

Академия наук Украинской ССР
Ордена Трудового Красного Знамени Институт математики

На правах рукописи

СОТНИЧЕНКО Николай Адамович

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И РАСЩЕПЛЕНИЕ
СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МЕДЛЕННО
МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

01.01.02 -
дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев 1991

№ 26.75

Работа выполнена на кафедре высшей математики Киевского ордена Трудового Красного Знамени инженерно-строительного института.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор ГРЕБЕНИКОВ Е.А.,

доктор физико-математических наук, профессор КУХТА К.Я.,

доктор физико-математических наук, профессор МАРТЫНКО Д.И.

доктор физ.-мат. наук, проф. Гурбан А.Ф.

Ведущая организация - Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова.

Защита диссертации состоится "6" 04 1993 г.
в 15 часов на заседании специализированного совета
Д 016.51.02 при Институте математики АН УССР по адресу:
252601 Киев 4, ГСП, ул. Репина, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
института.

Автореферат разослан "22" 02 1993 г.

Ученый секретарь
специализированного совета

ЛУЧКА А.Ю.

ЛНБ України ім.В.Стефаника



00825870 (U)

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Актуальность проблемы. Многочисленные задачи астрофизики, космонавтики, теории упругости и автоматического регулирования, электроники, гидродинамики и других наук приводят к исследованию дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые содержат один или несколько малых или больших параметров. Многие из этих задач не поддаются точному решению. Среди причин, затрудняющих точное решение, можно указать, например, нелинейные уравнения движения, переменные коэффициенты и нелинейные граничные условия на известных или не известных границах сложной формы. Для решения подобных задач мы вынуждены пользоваться различного рода приближениями или численными методами, или комбинацией тех и других. Среди аналитических приближенных методов прежде всего следует назвать асимптотические методы возмущений, основывающиеся на идее разложения искомых решений в ряд по степеням малого или большого параметра или по степеням независимой переменной. Зародившиеся в работах Ж. Ш. Штурма, Ж. Лиувилля, А. М. Ляпунова, А. Пуанкаре, Л. Шлезингера, Д. Д. Биркгофа, Я. Д. Тамаркила, эти методы в последнее время получили бурное развитие как за рубежом /работы В. Вавова, Ю. Сибуя, Л. Чевари, Э. Коддингтона, Н. Левинсона, Дж. Коула, В. Тржицинского, Х. Территина, А. Найфе и др./, так и в работах советских математиков /Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко, Д. И. Мартынюка, А. Н. Тихонова, А. Б. Васильевой, В. М. Волосова, В. Ф. Бутузова, И. С. Градштейна, В. М. Миллионщикова, В. С. Пугачева, М. В. Федорюка, Н. Н. Моисеева, М. И. Вишика, Л. А. Люстерника, А. С. Понтрягина, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Ровова, Н. П. Еругина, И. М. Рапопорта, С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиля, С. Г. Крейна, Ю. Л. Далецкого, Ю. А. Рябова, Е. А. Гребенникова, К. Г. Валева, И. А. Павлюка, К. А. Абгаряна, С. А. Ломова, М. И. Иманалиева и многих других/.

Наиболее простые и наиболее распространенные асимптотические методы — это метод Ляпунова-Пуанкаре, метод Крылова-Боголюбова-Митропольского, метод Фещенко-Шкиля, метод Вишика-Люстерника, метод Тихонова-Васильевой, метод Ломова.

Метод Фещенко-Шкиля — это метод асимптотического интег-

рирования определенного класса линейных дифференциальных уравнений, а именно, уравнений, в которых коэффициенты являются функциями медленного времени $\tau = \epsilon t$, где ϵ - малый положительный параметр, свидетельствующий о том, что коэффициенты уравнения меняются медленно, т.е. их производные по независимой переменной t пропорциональны малому параметру ϵ .

Такие дифференциальные уравнения с медленно меняющимися коэффициентами встречаются во многих областях науки и техники, находят широкое приложение:

"... Ідея дослідити диференціальні рівняння з повільно змінними коефіцієнтами прийшла при вивченні такого фізичного явища, як проходження через резонанс. А потім ці рівняння знайшли широке застосування для розрахунку циклотронів, орбіт супутників, траєкторій ракет, дослідженні процесів у плазмі, коливань турбін силових установок", - академик Ю.А. Митропольский /газета "Вечірній Київ", 21.07.1976 р./

К таким уравнениям приводятся также, например, уравнения с малым параметром при старшей производной, некоторые задачи на собственные значения, задачи нахождения усилий в упруговязкой нити переменной длины с грузом на конце, задачи колебания свободно подвешенного каната, задачи исследования колебаний упругих тонких оболочек. Отметим также задачи: 1/ "определения значения критической осевой силы для ортотропной оболочки с криволинейной образующей при несесимметричной форме потери устойчивости", которая сводится к исследованию дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, зависящими от двух малых параметров; 2/"расчеты осесимметрично нагруженных конических оболочек с толщиной стенки, изменяющейся по линейному закону," которая сводится к дифференциальному уравнению с медленно меняющимися коэффициентами и иррегулярной особой точкой и т.д.

Число примеров дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами можно было бы еще значительно расширить.

В связи с вышеизложенным можно сделать вывод, что разработка асимптотических методов интегрирования систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами

является весьма актуальной задачей в практическом и теоретическом плане.

Тема настоящей работы посвящена разработке асимптотических методов интегрирования отдельных классов дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами и продолжает дальнейшее развитие фундаментальных разработок С.Ф. Феценко и Н.И. Шкиля.

Объект исследования. Объектом исследования являются дифференциальные уравнения с медленно меняющимися коэффициентами. Среди них исследуются обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядка, с частными производными, с двумя малыми параметрами, с малым параметром и иррегулярной особой точкой.

Целью работы является:

- разработка более эффективных методов построения асимптотических разложений решений систем линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, с целью получения наиболее простых и удобных в пользовании расчетных формул,
- построение асимптотической фундаментальной матрицы системы линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами дробного ранга,
- разработка алгоритма интегрирования слабо нелинейных систем с "медленным временем" в критическом случае и установление условий асимптотической устойчивости решений слабо нелинейных систем с медленно меняющимися коэффициентами,
- разработка и обоснование алгоритма асимптотического расщепления систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными, систем с двумя малыми параметрами, систем с малым параметром и иррегулярной особой точкой,
- постановка общей задачи асимптотического представления решений дифференциального уравнения с медленно меняющимися коэффициентами в банаховом пространстве при наличии кратных собственных значений; проведение исследования уравнений второго порядка в критическом случае,
- разработка метода асимптотического интегрирования дифференциального уравнения с медленно меняющимися коэффи-

циентами и запаздыванием аргумента в банаховом пространстве.

Методика исследования. При решении поставленных задач осуществляется единый общий подход, синтезировавший асимптотический метод Фещенко-Шкиля, теории возмущений линейных операторов и теории обобщенного обращения операторов.

