

М. Кравчук (Київ).

Про існування похідних у функцій дійсного змінного.

1. Нехай поблизу точки $x = 0$, нпр. на однім із інтервалів

$$(1) \quad (0, +\alpha), (-\beta, 0), (-\beta, +\alpha)$$

функцію $y = f(x)$ можна представити в формі

$$(2) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + a(x) \cdot x^{k+r} \quad (r > 0),$$

де $a(x)$ є обмежена функція від x . Тоді, як легко бачити з (2), існує (і не залежить від λ) число

$$(3) \quad y^{(l)}(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta^l y(\lambda \Delta x)}{\Delta^l x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(l+1)h - lf(l+1)h + \dots + (-1)^l f(\lambda h)}{h^l},$$

як що λ є обмежене число і $l \leq k$. Очевидно тут за λ і за h треба брати такі числа, щоби при досить малім h числа

$$(l-i+1)h \quad (i = 0, 1, \dots, l)$$

належали до інтервалу (1).

2. Нехай тепер якась функція $y = f(x)$ має на інтервалі (1) таку властивість, що величина

$$\frac{\Delta^{k+1} y}{\Delta x^{k+1}} = \frac{f(x+k+1)h - (k-1)f(x+kh) + \dots + (-1)^{k+1} f(x)}{h^{k+1}}$$

є обмежена. Тоді будуть обмежені й функції

$$(4) \quad y, \frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \dots, \frac{\Delta^k y}{\Delta x^k}.$$

Справді, впровадивши зазначення

$$\frac{x}{n} = \Delta x, \quad f(0) = y_0,$$

$$\Delta y_i = f\left(\frac{i+1}{n}x\right) - f\left(\frac{i}{n}x\right),$$

$$\Delta^2 y_i = f\left(\frac{i+2}{n}x\right) - 2f\left(\frac{i+1}{n}x\right) + f\left(\frac{i}{n}x\right),$$

де n є ціле додатне число, візьмімо тотожність:

$$(5) \quad y = y_0 + x \frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{x(x-\Delta x)}{1 \cdot 2} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \dots + \frac{x(x-\Delta x) \dots (x-k-1\Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \frac{\Delta^k y_0}{\Delta x^k} + R_k(x, \Delta x),$$

де

$$(6) \quad R_k(x, \Delta x) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(x-i-1\Delta x)(x-i-2\Delta x) \dots (x-i-k\Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \frac{\Delta^{k+1} y_i}{\Delta x^{k+1}} \Delta x$$

Її легко перевірити переходом від k до $k+1$, перетворивши (6) так:

$$\begin{aligned} R_k(x, \Delta x) &= \frac{(x-\Delta x)(x-2\Delta x) \dots (x-k\Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \cdot \frac{\Delta^{k+1} y_0}{\Delta x^{k+1}} \Delta x + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-k} \frac{(x-i-1\Delta x) \dots (x-i-k\Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \left(\frac{\Delta^{k+1} y_0}{\Delta x^{k+1}} + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\Delta^{k+2} y_j}{\Delta x^{k+1}} \right) \Delta x = \\ &+ \left[\frac{(x-\Delta x)(x-2\Delta x) \dots (x-k\Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} + \sum_{i=1}^{n-k} \frac{(x-i-1\Delta x) \dots (x-i-k\Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \right] \frac{\Delta^{k+1} y_0}{\Delta x^{k+1}} \Delta x + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-k} \left[\frac{(x-i-1\Delta x) \dots (x-i-k\Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Delta^{k+2} y_j}{\Delta x^{k+1}} \right] \Delta x = \\ &= \frac{x(x-\Delta x) \dots (x-k\Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k+1)} \cdot \frac{\Delta^{k+1} y_0}{\Delta x^{k+1}} + R_{k+1}(x, \Delta x) \end{aligned}$$

Давши тепер у формулі (5) змінному x $k+1$ різних вартостей x_j ($j = 0, 1, \dots, k$),

таких, що числа

$$\frac{x_j}{\Delta x} = n_j \quad (j = 0, 1, \dots, k)$$

є цілі додатні, дістанемо $k+1$ лінійних рівнянь

$$(7) \quad y(x_j) = y_0 + x_j \frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{x_j(x_j-\Delta x)}{1 \cdot 2} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \dots + \frac{x_j(x_j-\Delta x) \dots (x_j-k-1\Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \frac{\Delta^k y_0}{\Delta x^k} + R_k(x_j, \Delta x)$$

що до величин

$$(8) \quad y_0, \frac{\Delta y_0}{\Delta x}, \dots, \frac{\Delta^k y_0}{\Delta x^k}$$

Коли числа x_j взяти так, щоб абсолютні вартості різниць між ними були більші від якогось сталого числа, то побачимо,

розв'язавши систему (7), що числа (8) є обмежені. З цих міркувань випливає, розуміється, й обмеженість величин (4).

