулки і одержує з неї чисто арифметичну реляцію.

Згаданий взорець висказує таку теорему, дану Hurwitz'ом:

„При довільнім цілім числі m в ідентично в 5 змінних $x_1, \dots, x_5$:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2)^m = C \int_{(T)} \dots \int (t_{11} x_1 + \dots + t_{15} x_5)^{2m} dt_{11} dt_{21} \dots dt_{22} dt_{23} \dots dt_{45} dt_{55}$$

де C означає довільну постійну додатну величину, дану числом m , а 25-кратний інтеграл простягається на царину T , положену зовсім в скінченности, а визначену так, що віддаленє кожної точки t_{kh} від точки o_{kh} 10-вимірного простору Ω , даного 15 реляціями прямокутності (ортогональності)

$$o_{k1}^2 + \dots + o_{h5}^2 = 1$$

$$o_{k1} o_{h1} + \dots + o_{k5} o_{h5} = 0 \quad (k \neq h)$$

$$(k, h = 1, 2, \dots, 5)$$

є

$$\sum_{k, h} (t_{kh} - o_{kh})^2 \leq 1.$$

З тої теореми переходить автор до другої ідентичности:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2)^m = \sum_{h=1, \dots, M} r_h (a_{1h} x_1 + \dots + a_{5h} x_5)^{2m},$$

де

$$M = \binom{2m+4}{4},$$

$r_1, \dots, r_M$ означають додатні вимірні числа, залежні від m , а $a_{1h}, \dots, a_{5h}$ цілі числа, рівно-ж залежні тільки від m . Доказ тої ідентичности переводить ся через заступленє інтеграла скінченною сумою.

Звідси слідує доказ головної теореми за посередництвом таких заключень:

1) До кожного m належить якась скількість N додатних чисел $r_1, r_2, \dots, r_N$ і два цілі числа a, A , що мають таку прикмету: коли x і G є довільними цілими числами, а Γ довільним додатнім числом, X цілим додатнім числом, що сповніє нерівність $X < \Gamma^2 x^2$; тоді можна до тих чисел x, G, Γ, X дібрати таких N чисел $(\geq 0) X_1, X_2, \dots, X_N$, які сповнюють нерівности $|X_h| < A \Gamma x$ ($h = 1, \dots, N$), що

$$(G^2 x^2 + X)^m = \sum_{h=1, \dots, N} r_h (a G x + X_h)^{2m}.$$

2) Серед тих самих преміс існує N таких цілих чисел $X_1, \dots, X_N$, як попередно, що

$$x(G^2 x^2 + H)^m = \frac{1}{G} \sum_{h=1, \dots, N} r_h (a G x + X_h)^{2m+1}.$$

3) До кожного виложника m належить якась скількість N додатніх чисел $r_1, r_2, \dots, r_N$, даліше дійсна функція $\varphi(k)$ дійсної змінної k , зовсім додатна, врешті функція $F(K, k)$ (де K є цілим числом), яка при постійнім k разом з K зростає в безконечність; ті належні до m величини r_h, φ, F мають такі прикмети: коли x є довільним додатнім цілим числом, а $K > 16$, даліше дійсна змінна k сповнює нерівність $1 \leq k < \frac{1}{2}\sqrt{K} - 1$; коли $k' = \varphi(k)$, $K' = F(K, k)$ і коли Y є довільним цілим числом (≥ 0), для якого $|Y| < k\sqrt{K}x^2$, то до величин x, K, k, Y можна завжди дібрати N цілих чисел $Y_1, \dots, Y_N$ (≥ 0), для яких $|Y_h| < k'\sqrt{K'}x$, що

$$(Kx^2 + Y)^m = \sum_{h=1, \dots, N} r_h (K'x + Y_h)^{2m}.$$

4) Серед тих самих преміє існує реляція

$$x(Kx^2 + Y)^m = \frac{1}{K'} \sum_{h=1, \dots, N} r_h (K'x + Y_h)^{2m}.$$

5) До кожного виложника n належать два цілі числа p, q такі, що $0 \leq p < q$ і $n = p + q$, даліше додатне число K і якась скількість N додатніх вимірних чисел $k_1, k_2, \dots, k_N$ того рода, що коли x є довільним цілим числом > 0 , Y яким небудь цілим числом (≥ 0), для якого $|Y| < \sqrt{K}x^4$, то існує завжди N^* таких додатніх цілих чисел $P_1, P_2, \dots, P_{N^*}$, що

$$x^p (Kx^q + Y) = \sum_{h=1, \dots, N} k_h P_h^n.$$

З остатнього заключення виводить ся легко теорема Waring'a.
М. Ч.

В 2 а, 13 а, b. Sanderson M., Generalizations in the Theory of Numbers and Theory of Linear Groups. Annals of Mathematics. II. ser. Vol. 13. (1912) p. 36—39.

Автор розважає конгруенції з подвійним модулем і дефінює відворотну функцію $f_1(y)$ до функції $f(y)$ як таку, що

$$f(y) \cdot f_1(y) \equiv 1 \pmod{m, P(y)}.$$

На тій основі доказує, що до кожної функції (степеня иншого, як степеню модулової функції $P(y)$), якої всі сочинники мають НСП первий супроти m , існує відворотна функція $[modd. m, P(y)]$, опісля означає скількість класе останків, що мають відворотности, формул-

вою: $\varphi_r(m) = m^r \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{1+r}}\right)$, де $m = \prod p$, і узагальнює теорему: Фермата: $[f(y)] \varphi_r(m) \equiv 1 \pmod{m, P(y)}$ і Wilson'a: добуток всіх функцій, що мають відворотности, $\epsilon \equiv \mp 1 \pmod{m, P(y)}$; перший знак тоді, коли $m = p^r$ або $2p^r$ або $m = 4, r = 1$, другий знак в кождім иншій разі. Врешті узагальнює лінійні субституції, даючи їм подвійний модуль; в таким разі мусить їх визначник мати відворотність $[modd. m, P(y)]$.
М. Ч.

