ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР СО АН СССР

На правах рукописи

ЗОЛОТАРЕВСКИЙ
Владимир Алексеевич

# ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЗАМКНУТЫХ КОНТУРАХ

(01.01.07 - вычислительная математика)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск - 1991

Работа выполнена в Молдавском государственном университете.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук ИВАНОВ В.В.
доктор физико-математических наук ЛИФАНОВ И.К.
доктор физико-математических наук ЦЕЦОХО В.А.

Ведущая организация НИ Вычислительный центр МГУ

Защита состоится "20" ноября 1991 г. в 10⁰⁰ часов на заседании специализированного совета Д 002.10.01 при ВЦ СО АН СССР по адресу: 630090, Новосибирск, 90. Проспект Академика Лаврентьева, 6, ВЦ СО АН СССР.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ВЦ СО АН СССР.

Автореферат разослан "17" октября 1991 г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат.наук КУЗНЕЦОВ Ю.И.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Основным предметом реферируемой диссертации является теоретическое обоснование прямых методов* решения различных классов систем сингулярных интегральных и сингулярных интегродифференциальных уравнений, определенных на произвольных замкнутых гладких контурах в комплексной плоскости и рассмотренных в различных функциональных пространствах.

Начало этому разделу теории приближенных методов положили исследования М.А.Лаврентьева, Х.Мультопа, С.Г.Михлина, А.И.Каландии, которые продолжены В.В.Ивановым, Б.Г.Габдулхаевым, И.Ц.Гохбергом, И.А.Фельдманом, З.Пресдорфом, Б.Зильберманом, С.М.Белоцерковским, И.К.Лифановым, Н.Я.Тихоненко, А.Ф.Матвеевым, Б.И.Мусаевым, А.В.Джишкариани, Д.Эллиотом, Д.Гольдбергом и их учениками и последователями. Подробную библиографию по этим вопросам можно найти в специальных обзорных работах В.В.Иванова, Б.Г.Габдулхаева, а также в монографиях В.В.Иванова, Б.Г.Габдулхаева, С.М.Белоцерковского и И.К.Лифанова и др.

Начиная с середины 60-х годов появляются многочисленные работы, посвященные разработке и теоретическому обоснованию прямых методов решения сингулярных интегральных уравнений (СИУ). Эти исследования проводились в основном для одного СИУ, заданного на единичной окружности $\Gamma_0$, либо на всей вещественной оси $R$, или на ее отрезке. Результаты исследований в этой области, проводимых до 1980 года, приве -

---

* По определению С.Л.Соболева, прямыми методами решения операторных уравнений называются такие приближенные методы, которые приводят к решению конечных систем алгебраических уравнений.

жены в упомянутых выше работах В.В.Иванова, Б.Г. Габдулхаева*, а также в работах обзорного характера Б.Г.Габдулхаева, А.Ф.Галимянова, И.К.Лифанова, А.Ф.Матвеева, З.Пресдорфа, Б.Зильбермана, Д.Эллиота, М.Гольберга и др.

В статьях И.Ц.Гохберга, И.А.Фельдмана, автора диссертации [I - 6], З.Пресдорфа, Б.Зильбермана, В.П.Кацупшина, Н.Я.Тихоненко, В.Д.Диденко и других авторов объектом исследования стало теоретическое обоснование прямых методов решения систем СИУ, заданных на $\Gamma_0$. Однако в силу математических трудностей, возникающих при рассмотрении прямых методов решения систем СИУ, эти методы не получили достаточного развития даже в случае, когда системы заданы на $\Gamma_0$.

В.В.Ивановым, Н.Я.Тихоненко, В.Д.Диденко, А.В.Джишкариана, И.К.Лифановым, А.Ф.Матвеевым, Б.И.Мусаевым и другими исследователями обоснованы прямые методы решения СИУ с ненулевыми индексами, которые также проводились в случае, когда уравнения заданы на $\Gamma_0$, $R$ или отрезке вещественной оси.

Дальнейшее развитие круга этих вопросов касается рассмотрения СИУ и систем СИУ неэллиптического типа, заданных на $\Gamma_0$ или $R$, т.е. уравнений, символы которых обращаются в нуль. Результаты, полученные в этом направлении, нашли отражение в работах З.Пресдорфа, Б.Зильбермана, Н.Я.Тихоненко, А.М.Чадаева, Н.С.Габбасова.

Исследование прямых методов решения СИУ и систем СИУ (как эллиптического, так и неэллиптического типа) сингулярных интегродифференциальных уравнений (СИДУ), систем СИДУ, а также других классов СИУ в случае, когда эти уравнения

---

* В.В.Иванов. Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений//Итоги науки и техники. Сер.:Мат.анализ.1963. - М.: ВИНИТИ, 1965. - С.125-177.

Б.Г.Габдулхаев. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений//Итоги науки и техники. Сер.: Мат.анализ. - М.: ВИНИТИ, 1980. - Т.18. - С.251-307.

заданы на замкнутых гладких контурах, отличных от единичной окружности, из-за трудностей теоретического обоснования, появляющихся при переходе на произвольный контур, не получили достаточного развития и почти не были изучены, оставаясь в основном открытыми. Можно отметить лишь отдельные работы И.Ц.Гохберга, Е.М.Шпигеля, К.Аткинсона, З.Пресдорфа,У.Зизки, а также аспиранта автора диссертации В.Н.Сейчука, в которых обосновывались прямые методы (коллокаций, механических квадратур, редукции, сплайнов) для СИУ, определенных на замкнутых контурах Ляпунова. То обстоятельство, что контур, на котором заданы уравнения, является ляпуновским, имело определяющее значение и было существенно использовано в этих работах как при доказательстве разрешимости соответствующих вычислительных схем, так и при выводе оценок погрешностей, реагирующих на гладкость этого контура. Если же контур не является ляпуновским, то эти доказательства уже не переносимы и при этом используется более сложный математический аппарат.

Отметим еще, что в последние годы для приближенного решения СИУ, заданных на ляпуновских контурах, стал активно применяться метод дискретных вихрей, предложенный С.М.Белоцерковским, И.К.Лифановым и продолжающий свое развитие в работах А.Ф.Матвеева, Ю.В.Ганделя и других авторов. Поскольку круг вопросов, связанных с обоснованием прямых методов, рассмотренных в диссертации, отличается от метода дискретных вихрей, то мы не будем останавливаться на характеристике проводимых в этом направлении исследований, а отметим лишь монографию* С.М.Белоцерковского и И.К.Лифанова, в которой дано подробное изложение и теоретическое обоснование применимости этого метода.

Случай, когда исследуются прямые методы решения указанных выше уравнений, определенных на классах гладких замкнутых контуров более общих, нежели ляпуновские, относится к

---

* С.М.Белоцерковский, И.К.Лифанов. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. - М.: Наука,1985.-253 с.

мало разработанной ветви вычислительной математики и в литературе до работ автора диссертации не встречался. Впервые эти вопросы были рассмотрены и полностью решены в статьях автора диссертации [10 - 21] и совместных работах [22, 25, 27].

