ЛЬВОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ИВАНА ФРАНКО

На правах рукописи
УДК 517.948

СКАСКИВ РОМАН БОГДАНОВИЧ

Численное решение нестационарных задач теплопроводности методом интегральных преобразований и граничных интегральных уравнений

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ЛЬВОВ - 1991

Работа выполнена во Львовском государственном университете имени И.Франко

Научный руководитель кандидат физико-математических наук, доцент $\boxed{\text{ЛЮДКЕВИЧ ИОСИФ ВАСИЛЬЕВИЧ}}$

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор МАКАРОВ В.Л.
кандидат физико-математических наук, доцент ШИНКАРЕНКО Г.А.

Ведущая организация: Черновицкий государственный университет им. Ю.Федьковича

Защита состоится "15" 01 1992 г. в "15.00" часов на заседании специализированного совета К 068.26.12 при Львовском государственном университете им. И.Франко, г.Львов, ул.Университетская, 1

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Львовского государственного университета им. И.Франко

Автореферат разослан "13" 12 1991 г.

Ученый секретарь
специализированного совета Б.А.ОСТУДИН

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ И ОБОСНОВАННОСТЬ ПРОБЛЕМЫ. Развитие средств вычислительной техники повлекло за собой широкое использование математического моделирования , в частности , численных методов исследования. Это дало возможность решить многие практически важные задачи , для которых классическими методами получить решение сложно. К числу таких задач следует отнести задачи моделирования полей различной физической природы в областях со сложной геометрией границы , включая и разомкнутые поверхности. Например , нестационарные задачи для уравнений параболического типа.

Отметим , что при исследовании внешних стационарных полей хорошо зарекомендовал себя метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) , благодаря его известным преимуществам : 1) размерность краевой задачи понижается на единицу , поскольку неизвестные величины определяются только на границе области; 2) позволяет рассматривать граничные поверхности широкого класса , в том числе разомкнутые; 3) представление решения задачи в виде потенциалов дает возможность получать различные характеристики исследуемого процесса. Универсальность и эффективность метода ГИУ подтверждают работы М.А.Алексидзе , З.С.Бережанской , В.И.Гордийчука , А.Г.Давыдова , В.И.Дмитриева , Е.В.Захарова , А.С.Ильинского , Д.Колтона , Р.Кресса , В.Д.Купрадзе , И.В.Людкевича , Б.А.Остудина , Ю.В.Пименова , А.Г.Свешникова , А.Н.Тихонова , Brakhage H. , Hayashi J. , Werner P. и многих других авторов , посвященные его применению для решения краевых задач , как в случае замкнутых , так и разомкнутых граничных поверхностей.

Значительно сложнее оказывается моделирование нестационарных полей , в том числе и для уравнений параболического типа. Специфика решения соответствующих краевых задач обусловлена зависимостью искомой функции от временной координаты .

Существует несколько основных подходов к решению нестационарных задач теплопроводности , различающихся по способу учета временной зависимости. Один из наиболее простых заключается в замене исходной краевой задачи последовательностью стационарных задач путем использования конечно-разностной схемы по времени. При этом на каждом временном слое получаемая задача решается традиционными для эллиптических задач методами. Например , конечных разностей , конечных элементов , ГИУ (Б.М.Берковский , Бреббия К. , Вроубел Л. , Зенкевич О. , Е.Ф.Ногoтов , Теллес Ж. , Уокер С. и др.). Следует отметить , что в этом случае необходимо тщательным образом выбирать шаг сетки по времени для гарантирования сходимости вычислительного процесса.

Следующий способ учета временной зависимости заключается в представлении решения с помощью тепловых потенциалов. При этом он имеет различные схемы реализации численной процедуры (Бреббия К. , Вроубел Л. , Теллес Ж. , Kuroki T. , Onishi K. и др.). Однако , решение получаемых в этом случае ГИУ вольтерровых по времени и фредгольмовых по пространственных координатах сопряжено со значительными трудностями вычислительного характера.