115 с а. Frobenius G., Über die Markoffschen Zahlen. Sitzungsberichte, Berlin, 1913, p. 458—487.

Числами Маркова називає автор кожду трійку чисел, що сповнює т. зв. рівняне Маркова
 $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$.

Отсе рівняне найшов Марков з звязи з розслідами з теорії двійкових неозначених квадратних форм; сим рівнянем займав ся доси один Hurwitz.

В отей розвідці подав аитор повну теорію тих чисел, опираючи ся на своїй редукції неозначених квадратних форм і розвивавю на тяглі дробі.

Передовсім доказує автор, що в загальнішій рівняню $a^2 + b^2 + c^2 = kabc$ може k мати вартість 1 або 3; підставляючи в першій разі за a, b, c нові змінні, подільні через 3, приходимо до $k = 3$, отже рівняне Маркова є одиноко можливе того рода. Кожда трійка чисел Маркова не має спільної міри; кожде з тих чисел p є форми $4n + 1$ або $2 \cdot (4n + 1)$, а даліше: кождий непаристий первий чинник одного з тих чисел p та чисел $3p \pm 2$ є рівно-ж форми $4n + 1$.

Найменшими розв'язками того рівняня є: (1, 1, 1) і (2, 1, 1); їх називає автор одиничними (singulär). Всі инші розв'язки містять в собі трійки різних чисел. Коли дві розв'язки різнять ся тільки одним числом, то вони є сусідні; кожда трійка має три різні сусідаї, тільки перша одинична трійка має одну, друга дві. З кожної трійки можна одержати цілий ряд нових, коли одно число задержимо постійним, а два другі будемо змінити і добирати до трійок сусідні. Дієть ся се так, що розв'язуємо рівняне $f(x) = x^2 + b^2 + c^2 - 3bcx = 0$, яке має два корінї a і a' , звязані реляціями: $a + a' = 3bc$, $aa' = b^2 + c^2$. Через те одержуємо дві сусідні трійки: (a, b, c) і (a', b, c) ; коли в кождій з них одно число зробимо постійним, одержимо ряд нових розв'язок, який автор називає ланцухом, належним до того постійного числа. Таким чи-

ном можна одержати, кладучи за те постійне число чергою 1, 2, 3, ..., всі трійки чисел Маркова.

Щоби p було числом Маркова, є конечно і достаточне, щоби його можна представити формою φ , рівноважною з $-\varphi$, о виріжнику $9p^2 - 4$. Такою формою є м. в. $\varphi = px^2 + (3p - 2q)xy + (r - 3q)y^2$; найменшим числом, яке вона представляє, є p .

Врешті розвиває автор числа Маркова на ланцюгові дробі і вводить знак $p_{\alpha\beta}$ для числа, яке відповідає дробови $\varphi = \frac{\alpha}{\beta}$, іменно є $p_{10} = 1$, $p_{01} = 2$, $p_{11} = 5$, і далі

$$p_{\alpha\alpha'} = 3p_{\beta\beta'}p_{\gamma\gamma'} - p_{\delta\delta'},$$

де $\alpha = \beta + \gamma$, $\alpha' = \beta' + \gamma'$, $\delta = |\beta - \gamma|$, $\delta' = |\beta' - \gamma'|$. Поміж такими числами панує зв'язь

$$p_{\alpha\alpha'}^2 + p_{\beta\beta'}^2 + p_{\gamma\gamma'}^2 = 3p_{\alpha\alpha'}p_{\beta\beta'}p_{\gamma\gamma'}$$

отже рівняння Маркова. Число Маркова $p_{\alpha\lambda}$ є тоді і тільки тоді паристе, коли λ є подільне через 3.

На закінчене подає примінене введених теорем до теореми Маркова про квадратні форми. М. Ч.

I. 15 a. Bieberbach L., Über die Minkowskische Reduktion der positiven quadratischen Formen und die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen. Nachrichten der kgl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. 1912, p. 207—216.

Теорія редукції квадратних форм, дана Мінковським, представляє в порівнянні з давнішими теоріями дуже багато корисний. Та можна її оперти на зовсім іншій основі, що тісніше в'яжесться з суттю річ поодиноких тверджень. Отся розвідка подає примінене теорії Мінковського в тій новій інтерпретації до доказу такої теореми: побіч одномодулових цілочисельних трансформацій існує тільки скінчене число груп цілочисельних однородних лінійних субституцій. Звідси дедукують Jordan і Мінковські існування тільки скінченного числа одномодулових цілочисельних субституцій, що переводять редуквані форми в інші редуквані форми. З огляду на її важність подає автор безпосередній, елементарний доказ тої другої теореми. М. Ч.

I. 22 a. d. Jacobsthal E., Zur Theorie der Funktionale. Crelle's Journal f. reine u. angew. Mathematik, Bd. 140, 1911, p. 266—276.

Отся розвідка подає нове уґрунтоване теорії алягебраїчних чисел на основі т. зв. „функціоналів“ Weber'a; вона замітна тим,

що на неї покликається Weber в найновішій, скороченій виданні своєї алягебри (Braunschweig 1912, Vieweg u. Sohn. Ціна 14 м.).