Зауважмо тут, що для обмеженості чисел (8) досить, щоб була обмежена величина (6).

3. Коли тепер вести Δx до 0 так, щоб число $R_k(x, \Delta x)$ ішло до певної границі, то й числа (8) ітимуть до певних скінчених границь $a_0, a_1, \dots, 1.2 \dots ka_k$, і з (5) дістанемо:

$$(9) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \lim R_k(x, \Delta x),$$

що дає (2) з $r = 1$, коли $\frac{\Delta^{k+1}y}{\Delta x^{k+1}}$ є величина обмежена, та й при деяких загальніших умовах, що їх буде виявлено далі.

Звідси висновок: обмеженість виразу $\frac{\Delta^{k+1}y}{\Delta x^{k+1}}$ є достатня умова для існування k перших суцільних похідних типу (3) у функції $y = f(x)$ на інтервалі (1).

4. Тепер можна довести, що при цих самих умовах функція $y = f(x)$ має й звичайні похідні

$$y^{(l)} \quad (l = 1, 2, \dots, k)$$

на тім інтервалі. Для доводу візьмімо функцію

$$F(x) = \int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x y^{(l)}(x) dx^l$$

З огляду на обмеженість функції $\frac{\Delta^l y}{\Delta x^l}$ маємо*):

$$F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x \frac{\Delta^l y}{\Delta x^l} dx^l = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^l} \int_x^{x+h} \int_x^{x+h} \dots \int_x^{x+h} f(x) dx^l + \varphi(x),$$

де $\varphi(x)$ є многочлен ступеня не старшого за $l-1$; отже

$$F(x) = f(x) + \varphi(x)$$

А що $F(x)$ очевидно має похідні першу, другу, ..., l -ту, то має їх і наша функція $y = f(x)$.

5. Коли на інтервалі (1) вираз $\frac{\Delta^{k+1}y}{\Delta x^{k+1}}$ одностайно йде до нуля, то, як бачимо з (9) та (6), функція $y = f(x)$ є многочлен ступеня не старшого за k . Це твердження взагаліньом відому Schwarz'ову теорему про функцію, що справджує умову

$$(10) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = 0.$$

*) Поп. нпр. de la Vallée Poussin. Intégrale de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire, 1916, стр. 44.

Вимога одностайности тут є істотна, як показує нпр. випадок рівності

$$\lim \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \lim \frac{f(x+3h) - 3f(x+h) + 3f(x-h) - f(x-3h)}{h^3} = 0,$$

що її справджує функція $y = |x|$ на інтервалі $(-1, +1)$; вона неминуха й для Schwarz'ового випадку: $k = 1$, коли взяти в (10) за чисельник вираз $f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$ замість $f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$, як показує той самий приклад.

6. Спосіб досліду, що тут подано, є придатний, з відповідними змінами, також і для функцій кількох змінних. Не беручи справи загально, розв'яжімо тим часом питання: коли у функції $f(x, y, \dots)$ змінні розділяються, тобто коли її можна представити в формі

$$f(x, y, \dots) = \varphi(x) + \psi(y) + \dots?$$

Досить розібрати випадок функції двох змінних:

$$z = f(x, y).$$

Зазначмо:

$$\frac{x}{m} = \Delta x, \quad \frac{y}{n} = \delta y$$

$$z_{ij} = f(i\Delta x, j\delta y) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$\Delta z_{ij} = z_{i+1, j} - z_{ij}$$

$$\delta z_{ij} = z_{i, j+1} - z_{ij}$$

$$\Delta \delta z_{ij} = \delta \Delta z_{ij} = z_{i+1, j+1} - z_{i+1, j} - z_{i, j+1} + z_{ij}$$

