АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНЫХ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи
УДК 539.3

ТРИЩ
БОГДАН МИХАЙЛОВИЧ

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ КОНЕЧНЫХ ПЛАСТИН С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Специальность 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Львов - 1991

Работа выполнена на кафедре высшей математики Львовского государственного университета им.И.Франко

Научный руководитель: член-корреспондент АН УССР, доктор физико-математических наук, профессор Я.И.БУРАК

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Ю.Н.НЕМИШ

доктор физико-математических наук В.М.ВИГАК

Ведущая организация: Белорусский государственный университет

Защита состоится "20" мая 1991 г. в 15^{00} часов на заседании специализированного совета К 016.59.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических и кандидата технических наук при Институте прикладных проблем механики и математики АН УССР /г.Львов, ул. Научная, 3-б/.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладных проблем механики и математики АН УССР /г. Львов, ул. Научная, 3-б/.

Отзыв на автореферат просим направлять по адресу: 290053, ГСП, г.Львов, ул. Научная, 3-б, ученому секретарю специализированного совета.

Автореферат разослан "19" апреля 1991 г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
кандидат физико-математических наук П.Р.ШЕВЧУК

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. В современной технике в качестве элементов конструкций широко используются пластинки с отверстиями различной формы. При их высокоградиентном нагреве, в частности, в процессе изготовления и термообработки, возникающие температурные напряжения могут достигать значительной величины в окрестности отверстий и существенно влиять на параметры прочности и надежности.

Поэтому представляется весьма актуальной постановка и решение задач оптимизации напряженно-деформированного состояния для таких пластинчатых элементов конструкций и разработка на этой основе рациональных тепловых режимов их нагрева.

Различным аспектам проблемы оптимизации термоупругих тел посвящены работы Н.В.Баничука, Л.П.Бесединой, С.Ф.Будза, Я.И.Бурака, В.М.Вигака, Э.И.Григолюка, Ю.Д.Зозуляка, В.Г.Литвинова, В.Н.Максимовича, Ю.И.Няшина, И.В.Огирко, Я.С.Подстригача, Г.Б.Пляцко, Я.П.Романчука, В.С.Саркисяна, О.Н.Шаблия и др. В то же время, в литературе практически отсутствуют целевые исследования по вопросам оптимизации термоупругих конечных пластин с отверстиями.

Разработке эффективных методов решения задач термоупругости для двухсвязных областей с использованием методов теории функций комплексного переменного посвящены работы Д.В.Грилицкого, Н.Н.Лебедева, Т.Л.Мартиновича, Н.И.Мусхелишвили, И.А.Прусова, Г.Н.Савина, Н.П.Флейшмана, М.П.Шереметьева и др.

При решении плоских задач термоупругости для областей сложной конфигурации в литературе используются различные варианты метода возмущения формы границы. Он дает возможность свести исходную задачу к рекуррентной последовательности соответствующих задач для областей канонической формы. Результаты этих исследований изложены в монографиях А.Н.Гузя, Ю.Н.Немиша, А.И.Уздалева и работах других авторов.

Следует подчеркнуть, что в литературе метод возмущения формы границы, в основном, применяется к решению плоских задач термоупругости для областей с границами, близкими к окружностям.

Настоящая работа посвящена разработке методики аналитического решения задач оптимизации термоупругих конечных пластин с отверстиями канонической и сложной конфигурации с использованием функций комплексного переменного и метода возмущения формы границы.

Целью работы является:

- математическая постановка и разработка методики аналитического решения задач оптимизации термонапряженного состояния тонких конечных пластин с отверстиями;
- построение решения для двухсвязных областей канонической формы;
- применение метода возмущения формы границы к построению оптимальных решений для двухсвязных областей сложной конфигурации.

Научная новизна исследований состоит в следующем:

- сформулирована постановка и разработана методика решения нового класса задач оптимизации напряженно-деформированного состояния тонких конечных пластин с отверстиями за счет оптимального выбора температуры внешней среды и источников нагрева при заданных ограничениях на энергию формоизменения;
- исходная задача оптимизации сформулирована с использованием функций комплексного переменного, что позволило разработать эффективную методику её решения;
- построены и исследованы решения экстремальных задач для двухсвязных областей канонической формы, ограниченных окружностями, эллипсами, равносторонними треугольниками и квадратами с закругленными углами;
- предложена методика решения экстремальных задач для двухсвязных областей близких к заданным, в частности, близких к каноническим, основанная на применении метода возмущения формы границы. В качестве канонических областей рассматривались круговое концентрическое и конфокальное эллиптическое кольца.

