

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

На правах рукописи

МИРОШНИК Олег Георгиевич

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН МАЛОЙ  
АМПЛИТУДЫ ВДОЛЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В СРЕДЕ  
С НЕОДНОРОДНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Киев - 1991

Работа выполнена в Институте механики АН Украины

Научный руководитель: академик АН Украины Гузь А.Н.

Научный консультант: доктор физико-математических наук  
Махорт Ф.Г.

Официальные оппоненты: член-корреспондент АН Украины  
профессор Шульга Н.А.

кандидат физико-математических наук  
Горошко И.О.

Ведущая организация: Институт математики АН Украины

Защита состоится "17" декабря 1991 г. в 14 часов на  
заседании специализированного совета К 016.49.01 Института  
механики АН Украины /252057, Киев-57, ул. Нестерова, 3/.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке  
Института механики АН Украины /ул. Нестерова, 3/.

Автореферат разослан "16" ноября 1991 г.

Ученый секретарь  
специализированного совета  
доктор технических наук

*Назар* Назаренко В.М.

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00815569 (Y)

ЛННБ ім. В. Стефаника  
АН УРСР

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена аналитическому и численному исследованию влияния неоднородных начальных напряжений на скорости распространения упругих волн малой амплитуды вдоль цилиндрической полости в бесконечной среде.

А к т у а л ь н о с т ь т е м ы. Развитие различных отраслей науки и техники часто связано с необходимостью исследования динамических процессов в твердых телах с учетом связанности полей различной физической природы — механических, электромагнитных, тепловых, а также реальных свойств материалов — вязкости, пластичности, начальных напряжений.

Исследования закономерностей распространения волн в предварительно напряженных телах являются актуальными как с точки зрения развития фундаментальных разработок по механике деформируемого твердого тела, так и с точки зрения приложений в различных отраслях науки и техники: геофизике, сейсмологии, горной механике, геотектонике и т. д. Так, в рамках фундаментальных разработок, имеют большое значение данные о природе механических эффектов волнового характера в предварительно деформируемых телах, так как в реальных деформируемых телах всегда имеются начальные напряжения различной природы. Весьма перспективными представляются рассматриваемые исследования при разработке ультразвуковых методов контроля напряжений в элементах конструкций.

При распространении упругих волн в предварительно напряженных телах происходит сложение начальных напряжений с напряжениями, вызванными волновыми процессами. В общем случае для установления закономерностей распространения волн в телах с начальными напряжениями необходимо привлекать нелинейную теорию упругости. Однако, это приводит к сложным задачам математического характера. Существует ряд явлений, в частности влияние начальных напряжений на скорости распространения упругих волн малой амплитуды, к описанию которых можно подойти в рамках линеаризованной теории упругости.

Основой при исследовании волновых процессов в телах с начальными напряжениями в настоящее время является линеаризованная теория упругости. За рубежом получили распространение теория инкрементальных деформаций *M. A. Biot* и теория малых упругих деформаций, наложенных на большие упругие деформации, авторами которой являются *A. S. Green*, *R. S. Rivlin* и *R. T. Shield*.

В нашей стране вопросами построения линеаризированной теории упругости занимались В.В.Бологин, Л.И.Седов, В.В.Новожилов и др. Наибольшее развитие линеаризированная теория упругости получила в работах А.Н.Гузя.

Исследованию закономерностей распространения упругих волн малой амплитуды в телах и массивах с начальными напряжениями посвящено большое число публикаций отечественных и зарубежных ученых. Большинство работ относится к случаю распространения волн в телах и массивах с однородной начальной деформацией. Различные вопросы влияния однородных начальных напряжений на распространение упругих волн малой амплитуды в ограниченных, неограниченных телах и массивах, в композиционных материалах, а также на распространение поверхностных волн рассмотрены в работах С.Д.Бабица, А.М.Багно, М.А.Гринфельда, И.О.Горошко, А.П.Жука, Ф.Г.Махорта, А.А.Мовчана, В.Д.Кубенко, В.А.Троценко, Н.А.Шульги, *J. A. Belward, C. B. Biezeno, W. T. Chen, S. Dey, R. K. Currie, A. S. Green, G. R. Garhart, R. W. Ogden, W. Prager, C. Rogers, R. S. Rivlin, S. Tang, R. T. Shield, A. J. W. Ilson* и др.

Анализ полученных в этом направлении результатов приведен в работах и обзорных статьях А.Н.Гузя и его учеников.

