АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

На правах рукописи

ЕРШОВ Николай Егорович

УДК 519.642

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА УПРУГОМ ТЕЛЕ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

01.01.07 - Вычислительная математика

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск - 1991

Работа выполнена в Вычислительном центре Дальневосточного отделения Академии наук СССР

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
С.И. СМАГИН

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор С.М.Белоносов
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
В.В.Воронин

Ведущая организация: Институт математики СО АН СССР

Защита состоится "5" июня 1991 г.
в 14 30 часов на заседании специализированного совета К 002.10.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при Вычислительном центре СО АН СССР по адресу: 630090, г. Новосибирск - 90, проспект акад. М.А. Лаврентьева, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отделения ГПНТБ (проспект акад. М.А. Лаврентьева, 6).

Автореферат разослан "8" апреля 1991 г.

Ученый секретарь
Специализованного совета
кандидат физико-математических наук Ю.И.Кузнецов

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Трехмерные задачи дифракции математической теории упругости и акустики представляют большой интерес для многих областей науки и техники, например, таких, как геофизика, акустика океана и атмосферы, дефектоскопия. Они характеризуются векторным характером решений, наличием разрывов первого рода у параметров сред, их зависимостью от трех пространственных переменных и необходимостью учета условий излучения на бесконечности. В силу того, что дифрагированное поле в этих задачах может медленно убывать с расстоянием, а его длина волны быть соизмеримой с размерами неоднородности, хорошо развитые разностные и асимптотические методы редко бывают эффективными при их решении.

Методы интегральных уравнений представляют собой надежный и гибкий математический аппарат, способствующий успешному решению проблем, возникающих в задачах дифракции. Они позволяют сводить исходные дифференциальные задачи дифракции в неограниченных областях к системам интегральных уравнений (СИУ) по компактным границам включений, имеющим меньшую размерность.

Важной проблемой при таком подходе является разработка и реализация эффективных численных методов решения интегральных уравнений по замкнутым многообразиям. В данной работе предлагается сравнительно простой метод решения СИУ, который позволяет решать пространственные задачи математической теории упругости и акустики.

Работы, положенные в основу диссертации, выполнены в соответствии с планом научно-исследовательских работ Вычислительного центра ДВО АН СССР, регистрационный номер НИР 01.86. 0112375.

Цель работы состоит в получении и исследовании удобных для численного решения СИУ исходной задачи дифракции; разработке численного метода решения полученной СИУ; проведении математического моделирования акустических колебаний в слоистых средах с трехмерными упругими включениями.

Методика исследования. Для получения интегральных уравнений применялся метод потенциалов. Теоретическое изучение полученной СИУ основывалось на теории многомерных сингулярных интегральных уравнений и методах исследования краевых и дифракционных задач математической физики.

При численном решении интегральных уравнений использовались элементы дифференциальной геометрии. Неизвестные плотности потенциалов простого слоя аппроксимировались при помощи гладких финитных функций, образующих разбиение единицы на поверхности включения. Для расчета коэффициентов полученной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и отыскания ее решения применялись теории аналитических функций и приближенного вычисления интегралов, методы асимптотических оценок и линейной алгебры.

Научная новизна и теоретическая ценность работы состоят в следующем:

I. Получены и исследованы удобные для численного решения сингулярные интегральные уравнения трехмерной стационарной задачи дифракции акустических волн в слоистой среде на упругом включении.

2. Разработан и реализован на ЭВМ в виде программного комплекса численный метод решения сингулярных интегральных уравнений, эквивалентных исходной задаче дифракции. Он может быть применен и для решения интегральных уравнений, к которым сводятся другие трехмерные краевые и дифракционные задачи эллиптического типа.

3. С помощью программного комплекса проведено тестирование алгоритма приближенного решения СИУ задачи дифракции и выполнено математическое моделирование акустических колебаний в слоистых средах с трехмерными упругими включениями.

Практическая ценность. Комплекс программ для ЭВМ, в котором реализованы разработанные алгоритмы, позволяет эффективно решать пространственные задачи дифракции акустических волн в слоистых средах с упругими включениями. Полученные результаты могут быть полезными при анализе поведения дифрагированных полей от упругих включений. Созданное программное обеспечение внедрено в практику исследования акустических полей в океане.

