

На правах рукописи

ГРИЩАК Сергей Викторович

УДК 539.3

# МЕТОД СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ  
ПРИ НЕОДНОРОДНОМ НАПРЯЖЕННОМ  
СОСТОЯНИИ

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Работа выполнена в Днепропетровском ордена Трудового Красного Знамени горном институте имени Артема

Научный руководитель — доктор технических наук  
профессор Дидык Р.П.

Официальные оппоненты :

доктор физико-математических наук  
профессор В.И.Пожуев,

доктор технических наук  
профессор Ю.А.Мельников

Ведущая организация — Московский инженерно-строительный институт  
им. В.В.Куйбышева

Защита диссертации состоится "18" сентября 1992 г.  
в 15 часов на заседании специализированного совета  
К 068.38.01 при Запорожском ордена "Знак Почета" машиностроительном институте им.В.Я.Чубаря по адресу: 330063, Запорожье, ГСП-39, ул.Жуковского, 64.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "15" сентября 1992 г.

Ученый секретарь специализированного  
совета, д.т.н., профессор

И.П.Волчок

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00815813 (Q)

ЛННБ ім. В. Стефаника  
АН УРСР

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Вопросы исследования статической и динамической устойчивости конструкций при неоднородном напряженном состоянии представляют значительный теоретический и практический интерес в связи с интенсивным использованием тонкостенных конструкций в современном общем и специальном машиностроении. В последние годы аналитические методы с использованием асимптотических подходов весьма эффективно используются при решении задач устойчивости и колебаний упругих систем, в том числе тонкостенных пластин и оболочек переменной геометрии и жесткости, а также конструкций с разрывными жесткостными характеристиками.

Принципиальной с точки зрения теоретического анализа и приложений является проблема построения приближенных аналитических решений, которые могут служить в качестве опорных для численной реализации сложных систем и оценочных, когда речь идет о достоверности полученных численных результатов. Кроме того, как известно, в сингулярных задачах использование прямых численных методов наталкивается на определенные вычислительные трудности, связанные с необходимостью резкого уменьшения шага интегрирования при приближении к особой точке, что приводит к существенной затрате машинного времени, а иногда приводит к неустойчивости алгоритма численной реализации.

Разработке общей теории и развитию методов расчета инженерных конструкций при статическом и динамическом нагружении посвящены работы Алфутова Н.А., Андреева Л.В., Афанасьевой А.Д., Вольмира А.С., Герасименко П.В., Григолюка Э.Н., Грищака В.З., Даревского В.М., Кармишина А.В., Малютина И.С., Маневича Л.И., Мельникова Ю.А., Печникова В.П., Пожухова В.И., Писанко А.Н., Преображенского И.Н., Савчука А.Р., Суркина Р.Г., Тимашева С.А.,

Ахенбаха И.Д., Баруха М., Бреммера Н., Будянского Б., Фултона Р., Матковского Б., Сировича Л., Стилла Ч. и других.

Несмотря на значительное количество теоретических и прикладных исследований в данной области, основанных главным образом на использовании прямых численных методов, проблемы построения приближенных аналитических решений многих важных классов краевых задач, особенно задач на собственные значения, остаются во многих случаях открытыми или же требуют дальнейшей уточненной разработки.

В настоящее время разработано большое число приближенных способов нахождения собственных значений, основанных главным образом на вариационных методах. Широкую популярность среди исследователей и инженеров-практиков приобрели метод конечных элементов и метод граничных элементов — весьма эффективные методы решения прикладных задач для сложных механических систем. Однако и эти мощные численные методы присущ недостаток, обсуждаемый выше.

В практике проектирования современных конструкций, как правило, предполагается, что внешние нагрузки равномерно распределены вдоль координатных линий. В реальных объектах внешние нагрузки являются функциями координат, что приводит к неоднородности напряженного состояния и соответственно к необходимости интегрирования разрешающих дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Целью диссертационной работы является разработка и применение аналитического подхода, основанного на использовании метода сингулярных возмущений, в частности, метода фазовых интегралов к решению задач устойчивости и динамики упругих систем при неоднородном напряженном состоянии, вызванном переменностью внешних нагрузок, с получением замкнутых расчетных зависимостей для опре-

деления параметров критических усилий и частот колебаний в исследуемых механических системах.

