

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

КУДЬЯВИН Владимир Семенович

УДК 517.53; 54

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ, ЕМКОСТНЫЕ И МОДУЛЬНЫЕ
ПРИНЦИПЫ В ТЕОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ
С ПЕРВЫМИ ОБОБЩЕННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

01.01.01. - математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев - 1991

Работа выполнена в ордена Трудового Красного Знамени
институте математики АН Украины.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор ГАВРИЛОВ В.И.,
доктор физико-математических наук,
профессор БАРСЕГЯН Г.А.,
доктор физико-математических наук,
профессор ТРОХИМЧУК Д.Д.

Ведущая организация: Институт математики СО АН СССР

Защита диссертации состоится "29" XII 1992 г.

в _____ часов на заседании специализированного Совета
Д 016.50.01 при Институте математики АН Украины по адресу:
252601 Киев 4, ГСП, ул.Репина, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "26" XI 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного Совета

Гусак Д.В.



ЛННБ України ім. В. Стефанюка



00816945 (X)

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Различные классы функций и отображений, более общие, чем аналитические, интенсивно изучаются более полувека. Основы теории плоских квазиконформных отображений были заложены в конце двадцатых - середине тридцатых годов работами Г.Греча и М.А.Лаврентьева. Возникновение этой теории было обусловлено как внутренними потребностями комплексного анализа, так и практики. За годы своего существования теория плоских квазиконформных отображений стала хорошо разработанной областью геометрической теории функций комплексного переменного и нашла применение для решения различных задач теории приближений, классических задач динамики сплошных сред. Достаточно полное изложение этой теории дано в монографиях Л.Альфorsa, П.П.Белинского, Л.И.Волковьского, О.Лехто и К.Виртанена, С.Л.Крушкаля.

Впервые пространственные квазиконформные отображения были рассмотрены М.А.Лаврентьевым в 1938 году в работе "Об одном дифференциальном признаке гомеоморфных отображений трехмерных областей". В этой работе не только впервые было введено определение квазиконформного отображения пространственной области, но и было отмечено качественное отличие пространственного случая от плоского. Трудности в исследовании пространственных квазиконформных отображений связаны, в общих чертах, с тем, что в системе уравнений в частных производных, определяющей свойство квазиконформности отображения, с ростом размерности пространства непропорционально быстро растет число соотношений. При $n = 2$ такая система уравнений всегда разрешима, в то время как при $n \geq 3$ соответствующая система оказывается переопределенной.

Это общее обстоятельство, на которое указал М.А.Лаврентьев, в пространственном случае проявилось в том, что для $n \geq 3$ не имеет места аналог известной теоремы Римана о конформных отображениях произвольной области на круг. Поэтому в пространственном случае, в отличие от плоского, исследования квазиконформных отображений уже не могли опереться на испытанный аппарат теории аналитических функций и конформ-

ных отображений. (В пространственном случае, как показал ещё Лиувилль, конформные отображения сводятся к тривиальному классу, так называемых, мебиусовых отображений – суперпозиций сдвигов, инверсий, гомотетий).

Кстати, именно тривиальность класса конформных отображений в пространстве и некоторая бедность квазиконформных отображений создали дополнительные трудности в исследовании, но и одновременно стали причиной интереса к отображениям более общим, чем пространственные квазиконформные отображения.

Следующие за квазиконформными отображениями (плоскими и пространственными), естественно, выделились сначала классы плоских, а затем пространственных отображений, квазиконформных в среднем и отображений с ограниченными интегралами Дирихле.

Плоские отображения, квазиконформные в среднем интенсивно изучались в работах П.П.Белинского, И.Н.Песина, Г.Д.Суворова, В.М.Миклюкова, В.И.Кругликова, П.А.Билуты.

Исследования по плоским и пространственным отображениям с ограниченными интегралами Дирихле принадлежат, в основном, Г.Д.Суворову и его ученикам (В.М.Миклюков, Б.П.Куфарев, И.С.Овчинников). Из зарубежных работ по данной тематике можно отметить только работы Лелон-Ферран.

В последнее время проявился интерес и к пространственным отображениям, квазиконформным в среднем. Первые работы в этом направлении были выполнены Л.Альфорсом, Ф.Герингом, С.Л.Крушкalem. В дальнейшем различные классы квазиконформных в среднем отображений исследовались в работах В.А.Зорича, М.Перовича, Ю.Ф.Стругова, В.И.Кругликова, В.И.Пайкова, В.Э.Гейнемана, автора и др. Разнообразие классов отображений, квазиконформных в среднем породило и разнообразие методов и приемов их исследования. Общий метод, использующий емкостную технику, был разработан В.И.Кругликовым для введенных им классов отображений, квазиконформных в (p, q) – среднем.

Исходя из вышесказанного, можно сформулировать две проблемы.

1. Найти наиболее широкий класс отображений, по возможности объединяющий рассматриваемые ранее классы и

близкий к ним по дифференциальным и геометрическим свойствам.

2. Найти единый метод исследования свойств рассматриваемых классов отображений.

Цель работы. Диссертация посвящена:

1. Построению класса пространственных гомеоморфных отображений с ограниченными интегральными характеристиками. Этот класс отображений зависит от нескольких действительных параметров так, что при частных значениях этих параметров мы получаем квазиконформные отображения, квазиконформные в среднем, отображения с ограниченными интегралами Дирихле.
2. Разработке геометрических, емкостных и модульных методов исследования введенного класса отображений.
3. Приложению разработанных методов для решения некоторых задач теорий отображений.

Методика исследований. Используются общие методы геометрической теории функций и отображений. Разработан геометрический метод исследования довольно широких классов гомеоморфных отображений, основанный на использовании регулярных систем окрестностей. Применен метод α, β - емкостей конденсаторов для изучения свойств отображений.

Научная новизна. Построены классы пространственных топологических отображений с L_p - интегрируемыми первыми обобщенными производными, включающие в себя квазиизометрические отображения, квазиконформные отображения, отображения с ограниченными интегралами Дирихле, отображения, квазиконформные в среднем. В зависимости от значений действительных параметров изучены вопросы вложения классов. Построен геометрический метод исследования свойств отображений, введенных классов, основанный на специальных характеристических законах изменения радиусов окрестностей при таких отображениях.

Разработаны методы α - емкостей конденсаторов и β - модулей семейств кривых.

Используя эти методы, устанавливаются различные свойства изучаемых отображений (дифференцируемость п.в., наличие

\mathcal{N} - свойства, принадлежность пространству $W_{p,loc}^1$ и т.д.).

Доказан ряд характеристических свойств отображений с ограниченными интегральными характеристиками, квазиизометрических и квазиконформных отображений, отображений, квазиконформных в среднем.

Предложена новая постановка экстремальных задач теории квазиконформных отображений - нахождение средних коэффициентов квазиконформности пар областей в R^n , $n \geq 2$. Разработан метод решения этих задач, основанный на изменении α -модулей семейств кривых при квазиконформных отображениях. В качестве иллюстрации этого метода найдены средние коэффициенты квазиконформности сферических колец.

