ЛЬВОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИВ.ФРАНКО

На правах рукописи

УДК 517.958:539.3

КОСОАК ОЛЬГА СВЯТОСЛАВОВНА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СОСТАВНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

Специальность 05.13.16 - применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ЛЬВОВ - 1991

Работа выполнена на кафедре прикладной математики Львовского государственного университета им. Ивана Франко

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор САВУЛА Я.Г.

Официальные оппоненты: доктор технических наук, чл.-кор. АН Украины ГРИГОРЕНКО Я.М.,

доктор физико-математических наук, профессор ВОЙТОВИЧ Н.Н.

Ведущее предприятие: Киевский государственный университет имени Т.Г.Шевченко

Защита состоится "15" 01 1992 г. в 15 часов на заседании специализированного совета К 068.26.12 во Львовском государственном университете им. Ивана Франко (290602, Львов, ул.Университетская, I, ЛГУ, ауд.).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Львовского государственного университета.

Автореферат разослан "13" 12 1991 г.

Ученый секретер специализированного совета Б.А.Остудин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. В современном машиностроении, приборостроении, строительстве применяются конструкции, имеющие форму тел вращения и содержащие тонкостенные и массивные элементы. Поскольку они как правило работают в условиях нестационарных, вибрационных нагрузок, представляется важной проблема определения частот и форм их свободных колебаний. Решение этой проблемы дает возможность получить информацию еще на стадии проектирования, предупредить возникновение весьма опасных с точки зрения прочности и надежности конструкций, резонансных явлений.

Задача определения частот и форм свободных колебаний упругих конструкций является достаточно сложной проблемой математической физики. Ее решение традиционными аналитическими методами связано со значительными трудностями, а зачастую и неосуществимо. Более целесообразным представляется применение численных методов и ЭВМ, позволяющее не только определять виброчастотные характеристики сложных конструкций, но и автоматизировать сам процесс расчета, уточнять математические модели и т.д., т.е. проводить вычислительный эксперимент.

При расчете задач о свободных колебаниях прослеживаются два подхода. В первом массивные и тонкостенные конструкции исследуются на основе уравнений трехмерной линейной теории упругости. К настоящему времени имеются многочисленные публикации, в которых в пространственной постановке с помощью численных методов проводятся исследования свободных колебаний упругих тел. Расчетные схемы исследования колебаний конструкций, полученные из уравнений трехмерной теории упругости, используются в работах Я.М.Григоренко, Е.И.Беспаловой, А.Б.Китайгородского, А.И.Шинкаря, С.И.Богомолова, С.С.Луценко, С.А.Назаренко, В.Н.Кислоокого, А.Д.Легостаева, А.С.Сахарова и др. авторов.

Достоинствами подхода, использующего трехмерные уравнения теории упругости, является его универсальность, предполагающая возможность точного описания тел сложной геометрии, Однако, для получения достаточно точных результатов необходимо применять густые сетки конечных элементов, или же аппроксимации высоких порядков точности. Недостатком такого подхода является,то что для получения достаточно точных результатов необходимо выполнять большие объемы вычислений, что требует привлечения больших ресурсов ЭВМ.

В том случае, когда конструкция состоит лишь из тонкостенных фрагментов, можно рассмотреть второй подход. Он характеризуется тем, что расчет задач о свободных колебаниях в применении к тонкостенным телам производится на основе двумерных уравнений теории оболочек. Исследования задач о свободных колебаниях оболочек проводились в работах И.Я.Амиро, Е.И.Беспаловой, В.В.Болотина, Б.Н.Бублика, А.Т.Василенко, А.С.Вольмира, А.Л.Гольденвейзера, В.С.Гонткевича, Э.И.Григолюка, Я.М.Григоренко, В.И.Гуляева, В.М.Даревского, В.А.Заруцкого, А.Б.Китайгородского, А.В.Кармишина, М.Ф.Копытко, Ю.П.Жигалко, В.Б.Лидского, В.П.Мальцева, В.И.Мяченкова, П.М.Огибалова, О.Д.Ониашвили, Н.Д.Панкратовой, В.Н.Паймушина, Ю.Я.Петрушенко, Я.Г.Савулы, П.Е.Товстика, А.П.Филиппова, В.Флюге, А.И.Шинкаря и др.

Применение соотношений теории тонких оболочек для расчета тонкостенных конструкций позволяет избежать те трудности вычислительного характера, которые возникают в случае применения численных методов непосредственно к уравнениям трехмерной теории упругости. Тем самым несколько расширяется класс конструкций, которые можно расчитать, опираясь на существующие в настоящее время вычислительные средства. Однако, надо отметить, что теория оболочек в ряде случаев неприменима для расчета конструкций, включающих в себя тонкостенные и массивные элементы. Применение же для расчета частот и форм колебаний таких конструкций трехмерных соотношений теории упругости связано с большими вычислительными затратами, что может быть оправдано лишь для отдельных массивных участков конструкции. Поэтому развитие подхода, в котором используются две теории одновременно, представляется актуальным. В этом случае составная конструкция разделяется на массивные фрагменты, которые описываются трехмерной теорией, и тонкостенные фрагменты, описываемые теорией оболочек. Строится комбинированная модель "упругое тело - оболочка". Ключевым для таких моделей является вопрос о сопряжении фрагментов конструкции, описываемых различными теориями. В рамках МКЭ эта проблема решается рядом авторов путем введения специальных переходных элементов (transition finite element), которые представляются собой естественное соединение элементов трехмерного и оболочечного типов. В этом направлении для решения задач статики необходимо особо отметить работы Surana Karana S., С.А.Акимкина, Г.П.Никишкова, Б.Д.Дробенко, Gao D., Citipitioglu E. , и др.