Научная новизна выносимых на защиту результатов заключается в следующем:

1. Асимптотический метод сингулярных возмущений, в частности, метод фазовых интегралов, распространен на класс инженерных задач механики при воздействии переменных нагрузок.

2. Предложены алгоритмы построения приближенных аналитических решений прикладных задач.

3. Выявлены новые качественные эффекты в поведении упругих конструкций при воздействии на них переменных нагрузок.

Достоверность основных положений работы, содержащихся в ней практических выводов обеспечивается математической строгостью моделей исследуемых систем, а также сравнениями с известными результатами, прошедшими проверку практикой, и предельными переходами в конечных зависимостях и формулах.

Научное значение исследований, проведенных в диссертации, состоит в развитии математических методов построения приближенных аналитических решений прикладных задач механики деформируемого твердого тела, сводящихся к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами, а также к уравнениям, содержащим точку поворота.

Практическая значимость содержащихся в работе результатов связана с построением аналитических решений задач устойчивости цилиндрической, конической оболочек и круговой арки при нагружении статическим давлением, изменяющимся по координате; сферической оболочки, подверженной динамическому внешнему давлению; на основе физических представлений обсуждается решение задачи о прохождении волны расширения через неоднородную среду; полученные

аналитические решения могут служить основой для эффективного использования численных методов и подходов к решению более сложных задач механики конструкций; полученные данные и зависимости при решении конкретных прикладных задач, которые позволяют повысить качество реальных проектно-конструкторских разработок и снизить в ряде случаев материалоемкость изделий.

Внедрение результатов. Результаты диссертации и разработанные алгоритмы расчета внедрены в Институте черной металлургии в проектные работы по созданию комплекса программ для расчета напряженно-деформированного состояния и устойчивости тонколистовых рулонов горячекатанных и холоднокатанных полос.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы доложены и получили одобрение на III научно-технической конференции молодых ученых и специалистов (Днепропетровск 1988), II Всесоюзной конференции "Проблемы снижения материалоемкости силовых конструкций" (Горький, 1989), I Всесоюзной конференции "Математическое моделирование в машиностроении" (Куйбышев, 1990), ежегодных итоговых научных конференциях и семинарах кафедры технологии горного машиностроения Днепропетровского горного института, научном семинаре по механике деформируемого твердого тела при Запорожском машиностроительном институте.

Публикации. Основное содержание выполненных по теме диссертации исследований опубликовано в 4 печатных трудах.

Структура и объем диссертационной работы. Работа изложена на 134 страницах машинописного текста и состоит из введения, четырех глав и заключения, включает список литературы из 85 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дана развернутая характеристика актуальности проблемы, дан краткий общий обзор работ, посвященных решению наиболее важных вопросов статической и динамической устойчивости элементов инженерных конструкций при неоднородном напряженном состоянии, поставлена цель диссертационной работы и выделены главные вопросы, подлежащие разработке. Кратко охарактеризованы все главы диссертационной работы.

Первая глава посвящена применению метода фазовых интегралов к решению задачи устойчивости сферической оболочки при действии импульса внешнего давления. Получено приближенное аналитическое решение задачи, справедливое для широкого класса законов изменения формы импульса от времени.

В отличие от существующих численных решений дифференциально-го уравнения, связывающего параметр нормального прогиба с изменяющейся во времени нагрузкой, предположение о том, что в квадрат частоты собственных колебаний исследуемой системы является величиной относительно большой, позволяет построить асимптотическую процедуру нахождения критического параметра внешней нагрузки. При этом закон изменения давления от времени, являясь непрерывной функцией, не сказывается принципиально на структуре полученного решения.