Достоверность полученных результатов базируется на:

- использовании апробированных в литературе исходных положений и соотношений теории теплопроводности и термоупругости тонких пластин;
- строгости применяемых математических методов решения задач;
- совпадении отдельных результатов расчетов с результатами, полученными другими авторами.

Практическая ценность. Предложенная в работе методика решения задач оптимизации термоупругого состояния конечных пластин с отверстиями и полученные конкретные результаты исследований могут быть использованы при построении инженерной методики различных видов упрочняющей термообработки тонкостенных элементов конструкций. Отдельные прикладные результаты переданы ЛуАЗ /г.Луцк/ и использованы при отработке технологических мероприятий для уменьшения формоизменения сварных элементов.

Апробация работы. Основные положения и отдельные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на ежегодных конференциях профессорско-преподавательского состава Львовского госуниверситета /1979г.-1990 г./, на конференциях молодых учёных ИППММ АН УССР /1982 г.,1984 г./, Второй Всесоюзной конференции по теории упругости /Тбилиси, 1984 г./, Шестой Всесоюзной конференции по управлению в механических системах /Львов, 1988 г./, конференции "Разрывные динамические системы" /Ивано-Франковск, 1990 г./.

Диссертационная работа в целом обсуждалась на научном семинаре отдела теории физико-механических полей и специализированном семинаре по механике деформируемого твердого тела ИППММ АН УССР.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы отражены в 8 статьях и тезисах докладов конференций.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключени, списка литературы и приложения. Она содержит 160 страниц текста, в том числе 4 рисунка, 8 таблиц, библиографический список, включающий 127 наименований литературных источников советских и зарубежных авторов, 1 страницу приложения.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована важность и актуальность вопросов, решению которых посвящена диссертация. Приведен краткий обзор работ по выбранной теме. Сформулирована цель работы, научная новизна, а также основные научные результаты, которые выносятся на защиту. Дано краткое содержание всех глав диссертации.

В первой главе сформулирована математическая постановка и изложена методика решения задачи об оптимизации напряженного состояния тонких пластин с отверстиями при их нагреве.

Рассматривается тонкая изотропная пластинка, срединная плоскость $D(\Gamma_1,\Gamma_2)$ которой отнесена к прямоугольной системе координат XOY и ограничена двумя замкнутыми гладкими кривыми Γ_1 и Γ_2. Пластинка нагревается источниками тепла плотностью ω. На основаниях $z=\pm h$ имеет место конвективный теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, температура которой T_c, а на боковых поверхностях заданы тепловые условия первого рода. В дальнейшем принимается, что распределение источников тепла и температуры внешней среды является таким, что температурное поле пластинки $\theta(x,y,z,\tau)$ симметрично относительно срединной плоскости и имеет место достаточный прогрев пластины по толщине. В качестве исходного принимается усредненное по толщине уравнение теплопроводности

$$\Delta T-\varkappa^2(T-T_c)=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial\tau}-\frac{W}{\lambda} \qquad /1/$$

при граничных условиях

$$T(x,y,\tau)\big|_{\Gamma_j}=T_j(x,y,\tau)\ ,\ j=1,2\ ;\quad T(x,y,0)=0. \qquad /2/$$

Здесь

$$T=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\theta\,dz\ ,\quad W=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\omega\,dz\,.$$

В общем случае, к основаниям и боковым поверхностям пластины может быть приложена внешняя силовая нагрузка, удовлетворяющая условиям плоской задачи.

Ставится задача об определении таких функций нагрева W либо T_c, которые обеспечивают условия упругого деформирования пластинки при низком уровне энергии формоизменения.