В работах С.А.Капустина, А.Н.Паутова, Д.Н.Шуваева и др. комбинированная модель для решения задач статики записана в виде замкнутой системы дифференциальных уравнений с граничными условиями на границе области и условиями сопряжения на поверхности сопряжения.

В работах Я.Г.Савулы и А.В.Дубовика построена комбинированная модель для решения задач статики тонкостенных пространственных конструкций. Здесь записан функционал потенциальной энергии со штрафом, минимизация которого эквивалентна решению краевой задачи комбинированной модели.

Вопросы расчета колебаний элементов механических систем на основе комбинированных моделей рассмотрены в работах О.Ф.Борискина, В.В.Кулибабы, О.В.Репецкого, Ф.Сьярле.

Для решения задач о свободных колебаниях тел вращения эффективно применяется полуаналитический метод конечных элементов (ПМКЭ), весьма близкого к методу Л.В.Канторовича. Согласно ПМКЭ перемещения в теле представляются в виде ряда Фурье по полной системе тригонометрических функций вдоль окружной переменной. По другим переменным применяются кусочно-полиномиальные квадратичные аппроксимации МКЭ: одномерные для теории оболочек и двумерные для теории упругости.

С помощью ПМКЭ задача о свободных колебаниях конструкций вращения приводится к обобщенной проблеме на собственные значения для матриц больших размерностей.

Целью настоящей работы является:

- разработка нового подхода к решению задач о свободных колебаниях составных тел вращения, содержащих тонкостенные и массивные фрагменты, основанного на комбинированной модели "упругое тело - оболочка типа Тимошенко";
- построение схем и алгоритмов полуаналитического метода конечных элементов для решения задач о свободных колебаниях составных тел вращения;
- создание на основе разработанного алгоритма проблемно-ориентированного комплекса программ для расчета собственных частот и форм колебании составных тел вращения;

- проведение численных экспериментов по исследованию сходимости и точности разработанных численных методов решения задач на собственные значения;
- исследование частот и форм свободных колебаний ряда конструкций, имеющих важное практическое значение.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:
- построен вариант разрешающих уравнений комбинированной модели "упругое тело - оболочка типа Тимошенко" для исследования частот и форм свободных колебаний составных тел вращения, содержащих тонкостенные и массивные фрагменты;
- построены и исследованы функционалы комбинированной модели без штрафа и со штрафом, получены уравнения Эйлера соответствующих функционалов;
- в осесимметричной постановке для случая массивного тела, сопряженного с цилиндрической оболочкой, доказана положительная определенность оператора комбинированной модели со штрафом и сходимость решения этой задачи к решению комбинированной модели без штрафа;
- в рамках комбинированной модели разработан единый подход для решения задач о свободных колебаниях составных тел вращения;
- на тестовых примерах, имеющих решения, полученные другими методами, исследована точность и сходимость построенной схемы, получены апостериорные оценки, проведено сравнение результатов;
- составлен комплекс программ для определения частот и форм свободных колебаний составных тел вращения;
- исследованы сложные инженерные конструкции вращения, содержащие тонкостенные и массивные фрагменты.

Достоверность научных результатов обеспечивается строгим математическим обоснованием используемых вариационных постановок для решения задач о свободных колебаниях и разработанной схемой метода конечных элементов; сравнением полученных решений для тестовых примеров с аналитическим решением, анализом приближенных решений, полученных на разных конечноэлементных сетках, сопоставлением с результатами, полученными по теории упругости и с экспериментальными данными.

Практическая ценность работы заключается в создании и реализации на ЭВМ эффективного подхода к определению частот и форм свободных колебаний составных тонкостенных и массивных конструкций вращения сложной геометрии, создания программного обеспечения для решения и анализа рассматриваемых задач. Диссертация выполнена в рамках планов научных исследований, госбюджетной и хоздоговорной тематики кафедры прикладной математики, Республиканской комплексной научно-технической программы "Материалоемкость", утвержденной постановлением Совета министров УССР от II.07.1986г. № 250. Некоторые результаты внедрены в практику инженерного проектирования на научно-производственном объединении "ОРИОН" (г.Москва).

Созданное программное обеспечение может применятся при расчете частот и форм свободных колебаний широкого класса составных тонкостенных и массивных конструкций.