Принципиально иной подход к решению параболических краевых задач заключается в использовании интегрального преобразования (ИП) по времени (А.С.Галицын , А.Н.Жуковский , Д.К.Егер , Г.С.Карслоу , А.В.Лыков) для осуществления перехода от нестационарной задачи к стационарной. Главные преимущества такого подхода обусловлены достаточно простым видом получаемых в пространстве изображений граничных задач и возможностью представления решения на всей временной полуоси. При этом для получения изображений искомой функции используются различные методы: вариационные (П.В.Цой) , ГИУ (Риццо Ф.Дж. , Шиппи Д.Дж.) и др. В большинстве работ этого направления использовано ИП Лапласа. Наряду со значительным упрощением краевых задач , применение ИП Лапласа связано с определенными трудностями при обратном переходе к оригиналам. В общем случае этот переход осуществляется численным путем (В.И.Крылов , Н.С.Скобля , Шиппи Д.Дж.) и представляет собой довольно сложную некорректную задачу.

Более конструктивным в этом плане представляется подход , основанный на использовании ИП Чебышева-Лагерра , обращение которого сводится к суммированию ряда по полиномам Чебышева-Лагерра. Предложенный В.А.Галазюком метод многочленов Чебышева-Лагерра использовался для получения решения краевых задач в случае канонических областей. Для решения пространственных задач с более сложными граничными поверхностями в случае волнового уравнения А.Е.Музычуком было предложено использовать комбинацию ИП Чебышева-Лагерра с методом ГИУ , названную комбинированным методом. В случае телеграфного уравнения его использовал Р.С.Хапко. Комбинированный метод оказался эффективным для граничных функций импульсного вида.

Автору неизвестны работы , в которых бы решались краевые задачи для уравнений параболического типа в случае разомкнутых граничных поверхностей. Поэтому рассматриваемая работа , посвященная моделированию таких задач , разработке для них эффективных методов решения , алгоритмов и комплексов прикладных программ представляет собой ак - туальную проблему.

ЦЕЛЬЮ НАСТОЯЩЕЙ РАБОТЫ является получение интегральной модели пространственных , осесимметричных и плоских задач Дирихле для уравнения параболического типа в случае разомкнутых граничных поверхностей; разработка методики решения интегральной модели; создание комплекса программ и численное исследование нестационарных пространственных и осесимметричных полей при импульсном временном профиле граничной функции на поверхностях широкого класса.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. При помощи комбинированного метода получены интегральные модели пространственных , осесимметричных и плоских краевых задач для уравнения параболического типа в случае разомкнутых граничных поверхностей. Получены основные составляющие аппарата ГИУ для решения граничных задач в пространстве изображений: фундаментальные решения дифференциального оператора; представление трансформант в виде потенциалов простого слоя; ГИУ для определения соответствующих плотностей. Разработан алгоритм решения бесконечных систем одно- и двумерных интегральных уравнений первого рода; приведена единая методика вычисления несобственных интегралов , возникающих при дискретизации ГИУ. Предложенная методика аппробирована при решении модельных и практически важных краевых задач.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ ИССЛЕДОВАНИЙ. Результаты проведенных исследований использованы при выполнении хоздоговорных тематик НИЛ-61 и НИЛ-67 Львовского государственного университета им.И.Франко. Методика расчета нестационарных темперафтурных полей , основанная на комбинированном методе , внедрена в ГСКТБ производственного объединения "Львовсельхозхиммаш". Созданный комплекс прикладных программ может быть использован при численном моделировании различных нестационарных процессов , описываемых с математической точки зрения в виде краевых задач для уравнения параболического типа в областях с разомкнутой и замкнутой граничной поверхностью.

АППРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Основные результаты работы докладывались на 2-ой Всесоюзной конференции "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений" (г.Дрогобыч, 1989), на XI-ой конференции молодых ученых в Институте прикладных проблем механики и математики (г.Львов, 1985), на республиканском семинаре кафедры численных методов в математической физике Киевского государственного университета им.Т.Шевченко (1991), на семинаре кафедры математических проблем управления и кибернетики Черновицкого государственного университета им.Ю.Федьковича (1991), на семинаре в Институте прикладных проблем механики и математики (г.Львов, 1991), на совместном семинаре кафедр прикладной математики и вычислительной математики (1991), а также семинарах кафедры вычислительной математики (1985-1991) Львовского государственного университета им.И.Франко.

ПУБЛИКАЦИИ. По материалам диссертации опубликовано 5 работ.