Функціоналом називаємо, як звісно, квот $\omega = \frac{\varphi}{\psi}$ двох цілих вимірних функцій яких небудь змінних з сочинниками з якого небудь алягебраїчного тіла n -того степеня. Загал всіх функціоналів творить функціональне тіло, в яким містяться те алягебраїчне тіло як дільник. Функціонал з вимірними сочинниками називається вимірним. — Заступаючи в данім функціоналі сочинники їх спряженими вартостями, одержимо n спряжених функціоналів; їх добуток є їх нормою.

Коли функціонал є вимірний, то можна його представити в формі $R = r \cdot \frac{P_1}{P_2}$, де r є вимірним, додатнім числом, а P_1 і P_2 первісними функціями (т. є з цілими сочинниками і без спільних чинників); r називається абсолютною вартістю функціонала: $r = |R|$.

Абсолютна вартість норми довільного функціонала називається абсолютною нормою.

Вимірний функціонал називаємо цілим, коли його абсолютна вартість є цілим числом. — Довільний функціонал називається цілим, коли є коренем рівняння, якого найвищий сочинник є 1, а прочі сочинники цілими вимірними функціоналами.

Коли ε і $\frac{1}{\varepsilon}$ є рівночасно цілими функціоналами, то ε називається одиницею, отже кожна первісна функція є в тім значінню одиницею.

Головна ціль тої розвідки є, виснувати з кількох теорем головне твердження цілої теорії про однозначність розкладу цілих функціоналів на перві функціонали, вже відворотно, як се робить Weber (Algebra, II, I. вид. p. 590 sqq). Автор доходить до своєї цілі такими головними теоремами:

I. Функціонал $A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \dots + A_m$, якого сочинники є цілими функціоналами без спільної міри, а t змінного, що не приходить в них, є одиницею.

II. Коли ϑ є який небудь функціонал, в яким не приходить змінна u , то $\frac{1}{\vartheta + u}$ є цілий функціонал.

III. Коли ціла функція $G(u)$ з цілими сочинниками функціоналами, в яких не приходить змінна u , є подільна через цілу функцію

$g(u)$ з якими небудь сочинниками-функціоналами (рівно-ж без змінної u), то ціла функція $G(u):g(u)$ має цілі сочинники. Сю остатню теорему доказали вже перше Kronecker, Dedekind і Hurwitz, однак не опирали ся на II. твердження, яке в отсій розвідці грає головну роль.

М. Ч.

I. 4 a, 8 c, 13 b a. v. Schrutka L., Ein Beweis für die Zerlegbarkeit der Primzahlen von der Form $6n+1$ in einfaches und ein dreifaches Quadrat. Ibid., Bd. 140, 1911, p. 252—265.

Уживаючи т. зв. „сум n -того рода“, введених Jacobsthal'em (Crelle, т. 132)

$$S_n = \sum \left(\frac{f(i)}{p} \right),$$

де i є цілою функцією з цілими сочинниками n -того степеня в i , а $\left(\frac{x}{p} \right)$ означає символ Legendre'a для квадратних останків, до казує автор звісну теорему, що кожде перве число форми $6n+1$ можна розложити на суму $a^2 + 3b^2$. Опісля означає основу (Basis) того розкладу і примінює свої висліди до означення скількості наслідств (Sequenzen) квадратних останків і неостанків в природнім ряді чисел.

М. Ч.

I. 4 a. v. Schrutka L., Theorie der quadratischen Kongruenzen. Monatshefte für Mathematik u. Physik, Bd. XXIII (1912), p. 92—105.

Наважуючи до попередньої своєї статі в тій часописи (т. XVI, „Theorie der Polygonalreste“), автор переводить теорію квадратних конгруенцій на основі принципу, який називає „відбитом (Abbildung) відповідно дібраних вимірних чисел, що творять арифметичні ряди, на ряд цілих чисел“. Коли в конгруенції

$$Ax^2 + Bx \equiv -C \pmod{m}$$

положимо $2A = T$, $B - A = U$, де T і U є цілими, впрочім довільними, числами, то її ліву сторону переведемо в

$$T \cdot \frac{x^2 + x}{2} + Ux.$$

Кождому цілому числу a приписуємо число (неконечно ціле)

$$\alpha = F(a) = \frac{4a - T - 2U}{2T};$$

перехід від a до α називаємо трансформацією F . Вона відповідає

розтягненню (Streckung) чисельної лінії від точки $\frac{T+2U}{4-2T}$ у відношенню $1: \frac{2}{T}$; лише для $T=2$ маємо пересунення о $\frac{1+U}{2}$, а для $U=1$ є $F(a) = a$.

Функція, відворотна до F є

$$a = \Phi(\alpha) = \frac{2T\alpha + T + 2U}{4}.$$

Автор вводить ще такі означення:

$$\iota = F(0), \epsilon = F(1), \eta = F(2), \varrho = F(3),$$

$$f = \frac{(T+2U)(T+2U-4)}{8T};$$

вони під деяким зглядом грають роль зерна й одиниць. На їх основі дефініює такі аналогії додавання, множення й степенювання:

$$\alpha(+) \beta = F(a+b) = \alpha + \beta - \iota,$$

$$\alpha(\cdot) \beta = F(ab) = \frac{T}{2} \alpha \beta + \frac{T+2U}{4} (\alpha + \beta) + f,$$

$$\alpha^{(n)} = \underbrace{\alpha(\cdot) \alpha(\cdot) \dots (\cdot) \alpha}_{n};$$

до них відносять ся закони перемінності, злучности і роздільности; врешті є

$$\alpha(+) \iota = \alpha, \alpha(\cdot) \epsilon = \alpha, \alpha(\cdot) \iota = \iota.$$

Ті операції дають ся відвернути; виключене є ділення через ι . З комбінації тих рівнянь слідує тверджене, що виконане всіх операцій є завжди можливе, коли по знаку $(\cdot)$ не стоїть ι , отже коли k означає результат операцій на числах $a, b, c, \dots$, то існує завжди x , результат подібних операцій $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, так що $x = F(k)$.