Вопросам распространения волн малой амплитуды в телах с неоднородными начальными напряжениями посвящено небольшое число публикаций. В работах *M. Kurashige* исследовано влияние поля неоднородных начальных напряжений на скорости распространения волн с привлечением теории инкрементальных деформаций Био. Изучено влияние больших начальных деформаций, вызванных радиальным растяжением на бесконечности, на скорости распространения незатухающих осесимметричных волн малой амплитуды. Приведены примеры влияния поля неоднородных начальных напряжений, возникающих при распространении осесимметричной волны сдвига по конечно деформированной среде, на скорости волн.

В исследованиях А.А.Равасо рассмотрен процесс распространения одномерной продольной волны конечной амплитуды в упругой среде с плоской неоднородной предварительной деформацией, которая произвольно и гладко меняется вдоль оси распространения волны. Выводится асимптотическое решение, описывающее прифронтную зону волны и позволяющее следить за начальной стадией

возникновения нелинейных эффектов. В случае периодического краевого воздействия изучена возможность использования высокочастотной асимптотики в акустодиагностике двухпараметрического предварительного деформированного состояния среды.

Из анализа литературы следует, что к настоящему времени вопросы влияния неоднородной начальной деформации на скорости распространения волн являются недостаточно исследованными.

Ц е л ь ю работы является исследование влияния поля неоднородных начальных напряжений на фазовые скорости плоских поперечных волн малой амплитуды, распространяющихся вдоль цилиндрической полости в упругой среде, включая:

1. Постановку и развитие вариационного метода решения задач о распространении плоских поперечных волн малой амплитуды вдоль цилиндрической полости в сжимаемой и несжимаемой средах с неоднородными начальными напряжениями;

2. Вывод дисперсионных уравнений для определения фазовых скоростей поперечных осесимметричных волн в среде с цилиндрической полостью при наличии поля неоднородных начальных напряжений;

3. Исследование влияния поля неоднородных начальных напряжений на фазовые скорости поперечных волн в рамках второго варианта теории малых начальных деформаций для сжимаемой среды и в рамках теории конечных начальных деформаций для несжимаемой среды.

В основу исследования положены соотношения трехмерной линеаризованной теории упругости, предложенные в работах А.Н.Гузя.

Н а у ч н а я н о в и з н а. В диссертационной работе на основе трехмерной линеаризованной теории упругости в рамках второго варианта теории малых начальных деформаций для сжимаемого тела и в рамках теории конечных начальных деформаций для несжимаемого тела даны постановки, развит вариационный метод решения и построены дисперсионные уравнения задач о распространении плоских поперечных волн малой амплитуды вдоль цилиндрической полости в среде с неоднородными начальными напряжениями. Проведено численное исследование влияния неоднородного напряженно-деформированного состояния на фазовые скорости волн в среде с круговой цилиндрической полостью. Установлен характер зависимости фазовых скоростей поперечных

волн от величины начальных напряжений в различных диапазонах частотного спектра.

Достоверность результатов обеспечивается корректностью математической постановки задач, использованием точной линеаризированной теории упругости, строгостью выкладок, контролем сходимости вариационного метода при численных расчетах, а также удовлетворительным совпадением численных результатов с результатами, полученными в других работах аналитически.

Практическая ценность работы заключается в разработке и реализации методики решения указанного класса задач в виде программ для ЭВМ, позволяющих исследовать закономерности распространения волн малой амплитуды вдоль цилиндрической полости в рамках второго варианта теории малых начальных деформаций для сжимаемой среды и в рамках теории конечных начальных деформаций для несжимаемой среды при наличии поля неоднородных начальных напряжений. Результаты численных расчетов, а также выводы, сделанные на основе их анализа, могут быть использованы в инженерной практике при оценке прочности вертикальных выработок; а также при разработке ультразвукового неразрушающего метода контроля в элементах конструкций.

Основные результаты, полученные в работе, вошли в отчеты по плану научно-исследовательских работ Института механики АН УССР.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались: на семинарах отдела динамики и устойчивости сплошных сред Института механики АН УССР / г. Киев, 1987-1991 /; на семинаре "Статика, динамика и устойчивость неоднородных сред" Института механики АН УССР / г. Киев, 1991 /; на XII-XIV научных конференциях молодых ученых Института механики АН УССР / г. Киев, 1987-1990 /; на Республиканской научно-технической конференции "Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела" / Харьков, 1989 /; на XII Юбилейной конференции молодых ученых Института машиноведения им. Благонравова АН СССР "Актуальные проблемы машиноведения" / Москва, 1989 /.

