

На правах рукописи

УДК 517.958:539.3

КОССАК ОЛЕГА СВЯТОСЛАВОВНА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ
СОСТАВНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

Специальность 05.13.16 - применение вычислительной
техники, математического моделирования и
математических методов в научных исследованиях

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

АВ 23.303
Работа выполнена на кафедре прикладной математики
Львовского государственного университета им. Ивана Франко

Научный руководитель: доктор физико-математических
наук, профессор САВУЛА Я.Г.

Официальные оппоненты: доктор технических наук,
чл.-кор. АН Украины ГРИГОРЕНКО Я.М.,
доктор физико-математических
наук, профессор ВОЙТОВИЧ Н.Н.

Ведущее предприятие: Киевский государственный
университет имени Т.Г.Шевченко

Защита состоится "¹⁵.....⁰¹..... 1992 г. в ¹⁵ ча-
сов на заседании специализированного совета К 068.26.12 во
Львовском государственном университете им. Ивана Франко (290602,
Львов, ул. Университетская, I, ЛТУ, ауд.).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Львовского
государственного университета.

Автореферат разослан "¹³.....¹²..... 1991 г.

Ученый секретарь
специализированного совета

Б.А.Остудин

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00815574 (U)

ЛННБ ім. В. Стефаника
АН УРСР

Актуальность проблемы. В современном машиностроении, приборостроении, стрелительстве применяются конструкции, имеющие форму тел вращения и содержащие тонкостенные и массивные элементы. Поскольку они как правило работают в условиях нестационарных, вибрационных нагрузок, представляется важной проблеме определения частот и форм их свободных колебаний. Решение этой проблемы дает возможность получить информацию еще на стадии проектирования, предупредить возникновение весьма опасных с точки зрения прочности и надежности конструкций, резонансных явлений.

Задача определения частот и форм свободных колебаний упругих конструкций является достаточно сложной проблемой математической физики. Ее решение традиционными аналитическими методами связано со значительными трудностями, а зачастую и неосуществимо. Более целесообразным представляется применение численных методов и ЭВМ, позволяющее не только определять виброхарактеристики сложных конструкций, но и автоматизировать сам процесс расчета, уточнять математические модели и т.д., т.е. провести вычислительный эксперимент.

При расчете задач о свободных колебаниях прослеживаются два подхода. В первом массивные и тонкостенные конструкции исследуются на основе уравнений трехмерной линейной теории упругости. К настоящему времени имеются многочисленные публикации, в которых в пространственной постановке с помощью численных методов проводятся исследования свободных колебаний упругих тел. Расчетные схемы исследования колебаний конструкций, полученные из уравнений трехмерной теории упругости, используются в работах Я.М. Григоренко, Е.И. Беспаловой, А.В. Китайгородского, А.И. Шинкаря, С.И. Богомолова, С.С. Луценко, С.А. Назаренко, В.Н. Кислюкого, А.Д. Легостаева, А.Э. Сахарова и др. авторов.

Достоинствами подхода, использующего трехмерные уравнения теории упругости, является его универсальность, предполагающая возможность точного описания тел сложной геометрии. Однако, для получения достаточно точных результатов необходимо применять густые сетки конечных элементов, или же аппроксимации высоких порядков точности. Недостатком такого подхода является, то что для получения достаточно точных результатов необходимо выполнить

большие объемы вычислений, что требует привлечения больших ресурсов ЭВМ.