Дальше вводить автор понятє ділимости, первих чисел, і лінійних конгруенцій $\alpha(\cdot) \xi \equiv \beta \pmod{p}$, які є рішамі, коли α і μ є перві супроти себе. Теорема Fermat'a звучить так:

$$\alpha^{(\varphi(p))} \equiv \epsilon \pmod{p}.$$

Дальше існує тут аналогія до символів Legendre'a:

$$\left(\frac{\delta}{\pi} \right) \equiv \delta \left(\frac{\varphi(\pi)}{2} \right);$$

ті символи мають такі самі прикмети, як звісні нам з теорії квадратних останків.

Переходячи до квадратних конгруенцій, називає автор кожде перве число p при данім F неправильним (irregulär) або правильним (regulär) в міру того, чи воно містить ся в T , чи ні; 2 є правильне

лише тоді, коли $T \equiv 2 \pmod{4}$. Модул називає правильним тоді, коли він має виключно правильні перші чинники.

Коли модул правильний, то дріб $\frac{2}{T}$ є все $\pmod{m}$ пристайний до цілого числа m , першого супроти модула; так само $F(a) \equiv s$, де s рівно-ж ціле число, врешті й f . Тоді конгруенція $\alpha \equiv \beta$ для модула m є ідентична з конгруенцією для модула μ .

Конгруенцію другого степеня зводить до виду

$$\xi^{(2)} \equiv \gamma + f \pmod{\mu},$$

де $\xi \equiv x \pmod{m}$, $\gamma \equiv -C \pmod{m}$, отже вона рішима, коли $\gamma + f$ є квадратним остатком модула m .

Коли-ж модул $M = q^n q'^{n'} \dots m$ є який небудь, а $q, q', \dots$ його неправильні чинники, то що до рішимості даної квадратної конгруенції оба модули, M і m , заховують ся однаково; доказ розділений на дві часті, відповідно до того, чи ті перші q чинники є перші, чи $= 2$.

М. Ч.

I 13 b a. v. Schrutka L., Drei Parallelsätze zum Fermat'schen Satz über die Zerlegung der Primzahlen von der Form $4n+1$ in zwei Quadrate, Ibid. Bd. XXIII (1912) p. 267—273.

Уживаючи тих самих означень, що в попередній статті, зводить автор питання можливості розкладу

$$p = a^2 + b^2,$$

де p є першим числом форми $4n+1$, до рішимості неозначеного рівняня

$$T \frac{x^2 + x}{2} + Ux + T \frac{y^2 + y}{2} + Uy = k.$$

Переводячи тут трансформацію F і визначаючи вартість вираження $x^2 + y^2 \pmod{m}$, доходить до таких трьох теорем:

1) Коли перше число $p \equiv 5 \pmod{12}$, то $\frac{p-2}{3}$ дасть ся розложити в один, і тільки один спосіб, на суму двох „осьмикутників“ (т. є чисел форми $3x^2 - 2x$).

2) Коли $p \equiv 13 \pmod{20}$, $\frac{p-8}{5}$ дасть ся розложити в один і тільки в один спосіб на суму двох „дванацятикутників“ ($= 5x^2 - 4x$).

3) Коли $p \equiv 10 \pmod{20}$, то $\frac{p-2}{5}$ дасть ся розложити в один і тільки один спосіб на суму двох чисел форми $5n^2 - 2n$. М. Ч.

D. 2 b. Petr K., O sčítání řad numerických. Časopis, ročník XLII. p. 353—369, 465—493. V Praze 1913.

В елементарній статті, призначеній для студентів, розбирає автор такі питання з теорії чисельних рядів: трансформація слабо збіжного ряду в сильніше збіжний, розвиване останка ряду в тяглий дріб, формулка Wallis'a для π , ряд $\sum \frac{a^k}{k}$, ряд для $\frac{\pi}{\sin \pi \xi}$,

ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + u^{(1)}n + u^{(2)}}$, гіпергеометричний ряд Гауґа, а врешті

ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^3 - D(2n+1)}$. Статейка містить в собі багато

цікавих річій, з яких не всі подибують ся в звичайних підручниках аналізи.

М. Ч.

B. I c. e, D. 2 d. a. Rice L. H., Continuant Expressions for $\sqrt{a^2+b}$ and $(\sqrt{a^2+b}+a)^n$. Annals of Math. II. ser., vol. 14 (1913), p. 139—142.

Автор розвиває $\sqrt{a^2+b}$ і $(\sqrt{a^2+b}+a)$ в визначники і тяглі дробі, опираючи ся на теоремі Ramus'a:

$$\begin{vmatrix} 1 & b \\ -1 & a \\ & -1 & a \\ & & \dots & \dots \end{vmatrix}_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a^2+4b}} \left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \right)^n - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2} \right)^n \right]$$

Се дає:

$$(\sqrt{a^2+b}+a)^n = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{a^2+b} \\ -1 & a \\ & -1 & 2a \\ & & -1 & 2a & b \\ & & & \dots & \dots \end{vmatrix}_{n+1}$$

і

$$\sqrt{a^2+b} = |a| + \frac{b}{2|a|} + \frac{b}{2|a|} + \dots \quad \text{М. Ч.}$$

H. II h. Levi-Civita T., *Sulle funzioni che ammettono una formula d'addizione del tipo* $f(x+y) = \sum_{i=1}^n X_i(x) Y_i(y)$
Atti della R. Accademia dei Lincei, Vol. XXII, 2 dem. 1913, p. 181—183.