Для класса гомеоморфизмов Каратеодори (класс \mathcal{C}) решены вопросы вложения в него некоторых классов квазиконформных отображений и отображений с неограниченными характеристиками. Установлен модульный критерий принадлежности классу \mathcal{C} автоморфизмов шара.

Все результаты являются новыми и снабжены достаточным количеством примеров отображений рассматриваемых классов.

Практическая и теоретическая ценность. Развитие в диссертации методы позволяют изучать широкие классы отображений с ограниченными и неограниченными характеристиками квазиконформности. Результаты диссертации могут найти применение в геометрической теории функций и отображений, теории дифференциальных уравнений в частных производных, в теории приближений и в пространственных задачах механики сплошной среды.

Совокупность приведенных в диссертации теорем и методов образует новое направление в теории пространственных отображений с ограниченными интегральными характеристиками.

Апробация работы. Результаты диссертации в течении ряда лет докладывались на научно-исследовательском семинаре отдела комплексного анализа и теории потенциала ИМ АН Украины (руководитель - проф. П.М.Тамразов); на научно-исследовательском семинаре (1984 г.) ИМ СО АН СССР, г.Новосибирск (руководитель

- проф. А.В.Сычев); на X и XI Донецких коллоквиумах по теории отображений; на всесоюзной конференции по геометрической теории функций (Новосибирск, 1988 г.); на всесоюзной школе по теории потенциала (Нацивели, 1991 г.) и ряде других республиканских конференций.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 15 работах автора [I - 15] .

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения; предварительных сведений, обозначений и терминологии; трех глав, которые разбиты на 15 параграфов, и составляет 213 страниц машинописного текста. Нумерация определений, лемм, теорем и примеров следующая: первая цифра соответствует номеру главы, вторая - номеру параграфа, третья - номеру в параграфе.

Список литературы содержит 258 работ отечественных и зарубежных авторов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Перейдём к изложению результатов диссертации.

Формулируемые ниже определения, леммы и теоремы имеют те же номера, что и в диссертации.

Во введении дается обзор исследований по тематике диссертации, обоснование актуальности работы, излагается краткое содержание работы.

В предварительных сведениях, обозначениях и терминологии вводятся традиционные для теории функций определения и обозначения, указаны функциональные пространства, необходимые в диссертации, и приведены некоторые известные сведения из геометрической теории отображений.

Глава I. Геометрические свойства топологических отображений с первыми обобщенными производными.

Глава состоит из четырех параграфов. В § I вводятся клас-

сы отображений с ограниченными интегральными линейными характеристиками.

Рассмотрим гомеоморфное отображение $y = f(x) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$, $\mathcal{D}, \mathcal{D}^*$ - ограниченные области в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$.

Если отображение $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ имеет в точке $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}$ частные производные $\partial f_i / \partial x_j$, $i, j = \overline{1, n}$, то в этой точке определены величины: линейное отображение $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, являющееся формальной производной f , матрица Якоби $J(x, f)$ отображения f , а также максимальное $\mathcal{L}(x, f) = \max_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$ и минимальное $\ell(x, f) = \min_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$.

растяжения отображения f .

Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - действительные числа такие, что $n-1 \leq \alpha \leq \beta \leq n$, $n-1 \leq \gamma \leq \delta \leq n$. Для отображения f , имеющего п.в. в области \mathcal{D} частные производные $\partial f_i / \partial x_j$, $i, j = \overline{1, n}$, рассмотрим измеримые в \mathcal{D} функции $\mathcal{N}(x) > 0$ и $\mathcal{N}^*(x) > 0$, для которых п.в. в \mathcal{D} выполняются неравенства

$$\frac{\alpha}{\beta} (\alpha - n + 1) \frac{\gamma}{\delta} (\gamma - n + 1) \mathcal{L}(x, f) \leq \mathcal{N}(x) \cdot \ell(x, f), \quad \mathcal{L}(x, f) \leq \mathcal{N}^*(x) \cdot \ell(x, f).$$

Назовем (α, β) - прямой и (γ, δ) - обратной аналитическими характеристиками, соответственно, величины

$$H_{\alpha, \beta}(x, f) = \inf \{ \mathcal{N}(x) \}, \quad H_{\gamma, \delta}^*(x, f) = \inf \{ \mathcal{N}^*(x) \},$$

где \inf берется над вышеопределенными классами функций $\mathcal{N}(x)$ и $\mathcal{N}^*(x)$. При этом считаем, что $\mathcal{N}(x) = \infty$, если $\ell(x, f) = 0$, но $\mathcal{L}(x, f) \neq 0$ и, аналогично, $\mathcal{N}^*(x) = \infty$, если $\ell(x, f) = 0$, но $\mathcal{L}(x, f) \neq 0$.

В частности, если f невырожденно дифференцируемо в точке x , то

$$H_{\alpha, \beta}(x, f) = \frac{\mathcal{L}(x, f)}{\ell^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}}(x, f)}, \quad H_{\beta, \delta}^*(x, f) = \frac{\mathcal{L}(x, f)}{\ell^{\frac{\delta}{\delta - \beta}}(x, f)}$$

При $\alpha = \beta = \beta = n \geq 2$ в этом случае получаем

$$H_{n, n}(x, f) = H_{n, n}^*(x, f) = \frac{\mathcal{L}(x, f)}{\ell(x, f)} - \text{линейная характеристика}$$

квазиконформности отображения f .

Пусть $\alpha, \beta, \beta, \delta$ - действительные фиксированные числа $n-1 \leq \alpha \leq \beta \leq n, n-1 \leq \beta \leq \delta \leq n$.

Определение I.1.2. Гомеоморфное отображение $f(x): \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ назовём отображением класса $H_{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$, если f и f^{-1} являются ACL-отображениями, невырожденно дифференцируемыми п.в. в своих областях определения, и при этом

$$H_{\alpha, \beta}(f) = \int_{\mathcal{D}} H_{\alpha, \beta}^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}}(x, f) dx < \infty.$$

Величину $H_{\alpha, \beta}(f)$ будем называть $H_{\alpha, \beta}$ - средней характеристикой отображения f .

Определение I.1.3. Гомеоморфное отображение $y = f(x): \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ назовём отображением класса $H_{\beta, \delta}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$, если f и f^{-1} являются ACL-отображениями, невырожденно дифференцируемыми п.в. в своих областях определения, и при этом

$$H_{\delta, \delta}^* (f) = \int_{\mathcal{D}} H_{\delta, \delta}^* \frac{\delta}{\delta - \delta'} (x, f) \cdot |J(x, f)| dx < \infty.$$

Величину $H_{\delta, \delta}^* (f)$ будем называть $H_{\delta, \delta}^*$ - средней характеристикой отображения f .