В связи с необходимостью обеспечения условий упругого деформирования, ставятся следующее ограничение на компоненты тензора напряжений σ_x, σ_y, σ_{xy}:

$$0\le\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\sigma_{xy}^2\le\beta\sigma_T^2\ ,\quad \beta\in(0;1)\,. \qquad /3/$$

В качестве функционального критерия оптимизации принимается функционал энергии формоизменения пластины

$$K=\frac{2(1+\nu)h}{3E}\iint_D\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\sigma_{xy}^2\right)dx\,dy\,. \qquad /4/$$

В рассматриваемой квазистатической постановке, сформулированная задача оптимизации сводится к определению температурного поля T и соответствующих компонент тензора напряжений σ_x, σ_y, σ_{xy}, удовлетворяющих ограничению /3/, уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \qquad /5/$$

и совместности деформации

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) + E\alpha_T \Delta T = 0 \qquad /6/$$

с граничными условиями на Γ_j / j = I, 2 /

$$\sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \sigma_{xy} \sin 2\alpha = \sigma_n^{(j)}$$
$$\sigma_{xy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha = \sigma_\tau^{(j)}, \qquad /7/$$

на которых функционал энергии формоизменения пластины /4/ принимает минимальное значение. Здесь $\sigma_n^{(j)}$, $\sigma_\tau^{(j)}$ - заданные, соответственно, нормальная и касательная компоненты вектора внешних усилий на Γ_j ; α - угол, образованный внешней нормалью к Γ_j с положительным направлением оси OX.

Температурное поле T и компоненты тензора напряжений σ_x, σ_y, σ_{xy} представляются через функцию $F(z,\bar z)$ и произвольные аналитические в области $\mathcal{D}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ следующим образом

$$T = \frac{\partial^2 F(z,\bar z)}{\partial z \partial \bar z};$$

$$\sigma_x = \mathrm{Re}\left[2\Phi(z) - \bar z \Phi'(z) - \Psi(z) - \frac{E\alpha_T}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\right];$$

$$\sigma_y = \mathrm{Re}\left[2\Phi(z) + \bar z \Phi'(z) + \Psi(z) - \frac{E\alpha_T}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\right]; \qquad /8/$$

$$\sigma_{xy} = \mathrm{Im}\left[\bar z \Phi'(z) + \Psi(z) - \frac{E\alpha_T}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right].$$

Отметим, что при представлении /8/, уравнения равновесия /5/ и совместности деформации /6/ удовлетворяются тождественно.

В связи с нестационарностью нагрева, функции $F(z,\bar z)$, $\Phi(z)$ $\Psi(z)$ и компоненты тензора напряжений σ_x, σ_y, σ_{xy} зависят параметрически от времени τ .

С учетом представлений /8/, уравнение теплопроводности /I/, ограничение /3/, функционал /4/ и граничные условия /2/, /7/ записаны в виде

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} - \left(\varkappa^2 + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} + \varkappa^2 T_c + \frac{W}{\lambda} = 0 ; \qquad /9/$$

$$0 \le 3\left(\bar{z}\,\phi'(z) + \Psi(z) - \frac{E \alpha_T}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(z\,\overline{\phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} - \frac{E \alpha_T}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}^2}\right) +$$

$$+ \left(\phi(z) + \overline{\phi(z)} - \frac{E \alpha_T}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}}\right)^2 \le \beta\, \sigma_T^2 \quad ; \qquad /10/$$

$$K = \frac{2(1+\nu)h}{3E} \iint\limits_{\mathcal{D}} \Big[\left(\phi(z) + \overline{\phi(z)} - \frac{E \alpha_T}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} \right)^2 +$$

$$+ 3\left(\bar{z}\,\phi'(z) + \Psi(z) - \frac{E \alpha_T}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(z\,\overline{\phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} - \frac{E \alpha_T}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}^2}\right)\Big] dx\,dy; \qquad /11/$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \bar{t}} = T_j(t, \bar{t}) \quad , \quad t \in \Gamma_j \quad ; \qquad /12/$$

$$\phi(t) + \overline{\phi(t)} - \frac{E \alpha_T}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \bar{t}} - e^{2i\alpha}\left[\bar{t}\,\phi'(t) + \Psi(t) - \frac{E \alpha_T}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right] =$$

$$= \sigma_n^{(j)}(t, \bar{t}) - i\, \sigma_\tau^{(j)}(t, \bar{t}) \quad , \quad t \in \Gamma_j \, . \qquad /13/$$

Таким образом, с использованием функций комплексного переменного, исходная задача оптимизации /I/ - /7/ сведена к задаче на условный экстремум функционала /II/, которая формулируется следующим образом:

определить функции $F(z,\bar{z})$, $\phi(z)$, $\Psi(z)$, которые обеспечивают минимальное значение функционала /II/, удовлетворяют уравнению теплопроводности /9/, ограничению /I0/ в области $\mathcal{D}(\Gamma_1, \Gamma_2)$ и условиям /I2/,/I3/ на ее границах.