Апробация работы. Основные положения и отдельные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях: семинаре-совещании "Проблемы оптимизации в машиностроении" (Харьков, 1986 г.), на III Всесоюзном семинаре-совещании молодых ученых "Актуальные проблемы механики оболочек" (Казань, 1988 г.), Всесоюзной школе-семинаре "Программное обеспечение прочностных расчетов сложных машиностроительных конструкций" (Москва, 1989 г.), Школе молодых ученых "Численные методы механики сплошной среды" (Абакан, 1989 г.), конференции "Оптимальное проектирование неупругих элементов конструкций" (Тарту-Кяэрику, 1989 г.), XV научной конференции молодых ученых (Киев-Кийлов, 1990 г.), XVI научной конференции молодых ученых (Киев-Кийлов, 1991 г.), на III Всесоюзной конференции "Механика неоднородных структур" (Львов, 1991 г.).

Диссертационная работа в целом обсуждалась на научном семинаре кафедры прикладной математики ЛГУ, проблемном семинаре факультета прикладной математики.

Публикации. Основное содержание диссертационной работы отражено в 9 статьях и тезисах докладов конференций.

Объем работы. Диссертационная работа состоит из 163 страниц текста, в том числе 19 рисунков, 12 таблиц, и библиографический список, включающий 155 наименований литературных источников советских и зарубежных авторов.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении кратко анализируется современное состояние проблемы расчета составных тонкостенных и массивных конструкций вращения, приводится обзор работ по теме диссертации, обосновывается важность и актуальность вопросов, составляющих предмет изучения. Изложены основные научные результаты, которые выносятся на защиту. Дана аннотация диссертации по главам.

В первой главе приведены разрешающие уравнения линейной теории оболочек типа Тимошенко и линейной теории упругости. Для них записаны вариационные постановки задач о свободных колебаниях для тел вращения. Построена разрешающая система комбинированной модели "упругое тело - оболочка типа Тимошенко". Пусть тело вращения занимает область $\Omega = \Omega_1^{*} \cup \Omega_2$. Тогда задача о свободных колебаниях предлагаемой комбинированной модели включает в себя следующие соотношения:

- соотношения теории оболочек типа Тимошенко, действующие в области $\Omega_1^{*} = \{\alpha_1, \varphi, \alpha_3 : \alpha_1, \varphi \in \Omega_1; \alpha_1 \in \Omega_{1M}; 0 \le \varphi < 2\pi; -h/2 \le \alpha_3 \le h/2\}$,

$$D_1^{(1)} \sigma^{(1)} + \omega^2 M^{(1)} u^{(1)} = 0; \quad \alpha_1, \varphi \in \Omega_1; \quad (1)$$

$$\sigma^{(1)} = C^{(1)} \varepsilon^{(1)}; \quad \alpha_1, \varphi \in \Omega_1; \quad (2)$$

$$\varepsilon^{(1)} = D_2^{(1)} u^{(1)}; \quad \alpha_1, \varphi \in \Omega_1; \quad (3)$$

- соотношения трехмерной линейной теории упругости, действующие в части Ω_2 области $\Omega = \Omega_1^{*} \cup \Omega_2$

$$\Omega_2 = \{r, z, \varphi : r, z \in \Omega_{2M}, 0 \le \varphi < 2\pi\};$$

$$D_1^{(2)T} \sigma^{(2)} + \omega^2 M^{(2)} u^{(2)} = 0; \quad r, z, \varphi \in \Omega_2; \quad (4)$$

$$\sigma^{(2)} = C^{(2)} \varepsilon^{(2)}; \quad r, z, \varphi \in \Omega_2; \quad (5)$$

$$\varepsilon^{(2)} = D_2^{(2)} u^{(2)}; \quad r, z, \varphi \in \Omega_2; \quad (6)$$

- однородные граничные условия на частях границ Γ_1 , Γ_2

$$\sigma_{tt}^{(1)} = G_1^{(1)} \sigma^{(1)} = 0 \; ; \qquad \alpha_1, \varphi \in \Gamma_1^{(1)} \; ; \qquad (7)$$

$$u_t^{(1)} = G_2^{(1)} u^{(1)} = 0 \; ; \qquad \alpha_1, \varphi \in \Gamma_1^{(2)} \; ; \qquad (8)$$

$$\sigma_{\nu\nu}^{(2)} = G_2^{(2)} G_1^{(2)T} \sigma^{(2)} = 0 \, ; \quad r, z, \varphi \in \Gamma_2^{(1)} \; ; \qquad (9)$$

$$u_\nu^{(2)} = G_2^{(2)} u^{(2)} = 0 \; ; \qquad r, z, \varphi \in \Gamma_2^{(2)} \; ; \qquad (10)$$

- условия упругого сопряжения на поверхности сопряжения

$$\Gamma_2^{(3)} = \Omega_2 \cap \Omega_1^* = \left\{ \alpha_1, \varphi \in \Gamma_1^{(3)}, \; -h/2 \le \alpha_3 \le h/2 \right\} ;$$

$$G_2^{(2)} u^{(2)} = - G_3^T(\alpha_3) G_2^{(1)} u^{(1)} \; ; \qquad (11)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} G_3(\alpha_3) G_2^{(2)} G_1^{(2)T} \sigma^{(2)} \, d\alpha_3 = G_1^{(1)} \sigma^{(1)} \; ; \qquad (12)$$