Из определений следует, что f и f^{-1} обладают \mathcal{N} -свойством, потому

$$H_{\alpha, \beta} (f^{-1}) = H_{\alpha, \beta}^* (f), \quad H_{\delta, \delta}^* (f^{-1}) = H_{\delta, \delta} (f).$$

Определение I.I.4. Гомеоморфное отображение $y = f(x): \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ назовем отображением класса $H(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$, если отображение f принадлежит пересечению классов $H_{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*) \cap H_{\delta, \delta}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$. При этом всегда предполагается известным, о каких параметрах $\alpha, \beta, \delta, \delta'$ идет речь. Отображения этого класса будем называть отображениями с ограниченными интегральными линейными характеристиками.

Вопрос о вложении классов $H_{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$ и $H_{\delta, \delta}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$ при различных значениях параметров $\alpha, \beta, \delta, \delta'$ решается в леммах I.I.I - I.I.7 и теоремой I.I.I.

Теорема I.I.I. Пусть $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ - гомеоморфизм.
I⁰. Для любых фиксированных параметров S, α таких, что $n-1 \leq S < \alpha < n$,

$$H_{\alpha, n}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*) \subset H_{S, n}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*).$$

2⁰. Для любых фиксированных параметров ρ, δ' таких, что $n-1 \leq \rho < \delta' < n$,

$$H_{\delta', n}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*) \subset H_{\rho, n}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*).$$

3⁰. Для любых фиксированных параметров α, β, ϵ таких, что $n-1 \leq \alpha < \beta < \epsilon \leq n$,

$$H_{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*) \subset H_{\alpha, \xi}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*) .$$

4°. Для любых фиксированных параметров γ, δ, ξ таких, что $n-1 < \gamma < \delta < \xi \leq n$,

$$H_{\gamma, \delta}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*) \subset H_{\gamma, \xi}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*) .$$

5°. Для любого фиксированного β , $n-1 < \beta \leq n$ классы

$$\frac{ACL_{\beta}(\mathcal{D})}{\beta - n + 1} \text{ и } H_{n-1, \beta}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*) \text{ совпадают;}$$

6°. Для любого фиксированного δ , $n-1 < \delta \leq n$ классы

$$\frac{ACL_{\delta}(\mathcal{D}^*)}{\delta - n + 1} \text{ и } H_{n-1, \delta}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*) \text{ совпадают.}$$

Замечание. Построен соответствующий пример, показывающий, что при $n \geq 3$ в первой части теоремы I.I.4 имеет место строгое включение.

В § 2 вводятся вспомогательные классы отображений. Следуя Радо и Рейхельдерферу, под субаддитивной функцией понимаем конечную неотрицательную функцию φ , заданную на открытых подмножествах G из некоторой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ так, что для каждого открытого множества $G \subset \mathcal{D}$ и любого конечного набора $\{G_k\}_{k=1}^m$ непересекающихся открытых множеств $G_k \subset G$, $k = \overline{1, m}$, выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^m \varphi(G_k) \leq \varphi(G).$$

Пусть x_0 - произвольная точка в \mathbb{R}^n . Предположим, что для всякого $t \in (0, 1]$ определена некоторая замкнутая окрестность $\psi_t(x_0)$ точки x_0 . Будем говорить, что множество окрестностей $\{\psi_t(x_0); t \in (0, 1]\}$ образует нормальную систему, если существует непрерывная

функция $\mathcal{V}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ такая, что $\mathcal{V}(x_0) = 0$, $\mathcal{V}(x) > 0$ при $x \neq x_0$, $\mathcal{U}_t(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n: \mathcal{V}(x) \leq t\}$ и множество $\Gamma_t(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n: \mathcal{V}(x) = t\}$ является границей $\mathcal{U}_t(x_0)$ при каждом $t \in (0, 1]$. Функция \mathcal{V} называется порождающей функцией нормальной системы $\{\mathcal{U}_t(x_0)\}$.

Полагаем

$$r(x_0, t) = \inf_{x \in \Gamma_t(x_0)} |x - x_0|, \quad R(x_0, t) = \sup_{x \in \Gamma_t(x_0)} |x - x_0|.$$

Верхний предел

$$\delta(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(x_0, t)}{r(x_0, t)}$$

называется параметром регулярности системы $\{\mathcal{U}_t(x_0)\}$.

Система окрестностей называется K -регулярной в точке x_0 , если $\delta(x_0) \leq K < \infty$.

Пусть $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ - гомеоморфизм, $x_0 \in \mathcal{D}$, $\{\mathcal{U}_t(x_0)\}$ - нормальная регулярная система окрестностей точки x_0 .

Положим

$$r^*(x_0, t) = \inf_{x \in \Gamma_t(x_0)} |f(x) - f(x_0)|, \quad R^*(x_0, t) = \sup_{x \in \Gamma_t(x_0)} |f(x) - f(x_0)|.$$

Если гомеоморфное отображение в каждой точке области переводит некоторое K -регулярное семейство окрестностей в K^* -регулярное, то отсюда уже следует дифференцируемость п.в., суммируемость якобиана и \mathcal{N} -свойство на п.в. сечениях, параллельных координатным осям. Для суммируемости производных с квадратом достаточно потребовать, чтобы п.в. $K \cdot K^* < c < \infty$. Эти факты впервые были обнаружены Д.Е.Меньшовым при доказательстве теоремы о том, что всякое гомеоморфное отображение, переводящее бесконечно малый круг в беско-

нечно малый круг, осуществляется аналитической функцией.

Для $n \geq 3$ Ю.Г. Решитняком установлено, что свойство гомеоморфного отображения переводить K - регулярное семейство в K^* - регулярное семейство является характеристическим свойством квазиконформности этого отображения.

Мы рассмотрим специальный закон изменения K - регулярных окрестностей при гомеоморфных отображениях. Регулярные окрестности при этом не обязательно переходят в регулярные.

Пусть $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ - гомеоморфное отображение, G - произвольное открытое множество, $\bar{G} \subset \mathcal{D}$; $\{\mathcal{U}_t(x_0)\}$ - нормальная регулярная система окрестностей произвольной точки $x_0 \in G$ такая, что для любого $t \in (0,1]$ $\mathcal{U}_t(x_0) \subset G$.

Определение 1.2.1. Будем говорить, что топологическое отображение $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ принадлежит классу $T_{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$, если для некоторых действительных чисел α, β ($n-1 \leq \alpha < \beta \leq n$) существует ограниченная субаддитивная функция ϕ , заданная на открытых подмножествах области \mathcal{D} , и нормальная система окрестностей $\mathcal{U}_t(x) \subset \mathcal{D}$ такие, что и для $x \in \mathcal{D}$ выполняется неравенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{R^*(x, t)}{r(x, t)} \right) \cdot \left(\frac{R(x, t)}{r^*(x, t)} \right)^{\frac{n}{\beta}(\alpha - n + 1)} \leq \left(\phi'(x) \right)^{\frac{\beta - \alpha}{\beta}}, \quad (1.2.1)$$

где $\phi'(x)$ - производная субаддитивной функции ϕ .