Тоді

$$\begin{aligned} (10) \quad z &= z_{00} + \Delta z_{00} + \Delta z_{10} + \dots + \Delta z_{m-1, 0} + \\ &+ \delta z_{00} + \delta \Delta z_{00} + \delta \Delta z_{10} + \dots + \delta \Delta z_{m-1, 0} + \\ &+ \delta z_{01} + \delta \Delta z_{01} + \delta \Delta z_{11} + \dots + \delta \Delta z_{m-1, 1} + \\ &+ \delta z_{0, h-1} + \delta \Delta z_{0, h-1} + \delta \Delta z_{1, h-1} + \dots + \delta \Delta z_{m-1, h-1}, \end{aligned}$$

що можна написати й так:

$$(11) \quad U = f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0) = \sum_{i=0, j=0}^{i=m-1, j=n-1} \delta \Delta z_{ij}$$

Нехай $\frac{\delta \Delta z}{\Delta x \delta y}$ є величина обмежена в обсягу $(0, x; 0, y)$, отже нехай

$$\left| \frac{\delta \Delta z}{\Delta x \delta y} \right| < K,$$

де K є сталє число; тоді з (11) дістанемо:

$$|f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0)| < K \cdot |xy|.$$

Маємо вислід: коли $\frac{\delta \Delta z}{\Delta x \delta y}$ одностайно йде до нуля в якомусь обсягу змінних x, y , то змінні в функції $z = f(x, y)$ у тім обсягу розділяються. Цей критерій розділу змінних не вимагає існування похідних $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

7. Із (10) легко дістаємо:

$$\begin{aligned} z &= f(x, 0) + f(0, y) - f(0, 0) + n[\delta \Delta z_{00} + \delta \Delta z_{10} + \dots + \delta \Delta z_{m-1,0}] + \\ &\quad + (n-1)[\delta^2 \Delta z_{00} + \delta^2 \Delta z_{10} + \dots + \delta^2 \Delta z_{m-1,0}] + \\ &\quad + (n-2)[\delta^2 \Delta z_{01} + \delta^2 \Delta z_{11} + \dots + \delta^2 \Delta z_{m-1,1}] + \\ &\quad + 1 \cdot [\delta^2 \Delta z_{0, n-2} + \delta^2 \Delta z_{1, n-2} + \dots + \delta^2 \Delta z_{m-1, n-2}] = \\ &= f(x, 0) + f(0, y) - f(0, 0) + mn \delta \Delta z_{00} + (m-1)n \delta^2 \Delta z_{00} + \dots + 1 \cdot n \delta^2 \Delta z_{m-2, 0} + \\ &\quad + m(n-1) \delta^2 \Delta z_{00} + (m-1)(n-1) \delta^2 \Delta z_{00} + \dots + 1 \cdot (n-1) \delta^2 \Delta z_{m-2, 0} + \\ &\quad + m(n-2) \delta^2 \Delta z_{01} + (m-1)(n-2) \delta^2 \Delta z_{01} + \dots + 1 \cdot (n-2) \delta^2 \Delta z_{m-2, 1} + \\ &\quad + m \cdot 1 \delta^2 \Delta z_{0, n-2} + (m-1) \cdot 1 \delta^2 \Delta z_{0, n-2} + \dots + 1 \cdot 1 \cdot \delta^2 \Delta z_{m-2, n-2} \end{aligned}$$

або:

$$\begin{aligned} (12) \quad z &= f(0, y) + f(x, 0) - f(0, 0) + xy \frac{\delta \Delta z_{00}}{\Delta x \delta y} + \\ &\quad + y \sum_{i=1}^{m-1} (x - i\Delta x) \frac{\delta \Delta^2 z_{i-1,0}}{\Delta x^2 \delta y} \Delta x + x \sum_{j=1}^{n-1} (y - j\delta y) \frac{\delta^2 \Delta z_{0, j-1}}{\Delta x \delta y^2} \delta y + \\ &\quad + \sum_{i=1, j=1}^{m-1, n-1} (x - i\Delta x) (y - j\delta y) \frac{\delta^2 \Delta^2 z_{i-1, j-1}}{\Delta x^2 \delta y^2} \Delta x \delta y. \end{aligned}$$

З останньої рівності, коли припустимо, що величини

$$(13) \quad \frac{\delta \Delta^2 f(x, 0)}{\Delta x^2 \delta y}, \quad \frac{\delta^2 \Delta f(0, y)}{\Delta x \delta y^2} \quad \text{та} \quad \frac{\delta^2 \Delta^2 f(x, y)}{\Delta x^2 \delta y^2}$$

є обмежені, дістанемо, тими самими міркуваннями, що й для функцій одного змінного, що функція $z = f(x, y)$ має в обсягу $(0, x; 0, y)$ другу похідну типу $\lim \frac{\delta \Delta z}{\Delta x \delta y}$.