Примірами таких функцій є $e^{\omega x}$, $\sin \omega x$, $\cos \omega(x)$ (де ω є довільною постійною величиною) і многочлени $P(x)$. Щоби в загальнім разі функція $f(x)$ сповнювала ту умову, мусить бути $n = \infty$; тому автор питається, яким умовам мусить відповідати $f(x)$ для скінченного n , щоби було сповнене згадане рівняння, і відповідає, що всі функції типу $P(x) e^{\omega x}$ (ω дійсне або спряжене). Приймаючи, що всі X_i і Y_i є лінійно незалежні, приходить автор до заключення, що всі X_i мусять бути розвязками системи рівнянь

$$X_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j$$

з постійними сочинниками; Y_i рівно-ж. Звідси знаходимо f як лінійну комбінацію сочинників функції x . М. Ч.

H. 12 b. E. 5. Brodén T., *Einige Anwendungen diskontinuierlicher Integrale auf Fragen der Differenzenrechnung*. Lunds Universitets Årsskrift. N. F. Afd. 2. Bd. 8. 1912. Nr. 8. pag. 1—17.

Автор навіязує до розвідки Guichard'a з 1887 р. в „Annales de l'école normale supérieure“, який ужив до розвязки функційного рівняння

$$f(z+1) - f(z) = \varphi(z),$$

де φ звісне, f незвісне, нетяглих інтегралів. Після його припису творить ся функцію $L(u)$ помічної змінної u , яка є аналітичною, однозначною функцією о періоді 1 і в точках $u \equiv 0 \pmod{1}$ має поодинокий бігун з останком (residuum) $= \frac{1}{2\pi i}$, впрочім є правильна. Потім треба утворити інтеграл

$$H(z) = \int_{ih}^{ik} \varphi(u) L(u-z) du,$$

$h < k$ (оба дійсні, довільні), інтеграл здовж прямої лінії від ih до ik . При помочи того інтеграла одержуємо врешті розвязку:

$$f(z) = H(z) + \sum m \varphi(z-n).$$

Подібною методою розсліджує автор два функційні рівняння,

$$f(z+1) - f(z) = \varphi(z)$$

$$f(z+i) - f(z) = \psi(z),$$

де φ і ψ є однозначними, аналітичними функціями, а треба найти функцію $f(z)$; тут стоять 1, і замість звичайно уживаних період ω , ω' . — Коли отся система має бути рішима, і то однозначно, то поміж φ і ψ мусить істнувати зв'язь

$$\varphi(z+i) - \varphi(z) = \psi(z+1) - \psi(z).$$

Коли $F(z)$ є розвязкою другого рівняння, то розвязка системи має форму $F(z) + P(z)$, де $P(z)$ є довільна однозначна функція з періодою i , отже для її визначення маємо рівняння:

$$P(z+1) - P(z) = \varphi(z) + F(z) - F(z+1),$$

$$P(z+i) - P(z) = 0.$$

Тому розвязка даної системи редукується до випадку, де $\varphi(z) \equiv 0$:

$$\begin{aligned} f(z+1) - f(z) &= \varphi(z) \\ f(z+i) - f(z) &= 0 \end{aligned} \quad [\varphi(z+i) = \varphi(z)].$$

Її легко розвязати, кладучи

$$S(z) = \varphi(z-1) + \varphi(z-2) + \dots$$

або

$$T(z) = -\varphi(z) - \varphi(z+1) - \varphi(z+2) - \dots,$$

коли тільки знаємо, що оба ті ряди є рівномірно збіжні; але се тільки виїмковий випадок. — Можемо також прийняти, що $\varphi(z)$ дасть ся в прямокутнім поясі о ширині > 1 розвинути в ряд

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \dots,$$

де функції φ_n мають рівно-ж періоду i , а притім рівняння

$$f_n(z+1) - f_n(z) = \varphi_n(z)$$

є легко рішимі і то так, що також f_n має періоду i . Коли ряд

$$\sum_0^\infty f_n(z)$$

є збіжний в згаданім обсягу, то се є бажана розвязка.

Дальше займається автор приміненем нетяглих інтегралів і вводить функцію $L(u)$, двоперіодну другого порядку, з періодами 1, і i бігунами $u=0$, $u=\frac{1}{2}$. При її помочи творить інтеграл

$$H(z) = \int_0^{ik} \varphi(u) L(u-z) du,$$

де $0 < k < \frac{1}{2}$, а дорогою інтегрованя є пряма лінія. Тоді одержуємо як розвязку

$$f(z) = H(z) + \sum m \varphi(z-n) + \sum m, \varphi(z + \frac{1}{2} - n)$$

($m, n, m_1, n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Врешті дискутує автор прикмети функції $f(z)$ і подає різні модифікації своєї методи, які мають примінене в поодиноких випадках. М. Ч.