Определение 1.2.2. Будем говорить, что топологическое отображение $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ принадлежит классу $T_{\gamma, \delta}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$, если для некоторых действительных чисел γ, δ ($n-1 \leq \gamma < \delta \leq n$) существует ограниченная субаддитивная функция ϕ^* , заданная на открытых подмножествах области \mathcal{D} , и нормальная система окрестностей $\mathcal{U}_t(x) \subset \mathcal{D}$ такая, что для $x \in \mathcal{D}$ выполняется неравенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{R^*(x, t)}{z(x, t)} \right)^{\frac{n}{\delta} (j-n+1)} \cdot \left(\frac{R(x, t)}{z^*(x, t)} \right) \leq \left(\phi'^*(x) \right)^{\frac{\delta-j}{\delta}}, \quad (1.2.2)$$

где $\phi'^*(x)$ - производная субаддитивной функции ϕ^* .

Из определений следует, что а) f^{-1} принадлежит классу $T_{\alpha, \beta}(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$ тогда и только тогда, когда f принадлежит классу $T_{\alpha, \beta}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$; б) f^{-1} принадлежит классу $T_{j, \delta}^*(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$ тогда и только тогда, когда f принадлежит классу $T_{j, \delta}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$.

Определение 1.2.3. Топологическое отображение $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ назовем отображением класса $T(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$, если отображение f принадлежит пересечению классов $T_{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*) \cap T_{j, \delta}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$. При этом всегда предполагается известным, о каких параметрах α, β, j, δ идет речь.

Соотношение между введенными классами отображений устанавливает основная в этом параграфе

Теорема 1.2.3. Если $n-1 \leq \alpha < \beta \leq n$, $n-1 \leq j < \delta \leq n$, $n \geq 3$, то всякое гомеоморфное отображение $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ класса $H(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$ принадлежит классу $T(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$.

В § 3 мы изучаем дифференциальные свойства отображений класса $T(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$.

Теорема 1.3.1. Пусть $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ - отображение класса $T(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$ ($n-1 \leq \alpha < \beta \leq n$, $n-1 \leq j < \delta \leq n$).

Тогда

$$1^{\circ}. f \in W'_{\rho, \text{loc}}(\mathcal{D}), \quad \rho = \frac{\beta}{\beta-n+1}.$$

$$2^{\circ}. f^{-1} \in W'_{s, \text{loc}}(\mathcal{D}^*), \quad s = \frac{\delta}{\delta-n+1}.$$

В § 4 мы показываем, что теорема 1.2.3 допускает обращение. При этом мы получаем некоторую геометрическую характеристику отображений класса $H(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$. Следующая теорема является основным результатом первой главы.

Теорема 1.4.3. Пусть $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ - гомеоморфизм и $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - некоторые постоянные; $n-1 \leq \alpha < \beta \leq n$, $n-1 \leq \gamma < \delta \leq n$, $n \geq 2$. Следующие условия эквивалентны:

1⁰. Существуют ограниченные субаддитивные функции ϕ и ϕ^* , заданные на открытых подмножествах области \mathcal{D} , и нормальные системы окрестностей $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$, $\mathcal{U}_\varepsilon^*(x) \in \mathcal{D}$ такие, что для всех $x \in \mathcal{D}$ выполняются неравенства

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R^*(x, t)}{z(x, t)} \left(\frac{R(x, t)}{z^*(x, t)} \right)^{\frac{n}{\beta}(\alpha - n + 1)} \leq \left(\phi'(x) \right)^{\frac{\beta - \alpha}{\beta}},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(x, t)}{z^*(x, t)} \left(\frac{R^*(x, t)}{z(x, t)} \right)^{\frac{n}{\delta}(\gamma - n + 1)} \leq \left(\phi^*(x) \right)^{\frac{\delta - \gamma}{\delta}},$$

где $\phi'(x)$, $\phi^*(x)$ - производные субаддитивных функций ϕ и ϕ^* , соответственно.

2⁰. f и f^{-1} являются ACL - отображениями, невырожденно дифференцируемыми п.в. в своих областях определения, и при этом конечны интегралы

$$\int_{\mathcal{D}} H_{\alpha, \beta}^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}}(x, f) dx, \quad \int_{\mathcal{D}} H_{\gamma, \delta}^{\frac{\delta}{\delta - \gamma}}(x, f) |J(x, f)| dx.$$

3⁰. f являются отображением класса $\frac{W'_{\beta}}{\beta - n + 1}, \text{loc}(\mathcal{D})$,

f^{-1} являются отображением класса $\frac{W'_{\delta}}{\delta - n + 1}, \text{loc}(\mathcal{D}^*)$

и при этом конечны интегралы, что и в условии 2⁰.

Каждый из пунктов 1° , 2° , 3° теоремы I.4.3 может быть принят за определение отображений с ограниченными интегральными линейными характеристиками. При этом первые два определения (определения I.4.1, I.4.2) мы будем называть аналитическими определениями, а третье определение (определение I.4.3) - геометрическим определением отображений с ограниченными интегральными линейными характеристиками.

В теоремах I.4.4, I.4.5 и I.4.6 мы устанавливаем геометрические критерии принадлежности отображений к классам отображений, квазиконформных в среднем, и с ограниченными интегралами Дирихле. Теоремы I.4.4-I.4.6 являются следствиями теоремы I.4.3.

Изложенный в первой главе геометрический метод позволяет изучать довольно широкие классы топологических отображений. По всей вероятности, он может быть использован и для изучения некоторых классов не однолистных отображений с первыми обобщенными производными.

Глава II. Вариационные α - ёмкости кондексаторов и некоторые классы топологических отображений.

В этой главе мы рассматриваем гомеоморфные отображения, координатные функции которых имеют первые обобщенные производные, суммируемые в некоторой степени. При аналитическом определении таких отображений предполагается ограниченность каких-либо интегральных средних от аналитических отклонений отображения. В первой главе мы построили классы таких отображений, отталкиваясь от линейной аналитической характеристики, введенной М.А.Лаврентьевым.

Главная цель данной главы заключается в выделении классов отображений, которые по своим качественным свойствам являются естественным и непосредственным расширением класса пространственных квазиконформных отображений. Классы отображений в этой главе выделяются, базируясь на внутренней и внешней аналитических характеристиках, введенных в рассмотрение Ф.У.Герингом и Ю.Вяйсяля. Соответственно и техника работы с такими отображениями отличается от техники, предложенной в первой главе.

Как известно, продвижение в исследованиях пространствен-

ных квазиконформных отображений, в значительной степени, связано с обобщением понятия модуля (конформной ёмкости) на пространственный случай. Это обобщение было осуществлено Б.Фигеледе и независимо Б.В.Шабатом.

В последние десять-пятнадцать лет появились попытки изучения более общих классов отображений - классов $BL^{n/2}$, квазиконформных в среднем, с ограниченным потенциалом градиента и др. Поэтому появилась необходимость создания новых методов, в какой-то мере аналогичных методу конформной ёмкости.