Публикации. Основные результаты выполненных исследований отражены в работах [1-6].

Структура и объем работы. Диссертационная

работа состоит из введения, трех глав, заключения и списке литературы / 96 наименований /. Работа содержит 116 страниц машинописного текста, 18 рисунков, 5 таблиц.

### СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В о в е д е н и и дан краткий обзор работ, посвященным исследованиям закономерностей распространения упругих волн в предварительно напряженных телах и массивах, обусловлена актуальность диссертационной работы, сформулированы цель и задачи исследования. Кратко изложены основные научные положения, выносимые на защиту, и содержание работ по главам.

В первой главе, приведены некоторые основные соотношения нелинейной теории упругости, а также полученные при их линеаризации относительно конечных и малых начальных деформаций соотношения линеаризированной теории акустоупругости для сжимаемых и несжимаемых материалов. Сформулированы общие постановки граничных задач в перемещениях:

для сжимаемых тел

$$\nabla_i (\omega^{ij\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha) - \rho \ddot{u}^i = 0, \quad \Theta^n \in V \quad 11/$$

$$N_i (\omega^{ij\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha) = P^i, \quad \Theta^n \in S_1 \quad 12/$$

$$u^i = f^i, \quad \Theta^n \in S_2 \quad 13/$$

$$u^i = f_1^i, \quad \varepsilon = \varepsilon_0; \quad u^i = f_2^i, \quad \varepsilon = \varepsilon_1^0 \quad 14/$$

для несжимаемых тел

$$\nabla_i (\alpha^{ij\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha + \rho q^i) - \rho \ddot{u}^i = 0, \quad \Theta^n \in V \quad 15/$$

$$N_i (\alpha^{ij\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha + \rho q^i) = P^i, \quad \Theta^n \in S_1 \quad 16/$$

$$q^n \nabla_n u_j = 0, \quad \Theta^n \in V \quad 17/$$

$$u^i = f^i, \quad \Theta^n \in S_2 \quad 18/$$

$$u^i = f_1^i, \quad \varepsilon = \varepsilon_0; \quad u^i = f_2^i, \quad \varepsilon = \varepsilon_1^0 \quad 19/$$

Здесь  $V$  - объем, занимаемый телом;  $S_1$  и  $S_2$  - части по-

верхности, ограничивающей тело:  $S = S_1 + S_2$ ;  $N_i$  - составляющие вектора нормали  $\vec{N}$ ;  $\Theta^{\alpha}$  - криволинейные лагранжевы координаты;  $u^i$  - компоненты возмущений вектора перемещений  $\vec{u}$ ;  $\rho^i$  - компоненты вектора поверхностных сил  $\vec{\rho}$ ;  $\rho$  - плотность среды;  $\nabla$  - символ ковариантного дифференцирования. Все приведенные величины отнесены к единицам размеров в естественном состоянии (в конфигурации тела в момент времени  $t=0$ ). Величины  $\omega^{ijkl}$  и  $\alpha^{ijkl}$  представляют собой компоненты тензоров четвертого ранга, значения которых зависят от физико-механических и геометрических характеристик среды, и от значений величин начального напряженного состояния. Соотношения /I/-/9/ приведены в случае использования трехмерной линеаризированной теории упругости при конечных начальных деформациях. Переход к вариантам теорий малых начальных деформаций достигается посредством выполнения упрощений\*.

Приведенные постановки составляют основу исследований волновых процессов в телах с начальными напряжениями. Однако неоднородность начального напряженно-деформированного состояния приводит к необходимости решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Чтобы избежать возникающих при этом значительных трудностей математического плана, в настоящей диссертационной работе используется вариационный метод решения, в основе которого лежит вариационный принцип линеаризированной теории распространения волн в телах с начальными напряжениями.

С учетом формулировок задач /I/-/9/ вводятся функционалы

$$J_1(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left[ \frac{1}{2} \omega^{ijkl} (\nabla_p u_k)(\nabla_l u_j) - \frac{1}{2} \rho u^i \dot{u}_i \right] dV dt \quad /I0/$$

$$J_2(u, \rho) = - \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left[ \frac{1}{2} \alpha^{ijkl} (\nabla_p u_k)(\nabla_l u_j) + \rho g \dot{u}_i - \frac{1}{2} \rho u^i \dot{u}_i \right] dV dt \quad /II/$$

из условия стационарности которых следует соотношения /I/-/4/ и /5/-/9/ соответственно. Здесь учтено, что поверхностные силы отсутствуют.

\* Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: - В 2-х томах. - Киев.: Наук. думка, 1986. - Т.1. 374 с.; Т.2. 536 с.

Во второй главе в рамках трехмерной линеаризованной теории упругости исследуется распространение осесимметричных плоских поперечных волн малой амплитуды вдоль цилиндрической полости в сжимаемой среде с неоднородными начальными напряжениями. Неоднородность вызвана:

1/. заданными на бесконечности всесторонними радиальными растягивающими напряжениями:  $\sigma_{rr}^0|_{r=\rho} = 0$ ;  $\sigma_{rr}^0|_{r \rightarrow \infty} = P_1$

2/. растягивающими напряжениями, заданными на поверхности полости:  $\sigma_{rr}^0|_{r=\rho} = P_2$ ;  $\sigma_{rr}^0|_{r \rightarrow \infty} = 0$

С учетом данных граничных условий из уравнений равновесия в начальном состоянии находим такие выражения для компонентов начального напряженно-деформированного состояния

$$1/. \quad \varepsilon_{rr}^0 = \frac{P_1}{2\mu} \left[ \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{R^2}{r^2} \right]; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{P_1}{2\mu} \left[ \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{R^2}{r^2} \right]; \quad \varepsilon_{zz}^0 = 0$$

$$\sigma_{rr}^0 = P_1 \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right); \quad \sigma_{\theta\theta}^0 = P_1 \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right); \quad \sigma_{zz}^0 = \frac{\lambda P_1}{\lambda + \mu} \quad /12/$$

$$2/. \quad \varepsilon_{rr}^0 = \frac{P_2 R^2}{2\mu r^2}; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^0 = -\frac{P_2 R^2}{2\mu r^2}; \quad \sigma_{rr}^0 = P_2 \frac{R^2}{r^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^0 = -P_2 \frac{R^2}{r^2}; \quad \varepsilon_{zz}^0 = \sigma_{zz}^0 = 0 \quad /13/$$

В случае распространения осесимметричной волны волновое движение характеризуется вектором перемещений, зависящим от двух компонентов:  $\vec{u} = \vec{u}(u_r, u_z)$

Введем следующее представление для этих компонентов

$$u_r = \sum_{n=2}^N A_n \left( \frac{R}{r} \right)^n \cos(\kappa z - \omega t); \quad u_z = \sum_{n=2}^N B_n \left( \frac{R}{r} \right)^n \sin(\kappa z - \omega t) \quad /14/$$

где  $\kappa$  - волновое число;  $\omega$  - круговая частота;  $A_n, B_n$  - неизвестные постоянные коэффициенты.

С учетом /14/ из вариационного уравнения  $\delta \Pi(u) = 0$ , где функционал определяется соотношением /10/, приходим к системе линейных однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=2}^N [\alpha_i(m, n, \gamma_j, \kappa R, c^2) A_m + \beta_i(m, n, \gamma_j, \kappa R, c^2) B_m] = 0, \quad /15/$$

$i=1, 2; \quad n=2, N$

Из условия существования нетривиальных решений системы уравнений /15/ выводим дисперсионное уравнение для определения фазовых скоростей осесимметричных плоских поперечных волн малой амплитуды в сжимаемой среде с цилиндрической полостью

$$\Delta(c^2, \kappa R, \gamma_j, N) = 0 \quad /16/$$

где  $\Delta$  - определитель системы уравнений /15/.

Здесь  $\gamma_i^j = \gamma_j$ ,  $i, j = 1, 16$  - величины, зависящие от компонентов

начального состояния и формы упругого потенциала. Необходимо отметить, что дисперсионное уравнение /16/ получено для произвольного трехинвариантного упругого потенциала.

Конкретные результаты получены для стали 09Г2С, упругие свойства которой описывались трехинвариантным потенциалом типа Мурнагана

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda A_1^0 + \mu A_2^0 + \frac{\alpha}{3} A_1^0{}^3 + \beta A_1^0 A_2^0 + \frac{c}{3} A_3^0 \quad /17/$$

Значения упругих постоянных для данного материала в случае второго варианта теории малых начальных деформаций брались равными ( $\times 10^{-9}$  н/м<sup>2</sup>):

$$\lambda = 92,6; \mu = 77,5; \alpha = -319; \beta = -303; c = -18,4 \quad /18/$$

Прежде всего исследовалось влияние выбора числа координатных функций  $n$ , равного  $2N-2$ , на значение корней дисперсионного уравнения /16/ на примере первой волновой моды при фиксированном значении обобщенной частоты. В результате проведенных исследований выявлено, что для получения удовлетворительной точности необходимо использовать не менее 16 координатных функций.