где

$$G_3^T(\alpha_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

Здесь через α_1 , φ обозначена система ортогональных координат области Ω_1 ; r , z , φ система цилиндрических координат области Ω_2 (φ - окружная координата); через h обозначена толщина области Ω_1^* , которая значительно меньше других размеров Ω_1^* ; ω - неизвестная круговая частота; $D_1^{(1)}$, $D_2^{(1)}$, $D_1^{(2)}$, $D_2^{(2)}$ - матрицы дифференциальных операторов; $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ - матрицы физических констант. Векторы $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ перемещений, деформаций, усилий-моментов и напряжений имеют вид

$$u^{(1)}=(u_1^{(1)},u_2^{(1)},w^{(1)},\gamma_1^{(1)},\gamma_2^{(1)})^T;\quad u^{(2)}=(u_r^{(2)},u_\varphi^{(2)},u_z^{(2)})^T;$$

$$\varepsilon^{(1)}=(\varepsilon_{11}^{(1)},\varepsilon_{22}^{(1)},\varepsilon_{12}^{(1)},\varepsilon_{13}^{(1)},\varepsilon_{23}^{(1)},\varkappa_{11}^{(1)},\varkappa_{22}^{(1)},\varkappa_{12}^{(1)})^T;$$

$$\varepsilon^{(2)}=(\varepsilon_{rr}^{(2)},\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)},\varepsilon_{zz}^{(2)},2\varepsilon_{r\varphi}^{(2)},2\varepsilon_{rz}^{(2)},2\varepsilon_{\varphi z}^{(2)})^T;$$

$$\sigma^{(1)}=(T_1^{(1)},T_2^{(1)},S^{(1)},Q_1^{(1)},Q_2^{(1)},M_1^{(1)},M_2^{(1)},H^{(1)})^T;$$

$$\sigma^{(2)}=(\sigma_{rr}^{(2)},\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)},\sigma_{zz}^{(2)},\sigma_{z\varphi}^{(2)},\sigma_{rz}^{(2)},\sigma_{\varphi z}^{(2)})^T.$$

На границах $\Gamma_1=\Gamma_1^{(1)}\cup\Gamma_1^{(2)}\cup\Gamma_1^{(3)}$ и $\Gamma_2=\Gamma_2^{(1)}\cup\Gamma_2^{(2)}\cup\Gamma_2^{(3)}$ областей Ω_1 и Ω_2 заданы соответственно триедры t_1, t_2, t_3 и ν_1, ν_2, ν_3 (t_3, t_1 - нормаль и тангенциальная нормаль к срединной поверхности $\alpha_3=0$); $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$, $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$ - матрицы направляющих косинусов триедров. На поверхности сопряжения $\Gamma_2^{(3)}$ между векторами задана зависимость

$$\nu_1=-t_1,\quad \nu_2=-t_2,\quad \nu_3=t_3.$$

Исходя из вариационных задач теории оболочек типа Тимошенко и теории упругости, записаны вариационная задача комбинированной модели

$$F(u)\to\min \quad \text{при условии} \quad \int_\Omega u^T M u\, d\Omega=1, \tag{13}$$

$$F(u)=\int_{\Omega_1}(D_2^{(1)}u^{(1)})^T E_0 C^{(1)} D_2^{(1)} u^{(1)} d\Omega_1+\int_{\Omega_2}(D_1^{(2)}u^{(2)})^T C^{(2)} D_2^{(2)} u^{(2)} d\Omega_2$$

на множестве векторов $u^{(1)}\in[H^{(1)}(\Omega_1)]^5$, $u^{(2)}\in[H^{(1)}(\Omega_2)]^3$, удовлетворяющих соотношениям (8), (10), (11), а также вариационная задача комбинированной модели со штрафом

$$F_\theta(u_\theta)\to\min \quad \text{при условии} \quad \int_\Omega u^T M u\, d\Omega=1, \tag{14}$$

$$\underset{\theta\to 0}{F_\theta(u_\theta)}=F(u_\theta)+\frac{1}{\theta}\int_{\Gamma_2^{(3)}}(G_2^{(2)}u_\theta^{(2)}+G_3^T G_2^{(1)}u_\theta^{(1)})^T(G_2^{(2)}u_\theta^{(2)}+G_3^T G_2^{(1)}u_\theta^{(1)})d\Gamma_2$$

на множестве векторов $u^{(1)}\in[H^{(1)}(\Omega_1)]^5$, $u^{(2)}\in[H^{(1)}(\Omega_2)]^3$, удовлетворяющих лишь условиям (8), (10).

Получены уравнения Эйлера функционалов (13), (14). Показано, что задача о свободных колебаниях эквивалентна вариационной задане (13) при дополнительных условиях на поверхности сопряжения, а также эквивалентна вариационной задаче (14) при дополнительном условии стремления к нулю параметра штрафа θ .