Научная новизна. Используя понятие обобщенно обратной матрицы /оператора/ и объединяя асимптотический метод Фещенко-Шкиля и методы теории возмущений линейных операторов, разработаны более эффективные, по сравнению с ранее известными, методы построения асимптотических разложений решений систем линейных дифференциальных уравнений. Исходя из этого, для рассматриваемых классов систем дифференциальных уравнений в работе впервые,

- построена асимптотическая фундаментальная матрица решений системы линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами дробного ранга. Разработан алгоритм построения частных решений. Указана структура решений при наличии кратного корня. Показано, что к вышеизученному случаю сводятся неоднородные системы и случай кратного корня,

- построены решения в критическом случае системы нелинейных /степенная нелинейность/ дифференциальных матричных уравнений,

- получены необходимые условия асимптотической устойчивости решений слабо нелинейной системы дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами. На малый параметр указаны ограничения, при которых будет иметь место рассматриваемая устойчивость. Получены достаточные условия неустойчивости,

- решена задача асимптотического расщепления систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядка специального вида,

- показано, что систему дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка можно расщепить на подсистемы меньшей размерности с одновременным понижением порядка исходной системы,

- разработан алгоритм асимптотического расщепления дифференциальных уравнений первого и второго порядка с медленно

меняющимися коэффициентами, зависящими от двух малых параметров различных порядков малости,

- разработан алгоритм асимптотического расщепления систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами и иррегулярной особой точкой по медленной переменной,

- построены асимптотические частные решения дифференциального уравнения в банаховом пространстве при наличии кратных собственных значений. Изложен вопрос построения решений неоднородного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве при наличии нулевого собственного значения в резонансном и нерезонансном случаях,

- разработан алгоритм построения асимптотических частных решений дифференциального уравнения с медленно меняющимися коэффициентами и западающим аргументом в банаховом пространстве.

Достоверность результатов работы. Результаты диссертации четко сформулированы в виде теорем и лемм, основные из которых полностью доказаны. В частных тривиальных случаях некоторые теоремы приведены без доказательства. Как частный случай из большинства доказанных теорем вытекают результаты, известные ранее.

Теоретическая и практическая ценность. Работа в целом носит теоретический характер. Теоретическая и практическая ценность работы заключается в содержащихся в ней новых результатах, в предложенных новых методах. Диссертация содержит решение ряда научных проблем. Так, полностью решена проблема исследования необходимых условий асимптотической устойчивости слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами. Поставлена и решена проблема асимптотического расщепления ряда новых классов систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами и асимптотического представления решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве при наличии кратных собственных значений.

Результаты диссертации открывают возможность для дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами. Они нашли уже применение в работах ряда авторов /см., например: Алишев А. Асимптотичес-

кое интегрирование систем дифференциальных уравнений, содержащих параметр: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. - К., 1982. - 16 с.; Давидюк Г.П. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. - К., 1983. - 14 с.; Яковец В.П. Асимптотическое интегрирование систем дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных с медленно меняющимися коэффициентами: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. - К., 1983. - 21 с.; Клименко Н.С. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с медленно меняющимися и осциллирующими коэффициентами в банаховом пространстве: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. - К., 1986. - 16 с. и др./

Результаты диссертации могут быть использованы в приложениях при исследовании многих прикладных задач физики, биологии, строительной механики и других наук.

Разработанные алгоритмы получения асимптотических формул представления решений дают возможность непосредственно получить приближенное решение в аналитическом виде.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на различных конференциях и семинарах, в частности:

- на Втором /Украинском/ республиканском симпозиуме по дифференциальным и интегральным уравнениям /Одесса, 29.09 - 2.10.1978 г./,

- на конференции "Проблемы нелинейных колебаний механических систем" /Киев, 18 - 20.10.1978 г./,

- на отчетно-научной конференции кафедр КИПИ им. А.М. Горького за 1978 г. /Киев, 1 - 3.02.1979 г./,

- на 40 - 52 -ой научно-технических конференциях Киевского инженерно-строительного института /Киев, март 1979 - 1991 г.г./,

- на Всесоюзной конференции по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных уравнений /Алма-Ата, июнь, 1979 г./,

- на III Всесоюзной конференции "Оптимальное управление

в механических системах" /Киев, 19-21.12.1979 г./,

- на У Республиканской конференции математиков Белоруссии /Гродно, октябрь, 1980 г./,

- на IX Международной конференции по нелинейным колебаниям /Киев, 30.08-06.09.1981 г./,

- на семинаре по асимптотическим методам в теории дифференциальных уравнений в КПИ им. А.М.Горького /руководитель академик АН СССР доктор физ.-мат. наук, профессор Н.И.Шкиль /ноябрь, 1981 г., март, 1983 г., апрель, 1985 г., май, 1987 г./ /,

- на семинаре по теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в МГУ им. М.В.Ломоносова /руководитель доктор физ.-мат. наук, профессор А.Б.Васильева /24 октября 1982 г./ /,

- на Республиканском семинаре по дифференциальным уравнениям в КГУ им. Т.Г.Шевченко /руководитель член-кор. АН УССР доктор физ.-мат. наук, профессор А.М.Самойленко /11 мая 1988 г., 24 декабря 1986 г./ /,

- на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в МГУ им. М.В.Ломоносова /руководитель доктор физ.-мат. наук профессор В.М.Миллиончиков /2 декабря 1988 г./ /,

- на научном семинаре отдела "Динамика и устойчивость многомерных систем" Института математики АН УССР /руководитель член-кор. АН УССР доктор физ.-мат. наук профессор И.А.Луковский /15.12.1988 г./ /,

- на научном семинаре Научно-исследовательского вычислительного центра МГУ им. М.В.Ломоносова /руководитель доктор физ.-мат. наук профессор Е.А.Гребенников /3.04.1984г./ /,

- на научно-исследовательском семинаре "Асимптотические и численные методы решения сингулярно возмущенных задач" в МГУ им. М.В.Ломоносова /руководитель академик А.Н.Тихонов /19.02.1988 г./ /,

- на объединенном семинаре отдела нелинейных колебаний и отдела дифференциальных уравнений и математической физики Института математики АН УССР /руководитель академик Ю.А.Митропольский /22.02.1988 г./ /,

- на Второй Всесоюзной конференции "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений" /30.05-1.06.1989г., город

Дрогобыч /

Публикации. Результаты, полученные в диссертации, опубликованы в 36 научных работах, список которых приводится.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка основной использованной литературы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан краткий исторический обзор исследований, посвященных развитию асимптотических методов в теории дифференциальных уравнений, формулируются изучаемые в диссертации проблемы и приводится аннотация основных полученных результатов.

Первая глава посвящена исследованию асимптотических свойств решений обыкновенных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами.

В §1 приведены вспомогательные сведения и результаты, которые составляют основу в доказательстве теорем и применяются в дальнейшем.

В §2 ставится задача построения асимптотической фундаментальной матрицы решений системы дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x, \quad x \in R^n, \quad /1/$$

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ - малый действительный параметр, $A(\tau, \varepsilon)$ - действительная матрица, допускающая асимптотическое разложение,

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau), \quad /2/$$

$$\tau = \varepsilon^{p/q} t; \quad p, q \in N; \quad 0 \leq \tau \leq L < +\infty. \quad /3/$$

Система /1/ рассматривается при начальных условиях

$$x(t, \varepsilon)|_{t=0} = x_0. \quad /4/$$

в зависимости от поведения корней $\lambda_j(\tau)$, $j=1, 2, \dots, n$ характеристического уравнения

$$\det \|A_0(\tau) - \lambda E\| = 0 \quad /5/$$

/ E - единичная матрица /.

§8 содержит алгоритмы построения решений для системы /1/, когда корни уравнения /5/ на всем отрезке [0, L] остаются простыми:

$$\lambda_i(\tau) \neq \lambda_j(\tau); \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad /6/$$

При этом в зависимости от соотношения между числами p и q рассматриваем следующие два случая: а/ $p = hq, h \in \mathbb{N}$; б/ $p \neq hq$, например, $p = hq + z, z \in \mathbb{N}, z < q, h = 0, 1, \dots$.

Случай $\tau = \varepsilon t$ / $p = q = 1$ / рассмотрен в работах С.Ф.Щещенко и Н.И.Шкиля; случай $\tau = \varepsilon^p t$ / $q = 1$ / был лишь только сформулирован в работе С.Ф.Щещенко /1955 г./ Случай $\tau = \varepsilon^{p/q} t$ / $(p, q) = 1$ /, доказательство которого проводилось с переходом в координатную форму, частично исследовался В.К.Григоренко.

В случае а/ справедлива такая теорема.