В диссертации приведены результаты численного исследования влияния поля начальных напряжений на скорости волн для первых пяти мод. Для практики наибольший интерес представляет первая мода, наиболее локализованная вблизи граничной поверхности и в коротковолновом пределе переходящая в волну Рэлея. На рис.1 помещены кривые, характеризующие зависимость отношения фазовой скорости  $C_0$  в ненапряженной среде к скорости поперечных волн  $C_2$  от обобщенной частоты  $\bar{k} = k_s R$ . На рис.2,3 приведены графики, описывающие зависимость величины относительного изменения фазовой скорости  $\varrho = (C_0 - C) \cdot 10^4 / C_0$  для некоторых значений параметров  $\psi = \rho_1 / \mu$  и  $\bar{\psi} = \rho_2 / \mu$  соответственно, от величины  $\bar{k}$  для первой волновой моды. Значения параметров  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  выбирались таким образом, чтобы материал находился в пределах упругой области. Кривые построены для следующих значений параметров:  $\psi_1 = \bar{\psi}_1 = 0,0004$ ;  $\psi_2 = \bar{\psi}_2 = 0,00065$ ;  $\psi_3 = \bar{\psi}_3 = 0,0009$ ;  $\psi_4 = \bar{\psi}_4 = 0,00115$ . На рис.4,5 показано влияние величин начального растяжения на бесконечности и напряжений, заданных на поверхности полости, соответственно, на относительное изменение фазовой скорости поперечных волн при фиксированных значениях

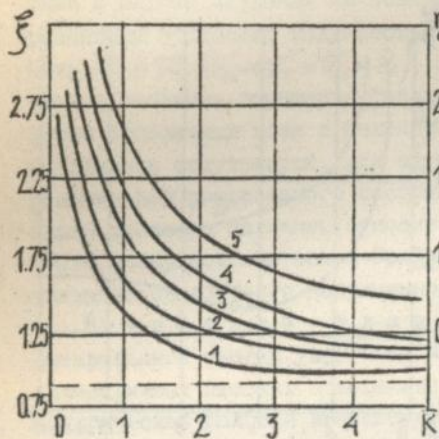


Рис. 1.

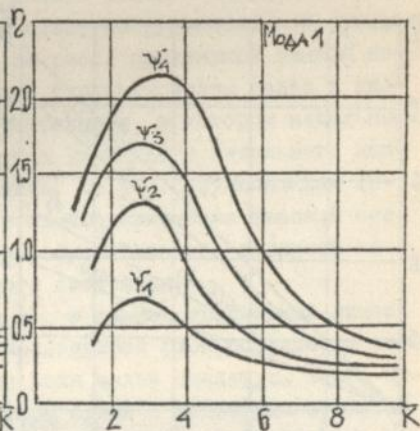


Рис. 2.

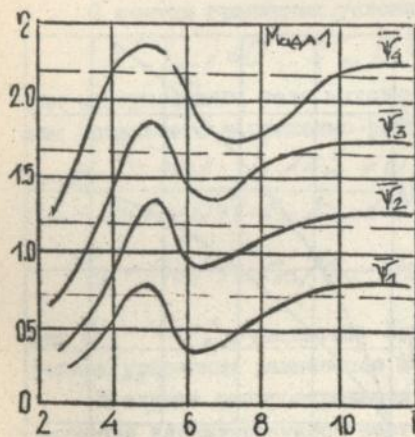


Рис. 3.