Аппробация работы. Результаты диссертации докладывались на Всесоюзных научных конференциях: "Классические и неклассические краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, специальные функции, интегральные уравнения и их приложения"(Куйбышев, 1987), "Математические модели и краевые задачи" (Куйбышев, 1988), "Математическое моделирование в геофизике" (Новосибирск, 1988), "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" (Харьков, 1989), "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики" (Новосибирск, 1990), "Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики" (Владивосток, 1990); на японо-советских симпозиумах по вычислительной аэрогидродинамике (Хабаровск, 1988; Цукуба, 1990), на 16 и 18 Дальневосточных математических школах-семинарах (Находка, 1986, 1988), на семинарах ВЦ ДВО АН СССР и отдела математических задач геофизики ВЦ СО АН СССР.

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 11 печатных работах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 87 наименований. Объем работы 130 страниц, в том числе 9 таблиц, 28 рисунков.

II. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обзор методов решения задач дифракции. Описана структура и краткое содержание диссертационной работы.

В первой главе приведена постановка трехмерной стационарной задачи дифракции акустических волн в горизонтально-однородной слоистой среде на упругом включении; получены и исследованы интегральные уравнения задачи дифракции.

В разделе 1.1 сформулирована исходная задача дифракции.

З а д а ч а . Найти заданные в $\mathcal{D}_i$ и $\mathcal{D}_e \setminus S_e$ комплекснозначные вектор-функции $\vec{u}_i$ и $\vec{u}_e$, удовлетворяющие уравнениям

$$\mu \Delta \vec{u}_i + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{u}_i) + \omega^2 \rho_i \vec{u}_i = 0, \ x \in \mathcal{D}_i, \quad (1)$$

$$\vec{u}_e = \vec{\nabla}\Phi, \ x \in \mathcal{D}_e \setminus S_e, \quad (2)$$

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0, \ x \in \mathcal{D}_e \setminus S_e, \quad (3)$$

$$[\rho\Phi] = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right] = 0, \ x \in S_e, \quad (4)$$

условиям излучения на бесконечности для Φ и условиям согласования на S

$$\vec{n}\vec{u}_i=\frac{\partial}{\partial n}(\Phi+\Phi_0),\ T^{(n)}\vec{u}_i=-\vec{n}\rho\omega^2(\Phi+\Phi_0). \quad (5)$$

Здесь D_i, D_e – внутренняя и внешняя области пространства R^3, разделенные замкнутой поверхностью S класса Гельдера $C^{m+\beta}$, $m+\beta>1$; $x=(x^1,x^2,x^3)$; $\vec{n}$ – внешняя нормаль к S; ω – круговая частота колебаний; λ, μ, ρ_i – константы Ламе и плотность включения; $k^2=\omega(\omega+i\gamma)/c^2$ – квадрат волнового числа, $\operatorname{Im} k\geqslant 0$; ρ, γ и c – кусочно-постоянные и кусочно-гладкая функции от x^3, описывающие распределение плотности, коэффициента поглощения и скорости звука в жидкости; S_e – объединение плоскостей разрывов ρ, γ и c, $S\cap S_e=\emptyset$; $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right)$, $\Delta=\nabla^2$; $\vec{u}_i$ и $\vec{u}_e$ – амплитуды полей смещений проходящих упругих и дифрагированных акустических волн; Φ и Φ_0 – потенциалы полей смещений дифрагированных и падающих акустических колебаний;

$$T^{(n)}\vec{u}_i\equiv 2\frac{\partial\vec{u}_i}{\partial n}+\lambda\vec{n}(\vec{\nabla}\vec{u}_i)+\mu\vec{n}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u}_i).$$

В разделе I.2 исходная задача дифракции сводится к СИУ. Решение задачи (I) – (5) ищется в виде

$$\vec{u}_i(x)=\int_S\hat{G}(x,y)\vec{\xi}(y)\,dS_y,\quad x\in D_i, \quad (6)$$

$$\Phi(x)=\int_S\Gamma(x,y)\nu(y)\,dS_y,\quad x\in D_e\setminus S_e,$$

где $\vec{\xi}=(\xi^1,\xi^2,\xi^3)$, ν – неизвестные поверхностные плотности вспомогательных источников, $\hat{G}$ и Γ – фундаментальные решения задач (I) и (3) – (4).

Переходом к пределам в (6) при $x\to S$ снаружи для Φ и изнутри для $\vec{u}_i$ и подстановкой их в соотношения (5) получается СИУ

$$\int\limits_S \vec{n}(x)\hat{G}(x,y)\vec{\xi}(y)\,dS_y + \nu(x) - \int\limits_S \frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial n_x}\nu(y)\,dS_y = \frac{\partial\Phi_0(x)}{\partial n},$$

$$\frac{1}{2}\vec{\xi}(x) + \int\limits_S T^{(n)}\hat{G}(x,y)\vec{\xi}(y) + \rho\omega^2\vec{n}(x)\times$$

$$\times\int\limits_S \Gamma(x,y)\nu(y)\,dS_y = -\rho\omega^2\vec{n}(x)\,\Phi_0(x),\ x\in S. \quad (7)$$

Система (7) в покомпонентной записи состоит из одного уравнения Фредгольма второго рода со слабыми особенностями в ядрах и трех сингулярных интегральных уравнений относительно четырех неизвестных функций ξ^1, ξ^2, ξ^3, ν.