Рассмотрен частный случай задачи о свободных колебаниях массивного тела, сопряженного с цилиндрической оболочкой, в осесимметричной постановке. Сформулированы вариационные постановки комбинированной модели со штрафом

$$F_\theta(u_\theta)\to \min,\ u_\theta\in V \text{ при } (Mu_\theta,u_\theta)=1,\ \theta\to 0,\ \theta>0, \quad (15)$$

$$F_\theta(u_\theta)=(A_\theta u_\theta,u_\theta)=(Au_\theta,u_\theta)+\frac{1}{\theta}(A^{(3)}u_\theta,u_\theta),$$

$$(Au_\theta,u_\theta)=(A^{(1)}u_\theta^{(1)},u_\theta^{(1)})+(A^{(2)}u_\theta^{(2)},u_\theta^{(2)}),$$

$$(Mu_\theta,u_\theta)=(M^{(1)}u_\theta^{(1)},u_\theta^{(1)})+(M^{(2)}u_\theta^{(2)},u_\theta^{(2)}),$$

$$V=\{u_\theta=(u_\theta^{(1)},u_\theta^{(2)}):\ u_\theta^{(1)}=(u_{1\theta}^{(1)},w_\theta^{(1)},\gamma_{1\theta}^{(1)}),\ u_\theta^{(2)}=(u_{1\theta}^{(2)},u_{2\theta}^{(2)}),$$
$$u_\theta^{(1)}\in[H^{(1)}(\Omega_1)]^3,\ u_\theta^{(2)}\in[\overset{\circ}{H}{}^{(1)}(\Omega_2)]^2,\ u_{\vartheta_1\theta}^{(2)}=0,$$
$$u_{\vartheta_3\theta}^{(2)}=0,\ r,z\in\Gamma_2^{(2)},\ u_{1\theta}^{(1)}(\ell)=w_\theta^{(1)}(\ell)=\gamma_{1\theta}^{(1)}(\ell)=0\};$$
$$\Omega_1=\{\alpha_1:\ 0\le\alpha_1\le\ell\},\ \Omega_2=\{r_{min}\le r\le r_{max},z\};$$

и без штрафа

$$F(u_*)\to\min,\ u_*\in V_*,\ (Mu_*,u_*)=1, \quad (16)$$

$$F(u_*)=(Au_*,u_*),$$

$$V_*=\{u_*=(u_*^{(1)},u_*^{(2)}):\ u_*^{(1)}=(u_{1*}^{(1)},w_*^{(1)},\gamma_{1*}^{(1)}),\ u_*^{(2)}=(u_{1*}^{(2)},u_{2*}^{(2)}),$$
$$u_*^{(1)}\in[H^{(1)}(\Omega_1)]^3,\ u_*^{(2)}\in[H^{(1)}(\Omega_2)]^2,\ u_{\vartheta_1*}^{(2)}=0,\ u_{\vartheta_3*}^{(2)}=0,$$
$$r,z\in\Gamma_2^{(2)};\ u_{1*}^{(1)}(\ell)=w_*^{(1)}(\ell)=\gamma_{1*}^{(1)}(\ell)=0,\ u_{\vartheta_1*}^{(2)}=u_{1*}^{(1)}(0)+\gamma_{1*}^{(1)}(0)\alpha_3,$$
$$u_{\vartheta_3*}^{(2)}=w_*^{(1)}(0) \text{ на } \Gamma_2^{(3)}\}.;\qquad -h/2\le\alpha_3\le h/2 .$$

В (15)-(16) под Ω_1 понимается срединная поверхность цилиндрической оболочки радиуса R , длины ℓ . h - толщина оболочки, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ - матрицы дифференциальных операторов теории оболочек типа Тимошенко и теории упругости,

$\frac{1}{\theta}(A^{(\theta)}u, u)$ - штрафное слагаемое; M_1, M_2 - матрицы физических констант, граница $\Gamma_2^{(1)}$ прямолинейна. Обозначим через ω_θ^2, ω_*^2 - минимальные значения функционалов $F_\theta(u_\theta)$, $F(u_*)$.

Имеют место следующие теоремы.

Лемма. Операторы комбинированной математической модели A_θ и M симметричны

$$(A_\theta u, \tilde{u}) = (u, A_\theta \tilde{u}), \ \forall \tilde{u} \in V,$$
$$(M u, \tilde{u}) = (u, M \tilde{u}).$$

Теорема I. Операторы комбинированной модели A_θ и M положительно определены

$$(A_\theta u, u) \geqslant C_1^2 \|u\|^2_{0,\Omega},$$
$$(M u, u) \geqslant C_2^2 \|u\|^2_{0,\Omega},$$

где

$$\|u\|^2_{0,\Omega} = \int\limits_{\Omega_2} (u_r^{(2)2} + u_z^{(2)2}) d\Omega_2 + \int\limits_0^{\ell} (u_1^{(1)2} + w^{(1)2} + \gamma_1^{(1)2}) d\alpha_1 .$$

Теорема 2. Решение задачи о свободных колебаниях комбинированной модели со штрафом ω_θ^2 сходится к решению ω_*^2 комбинированной модели без штрафа

$$(\omega_*^2 - \omega_\theta^2) \to 0, \quad \theta \to 0$$

Теорема 3. Для любого k-го собственного числа оператора комбинированной модели со штрафом $\omega_{k\theta}^2$ имеет место неравенство

$$\omega_{k*}^2 \geqslant \omega_{k\theta}^2,$$

где ω_{k*}^2 - k-ое собственное число оператора комбинированной модели без штрафа.