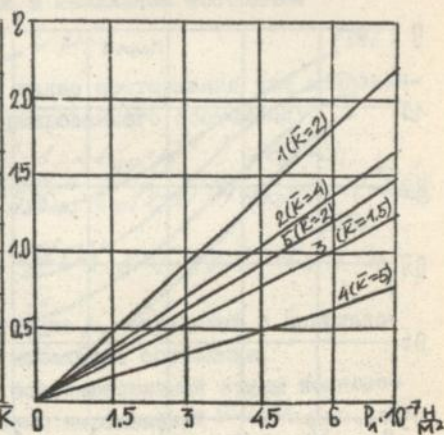
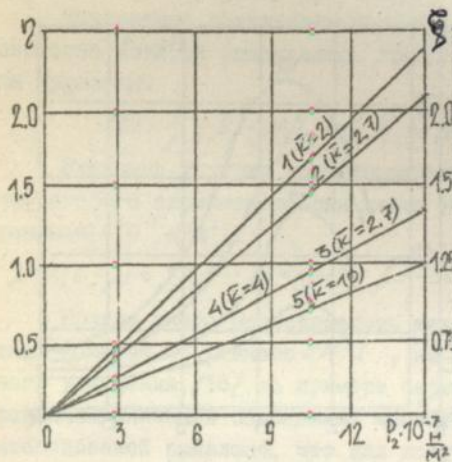
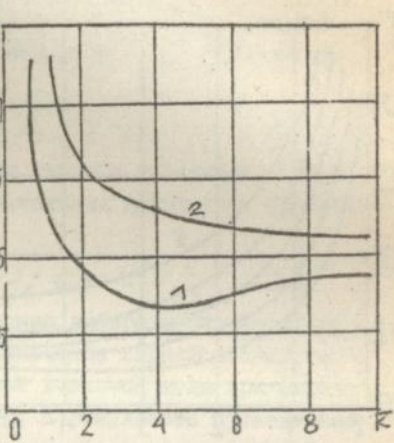


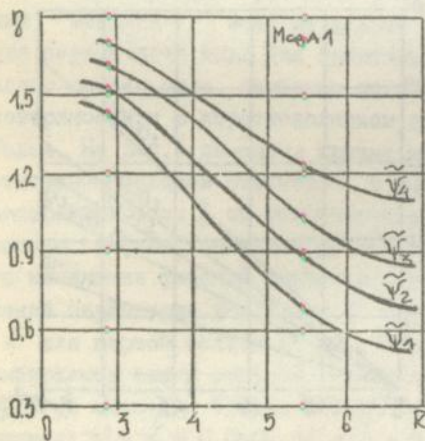
Рис. 4.



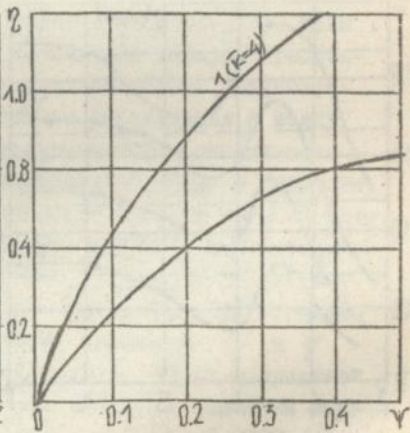
Pnc. 5.



Pnc. 6.



Pnc. 7.



Pnc. 8.

обобщенной частоты.

При больших значениях параметра  $\bar{\kappa}$  (высокочастотные волны) напряженное состояние среды можна считать однородным, аналогичным в случае заданных на поверхности полости напряжений напряженному состоянию полупространства, загруженного в направлениях  $OX_1$  и  $OX_3$  ( $\delta_{xx}^0 = \sigma; \delta_{zz}^0 = \delta_{33}^0 = P_2$ ). На рис.1 пунктирной линией показана величина отношения фазовой скорости волны Рэлея к скорости поперечных волн в полупространстве, в котором начальные напряжения отсутствуют, для случая двухосного начального напряженно-деформированного состояния. На рис.3 пунктирными линиями показаны величины относительного изменения фазовой скорости поверхностной волны Рэлея, обусловленного влиянием начального однородного напряженного состояния.

В третьей главе в рамках трехмерной линеаризированной теории упругости исследуется распространение осесимметричных плоских поперечных волн малой амплитуды вдоль цилиндрической полости в несжимаемой среде с конечными неоднородными начальными деформациями. Неоднородность вызвана всесторонними радиальными растягивающими напряжениями на бесконечности.

С учетом граничных условий в начальном состоянии

$$S_{rr}^0|_{r=R} = 0; S_{rr}^0|_{r \rightarrow \infty} = P \quad /18/$$

для неогукковского тела находим такие соотношения для компонентов начального напряженно-деформированного состояния:

$$\begin{aligned} u_r^0 &= r(Q-1); 2\varepsilon_{rr}^0 = Q^{-2}-1; 2\varepsilon_{\theta\theta}^0 = Q^2-1; 2\varepsilon_{zz}^0 = 0; \\ S_{rr}^0 &= C_{10}(1+Q^4(1+C_{20}/C_{10}-4Q^2)); S_{\theta\theta}^0 = C_{10}(2+Q^{-4}(1+C_{20}/C_{10}-Q^{-2}4Q^2)); \\ S_{zz}^0 &= C_{10}(3+C_{20}/C_{10}-Q^{-2}-4Q^2); p_0 = C_{10}(1-Q^{-2}-4Q^2 + C_{20}; \end{aligned} \quad /19/$$

где  $Q^2 = 1 + \kappa r^2$ , а множитель Лагранжа  $p_0$  определен с использованием уравнения равновесия в начальном состоянии.