Показано, что множество функций (F, ϕ, Ψ) , удовлетворяющих условиям /9/, /I0/,/I2/,/I3/, а также функционал /II/ являются выпуклыми. Доказана единственность решения сформулированной задачи.

Ограничение в виде неравенства /I0/ представлено следующим образом:

$$3\left(\bar{z}\,\varphi'(z)+\Psi(z)-\frac{E\alpha_T}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(z\,\overline{\varphi'(z)}+\overline{\Psi(z)}-\frac{E\alpha_T}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}^2}\right)+$$

$$+\left(\varphi(z)+\overline{\varphi(z)}-\frac{E\alpha_T}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial\bar{z}}\right)^2-\frac{\beta\sigma_T^2}{2}\left(1+\sin p(z,\bar{z})\right)=0. \qquad /I4/$$

Здесь $p(z,\bar{z})$ - новая допустимая функция, которая удовлетворяет условию $-\frac{\pi}{2}\le p(z,\bar{z})\le\frac{\pi}{2}$.

С использованием множителей Лагранжа, задача об определении экстремалей функционала /II/ при условиях /9/,/I2/ - /I4/ сведена к минимизации функционала

$$K^*[F,\varphi,\Psi,p]=\frac{2(1+\nu)h}{3E}\iint_{\mathcal{D}}\Big\{\left(1+\lambda_1(z,\bar{z})\right)\Big[\left(\varphi(z)+\overline{\varphi(z)}-\frac{E\alpha_T}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial\bar{z}}\right)^2+$$

$$+3\left(\bar{z}\,\varphi'(z)+\Psi(z)-\frac{E\alpha_T}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(z\,\overline{\varphi'(z)}+\overline{\Psi(z)}-\frac{E\alpha_T}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial\bar{z}^2}\right)-$$

$$-\lambda_1(z,\bar{z})\frac{\beta\sigma_T^2}{2}\left(1+\sin p(z,\bar{z})\right)+\lambda_2(z,\bar{z})\Big[\frac{\partial^4 F}{\partial z^2\partial\bar{z}^2}-$$

$$-\left(\varkappa^2+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial\bar{z}}+\varkappa^2 T_c+\frac{W}{\lambda}\Big]\Big\}\,dx\,dy. \qquad /I5/$$

С учетом необходимых условий экстремума функционала /I5/, для определения искомых функций $F(z,\bar{z}),\varphi(z),\Psi(z),p(z,\bar{z}),T_c,W$ имеем следующую систему уравнений:

- в области $\mathcal{D}(\Gamma_1,\Gamma_2)$

$$\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}\left[\left(1+\lambda_1(z,\bar{z})\right)\left(\bar{z}\,\varphi'(z)+\Psi(z)-\frac{E\alpha_T}{2}\frac{\partial^2 F(z,\bar{z})}{\partial z^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\left(1+\lambda_1(z,\bar{z})\right)\left(z\,\overline{\varphi'(z)}+\overline{\Psi(z)}-\frac{E\alpha_T}{2}\frac{\partial^2 F(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}^2}\right)\right]+ \qquad /I6/$$

$$+\frac{2}{3}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\left[\left(1+\lambda_1(z,\bar{z})\right)\left(\varphi(z)+\overline{\varphi(z)}-\frac{E\alpha_T}{2}\frac{\partial^2 F(z,\bar{z})}{\partial z\partial\bar{z}}\right)\right]=0\,;$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} - \left(x^2 + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} + x^2 T_c + \frac{W}{\lambda} = 0 ;$$

$$\lambda_1(z,\bar{z}) \cos \rho(z,\bar{z}) = 0 ; \quad \lambda_2(z,\bar{z}) \equiv 0 . \qquad /I7/$$