Теорема 1.8. Если матрицы $A_s(\tau)$ / $s = 0, 1, \dots$ / на отрезке [0, L] дифференцируемы по τ достаточное /бесконечное/ число раз и собственные значения $\lambda_j(\tau), j = 1, 2, \dots, n$ матрицы $A_0(\tau)$ простые на данном отрезке, то система дифференциальных уравнений /1/ имеет формальную матрицу-решение вида

$$X(t, \varepsilon) = U(\tau, \varepsilon) \exp\left(\int_0^t \Lambda(\tau, \varepsilon) dt\right),$$

в которой $U(\tau, \varepsilon)$ - матрица (n x n), $\Lambda(\tau, \varepsilon)$ - диагональная матрица порядка n , представляются асимптотическими разложениями

$$U(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U_s(\tau), \quad \Lambda(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{h-1} \varepsilon^s \Lambda_s(\tau). \quad /7/$$

При доказательстве теоремы предложен новый метод, основывающийся на использовании обобщенно обратной матрицы. Это позволяет представить разложение для $\Lambda(\tau, \varepsilon)$ в виде конечной суммы числа слагаемых, а также упростить алгоритмы построения частных решений для системы /1/. Иллюстрацию этого подхода показано в теореме 1.4.

Теорема 1.4. Пусть выполняются условия теоремы 1.3, тогда частное решение для системы /1/ имеет вид

$$x_j(t, \varepsilon) = V_j(\tau, \varepsilon) \exp\left(\int_0^t \lambda_j(\tau, \varepsilon) d\tau\right), \quad j=1, 2, \dots, n, \quad /9/$$

где $V_j(\tau, \varepsilon)$ — n — мерный вектор, представляющийся асимптотическим рядом

$$V_j(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s V_j^{(s)}(\tau), \quad /10/$$

а скалярные функции $\lambda_j(\tau, \varepsilon)$, $j=1, 2, \dots, n$, представляются конечной суммой слагаемых вида

$$\lambda_j(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{h-1} \varepsilon^s \lambda_j^{(s)}(\tau). \quad /11/$$

В случае б/ имеет место следующая теорема.

Теорема 1.5. Если выполняются условия теоремы 1.3, то система /1/ имеет формальную матрицу-решение

$$X(t, \varepsilon) = U(\tau, \mu) \exp\left(\int_0^t \Lambda(\tau, \mu) d\tau\right), \quad /12/$$

в которой $U(\tau, \mu)$ и $\Lambda(\tau, \mu)$ — диагональная матрица, имеют разложения

$$U(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s U_s(\tau), \quad \mu = \varepsilon^{1/q}, \quad /13/$$

$$\Lambda(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{p-1}{q}\right)} \mu^{sq} \Lambda_{sq} = \sum_{s=0}^h \mu^{sq} \Lambda_{sq}, \quad /14/$$

$E(x)$ — целая часть x , $p = hq + z$, $z \in \mathbb{N}$, $z < q$, $h = 0, 1, \dots$.

В §4 доказывается асимптотическая сходимость в смысле Крылова-Боголюбова-Митропольского построенных формальных решений к точным, т.е. справедлива такая теорема.

Теорема 1.6. Если выполняются условия теоремы 1.3, условия

$$\operatorname{Re} \sum_{S=0}^{h-1} \varepsilon^S \lambda_j^{(S)}(\tau) < 0 \quad \forall \tau \in [0, L], j=1, 2, \dots, n, \quad /15/$$

где $\lambda_j^{(S)}(\tau)$ - элементы диагональных матриц $\Lambda_S(\tau)$ на равенств /5/ и

$$X(t, \varepsilon) \Big|_{t=0} = X_m(t, \varepsilon) \Big|_{t=0}, \quad /16/$$

где $X(t, \varepsilon)$ - точное решение системы /1/, $X_m(t, \varepsilon)$ - m -приближение, то для произвольного $L > 0$ существует постоянная $C > 0$, не зависящая от ε и такова, что для всех $t \in [0, L/\varepsilon^h]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ выполняется неравенство

$$\|X_m(t, \varepsilon) - X(t, \varepsilon)\| \leq C \varepsilon^{m+1-h}. \quad /17/$$

Аналогичные оценки получены для построенных частных решений в теореме 1.4 и для решений из теоремы 1.5.

В заключение §4 показано, что неоднородная система

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x + f(\tau, \varepsilon) \exp(i\theta(\tau, \varepsilon)); \quad x, f \in R^n, \quad /18/$$

где $d\theta/dt = K(\tau)$, сводится к однородной системе типа /1/, в которой $x \in R^{n+1}$.

Указан вид общего решения для системы /1/ при наличии n -кратного нулевого корня с одним элементарным делителем такой же кратности.

Показано, что случай кратного корня путем срезающего, преобразования сводится к вышеизученному случаю простых корней уравнения /5/.

Рассмотрено пример, показывающий, что этими методами может быть исследована "задача о симметричном изгибе равномерно нагретой круглой пластины линейно-переменной толщины, лежащей на линейноупругом основании".

В §5 исследуется вопрос построения решений для нелинейной системы, когда нелинейность степенная, матричных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = A_0(\tau)X + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i A_i(\tau)X^i + F(\tau, \varepsilon), \quad /19/$$

12

в которой X , A_i , F — (икк) матрицы, $\tau = \varepsilon t$ —
 "медленное время"

$$F(\alpha, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s F_s(\tau). \quad /20/$$

Для системы /19/ в критическом случае по А.Б.Васильевой /наличие нулевого корня в уравнении /5/ / указан вид решения, когда корень простой, полупростой и кратный /теорема 1.7/:

$$X(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s X_s(\tau). \quad /21/$$

Более детально рассмотрен случай, когда не выполняется соответствующее условие разрешимости и появляются особые решения, т.е. разложение решения содержит малый параметр в отрицательной степени

$$X(t, \varepsilon) = \sum_{s=-1}^{\infty} \varepsilon^s X_s(\tau). \quad /22/$$

Приводятся оценки /теорема 1.9/, указывающие на асимптотический характер построенных решений.

В § 5 получены необходимые условия асимптотической устойчивости решений слабо нелинейных систем с медленно меняющимися коэффициентами и указаны границы изменения малого параметра, при которых имеет место рассматриваемая устойчивость.

Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau)x + \varepsilon \varphi(\tau, x), \quad \tau = \varepsilon t, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad /23/$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $A(\tau)$, $\varphi(\tau, x)$ — непрерывны по своим аргументам, $\varphi(\tau, 0) \equiv 0$. Пусть $\lambda_j(\tau)$, $j = \overline{1, n}$, собственные значения матрицы $A(\tau)$.

Теорема 1.10. Если

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\tau) \leq -\omega < 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad \forall t \in [t_0, +\infty) \quad /24/$$

и компоненты $\varphi_j(\tau, x_1, \dots, x_n)$ вектора $\varphi(\tau, x)$ удовлетворяют условию

$$|\psi_j(\tau, x_1, \dots, x_n)| \leq M \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{\frac{1}{2} + \lambda}, \quad /25/$$

где $M, \lambda > 0$ — константы, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ решения системы /23/ асимптотически устойчивы при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство теоремы, в силу выбора малого параметра ε_0 , проводится сначала для канонического вида матрицы $A(\tau)$ в зависимости от поведения собственных значений $\lambda_j(\tau)$.

В отдельности рассмотрены случаи действительных простых и полупростых /по Т.Като/ собственных значений, случай действительных кратных собственных значений и более общий случай простых, полупростых, кратных, действительных и комплексных.

В пункте 6.8 этого параграфа рассмотрена линейная система

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau)x + \varepsilon A_1(\tau, \varepsilon)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad /26/$$

Установлены также достаточные условия /теорема I.11/ неустойчивости решений системы /23/.