В случае распространения осесимметричной волны волновое движение характеризуется вектором перемещений  $\vec{u} = \vec{u}(u_r, u_z)$  и скаляром  $p$ . Решение волновой задачи будем искать в следующем виде

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{n=2}^N A_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \cos(\kappa z - \omega t); u_z = \sum_{n=2}^N B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \sin(\kappa z - \omega t), \\ p &= \sum_{n=2}^N C_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \cos(\kappa z - \omega t). \end{aligned} \quad /20/$$

где  $A_m$ ,  $B_m$  и  $C_m$  - неизвестные постоянные коэффициенты.

Записав вариационное уравнение  $\delta J_2(u, \rho)$  с учетом вида функционала /II/ и представлений /20/, приходим к системе линейных однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^N [\tilde{a}_i(m, \rho, \kappa R, c^2) A_m + \tilde{b}_i(m, \rho, \kappa R, c^2) B_m] = 0, \quad i=1, 2; \quad \rho=2N /21/$$

из условия существования нетривиальных решений которой выводим дисперсионное уравнение для определения фазовых скоростей поперечных волн в несжимаемой среде с полостью при наличии поля неоднородных начальных напряжений в виде

$$\Delta(c^2, \kappa R, N) = 0 \quad /22/$$

где  $\Delta$  - определитель системы уравнений /21/.

Численное исследование дисперсионного уравнения /22/ выполнено для каучука, значение упругой постоянной для которого бралось равным  $2C_{10} = 10^6 \text{ н/м}^2$ .

Прежде всего выяснялся характер влияния выбора числа координатных функций  $n$ , равного  $2N-2$ , на значения корней дисперсионных уравнений. На примере первой волновой моды показано, что удовлетворительная точность вычислений обеспечивается не менее чем шестнадцатью координатными функциями. На рис.6 показано зависимость отношения фазовой скорости  $C_0$  к скорости поперечных волн  $C_s$  от обобщенной частоты  $\bar{\kappa}$  для первых двух мод в случае ненапряженной среды. На рис.7 для первой моды показано зависимость величины относительного изменения фазовой скорости  $\bar{\eta} = (C_0 - c) \cdot 10^4 / c_0$ , вызванного радиальным растяжением на бесконечности, от параметра  $\bar{\kappa}$ . Кривые построены для следующих значений параметра  $\bar{\psi} : \bar{\psi}_1 = 0,1; \bar{\psi}_2 = 0,2; \bar{\psi}_3 = 0,3; \bar{\psi}_4 = 0,5$ . На рис.8 помещены кривые, описывающие влияние величины радиального растяжения на бесконечности на относительное изменение фазовой скорости волн при некоторых значениях параметра  $\bar{\kappa}$ .

**В з а к л ю ч е н и и** сформулированы основные научные результаты, полученные в диссертационной работе, сформулированы выводы, сделанные на основании этих результатов.

В настоящей диссертационной работе в рамках трехмерной линейризированной теории упругости впервые проведено исследование влияния поля неоднородных начальных напряжений на фазовые скорости плоских поперечных волн малой амплитуды, распространяющихся вдоль цилиндрической полости в упругой среде, включая:

1. Постановку и развитие вариационного метода решения задач о распространении плоских поперечных волн малой амплитуды вдоль цилиндрической полости в сжимаемой и несжимаемой средах с неоднородными начальными напряжениями;

2. Вывод дисперсионных уравнений для определения фазовых скоростей осесимметричных поперечных волн в среде с цилиндрической полостью при наличии неоднородного поля начальных напряжений;

3. Исследование с использованием ЭВМ влияния неоднородных начальных напряжений на фазовые скорости поперечных волн в рамках теории малых начальных деформаций для сжимаемой среды, упругие свойства которой описывались потенциалом типа Мурнагана, и в рамках теории конечных начальных деформаций для несжимаемой среды, упругие свойства которой описывались потенциалом Трелоара.