Правдиве є й загальніше твердження: коли $\frac{\delta \Delta^2 z}{\Delta x^2 \delta y}$ та $\frac{\delta^2 \Delta z}{\Delta x \delta y^2}$

в обмежені на межі якогось обсягу, а $\frac{\partial^2 \Delta_2 z}{\Delta x^2 \delta y^2}$ — у цілیم обсягу, то скрізь у тім обсягу існує похідна $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$, хоч може не бути похідних $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Рівність (12) можна переписати так:

$$\begin{aligned} (14) \quad U(x, y) &= f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0) = \\ &= xy \frac{\partial \Delta z_{00}}{\Delta x \delta y} + y \sum_{i=1}^{m-1} (x-i\Delta x) \frac{\partial \Delta^2 z_{i-1,0}}{\Delta x^2 xy} \Delta x + \sum_{j=1}^{n-1} (y-j\Delta y) \frac{\partial \Delta^2 z_{0,j-1}}{\Delta x \delta y^2} \Delta y = \\ &= xy \frac{\partial \Delta z_{00}}{\Delta x \delta y} + x \sum_{j=1}^{n-1} (y-j\Delta y) \frac{\partial \Delta^2 z_{0,j-1}}{\Delta x \delta y^2} \delta y + \sum_{i=1}^{m-1} (x-i\Delta x) \frac{\partial \Delta^2 z_{i-1,j-1}}{\Delta x^2 \delta y} \Delta x \delta y. \end{aligned}$$

Отже для існування звичайної похідної $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ у функції

$$U = f(x, y) - f(x, 0) - f(0, x) + f(0, 0)$$

в якомусь обсягу досить, щоб величини

$$\frac{\partial \Delta^2 U}{\Delta x^2 \delta y} \quad \text{та} \quad \frac{\partial^2 \Delta U}{\Delta x \delta y^2}$$

були обмежені в тім обсягу. Цей вислід можна поширити й на старші похідні.

9. Переходимо до загального розбору умов існування старших похідних у функції кількох змінних.

Нехай функцію $z(x, y)$ від двох дійсних змінних можна поблизу точки (α, β) представити так:

$$\begin{aligned} (15) \quad z(x, y) &= z(\alpha, \beta) + a_{10}(\alpha, \beta)(x-\alpha) + \dots + a_{k0}(\alpha, \beta) \frac{(x-\alpha)^k}{k!} + \\ &+ A_x(\alpha, x; y)(x-\alpha)^{k+r} + a_{01}(\alpha, \beta)(y-\beta) + a_{11}(\alpha, \beta)(x-\alpha)(y-\beta) + \dots \\ &+ a_{k1}(\alpha, \beta) \frac{(x-\alpha)^k}{k!} (y-\beta) + \\ &+ a_{0l}(\alpha, \beta) \frac{(y-\beta)^l}{l!} + a_{1l}(\alpha, \beta)(x-\alpha) \frac{(y-\beta)^l}{l!} + \dots + \\ &+ a_{kl}(\alpha, \beta) \frac{(x-\alpha)^k}{k!} \frac{(y-\beta)^l}{l!} + \\ &+ A_y(x; \beta, y)(y-\beta)^{l+s} + A_{xy}(\alpha, x; \beta, y)(x-\alpha)^{k+t}(y-\beta)^{l+u} \\ & \quad (r > 0, s > 0, t + u > 0), \end{aligned}$$

де функції

$$(16) \quad A_x(\alpha, x; y), A_y(x; \beta, y), A_{xy}(\alpha, x; \beta, y)$$

та

$$(17) \quad a_{ij}(\alpha, \beta) \quad (i = 0, 1, \dots, k; j = 0, 1, \dots, l)$$

є обмежені.