Во второй главе мы предлагаем метод исследования свойств отображений, выделенных классов, основанный на характеристическом законе изменения ёмкостей различных порядков. Далее мы систематически применяем этот метод для получения общих свойств таких отображений. В конце главы устанавливаем некоторые новые варианты "принципа длины и площади" и получаем ёмкостный критерий квазиизометричности пространственного отображения.

В § I определяются изучаемые далее классы отображений. Пусть $f(x) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ - невырожденно дифференцируемо в точке $x \in \mathcal{D}$. Тогда величины

$$H_{I,\alpha}(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{\ell^\alpha(x, f)}, \quad H_{0,\delta}(x, f) = \frac{\mathcal{L}^\delta(x, f)}{|J(x, f)|}$$

называются α - внутренней и δ - внешней аналитическими характеристиками отображения f , соответственно ($n-1 < \alpha < n$, $n-1 < \delta \leq n$).

Пусть $\alpha, \beta, \delta', \delta''$ - фиксированные действительные числа, $n-1 < \alpha < \beta \leq n$, $n-1 < \delta' < \delta'' \leq n$.

Определение 2.1.1. Гомеоморфное отображение $y = f(x) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ назовём отображением класса $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$, если f и f^{-1} являются ACL отображениями, невырожденно дифференцируемыми п.в. в своих областях определения, и при этом

$$\mathcal{F}_{\alpha, \beta}(f) = \int_{\mathcal{D}} H_{1, \alpha}^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}(x, f) dx < \infty.$$

Определение 2.1.2. Гомеоморфное отображение $y = f(x): \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ назовем отображением класса $\mathcal{F}_{\beta, \delta}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$, если f и f^{-1} являются ACL - отображениями, невырожденно дифференцируемыми п.в. в своих областях определения, и при этом

$$\mathcal{F}_{\beta, \delta}^*(f) = \int_{\mathcal{D}} H_{\beta, \delta}^{\frac{\delta}{\delta-\beta}}(x, f) dx < \infty.$$

Определение 2.1.3. Гомеоморфное отображение $y = f(x): \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ назовем отображением класса $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$, если отображение f принадлежит пересечению классов $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*) \cap \mathcal{F}_{\beta, \delta}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$. При этом всегда предполагается известным, о каких параметрах $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ идёт речь.

Класс $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$ будем называть классом отображений с ограниченными внутренними и внешними характеристиками.

В леммах 2.1.1 - 2.1.4 и теореме 2.1.1 устанавливается вложение рассматриваемых классов отображений, в зависимости от соотношений между параметрами, их определяющих.

В § 2 мы вводим вспомогательный класс отображений, связанный с ёмкостями конденсаторов разных порядков.

Под конденсатором в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, мы понимаем пару множеств $A = (E, G)$, где множество G - открыто, а E - компактно в \mathbb{R}^n и $E \subset G$.

Если $G \subset \mathcal{D}$, то говорим, что конденсатор (E, G) лежит в \mathcal{D} .

Конденсаторы (E_1, G_1) и (E_2, G_2) не пересекаются, если $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Конденсатор (E, G) - ограничен, если G - ограниченное множество.

Для конденсатора $A = (E, G)$ через $W(A) = W(E, G)$ обозначим класс непрерывных ACL - функций $\varphi: G \rightarrow [0, 1]$,

равных единице на E и имеющих в G компактный носитель.

При $1 \leq \alpha < \infty$ величину

$$\text{cap}_\alpha(E, G) = \inf_G \int |\varphi(x)|^\alpha dx,$$

где точная нижняя грань берется по всем функциям $\varphi \in W(E, G)$, назовем α - емкостью конденсатора A .

Определение 2.2.1. Будем говорить, что топологическое отображение $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ принадлежит классу $Q_{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$, если для некоторых действительных чисел α, β ($n-1 < \alpha < \beta \leq n$) существует ограниченная субаддитивная функция φ , заданная на открытых подмножествах области \mathcal{D} такая, что для всякого конденсатора (E, G) , лежащего в \mathcal{D} , выполняется неравенство

$$\text{cap}_\alpha(E^*, G^*) \leq \varphi(G \setminus E) \cdot \text{cap}_\beta^\alpha(E, G),$$

где $E^* = f(E)$, $G^* = f(G)$.

Определение 2.2.2. Будем говорить, что топологическое отображение $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ принадлежит классу $Q_{\beta, \delta}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$, если для некоторых действительных чисел β, δ ($n-1 < \beta < \delta \leq n$) существует ограниченная субаддитивная функция φ^* , заданная на открытых подмножествах области \mathcal{D} , такая, что



для всякого конденсатора (E, G) , лежащего в \mathcal{D} , $E^* = f(E)$, $G^* = f(G)$, выполняется неравенство

$$\text{cap}_f^\delta(E, G) \leq \varphi^*(G) \cdot \text{cap}_\delta(E^*, G^*).$$

Классы отображений $Q_{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$ и $Q_{\gamma, \delta}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$ инвариантны относительно ортогональных преобразований и сдвигов на постоянный вектор в областях \mathcal{D} и \mathcal{D}^* , так как при таких преобразованиях сохраняются значения ρ - емкостей ($\rho = \alpha, \beta, \gamma, \delta$) конденсаторов и свойство субаддитивности функции множества.

Из определений следует, что: а) f^{-1} принадлежит классу $Q_{\alpha, \beta}(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$ тогда и только тогда, когда f принадлежит классу $Q_{\alpha, \beta}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$; б) f^{-1} принадлежит классу $Q_{\gamma, \delta}^*(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$ тогда и только тогда, когда f принадлежит классу $Q_{\gamma, \delta}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$.

Определение 2.2.3. Топологическое отображение $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ назовем отображением класса $Q(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$, если отображение f принадлежит пересечению классов $Q_{\alpha, \beta}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*) \cap Q_{\gamma, \delta}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$.

При этом всегда предполагается известным, о каких параметрах $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ идет речь.

Основным результатом § 2 является следующая

Теорема 2.2.1. Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - фиксированные параметры, $n-1 < \alpha < \beta \leq n$, $n-1 < \gamma < \delta \leq n$, $n \geq 2$. Тогда всякое гомеоморфное отображение $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ класса $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$ принадлежит классу $Q(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$.

В § 3 мы изучаем дифференциальные свойства отображений класса $Q(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$. Итог результатам параграфа подводит

Теорема 2.3.3. Пусть $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ принадлежит классу $Q(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$. Тогда

1. $f \in W'_{\rho, \text{loc}}(\mathcal{D})$, $\rho = \frac{\beta}{\beta - n + 1}$.
2. $f^{-1} \in \dot{W}'_{s, \text{loc}}(\mathcal{D}^*)$, $s = \frac{\delta}{\delta - n + 1}$.

В параграфе 4 мы показываем, что теорема 2.2.I имеет обратную. В этом параграфе вводятся новые ёмкостные характеристики рассматриваемых классов отображений. Основным результатом параграфа будут ёмкостные условия принадлежности гомеоморфных отображений классу $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$. (теоремы 2.4.I, 2.4.2).