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТЫ. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Работа изложена на 124 страницах, включая 7 рисунков, 9 таблиц. Список литературы содержит 78 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

ВО ВВЕДЕНИИ обосновано актуальность и важность вопросов, составляющих предмет исследования. Приведен краткий анализ современного состояния изучаемой проблемы и обзор работ по теме диссертации. Приведена аннотация работы. Показана научная новизна и описана аппробация работы.

ПЕРВАЯ ГЛАВА посвящена разработке математической модели нестационарной задачи для параболического уравнения в виде системы ГИУ.

В первом параграфе главы рассматривается математическая модель исходной задачи в дифференциальной форме.

Пусть в трехмерном пространстве $\mathfrak{R}^3$ задана ограниченная односвязная область $\mathfrak{D}$ с кусочно-гладкой границей S. Как известно, математическую модель нестационарного параболического процесса в неподвижной однородной среде можно свести к следующей краевой задаче.

Найти решение $T(M,t) \in C^2(Q_\infty) \cap C(\bar{Q}_\infty)$, $Q_\infty = D_e \times (0,\infty)$, $D_e = R^3 \setminus \bar{D}$, уравнения теплопроводности

$$\Delta T(M,t) = \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} \qquad (1)$$

в цилиндре Q_∞, которое на его нижнем основании удовлетворяет начальному условию

$$T(M,t)\big|_{t=0} = 0, \ (M,t) \in Q_0 = D_e \times \{0\} \qquad (2)$$

а на боковой поверхности $S_\infty = S \times (0,\infty)$ – граничному условию Дирихле

$$T(M,t)\big|_{M\in S} = f(M,t) \qquad (3)$$

Предполагаем также, что функция f удовлетворяет условию согласования начального и граничного условий

$$f(M,0) = 0, \qquad (4)$$

а искомое решение и его производная ведут себя на бесконечности как

$$T(M,t) = O(r^{-1}), \ \frac{\partial T(M,t)}{\partial r} = O(r^{-2}), \ r = |M| \to \infty \qquad (5)$$

Когда граничная поверхность имеет нерегулярные точки (ребра, вершины) или разомкнутая (внутренняя область D – вырожденная) то для обеспечения единственности на решение накладываем дополнительное условие, т.н. условие на ребре

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{C(\rho)} \left\{ \left|\frac{\partial T(M,t)}{\partial \rho}\right| + |T(M,t)| \right\} dS_M = 0, \qquad (6)$$

где $C(\rho)$ – цилиндрический "валик" радиуса ρ, который охватывает контур разомкнутой поверхности S.

В работе доказывается теорема о единственности решения задачи (1)-(6), если оно существует.

Поскольку в данной работе решение поставленной задачи определяется при помощи рядов Чебышева-Лагерра, ограничиваемся рассмотрением класса задач, в котором обеспечивается равномерная сходимость рядов Чебышева-Лагерра. Непрерывно-дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям сходимости интегралов

$$\int_0^\infty e^{-\varkappa t}\left[f(M,t)\right]^2 dt < +\infty, \tag{7}$$

$$\int_0^\infty t\, e^{-\varkappa t}\left[\frac{\partial f(M,t)}{\partial t}\right]^2 dt < +\infty, \quad \varkappa = const > 0 \tag{8}$$

принадлежат такому классу задач (Никифоров, Уваров).

Во втором параграфе исходная нестационарная задача (1)-(6) путем использования ИП Чебышева-Лагерра сводится к бесконечной системе задач Дирихле для уравнений эллиптического типа:

$$\mathcal{F}[T_n] \equiv \Delta T_n(M) - \varkappa \sum_{m=0}^{n} T_m(M) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

$$T_n(M) \in C^2(\mathcal{D}_e) \cap C(\overline{\mathcal{D}}_e),$$

$$T_n(M)\Big|_{M \in S} = f_n(M), \tag{10}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(M) = 0, \quad M \in \mathcal{D}_e \tag{11}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{C(\rho)} \left\{ \left| \frac{\partial T_n(M)}{\partial \rho} \right| + \left| T_n(M) \right| \right\} dS_M = 0 \tag{12}$$

При этом интегралы

$$T_n(M) = \int_0^\infty T(M,t)\, e^{-\varkappa t} L_n(\varkappa t)\, dt \tag{13}$$