Із (15) взявши $\beta = y$, а потім $\alpha = x$, виводимо:

$$(18) \quad z(x, y) = z(\alpha, y) + a_{10}(\alpha, y)(x-\alpha) + \dots + \\ + a_{k0}(\alpha, y) \frac{(x-\alpha)^k}{k!} + A_x(\alpha, x; y)(x-\alpha)^{k+r}$$

$$(19) \quad z(x, y) = z(x, \beta) + a_{01}(x, \beta)(y-\beta) + \dots + \\ + a_{0l}(x, \beta) \frac{(y-\beta)^l}{l!} + A_y(x; \beta, y)(y-\beta)^{l+s}$$

Віднявши далі (18) та (19) від (15), дістанемо:

$$(20) \quad U(x, y, \alpha, \beta) = z(x, y) - z(\alpha, y) - z(x, \beta) + z(\alpha, \beta) + \\ + \sum_{i=1}^k (a_{i0}(\alpha, \beta) - a_{i0}(\alpha, y)) \frac{(x-\alpha)^i}{i!} + \sum_{j=1}^l (a_{0j}(\alpha, \beta) - a_{0j}(x, \beta)) \frac{(y-\beta)^j}{j!} = \\ = - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l a_{ij}(\alpha, \beta) \frac{(x-\alpha)^i}{i!} \frac{(y-\beta)^j}{j!} + A_{xy}(\alpha, x; \beta, y)(x-\alpha)^{k+i}(y-\beta)^{l+j}.$$

Очевидно, функція z є суцільна що до обох змінних x та y . Ми доведемо тепер суцільність функцій $a_{ij}(\alpha, \beta)$.

Замінивши в рівностях (18) та (19) x на $x+g$, α на $\alpha+g$, y на $y+h$ і β на $\beta+h$, дістанемо:

$$(21) \quad z(x+g, y+h) = z(\alpha+g, y+h) + a_{10}(\alpha+g, y+h)(x-\alpha) + \dots + \\ + a_{k0}(\alpha+g, y+h) \frac{(x-\alpha)^k}{k!} + A_x(\alpha+g, x+g; y+h)(x-\alpha)^{k+r}$$

$$(22) \quad y(x+g, y+h) = z(x+g, \beta+h) + a_{01}(x+g, \beta+h)(y-\beta) + \dots + \\ + a_{0l}(x+g, \beta+h) \frac{(y-\beta)^l}{l!} + A_y(x+g; \beta+h, y+h)(y-\beta)^{l+s}$$

Віднявши (18) від (21) та (19) від (22), легко приходимо до рівностей:

$$(23) \quad \frac{1}{j!} \left((a_{i0}(\alpha+g, y+h) - a_{i0}(\alpha, y)) \right) = \left\{ \frac{z(x+g, y+h) - z(x, y)}{(x-\alpha)^i} - \right. \\ - \frac{z(\alpha+g, y+h) - z(\alpha, y)}{(x-\alpha)^i} - \frac{a_{10}(\alpha+g, y+h) - a_{10}(\alpha, y)}{(x-\alpha)^{i-1}} - \dots \\ \dots - \frac{a_{i-1,0}(\alpha+g, y+h) - a_{i-1,0}(\alpha, y)}{(i-1)!(x-\alpha)} \left. \right\} - \\ - \left\{ \frac{a_{i+1,0}(\alpha+g, y+h) - a_{i+1,0}(\alpha, y)}{(i+1)!} (x-\alpha) + \dots \right.$$

$$\begin{aligned}
& \dots + (A_x(\alpha+g, x+g, y+h) - A_x(\alpha, x; y)) (x-\alpha)^{k-i+r} \Big\} \\
(24) \quad & \frac{1}{j!} (a_{0j}(x+g, \beta+h) - a_{0j}(x, \beta)) = \left\{ \frac{z(x+g, y+h) - z(x, y)}{(y-\beta)^j} - \right. \\
& - \frac{z(x+g, \beta+h) - z(x, \beta)}{(y-\beta)^j} - \frac{a_{10}(x+g, \beta+h) - a_{10}(x, \beta)}{(y-\beta)^{j-1}} - \dots \\
& \dots - \frac{a_{0,j-1}(x+g, \beta+h) - a_{0,j-1}(x, \beta)}{(j-1)! (y-\beta)} \Big\} - \\
& - \left\{ \frac{a_{0,j+1}(x+g, \beta+h) - a_{0,j+1}(x, \beta)}{(j+1)!} (y-\beta) + \dots \right. \\
& \left. \dots + (A_y(x+g; \beta+h, y+h) - A_y(x; \beta, y)) (y-\beta)^{l-j+s} \right\}
\end{aligned}$$