В том случае, когда конструкция состоит лишь из тонкостенных фрагментов, можно рассмотреть второй подход. Он характеризуется тем, что расчет задач о свободных колебаниях в применении к тонкостенным телам производится на основе двумерных уравнений теории оболочек. Исследования задач о свободных колебаниях оболочек проводились в работах И.Я.Амиро, Е.И.Беспаловой, В.В.Болотина, Б.Н.Бублика, А.Т.Василенко, А.С.Вольмира, А.Л.Гольденвейзера, В.С.Гонткевича, Э.И.Григоложа, Я.М.Григоренко, В.И.Гуляева, В.М.Даревского, В.А.Заруцкого, А.Б.Китайгородского, А.В.Хармишина, М.Ф.Копытко, В.П.Жигалко, В.Б.Лидского, В.П.Мальцева, В.И.Мяченкова, П.М.Огибалова, О.Д.Ониашвили, Н.Д.Панкратовой, В.Н.Паймушина, Д.Я.Петрушенко, Я.Г.Савулы, П.Е.Товстика, А.П.Филиппова, В.Флюге, А.И.Шинкаря и др.

Применение соотношений теории тонких оболочек для расчета тонкостенных конструкций позволяет избежать те трудности вычислительного характера, которые возникают в случае применения численных методов непосредственно к уравнениям трехмерной теории упругости. Тем самым несколько расширяется класс конструкций, которые можно рассчитать, опираясь на существующие в настоящее время вычислительные средства. Однако, надо отметить, что теория оболочек в ряде случаев неприменима для расчета конструкций, включающих в себя тонкостенные и массивные элементы. Применение же для расчета частот и форм колебаний таких конструкций трехмерных соотношений теории упругости связано с большими вычислительными затратами, что может быть оправдано лишь для отдельных массивных участков конструкции. Поэтому развитие подхода, в котором используются две теории одновременно, представляется актуальным. В этом случае составная конструкция разделяется на массивные фрагменты, которые описываются трехмерной теорией, и тонкостенные фрагменты, описываемые теорией оболочек. Строится комбинированная модель "упругое тело - оболочка". Ключевым для таких моделей является вопрос о сопряжении фрагментов конструкции, описываемых различными теориями. В рамках МЭЭ эта проблема решается рядом авторов путем введения специальных переходных элементов (transition finite element), которые представляют собой естественное соединение элементов трехмерного и оболочечного типов. В этом направлении для

решения задач статики необходимо особо отметить работы Surana Karana S., С.А.Акимкина, Г.П.Никишкова, Б.Д.Дробенко, Gao D., Citipitioglu E., и др.

В работах С.А.Капустина, А.Н.Паутова, Д.Н.Шуваева и др. комбинированная модель для решения задач статики записана в виде замкнутой системы дифференциальных уравнений с граничными условиями на границе области и условиями сопряжения на поверхности сопряжения.

В работах Я.Г.Савулы и А.В.Дубовика построена комбинированная модель для решения задач статики тонкостенных пространственных конструкций. Здесь записан функционал потенциальной энергии со штрафом, минимизация которого эквивалентна решению краевой задачи комбинированной модели.

Вопросы расчета колебаний элементов механических систем на основе комбинированных моделей рассмотрены в работах О.Ф.Борискина, В.В.Кулибабы, О.В.Репецкого, Ф.Съярле.

Для решения задач о свободных колебаниях тел вращения эффективно применяется полуаналитический метод конечных элементов (ПМКЭ), весьма близкого к методу Л.В.Канторовича. Согласно ПМКЭ перемещения в теле представляются в виде ряда Фурье по полной системе тригонометрических функций вдоль окружной переменной. По другим переменным применяются кусочно-полиномиальные квадратичные аппроксимации МКЭ: одномерные для теории оболочек и двумерные для теории упругости.

С помощью ПМКЭ задача о свободных колебаниях конструкций вращения приводится к обобщенной проблеме на собственные значения для матриц больших размерностей.