и $$f_n(M)=\int_0^\infty f(M,t)\,e^{-\varkappa t}\cdot L_n(\varkappa t)\,dt\,, \qquad (14)$$

где L_n - многочлен Чебышева-Лагерра n-ой степени, $\varkappa$ - параметр, будем называть трансформантами n-го порядка соответственно функций $T(M,t)$ и $f(M,t)$. Оригинал $T(M,t)$ можно однозначно представить рядом по многочленам Чебышева-Лагерра

$$T(M,t) = \varkappa\sum_{n=0}^{\infty} T_n(M)\cdot L_n(\varkappa t) \qquad (15)$$

В работе доказывается следующее утверждение:

Теорема. Краевая задача Дирихле для уравнения теплопроводности (1)-(6) при выполнении условий (7) и (8) эквивалентна системе стационарных граничных задач (9)-(12) тогда и только тогда, когда выполняется (15).

В третьем параграфе рассмотрена последовательность функций

$$G_n^*(M,P)=\int_0^\infty G(M,P,t)\,e^{-\varkappa t}\cdot L_n(\varkappa t)\,dt\,,\ n=0,1,\ldots \qquad (16)$$

где $G(M,P,t)$ - фундаментальное решение уравнения теплопроводности (1) и доказано, что она является фундаментальным решением оператора $\mathcal{F}$. Таким образом, аналитический вид фундаментального решения можно получить, применяя ИП Чебышева-Лагерра к фундаментальному решению уравнения теплопроводности.

Теорема. Фундаментальное решение оператора $\mathcal{F}$ имеет вид последовательности функций $\{G_n^*\}_{n=0}^{\infty}$, где

$$G_n^*(M,P)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\cdot 2\cdot \varkappa^{(s-2)/2}\; n!}{(k!)^2(n-k)!\;(2\sqrt{\pi})^s}\left(r\frac{\sqrt{\varkappa}}{2}\right)^{\frac{(2k+2-s)}{2}}\times \qquad (17)$$

$$\times K_{\frac{2k+2-s}{2}}(2\sqrt{\varkappa})\,,\quad r=|MP|$$

S – размерность пространства $\mathbb{R}^s$, K_ν – функция Макдональда порядка ν , r – расстояние между точками M и P .

Фундаментальное решение оператора $\mathcal{F}$ можно вычислять и при помощи более удобной при численных расчетах рекуррентной формулы

$$G_n^*(M,P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\varkappa)^k\, n!}{(k!)^2 (n-k)!} E_k(M,P), \quad n=0,1,\ldots \qquad (18)$$

$$E_k(M,P) = \frac{r^2}{4\varkappa} E_{k-2}(M,P) + \frac{2k-3}{2\varkappa} E_{k-1}(M,P)$$

где $E_0(M,P) = K_0(r\sqrt{\varkappa})/(2\pi)$,

$$E_1(M,P) = r \cdot K_1(r\sqrt{\varkappa})/\sqrt{\varkappa} \qquad \text{для} \quad S=2,$$

$$E_0(M,P) = e^{-r\sqrt{\varkappa}}/(4\pi r),$$

$$E_1(M,P) = e^{-r\sqrt{\varkappa}}/(8\pi\sqrt{\varkappa}) \qquad \text{для} \quad S=3$$

Полученное фундаментальное решение в § 1.4 используется для построения интегральной модели исходной задачи. Доказано , что для произвольного порядка усечения решение бесконечной треугольного вида системы граничных задач (9)-(12) представляется в виде линейной комбинации потенциалов простого слоя

$$T_n(M) = \iint\limits_S \sum_{m=0}^{n} g_m(P)\, G_{n-m}^*(M,P)\, dS_P , \quad n=0,1,\ldots \qquad (19)$$

где g_m – произвольно выбранные плотности , удовлетворяющие условию существования потенциалов.

Использовав граничные условия (10) , для определения плотностей g_n , $n=0,1,\ldots$ получена система ГИУ вида

$$\iint\limits_S g_n(P)\, G_0^*(M,P)\, dS_P = C_n(M), \quad n=0,1,\ldots \qquad (20)$$

где $C_n(M) = f_n(M) - \iint\limits_S \sum_{m=0}^{n-1} g_m(P)\, G_{n-m}^*(M,P)\, dS_P$

Она и является интегральной моделью поставленной исходной задачи.