Припустімо, що функції

$$(25) \quad a_{10}(\alpha, \beta), \dots, a_{i-1,0}(\alpha, \beta); a_{01}(\alpha, \beta), \dots, a_{0,j-1}(\alpha, \beta)$$

суцільні, і візьмімо числа $|x-\alpha|$ та $|y-\beta|$ такі малі (але обмежені знизу), щоб було

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{a_{i+1,0}(\alpha+g, y+h) - a_{i+1,0}(\alpha, y)}{(i+1)!} (x-\alpha) + \dots \right. \\
& \left. \dots + (A_x(\alpha+g, x+g; y+h) - A_x(\alpha, x; y)) (x-\alpha)^{k-i+r} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \\
& \left| \frac{a_{0,j+1}(x+g, \beta+h) - a_{0,j+1}(x, \beta)}{(j+1)!} (y-\beta) + \dots \right. \\
& \left. \dots + (A_y(x+g; \beta+h, y+h) - A_y(x; \beta, y)) (y-\beta)^{l-j+s} \right| < \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

де ε є довільно мале число (це можливо з огляду на обмеженість функцій (16) та (17)). Далі доберімо g та h так, щоб справдилися нерівності:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{z(x+g, y+h) - z(x, y)}{(x-\alpha)^i} - \frac{z(\alpha+g, y+h) - z(\alpha, y)}{(x-\alpha)^i} - \right. \\
& - \frac{a_{10}(\alpha+g, y+h) - a_{10}(\alpha, y)}{(x-\alpha)^{i-1}} - \dots - \frac{a_{i-1,0}(\alpha+g, y+h) - a_{i-1,0}(\alpha, y)}{(i-1)! (x-\alpha)} \Big| < \frac{\varepsilon}{2}, \\
& \left| \frac{z(x+g, y+h) - z(x, y)}{(y-\beta)^j} - \frac{z(x+g, \beta+h) - z(x, \beta)}{(y-\beta)^j} - \right. \\
& - \frac{a_{01}(x+g, \beta+h) - a_{01}(x, \beta)}{(y-\beta)^{j-1}} - \dots - \frac{a_{0,j-1}(x+g, \beta+h) - a_{0,j-1}(x, \beta)}{(j-1)! (y-\beta)} \Big| < \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

що можливо з огляду на суцільність функцій z та (25). А тоді з (23) та (25) випливає суцільність функцій a_{10} та a_{0j} і zarazом

функції $u(x, y, \alpha, \beta)$: досить узяти за i ступнево числа $1, 2, \dots, k$, а за j числа $1, 2, \dots, l$.

Нехай далі серед функцій

$$\begin{array}{|c|} \hline a_{11}(\alpha, \beta) \qquad \qquad \qquad a_{k1}(\alpha, \beta) \\ \hline a_{1j}(\alpha, \beta) \dots a_{i-1,j}(\alpha, \beta) \quad a_{ij}(\alpha, \beta) \dots a_{kj}(\alpha, \beta) \\ \hline \end{array}$$

$$a_{11}(\alpha, \beta)$$

$$a_{k1}(\alpha, \beta)$$

ті, що їх обведено лінією, є суцільні. Доведемо суцільність функції $a_{ij}(\alpha, \beta)$; цим буде доведено, що всі функції (17) суцільні.

Заступивши в (20) x через $x+g$, y через $y+h$, α через $\alpha+g$, β через $\beta+h$, дістанемо:

$$\begin{aligned} (26) \quad u(x+g, y+h, \alpha+g, \beta+h) = \\ = \sum_{i=1, j=1}^{i=k, j=l} a_{ij}(\alpha+g, \beta+h) \frac{(x-\alpha)^i}{i!} \frac{(y-\beta)^j}{j!} + \\ + A_{xy}(\alpha+g, x+g; \beta+h, y+h) (x-\alpha)^{k+i} (y-\beta)^{l+j} \end{aligned}$$