- на границах Γ_j $/ j = I,2/$

$$\operatorname{Im}\left[\lambda_1(t,\bar{t})\left(\bar{t}\,\phi'(t) + \Psi(t) - \frac{E d_T}{2}\frac{\partial^2 F(t,\bar{t})}{\partial t^2}\right)\right] = 0 ;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \bar{t}} = T_j(t,\bar{t}) \qquad t \in \Gamma_j ; \qquad /I8/$$

$$\phi(t) + \overline{\phi(t)} - \frac{E d_T}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \bar{t}} - e^{2i\alpha}\left[\bar{t}\,\phi'(t) + \Psi(t) - \frac{E d_T}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right] =$$
$$= \sigma_n^{(j)}(t,\bar{t}) - i\,\sigma_\tau^{(j)}(t,\bar{t}) , \quad t \in \Gamma_j .$$

Для определения оптимального температурного поля T и компонент напряжений σ_x , σ_y , σ_{xy} , к полученым условиям оптимальности /I6/-/I8/ необходимо присоединить соотношения /8/.

В дальнейшем, в работе рассматривается решение задачи оптимизации в предположении, что компоненты напряжений σ_x , σ_y, σ_{xy} строго удовлетворяют ограничение /3/. В этом случае из /I6/,/I7/ получено, что

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0$$

и решение задачи оптимизации сведено к нахождению аналитических в $D(\Gamma_1,\Gamma_2)$ функций $f(z)$, $\phi(z)$, $\Psi(z)$, которые определяются из граничных условий

$$f(t) + \overline{f(t)} = 2\,T_j(t,\bar{t}) , \quad t \in \Gamma_j ; \qquad /I9/$$

$$\phi(t) + \overline{\phi(t)} - e^{2i\alpha}\left[\bar{t}\,\phi'(t) + \Psi(t)\right] = \sigma_n^{(j)}(t,\bar{t}) - i\,\sigma_\tau^{(j)}(t,\bar{t}) -$$
$$- \frac{E d_T}{4}\left(f(t) + \overline{f(t)} - e^{2i\alpha}\,\bar{t}\,f'(t)\right), \quad t \in \Gamma_j . \qquad /20/$$

При этом искомые функции управления W , T_c , соответствующие им температурное поле T и компоненты тензора напряжений определяются соотношениями

$$x^2 T_c + \frac{W}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left(f(z,\tau) + \overline{f(z,\tau)}\right) ; \qquad /2I/$$

$$T(z,\bar{z}) = \operatorname{Re} f(z) ; \qquad /22/$$

$$\sigma_x = Re\left[2\Phi(z) - \bar{z}\Phi'(z) - \Psi(z) - \frac{E\alpha_T}{4}\left(f(z) + \overline{f(z)} - \bar{z}f'(z)\right)\right];$$

$$\sigma_y = Re\left[2\Phi(z) + \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) - \frac{E\alpha_T}{4}\left(f(z) + \overline{f(z)} + \bar{z}f'(z)\right)\right];$$

$$\sigma_{xy} = Jm\left[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) - \frac{E\alpha_T}{4}\bar{z}f'(z)\right]. \qquad /23/$$

Следует подчеркнуть, что оптимальным условиям нагрева соответствует множество функций нагрева W и T_c, связанных соотношением /2I/, что может быть использовано при построении рациональных режимов нагрева.

Во второй главе определены оптимальные условия нагрева, температурные поля и напряжения в канонических двухсвязных областях. В качестве канонических рассмотрены такие области, на которые конформно отображается круговое концентрическое кольцо $1 \le |\zeta| \le R$ с помощью функции

$$z = R^*(\zeta + \alpha\zeta^{-n}), \quad n \in N, \quad z, \zeta \in C. \qquad /24/$$

В частности, при n = I,2,3 получаются, соответственно, области, ограниченные конфокальными эллипсами, соосными равносторонними треугольниками и квадратами с заокругленными углами.

Решение граничных задач /I9/,/20/ строилось с использованием метода интегралов типа Коши и метода рядов. Определены оптимальные условия нагрева, температурные поля и напряжения в канонических областях. Более подробно исследованы оптимальные температурные поля и напряжения в канонических областях, при n = I,2,3. Приведены результаты численных исследований.

В качестве приложения полученных результатов приведено решение задачи о дополнительном подогреве предварительно нагретой кольцевой пластинки с целью оптимизации напряженного состояния. Найдено экстремальное распределение источников целевого дополнительного подогрева, соответствующие оптимальное температурное поле и напряжения. Результаты численных расчетов показали, что применение дополнительного подогрева приводит к существенному уменьшению температурных напряжений. В исследуемом конкретном примере максимальные сжимающие напряжения σ_θ уменьшились в 2,8 раза, а σ_ρ - в 2,5 раза.