Результаты исследования проиллюстрировано на примерах.

Далее в 6.7 снимается условие канонического вида матрицы $A(\tau)$. Рассмотрим систему /26/. Пусть при достаточно малых ε / $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ / фундаментальная матрица решений $X(t, s, \varepsilon)$ однородной системы

$$\frac{dX}{dt} = A(\tau)X, \quad X(s, s, \varepsilon) = E, \quad 0 \leq t < +\infty \quad /27/$$

имеет оценку

$$\|X(t, s, \varepsilon)\| \leq C \exp\left(-\frac{\omega(t-s)}{\varepsilon}\right), \quad \sigma \in \mathcal{E}, \quad 0 \leq s \leq t < +\infty, \quad /28/$$

т.е.

$$\|X(t, s, \varepsilon)\| \leq C \exp(-\omega(t-s)), \quad 0 \leq s \leq t < +\infty, \quad /29/$$

матрица $A_1(\tau, \varepsilon)$ ограничена при всех $t \in [t_0, +\infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Тогда существует $\varepsilon_1(\varepsilon, \leq \varepsilon_0)$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$

решение системы /26/ асимптотически устойчиво при $t \rightarrow +\infty$.

Для системы /23/ доказана следующая теорема.

Теорема 1.12. Если для фундаментальной матрицы решений уравнения /27/ из системы /28/ имеет место оценка /28/, /29/ и

$$\|\varphi(\tau, 0)\| \leq M, \quad \|\varphi(\tau, x_1) - \varphi(\tau, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|,$$

M, L - постоянные, то существует такое $\varepsilon_1 (\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0)$, что для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ система /23/ имеет равномерно устойчивое ограниченное при $t \geq t_0$ решение.

Глава II посвящена вопросу расщепления линейных систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами на подсистемы меньшей размерности.

В §1 п.1.1 рассмотрено систему в частных производных вида

$$Lu = A(\sigma, \varepsilon)u, \quad /30/$$

в которой u - n - мерный вектор; $A(\sigma, \varepsilon)$ - квадратная матрица порядка n ; $\sigma = \varepsilon^n x$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $\sigma \in G$, G - открытая ограниченная область m - мерного пространства \mathbb{R}^m / $m \geq 1$ /; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ - малый действительный параметр, $n \in \mathbb{N}$, L - дифференциальный оператор вида

$$L \equiv \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}; \quad L^k = L(L^{k-1}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad /31/$$

$$L \equiv \sum_{i=1}^m a_i(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i(\sigma, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s a_{is}(\sigma), \quad /32/$$

или

$$L \equiv \text{diag} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta_1(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial x}, \dots, \frac{\partial}{\partial t} + \beta_n(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad /33/$$

Предполагаем, что

I/ матрица $A(\sigma, \varepsilon)$ допускает асимптотическое разло-

жение

$$A(\sigma, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\sigma); \quad /34/$$

2/ собственные значения $\lambda_j(\sigma)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) матрицы $A_0(\sigma) \forall \sigma \in G$ образуют две изолированные группы, т.е. такие, что $\lambda_i(\sigma) \neq \lambda_j(\sigma)$, где $i = \overline{1, n_1}$; $j = \overline{n_1+1, n}$; $n - n_1 = n_2$.

3/ матрица $A(\sigma, \varepsilon)$ голоморфна по $\sigma \in G \subset \mathbb{R}^m$.

Тогда справедлива /п. 1.2/ следующая теорема.

Теорема П. I. Если в системе /30/ матрица $A(\sigma, \varepsilon)$ такова, что имеют место условия 1/ - 3/ п. 1.1, то систему /32/ посредством подстановки

$$u = T(\sigma, \varepsilon) v \quad /35/$$

можно привести к виду

$$L v = B(\sigma, \varepsilon) v, \quad /36/$$

в котором $B(\sigma, \varepsilon)$ имеет квазидиагональную структуру

$$B(\sigma, \varepsilon) = [B_1(\sigma, \varepsilon), B_2(\sigma, \varepsilon)] \quad /37/$$

и $B_i(\sigma, \varepsilon)$ - есть квадратные матрицы порядка n_i ($i = 1, 2$).

Предполагается, что имеют место разложения по степеням малого параметра ε :

$$T(\sigma, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s T_s(\sigma), \quad B(\sigma, \varepsilon) = \left[\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_{1s}(\sigma), \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_{2s}(\sigma) \right]. \quad /38/$$

Таким образом, согласно структуре матрицы $B(\sigma, \varepsilon)$ уравнение /36/ можно рассматривать как систему двух независимых подсистем, где

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad L v_i = B_i(\sigma, \varepsilon) v_i. \quad /39/$$

Порядок отцепленных систем - n_1 и n_2 соответственно.

При доказательстве теоремы П. I используется несобственная матрица $V(\sigma)$, которая преобразует $A_0(\sigma)$ к квазиди-

вгональному виду

$$W_0(\sigma) \equiv V^{-1}(\sigma) A_0(\sigma) V(\sigma) = [W_{10}(\sigma), W_{20}(\sigma)],$$

где $W_{10}(\sigma)$ - квадратная матрица порядка n_1 , с собственными значениями первой группы $\lambda_i(\sigma)$; $W_{20}(\sigma)$ - квадратная матрица порядка n_2 , с собственными значениями второй группы $\lambda_j(\sigma)$ ($i = \overline{1, n_1}$; $j = \overline{n_1+1, n}$, $\sum n_i = n$).

В п.1.3 изучены свойства и предложен метод построения преобразующей матрицы, зависящей от n комплексных переменных. Доказана следующая лемма.

Лемма П.1. Если

а/ матрица $A_0(\sigma)$ голоморфна по σ в области $G \subset R^m$;

б/ ее собственные значения $\lambda_j(\sigma)$ ($j = \overline{1, 2, \dots, n}$) имеют одинаковую кратность для всех точек $\sigma \in G$;

в/ матрица $A_0(\sigma) - \lambda_j(\sigma) E$ / $j = \overline{1, 2, \dots, n}$ / $\forall \sigma \in G$ имеет один и тот же ранг r_j ;

то можно так выбрать неособенную преобразующую матрицу $V(\sigma)$, что она сама, а следовательно, и квазидиагональная матрица $W_0(\sigma)$ будут голоморфными в области G .

Теорема П.2 доказывает асимптотическую сходимость формального преобразования, осуществляющего расщепление исходной системы, к точному.

Показано / п. 1.5 / на примере, как выполняется весь расчет, связанный с асимптотическим расщеплением систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Рассмотрен вопрос /п. 1.6 / расщепления систем в частных производных второго порядка

$$L^2 v + A(\sigma, \varepsilon) v = 0, \quad v \in R^n. \quad /40/$$

При этом показано /теоремы П.3, П.4 /, что при определенных условиях систему в частных производных /40/ можно как расщепить на системы меньшей размерности, так и понизить ее порядок, т.е. с помощью подстановки привести ее к отщепленным системам первого порядка вида /30/.

Теорема П.4. Пусть имеем систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных вида /40/:

$$L^2 v = A(\sigma, \varepsilon) v, \quad \sigma = \varepsilon^n x, \quad /41/$$

в которой $A(\sigma, \varepsilon) = (A_{ij})$ - матрица такая, что имеет место условия теоремы П.1. Тогда система /41/ посредством подстановки

$$V = T(\sigma, \varepsilon) U \quad /42/$$

приводится к виду

$$L U = \Omega(\sigma, \varepsilon) U, \quad /43/$$

в котором матрица $\Omega(\sigma, \varepsilon)$ имеет квазидиагональную структуру

$$\Omega(\sigma, \varepsilon) = [\Omega_1(\sigma, \varepsilon), \Omega_2(\sigma, \varepsilon)], \quad /44/$$

а $\Omega_i(\sigma, \varepsilon)$ - суть квадратные матрицы порядка n_i ($i = 1, 2$).