Для каждого гомеоморфизма $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ рассмотрим специальные функции множеств $\mathcal{E}_{\alpha, \beta}(G)$, $\mathcal{E}_{\delta, \delta}^*(G)$, \sim ($n-1 < \alpha < \beta \leq n$, $n-1 < \delta \leq \delta \leq n$), заданные на открытых подмножествах G области \mathcal{D} .

Будем полагать

$$\mathcal{E}_{\alpha, \beta}(G) = \sup \left(\frac{\text{cap}_{\alpha}^{\beta}(E, \psi^*)}{\text{cap}_{\beta}^{\alpha}(E, \psi)} \right)^{\frac{1}{\beta - \alpha}},$$

где точная верхняя грань берётся по всем конденсаторам (E, ψ) , лежащим в G и таким, что $\text{cap}_{\beta}^{\alpha}(E, \psi) \neq 0$.

$$\mathcal{E}_{\delta, \delta}^*(G) = \sup \left(\frac{\text{cap}_{\delta}^{\delta}(E, \psi)}{\text{cap}_{\delta}^{\delta}(E^*, \psi^*)} \right)^{\frac{1}{\delta - \delta}},$$

где точная верхняя грань берётся по всем конденсаторам (E, ψ) , лежащим в G и таким, что $\text{cap}_{\delta}^{\delta}(E^*, \psi^*) \neq 0$.

В леммах 2.4.I - 2.4.8 приводятся свойства вновь определенных ёмкостных характеристик

Результаты §§ I - 4 главы II позволяют нам сформулировать теорему об эквивалентности рассматриваемых классов отображений. Эта теорема является основным результатом § 5 и второй главы.

Теорема 2.5.1. Пусть $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ - гомеоморфизм и $\alpha, \beta, \gamma, \delta, K$ - некоторые постоянные; $n-1 < \alpha < \beta \leq n$, $n-1 < \gamma < \delta \leq n$, $0 < K < \infty$, $n \geq 2$. Следующие условия эквивалентны:

1⁰. f и f^{-1} являются ACL - отображениями, невырожденно дифференцируемыми п.в. в своих областях определения, и при этом

$$\int_{\mathcal{D}} H_{I, \alpha}^{\beta}(x, f) dx \leq K, \quad \int_{\mathcal{D}} H_{0, \delta}^{\gamma}(x, f) dx \leq K.$$

2⁰. f является отображением класса $\frac{W_{\beta}'}{\beta-n+1}, \text{loc}(\mathcal{D})$,

f^{-1} является отображением класса $\frac{W_{\delta}'}{\delta-n+1}, \text{loc}(\mathcal{D}^*)$ при

этом ограничены интегралы, как и в условии 1⁰.

3⁰. Существуют ограниченные субаддитивные функции $\varphi \leq K$ и $\varphi^* \leq K$, заданные на открытых подмножествах области \mathcal{D} так, что для всякого конденсатора (E, G) , лежащего в \mathcal{D} , выполняются неравенства

$$\text{cap}_{\alpha}^{\beta}(E^*, G^*) \leq \varphi(G \setminus E) \cdot \text{cap}_{\beta}^{\alpha}(E, G),$$

$$\text{cap}_{\gamma}^{\delta}(E, G) \leq \varphi^*(G \setminus E) \cdot \text{cap}_{\delta}^{\gamma}(E^*, G^*),$$

$$E^* = f(E), \quad G^* = f(G).$$

4⁰. Для каждого открытого подмножества G области \mathcal{D} функции множества $\mathcal{E}_{\alpha, \beta}(G)$ и $\mathcal{E}_{\gamma, \delta}^*(G)$ имеют ограниченные вариации

$$V(\varepsilon_{\alpha, \beta}, \mathcal{D}) \leq K, V(\varepsilon_{\gamma, \delta}^*, \mathcal{D}) \leq K.$$

5⁰. Для любого конечного набора непересекающихся конденсаторов $\{(E_k, G_k)\}_{k=1}^m$, $m=1, 2, \dots$, лежащих в \mathcal{D} , одновременно выполняются условия:

а) $\text{cap}_{\beta}(E_k, G_k) \neq 0$, $k=1, \dots, m$,

$$\sum_{k=1}^m \left(\frac{\text{cap}_{\alpha}^{\beta}(E_k^*, G_k^*)}{\text{cap}_{\beta}^{\alpha}(E_k, G_k)} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} \leq K,$$

б) $\text{cap}_{\delta}^{\gamma}(E_k^*, G_k^*) \neq 0$, $k=1, \dots, m$,

$$\sum_{k=1}^m \left(\frac{\text{cap}_{\gamma}^{\delta}(E_k, G_k)}{\text{cap}_{\delta}^{\gamma}(E_k^*, G_k^*)} \right)^{\frac{1}{\delta-\gamma}} \leq K.$$

Каждое из этих пяти условий может быть принято за определение отображений с ограниченными интегральными внутренними и внешними характеристиками. Если выполняются условия 1⁰, 2⁰, то такие определения будем называть аналитическими, если 3⁰-5⁰, то емкостными.

В § 6 получены характеристические условия принадлежности плоских отображений классу отображений $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$. При этом, специфика свойств плоскости позволяет во всех утверждениях неравенства $1 < \alpha < \beta \leq 2$, $1 < \gamma < \delta \leq 2$ заменить неравенствами $1 \leq \alpha < \beta \leq 2$, $1 \leq \gamma < \delta \leq 2$.

При разных значениях параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ отображения класса $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$ совпадают с отображениями класса BL

и отображениями, квазиконформными в среднем. В этом параграфе мы предлагаем новые методы исследования этих классов отображений (леммы 2.6.1, 2.6.2, теоремы 2.6.1 - 2.6.4).

В § 7 мы изменяем ограничения на параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ($n-1 < \alpha < \beta \leq n$, $n-1 < \gamma < \delta \leq n$) и показываем, что, если при $n < \alpha < \beta < \infty$, $n < \gamma < \delta < \infty$ выполняются неравенства главы 2, параграфа 2, даже в более общей ситуации, для ёмкостей пары компактных множеств, а не конденсаторов, то это приводит к квазиизометрическим отображениям.

Следующая теорема устанавливает критерий принадлежности гомеоморфных отображений классу квазиизометрических.

Теорема 2.7.1. Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - фиксированные числа, $n < \alpha < \beta < \infty$, $n < \gamma < \delta < \infty$, $n \geq 2$; $f: D \rightarrow D^*$ - гомеоморфное отображение ограниченных областей в R^n .

Тогда следующие условия эквивалентны.

1⁰. f - квазиизометрическое отображение с постоянной K .

2⁰. Для любого открытого множества $G \subset D$ и для любых компактных множеств $F_0, F_1 \subset G$ выполняются неравенства

$$C_{\alpha}^{\beta}(F_0, F_1; G) \leq K_1 \cdot (mG)^{\beta-\alpha} \cdot C_{\beta}^{\alpha}(F_0^*, F_1^*; G^*),$$

$$C_{\gamma}^{\delta}(F_0^*, F_1^*; G^*) \leq K_2 \cdot (mG^*)^{\delta-\gamma} \cdot C_{\delta}^{\gamma}(F_0, F_1; G),$$

где $F_0^* = f(F_0)$, $F_1^* = f(F_1)$, $G^* = f(G)$; постоянные K_1 и K_2 зависят только от $n, \alpha, \beta, \gamma, \delta, K$.