<u>В третьей главе</u> приведена методика определения оптимальных условий нагрева, температурных полей и напряжений в областях сложной формы, близких к заданным.

Область $\mathcal{D}(\Gamma_1,\Gamma_2)$ назовем близкой к заданной области $\mathcal{D}(\Gamma_1^\circ,\Gamma_2^\circ)$ если функция, конформно отображающая круговое кольцо $1\le|\zeta|\le R$ на $\mathcal{D}(\Gamma_1,\Gamma_2)$ имеет вид

$$z=\omega(\zeta,\varepsilon)=\omega_0(\zeta)+\varepsilon\,\eta(\zeta). \qquad /25/$$

Здесь $\omega_0(\zeta)$ - функция, конформно отображающая круговое кольцо $1\le|\zeta|\le R$ на область $\mathcal{D}(\Gamma_1^\circ,\Gamma_2^\circ)$; функция $\eta(\zeta)$ и малый параметр ε характеризуют отклонение области $\mathcal{D}(\Gamma_1,\Gamma_2)$ от $\mathcal{D}(\Gamma_1^\circ,\Gamma_2^\circ)$, причем

$$|\eta(\zeta)|\le 1,\ |\eta'(\zeta)|\le 1,\ |\eta''(\zeta)|\le 1 \quad \text{при } 1\le|\zeta|\le R. \qquad /26/$$

Пусть $G(t)=(f(t),\varphi(t),\Psi(t))$ - вектор, компонентами которого являются функции, аналитические в области $\mathcal{D}(\Gamma_1,\Gamma_2)$, удовлетворяющие граничным условиям /19/,/20/. Здесь $t=\omega_0(\sigma)+\varepsilon\,\eta(\sigma)$ $t\in\Gamma_j$, j = 1,2. Следуя методу возмущения формы границы, граничное значение функции $G(t)=G(\omega_0(\sigma)+\varepsilon\,\eta(\sigma))$ и ее производной $G'(t)$ представлены в виде рядов по степеням малого параметра

$$G(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\sum_{k=0}^{n}L^{(k)}G_{n-k}(\omega_0(\sigma)); \qquad /27/$$

$$G'(t)=\frac{1}{\omega_0'(\sigma)}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}(-\eta'(\sigma))^{n-m}\mathcal{L}^{(m-k)}G_k(\omega_0(\sigma)).$$

Здесь дифференциальные операторы $L^{(k)}$ и $\mathcal{L}^{(k)}$ имеют вид

$$L^{(k)}=\frac{1}{k!}\eta^k(\sigma)\frac{d^k}{dt^k}\Big|_{\varepsilon=0};\quad \mathcal{L}^{(0)}=\frac{d}{dt}\Big|_{\varepsilon=0},$$

$$\mathcal{L}^{(k)}=\frac{1}{(k-1)!}\eta^{k-1}(\sigma)\,\eta'(\sigma)\frac{d^k}{dt^k}\Big|_{\varepsilon=0}+\frac{1}{k!}\eta^k(\sigma)\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\Big|_{\varepsilon=0},\ k\ge 1. \qquad /28/$$

Используя представление /27/ и разложение функций $e^{2i\alpha}$, $T_j(t,\bar t)$, $\sigma_n^{(j)}(t,\bar t)-i\,\sigma_\tau^{(j)}(t,\bar t)$ в ряды по степеням малого параметра ε, решение исходных граничных задач /19/,/20/, т.е. определение функций $f(z)$, $\varphi(z)$, $\Psi(z)$, аналитических в области $\mathcal{D}(\Gamma_1,\Gamma_2)$, сведено к решению последовательности граничных задач для определения функций $f_n(z)$, $\varphi_n(z)$, $\Psi_n(z)$, аналитических в области $\mathcal{D}(\Gamma_1^\circ,\Gamma_2^\circ)$. При этом, соответствующие /19/,/20/

граничные условия для определения функций $f_n(z)=f_n(\omega_0(\zeta))\equiv f_n^{*}(\zeta)$,

$$\Phi_n(z)=\Phi_n(\omega_0(\zeta))\equiv\Phi_n(\zeta)\ ,\ \Psi_n(z)=\Psi_n(\omega_0(\zeta))\equiv\Psi_n(\zeta)$$