I. 8 a. Plemelj J., Die Siebenteilung des Kreises. Monatshefte für Math. u. Phys. Bd. XXIII (1912), p. 309—311.

Поділ кола на 7 частин залежить від рівняння $\frac{x^7-1}{x-1} = 0$. Навісім одні з його корінів $\zeta = -e^{\frac{\pi i}{7}}$; тоді величини $\zeta^\lambda + \zeta^{-\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 4$) сповнюють рівняне

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0, \quad (1)$$

а бік семикутника є $s_7 = i(\zeta^{-1} - \zeta)$. Через субституцію $y = 2 - s^2$ переходять рівняне (1) в добуток двох чинників

$$s^3 \pm \sqrt{7}(s^2 - 1) = 0; \quad (2)$$

Карданська розв'язка того рівняння дає $s_7 = r \frac{\sqrt{3}}{2} : \cos \frac{\alpha}{2}$, де

$\alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Через се досягає автор таку точність, що блуд в s_7 виносить $r \cdot 0.000038 < r \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^5}$. М. Ч.

O¹ 2 e. q. Ernst P., Die allgemeine Mannheimsche Kurve. Ibid. Bd. XXIII (1912), p. 289—286.

Кривою Mannheim'a називається ся — як звісно — геом. місце осередків кривини точок стянності кривої Γ , що котять ся по прямій; як її узагальнене приймив автор і Н. Wieleitner, що крива Γ котить ся по колі¹⁾. В отсій розвідці йде ще далше узагальнене, а саме, що за „криволінійну вісь“, по якій котить ся крива Γ , приймає автор довільну криву K . М. Ч.

O¹ 2 q. Braude L., Über die Kurven, unter deren Zwischenevoluten sich Kreise befinden. Ibid. Bd. XXIII, (1912), p. 283—288.

Криву, що ділить кожний луч кривини даної кривої K в постійнім відношенні $1 : \lambda$, назвав автор в своїй дисертації „посередною еволютою“ (Zwischenevolute) кривої K . В обговорюваній тут розвідці займає ся він такими кривими, які поміж своїми „посередними еволютами“ мають кола. Показує ся, що крім кола кривими K можуть бути епі- і гіпоциклоїди $\lambda^2 s^2 + R^2 = a^2 \left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \right)^2$, після того, яке є λ . Як спеціальні випадки є обговорені $\lambda = \pm 1$ і $a = \infty$, т. зн., що поміж „посередними еволютами“ приходить пряма лінія. М. Ч.

¹⁾ Monatshefte XVIII, (1907), p. 315/6.

K¹ 6 a. Láška V., O nomografii. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, ročník XLII, стр. 209—217, v Praze 1912.

В тій статейці пояснює автор суть номографії; вона грає в приміненій математиці ту саму роль, що н. пр. графічна статика в будівництві. З огляду на се, що деякі номограми є дуже елементарні, радить автор ужати їх до оживлення науки в середніх школах. — По вступі переводить як приміри: номограми квадратних функцій $x^2 \pm ax \pm b = 0$ і функції $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{2}}{c}$, яка грає роль в оптиці. Врешті згадує про номографічне визначенє ріжничкового квота $\frac{d}{a} \frac{a}{b}$. М. Ч.

L¹ 16 a. Jeřábek V., Geometrické důkazy parametrické vlastnosti kuželoseček. Ibid. ročník XLII, (1912) p. 217—226.

Автор докажує геометрично таку теорему: В стіжковім перекрої (M) о осях $AB = 2a$, $CD = 2b$, прямі MN і MP , нормальні до тятів AM і BM , визначають на осі AB відтинки $PN = 2p = 2 \frac{a^2}{b}$. М. Ч.

K¹ 7. Kounovský J., Základové projektivní geometrie. Ibid. ročník XLII, (1912), p. 230—236, 369—377.

Тут подані основи метової геометрії для учеників середніх шкіл; є згадка про ряд точок, подвійний поділ, перспективні ради, вязки лучів, метове повстанє кола, конструкцію стіжкових перекроїв, а врешті теорема Pascal'a і Brianchon'a. М. Ч.

L¹ 16 a. Pleskot A., O jistě vlastnosti kuželoseček. Ibid., ročník LXII, (1912) p. 494—497.

Нав'язуючи до ноти Ёржабка (гл. више), узагальнює автор його теорему так: Нарисуймо два стіжкові перекрої, що стикають ся з собою в кінцевих точках головної осі CD , виберім на одній з тих кривих довільну точку A , получім її з кінцями спільної осі і продовжим ті прямі до точок пересічн B і E з другою кривою, то прямі AF і AK , поведені рівнобіжно до BD і CE , визначать на осі CD постійний відтенок KF , незалежний від положення точки A на першій кривій. М. Ч.

K¹ 6 a, O¹ 2 b. Láská V., O sestrojování tečen jistých křivek rovinných. Ibid. ročník XLII, (1912) стр. 13—20.

Автор подає способи рисовання стичних до деяких плоских кривих при помочі номографічних сорядних. Рівняне прямої прямої в тих сорядних звучить

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} = 1;$$

коли вона переходить через дві точки (u_1, v_1) , (u_2, v_2) , то має рівняне

$$\begin{vmatrix} u & v & uv \\ u_1 & v_1 & u_1 v_1 \\ u_2 & v_2 & u_2 v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Відтинки a , b на осях U і V є

$$a = u_1 u_2 \frac{v_2 - v_1}{u_1 v_2 - v_1 u_2}, \quad b = v_1 v_2 \frac{u_2 - u_1}{v_1 u_2 - v_2 u_1},$$

а в границях маємо для відтинків стичних:

$$t_a = \frac{dv}{d\left(\frac{v}{u}\right)} t_b = \frac{du}{d\left(\frac{u}{v}\right)}.$$

На основі тих взірців одержуємо легким способом стичні до таких кривих: еліпси, якої рівняне в тих сорядних є $uv = c^2$, гіперболі ($uv = -c^2$), Діоклевої кісоїди ($v^3 - D^2 u = 0$), еліптичної версієри¹⁾ і кривої „conchoida punctata“. Врешті доказує загальне твердження, що коли для кривої (uv) знаємо відтинки стичної t_a , t_b і маємо даву другу криву, що з першою є звязана реляцією $u u_1 = a^2$, $v v_1 = b^2$, то відтинки її стичної є

$$t_a' = \left(\frac{u_1}{a}\right)^2 t_a, \quad t_b' = \left(\frac{v_1}{b}\right)^2 t_b,$$

тому її легко побудувати.