Вторая глава посвящена разработке единого подхода к построению схемы ПМКЭ в рамках комбинированной модели для решения задач о свободных колебаниях составных тел вращения. Согласно ПМКЭ перемещения в теле представляются в виде ряда Фурье по полной системе тригонометрических функций вдоль окружной переменной. По другим переменным применяются кусочно-полиномиальные аппроксимации МКЭ.

Меридиональные сечения Ω_{1M} и Ω_{2M} областей Ω_1 и Ω_2 разбиваются соответственно на одномерные и двумерные квадратичные КЭ Ω_{1Mi} и Ω_{2Mi}. Искомые вектора перемещений на Ω_{1Mi} и Ω_{2Mi}

имеют вид

$$U_i^{(1)} = \sum_{m=0}^{L} \Phi_m^{(1)} N^{(1)} q_{mi}^{(1)} , \qquad\qquad (17)$$
$$U_i^{(2)} = \sum_{m=0}^{L} \Phi_m^{(2)} N^{(2)} q_{mi}^{(2)} ,$$

где $q_{mi}^{(1)}$, $q_{mi}^{(2)}$ - столбцы неизвестных узловых значений компонентов векторов $U_i^{(1)}$ и $U_i^{(2)}$; $\Phi_m^{(1)}$ и $\Phi_m^{(2)}$ - матрицы, составленные из тригонометрических функций, которые составляют на промежутке $[0, 2\pi]$ полную ортогональную систему функций; $N^{(1)}$, $N^{(2)}$ - блочно-диагональные матрицы аппроксимационных полиномов.

Благодаря введению условий упругого сопряжения (11), (12), схема ПМКЭ комбинированной модели свободна от необходимости использования переходных элементов. Сопряжение между телом Ω_2 и оболочкой Ω_1 осуществляется путем стыковки конечных элементов Ω_{2mi} и Ω_{1mi} в узлах, геометрические координаты которых совпадают.

Для минимизации функционала со штрафом (14) поверхность сопряжения $\Gamma_2^{(3)}$ разбивается на поверхностные КЭ, на которых вектор перемещений в узлах сопряжения представляется в виде

$$U^{(1)} = \Phi_m^{(1)} \tilde{q}_m^{(1)} , \qquad\qquad (18)$$
$$U^{(2)} = \Phi_m^{(2)} N \tilde{q}_m^{(2)} .$$

Учитывая (18), штрафное слагаемое функционала (14) представляется в виде квадратичной формы

$$\frac{1}{\theta} \tilde{q}_m^T K_m^{(3)} \tilde{q}_m ,$$

где $K_m^{(3)}$ - матрица размерности [14x14], $\tilde{q}_m = \left(\tilde{q}_m^{(1)}, \tilde{q}_m^{(2)}\right)^T$ - вектор узловых неизвестных на границе сопряжения.

Минимизируя функционал (14) с учетом ортогональности базисных функций на промежутке $[0, 2\pi]$, приходим к L обобщенным проблемам на собственные значения

$$K_{\theta m} q_m - \omega_\theta^2 M_{\theta m} q_m = 0 , \quad m = 0, 1, \ldots, L , \qquad (19)$$

которые решаются методом итераций в подпространстве.
Здесь $K_{\theta m}$ и $M_{\theta m}$ - матрицы жесткости и масс, $q_m = \left(q_m^{(1)}, q_m^{(2)}\right)^T$.

На тестовых примерах, имеющих аналитическое решение, проведено детальное исследование точности и сходимости построенной схемы. Приведено сравнение частот, полученных по теории оболочек типа Тимошенко и линейной теории упругости с аналитическим решением; получены апостериорные оценки.

На примере расчета сплошного цилиндра, сопряженного с полым цилиндром (рис.I) исследуется зависимость собственных частот $\lambda_к = \omega_\theta/2\pi$ от параметра штрафа θ. Для этого же примера приведено сравнение решений, полученных по комбинированной модели со штрафом и по теории упругости $\lambda_у$ (табл.I).

В третьей главе описаны основные характеристики программного комплекса COMB, ориентированного на решение задач о свободных колебаниях составных тел вращения и реализация их основных этапов на основе схем ПМКЭ. Приводятся некоторые характеристики и описываются возможности программных модулей. Все модули записаны на алгоритмическом языке Фортран. Работа комплекса организована в рамках операционной системы ОС для ЭВМ серии ЕС.

Для всех конструкций, приведенных в главах 2 и 3, объем входной информации сведен к минимуму и определяется полностью инженерной документацией для рассматриваемых объектов.

Основные общие этапы вычислений на основе использования полуаналитического метода конечных элементов при решении рассмотренных задач представлены на структурной схеме программного комплекса COMB (рис.2).

В этой же главе рассмотрены задачи об определении частот и форм свободных колебаний сложных составных оболочек вращения, встречающихся в инженерной практике. Исследована зависимость решения от сгущения сетки КЭ.

Построенная комбинированная модель используется для расчета сложной конструкции вращения (рис.3), которая содержит одновременно массивные и тонкостенные фрагменты. В табл.2 приведены значения частотного параметра $\lambda_к$ для различных способов закрепления массивного участка конструкции. Это решение получалось при разбиении данной конструкции на 28 двумерных и 27 одномерных квадратичных КЭ, система уравнений включает 605 степеней свободы. Общее время использования центрального процессора ЭВМ ЕС I045 для получения решения задачи по комбинированной математической модели составило II минут времени работы центрального процессора.