имеют вид

$$f_0(\sigma)+\overline{f_0(\sigma)}=2T_j^{(0)}(\sigma)\ ,\qquad /29/$$

$$f_n(\sigma)+\overline{f_n(\sigma)}=2T_j^{(n)}(\sigma)-2\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n-1}L^{(n-k)}f_k(\sigma);$$

$$\Phi(\zeta)+\overline{\Phi(\zeta)}-\frac{e^{2i\alpha}\omega_0'(\zeta)}{\overline{\omega_0'(\zeta)}}\left[\frac{\overline{\omega_0(\zeta)}}{\omega_0'(\zeta)}\Phi_n'(\zeta)+\Psi_n(\zeta)\right]=$$

$$=\begin{cases}Q_n^{(1)}(\zeta) & \text{при}\quad |\zeta|=1\\ Q_n^{(2)}(\zeta) & \text{при}\quad |\zeta|=R\end{cases}\qquad /30/$$

Здесь

$$Q_0^{(j)}(\zeta)=\sigma_{n,0}^{(j)}(\zeta)-i\sigma_\tau^{(j)}(\zeta)+\frac{Ed_T}{2}\left[\operatorname{Re}f_0(\zeta)-\frac{e^{2i\theta}\overline{\omega_0(\zeta)}}{\omega_0'(\zeta)}\operatorname{Re}f_0'(\zeta)\right];$$

$$Q_n^{(j)}(\zeta)=\sigma_{n,n}^{(j)}(\zeta)-i\sigma_{\tau,n}^{(j)}(\zeta)+\frac{Ed_T}{2}\left[\operatorname{Re}f_n(\zeta)-\frac{e^{2i\alpha}\overline{\omega_0(\zeta)}}{\omega_0'(\zeta)}\operatorname{Re}f_n'(\zeta)-\right.$$

$$\left.-\frac{e^{2i\theta}}{\overline{\omega_0'(\zeta)}}\sum_{k=0}^{n-1}A_{n-k-1}(\zeta)\overline{\eta(\zeta)}\operatorname{Re}f_k'(\zeta)\right]-2\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n-1}L^{(n-k)}\Phi_k(\zeta)-$$

$$-\frac{e^{2i\theta}\omega_0'(\zeta)}{\overline{\omega_0'(\zeta)}}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{k}\left[A_{n-k}(\zeta)L^{(k-p)}\Psi_p(\zeta)+\left(\overline{\omega_0(\zeta)}+\overline{\eta(\zeta)}\right)\sum_{m=0}^{p}\left(-\eta'(\zeta)\right)^{k-p}\chi^{(p-m)}\Phi_m(\zeta)\right].$$

Для количественной оценки эффективности использования метода возмущения формы границы при решении задач оптимизации, в качестве модельных, решены задачи для областей, ограниченных конфокальными эллипсами, соосными равносторонними треугольниками и квадратами с закругленными углами. При этом, в качестве канонической выбрано круговое концентрическое кольцо $1\le|\zeta|\le R$. Показано, что с достаточной для практических расчетов точностью в полученном решении можно ограничиться третьим приближением.

Методом возмущения формы границы решена задача об определении оптимальных условий нагрева, температурных полей и напряжений в области $\mathcal{D}(\Gamma_1,\Gamma_2)$, ограниченной соосными равнобедренными треугольниками с заокругленными углами. Здесь в качестве канонической принята область в виде конфокального эллиптического кольца. Решение построено в третьем приближении. Результаты проведенных численных расчетов подтверждают достаточно хорошую сходимость решения, построенного с применением метода возмущения формы границы.

<u>В заключении</u> приведены основные результаты и выводы:

I. Предложена математическая постановка нового класса задач оптимизации напряженно-деформированного состояния тонких конечных пластин с отверстиями при их нагреве. В качестве функций управления принята температура внешней среды либо распределение источников тепла. Доказана единственность решения задачи оптимизации при заданном в виде неравенства ограничении на энергию формоизменения пластины.

2. Исходная задача оптимизации сформулирована с использованием функций комплексного переменного, что позволило разработать эффективную методику ее решения. Получена полная система уравнений для определения искомых функций оптимального нагрева и соответствующих им температурных полей и напряжений. Показано, что в случае, когда заданное в виде неравенства ограничение на энергию формоизменения пластины выполняется строго, построение экстремального решения сводится к нахождению трех разрешающих аналитических функций из соответствующих граничных условий. Получено представление функций нагрева, температурных полей и напряжений через указанные функции.