Глава III. Новые экстремальные задачи. Гомеоморфизмы класса Каратеодори.

В третьей главе мы даем некоторые приложения и обобщения построенной в первых двух главах теории.

В § I мы показываем, что свойство q - квазиконформности можно охарактеризовать в терминах α - модулей семейств кривых.

Теорема 3.1.1. Гомеоморфное отображение $f: D \rightarrow D^*$

будет q - квазиконформным, $1 \leq q < \infty$, тогда и только тогда, когда для любой ограниченной кольцевой области \mathcal{U} , $\bar{\mathcal{U}} \subset \mathcal{D}$, и ее образа $\mathcal{U}^* = f(\mathcal{U})$, для любых фиксированных α, β , $n-1 < \alpha, \beta \leq n$ имеет место неравенства

$$M_{\alpha}^{\frac{n}{\alpha}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1; \mathcal{U}^*) \leq q(m\mathcal{U}^*) \cdot M_{\alpha}^{\frac{n}{\alpha}-1}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1; \mathcal{U}),$$

$$M_{\beta}^{\frac{n}{\beta}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1; \mathcal{U}) \leq q(m\mathcal{U})^{\frac{n}{\beta}-1} \cdot M_{\beta}^{\frac{n}{\beta}}(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1; \mathcal{U}^*).$$

При $\alpha = \beta = n$ получаем известное характеристическое свойство q - квазиконформности.

§ 2. Вводятся средние коэффициенты пар квазиконформно эквивалентных областей $\mathcal{D}, \mathcal{D}^* \subset \mathbb{R}^n$ и формулируется экстремальная задача - нахождения таких коэффициентов. Пусть $n-1 < p, q \leq n$.

Внутренней ρ - средней характеристикой для $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ мы назовем величину

$$H_{I, \rho}(f) = \left(\frac{1}{m\mathcal{D}^*} \int_{\mathcal{D}} H_I^{\rho}(x, f) \cdot |J(x, f)| dx \right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Внешней q - средней характеристикой для $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ назовем величину

$$H_{O, q}(f) = \left(\frac{1}{m\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} H_O^q(x, f) dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Величины

$$I_{\rho}(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*) = \inf_f H_{I, \rho}(f), \quad O_q(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*) = \inf_f H_{O, q}(f)$$

назовем соответственно внутренним ρ - средним и внешним q - средним коэффициентами пар областей \mathcal{D} и \mathcal{D}^* .

Отображения, минимизирующие средние отклонения, назовем экстремальными для соответствующих средних коэффициентов.

В § 2 мы находим внутренний ρ - средний и внешний q - средний коэффициенты квазиконформности пары сферических колец

$$\mathcal{D}_{z_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < z_0 < |x| < 1\}, \quad \mathcal{D}_{\rho_0} = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 < \rho_0 < |y| < 1\}$$

- сферические кольца, $0 < \rho_0 \leq z_0 < 1$. Тогда

$$I_\rho(\mathcal{D}_{z_0}, \mathcal{D}_{\rho_0}) = \frac{\left[\frac{\rho+1}{n} (1 - \rho_0^{\frac{n}{\rho+1}}) \right]^{\frac{\rho+1}{\rho}}}{(1 - \rho_0^n)^{\frac{1}{\rho}} \ln \frac{1}{z_0}},$$

при этом экстремальное отображение имеет вид (в сферических координатах)

$$(z, \varphi_i) \rightarrow (\rho, \psi_i), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Для

$$\rho = \left[\frac{\ln z}{\ln z_0} \left(\rho_0^{\frac{n}{\rho+1}} - 1 \right) + 1 \right]^{\frac{\rho+1}{n}}, \quad \psi_i = \varphi_i, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

$$O_q(\mathcal{D}_{z_0}, \mathcal{D}_{\rho_0}) = \frac{\left(\ln \frac{1}{\rho_0} \right)^{n-1}}{(1 - z_0^n)^{\frac{1}{q}}} \cdot \left(\frac{-\frac{n}{nq-q-1}}{z_0 - 1} \right)^{\frac{nq-q-1}{q}}$$

Экстремальным является отображение

$$(z, \varphi_i) \rightarrow (\rho, \psi_i), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\rho = \rho_0 \frac{z_0^{\frac{n}{n^2-2}-1} - 1}{z^{\frac{n}{n^2-2}-1} - 1}, \quad \psi_i = \varphi_i, \quad z_0 < z < 1.$$

Заметим, что

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_\rho = \frac{\ln \frac{1}{\rho_0}}{\ln \frac{1}{z_0}} = K_I(\mathcal{D}_{z_0}, \mathcal{D}_{\rho_0}),$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} O_q = \left(\frac{\ln \frac{1}{\rho_0}}{\ln \frac{1}{z_0}} \right)^{n-1} = K_0(\mathcal{D}_{z_0}, \mathcal{D}_{\rho_0}).$$

Пусть $K(f) = \max_{x \in \mathcal{D}} \{ \sigma_{\text{aimax}} H_I(z, f), \sigma_{\text{aimax}} H_0(x, f) \}$.

В классической теории пространственных квазиконформных отображений рассматривался случай $K(f) < \infty$.

В первых двух главах работы излагаются исследования, которые являются развитием этой теории на случай отображений с неограниченными характеристиками. Предполагается только ограниченность некоторого интегрального среднего от характеристик.

В § 3 мы рассмотрим иной подход к выполнению класса отображений с неограниченными характеристиками.

Точку x_0 , для которой существует ее окрестность, принадлежащая области \mathcal{D} , за исключением, быть может, самой точки x_0 , назовем полюсом характеристики $k(x, f)$ отображения $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, если для любого достаточно малого $\delta > 0$

$$\sigma_{\text{aimax}} k(x, f) = \infty,$$

$$x \in B^n(x_0, \delta)$$

$$B^n(x_0, \delta) = B^n(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}.$$

Если существует $\delta > 0$ такое, что в $B^n(x_0, \delta)$ отличных от x_0 полюсов $k(x, f)$ нет, то x_0 назовем изолированным полюсом характеристики $k(x, f)$.

Пусть x_i , $i = \overline{1, k}$, - изолированные полюсы харак-

теристики $\mathcal{K}(x, f)$. Возьмем достаточно малое $\delta > 0$, что все шары $B^n(x_i, \delta)$, за исключением возможно их центров, принадлежат \mathcal{D} и не пересекаются. $\mathcal{D}_\delta = \mathcal{D} \setminus \bigcup_{i=1}^k B^n(x_i, \delta)$.

Будем говорить, что $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу \mathcal{N} , если 1) изолированных полюсов конечное число; 2) f - квазиконформно в \mathcal{D}_δ для любого достаточно малого $\delta > 0$.