Необходимость решения различных классов СИУ и их систем часто возникает именно в том случае, когда контуром интегрирования служит произвольная гладкая кривая. Проблема решения этих классов уравнений встречается во многих областях естествознания, в том числе в математической физике, механике, аэродинамике, физике, экономике, теории массового обслуживания, теории автоматического управления и других областях науки и техники.

Как указано в монографиях Н.И.Мусхелишвили, Ф.Д.Гахова, Н.П.Векуа и других работах, точное решение СИУ, а тем более, систем СИУ, удается найти лишь в редких частных случаях, причем даже в этих случаях нахождение точного решения требует неоднократного вычисления сингулярных интегралов, что сопряжено с большими теоретическими и вычислительными трудностями.

Особый интерес к исследованию приближенных методов решения различных классов СИУ вызван еще и тем значением, которое приобрели численные методы в связи с наличием мощной современной вычислительной техники и к которым, в частности, относятся прямые методы.

<u>Цель работы</u>. Разработка и теоретическое обоснование прямых методов решения широкого класса систем СИУ, СИДУ, а также СИУ, коэффициенты которых являются оператор-функциями, в случае, когда эти уравнения определены на произвольном замкнутом гладком контуре и рассмотрены в различных функциональных пространствах.

Всюду в дальнейшем, следуя Л.В.Канторовичу, Б.Г.Габдулхаеву и В.В.Иванову, под обоснованием прямых методов понимаются следующие вопросы:

1) доказательство разрешимости вычислительных схем и установление значений номеров приближения $n$, начиная с которых эти схемы разрешимы;

2) установление сходимости приближенных решений к точному решению;

3) оценка погрешности приближенных решений;

4) исследование на устойчивость приближенных методов и обусловленность приближенных уравнений;

5) оптимизация приближенных методов решения СИУ.

Решение этих и других вопросов, связанных с теоретическим обоснованием прямых методов для различных классов СИУ, в диссертации проводится непосредственно на том контуре, на котором исследуемые уравнения определены. Это обстоятельство вызвано существом дела. Так, если от СИУ или системы СИУ, заданных на произвольном замкнутом гладком контуре $\Gamma$, перейти, например с помощью функции Римана $z = \psi(w)$ на единичную окружность, то при таком подходе возникают различные трудности как теоретического, так и практического характера, которые, вообще говоря, проблему не решают, а лишь усугубляют ее. Перечислим некоторые из них.

I. Коэффициенты, ядро и правая часть преобразованного уравнения теряет свою гладкость; уже в случае ляпуновского контура порядок их дифференцируемости уменьшается до единицы.

2. Появляется новое ядро

$$K(w,\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\psi(\zeta)-\psi(w)} \cdot \frac{1}{\zeta - w} \qquad (I)$$

такое, что интегральный оператор, определяемый этим ядром, в случае, когда контур $\Gamma$ является ляпуновским (с показателем гладкости, равным $\mu$ $(0<\mu<1)$) переводит класс $H_\beta$ в $H_\delta$, где $\delta = \min(\mu ; \beta)$. Таким образом, в оценках скорости сходимости будет участвовать показатель $\mu$ и поэтому эти оценки будут всегда "связаны" с конкретным фиксированным контуром. Если же $\Gamma$ входит в более широкий, нежели ляпуновский класс контуров (не являясь ляпуновским), то интегральный оператор с ядром (I), вообще говоря нарушает непрерывность функций и, следовательно, применять известные ранее результаты по обоснованию прямых методов решения СИУ, заданных на единичной окружности, не представляется возможным.

3. Из-за наличия разрыва у ядра $K(w, \tau)$ метод механических квадратур непосредственно применять нельзя.

4. Вычислительные схемы методов содержат функцию Римана, нахождение которой сводится к решению нелинейного СИУ сложного вида. Поэтому такие вычислительные схемы на практике почти не используются.

Проведение в диссертации теоретического обоснования прямых методов решения СИУ, их систем и других классов СИУ непосредственно на том контуре, на котором они определены, потребовало, в свою очередь, установления ряда новых результатов как из приближенных методов решения уравнения, так и из теории приближения функций.

Методика исследований. При выводе и обосновании полученных результатов в диссертации применяются эффективные современные методы из различных разделов теории функций вещественного и комплексного переменных и функциональных уравнений, в том числе конструктивной теории функций, теории СИУ и краевых задач ТФКП. При этом существенным моментом является использование предложенного ранее автором варианта общей теории приближенных методов функционального анализа и специально построенных элементов теории приближения функций, заданных на замкнутых гладких контурах в пространстве непрерывных функций, в гельдеровских пространствах и их обобщений, а также в $L_p$.

Научная новизна состоит в следующем:

- предложены и обоснованы вычислительные схемы методов коллокаций, механических квадратур и квадратурно-интерполяционного метода для решения различных классов систем СИУ, систем СИДУ и СИУ с операторными коэффициентами, заданных на произвольных замкнутых гладких контурах;

– предложено теоретическое обоснование вычислительных схем метода редукции для систем СИУ, систем СИДУ, систем уравнений Винера-Хопфа, парных систем СИУ и СИУ с операторными коэффициентами в случае, когда эти уравнения заданы на единичной окружности $\Gamma_0$;

– получены результаты из общей теории приближенных методов решения абстрактных уравнений в случае, когда проекторы, по которым строится соответствующий метод, либо не стремятся к единичному оператору, либо они не ограничены по норме основного пространства;

– установлены теоремы об эффективной аппроксимации функций комплексного переменного, определенных на произвольном замкнутом гладком контуре конкретными аппаратами приближения; найдены оценки погрешности отклонений в равномерной и гельдеровой метриках, а также в пространствах $L_p$ $(1<p<\infty)$.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные результаты по прямым методам решения систем СИУ и систем СИДУ могут быть применены при решении весьма широкого круга прикладных задач из указанных выше областей математической физики.

Результаты используются при чтении спецкурсов и выполнении дипломных и курсовых работ на старших курсах Казанского, Азербайджанского, Белорусского, Одесского и Молдавского университетов. В частности, по материалам работ автора читаются спецкурсы и ведутся спецсеминары на четвертых и пятых курсах Молдавского университета. Кроме того, некоторые из результатов вошли в учебники и учебные пособия для вузов, изданные в Одессе (Тихоненко Н.Я., 1989), Казани (Кадушин В.П., 1988) и в Берлине (Пресдорф З., 1987).

Результаты работ автора были использованы (в ряде случаев весьма существенно) при выполнении большого числа диссертационных работ по математике в Казанском, Азербайджанском, Одесском, Тартусском и Молдавском университетах, а также в других научных учреждениях. Некоторые идеи и результаты диссертации нашли многочисленные применения в трудах большого числа советских (Казань, Москва, Одесса, Кишинев, Тарту) и зарубежных (Германия, Италия, Румыния) математиков.