Замітні тут легкі й незвичайно елегантні конструкції стичних.
М. Ч.

Roman Cegielskij: Über das Sieden von Elektrolyten bei Stromdurchgang. (Sonder-Abdruck aus den Verhandl. d. Deutschen Phys. Gesellsch. XVII. 1911. p. 227—248).

Ся розвідка містить виследи експериментальних дослідів автора над впливом електричної струї на кипіння електролітів. Вона складає ся з трьох частин. У першій частині (вступі) подано різні можливі

¹⁾ Loria, Spez. alg. u. transz. Kurven, стр. 78.

роди тепляних проявів, що виступають у електроліті, через який пливе електрична струя, н. пр. тепло Joule-а, тепло хемічних процесів; дальше обговорює ся вплив температури на електролітичні прояви і літературу сего предмету. У другій (теоретичній) частині є розвинена звязь між теплом (Q), витвореним в електроліті або впровадженням до нього, а силою струї J , що пливе через нього. Вона зображена рівнянем параболі $Q = A - BJ + CJ^2$, де на поодинокі члени складають ся отсі тепляні прояви: виміна тепла з оточенням (огріване електроліта газовою полумінню, випромінювання), пароване, тепло Joule-а і т. д. Член BJ мусить мати відємний знак тому, що він представляє завжди забсорбоване тепло; він стає зером лише тоді, як на електродах не вивязують ся гази. З дискусії рівняня бачимо, що заходять чотири можливі випадки: а) $B = 0$, б) $A > \frac{B^2}{4C}$, в) $A = \frac{B^2}{4C}$, г) $A < \frac{B^2}{4C}$.

Коли огріємо електроліт до кипіння і пустимо через нього електричну струю, то в першій випадку з ростучим J буде збільшати ся Q , отже пароване буде відбувати ся щораз живіше. В прочих трьох випадках має Q minimum; тому пароване буде зразу досягти живе, відтак слабне з ростучою натугою струї, опісля знов збільшає ся. Замітне, що для випадку г) наступає для певних вартостей J остижене електроліта низше точки кипіння.

По причині опізнення кипіння (Siedeverzug) перебіг явища є відмінний, як се виходило би з теорії. В разі $B = 0$ спричинює приріст тепл, що походить з однапрямної або перемінної струї, дальше опізнення кипіння в міру зросту натуги струї; тому підносить ся тоді температура в аналогічний спосіб до висше згаданого перебігу функції Q із збільшенням J . Коли-ж при електродах вивязують ся гази, тоді можна очікувати бодай частинного усунення опізнення кипіння при введеню навіть слабій однапрямної струї; се обявляло би ся в зниженю температури. Із зростом натуги струї можуть проявитися сильні від'ємні тепляні явища і то в такій мірі, що температура може обнизити ся понизше точки кипіння. Однак при переході ще сильніших струй через електроліт переважати ме тепло Joule-а; тому температура буде підносити ся і зможе навіть досягнути високий степень понад точкою кипіння, коли з'явиться опізнення кипіння; останнє є майже завжди. Як через електроліт пливе перемінна струя і при слабій її натусі є $B = 0$ або дуже мале, а за те при більшій натусі її B досягає значної величини, то можемо очікувати, що зразу температура електроліта буде підносити ся, відтак буде спадати, щоби опісля знова рости по причині щораз

сильнішого тепла Joule-a. Як бачимо вплив перемінної струї на кипіння електrolітів нагадує в дечім вплив однапрямної струї.

В третій (експериментальній) частині описано перебіг досвідів і зображено його численими фігурами, що подають зв'язь між напругою струї J і температурою t . Вислідів їх дадуться зібрати коротко в отсих кількох словах. Електrolіти розпадаються на дві групи відповідно до впливу електричної струї на їх кипіння. До першої належать сі електrolіти, що при переході однапрямної струї виділяють водень і кисень (н. пр. розріджений сірковий і азотовий квас, розчин содового сіркану). У них бачимо враз із зростом напруги струї: зразу обнижене температури (деколи нижче точки кипіння води н. пр. в разі $0.15\% \text{ H}_2\text{SO}_4$, $0.03\% \text{ H}_2\text{SO}_4$, $1\% \text{ HNO}_3$), опісля зріст температури, часто вище точки кипіння розчину. До сеї громади електrolітів належить зачислити також такі, що в них підчас електrolізи виваюють ся інші гази; однак описані явища не виступають у них так виразно (н. пр. у NaCl). До другої групи належать електrolіти, що підчас електrolізи не виділяють газів, іза чого їх електр-хімічне явище тепла є зером. У них температура не спадає взагалі підчас зросту напруги струї, але протилежно підноситься високо понад точку кипіння (н. пр. у CuSO_4 , ZnSO_4). Перемінна струя має подібний вплив на електrolіти другої групи, як однапрямна. Однак відмінне поведіння бачимо у електrolітах першої групи. Коли переходить через них перемінна струя, хоч в головних рисах характер функції $t = \varphi(J)$ є також тут такий сам, як в разі однапрямної струї.