Целью настоящей работы является:

- разработка нового подхода к решению задач о свободных колебаниях составных тел вращения, содержащих тонкостенные и массивные фрагменты, основанного на комбинированной модели "упругое тело - оболочка типа Тимошенко";
- построение схем и алгоритмов полуаналитического метода конечных элементов для решения задач о свободных колебаниях составных тел вращения;
- создание на основе разработанного алгоритма проблемно-ориентированного комплекса программ для расчета собственных частот и форм колебаний составных тел вращения;

- проведение численных экспериментов по исследованию сходимости и точности разработанных численных методов решения задач на собственные значения;
- исследование частот и форм свободных колебаний ряда конструкций, имеющих важное практическое значение.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

- построен вариант разрешающих уравнений комбинированной модели "упругое тело - оболочка типа Тимошенко" для исследования частот и форм свободных колебаний составных тел вращения, содержащих тонкостенные и массивные фрагменты;
- построены и исследованы функционалы комбинированной модели без штрафа и со штрафом, получены уравнения Эйлера соответствующих функционалов;
- в осесимметричной постановке для случая массивного тела, сопряженного с цилиндрической оболочкой, доказана положительная определенность оператора комбинированной модели со штрафом и сходимость решения этой задачи к решению комбинированной модели без штрафа;
- в рамках комбинированной модели разработан единый подход для решения задач о свободных колебаниях составных тел вращения;
- на тестовых примерах, имеющих решения, полученные другими методами, исследована точность и сходимость построенной схемы, получены апостериорные оценки, проведено сравнение результатов;
- составлен комплекс программ для определения частот и форм свободных колебаний составных тел вращения;
- исследованы сложные инженерные конструкции вращения, содержащие тонкостенные и массивные фрагменты.

Достоверность научных результатов обеспечивается строгим математическим обоснованием используемых вариационных постановок для решения задач о свободных колебаниях и разработанной схемой метода конечных элементов; сравнением полученных решений для тестовых примеров с аналитическим решением, анализом приближенных решений, полученных на разных конечноэлементных сетках, сопоставлением с результатами, полученными по теории упругости и с экспериментальными данными.

Практическая ценность работы заключается в создании и реализации на ЭВМ эффективного подхода к определению частот и форм

свободных колебаний составных тонкостенных и массивных конструкций вращения сложной геометрии, создания программного обеспечения для решения и анализа рассматриваемых задач. Диссертация выполнена в рамках планов научных исследований, государственной и договорной тематики кафедры прикладной математики, Республиканской комплексной научно-технической программы "Материалоемкость", утвержденной постановлением Совета министров УССР от II.07.1986г. № 250. Некоторые результаты внедрены в практику инженерного проектирования на научно-производственном объединении "ОРИС" (г.Москва).

Созданное программное обеспечение может применяться при расчете частот и форм свободных колебаний широкого класса составных тонкостенных и массивных конструкций.

Апробация работы. Основные положения и отдельные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях: семинаре-совещании "Проблемы оптимизации в машиностроении" (Харьков, 1986 г.), на III Всесоюзном семинаре-совещании молодых ученых "Актуальные проблемы механики оболочек" (Казань, 1988 г.), Всесоюзной школе-семинаре "Программное обеспечение прочностных расчетов сложных машиностроительных конструкций" (Москва, 1989 г.), Школе молодых ученых "Численные методы механики сплошной среды" (Абакан, 1989 г.), конференции "Оптимальное проектирование неупругих элементов конструкций" (Тарту-Кяэрику, 1989 г.), XV научной конференции молодых ученых (Киев-Кийлов, 1990 г.), XVI научной конференции молодых ученых (Киев-Кийлов, 1991 г.), на III Всесоюзной конференции "Механика неоднородных структур" (Львов, 1991 г.).

Диссертационная работа в целом обсуждалась на научном семинаре кафедры прикладной математики ЛГУ, проблемном семинаре факультета прикладной математики.

Публикации. Основное содержание диссертационной работы отражено в 9 статьях и тезисах докладов конференций.

Объем работы. Диссертационная работа состоит из 163 страниц текста, в том числе 19 рисунков, 12 таблиц, и библиографический список, включающий 155 наименований литературных источников советских и зарубежных авторов.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении кратко анализируется современное состояние проблем расчета составных тонкостенных и массивных конструкций вращения, приводится обзор работ по теме диссертации, обосновывается важность и актуальность вопросов, составляющих предмет изучения. Изложены основные научные результаты, которые выносятся на защиту. Дана аннотация диссертации по главам.