Автором, по предложенным в диссертации методам приближенного решения СИУ и их систем, совместно с аспирантами Сейчук В.Н., Тутунару С.А. разработан комплекс алгоритмов и программ численного решения указанных уравнений. Комплекс внедрен на ВЦ Молдавского госуниверситета и предназначен для работы в ЕС ЭВМ; имеется акт внедрения НИР № I от 20.02.91 г.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и научных семинарах: республиканские научные конференции (Одесса, 1982, 1984, 1987, 1988; Киев, 1988), конференция "Гаховские чтения" (Одесса, 1988), IУ Всесоюзный симпозиум "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" (Харьков, 1989), вторая Всесоюзная конференция "Современные проблемы численного анализа" (Тбилиси, 1988), городской семинар "Теория аппроксимации и приложения" при Казанском госуниверситете (1976–1990, руководитель профессор Габдулхаев Б.Г.), семинар "Математические вопросы нестационарной аэродинамики и аэроупругости" при Военно-воздушной инженерной академии им.Н.Е.Жуковского (руководитель профессор Лифанов И.К.), семинар "Численные методы для интегральных уравнений" факультета вычислительной математики и кибернетики Московского госуниверситета (руководители профессор Лифанов И.К. и профессор Захаров Е.В.), семинар отдела вычислительных методов ВЦ АН СССР (руководитель профессор Абрамов А.А.), Объединенный семинар по вычислительной математике при ВЦ СО АН СССР (руководители чл.корр.АН СССР Михайлов Г.А. и профессор Ильин В.П.), семинар ВЦ МГУ (руководитель профессор Морозов В.А.).

Результаты работы регулярно докладывались на итоговых научных конференциях Молдавского госуниверситета, на семинарах кафедры численных методов и оптимизации и кафедры математического анализа Молдавского госуниверситета, а также на семинаре "Численные методы" в Институте математики с ВЦ АН ССРМ.

<u>Публикации</u>. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [I - 28]; часть из них (§ 8, 9, 15 и 17) получена в совместных работах. Постановка задач и основные идеи совместных работ принадлежат автору диссертации, а остальные результаты - всем авторам в равной мере.

<u>Структура и объем диссертации</u>. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на 22 параграфа со сквозной нумерацией, приложения, содержащего программы и результаты счета на ЭВМ, списка цитированной литературы (249 названий) и занимает (за исключением списка литературы, программ и результатов счета) 280 страниц машинописного текста.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Перейдем к более детальному изложению содержания диссертации.

Во введении даны краткое содержание диссертации и литературный обзор.

В первой главе, которая носит в определенной степени вспомогательный характер, устанавливаются некоторые новые результаты из общей теории приближенных методов анализа, а также из теории приближения функций комплексного переменного, используемые в гл.II-IУ.

В первых трех параграфах изложены некоторые сведения из теории проекционных методов и показывается с применением своеобразного операционного исчисления ряд новых теорем, которые применяются в главах II-IУ. Так, в § I и 2 устанавливаются условия на оператор и последовательности проекторов, при которых элементы пространства попадают в линеал сходимости оператора. В § I рассматривается случай, когда последовательности проекторов, по которым строится приближенный ме -

тол, состоят из ограниченных проекторов, а в § 2 - когда последовательность проекторов состоит из неограниченных (по норме основного пространства) проекторов. В третьем параграфе исследуются вопросы устойчивости приближенного абстрактного уравнения и устанавливаются условия, при выполнении которых числа обусловленности точного и приближенного абстрактных операторов близки между собой.

Результаты § 1-3 продолжают дальнейшее развитие некоторых аспектов общей теории приближенных методов в рамках теории, разработанной Л.В.Канторовичем, Г.М.Вайникко, Б.Г.Габдулхаевым и И.К.Даугаветом.

Остальные параграфы (4 - 7) первой главы посвящены вопросам аппроксимации функций комплексного переменного, заданных на произвольных замкнутых гладких контурах различными аппаратами приближения в равномерной и гельдеровой метриках, а также в пространствах $L_p\ (1<p<\infty)$.

Пусть на комплексной плоскости дана ограниченная односвязная область $F^+$ с гладкой границей $\Gamma$, причем дополнение замкнутой области $\bar{F}^+ = F^+ \cup \Gamma$ есть односвязная область $F^-$, содержащая бесконечно удаленную точку $z=\infty$.

Через $z=\psi(w)$ будем обозначать функцию Римана для контура $\Gamma$, осуществляющую конформное отображение $\{|w|>1\}$ на $F^-$: $\psi(\infty)=\infty$; $\psi'(\infty)>0$. Будем предполагать, что существуют два положительных числа $m_1(\Gamma)$ и $M_1(\Gamma)$ таких, что $m_1(\Gamma)\le|\psi'(w)|\le M_1(\Gamma),\quad |w|=1.$

Класс таких контуров обозначим через $\Lambda$. Известно, что класс $\Lambda$ содержит в себе ляпуновские, альперовские (или контуры, удовлетворяющие условию " $j$ ") и гиполяпуновские контуры.

Пусть $t_j$, $j=\overline{0,2n}$ (где $n$ - натуральное число) - совокупность различных между собой точек на $\Gamma$. Через $U_n$ обозначим оператор, который каждой функции $g(t)$, определенной на $\Gamma$, ставит в соответствие интерполяционный полином Лагранжа по узлам $t_j$, $j=\overline{0,2n}$:

$$(U_n g)(t)=\sum_{j=0}^{2n} g(t_j)\,l_j(t),\ t\in\Gamma;$$

$$l_j(t)=\left(\frac{t_j}{t}\right)^n \prod_{k=0,\,k\neq j}^{2n} \frac{t-t_k}{t_j-t_k}=\sum_{k=-n}^{n} \Lambda_k^{(j)} t^k,\ j=\overline{0,2n},\ t\in\Gamma. \quad (2)$$

Величины

$$\Lambda_n(\Gamma)=\Lambda_n \overset{df}{=\!=} \max_{t\in\Gamma} \sum_{j=0}^{2n} |l_j(t)|,\ n=1,2,\ldots,$$

называются интерполяционными константами Лебега для контура $\Gamma$. Поведение этих констант хорошо известно для случаев, когда контур $\Gamma$ является отрезком вещественной оси либо совпадает с единичной окружностью, или же когда $\Gamma$ удовлетворяет условию " $j$ ". Именно, если точки $t_j$, $j=\overline{0,2n}$, равнораспределены на $\Gamma$, то числа $\lambda_n$ удовлетворят соотношению $\lambda_n \asymp \ln(2n+1)$.

В § 4 установлено, что если контур $\Gamma$ принадлежит классу $\Lambda$, то для интерполяционных констант Лебега $\Lambda_n$ справедливы аналогичные оценки. Точнее, справедлива

ТЕОРЕМА I. Пусть $\Gamma\in\Lambda$ и пусть точки $t_j$, $j=\overline{0,2n}$, составляют систему узлов Фейера на $\Gamma$:

$$t_j=\psi\left(\exp\frac{2\pi i}{2n+1}(j-n)\right),\ j=\overline{0,2n}. \quad (3)$$

Тогда существуют положительные постоянные $m_2(\Gamma)$, $M_2(\Gamma)$

и $M_3(\Gamma)$ такие, что для всех натуральных $n$ интерполяционные константы Лебега $\lambda_n$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$m_2(\Gamma)\ln(2n+1) \leq \lambda_n \leq M_2(\Gamma) + M_3(\Gamma)\ln(2n+1).$$