Во второй главе предложен алгоритм численного решения систем ГИУ вида (20): в § 2.1 - двумерных ГИУ, соответствующих простанственной краевой задаче, во втором и третьем параграфах - одномерных ГИУ, получающихся при решении осесимметричной и плоской задач.

Предполагается, что граничная поверхность S имеет параметрическое представление. Причем, область изменения криволинейных координат - прямоугольник $\Delta = \{(u,v):\ a \le u \le b,\ c \le v \le d\}$, на стороны которого отображаются нерегулярные точки границы. Если априори известно о поведении решения в нерегулярных точках, то плотность $\tilde{Q}_n$, получающуюся при подстановке значений координат точек интегрирования в плотность g_n, можно искать в виде произведения двух функций

$$\tilde{Q}_n(u,v) = Q_n(u,v)\cdot H(u,v) \qquad (21)$$

одна из которых Q_n - непрерывная функция, а другая -

$$H(u,v) = (u-a)^{-\delta_1}(b-u)^{-\delta_2}(v-c)^{-\delta_3}(d-v)^{-\delta_4}, \qquad (22)$$

где $\delta_i \in [0,1)$, явно учитывающая сингулярное поведение плотности. Тогда бесконечная система ГИУ (20) примет вид:

$$\iint_\Delta H(u,v)\cdot J(u,v)\, Q_n(u,v)\cdot G_0(\bar{u},\bar{v};u,v)\,du\,dv = B_n(\bar{u},\bar{v}), \qquad (23)$$

где $B_n(\bar{u},\bar{v}) = \Phi_n(\bar{u},\bar{v}) - \iint_\Delta H(u,v)\cdot J(u,v)\sum_{m=0}^{n-1} Q_m(u,v)\times$

$\times\, G_{n-m}(\bar{u},\bar{v};u,v)\,du\,dv\ ;\qquad J(u,v)\,du\,dv$

- элемент поверхности S ; Φ_n, Q_n, G_n - обозначения, соответственно, граничных функций, плотностей и ядер введенных выше потенциалов, при подстановке в них координат точек наблюдения и интегрирования.

Уравнения (23) известны своей некорректностью. Для их решения используется метод сплайн-коллокации. Неизвестные плотности ищутся в виде линейных комбинаций финитных функций

$$Q_n(u,v)=\sum_{i=0}^{N_u}\sum_{j=0}^{N_v} a_{ij}^{(n)}\cdot \varphi_{ij}(u,v), \qquad (24)$$

где $a_{ij}^{(n)}$ – неизвестные коэффициенты, а $\{\varphi_{ij}(u,v)\}_{i=0,\,j=0}^{N_u\;N_v}$ – система финитных функций, построенная на основании B-сплайнов согласно работ Г.И.Марчука, В.И.Агошкова. Поскольку ядра всех ГИУ вида (23) имеют слабую особенность при совпадении аргументов, для локализации особенности на отдельном элементе Δ_{ij} области Δ выбрана система финитных функций. Элементы Δ_{ij} получаются следующим образом. С шагами $h_u=(b-a)/N_u$ по координате u и $h_v=(d-c)/N_v$ – по координате v область Δ разбивается на $(N_u+1)\times(N_v+1)$ прямоугольников. На пересечении прямых $u_i=a+ih_u,\ i=\overline{0,N_u}$ и $v_j=c+j\cdot h_v$, $j=\overline{0,N_v}$ получим точки (u_i,v_j), $i=\overline{0,N_u}$, $j=\overline{0,N_v}$. Тогда с помощью кубических B-сплайнов φ_k ($\Delta_k=\operatorname{supp}\varphi_k$) строится система финитных функций $\{\varphi_{ij}:\ \varphi_{ij}(u,v)=\varphi_i(u)\cdot\varphi_j(v),\ i=\overline{0,N_u},\ j=\overline{0,N_v}\}$, где $\Delta_{ij}\equiv\operatorname{supp}\varphi_{ij}=\Delta_i\times\Delta_j$.