Предполагается, что $T(\sigma, \varepsilon)$, $\Omega(\sigma, \varepsilon)$, следовательно, и $\Omega_i(\sigma, \varepsilon)$ ($i = 1, 2$) имеют представление

$$T(\sigma, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s T_s(\sigma); \quad \Omega(\sigma, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Omega_s(\sigma). \quad /45/$$

$$\Omega_i(\sigma, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Omega_{is}(\sigma), \quad i = 1, 2.$$

Указан метод асимптотического расщепления системы вида /30/ с оператором /33/ /теорема П.5/, систем вида /30/ в случае простых собственных значений /теорема П.6/.

Разработан алгоритм /п. 1.9 теорема П.8/ построения общего решения для системы /30/ при наличии кратного собственного значения $\lambda_0(\sigma)$ в матрицы $A_0(\sigma)$.

Показано, что к рассмотренным системам сводятся уравнения с малым параметром при старшей частной производной.

§ 2 посвящен расщеплению систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, зависящими от двух малых параметров различных порядков малости, вида

$$\frac{dx}{dz} = A(\sigma, \varepsilon, \mu) x, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

в которой $\sigma = \varepsilon^m \mu^l z$; $m, l \in \mathbb{N}$; ε, μ - малые параметры на областях $\varepsilon \in \Pi_\varepsilon = \{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$, $\mu \in \Pi_\mu = \{0 < \mu \leq \mu_0\}$, σ изменяется в области $\sigma \in \Pi_\sigma = \{0 \leq \sigma \leq L\}$, ε_0, μ_0, L - постоянные; $A(\sigma, \varepsilon, \mu)$ - матрица $(n \times n)$, элементы которой ограничены и голоморфны по переменным σ, ε, μ в области $D = \Pi_\sigma \times \Pi_\mu \times \Pi_\varepsilon$.

Предполагается, что

1/ матрица $A(\sigma, \varepsilon, \mu)$ допускает асимптотическое разложение

$$A(\sigma, \varepsilon, \mu) = \sum_{z, s=0}^{\infty} \mu^z \varepsilon^s A_{zs}(\sigma) \quad /47/$$

при $\varepsilon \in \Pi_\varepsilon$, $\mu \in \Pi_\mu$ стремящихся к нулю с голоморфными по σ коэффициентами $A_{zs}(\sigma)$;

2/ корни $\lambda_i(\sigma)$ / $i = 1, 2, \dots, n$ / характеристического уравнения

$$\det \| A_{00}(\sigma) - \lambda E \| = 0 \quad /48/$$

образуют $K \leq n$ изолированных групп:

$$\lambda_1(\sigma), \dots, \lambda_{p_1}(\sigma); \lambda_{p_1+1}(\sigma), \dots, \lambda_{p_2}(\sigma); \dots; \lambda_{p_{k-1}+1}(\sigma), \dots, \lambda_n(\sigma) \\ (p_1 + p_2 + \dots + p_k = n),$$

таких, что $\lambda_j(\sigma) \neq \lambda_i(\sigma)$ для всех $\sigma \in \Pi_\sigma$ при $j \leq p_m$, $i > p_m$ ($m = 1, 2, \dots, k$).

При сделанных предположениях справедлива такая теорема.

Теорема П.Ф. Пусть в системе дифференциальных уравнений /46/ матрица $A(\sigma, \varepsilon, \mu)$ удовлетворяет условиям 1/, 2/, тогда существует преобразование

$$x = U(\sigma, \varepsilon, \mu) \xi, \quad /49/$$

сводящее систему /46/ к системе

$$\frac{d\xi}{dz} = \Omega(\sigma, \varepsilon, \mu) \xi, \quad /50/$$

в которой матрица $\Omega(\sigma, \varepsilon, \mu)$ имеет блочно-диагональную

структуру

$$\Omega(\sigma, \varepsilon, \mu) = [\Omega_1(\sigma, \varepsilon, \mu), \dots, \Omega_K(\sigma, \varepsilon, \mu)] \quad /51/$$

и $\Omega_i(\sigma, \varepsilon, \mu)$ - квадратные матрицы порядка P_i ($i = \overline{1, K}$).
Предполагается, что матрицы $U(\sigma, \varepsilon, \mu)$ и $\Omega(\sigma, \varepsilon, \mu)$ допускают разложение

$$U(\sigma, \varepsilon, \mu) = \sum_{z, s=0}^{\infty} \mu^z \varepsilon^s U_{zs}(\sigma), \quad \Omega(\sigma, \varepsilon, \mu) = \sum_{z, s=0}^{\infty} \mu^z \varepsilon^s \Omega_{zs}(\sigma) \quad /52/$$

при $\varepsilon \in \Pi_\varepsilon$, $\mu \in \Pi_\mu$ стремящихся к нулю с голоморфными по σ коэффициентами $U_{zs}(\sigma)$, $\Omega_{zs}(\sigma)$.

Рассмотрен иллюстративный пример.

Показано /п. 2.3/, что построенное по указанному алгоритму формальное расщепление /49/ асимптотически сходится к некоторому точному преобразованию $X(z, \mu, \varepsilon)$ системы /46/. На малые параметры ε и μ указаны ограничения, при которых имеют место асимптотические оценки.

В п. 2.4 изложено расщепление систем второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами, зависящими от двух малых параметров.

К исследованию уравнений и систем такого вида сводится, например, задача "определения значения критической осевой силы для ортотропной оболочки с криволинейной образующей при неосесимметричной форме потери устойчивости" и ряд других.

В §3 рассмотрена задача расщепления систем линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами на системы меньшей размерности в случае иррегулярной особой точки, т.е. в том случае, когда решение системы исследуется как при стремлении малого параметра к нулю, так и при стремлении независимой переменной к своей особой точке.

Имеем систему

$$dx/dt = \tau^2 A(\tau, \varepsilon)x, \quad x \in R^n, \quad /53/$$

где $\tau = \varepsilon^{\beta t}$; $\beta, \rho \in \mathbb{N}$, $A(\tau, \varepsilon)$ — $(n \times n)$ -матрица, ограниченная и голоморфная по комплексным переменным τ и ε при

$$|\tau| \geq L, 0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, |\operatorname{arg} \varepsilon| \leq \Delta \quad /54/$$

L, ε_0, Δ — фиксированные числа и $1/$ имеет асимптотическое представление

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{z, s=0}^{\infty} \tau^{-z} \varepsilon^s A_{zs} \quad /55/$$

в области $/54/$; $2/$ собственные значения матрицы A_{00} разделены на две группы $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p_1}$; $\lambda_{p_1+1}, \dots, \lambda_n$, $n - p_1 = p_2$; $\lambda_j \neq \lambda_k$, если $j \in p_1, k \notin p_1$.

Теорема П.12. Пусть в системе $/53/$ матрица $A(\tau, \varepsilon)$ удовлетворяет условиям $1/$, $2/$. Тогда существует преобразование

$$x = U(\tau, \varepsilon) \xi, \quad /56/$$

сводящее систему $/53/$ к системе

$$d\xi/dt = \tau^{\rho} \Omega(\tau, \varepsilon) \xi, \quad /57/$$

в которой $\Omega(\tau, \varepsilon)$ имеет блочно-диагональный вид

$$\Omega(\tau, \varepsilon) = [\Omega_1(\tau, \varepsilon), \Omega_2(\tau, \varepsilon)], \quad /58/$$

$\Omega_k(\tau, \varepsilon)$ — квадратные матрицы порядка p_k / $k = 1, 2/$ причем $U(\tau, \varepsilon)$, $\Omega(\tau, \varepsilon)$ ищутся в виде разложений

$$U(\tau, \varepsilon) = \sum_{z, s=0}^{\infty} \tau^{-z} \varepsilon^s U_{zs}, \quad \Omega(\tau, \varepsilon) = \sum_{z, s=0}^{\infty} \tau^{-z} \varepsilon^s \Omega_{zs}. \quad /59/$$

Далее показано, что преобразование $/56/$ является асимптотическим по отношению к некоторой функции $U(\tau, \varepsilon)$, которая действительно осуществляет расщепление исходной системы.