В пятом и шестом параграфах основное внимание уделено установлению оценок отклонения интерполяционного полинома Лагранжа от порождающей его функции в шкале гельдеровых пространств и в пространствах $L_p(\Gamma)$, $1<p<\infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Gamma \in \Lambda$ и $g(t) \in H_\alpha^r(\Gamma)$, $0<\alpha\leq 1$, $r = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть, кроме того, $0<\beta\leq\alpha\leq 1$. Если точки $t_j$, $j=\overline{0,2n}$, вычислены согласно (3), то*

$$\|g - U_n g\|_\beta \leq \frac{c_0 + c_1 \ln(2n+1)}{n^{r+\alpha-\beta}} H(g^{(r)};\alpha).$$

Через $C(r;\mu)$, где $r$ – целое неотрицательное число и $0<\mu<1$, обозначим подмножество контуров класса $\Lambda$, для которых функция $z=\psi(w)$ непрерывно дифференцируема $r$ раз в $\{|w|>1\}$, причем $\psi^{(r)}(w)$ удовлетворяет на $|w|=1$ условию Гельдера с показателем $\mu$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Gamma \in C(2;\mu)$ и $t_j$, $j=\overline{0,2n}$, вычислены по формулам (3). Тогда

$$\|U_n\|_{C(\Gamma)\to L_p(\Gamma)} \leq B(p),$$

где $B(p)$ – постоянная, зависящая от $p$, $1<p<\infty$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\Gamma \in C(2;\mu)$ и $t_j$, $j=\overline{0,2n}$, определены в (3). Тогда для каждой непрерывной на $\Gamma$ функции $g(t)$

$$\|g - U_n g\|_{L_p} \leq (1+B(p))\,E_n(g;\Gamma),$$

---

* Через $c_k$ $(k=0,1,\ldots)$ обозначаются постоянные, не зависящие от $n$.

где $E_n(g;\Gamma)$ – наилучшее равномерное приближение функции $g(t)$ на $\Gamma$ полиномами вида $\sum\limits_{k=-n}^{n} r_k t^k,\ t\in\Gamma.$

Для случая, когда контур $\Gamma$ совпадает с единичной окружностью, результаты, аналогичные теоремам 2 – 4 были получены Б.Г.Габдулхаевым. При переходе к произвольному гладкому замкнутому контуру в доказательстве этих теорем появляются новые значительные математические трудности.

В седьмом, последнем параграфе этой главы устанавливается оценка отклонения ряда Фурье от функции в шкале гельдеровых пространств и их обобщений.

Пусть $g(t)$ – произвольная непрерывная на $\Gamma_0$ функция. Через $g_j,\ j=0,\pm 1,\ldots,$ будем обозначать коэффициенты Фурье функции $g(t)$:

$$g_j=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} g(\tau)\,\tau^{-j-1}\,d\tau,\ j=0,\pm 1,\ldots,$$

и пусть $T_n$ – оператор, который действует по правилу

$$(T_n g)(t)=\sum_{j=-n}^{n} g_j\, t^j,\ t\in\Gamma. \tag{4}$$

Такую сумму впредь будем называть редукцией функции $g(t)$.

Следующие ниже теоремы 5, 6 устанавливают оценки отклонения редукции функции от самой функции в пространствах $H_\beta(\Gamma_0)$ и $H_\beta^r(\Gamma_0)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $g(t)\in H_\alpha^r(\Gamma_0),\ 0<\alpha\leqslant 1,\ r=0,1,\ldots$ и пусть $0<\beta\leqslant\alpha$. Тогда

$$\left\| g(t)-(T_n g)(t)\right\|_\beta \leqslant \frac{(C_2+C_3\ln(2n+1))H(g^{(r)};\alpha)}{n^{r+\alpha-\beta}}$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $g(t) \in H_\alpha^r(\Gamma_0)$, $0 < \alpha \leq 1$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть, кроме того $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$. Тогда

$$\| g - T_n g \|_{\beta, q} \leq \frac{c_3 + c_4 \ln(2n+1)}{n^{r+\alpha-\beta-q}} H(g^{(r)}; \alpha),$$

при условии $r + \alpha > q + \beta$.

Здесь и далее

$$\| g \|_{\beta, q} = \sum_{k=0}^{q-1} \| g^{(k)} \|_C + \| g^{(q)} \|_\beta$$

Часть результатов этой главы опубликована в работах [I - 6, II - 15].

Во второй главе диссертации предложены вычислительные схемы и дано теоретическое обоснование для трех прямых методов решения систем СИУ (как эллиптического, так и неэллиптического типа). К ним относятся методы коллокаций (его еще называют методом совпадения или интерполяционным методом), механических квадратур (называемый еще методом замены интеграла на конечную сумму) и редукции (называемый еще методом Галеркина или степенным методом).

В § 8 для систем СИУ эллиптического типа, определенных на произвольном замкнутом гладком контуре, приведены вычислительные схемы методов коллокаций и механических квадратур и сформулированы теоремы о разрешимости вычислительных схем и сходимости этих методов в шкале гельдеровых пространств, а также в пространствах $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$.

Отметим, что предложенные в диссертации вычислительные схемы этих методов и формулировки основных результатов по их теоретическому обоснованию применительно к произвольному замкнутому контуру $\Gamma$ переносятся из случая единичной окружности и совпадают (в случае, когда $\Gamma = \Gamma_0$ ) с известными ранее вычислительными схемами этих методов и результатами,полученными в работах Габдулхаева Б.Г. и Иванова В.В., однако доказательства не переносимы и при этом используется более сложный математический аппарат.

Рассмотрим систему СИУ:

$$(Mx\equiv)A(t)(Px)(t)+B(t)(Qx)(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}K(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t), t\in\Gamma, \quad (5)$$

где $A(t)$, $B(t)$ и $K(t,\tau)$ - матрицы-функции (МФ) размерности $m\times m$; $f(t)$ - вектор-функция (ВФ) размерности $m$, определенные на $\Gamma$; $x(t)$ - искомая ВФ; $P=\frac{1}{2}(I+S)$; $Q=I-P$, $I$ - тождественный, а $S$ - сингулярный операторы с ядром Коши:

$$(Sx)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{x(\tau)}{\tau-t}d\tau, \quad t\in\Gamma.$$

Приближенное решение уравнения (5) ищем в виде полинома

$$v_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}\xi_k t^k, \quad t\in\Gamma, \quad (6)$$

где $\xi_k$, $k=\overline{-n,n}$, - неизвестные постоянные векторы размерности $m$.

Отметим, что в качестве базисных функций подпространства приближенных решений выбираются такие функции,сингулярный интеграл от которых вычисляется просто и точно. Таковыми являются, например, функции $t^k$, $k = 0 \pm 1,\ldots$; формулы (6) были выбраны с учетом этого факта вместе с результатами теорем 2 - 6, которые утверждают возможность аппроксимации функций,определенных на $\Gamma$,различными аппаратами приближения вида

$$\sum_{k=-n}^{n} r_k t^k, \ t\in\Gamma.$$

Если уравнение (5) решать методом коллокаций, то неизвестные $\xi_k$, $k=\overline{-n,n}$, находим как решение следующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$A(t_j)\sum_{k=0}^{n}\xi_k t_j^k + B(t_j)\sum_{k=-n}^{-1}\xi_k t_j^k +$$

$$+\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} K(t_j,\tau)\tau^k d\tau\,\xi_k = f(t_j),\ j=\overline{0,2n}, \qquad (7)$$

а при решении этого уравнения методом механических квадратур – из СЛАУ

$$A(t_j)\sum_{k=0}^{n}\xi_k t_j^k + B(t_j)\sum_{k=-n}^{-1}\xi_k t_j^k +$$

$$+\sum_{k=-n}^{n}\sum_{s=0}^{2n} K(t_j,t_s)t_s\Lambda_{-k}^{(s)}\xi_k = f(t_j),\ j=\overline{0,2n}, \qquad (8)$$

где комплексные числа $\Lambda_k^{(s)}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots,s=\overline{0,2n}$, определены в (2).