В заключении сформулированы основные результаты и приведены некоторые выводы:

I. Исходя из соотношений линейной теории оболочек типа Тимо-

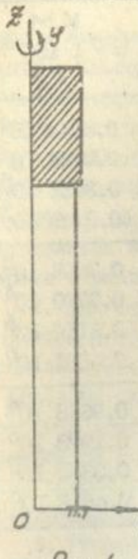

Рис.1.

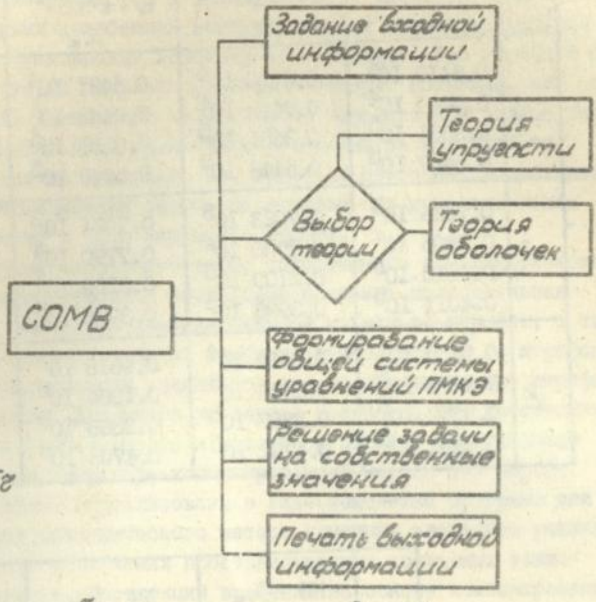

Рис. 2.

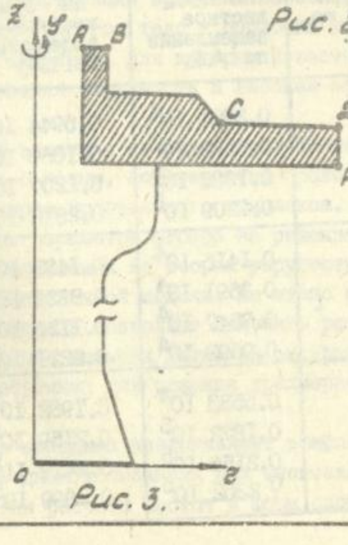

Рис. 3.

Табл.I

m	теория упругости λ_y	КМ $\Theta = 1\cdot 10^{-14}$ $\lambda_к$	КМ $\Theta = 1\cdot 10^{-16}$ $\lambda_к$	КМ $\Theta = 1\cdot 10^{-18}$ $\lambda_к$
0	0.64I9 I0^4 0.7449 I0^4 0.355I I0^5 0.5457 I0^5	0.6420 I0^4 0.7443 I0^4 0.355I I0^5 0.5448 I0^5	0.642I I0^4 0.7444 I0^4 0.355I I0^5 0.5449 I0^5	0.6544 I0^4 0.7444 I0^4 0.355I I0^5 0.5449 I0^5
I	0.7036 I0^3 0.7805 I0^4 0.2II5·I0^5 0.40II I0^5	0.7023 I0^3 0.7790 I0^4 0.2I09 I0^5 0.3996 I0^5	0.7024 I0^3 0.7790 I0^4 0.2I09 I0^5 0.3996 I0^5	0.7092 I0^3 0.7799 I0^4 0.2II0 I0^5 0.400I I0^5
2	0.9655 I0^4 0.I979 I0^5 0.3342 I0^5 0.4852 I0^5	0.96I7 I0^4 0.I964 I0^5 0.3307 I0^5 0.4792 I0^5	0.96I8 I0^4 0.I964 I0^5 0.3308 I0^5 0.4793 I0^5	0.9643 I0^4 0.I973 I0^5 0.3324 I0^5 0.48I8 I0^5

Табл.2

m	КМ $\lambda_к$ жесткое защемление по АВ	КМ $\lambda_к$ жесткое защемление по DF	КМ $\lambda_к$ жесткое защемление по CD.
0	0.3994 I0^4 0.5222 I0^4 0.I006 I0^5 0.I209 I0^5	0.5944 I0^4 0.I060 I0^5 0.I207 I0^5 0.28I6 I0^5	0.I0II I0^5 0.I208 I0^5 0.3I58 I0^5 0.4536 I0^5
I	0.I4I5 I0^4 0.369I I0^4 0.7547 I0^4 0.9693 I0^4	0.I433 I0^4 0.8929 I0^4 0.II20 I0^5 0.222I I0^5	0.I456 I0^4 0.959I I0^4 0.2262 I0^5 0.2790 I0^5
2	0.5583 I0^4 0.I872 I0^5 0.2I59 I0^5 0.2352 I0^5	0.I982 I0^5 0.2I59 I0^5 0.24I7 I0^5 0.2899 I0^5	0.2I59 I0^5 0.24I6 I0^5 0.29I9 I0^5 0.3420 I0^5

шенко и линейной трехмерной теории упругости выполнена постановка задачи о свободных колебаниях комбинированной математической модели. Записаны функционалы комбинированной модели без штрафа и со штрафом, для которых получены уравнения Эйлера. Показано, что задача о свободных колебаниях эквивалентна вариационной задаче без штрафа с дополнительными граничными условиями на поверхности сопряжения. Здесь же показано, что задача о свободных колебаниях эквивалентна вариационной задаче со штрафом при дополнительном условии стремления к нулю параметра штрафа.