Как частный случай из данной теоремы вытекают теоремы о расщеплении С.С.Фещенко и В.Вавова.

Показано, что к исследованию таких систем сводятся задачи строительной механики.

Третья глава посвящена изложению результатов по асимптотическому интегрированию дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.

В §1 этой главы рассмотрен вопрос построения асимптотического решения при наличии конечной системы кратных собственных значений для дифференциального уравнения с медленно меняющимися коэффициентами в банаховом пространстве B вида

$$dx/dt = A(\tau; \epsilon) x, \quad /60/$$

в котором x - искомая вектор-функция переменного $t \in [0, L/\epsilon]$ со значениями в пространстве B ; ϵ - малый параметр области Π / $\Pi = \{0 < \epsilon \leq \epsilon_0\}$, $\tau = \epsilon t$, $\tau \in [0, L]$, и имеет место представление

$$A(\tau; \epsilon) = A_0(\tau) + \epsilon A^{(1)}(\tau; \epsilon). \quad /61/$$

Относительно операторов $A_0(\tau)$, $A^{(1)}(\tau; \epsilon)$ предполагаем следующее.

Оператор $A_0(\tau)$ удовлетворяет условиям (S_1) :

а/ $A_0(\tau)$ линейный замкнутый нормально разрешимый при каждом значении $\tau \in [0, L]$;

б/ область определения $D(A_0(\tau))$ оператора $A_0(\tau)$ плотна в B и не зависит от $\tau \in [0, L]$;

в/ $A_0(\tau)$ сильно непрерывно дифференцируемый по τ достаточное /бесконечное/ число раз.

Операторнозначную функцию $A^{(1)}(\tau; \epsilon)$ подчиним условию (S_2) :

а/ $A^{(1)}(\tau; \epsilon)$ - линейный оператор, равномерно ограниченный при $0 \leq \tau \leq L$, $\epsilon \in \Pi$ / $\|A^{(1)}(\tau; \epsilon)\| \leq C$ /, что оставляет инвариантной область $D(A_0(\tau))$;

б/ оператор $A^{(1)}(\tau; \epsilon)$ разлагается в асимптотический ряд

$$A^{(1)}(\tau; \epsilon) = \sum_{S=1}^{\infty} \epsilon^{S-1} A_S(\tau) \quad /62/$$

с ограниченными сильно непрерывно дифференцируемыми по τ

достаточное /бесконечное/ число рав коэффициентами $A_S(\tau)$
/ $S = 1, 2, \dots$ /.

Вопрос построения решений для уравнения /60/ рассмат-
ривается при наличии у оператора $A_0(\tau)$ конечной системы
изолированных при каждом τ кратных собственных значе-
ний, т.е.

$$A_0(\tau)P(\tau) = \sum_{h=1}^m (\lambda_h(\tau)P_h(\tau) + D_h(\tau)), \quad P(\tau) = \sum_{h=1}^m P_h(\tau). \quad /63/$$

Здесь $P_h(\tau)$ и $D_h(\tau)$ - собственный проектор и собст-
венный нильпотент, что соответствует изолированному собст-
венному значению $\lambda_h(\tau)$ / $h = 1, 2, \dots, m$ / операто-
ра $A_0(\tau)$ и удовлетворяет соотношениям

$$P_h P_k = \delta_{hk} P_h, \quad \delta_{hk} = \begin{cases} 1, & h = k, \\ 0, & h \neq k; \end{cases}$$

$$P_h D_h = D_h P_h = D_h;$$

$$(A_0(\tau) - \lambda_h(\tau))P_h = D_h. \quad /64/$$

Причем каждому $\lambda_h(\tau)$ соответствует корневое подпростран-
ство размерности $n_h < +\infty$ и выполняется условие

$$(\Psi_h, \varphi_h^{(i)} - A_1(\tau)\varphi_h^{(i)}) \neq 0 \quad \forall \tau \in [0, b] \quad /65/$$

$$(' = d/d\tau; \quad h = 1, 2, \dots, m).$$

где $\varphi_h^{(i)}(\tau)$ - нули оператора $G_h = A_0(\tau) - \lambda_h(\tau)$; $\varphi_h^{(i)} \in N(G_h)$,
а $\Psi_h(\tau) \in N(G_h^*)$ - дефектный функционал $\varphi_h^{(i)}$.

На вид формальных частных решений уравнения /60/
указывает такая теорема.

Теорема Ш.1. Если операторы $A_0(\tau)$, $A^{(i)}(\tau; \epsilon)$ удовлет-
воряют условиям (S_1) , (S_2) и выполняются условия /65/,
то формальное частное решение уравнения /60/ может быть
представлено в виде

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{h=1}^m \exp\left(\int_0^t \lambda_h(\tau, \mu_h) d\tau\right) V_h(\tau, \mu_h), \quad /66/$$

где $V_h(\tau, \mu_h)$, $\lambda_h(\tau, \mu_h)$ /соответственно вектор-функция и скалярная функция/ имеют следующие степенные разложения

$$V_h(\tau, \mu_h) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_h^s V_{hs}(\tau); \quad \lambda_h(\tau, \mu_h) = \lambda_h(\tau) + \\ + \sum_{s=1}^{\infty} \mu_h^s \lambda_h^{(s)}(\tau), \quad \mu_h = \sqrt{\varepsilon}, \quad h=1, 2, \dots, m. \quad /67/$$

В п. 1.3 главы III показано, что формальное решение /66/ обладает асимптотическим свойством в том смысле, что вектор-функция

$$x^{(p)}(t, \varepsilon) = \sum_{h=1}^m \exp\left(\int_0^t \lambda_h^{(p)}(\tau, \mu_h) d\tau\right) V_h^{(p)}(\tau, \mu_h).$$

где $\lambda_h^{(p)}(\tau, \mu_h)$, $V_h^{(p)}(\tau, \mu_h)$ ($p \in N$) разложения /67/ ограничены $p+1$ членами, при фиксированном p и при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к соответствующему точному решению $x(t, \varepsilon)$ дифференциального уравнения /60/. При этом при доказательстве асимптотического свойства на параметр ε получено ограничение, при котором имеет место асимптотическая оценка.

В теоремах III.3 - III.5 рассмотрены частные случаи и другие достаточные условия типа /65/, необходимые для построения асимптотических решений уравнения /60/.

В п. 1.5 этого параграфа подробно обсуждается случай изолированного нулевого собственного значения: так называемый критический случай по А.Б.Васильевой.

Здесь указывается структура частных решений при других достаточных условиях, чем в теоремах III.1, III.3 - III.5. Указывается возможное число самих достаточных условий в зависимости от поведения возмущающих членов из разложения /62/.

когда некоторые из коэффициентов $A_1(\tau), \dots, A_n(\tau)$ ряда /62/ тождественно равны нулю.

Пусть ψ — нуль оператора $A_0(\tau)$: $\psi \in N(A_0(\tau))$; $\psi \in N(A_0^*(\tau))$ — дефектный функционал ψ , H — обобщенно обратный оператор для $A_0(\tau)$.

Введем в рассмотрение следующие элементы:

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^k H^{k-i} A_1(\tau) H^{i-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \alpha_1, \quad /68/$$

$$\omega_k(\tau) = (\psi, \gamma_k \psi), \quad k = 1, 2, \dots, \alpha_1. \quad /69/$$

Здесь $\alpha_1 = E((n+2)/2) / E(x)$ — целая часть x , $(\psi, \gamma_k \psi)$ — значение линейного функционала ψ на векторах $\gamma_k \psi$.