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполняются следующие условия:

I) контур $\Gamma\in\Lambda$;

2) элементы МФ $A(t)$ и $B(t)$ принадлежат $H_\alpha^r(\Gamma)$; $0<\alpha\le 1$, $r=0, 1, 2, \ldots$;

3) $\det A(t)\det B(t)\neq 0, t\in\Gamma$;

4) левые частные индексы МФ $B^{-1}(t)A(t)$ все равны нулю;

5) МФ $K(t,\tau)\in\left[H^r_\alpha(\Gamma)\right]_{m\times m}$ по обеим переменным, ВФ $f(t)\in\left[H^r_\alpha(\Gamma)\right]_m$;

6) оператор $M$ имеет нулевое ядро;

7) $0<\beta<\alpha\leq 1$;

8) точки $t_j$, $j=\overline{0,2n}$, составляют систему узлов Фейера на $\Gamma$.

Тогда при всех $n\geqslant n_1$ ($n_1$ определяется структурными свойствами коэффициентов уравнения) СЛАУ (7) имеет единственное решение $\xi_k$, $k=\overline{-n,n}$. Приближенные решения $v_n(t)$, построенные по формуле (6), сходятся по норме $\left[H_\beta(\Gamma)\right]_m$ к решению $v(t)$ уравнения (5) и для скорости сходимости имеет место оценка

$$\left\|v-v_n\right\|_\beta=O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\sigma(\alpha)-\beta}}\right)H(v^{(r)};\sigma(\alpha));\tag{9}$$

$$\sigma(\alpha)=\left\{\alpha \text{ при } \alpha<1;\ 1-\varepsilon \text{ при } \alpha=1\right\},\tag{10}$$

где $\varepsilon$ - достаточно малое положительное число.

ТЕОРЕМА 8. В условиях теоремы 7 при всех $n\geqslant n_2\geqslant n_1$ ($n_2$ определяется свойствами коэффициентов уравнения) СЛАУ (8) имеет единственное решение $\xi_k$, $k=\overline{-n,n}$.

Приближенные решения $v_n(t)$, построенные по формуле (6), сходятся по норме пространства $\left[H_\beta(\Gamma)\right]_m$ к решению $v(t)$ уравнения (5) со скоростью

$$\left\|v-v_n\right\|_\beta=O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{r+\sigma(\alpha)-\beta}}\right)H(v^{(r)};\sigma(\alpha)),\tag{11}$$

где $\sigma(\alpha)$ определено в (10).

В следующей теореме устанавливается результат, являющийся в определенном смысле окончательным, в котором вместо условия I) из теоремы 7 используется условие:

I′) контур $\Gamma$ принадлежит классу $C(2;\mu), 0<\mu<1$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть выполняется условие (I′) и условия 2) – 8) из теоремы 7.

Тогда справедливы все утверждения теоремы 8 с заменой там оценки (II) на лучшую (9).

ТЕОРЕМА 10. Пусть выполняются следующие условия:

I) кривая $\Gamma$ принадлежит классу $C(2;\mu), 0<\mu<1$;

2) МФ $A(t)$ и $B(t)$ принадлежат классу $[H^r_\alpha(\Gamma)]_{m\times m}$, $0<\alpha\leq 1$, $r=0,1,\ldots$;

3) $\det A(t)\det B(t)\neq 0,\ t\in\Gamma$;

4) левые частные индексы МФ $B^{-1}(t)A(t)$ равны нулю;

5) $f(t)\in[C^r(\Gamma)]_m$, $K(t,\tau)\in[C^r(\Gamma)]_{m\times m}$ по обеим переменным;

6) $\operatorname{Ker} M=0$;

7) точки $t_j, j=\overline{0,2n}$, составляют систему узлов Фейера на $\Gamma$ (см.формулу (3)).

Тогда при $n\geqslant n_3$ СЛАУ (7) имеет единственное решение $\xi_k, k=\overline{-n,n}$. Приближенные решения $v_n(t)$, построенные согласно (6), сходятся по норме $[L_p(\Gamma)]_m$ к решению $v(t)$ уравнения (5) и для скорости сходимости справедлива следующая оценка*:

$$\|v-v_n\|_{L_p}=O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)+\frac{1}{n^r}O\left(\omega\left(f^{(r)};\frac{1}{n}\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{n^r}O\left(\omega^t\left(K^{(r)};\frac{1}{n}\right)\right)$$

---

* Через $\omega(\cdot;\delta)(\omega^t(\cdot;\delta))$ обозначается модуль непрерывности ВФ и МФ (модуль непрерывности относительно переменной $t$).

ТЕОРЕМА II. В условиях теоремы IO при всех $n \geq n_4 \geq n_3$ СЛАУ (8) имеет единственное решение $\xi_k, k=\overline{-n,n}$. Приближенные решения (6) сходятся по норме $[L_p(\Gamma)]_m$ к решению $v(t)$ уравнения (5) со скоростью

$$\|v-v_n\|_{L_p} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right) + \frac{1}{n^r}\Big\{O(\omega(f^{(r)};\frac{1}{n})) +$$

$$+ O(\omega^t(K^{(r)};\frac{1}{n})) + O(\omega^\tau(K^{(r)};\frac{1}{n}))\Big\}.$$

Доказательству этих теорем посвящены § 9 и IO.

В § II дано теоретическое обоснование методов коллокаций и механических квадратур для систем СИУ (5), символы которых имеют на $\Gamma$ конечное число нулей целых кратностей. Оценки скорости сходимости получены в шкале гельдеровых пространств и в пространствах $L_p(\Gamma), 1<p<\infty$.

В § I2 и I3 предложены вычислительные схемы метода редукции для уравнения (5) и дано теоретическое обоснование этого метода в пространстве гельдеровых функций как для эллиптических, так и для неэллиптических систем СИУ, в случае, когда $\Gamma = \Gamma_0$.

ТЕОРЕМА I2. Пусть выполняются следующие условия:

I) контур $\Gamma=\Gamma_0$;

2) $A(t), B(t)$ и $K(t,\tau) \in [H_\alpha^r(\Gamma)]_{m\times m}$, $f(t) \in [H_\alpha^r(\Gamma)]_m$, $0<\alpha\leq 1$, $r=0,1,\ldots$;

3) $\det A(t) \det B(t) \neq 0, t\in\Gamma$;

4) левые частные индексы МФ $A(t)$ и правые частные индексы МФ $B(t)$ и $B^{-1}(t)A(t)$ равны нулю;

5) $\ker M = 0$;

6) $0<\beta<\alpha$.