В первой главе приведены разрешающие уравнения линейной теории оболочек типа Тимошенко и линейной теории упругости. Для них записаны вариационные постановки задач о свободных колебаниях для тел вращения. Построена разрешающая система комбинированной модели "упругое тело - оболочка типа Тимошенко". Пусть тело вращения занимает область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Тогда задача о свободных колебаниях предлагаемой комбинированной модели включает в себя следующие соотношения:

- соотношения теории оболочек типа Тимошенко, действующие в области $\Omega_1 = \{ \alpha_1, \varphi, \alpha_2: \alpha_1, \varphi \in \Omega_1; \alpha_2 \in \Omega_{1M}; 0 \leq \varphi < 2\pi; -\pi/2 \leq \alpha_2 \leq \pi/2 \}$,

$$D_1^{(1)} \sigma^{(1)} + \omega^2 M^{(1)} u^{(1)} = 0; \quad \alpha_1, \varphi \in \Omega_1; \quad (1)$$

$$\sigma^{(1)} = C^{(1)} \varepsilon^{(1)}; \quad \alpha_1, \varphi \in \Omega_1; \quad (2)$$

$$\varepsilon^{(1)} = D_2^{(1)} u^{(1)}; \quad \alpha_1, \varphi \in \Omega_1; \quad (3)$$

- соотношения трехмерной линейной теории упругости, действующие в части Ω_2 области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

$$\Omega_2 = \{ r, z, \varphi: r, z \in \Omega_{2M}, 0 \leq \varphi < 2\pi \};$$

$$D_1^{(2)} \sigma^{(2)} + \omega^2 M^{(2)} u^{(2)} = 0; \quad r, z, \varphi \in \Omega_2; \quad (4)$$

$$\sigma^{(2)} = C^{(2)} \varepsilon^{(2)}; \quad r, z, \varphi \in \Omega_2; \quad (5)$$

$$\varepsilon^{(2)} = D_2^{(2)} u^{(2)}; \quad r, z, \varphi \in \Omega_2; \quad (6)$$

- однородные граничные условия на частях границ Γ_1 , Γ_2

$$\sigma_{tt}^{(1)} = G_1^{(1)} \sigma^{(1)} = 0; \quad \alpha_1, \psi \in \Gamma_1^{(1)}; \quad (7)$$

$$u_i^{(1)} = G_2^{(1)} u^{(1)} = 0; \quad \alpha_1, \psi \in \Gamma_1^{(1)}; \quad (8)$$

$$\sigma_{\psi\psi}^{(2)} = G_2^{(2)} G_1^{(2)\top} \sigma^{(2)} = 0; \quad r, z, \psi \in \Gamma_2^{(1)}; \quad (9)$$

$$u_r^{(2)} = G_2^{(2)} u^{(2)} = 0; \quad r, z, \psi \in \Gamma_2^{(2)}; \quad (10)$$

- условия упругого сопряжения на поверхности сопряжения

$$\Gamma_2^{(2)} = \Omega_2 \cap \Omega_1^* = \{ \alpha_1, \psi \in \Gamma_1^{(1)}, -\frac{h}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{h}{2} \};$$

$$G_1^{(2)} u^{(2)} = -G_3^\top(\alpha_3) G_2^{(1)} u^{(1)}; \quad (11)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_3(\alpha_3) G_2^{(2)} G_1^{(2)\top} \sigma^{(2)} d\alpha_3 = G_1^{(1)} \sigma^{(1)}; \quad (12)$$