Теорема Ш.7. Пусть

1/ для операторов $A_0(\tau)$, $A^{(1)}(\tau; \varepsilon)$ имеет место условия / S_1 /, / S_2 /;

2/ оператор $A_0(\tau)$ при каждом τ имеет изолированное нулевое собственное значение с конечномерным корневым подпространством размерности $n < +\infty$;

3/ $\forall \tau \in [0, L]$ выполняется одно из условий

1. $\omega_1 \neq 0$,

2. $\omega_1 \equiv 0, \omega_2 \neq 0$,

...

i. $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_{i-1} \equiv 0; \omega_i \neq 0$,

...

$\alpha_1 - 1$. $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_{\alpha_1 - 2} \equiv 0; \omega_{\alpha_1 - 1} \neq 0$,

α_1 . $\omega_1 = \dots = \omega_{\alpha_1 - 1} \equiv 0; \omega_{\alpha_1} \neq 0$, например, $i - e$,

($i = 1, 2, \dots, \alpha_1$). Тогда асимптотическое решение для дифференциального уравнения /60/ имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = \exp\left(\int_t^{\tau} \lambda(\tau, \mu) d\tau\right) U(\tau, \mu), \quad /70/$$

где $U(\tau, \mu)$ - вектор-функция, $\lambda(\tau, \mu)$ - скалярная функция представляются разложениями

$$U(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s U_s(\tau), \quad \mu = \sqrt{\varepsilon},$$

$$\lambda(\tau, \mu) = \sum_{s=1}^{n-1} \mu^s \lambda_s(\tau). \quad /71/$$

Исследуется случай наличия регулярных решений относительно малого параметра ε , а также случай, когда $\tau = \varepsilon^m t$, $m \in \mathbb{N}$.

В силу своих особенностей, как отмечают в своей монографии Х.Массера и Х.Шеффер, определенный интерес представляют собой и дифференциальные уравнения второго порядка, чему и посвящен §2.

В этом параграфе рассмотрен вопрос построения частных решений в некотором гильбертовом пространстве H для уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = A(\tau; \varepsilon)x + e^{i\theta(t, \varepsilon)} f(\tau; \varepsilon), \quad /72/$$

$$A(\tau; \varepsilon) = A_0(\tau) + \varepsilon A^{(1)}(\tau; \varepsilon); \quad A^{(1)}(\tau; \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^{s-1} A_s(\tau). \quad /73/$$

$A_0(\tau)$ - самосопряженный оператор, отрицательно определенный с плотной областью определения $D(A_0(\tau))$, не зависящей от τ , сильно непрерывно дифференцируемый по τ достаточно /бесконечное/ число раз; $A^{(1)}(\tau; \varepsilon)$ такой же, как и в задаче /60/.

Вектор-функция $f(\tau, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема по τ и допускает представление

$$f(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s f_s(\tau); \quad \|f(\tau, \varepsilon)\| \leq h. \quad /74/$$

Функция $\theta(\tau, \varepsilon)$ такова, что

$$d\theta/dt = K(\tau), \quad /75/$$

где $K(\tau)$ непрерывно дифференцируема достаточное /бесконечное/ число раз.

Предполагаем, что для уравнения /72/ имеют место теоремы С.Г.Крейна и В.Б.Осипова существования и единственности решения.

Пусть $\lambda(\tau)$ изолированное собственное значение оператора $A_0(\tau)$. Преобразование $x = \exp(\int_0^\tau \sqrt{\lambda(\tau)} dt) y$ приводит уравнение /72/ к такому же виду с оператором $B_0(\tau) = A_0(\tau) - \lambda(\tau)I$, который имеет нулевое собственное значение.

Поэтому для простоты изложения вопрос построения частных решений для уравнения /72/, рассматриваем при наличии изолированного нулевого собственного значения у оператора

$A_0(\tau)$, различая известные в литературе два случая:

- резонансный, когда функция $K(\tau)$ совпадает с собственным значением;
- нерезонансный, когда $K(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in [0, L]$.

В каждом из указанных случаев предлагается свой подход в построении решений для уравнения /72/.

Установлены достаточные условия, необходимые для построения решений, и степень малого параметра, по которой разлагаем искомые решения.

В частности, показано, что при наличии даже простого нулевого собственного значения у оператора $A_0(\tau)$ решение для уравнения /72/ имеет разложение не по целым степеням, а по дробным:

$$x = h U(\tau, \mu), \quad dh/dt = \lambda(\tau, \mu) h,$$

$$U(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s U_s(\tau), \quad \lambda(\tau, \mu) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s \lambda_s(\tau),$$

где $\mu = \varepsilon^{1/2}$.

Построены частные решения, соответствующие правой части уравнения /72/

Приложение полученных результатов проиллюстрировано на "задаче расчета тонкой круговой конической оболочки постоянной толщины, нагруженной силами, симметричными относительно оси".

В заключение главы /§ 3/ изложен вопрос построения асимптотических частных решений при наличии простого корня "характеристического" уравнения для дифференциального уравнения с медленно меняющимися коэффициентами и с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом с медленно меняющимися коэффициентами

$$\frac{dx(t, \varepsilon)}{dt} = A_1(\tau)x(t, \varepsilon) + A_2(\tau)x(t - \Delta(\tau), \varepsilon), \quad /76/$$

$$x(\tau, \varepsilon) = \chi(\tau, \varepsilon), \quad -h \leq \tau \leq 0, \quad /77/$$

где $0 \leq \tau = \varepsilon t \leq L$, ε - малый параметр, $x(t, \varepsilon)$ - искомая вектор-функция со значениями в банаховом пространстве B .

$A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ - линейные ограниченные операторы, действующие в B с областью определения, не зависящей от τ .

Операторы $A_i(\tau)$ / $i=1, 2$ /, функция $\Delta(\tau)$ имеют достаточное /бесконечное/ число производных по τ , вектор-функция $\chi(\tau, \varepsilon)$ - заданная, непрерывная, ограниченная.

Рассмотрим "характеристическое" уравнение

$$\text{си. } (A_1(\tau) - \lambda I + \exp(-\Delta(\tau)\lambda)A_2(\tau)) = 0. \quad /78/$$

Определение. Корнем уравнения /78/ будем называть такую функцию $\lambda(\tau)$, при которой оператор в левой части уравнения /78/ имеет нулевую точку спектра.

Формальным решением для уравнения /76/, которое соответствует определенному корню уравнения /78/, будем называть частным формальным решением.

В этом параграфе излагается алгоритм построения част-

ных решений уравнения /76/ при наличии простого корня уравнения /78/.

Теорема Ш.19. Если операторы $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ и функция $\Delta(\tau)$ – достаточное /бесконечное/ число раз непрерывно дифференцируемы по τ ; $\lambda(\tau)$ – простой корень уравнения /78/; оператор

$$\Omega(\tau) \stackrel{df}{=} A_1(\tau) - \lambda(\tau)I + \exp(-\Delta(\tau)\lambda(\tau))A_2(\tau)$$

нормально разрешимый, то дифференциальное уравнение /76/ имеет формальное частное решение вида

$$x(t, \varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \lambda(s) ds\right) U(\tau, \varepsilon), \quad /79/$$

где $U(\tau, \varepsilon)$ – вектор-функция, допускающая формальное разложение

$$U(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U_s(\tau).$$

В п. 3.3 этого параграфа доказано асимптотическое свойство формально построенного решения. Содержится пример иллюстративного характера.

Следует отметить, что данное исследование §3 является своего рода продолжением исследований автора для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом как в частных производных, так и для обыкновенных дифференциальных уравнений, начатых ранее, изложенных в кандидатской диссертации и в работах, опубликованных на эту тему после защиты кандидатской диссертации.