3. Построены и исследованы решения экстремальных задач для двухсвязных канонических областей, ограниченных концентрическими окружностями, конфокальными эллипсами, соосными равносторонними треугольниками и квадратами с заокругленными углами.

4. Найдено решение задачи о дополнительном подогреве предварительно нагретой кольцевой пластинки с целью оптимизации напряженного состояния. Проведенные расчеты показали, что применение оптимального дополнительного подогрева позволяет существенно понизить уровень температурных напряжений.

5. Предложена методика решения экстремальных задач для двухсвязных областей, близких к заданным, в частности, близких к каноническим, основанная на применении метода возмущения формы границы.

6. Дана количественная оценка сходимости решения задачи оптимизации, построенного с использованием метода возмущения формы границы. В качестве тестовых, рассмотрены задачи для конфокального эллиптического кольца и областей, ограниченных соосными равносторонними треугольниками и квадратами с заокругленными углами. В качестве канонической области принято круговое концентрическое кольцо. Показано, что с достаточной для практических расчетов точностью можно ограничиться решением в третьем приближении.

7. Решена задача об определении оптимальных условий нагрева, температурных полей и напряжений в области, ограниченной соосными равнобедренными треугольниками с заокругленными углами. В качестве канонической области принято конфокальное эллиптическое кольцо. Результаты проведенных численных расчетов подтверждают достаточно хорошую сходимость построенного решения.

<u>В приложении</u> приведен акт об использовании прикладных результатов исследований.

Основные положения и результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Трищ Б.М. Применение функций комплексного переменного к оптимизации решений плоской задачи термоупругости /Восьмая конф. молодых ученых ИППММ АН УССР. Львов, май I98I. Секц. математики и мат. методов.- Львов, I982.- С.77-80. Рук. деп. в ВИНИТИ 22.07.82, № 3942-82 Деп.

2. Трищ Б.М. Задача теплопроводности для двухсвязной пластины сложного очертания /Десятая конф. молодых ученых ИППММ АН УССР. Львов, I5-I7 мая I984г., ч.I, С.I86-I90. Рук деп. в ВИНИТИ I0.II.84 № 7I96-84 Деп.

3. Бурак Я.И., Романчук Я.П., Трищ Б.М. Применение функций комплексного переменного в задаче оптимизации напряженного состояния двухсвязных пластин //II Всесоюзная конференция по теории упругости, Тбилиси, 8-I0 дек. I984 г.: Тез. докл. - Тбилиси, I984.- С.42-43.

4. Бурак Я.И., Романчук Я.П., Трищ Б.М. Оптимизация температурных полей и напряжений в двухсвязных пластинах // Прикл. механика. - 1986. -22, № 1. - С.68-73.
5. Трищ Б.М. Определение напряжений в эллиптическом кольце/ Львов. ун-т.- Львов, 1986. - 16 с. - Деп. в УкрНИИНТИ 18.08.86 № 1920 - Ук86.
6. Трищ Б.М. Оптимизация нагрева двухсвязных термоупругих пластин с использованием функций комплексного переменного // Шестая Всесоюз. конф. по управлению в механич. системах, Львов, 26-28 апр. 1988 г.: Тез. докл. - Львов, 1988. -С.149.
7. Бурак Я.И., Романчук Я.П., Трищ Б.М. Постановка и решение задач оптимизации напряженного состояния пластин с использованием функций комплексного переменного / Львов. ун-т. - Львов, 1988. - 20 с. - Деп. в УкрНИИНТИ 22.06.88 № 1585-Ук88.
8. Трищ Б.М. Применение метода возмущения формы границы к оптимизации напряженного состояния двухсвязных пластин //Респ. конф. "Разрывные динамические системы", Ивано-Франковск, 11-14 сент. 1990 г.: Тез. докл. - Киев, 1990. - С.45-46.

Подписано к печ. I5.04.9Iг. Формат 60х84/I6. Печ. офсетн.
Бум. писчая. Усл.п.л. 0,95. Усл. кр.-от I,I7. Тираж I00 экз.
Бесплатно. Заказ 2393.

Областная книжная типография, 290000, Львов, ул. Стефаника, II