2. Для случая массивного тела, сопряженного с цилиндрической оболочкой в осесимметричной постановке доказана положительная определенность оператора комбинированной модели со штрафом, а также доказана сходимость решения комбинированной модели со штрафом к решению комбинированной модели без штрафа при параметре штрафа, стремящемся к нулю. Для этого же случая показано, что собственные числа оператора комбинированной модели со штрафом не превышают собственных чисел оператора комбинированной модели без штрафа.

3. Разработана и реализована в виде комплекса программ для ЕС ЭВМ схема полуаналитического метода конечных элементов решения задач о свободных колебаниях пространственных составных тонкостенных и массивных конструкций вращения на основе комбинированной математической модели "упругое тело - оболочка типа Тимошенко".

4. На тестовых примерах, для которых известны аналитические решения, показана хорошая сходимость и высокая эффективность схемы ПМКЭ.

5. На модельной задаче о свободных колебаниях сплошного цилиндра, сопряженного с полым, подтверждена правильность функционирования разработанного программного комплекса, а также исследовано влияние величины параметра штрафа на решение. Приведено сравнение результатов, полученных по теории упругости, с результатами, полученными по комбинированной модели. Из этого сравнения следует, что комбинированная модель позволяет получить результаты требуемой точности при существенно меньших затратах ресурсов ЭВМ в сравнении с затратами, требуемыми для решения трехмерной задачи теории упругости.

6. Предложенная методика представляет возможность успешно решать задачи о свободных колебаниях для многосвязных оболочечных конструкций. Проведены расчеты частот и форм свободных колебаний

сложных инженерных приборов, а также исследована зависимость решения от сетки КЭ.

7. Расчет составной конструкции вращения, содержащей тонкостенные и массивные фрагменты демонстрирует эффективность применения комбинированной модели. Результаты расчета этой конструкции хорошо согласуются с инженерными оценками. Проведено исследование зависимости частот и форм свободных колебаний от способа закрепления массивного фрагмента.

В приложении представлены документы, подтверждающие внедрение научных разработок в инженерную практику.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ АВТОРА:

1. Дыяк И.И., Коссак О.С. Многокритериальная оптимизация термоупругих напряжений в объектах сложной геометрии // Тез.докл. конф. "Оптимальное проектирование неупругих элементов конструкций". - Тарту-Кяэрику, 1989. - С. 26-27.
2. Дыяк И.И., Коссак О.С., Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Расчет и оптимизация термонапряжений в паяных силовых полупроводниковых приборах // Теоретическая электротехника. Межведомственный республиканский научно-технический сб. 1990. - № 48. - С. 24-29.
3. Копытко М.Ф., Коссак О.С. Исследование динамических характеристик составных оболочек методом конечных элементов // Актуальные проблемы механики оболочек: Тез. докл. III Всесоюзн. совещания-семинара молодых ученых. - Казань: КИСИ, 1988. - С. 29.
4. Коссак О.С. Численное решение задач о свободных колебаниях составных оболочек вращения / Львов. ун-т. - Львов, 1989. - 23 с. - Деп. в УкрНИИНТИ 1.03.89, № 644-Ук89.
5. Коссак О.С. Численный анализ условий сопряжения составных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью // Вест. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1990. - Вып. 33. - С. 31-37. На укр. яз.
6. Коссак О.С. Численное решение задач о свободных колебаниях осесимметричных тел на основе моделей теории оболочек типа Тимошенко и теории упругости // Тр. XV науч. конф. мол. ученых Ин-та механики АН УССР, Киев, 29 мая - 1 июня 1990. Ч.I / АН УССР. Ин-т механики. - Киев, 1990.

7. Коссак О.С., Щербатый М.В. Исследование динамических характеристик составных оболочек вращения полуаналитическим методом конечных элементов // Тез. докл. школы мол. ученых "Численные методы механики сплошной среды". - Абакан, 1989. - С. 81-82.
8. Савула Я.Г., Коссак О.С. Анализ собственных частот комбинированной модели // Вестник Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1991.- Вып. 35. - С. 90-96. На укр. яз.
9. Савула Я.Г., Коссак О.С., Щербатый М.В., Дияк И.И. Исследование свободных колебаний конструкций на основе комбинированной модели // Тез. докл. III Всесоюзной конференции "Механика неоднородных структур". - Львов, 1991. - С. 294.

К

Подп. к печати 10.12.91. Формат 60х84 1/16
Бумага типограф. № 2. Офс. печ. Усл.печ. л 1
Усл.крас.-отт. 1 . Учетно-изд. л 0,95
Тираж 100 экз. Зак. 164. Бесплатно

ЛПИ 290646 Львов-13, Мира, 12

Участок оперативной печати опытного завода ЛПИ
Львов, ул. 1-го Мая, 286