где

$$G_3^\top(\alpha_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Здесь через α_1, ψ обозначена система ортогональных координат области Ω_1 ; r, z, ψ система цилиндрических координат области Ω_2 (ψ - окружная координата); через h обозначена толщина области Ω_1^* , которая значительно меньше других размеров Ω_1^* ; ω - неизвестная круговая частота; $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}$ - матрицы дифференциальных операторов; $C^{(1)}, C^{(2)}, M^{(1)}, M^{(2)}$ - матрицы физических констант. Векторы $u^{(1)}, u^{(2)}, \epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}$ перемещений, деформаций, усилий-моментов и напряжений имеют вид

$$\begin{aligned}
 U^{(1)} &= (u_{11}^{(1)}, u_{22}^{(1)}, w^{(1)}, \gamma_{11}^{(1)}, \gamma_{22}^{(1)})^T; \quad U^{(2)} = (u_{11}^{(2)}, u_{\varphi\varphi}^{(2)}, u_{22}^{(2)})^T; \\
 E^{(1)} &= (\varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{22}^{(1)}, \varepsilon_{12}^{(1)}, \varepsilon_{13}^{(1)}, \varepsilon_{23}^{(1)}, \varkappa_{11}^{(1)}, \varkappa_{22}^{(1)}, \varkappa_{12}^{(1)})^T; \\
 E^{(2)} &= (\varepsilon_{11}^{(2)}, \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}, \varepsilon_{22}^{(2)}, 2\varepsilon_{1\varphi}^{(2)}, 2\varepsilon_{12}^{(2)}, 2\varepsilon_{\varphi 2}^{(2)})^T; \\
 \sigma^{(1)} &= (T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, S^{(1)}, Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, M_1^{(1)}, M_2^{(1)}, H^{(1)})^T; \\
 \sigma^{(2)} &= (\sigma_{11}^{(2)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}, \sigma_{22}^{(2)}, \sigma_{1\varphi}^{(2)}, \sigma_{12}^{(2)}, \sigma_{\varphi 2}^{(2)})^T.
 \end{aligned}$$

На границах $\Gamma_1 = \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_1^{(2)} \cup \Gamma_1^{(3)}$ и $\Gamma_2 = \Gamma_2^{(1)} \cup \Gamma_2^{(2)} \cup \Gamma_2^{(3)}$ областей Ω_1 и Ω_2 заданы соответственно триедры t_1, t_2, t_3 и ν_1, ν_2, ν_3 (t_3, t_1 - нормаль и тангенциальная нормаль к срединной поверхности $\alpha_3 = 0$); $G_1^{(1)}, G_2^{(1)}, G_1^{(2)}, G_2^{(2)}$ - матрицы направляющих косинусов триедров. На поверхности сопряжения $\Gamma_2^{(3)}$ между векторами задана зависимость $\nu_1 = -t_1, \nu_2 = -t_2, \nu_3 = t_3$.

Исходя из вариационных задач теории оболочек типа Тимошенко и теории упругости, записаны вариационная задача комбинированной модели

$$F(u) \rightarrow \min \quad \text{при условии} \quad \int_{\Omega} u^T M u d\Omega = 1, \quad (I3)$$

$$F(u) = \int_{\Omega_1} (D_2^{(1)} u^{(1)})^T E_0 C D_2^{(1)} u^{(1)} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} (D_1^{(2)} u^{(2)})^T C D_1^{(2)} u^{(2)} d\Omega_2$$

на множестве векторов $u^{(1)} \in [H^{(1)}(\Omega_1)]^5, u^{(2)} \in [H^{(2)}(\Omega_2)]^3$, удовлетворяющих соотношениям (8), (10), (11), а также вариационная задача комбинированной модели со штрафом

$$F_\theta(u_\theta) \rightarrow \min \quad \text{при условии} \quad \int_{\Omega} u^T M u d\Omega = 1, \quad (I4)$$

$$F_\theta(u_\theta) = F(u_\theta) + \frac{1}{\theta} \int_{\Gamma_2^{(3)}} (G_2^{(2)} u_\theta^{(2)} + G_3^T G_2^{(1)} u_\theta^{(1)})^T (G_2^{(2)} u_\theta^{(2)} + G_3^T G_2^{(1)} u_\theta^{(1)}) d\Gamma_2$$

на множестве векторов $u^{(1)} \in [H^{(1)}(\Omega_1)]^5, u^{(2)} \in [H^{(2)}(\Omega_2)]^3$, удовлетворяющих лишь условиям (8), (10).