Исследование начальной стадии динамического выпучивания сферической оболочки описывается линейризованным дифференциальным уравнением теории пологих оболочек

$$\frac{D}{h} \nabla^6 (W - W_0) + \frac{E}{R^2} (W - W_0) + \frac{q(t)R}{2h} \nabla^4 W = \quad (I)$$
$$= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 W) = 0,$$

$$\text{где } \nabla^6 = \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2, \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \quad (2)$$

Введем безразмерных параметров с учетом решения в форме

$$W(x, y, t) = f(t) F(x, y) \quad (3)$$

$$W_0(x, y, t) = f_0 F(x, y)$$

исходное уравнение ( I ) сводится к дифференциальному уравнению второго порядка по времени с переменными коэффициентами:

$$\varepsilon^2 \ddot{f} + \left\{ \left[ \frac{q^*(t^*)}{q_0^*} - 1 \right] f + f_0 \right\} = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } \varepsilon^2 = \omega^{*2}, \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = (\cdot), \quad t^* = \frac{\nu}{R} t, \quad (5)$$

$$f(t^*) = \frac{f(t)}{h}, \quad f_0 = \frac{f_0}{h}$$

Решение однородного уравнения, соответствующего уравнению ( 4 ), в соответствии с методом фазовых интегралов представляется в форме

$$f(t^*) = \exp \int \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i-1} \psi_i(t^*) dt^* \quad (6)$$

В результате подстановки ( 6 ) в ( 4 ) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$  имеем в первом приближении общее решение исходного уравнения ( 4 ) в форме:

$$f(t^*) = C_1 \sin \omega^* T(t^*) + C_2 \cos \omega^* T(t^*) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \omega^* \int_0^{t^*} [\cos \omega^* T(t^*) \int k^{-1/2}(t) \sin \omega^* T(t) dt - \\
 & - \sin \omega^* T(t^*) \int k^{-1/2}(t) \cos \omega^* T(t) dt]
 \end{aligned} \quad (7)$$

Во втором приближении решение имеет соответственно вид:

$$\begin{aligned}
 \xi(t^*) = & k^{-1/4}(t^*) [c_1 \sin \omega^* T(t^*) + c_2 \cos \omega^* T(t^*)] \\
 & - \omega^* \int_0^{t^*} k^{-1/4}(t) [\cos \omega^* T(t^*) \int k^{-1/2}(t) \sin \omega^* T(t) dt - \\
 & - \sin \omega^* T(t^*) \int k^{-1/2}(t) \cos \omega^* T(t) dt],
 \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 T(t^*) &= \int k^{1/2}(t) dt, \\
 k(t^*) &= \frac{q^*(t)}{q_0^*} - 1
 \end{aligned} \quad (9)$$

Для конкретных геометрических и жесткостных параметров оболочки проведен расчет функции нормального перемещения в зависимости от параметра времени и определена его критическая величина при выбранном критерии устойчивости, соответствующем параметру перемещения, равному единице. Отличие от численного решения, полученного методом Рунге-Кутты уже в первом приближении составило 8%.

Во второй главе работы метод сингулярных возмущений использован для построения асимптотического решения задачи устойчивости цилиндрической оболочки, подверженной переменному внешнему давлению. Для уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами, соответствующего полубезмоментной теории оболочек и

содержащего малый параметр при старшей производной, предложено аналитическое решение, реализованное для конкретных законов изменения внешнего давления и граничных условий. В общем случае оболочка может быть подкреплена частой системой продольных и поперечных ребер жесткости.

После разделения переменных задача свелась к отысканию собственных значений уравнения

$$\varepsilon^4 W'' - \bar{\lambda}(x)^4 W = 0, \quad (10)$$

где

$$\bar{\lambda}^4 = n^4 \left[ q(x) \frac{R}{B_1 n^2} - \frac{D_2}{B_1 R^2} \right], \quad (11)$$

$n$  - число волн в окружном направлении при потере устойчивости;  $B_1$  и  $D_2$  - соответственно жесткостные характеристики оболочки при растяжении-сжатии в осевом направлении и изгиб в окружном направлении;  $\varepsilon = n^{-1}$  - малый параметр; при заданных граничных условиях.