Неизвестные коэффициенты аппроксимации $a_{ij}^{(n)}$ определяются с помощью метода коллокации. Точки коллокации выбираются совпадающими с узлами аппроксимационной сетки. Обозначим их $(\overline{u}_\mu,\overline{v}_\nu)$, $\mu=\overline{0,N_u}$, $\nu=\overline{0,N_v}$. Тогда дискретизированная система ГИУ (23) получит следующую матричную форму

$$M^{(0)}\cdot A^{(n)}=B^{(n)},\quad n=0,1,\ldots \qquad (25)$$

где $B^{(n)}=\left(B_n(\overline{u}_\mu,\overline{v}_\nu)\right)_{\mu=0,\ \nu=0}^{N_u\quad N_v}$ – вектор правой части, а элементы матрицы $M^{(n)}$ – это поверхностные интегралы вида

$$M_{ij}^{(n)}(\overline{u}_\mu,\overline{v}_\nu)=\iint_{\Delta_{ij}}\varphi_{ij}(u,v)\cdot G_0(\overline{u}_\mu,\overline{v}_\nu,u,v)\cdot H(u,v)\cdot J(u,v)\,du\,dv \qquad (26)$$

Отметим, что наличие особенности в ядре G_0 и финитность базисных функций φ_{ij} позволяет получать матрицы $M^{(n)}$ с преобладающими по абсолютной величине диагональными элементами. Таким образом, используемый алгоритм сплайн-коллокации обладает саморегуляризирующими свойствами и может применяться при решении ГИУ первого рода (23).

Решив последовательно при возрастающих значениях n системы линейных алгебраических уравнений (25), значения трансформант находим по формуле

$$\widetilde{T}_n(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{i=0}^{N_u}\sum_{j=0}^{N_v} a_{ij}^{(m)}\cdot \widetilde{M}_{ij}^{(n-m)}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}), \tag{27}$$

где $$\widetilde{M}_{ij}^{(m)}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \iint\limits_{\Delta_{ij}} \varphi_{ij}(u,v)\cdot G_m(\bar{x},\bar{y},\bar{z};u,v)\cdot H(u,v)\cdot j(u,v)\,du\,dv \tag{28}$$

После нахождения достаточного количества трансформант $\widetilde{T}_n$, $n=\overline{0,N}$, решение исходной задачи (1)-(6) в произвольной точке $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\in D_e$ определяется как сумма усеченного ряда

$$\widetilde{T}(\bar{x},\bar{y},\bar{z},t) = \varkappa\sum_{n=0}^{N}\widetilde{T}_n(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\cdot L_n(\varkappa t), \quad t\geq 0 \tag{29}$$

Мы отметили выше наличие особенностей в ядрах интегралов $M_{ij}^{(m)}(\overline{u_\mu},\overline{v_\nu})$. Поэтому важное значение при их вычислении имеет характер асимптотик ядер G_n при стремлении точки интегрирования к точке коллокации. Доказано, что в этом случае функция $G_n(\overline{u_\mu},\overline{v_\nu};u,v)$ асимптотически равна функции

$$G^*(\overline{u_\mu},\overline{v_\nu};u,v) = \frac{1}{4\pi\sqrt{I_1}}, \tag{30}$$

где I_1 - первая квадратичная форма поверхности S.

В §2.2 и §2.3 с аналогичных позиций изложено решение краевых задач в осесимметричном и плоском случаях.

В четвертом параграфе с целью упрощения модели для аппроксимации неизвестных плотностей используются дробно-рациональные функции. При этом особенность ядра устраняется за счет удовлетворения граничным условиям на некоторой поверхности , близкой к поверхности интегрирования. Хорошая обусловленность матрицы системы линейных алгебраических уравнений в этом случае достигается путем специального подбора нелинейных параметров и точек коллокации.

В §2.5 изложена методика вычисления несобственных интегралов вида (26) и (27) , являющихся элементами матриц $M^{(m)}$. На основе метода Л.В.Канторовича создана единая методика аддитивного ослабления особенностей в ядрах и плотностях потенциалов. В случае $(\bar{u}_\mu, \bar{v}_\nu) \in \Delta_{ij}$ она может быть представлена следующим образом

$$M_{ij}^{(m)}(\bar{u}_\mu, \bar{v}_\nu) = \iint\limits_{\Delta_{ij}} P_{ij}(\bar{u}_\mu, \bar{v}_\nu) \cdot G^*(\bar{u}_\mu, \bar{v}_\nu; u, v)\, du\, dv + \qquad (31)$$

$$+ \iint\limits_{\Delta_{ij}} \left\{ P_{ij}(u,v)\, G_m(\bar{u}_\mu, \bar{v}_\nu; u, v) - P_{ij}(\bar{u}_\mu, \bar{v}_\nu) \cdot G^*(\bar{u}_\mu, \bar{v}_\nu; u, v) \right\} du\, dv$$

где $P_{ij}(u,v) = \vartheta_{ij}(u,v) \cdot H(u,v) \cdot J(u,v)$. При этом , первое слагаемое вычисляется аналитически , а во втором - подинтегральное выражение для широкого класса поверхностей доопределяется по непрерывности в точке коллокации.