Тогда для всех $n \geq n_5$ СЛАУ метода редукции

$$\sum_{k=0}^{n} A_{j-k}\xi_k + \sum_{k=-n}^{-1} B_{j-k}\xi_k + \sum_{k=-n}^{n} T_{jk}\xi_k = f_j, \; j=\overline{-n,n},$$

в которой постоянные матрицы $A_j, B_j$ и $T_{jk}, j,k=0,\pm 1,\ldots$ размерности $m \times m$, а также постоянные векторы $f_j, j=0,\pm 1,\ldots$ размерности $m$ являются соответственно коэффициентами Фурье МФ $A(t)$, $B(t)$ и $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} K(t,\tau)\tau^k d\tau$, а также ВФ $f(t)$,

имеет единственное решение $\xi_k, k=\overline{-n,n}$. Приближенные решения $v_n(t)=\sum\limits_{k=-n}^{n}\xi_k t^k$ сходятся при $n\to\infty$ по норме $[H_\beta(\Gamma)]_m$ к точному решению $v(t)$ уравнения (5) и для скорости сходимости справедлива оценка (9).

В § 14 исследованы вопросы оптимизации по порядку рассмотренных в § 8 прямых методов решения характеристических систем СИУ, заданных на произвольном замкнутом гладком контуре и рассмотренных в пространствах гельдеровых функций (здесь оптимизация понимается в смысле введенного в гл.П и IУ монографии Б.Г.Габдулхаева). В случае одного СИУ, заданного на единичной окружности, эти вопросы были решены в работах В.В.Иванова, Б.Г. Габдулхаева и продолжены В.П.Кацушиным и В.Е.Горловым. Результаты этой главы опубликованы в [I - 6, II - I6, I8 - 2I,23 - 28].

Третья глава посвящена теоретическому обоснованию прямых методов решения следующих классов уравнений: I) систем СИУ с ядром, имеющим слабую особенность в регулярной части; П) систем сингулярных интегродифференциальных уравнений; Ш) систем уравнений Винера-Хопфа; IУ) систем парных СИУ.

Уравнения I класса решаются методами коллокаций, механических квадратур и редукции и теоретически обосновываются в пространствах гельдеровых функций и в $L_p(\Gamma), 1<p<\infty$, П класса - методами коллокаций, квадратурно-интерполяционным и редукции в паре пространств $\overset{0}{H}{}^{(q)}_{\beta}(\Gamma)$ и $H_\beta(\Gamma)$, уравнения Ш и IУ классов - методом редукции; теоретическое обоснование этого метода дано в пространствах гельдеровых функций.

В § 15 рассматривается система СИУ (5), в предположении, что ядро $K(t,\tau)$ имеет слабую особенность:

$$K(t,\tau)=|t-\tau|^{-\gamma}K^*(t,\tau),\ 0<\gamma<1,$$

$K^*(t,\tau)$ - непрерывная МФ по обеим переменным.

Для таких уравнений вычислительные схемы методов коллокаций и редукции с практической точки зрения сильно усложняются, а метод механических квадратур непосредственно применить нельзя. В этом случае система СИУ (5) заменяется на уравнение, имеющее ту же характеристическую часть, что и уравнение (5), а ядро в регулярной части является непрерывной функцией относительно обеих переменных. Пусть $\rho$ - произвольное положительное число. Через $K_\rho(t,\tau)$ обозначаем МФ, определяемую на $\Gamma\times\Gamma$ равенством

$$K_\rho(t,\tau)=\begin{cases}|t-\tau|^{-\gamma}K^*(t,\tau) & \text{при } |\tau-t|\geqslant\rho;\\ \rho^{-\gamma}K^*(t,\tau) & \text{при } |\tau-t|<\rho,\end{cases}$$

и в качестве ядра для нового уравнения выбираем МФ $K_\rho(t,\tau)$.

В качестве приближенного решения уравнения (5) принимаем приближенное решение новой системы СИУ с ядром $K_\rho(t,\tau)$, которое находим по одному из рассмотренных в гл.П прямых методов. Приведем для примера один из результатов § 15, относящегося к обоснованию метода коллокаций.

ТЕОРЕМА 13. Пусть выполняются условия 1) - 6) и 8) из теоремы 7 и пусть, кроме того, $0<\beta<\delta\,(=\min(\alpha,1-\gamma))$.

Тогда при достаточно малых $\rho$ и достаточно больших $n$ СЛАУ

$$A(t_j)\sum_{k=0}^{n}t_j^k\xi_k+B(t_j)\sum_{k=-n}^{-1}t_j^k\xi_k+$$

$$+\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma K_\rho(t_j,\tau)\tau^k d\tau\,\xi_k=f(t_j),\ j=\overline{0,2n},$$

имеет единственное решение $\xi_{k,\rho}, k=\overline{-n,n}$. Приближенные решения $x_{n,\rho}(t)=\sum_{k=-n}^{n}\xi_{k,\rho}t^k, t\in\Gamma$, сходятся по норме $[H_\beta(\Gamma)]_m$ к точному решению $x(t)$ уравнения (5) в том смысле, что

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{n\to\infty}\|x-x_{n,\rho}\|_\beta=0.$$

Для скорости сходимости имеет место оценка

$$\|x-x_{n,\rho}\|_\beta=O(\vartheta_\rho)\|x\|_\beta+O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\delta-\beta}}\right)H(x^{(r)};\delta),$$

где

$$\vartheta_\rho=O(\|M^{-1}\|_\beta\cdot\rho^{1-\gamma})\le q<1.$$

Аналогичные результаты установлены и для остальных прямых методов в соответствующих функциональных пространствах, рассмотренных в диссертации.

В § 16 предложены вычислительные схемы методов коллокаций, редукции и квадратурно-интерполяционного для решения систем СИДУ, определенных на замкнутых контурах класса $\Lambda_{(q)}$, и дано их теоретическое обоснование в паре пространств $\overset{\circ}{H}_\beta$ и $H_\beta$. Приведем, например, вычислительную схему метода коллокаций и теорему, которые дают теоретическое обоснование этого метода для систем СИДУ, заданных на произвольном замкнутом гладком контуре $\Gamma$.

Рассмотрим следующую задачу. В подпространстве $[\overset{\circ}{H}{}^{(q)}_\beta(\Gamma)]_m$, состоящем из функций $z(t)$:

1) $z^{(q)}(t) \in H_\beta(\Gamma),\ q \geq 1;$

2) $\int\limits_\Gamma z(\tau)\tau^{-k-1}d\tau = 0,\ k=\overline{0,q-1},$

необходимо найти решение $x(t)$ системы СИДУ

$$(Dx\equiv)\sum_{r=0}^{q}\Big[A_r(t)(Px^{(r)})(t)+B_r(t)(Qx^{(r)})(t)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma K_r(t,\tau)x^{(r)}(\tau)d\tau\Big]=f(t),\ t\in\Gamma,$$

где $A_r(t),\ B_r(t),\ K_r(t,\tau)\ (r=\overline{0,q})$ – заданные $m\times m$ МФ с элементами из $H_\beta(\Gamma)$; $f(t)$ – известная ВФ размерности $m$ с компонентами из $H_\beta(\Gamma)$.