Если $f \in \mathcal{N}$, то в силу гомеоморфности f и локальной связности $\mathcal{D} \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ относительно каждой из точек предельное множество $C(f, x_i)$, $i=1, k$, есть связное замкнутое множество.

Если $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса \mathcal{N} и продолжается до гомеоморфизма $\tilde{f}: \mathcal{D} \cup \{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, то будем говорить, что f принадлежит классу \mathcal{N}_0 . В этом случае будем говорить, что x_i - устранимые полюсы характеристики. Построен пример $f \in \mathcal{N}$, но $f \notin \mathcal{N}_0$.

Относительным расстоянием (по Мазуркевичу) $d_{\mathcal{D}}(x_1, x_2)$ между точками $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ называется нижняя грань диаметров кривых, лежащих в области \mathcal{D} и соединяющих x_1, x_2 . Обычным образом определяется относительное расстояние $d(E_1, E_2)$ между любыми множествами E_1 и $E_2 \subset \mathcal{D}$.

Следуя В.А. Зоричу, классом \mathcal{C} (Каратеодори) назовем совокупность гомеоморфных отображений $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ таких, что для любых связных множеств $E_1, E_2 \subset \mathcal{D}$ и их образов E_1^*, E_2^* соотношения

$$d_{\mathcal{D}}(E_1, E_2) = 0 \quad \text{и} \quad d_{\mathcal{D}^*}(E_1^*, E_2^*) = 0$$

выполняются одновременно.

Теорема 3.3.1. Всякое квазиконформное отображение $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу \mathcal{C} .

Теорема 3.3.2. Всякое отображение $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса \mathcal{N}_0 принадлежит классу \mathcal{C} .

Построен пример $f \in \mathcal{N}$, но $f \notin \mathcal{C}$.

Следствие 3.3.2. Всякое квазиконформное в среднем отображение $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, не имеющее для характеристики других

особенностей, кроме конечного числа устранимых полюсов, принадлежит классу \mathcal{C} .

Пусть

$$K_i(z) = \nu \operatorname{Re} \max_{x \in B^n(z_i, \delta) \setminus B^n(z_i, r)} k(x, f), \quad 0 < r < \delta.$$

Условие
$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{z K_i(z)} = \infty, \quad i = \overline{1, k}$$

является достаточным для принадлежности $f \in \mathcal{H}$ классу \mathcal{C} (Зорич В.А.). Построен пример $f \in \mathcal{H}$, показывающий, что это условие не является необходимым.

В заключении доказано характеристическое свойство класса \mathcal{C} для автоморфизмов шара.

Пусть \mathcal{D} - область в \mathbb{R}^n , $E_1, E_2 \subset \mathcal{D}$ - произвольные связанные множества. Через $\Gamma(\mathcal{D}; E_1, E_2)$ обозначим свойство всевозможных кривых, соединяющих E_1 и E_2 в \mathcal{D} , через $M(\mathcal{D}; E_1, E_2)$ - модуль этого семейства.

Теорема 3.3.3. Гомеоморфизм $f: B^n \rightarrow B^n$ принадлежит классу \mathcal{C} тогда и только тогда, когда для любых связанных множеств $E_1, E_2 \subset B^n$ и их образов E_1^*, E_2^* соотношения $M(B^n; E_1, E_2) = \infty, M(B^n; E_1^*, E_2^*) = \infty$ выполняются одновременно.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах

1. Кудьявин В.С. Последовательное вращение плоских квазиконформных отображений в \mathbb{R}^n // Динамика сплошной среды.- Новосибирск, 1979.- Вып.42.- С.110-115.
2. Кудьявин В.С. Поведение некоторого класса отображений, квазиконформных в среднем, в изолированной особой точке // Докл. АН СССР.- 1984.- 277, № 5.- С.1056-1058.
3. Кудьявин В.С., Гейнеман В.Э. О допустимом порядке роста S - средней дилатации в теореме М.А.Лаврентьева // Динамика сплошной среды.- Новосибирск, 1981.- Вып. 51.- С. 177-183.

4. Кудьявин В.С., Сычев А.В. О принадлежности некоторых пространственных гомеоморфизмов классу Каратеодори//Некоторые проблемы дифференциальных уравнений и дискретной математики: Сб.науч.тр. - Новосибирск: НГУ.-1986.-С.19-28.
5. Кудьявин В.С. Об одном характеристическом свойстве квазиизометрических отображений//Материалы всесоюзной конференции по геометрической теории функций. 18-20 октября 1988г. - Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988.- С.56.
6. Кудьявин В.С. Характеристическое свойство одного класса пространственных гомеоморфизмов//Вопросы анализа и приближений: Сб.науч.тр.- Киев: ИМ АН Украины, 1989.- С.81-88.
7. Кудьявин В.С. Характеристическое свойство гомеоморфных отображений класса W_n^1 //Материалы респ. совещания-семинара по комплексному анализу, Алушта, 27 сент.- 4 окт. 1989 г.- Киев: ИМ АН Украины, 1989.- С.27.
8. Кудьявин В.С. Характеристическое свойство одного класса пространственных гомеоморфизмов//Докл. АН Украины. Сер.А.- 1990.- № 3.- С.7-9.
9. Кудьявин В.С. О геометрии плоских топологических отображений с первыми обобщенными производными//Вопросы анализа и приближений: Сб.науч.тр.- Киев: ИМ АН Украины, 1990.- С. 73-78.
10. Кудьявин В.С. Характеристическое свойство одного класса плоских топологических отображений//Докл. АН Украины. Сер. А.- 1990.- № 4.- С.13-15.
11. Кудьявин В.С. Локальная структура плоских отображений, квазиконформных в среднем//Докл. АН Украины. Сер. А.- 1991.- № 3.- С.10-12.
12. Кудьявин В.С., Гольберг А.Л. Средние коэффициенты квазиконформности пары областей//Укр.мат.журн.- 1991.- 43, № 12.- С.1709-1712.
13. Кудьявин В.С. Модульные свойства некоторых классов пространственных гомеоморфизмов//Материалы I Всесоюзной школы по теории потенциала, Казивели, 26 июня-3 июля 1991 г. Киев: ИМ АН Украины, 1991.- С.22.

14. Кудьявин В.С. Геометрические свойства пространственных гомеоморфизмов с ограниченными интегральными характеристиками//Докл. АН Украины, Сер. А.- 1992.- № 4.- С.18-20.
15. Кудьявин В.С. Квазиконформные отображения и ω - модули семейств кривых//Докл. АН Украины, Сер. А.- 1992.- № 5.- С.11-13.

Кудьявин

Подп. в печ. 28.08.92. Формат 60x84/16. Бумага тиг. Офс.печата
 Усл. печ. л. 1,86. Усл. кр.-отт. 1,86. Уч.-изд. л. 1,5.
 Тираж 120 экз. Зак. 284 Бесплатно.

Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН Украины
 252601 Киев 4, ГСП, ул. Репина, 3

469188

Ab 26.263

Ab 26.263