Інтересний є перебіг остигання киплячого електrolіта, коли возьмемо полум'я на бік і рівночасно пустимо через нього електричну струю. Як електrolіт належить до першої групи, то остигання відбувається під впливом електричної струї борше, як без неї; у прочих електrolітів повільніше. В разі перемінних струй остигають всі електrolіти взагалі повільніше під впливом їх, як без них.

Наведені досвіди надають ся дуже добре до демонстрації в часі викладів про теплові явища у електrolітах під впливом електричної струї. Вони послужили також авторові до ствердження теоретичної основи описаних досвідів.

Р. Ц.

Roman Cegielskij: Zur Frage der „Zerlegung hochkomplizierter chemischer Verbindungen im schwankenden magnetischen Kraftfelde“. (Sonder-Abdruck aus den Verhandl. d. Deutschen Phys. Gesellsch. XV. 1913. p. 566–570).

Під заголовком „Zerlegung etc.“ оголосив J. Rosenthal¹⁾ вислідів своїх досвідів, з яких виходить, що йому пощастило ся розложити зложені хімічні органічні сполуки при помочі змінного магнетного поля. А саме мало йому повести ся розложити крохмаль, тростинний цукор і деякі білковаті тіла на складові частини, які можна вдержати через гідролізу сих субстанцій. Умовою сего розкладу є лише певна частота зміни поля (скількисть перемін магнетного поля на секунду), яка для кожної субстанції є инша, нпр. для крохмалю обертає ся вона в межах між 440 і 480. Rosenthal виворював змінне магнетне поле при помочі перемінної або перериваної однапрямної електричної струї. Провідною думкою його досвідів, котрі він впрочім описує лише побіжно, був факт, що світло розкладає деякі субстанції; отже не є неможливим, що електромагнетні дроба з повільною періодою можуть викликувати той сам ефект. Автор рішив ся повторити сі дивні досвіди, наважуючи до досвідів, початих дром Lederer-ом в Чернівцях, котрий не міг продовжати їх по причині свого виїзду. Останній зробив кілька досвідів з розчином крохмалю і цукру, однак безуспішно. Автор сеї праці уживав по змозі сильного магнетного поля. Тому взяв цівку відповідних розмірів, на котрій було около 400 зв'язів грубого дрота, і в середині її передержував субстанцію. Електричну струю переривав при помочі переривача Wehnelt-a і старав ся придержувати числа переривань, поданою Rosenthal-ом. Досвіди робив з розчинами крохмалю і тростинного цукру, а час тривання їх виносив більшу скількисть годин. Однак вислід був завжди від'ємний. З того виводить автор висновок, що або не повело ся ні йому ні дрови Lederer-ови досягнути вимаганих умов (н. пр. певного числа перемін магнетного поля на секунду) або явище, винайдене Rosenthal-ом, не залежить взагалі від магнетного поля²⁾.

Р. Ц.

Р. Суппанчич. Геометрія для I. класу середніх шкіл. За німецьким підручником проф. Суппанчича зладив проф. Іван Сітинський. Жовква 1912. Накладом автора. Стор. 47. Ціна бр. 60 с.

Михайло Грицак. Учебник геометрії для середніх шкіл. Названий степен (II і III класа). У Львові 1913. Накладом

¹⁾ Університетський професор, фізіолог. Гл. Rosenthal. Sitzungsber. d. Königl. Preuss. Akad. d. Wiss. 1908, I. S. 20.

²⁾ Недавно помістив G. W. Heimrod розвідку на ту саму тему у Zeitschrift f. Elektrochemie 19, 1913, p. 812. Згадавши про вислід автора, подає він цілий ряд своїх досвідів, що вповні збивають виследи Rosenthal-a.

Українського Педагогічного Товариства. Стор. VIII + 179. Ціна опр. 2 К 20 с.

Михайло Грицак. Учебник арифметики для середних шкіл. Середних степенів (IV і V класа). У Львові 1913. Накладом українського Педагогічного Товариства. Стор. IV + 240 + табл. Ціна опр. 3 К.

Конрад Кравец. Основи хемії. Після підручника проф... приладив Роман Цегельський. Чернівці 1910. Заходом тов. „Українська Школа“ в Чернівцях. Стр. II + 151. Ціна опр. 3 К.

Др. Юліян Гірняк. Начерк мінералогії і хемії для середних шкіл. У Львові 1912. Накладом Руского Товариства Педагогічного. Стор. IV + 123. Ціна опр. 2 К 40 с.

Др. Володимир Левицький. Фізика для вищих клас середних шкіл. У Львові 1912. Накладом краєвого фонду. Стор. VIII + 672 + 2 табл. Ціна опр. 4 К.

Др. Микола Чайковський. Начерк вищих рахунків для ужитку учеників середних шкіл. VII. Звіт Дирекції ц. к. гімназії Франц-Йосифа I. за р. 1911/12 і окремою відбиткою, Тернопіль 1912, стр. 3 + 43 + 1 табл.

Др. Микола Чайковський. Новочасне „perpetuum mobile“. „Ілюстрована Україна“ 1913, чч. 13—14.

Популярна розвідка про велику теорему Фермата.

Др. Микола Чайковський. Безконечність. „Учитель“ 1913/14, чч. 1, 2, 3, 5—6.

Володимир Кучер. Електронна теорія металів. VIII. Звіт Дирекції ц. к. гімназії Франц-Йосифа I. за р. 1912/13 і окремою відбиткою, Тернопіль 1913, стр. 3—29.