Полученные числовые результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. В случае сжимаемой среды с малыми неоднородными начальными деформациями:

1/. Первая волновая мода стремится к поверхностной волне Рэлея относительно плоской границы, а остальные выходят на волну сдвига;

2/. В зависимости от частоты влияние неоднородных начальных деформаций имеет различный характер;

3/. Для каждой моды существует область частот, где неоднородные начальные напряжения оказывают существенное влияние на относительное изменение фазовой скорости поперечных волн (область критических частот);

4/. Для некоторых мод существуют частотные диапазоны, на которых влияние неоднородного поля начальных напряжений на относительное изменение фазовой скорости поперечных волн незначительно;

5/. Для некоторых волновых мод существуют частотные интервалы, на которых влияние неоднородных начальных напряжений на относительное изменение фазовой скорости практически не зависит от частоты;

6/. При фиксированном значении частоты фазовая скорость поперечных волн изменяется от величины начального напряжения по линейному закону.

II. В случае несжимаемой среды с конечными неоднородными начальными деформациями:

1/. Первая волновая мода стремится к поверхностной волне Рэлея относительно плоской границы, а вторая выходит на волну сдвига;

2/. Величина относительного изменения фазовой скорости обусловленного влиянием поля неоднородных начальных напряжений, имеет монотонный характер и наиболее значительна в окрестности критических частот;

3/. Фазовая скорость поперечных волн возрастает с увеличением начального радиального растяжения на бесконечности;

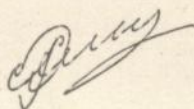
4/. Влияние неоднородных начальных напряжений на фазовые скорости поперечных волн имеет нелинейный характер.

III. На конкретном примере показано влияние неоднородных начальных напряжений на скорости волн. При больших значениях параметра  $\bar{\kappa}$  (высокочастотные волны) неоднородное напряженно-деформированное состояние, вызванное заданными на поверхности полости растягивающими напряжениями, приводит к изменениям фазовой скорости поперечных волн на 10% большим, чем однородное напряженно-деформированное состояние полупространства, нагруженного в направлениях  $Ox_1$  и  $Ox_2$ .

По материалам диссертации опубликованы следующие статьи:

1. Влияние неоднородных начальных напряжений на скорости упругих волн в среде с цилиндрической полостью // Тезисы докладов Республиканской научно-технической конференции "Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела" (Харьков, 1989) /соавт. Махорт Ф.Г./
2. Распространение гармонических волн вдоль цилиндрической полости в сжимаемой среде с начальными напряжениями // Прикл. механика.- 1990.- 26, № 2.- С. 31-36 /соавт. Махорт Ф.Г./.
3. Распространение плоских поперечных волн в сжимаемой предварительно напряженной среде с цилиндрической полостью // Там же.- 1990.- 26, № 5.- С. 115-119 /соавт. Махорт Ф.Г./.
4. Распространение упругих волн вдоль цилиндрической полости в среде с заданными начальными напряжениями // Труды XII научной конференции молодых ученых Института механики АН УССР, Кийлов, 27-29 мая, 1987. Ч. I.- Киев, 1987.- С. 270-274.- Деп. в ВИНТИ 29.07.87, № 5389 - В87.

5. К вопросу о распространении волн вдоль цилиндрической полости в среде с заданными неоднородными начальными напряжениями // Труды XV научной конференции молодых ученых Института механики АН УССР, 29 мая - 1 июня 1990. Ч.1.- Киев, 1990. - С. 280-287.- Деп. в ВИНТИ 10.07.90, № 3801 - В90.
6. Исследование распространения волн вдоль цилиндрической полости в неограниченной среде с неоднородными начальными напряжениями // Тезисы докладов XII Юбилейной конференции молодых ученых Института машиноведения АН СССР "Актуальные проблемы машиноведения" (Москва, 16-18 января 1989 г.).



Подписано к печати 05.11.1991г.

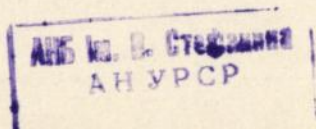
Формат 60x84/16.

Бумага офсетная Усл.-печ.лист.1,0.

Уч.-изд.лист 1,0.

Тираж 100. Заказ 1430. Бесплатно

ФОН Института электродинамики АН УССР,  
252057, Киев-57, проспект Победы, 56.



Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.

RECEIVED  
JAN 10 1919



AB 25.370

~~2~~

~~2~~