Согласно методу коллокаций приближенное решение этой системы ищем в виде полинома

$$v_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\xi_k^{(n)}t^{k+q}+\sum_{k=-n}^{-1}\xi_k^{(n)}t^k,\ t\in\Gamma, \tag{11}$$

неизвестные коэффициенты которого $\xi_k^{(n)}=\xi_k,\ k=\overline{-n,n}$, находим из следующей СЛАУ:

$$\sum_{r=0}^{q}\Big[A_r(t_j)\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+q)!}{(k+q-r)!}t_j^{k+q-r}\xi_k+B_r(t_j)\sum_{k=1}^{n}(-1)^r\times$$

$$\times\frac{(k+r-1)!}{(k+1)!}t_j^{-k-r}\xi_{-k}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+q)!}{(k+q-r)!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma K_r(t_j,\tau)\tau^{k+q-r}\times$$

$$\times d\tau\,\xi_k+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(k+r-1)!}{(k-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma K_r(t_j,\tau)\tau^{-k-r}d\tau\,\xi_k\Big]=$$

$$=f(t_j),\ j=\overline{0,2n}. \tag{12}$$

ТЕОРЕМА 14. Пусть выполняются следующие условия:

1) $\Gamma \in \Lambda$;

2) элементы МФ $A_r(t), B_r(t), K_r(t,\tau), r=\overline{0,q}$ и ВФ $f(t)$ принадлежат $H_\alpha(\Gamma)$;

3) $0<\beta<\alpha\leq 1$;

4) $\det A_q(t) \det B_q(t) \neq 0,\ t\in\Gamma$;

5) левые частные индексы МФ $t^{-q} B_q^{-1}(t) A_q(t)$ равны нулю;

6) оператор $D: \left[\overset{\circ}{H}{}^{(q)}_\beta(\Gamma)\right]_m \longrightarrow \left[H_\beta(\Gamma)\right]_m$ линейно обратим;

7) точки $t_j$, $j=\overline{0,2n}$, составляют систему узлов Фейера на $\Gamma$.

Тогда, начиная с номеров $n\geq N_0$, СЛАУ (12) имеет единственное решение $\xi_k, k=\overline{-n,n}$. Приближенные решения $v_n(t)$, построенные по формуле (11), сходятся при $n\to\infty$ по норме $\left[H^{(q)}_\beta(\Gamma)\right]_m$ к точному решению $x(t)$ исходной системы СИДУ. Для скорости сходимости справедлива оценка

$$\left\| x - v_n \right\|_{\beta,q} = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha-\beta}}\right).$$

Для одного СИДУ, заданного на единичной окружности или на отрезке вещественной оси, методы коллокационного типа были впервые обоснованы в работах Б.Г.Габдулхаева, а для систем таких уравнений - в работах автора диссертации [6, 8] и в совместной работе [28].

Вопросам теоретического обоснования метода редукции для систем уравнений Винера-Хопфа, для которых матрицы-функции определены на контуре $\Gamma_0$ и имеют ненулевые частные индексы, посвящен § 17. Указана процедура приближенного нахождения всех линейно независимых решений этих уравнений.

Исследуется также метод редукции для систем парных СИУ, определенных на $\Gamma_0$. Оценки скорости сходимости установлены в шкале гельдеровых пространств.

Результаты гл.III опубликованы в работах [4 - 6, 10, 12, 17, 22, 28].

В четвертой, последней главе диссертации исследуются вопросы решения прямыми методами СИУ, коэффициенты которых являются оператор-функциями, определенными на $\Gamma \in \Lambda$. Теория таких уравнений разработана И.Ц.Гохбергом, М.С.Будяну, И.А. Фельдманом и другими авторами.

В работах И.Ц.Гохберга, М.С.Будяну впервые исследован вопрос о сходимости метода редукции в пространстве $L_p(\Gamma_0)$ для СИУ с коэффициентами, являющимися оператор-функциями, определенными на $\Gamma_0$, а в работах автора диссертации [7 - 9] для этого класса СИУ впервые дано теоретическое обоснование методов коллокаций и редукции в пространствах гельдеровых оператор-функций.

В § 18 получен ряд утверждений относительно аппроксимации оператор-функций, определенных на контурах класса $\Lambda$ интерполяционными полиномами Лагранжа и частичными суммами ряда Фурье в шкале гельдеровых пространств, которые вместе с результатами § 1-3 используются в § 19 и 20 для теоретического обоснования методов коллокаций, механических квадратур и редукции при решении СИУ с операторными коэффициентами.

Вопросы устойчивости и обусловленности рассмотренных в работе прямых методов решения систем СИУ исследуются в § 21. В частности, доказывается, что при выполнении условий теорем 7 - 14 методы коллокаций, механических квадратур, редукции и квадратурно-интерполяционный метод устойчивы относительно малых возмущений приближающих уравнений и начиная с некоторых номеров $n$ ($\geqslant N_1$) существуют числа обусловленности для приближенных уравнений соответствующих методов.

В последнем, § 22 описаны некоторые классы прикладных задач, которые моделируются системами СИУ, заданных на замкнутом гладком контуре. Здесь приведены также примеры численного решения конкретных СИУ и систем СИУ методами коллокаций на контуре, который является сильно вытянутым эллипсом и редукции на окружности.

Показана методика проверки условий теорем, дающих теоретическое обоснование того или другого метода.

Результаты этого параграфа показывают высокую эффективность разработанных в диссертации методов, и вычислительных схем решения систем СИУ на гладких замкнутых контурах.

Программы счета составлены на языке Фортран. Численные результаты получены на ЭВМ класса ЕС.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты работы, выносимые на защиту:

1. Аппроксимация функций комплексного переменного, а также оператор-функций, определенных на произвольном замкнутом гладком контуре некоторыми специальными аппаратами приближения, формулы построения которых задаются явно, а также оценки погрешностей этих аппроксимаций в пространстве непрерывных функций $C(\Gamma)$, в шкале гельдеровых пространств $H_\beta(\Gamma)$ и в лебеговских пространствах $L_p(\Gamma)$, $1<p<\infty$.

2. Теоретическое обоснование методов коллокаций и механических квадратур для решения полных систем эллиптических и неэллиптических СИУ как с непрерывным ядром, так и с ядром со слабой особенностью в регулярной части, определенных на произвольном гладком замкнутом контуре $\Gamma$, в пространствах $H_\beta(\Gamma)$ и $L_p(\Gamma)$, $1<p<\infty$.

3. Теоретическое обоснование метода коллокаций и квадратурно-интерполяционного метода для систем СИДУ, определенных на произвольном замкнутом гладком контуре $\Gamma$, в паре пространств $\overset{\circ}{H}{}^{(q)}_\beta(\Gamma)$ и $H_\beta(\Gamma)$.

4. Теоретическое обоснование метода редукции для систем эллиптических и неэллиптических СИУ, для систем уравнений Винера-Хопфа и парных систем СИУ, а также для СИУ с операторными коэффициентами, рассмотренных в пространствах $H_\beta(\Gamma_0)$.

5. Теоретическое обоснование методов коллокаций и механических квадратур для СИУ, коэффициенты которых являются оператор-функциями, определенными на произвольном замкнутом гладком контуре $\Gamma$, в пространствах $H_\beta(\Gamma)$.

6. Доказательство устойчивости и обусловленности исследуемых в работе прямых методов решения систем СИУ и других классов СИУ в пространствах гельдеровых функций и в пространствах $L_p$ $(1<p<\infty)$.