Віднявши (20) від (26), легко прийдемо до рівності:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i! j!} (a_{ij}(\alpha+g, \beta+h) - a_{ij}(\alpha, \beta)) = \\ = \left[\frac{u(x+g, y+h, \alpha+g, \beta+h) - u(x, y, \alpha, \beta)}{(x-\alpha)^i (y-\beta)^j} - \right. \\ - \frac{a_{11}(\alpha+g, \beta+h) - a_{11}(\alpha, \beta)}{(x-\alpha)^{i-1} (y-\beta)^{j-1}} - \dots - \frac{a_{i-1,j}(\alpha+g, \beta+h) - a_{i-1,j}(\alpha, \beta)}{(i-1)! j! (x-\alpha)} \left. \right] - \\ - \left\{ \frac{a_{i+1,j}(\alpha+g, \beta+h) - a_{i+1,j}(\alpha, \beta)}{(i+1)! j!} (x-\alpha) + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{a_{k1}(\alpha+g, \beta+h) - a_{k1}(\alpha, \beta)}{k! l!} (x-\alpha)^{k-i} (y-\beta)^{l-j} + \right. \\ \left. + (A_{xy}(\alpha+g, x+g; \beta+h, y+h) - A_{xy}(\alpha, x; \beta, y)) (x-\alpha)^{k-i+t} (y-\beta)^{l-j+u} \right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, знов можна дібрати різниці $x-\alpha$ та $y-\beta$ так, щоб вираз у дужках $\{ \}$ був довільно малий, а потім узяти g та h такі малі, щоб довільно малий став вираз у дужках $[]$; це й доводить суцільність функції $a_{ij}(\alpha, \beta)$.

10. Із (15) маємо очевидно

$$(27) \quad a_{ij}(\alpha, \beta) = \lim_{\Delta\alpha=0, \delta\beta=0} \frac{\Delta^i \delta^j z(\alpha, \beta)}{\Delta\alpha^i \delta\beta^j} \quad (i \leq k, j \leq l),$$

де

$$(28) \quad \Delta z(\alpha, \beta) = z(\alpha + \Delta\alpha, \beta) - z(\alpha, \beta), \dots; \delta z(\alpha, \beta) = z(\alpha, \beta + \delta\beta) - z(\alpha, \beta), \dots$$

Отже всі частки $\frac{\Delta^i \delta^j z}{\Delta\alpha^i \delta\beta^j}$ ($i \leq k, j \leq l$) є обмежені. А що функції

(28) суцільні, то з (27) дістаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \int_0^\beta a_{ij}(\alpha, \beta) d\beta^j &= \lim_{\Delta\alpha=0, \delta\beta=0} \int_0^\beta \int_0^\beta \frac{\Delta^i \delta^j z}{\Delta\alpha^i \delta\beta^j} d\beta^j = \\ &= \lim_{\Delta\alpha=0} \frac{\Delta^i z(\alpha, \beta)}{\Delta\alpha^i} + \varphi_1 \beta^{j-1} + \varphi_2 \beta^{j-2} + \dots + \varphi_j, \end{aligned}$$

де φ_p є якісь функції від α . Дальша інтеграція дасть:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \dots \int_0^\alpha \int_0^\beta \dots \int_0^\beta a_{ij}(\alpha, \beta) d\beta^j d\alpha^i &= \\ &= \lim_{\Delta\alpha=0} \int_0^\alpha \int_0^\alpha \frac{\Delta^i z(\alpha, \beta)}{\Delta\alpha^i} d\alpha^i + \int_0^\alpha \int_0^\alpha (\varphi_1 \beta^{j-1} + \dots + \varphi_j) d\alpha^i = \\ &= z(\alpha, \beta) + \Psi_1 \beta^{j-1} + \Psi_2 \beta^{j-2} + \dots + \Psi_j + \Theta_1 \alpha^{i-1} + \Theta_2 \alpha^{i-2} + \dots + \Theta_i, \end{aligned}$$

де

$$\Psi_p = \int_0^\alpha \int_0^\alpha \varphi_p d\alpha^i,$$

а Θ_i — якісь функції від β . Звідси висновок:

$$a_{ij}(\alpha, \beta) = \frac{\partial^{i+j} z(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^i \partial \beta^j} \quad (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, l)$$

Отже функція $z(x, y)$ має всі похідні

$$\frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j} \quad (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, l),$$

при тім ці похідні всі суцільні, отже їхні вартості не залежать від порядку диференціації.

11. Нехай тепер маємо якусь функцію

$$z = f(x, y)$$

від двох дійсних змінних, що має в обсягу S усі відношення:

$$(29) \quad \frac{\Delta^{k+1}z}{\Delta x^{k+1}}, \quad \frac{\delta^{l+1}z}{\delta y^{l+1}}, \quad \frac{\Delta^{k+1}\delta^{l+1}z}{\Delta x^{k+1}\delta y^{l+1}}$$

обмежені.