В разделах I.3 и I.4 проводится исследование полученной СИУ. Анализ структуры интегральных уравнений позволяет сделать вывод о том, что индекс системы (7) равен нулю. С учетом этого факта методами теории потенциала доказывается теорема.

Т еорема I.I. Пусть ω не является собственной частотой задачи

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0,\ x\in D_i,\quad \Phi = 0,\ x\in S.$$

Тогда СИУ (7) однозначно разрешима при любой правой части

$$\Phi_0 \in C^{\ell+\alpha}(S),\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial n}\in C^{\ell-1+\alpha}(S),\ m+\beta>\ell+\alpha>1$$

в пространстве плотностей $\vec{\xi},\ \nu\in C^{\ell-1+\alpha}(S)$ и формулы (6) дают решение исходной задачи.

<u>В главе 2</u> рассматриваются основные аспекты применяемого численного метода решения исходной задачи дифракции. Аппроксимация системы (7) СЛАУ основана на использований идей метода τ - гладкого приближения функций многих переменных гладкими финитными функциями, образующими разбиение единицы и сглаживания ядер с особенностями при помощи функций ошибок. Метод достаточно просто реализуется на замкнутых поверхностях и позволяет отыскивать приближенное решение с хорошей точностью при

сравнительно небольшом количестве точек дискретизации.

В разделе 2.I способ численного решения СИУ излагается на примере одного уравнения, имеющего вид

$$a(x)\nu(x)+\int_S K(x,y)\nu(y)dS_y = f(x),\ x\in S, \quad (8)$$

где a, K, f - известные функции, ядро K допускает представление $K=K_0+K_1$, K_0 - одно из выражений $\frac{1}{|x-y|}$,

$$\frac{\partial^2|x-y|}{\partial n_x\partial x^k},\ \frac{\partial^3|x-y|}{\partial n_x\partial x^k\partial x^p},\ \frac{\partial|x-y|^{-1}}{\partial x^k},\ k,p\in[1,3], \quad (9)$$

K_1 - гладкая на S функция, ν - неизвестная плотность.

Строится покрытие поверхности S системой $\{S_i\}_{i=1}^N$ окрестностей узловых точек $x_i\in S$, $S_i=\{y\in S:|y-x_i|<h_i\}$, h_i - положительные числа. Вводится $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ - множество функций, образующих разбиение единицы на S

$$\varphi_i(x)=\varphi_i'(x)/\Big[\sum_{k=1}^N\varphi_k'(x)\Big],$$

где $0\le\varphi_k'\le 1$, $\sum_{k=1}^N\varphi_k'(x)=1\ \forall\ x\in S$,

$$0\le h'\le|x_i-x_j|,\ i\ne j,\ h'\le(2\pi)^{1/2}\sigma_i\le h_i\le h,\ \frac{h}{h'}\le q_0<\infty,$$

$$\sigma_i=\overline{\varphi}_i\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\int_S\frac{\varphi_i(y)dS_y}{|x_i-y|}\right)^{-1}$$

или $\sigma_i=\sigma=\left(2\pi^2N/|S|\right)^{-1/2}$,

$\overline{\varphi}_i=\int_S\varphi_i\,dS$, h', h - положительные числа зависящие от N, q_0 - не зависит от N, $|S|$ - площадь S. Тогда СЛАУ

$$\sum_{j=1}^{N} \left[a_i \delta_{ij} + (I_{ij} + K_{ij}) \overline{\Psi}_j \right] \nu_j = f_i , \; i = \overline{1,N}$$

будет аппроксимировать уравнение (8). Здесь δ_{ij} - символ Кронекера, I_{ij} - интегралы вида

$$I_{ij} = \int_{R^3} \int_{R^3} K_0(x,y) \Psi_i(x) \Psi_j(y) \, dy \, dx , \tag{I0}$$

$$a_i = a(x_i), \; K_{ij} = K_1(x_i, x_j), \; f_i = \int_S f \Psi_i \, dS_y ,$$

$$\Psi_i(x) = \frac{1}{(\pi \sigma_i^2)^{3/2}} \exp\left[\frac{-(x - x_i)^2}{\sigma_i^2} \right], \; x \in R^3 .$$

Интегралы (I0) находятся аналитически в разделе 2.2.