В третьей главе рассматриваются вопросы програмной реализации предложенного алгоритма , анализируются результаты численных расчетов. В §3.1 показано каким образом выбираются параметры метода , характеризующие разбиение поверхности на элементы и регулирующие сходимость рядов Чебышева-Лагерра.

Во втором параграфе построено аналитическое решение задачи (1)-(6) для сферы , приведено сравнение численных результатов с аналитическим решением. Получены численные решения параболических задач , как для замкнутых гладких (сфера , эллипсоид вращения) , с нерегулярными точками (куб) , так и для разомкнутых (диск , часть сферы со срезанным полюсом) граничных поверхностей. Они получены при помощи комплекса програм , реализующего предложенный метод на ЭВМ и описанного в третьем параграфе данной главы.

Метод был апробирован на задачах , для которых граничный профиль решения по временной координате имел вид сферического импульса.

В приложении приведены акты внедрения предложенной методики при выполнении хоздоговорных тем.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Предложен метод численного решения пространственных , осесимметричных и плоских краевых задач теплопроводности , основанный на использовании ИП Чебышева-Лагерра по времени и решении ГИУ при определении трансформант.

2. Получены основные составляющие аппарата ГИУ для задач в пространстве изображений: фундаментальные решения дифференциального оператора , представление трансформант в виде потенциалов простого слоя , ГИУ для определения соответствующих плотностей.

3. Разработан алгоритм решения бесконечных систем одно- и двумерных интегральных уравнений первого рода.

4. Приведена единая методика вычисления несобственных интегралов, возникающих при дискретизации ГИУ.

5. Комплекс программ для реализации на ЭВМ алгоритма численного решения пространственных и осесимметричных краевых задач Дирихле для уравнения теплопроводности.

6. Примеры численного решения модельных и практически важных задач.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Людкевич И.В., Скасків Р.Б. Чисельне розв'язування крайової задачі Діріхле для рівняння теплопровідності методом інтегральних перетворень та інтегральних рівнянь у випадку незамкнутих осесиметричних поверхонь // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат., 1989.Вип.31.С.3-6.
2. Музычук А.Е., Пучка В.А., Скаскив Р.Б. Комбинация методов граничных элементов и интегральных преобразований в некоторых задачах матфизики // Новые подходы к решению диференциальных уравнений (30.05-1.06 1989 г. г.Дрогобыч). М.,1989. С.118.
3. Музычук А.Е., Скаскив Р.Б. Численное решение двумерной задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в случае незамкнутых границ // Теоретическая электротехника. Львов, 1983.Вып.35.

С.143-148.
4. Скаскив Р.Б. Численное решение одной начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в осесимметричном поле // Теоретическая электротехника. Львов, 1987. Вып.43. С.23-26.
5. Скаскив Р.Б. Численное решение пространственной краевой задачи для уравнения теплопроводности методом интегральных преобразований и граничных интегральных уравнений // Численное решение граничных задач математической физики на незамкнутых поверхностях методом интегральных уравнений / Львов. ун-т. Львов, 1988. С.134-145. Деп. в УкрНИИНТИ 16.12 88 № 2987-Ук88.

СКАСКИВ РОМАН БОГДАНОВИЧ

Численное решение нестационарных задач теплопроводности методом интегральных преобразований и граничных интегральных уравнений

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 5.12.91. Формат 60x84/16. Бум.тип.№1.
Печ.офсет.Усл.печ.л.0,93.Усл.кр.-от.1,16.УЧ.-изд.л.0,98.
Тираж 100. Заказ 522, Бесплатно.
Машинно-офсетная лаборатория Львовского государственного университета, Львов, 290602, ул. Университетская, 1.

БЕСПЛАТНО