Подібно до того, як у п. 2, маємо тотожності:

$$(30) \quad z = f(x, y) = f(0, y) + x \frac{\Delta f(0, y)}{\Delta x} + \dots \\ \dots + \frac{x(x-\Delta x) \dots (x-k-1\Delta x)}{k!} \cdot \frac{\Delta^k f(0, y)}{\Delta x^k} + R_k^x(f)$$

$$(31) \quad u = \varphi(x, y) = \varphi(x, 0) + y \frac{\delta \varphi(x, 0)}{\delta y} + \dots \\ \dots + \frac{y(y-\delta y) \dots (y-l-1\delta y)}{l!} \cdot \frac{\delta^l \varphi(x, 0)}{\delta y^l} + R_l^y(\varphi),$$

де

$$\Delta x = \frac{x}{n}, \quad \delta y = \frac{y}{m}; \quad \Delta f(0, y) = f(\Delta x, y) - f(0, y), \dots;$$

$$\delta \varphi(x, 0) = \varphi(x, \delta y) - \varphi(x, 0), \dots;$$

$$R_k^x(f) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(x-i-1\Delta x) \dots (x-i-k\Delta x)}{k!} \cdot \frac{\Delta^{k+1}f(i\Delta x, y)}{\Delta x^{k+1}} \Delta x;$$

$$R_l^y(\varphi) = \sum_{i=0}^{m-l} \frac{y(i-\delta y) \dots (y-i-l\delta y)}{l!} \cdot \frac{\delta^{l+1}\varphi(x, i\delta y)}{\delta y^{l+1}} \delta y.$$

Нехай

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - R_k^x(f);$$

тоді (31) перетвориться на

$$f(x, y) = f(0, 0) + \sum_{i=0, j=0}^{i=k, j=l} \frac{x(x-\Delta x) \dots (x-i-1\Delta x) y(y-\delta y) \dots (y-j-1\delta y)}{i! j!} \\ \frac{\Delta^i \delta^j f(0, 0)}{\Delta x^i \delta y^j} + R_k^x(f) + R_l^y(f) - R_l^y(R_k^x(f))$$

Звідси, подібно до того, як у пп. 3 та 4, приходимо до висновку:

Коли відношення (29) є обмежені в обсягу S , то функція Z має в тому обсягу похідну $\frac{\partial^{k+1}z}{\partial x^k \partial y^l}$ і ця похідна є суцільна.

Розуміється, тут замість вимоги (29) можна булоб поставити слабші вимоги (як у пп. 7 та 8); ми на цьому не спиняємося, так само, як на випадку функцій від більшого числа змінних.

12. Із (6), з допомогою нерівності Cauchy, виводимо:

$$\begin{aligned} |R_k(x, \Delta x)|^2 &\leq \sum_{i=0}^{n-k} \left[\frac{(x-i+1\Delta x) \dots (x-i+k\Delta x)}{1 \cdot 2 \dots k} \right]^2 \Delta x \\ \sum_{i=0}^{n-k} \left(\frac{\Delta^{k+1} y_i}{\Delta x^{k+1}} \right)^2 \Delta x &\leq \frac{x^{2k+2}}{(1 \cdot 2 \dots k)^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{\Delta^{k+1} y_i}{\Delta x^{k+1}} \right)^2, \end{aligned}$$

звідки

$$|R_k(x, \Delta x)| \leq \frac{|x|^{k+1}}{1 \cdot 2 \dots k} \delta_{k+1},$$

де

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\Delta^1 y_i}{\Delta x^1} \right)^2}.$$

Отже: достатня умова існування похідної $\left(\frac{dy^k}{dx^k} \right)_0$ є обмеженість величини δ_{k+1} на інтервалі (1), або середнього квадрату величини $\frac{\Delta^{k+1} y}{\Delta x^{k+1}}$.

Так само, застосовуючи відому Hölder'ову нерівність, покажемо, що достатня умова існування k -ої похідної в точці $x=0$ є обмеженість величини

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-k} \left(\frac{\Delta^{k+1} y_i}{\Delta x^{k+1}} \right)^{\frac{p}{p+1}} \right]^{\frac{p}{p+1}},$$

де p є довільне додатне число.

Подібнoж узагальнюються й висліди §-ів 5—8.

=====