Ядра интегралов СИУ (7) представляются в виде суммы двух слагаемых, одно из которых содержит особенности вида (9) при совпадении аргументов, а другое гладкое. С учетом этого, в разделе 2.3, по изложенным в разделах 2.I и 2.2 правилам, система (7) сводится к СЛАУ.

Раздел 2.4 содержит алгоритмы расчета правых частей системы (7) и функции Грина слоистой среды $\Gamma(x, y)$. Способ расчета Γ играет большую роль в численной реализации интегральных уравнений задачи дифракции. От его эффективности во многом зависит эффективность метода в целом.

Функция Γ представляется в виде интеграла Фурье-Бесселя

$$\Gamma(x, y) = \frac{1}{4\pi \rho(x^3)} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x^3, y^3, \lambda) H_0^{(1)}(\lambda r') \lambda \, d\lambda , \quad x, y \in R^3, \tag{II}$$

где $H_0^{(1)}$ - функция Ханкеля I рода нулевого порядка ,

$$r' = \left[(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 \right]^{1/2},$$

а функция τ является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial x^3}\right) - \frac{(\lambda^2-\kappa^2)}{\rho}\tau = -\delta(x^3-y^3),$$

$$[\tau] = \left[\frac{\partial \tau}{\rho \partial x^3}\right] = 0,\ x^3 \in S_e,\ \lim_{x^3 \to \pm\infty} \tau = 0.$$

При кусочно-постоянном волновом числе для вычисления функции τ используются рекуррентные формулы. Вычисление интегралов Фурье-Бесселя проводится в комплексной плоскости. При этом интегралы с бесконечными пределами преобразуются к интегралам по конечным отрезкам. Это позволяет достаточно быстро и точно их рассчитать. Рассматриваются аналитические свойства τ, что необходимо для выбора лучшего пути интегрирования.

Глава 3 посвящена математическому моделированию акустических колебаний в слоистых средах с трехмерными упругими включениями. Вычисление коэффициентов полученной СЛАУ требует не только предварительного построения сетки на поверхности включения, но и проведения параметризации поверхности в окрестности каждой узловой точки.

Одним из путей расширения возможностей численных алгоритмов является сведение СИУ на произвольных поверхностях S к СИУ на "стандартной" поверхности S^*. В разделе 3.I рассматриваются "звездные" поверхности. Координаты их точек определяются через координаты точек трехосного эллипсоида S^* по формулам

$$(y^1, y^2, y^3) = R(\theta,\varphi)(a_1\sin\theta\cos\varphi, a_2\sin\theta\sin\varphi, a_3\cos\theta),$$

где $\quad 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ R > 0.$

В разделе 3.2 проверяется алгоритм решения исходной задачи дифракции. Для тестирования используются краевые задачи математической теории упругости и акустики с известными точными решениями, а также решение задачи дифракции плоской акустической волны на упругой сфере с помощью разложений в ряды по сферическим функциям Бесселя и полиномам Лежандра. Рассчитанные значения функции Грина (II) подставляются в конечно- разностные соотношения, аппроксимирующие уравнение (3) и условия (4) на S_e .

В разделе 3.3 приведено описание программного комплекса на ЭВМ, в котором реализованы рассмотренные алгоритмы.

В разделе 3.4 представлены результаты математического моделирования акустических колебаний в горизонтально-однородных слоистых средах с трехмерными упругими включениями. Они позволяют судить о физических и геометрических характеристиках вмещающих сред и включений.

В заключении формулируются основные результаты работы:

I. Методом потенциалов получены удобные для численного решения сингулярные интегральные уравнения, доказана их однозначная разрешимость и эквивалентность исходной задаче дифракции.

2. Разработан и реализован на ЭВМ в виде программного комплекса сравнительно простой численный метод решения полученной СИУ.

3. Проведена проверка правильности, точности и сходимости предложенных алгоритмов, реализованных в программах для ЭВМ.

4. С помощью программного комплекса осуществлено математическое моделирование акустических колебаний в слоистых средах с трехмерными упругими включениями.

СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

I. Ершов Н.Е. Решение трехмерной задачи дифракции акустических волн на упругом теле методом потенциалов // Математические проблемы геофизики: моделирование, исследование и интерпретация. - Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, I985. - С.47-58.

2. Ершов Н.Е. О задаче дифракции акустических волн на упругом теле в слоистой среде // Численные методы в задачах математической физики и кибернетики. - Владивосток: Изд-во ДВО АН СССР, I987. - С. 20-26.