7. Установление оптимальности по порядку (в указанном выше смысле) изученных в работе алгоритмов решения систем характеристических СИУ, заданных на произвольном замкнутом гладком контуре и рассмотренных в шкале гельдеровых пространств.

* *

*

Автор выражает искреннюю благодарность научному консультанту работы профессору Казанского университета Г.Б.Габдулхаеву за постоянное внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

Основные результаты диссертации опубликованы

в следующих работах


1. Золотаревский В.А. О сходимости коллокационного метода для систем сингулярных интегральных уравнений//Мат.исслед.- Кишинев: Штиинца, 1974. - Т.IX, вып.1(31).-С.56-69.

2. Золотаревский В.А. Решение сингулярных интегральных уравнений методом редукции//Мат.исслед. - Кишинев: Штиинца, 1974. - Т.IX, вып.2(32). - С.39-52.

3. Золотаревский В.А. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений//Мат.исслед. - Кишинев:Штиинца,1974.- Т.IX, вып.3(33). - С.82-94.

4. Золотаревский В.А. О методе механических квадратур для систем сингулярных интегральных уравнений//Изв.вузов. Математика. - 1976. - № 4. - С.47-55.

5. Золотаревский В.А. Сходимость коллокационного метода и метода механических квадратур для систем сингулярных интегральных уравнений//Изв.вузов. Математика. - 1976.-№ 6.- С.105-108.

6. Золотаревский В.А. О сходимости коллокационного метода и метода механических квадратур для систем сингулярных ин - тегральных уравнений//Исследования по функциональному анализу и дифференциальным уравнениям: Мат.науки. - Кишинев: Штиинца, 1978. - С.3-12.

7. Золотаревский В.А. Сходимость коллокационного метода для систем сингулярных интегродифференциальных уравнений //

Современные вопросы прикладной математики и программиро - вания. - Кишинев: Штиинца, 1979. - С.50-54.

8. Золотаревский В.А. О методе редукции для уравнений Винера-Хопфа с операторными коэффициентами//Изв.вузов.Математика.- 1978. - № 3. - С.112-115.

9. Золотаревский В.А. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с операторными коэффициентами методом моментов // Изв.вузов. Математика. - 1981. - № 9.-С.16-18.

10. Золотаревский В.А. Приближенное решение уравнений Винера-Хопфа методом редукции//Тез.докл.третьего Республиканского симпозиума по дифференциальным и интегральным уравне - ниям. - Одесса, 1982. - С.211.

11. Золотаревский В.А. О методе редукции решения полных сингулярных интегральных уравнений на ляпуновском контуре// Дифференциальные уравнения. - 1987. - Т.23, № 8. - С.1416-1422.

12. Золотаревский В.А. Приближенное решение систем сингулярных интегральных уравнений (СИУ) на некоторых гладких контурах в пространстве гельдеровых функций. Деп.в МолдНИИНТИ. 14.06.88. - № 997. - 27 с.

13. Золотаревский В.А. Приближенное решение систем сингулярных интегральных уравнений (СИУ) на некоторых гладких контурах в пространствах $L_p$ $(1 < p < \infty)$ . Деп.в МолдНИИНТИ. 18.02.88. - № 954 - М. - 20 с.

14. Золотаревский В.А. Приближенное решение систем сингулярных интегральных уравнений на некоторых гладких контурах в пространствах $L_p$ //Изв.вузов. Математика. - 1989.-№ 2.- С.74-78.

15. Золотаревский В.А. Прямые методы решения систем сингулярных интегральных уравнений на произвольных замкнутых гладких контурах // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: Тез.докл.Всесоюзного симпозиума. 23-29 мая 1989 г. - Харьков, 1989. - С.119-121.

16. Золотаревский В.А. Прямые методы решения систем сингулярных интегродифференциальных уравнений на произвольном замкнутом гладком контуре//Интегральные уравнения в прикладном моделировании: Тез.докл.III республиканской научно-технической конференции. 14-16 ноября 1989 г. - Киев, 1989. - С.74-75.

17. Золотаревский В.А. Об оптимальных алгоритмах приближенного решения систем сингулярных интегральных уравнений// Исследования по прикладной математике. - Кишинев: Штиинца, 1990. - С.70-77.

18. Золотаревский В.А. О методе коллокаций приближенного решения систем сингулярных интегральных уравнений с обращающимися в нуль символами//Изв.вузов. Математика.-1990.- № 1 - С.25-29.

19. Золотаревский В.А. О приближенных решениях систем сингулярных интегральных уравнений в пространстве $L_p$ //Изв. АН ССР Молдова. Сер.: Математика. - 1990. - № 3.-С.22-26.

20. Золотаревский В.А. Конечномерные методы решения сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах интегрирования. - Кишинев: Штиинца, 1991. - 136 с.

21. Золотаревский В.А., Калистру Р.К. Приближенное решение систем сингулярных интегродифференциальных уравнений(СИДУ) на некоторых замкнутых гладких контурах. I//Исследования по прикладной математике и информатике. - Кишинев: Штиинца, 1990. - С.77-84.

22. Золотаревский В.А., Нягэ В.И. Приближенное решение одного класса сингулярных интегральных уравнений со сдвигом// Изв.вузов. Математика. - 1976. - № 11. - С.105-108.

23. Золотаревский В.А., Нягэ В.И. О приближенном решении одного сингулярного интегрального уравнения со сдвигом // Линейные операторы и интегральные уравнения. - Кишинев: Штиинца, 1981. - С.17-28.

24. Золотаревский В.А., Сейчук В.Н. Коллокационный метод решения сингулярных интегральных уравнений,заданных на ляпуновском контуре интегрирования//Докл.АН СССР. - 1981.- Т.258. - № 1. - С.20-23.

25. Золотаревский В.А., Сейчук В.Н. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений со сдвигом//Исследование операций и программирование. - Кишинев: Штиинца, 1982. - С.55-59.

26. Золотаревский В.А., Сейчук В.Н. Коллокационный метод решения сингулярных интегральных уравнений вдоль ляпуновского контура // Дифференциальные уравнения. - 1983. - Т.19. - № 6. - С.1056-1064.

27. Золотаревский В.А., Сейчук В.Н. О методе моментов решения систем линейных и нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений // Исследование по численным методам и теоретической кибернетике: Мат.науки. - Кишинев: Штиинца, 1985. - С.55-62.

28. Золотаревский В.А., Чеботару И.С. О приближенном решении систем уравнений Винера-Хопфа с ненулевыми частными индексами // Изв.вузов. Математика. - 1978. - № 7. - С.102-105.

Владимир Алексеевич

ЗОЛОТАРЕВСКИЙ

# ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЗАМКНУТЫХ КОНТУРАХ

(01.01.07 - вычислительная математика)

(а в т о р е ф е р а т)

Подписано в печать 25.02.91. Формат 60х84 I/16. Ротапринт.
Печ.л.2,0. Уч.-изд.л.I,8. Заказ 96 . Тираж I00. Бесплатно.

Отдел оперативной полиграфии Молдавского госуниверситета.
277014. Кишинев-I4, ул.М.Когэлничану, 65-а.