Более полное изложение этих результатов автора приводится в монографии в соавторстве с Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Пидченко И.П., которая содержит краткий обзор результатов по дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Щеценко С.Ф., Шкиль Н.И., Сотниченко Н.А. Об асимптотическом представлении решений для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием по времени // Укр. мат. журн. - 1971. - 23, № 2. - С. 179-191.
2. Сотниченко Н.А. Асимптотическое представление решений систем линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа с запаздыванием по времени с малым параметром: Автореф. дис. ... канд. физ. - мат. наук. - Киев: Киев. пед. ин-т, 1972. - 9 с.
3. Сотниченко Н.А. Об интегрировании системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. - 1972. - 8, № 3. - С. 510-522.
4. Сотниченко Н.А., Щеценко С.Ф. Об асимптотическом решении для линейной системы гиперболического типа с запаздывающим аргументом // Укр. мат. журн. - 1973. - 25, № 4. - С. 563-568.
5. Сотниченко Н.А., Щеценко С.Ф. К вопросу формального решения для системы линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами // Мат. сб. - Киев: Наук. думка, 1976, - С. 83-86.
6. Сотниченко Н.А., Щеценко С.Ф. Об асимптотическом решении для дифференциального уравнения в банаховом пространстве при наличии конечной системы кратных собственных значений // Укр. мат. журн. - 1976. - 28, № 5. - С. 651-658.
7. Щеценко С.Ф., Сотниченко Н.А. Об асимптотическом решении для бесконечной системы дифференциальных уравнений // Динамика и устойчивость управляемых систем. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. - С. 188-193.
8. Сотниченко Н.А., Клименко Н.С. Решение системы линейных уравнений с помощью псевдообратной матрицы на ЭВМ // Автоматизация технологических процессов в машиностроении. - Киев: Техніка, 1978. - С.39-44.

9. Фещенко С.Ф., Сотниченко Н.А. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с "медленным временем" // Проблемы нелинейных колебаний механических систем. - Киев: Наук. думка, 1978. - С. 91-92.
10. Сотниченко Н.А. Решение системы дифференциальных уравнений в случае нулевого корня // 2-й Респ. симпоз. по дифференц. и интегр. уравнениям, Одесса, 29 сент. - 2 окт. 1978 г.; Тез. докл. - Одесса: Одес. гос. ун-т, 1978. - С. 33-34.
11. Сотниченко Н.А., Фещенко С.Ф. Асимптотическое расщепление систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных. - Киев, 1978. - 40 с. - /Препр./АН УССР. Ин-т математики; 78.34/.
12. Сотниченко Н.А., Фещенко С.Ф. Расщепление систем дифференциальных уравнений второго порядка с двумя малыми параметрами // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1979. - № 9. - С. 704-707.
13. Сотниченко Н.А., Фещенко С.Ф. Расщепление некоторых систем дифференциальных уравнений // Приближенные методы математического анализа. - Киев: Киев. пед. ин-т, 1979. - С. 124-133.
14. Сотниченко Н.А., Фещенко С.Ф. Асимптотическое расщепление некоторых классов сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений // Всесоюз. конф. по асимптот. методам в теории сингулярно-возмущ. уравнений, Алма-Ата, 18-20 июня 1979 г.; Тез. докл. - Алма-Ата: Наука, 1974. - Ч. I. - С. 185-186.
15. Сотниченко Н.А. Расщепление систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка, зависящих от двух параметров // Аналитические и квазианалитические функции и их приложения. - Киев: Киев. инж.-строит. ин-т, 1979. - С. 68-72.
16. Сотниченко Н.А. Асимптотическое решение дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1980. - № 7. - С. 29-33.
17. Сотниченко Н.А., Фещенко С.Ф. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений. - Киев, 1980. - 48 с. - /Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 80.3/.
18. Сотниченко Н.А. К вопросу устойчивости колебательного процесса в режиме "медленного времени" // Методы функционального анализа многомерных процессов. - Киев: Киев. инж.-строит. ин-т, 1982. - С. 17-18.

19. Сотниченко Н.А., Фещенко С.Ф. Асимптотическое представление решения для дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием по времени // Аналитические методы исследования нелинейных колебаний. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. - С. 155-161.
20. Сотниченко Н.А., Фещенко С.Ф. К вопросу интегрирования систем дифференциальных уравнений // Динамика и устойчивость механических систем. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. - С. 162-166.
21. Сотниченко Н.А., Фещенко С.Ф. Асимптотические решения для систем нелинейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися параметрами // Укр. мат. журн. - 1980. - 32, № 5. - С. 697-700.
22. Сотниченко Н.А. К асимптотическому интегрированию дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами // Аналитические и квазианалитические функции и их приложения. - Киев: Киев. инж.-строит. ин-т, 1980. - С. 47-50.
23. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Пидченко Ю.П., Сотниченко Н.А. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. - Киев: Наук. думка, 1981. - 296 с.
24. Михайленко В.М., Сотниченко Н.А., Яковец В.П. К вопросу о возмущении собственных значений и собственных элементов линейных операторов. - Киев: Киев. инж.-строит. ин-т, 1981. - 60 с. - Деп. в УкрНИИТИ 08.08.81, № 2961.
25. Сотниченко Н.А., Фещенко С.Ф. Об асимптотическом решении для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Приближенные методы математического анализа. - Киев: Киев. пед. ин-т, 1982. - С. 115-121.
26. Сотниченко Н.А., Яковец В.П. Асимптотическое интегрирование некоторых систем линейных уравнений с частными производными // Укр. мат. журн. - 1983. - 35, № 2. - С. 187-193.
27. Сотниченко Н.А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами // Приближенные методы математического анализа. - Киев: Киев. пед. ин-т, 1983. - С. 127-130.

28. Сотниченко Н.А. О формальном частном решении для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом. - Киев: Киев. инж.-строит. ин-т, 1984. - 12 с. - Деп в УкрНИИТИ 11.02.85, № 289.
29. Сотниченко Н.А. Асимптотическое интегрирование и расщепление дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. - 1984. - 20, № 2. - С. 361-362.
30. Сотниченко Н.А., Щещенко С.Ф. К вопросу асимптотического интегрирования систем дифференциальных уравнений // IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям. - Киев: Наук. думка, 1984. - Т.1. - С. 351-353.
31. Сотниченко Н.А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами // Методы функционального анализа многомерных процессов. - Киев: Киев. инж.-строит. ин-т, 1984. - С.32-34.
32. Сотниченко Н.А. К вопросу расщепления систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами и иррегулярной особой точкой // Укр. мат. журн. - 1985. - 37, № 5. - С. 628-629.
33. Сотниченко Н.А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с "медленным временем" // Мат. физика и нелинейн. механика. - 1986. - № 6. - С. 50-53.
34. Сотниченко Н.А. Асимптотические решения дифференциального уравнения с двумя параметрами. - Киев: Киев. инж.-строит. ин-т, 1986. - 23 с. - Деп. в УкрНИИТИ 29.01.86, № 335.
35. Сотниченко Н.А. Асимптотическое интегрирование дифференциального уравнения с запаздыванием аргумента в банаховом пространстве. - Киев: Киев. инж.-строит. ин-т, 1986. - 10 с. - Деп. в УкрНИИТИ 04.10.86, № 38.
36. Сотниченко Н.А. К вопросу расщепления систем дифференциальных уравнений, зависящих от двух параметров // Дифференц. уравнения. - 1987. - 23, № 9. - С. 1640-1642.

Подп. в печ. 01.07.91. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс. печатать. Усл. печ. л. 2,09. Усл. кр.-отт. 2,09. Усл.-изд. л. 1,7.
Тираж 120 экз. Зак. 326 Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики АН УССР.
252601 Киев 4, ГСП, ул. Решина, 3

AB 26.755