3. Ершов Н.Е., Смагин С.И. О численном решении сингулярных интегральных уравнений по замкнутой поверхности трехмерной задачи дифракции акустических волн на упругом включении // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: Тез. докл. 4 Всесоюзн. симпозиума, Харьков, 23.05. - 26.05.I989, - Харьков, I989. - С. III-II3.

4. Ершов Н.Е., Смагин С.И. Численное решение трехмерной стационарной задачи дифракции акустических волн на упругом включении. - Владивосток, I989. - 46 с. - (Препринт / ВЦ ДВО АН СССР).
5. Ершов Н.Е., Смагин С.И. О решении трехмерных стационарных задач дифракции методом потенциалов // ДАН СССР. - I990. - Т. 3II. - № 2. - С. 339-342.
6. Ершов Н.Е., Смагин С.И. Математическое моделирование акустических колебаний в слоистой среде с трехмерным упругим включением. // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики: Тез. докл. Всесоюзн. конф., Новосибирск, 20.03 - 22.03.I990. - Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, I990. - С. 62-63.
7. Ершов Н.Е., Смагин С.И. Решение методом потенциалов трехмерных задач акустики и упругости // Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики: Тез. докл. Всесоюзн. конф., Владивосток, 22.I0 - 26.I0.I990. - Владивосток: Изд-во ДВО АН СССР, I990. - С.I7.
8. Ершов Н.Е., Смагин С.И. Акустическое поле в горизонтально-однородной слоистой среде с трехмерным упругим включением. - Владивосток, I990. - 39 с. - (Препринт / ВЦ ДВО АН СССР).
9. Ершов Н.Е., Смагин С.И. Численное моделирование акустических колебаний в жидкости, содержащей упругое тело // Труды советско-японского симпозиума по вычислительной аэрогидродинамике. - М.: ВЦ АН СССР, I989. - Т. 3. - С. 20-25.
I0. Ершов Н.Е. Метод потенциалов в трехмерной задаче дифракции акустических волн на упругом включении // Интегральные уравнения и краевые задачи - теория и прикладные системы. - Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, I990.С. 5I-63.
11. Ershov N.E., Smagin S.I. Application of the potential theory methods for numerical solution of three-dimentional sums in aerohygrodynamics // Abstract of Japan - Soviet Union symposium on computational fluid dynamics, Tsukuba, 27.08.-31.08. 1990.- Tsukuba, Japan, 1990.- p. 542-543.

Ершов Николай Егорович

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА УПРУГОМ ТЕЛЕ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Автореферат

Подписано в печать
Формат 60x90, I/I6 Объем 0,75 уч.изд.л.
Заказ I05 Тираж I00 экз.

Отпечатано на ротапринте ВЦ СО АН СССР

4. Ершов Н.Е., Смагин С.И. Численное решение трехмерной стационарной задачи дифракции акустических волн на упругих включениях. – Владивосток, 1989. – 40 с. – (Препринт / ВЦ ДВО АН СССР).
5. Ершов Н.Е., Смагин С.И. О решении трехмерных стационарных задач дифракции методом потенциалов // ДАН СССР. – 1990. – Т. 311. – № 2. – С. [illegible].
6. Ершов Н.Е., Смагин С.И. Математическое моделирование акустических колебаний в слоистой среде с трехмерным упругим включением // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики: Тез. докл. Всесоюзн. конф., Новосибирск, 20.09 – 22.09.1990. – Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1990. – С. 62-63.
7. Ершов Н.Е., Смагин С.И. Решение методом потенциалов трехмерных задач акустики и упругости // Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики: Тез. докл. Всесоюзн. конф., Владивосток, [illegible] – [illegible].10.1990. – Владивосток: Изд-во ДВО АН СССР, 1990. – С. [illegible].
8. Ершов Н.Е., Смагин С.И. Акустическое поле в горизонтально-однородной [illegible]. – Владивосток, 1990. – [illegible] / ВЦ ДВО АН СССР).
9. Ершов Н.Е., Смагин С.И. Численное моделирование акустических колебаний в жидкости с [illegible] упругим телом // Труды советско-японского симпозиума по вычислительной аэрогидродинамике. – М.: ВЦ АН СССР, 1989. – Т. 2. – С. 20-25.
10. Ершов Н.Е. Метод потенциалов в трехмерной задаче дифракции акустических волн на упругих включениях // Интегральные уравнения и краевые задачи – теория и прикладные методы. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1990. С. 51-63.
11. Ershov N.E., Smagin S.I. Applications of the potential theory methods for [illegible] // Abstracts of [illegible] on computational [illegible] 1990.– Tsukuba, Japan, 1990. [illegible] p. 301.