Используя решение в форме (6) в случае, например, линейного закона изменения внешнего давления и жесткого заземления торцов, расчетные зависимости для определения критического параметра давления имеют вид:

$$q_0^{кр} = \frac{1}{1 + \alpha l} \left[ \frac{n^2 D_2}{R_3} + (4,73)^4 \frac{B_1 R^3}{\varepsilon^4 n^6} \right] \quad (12)$$

для случая малой изменчивости функции давления;

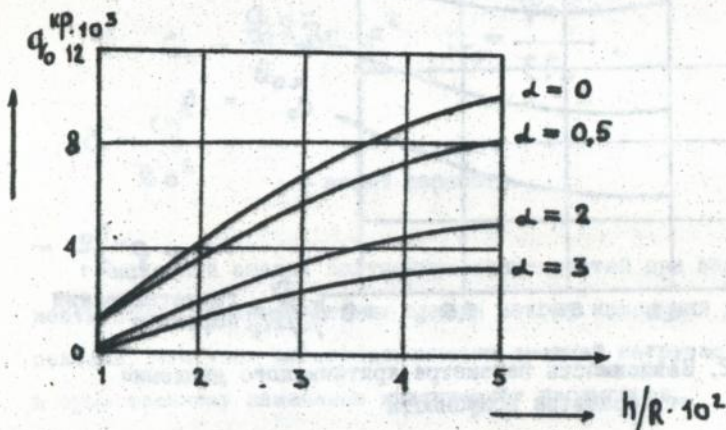
$$q_0^{кр} = (4,73 \frac{5}{4} \alpha)^4 \frac{B_1}{n^6} \cdot \frac{1}{Q_0}, \quad (13)$$

где

$$Q_0 = \left[ (1 + \alpha \ell)^{5/4} \left( 1 - \frac{5}{4} \frac{n^2 D^2}{R^3 Q_0 (1 + \alpha \ell)} \right) - 1 + \frac{5}{4} \frac{n^2 D^2}{R Q_0} \right] \quad (14)$$

- для случая большой изменчивости функции давления.

Характерная зависимость критического давления от относительной толщины оболочки и характера изменчивости внешнего давления приведена на рис. I.



Зависимость  $\bar{q}^{kp} = \bar{q}_0^{kp}(\alpha, h/R)$

Рис. I.

На основе изложенного подхода исследовано влияние конусности оболочки на ее устойчивость, исходя из разрешающего уравнения вида:

$$(s^4 V''')'' - \beta^4 V = 0, \quad (15)$$

где  $V$  - тангенциальное перемещение точек срединной поверхности;

$$\beta^4 = q(s) \frac{l_{\text{con}}^4 (n^2 - 1)}{A_{s_0} \sin^3 \gamma \cos^3 \gamma} - \frac{D_{\theta_0} \cos^4 \gamma (n^2 - 1)}{A_{s_0} l_0^2 \sin^6 \gamma} \quad (16)$$

$s$  - осевая координата;  $l_0$  - расстояние от полуса до меньшего основания;  $A_{s_0}$ ,  $D_{\theta_0}$  - приведенные жесткость на растяжение сжатие и изгиб при  $s = l_0$ .

Характерные зависимости представлены на рис. 2.

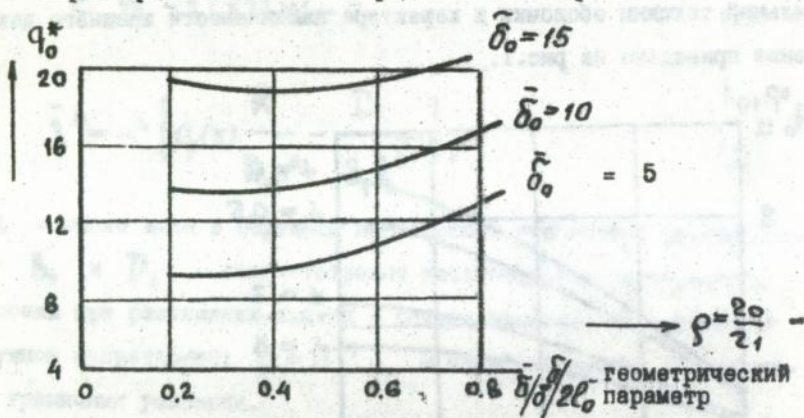


Рис. 2. Зависимость параметра критического давления от параметра конусности

Построенное приближенное аналитическое решение задачи устойчивости пролета гладкой оболочки при действии переменного давления позволило на основе метода начальных параметров в матричной форме учесть влияние дискретности расположения промежуточных шпангоутов на общую устойчивость оболочки.

Третья глава работы посвящена исследованию устойчивости упругой круговой арки при знакопеременном давлении. Появляющаяся в разрешающем уравнении точка поворота, обусловленная знакопеременностью давления, приводит к необходимости построения

"сквозного" асимптотического представления решения дифференциального уравнения второго порядка с переменным коэффициентом. При условии шарнирного опирания торцов условие нетривиальности решения уравнений приводит к определителю, равенство нулю которого дает следующее уравнение для отыскания критического давления:

$$A_i(\tau_0) B_i(\tau_1) - A_i(\tau_1) B_i(\tau_0) = 0. \quad (17)$$

где  $A_i$  и  $B_i$  - функции Эри;

$$\tau = G_0 - \frac{G_0}{\theta_0} \theta - \varepsilon^2; \quad G_0 = \frac{q_0 z_0}{E F_0}; \quad (18)$$

$$\varepsilon^2 = \frac{i_0^2}{2 \theta_0^2}$$

- малый параметр.

Численный анализ полученных зависимостей при заданных жесткостных характеристиках арки и закона изменения давления показал, что учет знакопеременности внешней нагрузки приводит к существенному изменению критических параметров.

В четвертой главе диссертации на задаче о прохождении безвихревой волны расширения через неоднородную среду показано, как асимптотические решения, соответствующие методу фазовых интегралов, могут быть получены применительно к уравнению второго порядка с переменными коэффициентами другим путем на основе физических представлений волнового процесса с использованием проникающей и отраженной волн на кусочно-постоянном слое с последующим устремлением толщины слоев к нулю. Полученное в результате решение использовано при исследовании задачи о продольных колебаниях кусочно неоднородного стержня, частота продольных колеба-

ний которого определяется из конечной формулы:

$$\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(2n-1)/a\sqrt{\frac{P_0}{E_0}} + \int_0^{l_0} q(x)^{1/2} dx \quad (19)$$

В предельном случае  $g(x) = \text{const}$  имеем известный результат.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные теоретические и практические результаты, полученные в диссертационной работе сводятся к следующему:

1. На основе метода сингулярных возмущений получены асимптотические решения новых задач механики упругих конструкций.

2. Решены новые практически важные задачи: устойчивости сферической оболочки при действии импульса внешнего давления; цилиндрической, конической оболочки при статическом внешнем давлении, круговой арки при действии знакопеременного давления.

3. Исследованы и описаны следующие механические эффекты: влияние геометрических параметров оболочек и арки на поведение конструкций при динамическом и переменном статическом внешнем нагружении; влияние характера изменчивости внешнего воздействия на устойчивость исследуемых конструкций; влияние изменчивости механических свойств на продольные колебания стержня с кусочно-неоднородными свойствами.

4. Результаты диссертации и разработанные алгоритмы расчета внедрены в Институте черной металлургии г.Днепропетровска в проектные работы по созданию комплекса программ для расчета напряженно-деформированного состояния и устойчивости тонколистовых рулонов.

Основное содержание диссертации опубликовано  
в следующих работах:

1. Грицак С.В. О прохождении волны через неоднородную среду.- Сб. Методы решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела.- Днепропетровск, 1989.- С. 32-35.
2. Грицак С.В., Писанко А.Н. Некоторые задачи механики неоднородных конструкций с точкой поворота.- Тез. докл. I Всес. конф. "Математическое моделирование в машиностроении".- Куйбышев, 1990.
3. Грицак С.В., Дидык Р.П., Писанко А.Н. Динамическая устойчивость сферической оболочки при внешнем давлении.- Тез. докл. II Всес. конф. "Проблемы снижения материалоемкости силовых конструкций".- Горький, 1989.
4. Грицак С.В., Дидык Р.П., Писанко А.Н. Построение аналитического решения задачи о динамической устойчивости сферической оболочки.- В кн. Математическое и электронное моделирование в машиностроении.- Киев, 1990.



АВТОРЕФЕРАТ

Ответственный за издание. И.П. Волчск. Сдано в набор 24.12.91. Подписано в печать 24.12.91. Формат 60x84 1/16. Бумага газетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 0,69. Усл. кр. отт. 0,69. Тираж 100 экз. Зак. № 9770. Заказное. Бесплатно. Городская типография 320070 г. Днепропетровск, ул. Серова, 7.

466718

Бесплатно

AB 25.398  
AB 25.398

40

40