Получены уравнения Эйлера функционалов (I3), (I4). Показано, что задача о свободных колебаниях эквивалентна вариационной зада-

че (I3) при дополнительных условиях на поверхности сопряжения, а также эквивалентна вариационной задаче (I4) при дополнительном условии стремления к нулю параметра штрафа Θ .

Рассмотрен частный случай задачи о свободных колебаниях массивного тела, сопряженного с цилиндрической оболочкой, в осесимметричной постановке. Сформулированы вариационные постановки комбинированной модели со штрафом

$$F_{\Theta}(u_{\Theta}) \rightarrow \min, u_{\Theta} \in V \text{ при } (Mu_{\Theta}, u_{\Theta}) = 1, \Theta \rightarrow 0, \Theta > 0, \quad (I5)$$

$$F_{\Theta}(u_{\Theta}) = (A_{\Theta}u_{\Theta}, u_{\Theta}) = (Au_{\Theta}, u_{\Theta}) + \frac{1}{\Theta} (A^{(3)}u_{\Theta}, u_{\Theta}),$$

$$(Au_{\Theta}, u_{\Theta}) = (A^{(4)}u_{\Theta}^{(4)}, u_{\Theta}^{(4)}) + (A^{(2)}u_{\Theta}^{(2)}, u_{\Theta}^{(2)}),$$

$$(Mu_{\Theta}, u_{\Theta}) = (M^{(4)}u_{\Theta}^{(4)}, u_{\Theta}^{(4)}) + (M^{(2)}u_{\Theta}^{(2)}, u_{\Theta}^{(2)}),$$

$$V = \{u_{\Theta} = (u_{\Theta}^{(4)}, u_{\Theta}^{(2)}): u_{\Theta}^{(4)} = (u_{\Theta}^{(4)}, w_{\Theta}^{(4)}, \gamma_{\Theta}^{(4)}), u_{\Theta}^{(2)} = (u_{\Theta}^{(2)}, u_{\Theta}^{(2)}),$$

$$u_{\Theta}^{(4)} \in [H^{(4)}(\Omega_1)]^3, u_{\Theta}^{(2)} \in [H^{(2)}(\Omega_2)]^2, u_{\gamma, \Theta}^{(2)} = 0,$$

$$u_{\gamma, \Theta}^{(2)} = 0', r, z \in \Gamma_2^{(2)}, u_{\Theta}^{(4)}(l) = w_{\Theta}^{(4)}(l) = \gamma_{\Theta}^{(4)}(l) = 0\};$$

$$\Omega_1 = \{\alpha_1: 0 \leq \alpha_1 \leq l\}, \Omega_2 = \{r_{\min} \leq r \leq r_{\max}, z\};$$

и без штрафа

$$F(u_*) \rightarrow \min, u_* \in V_*, (Mu_*, u_*) = 1, \quad (I6)$$

$$F(u_*) = (Au_*, u_*),$$

$$V_* = \{u_* = (u_*^{(4)}, u_*^{(2)}): u_*^{(4)} = (u_{\alpha_*}^{(4)}, w_*^{(4)}, \gamma_{\alpha_*}^{(4)}), u_*^{(2)} = (u_{\alpha_*}^{(2)}, u_{\beta_*}^{(2)}),$$

$$u_*^{(4)} \in [H^{(4)}(\Omega_1)]^3, u_*^{(2)} \in [H^{(2)}(\Omega_2)]^2, u_{\gamma, \alpha_*}^{(2)} = 0, u_{\gamma, \beta_*}^{(2)} = 0,$$

$$r, z \in \Gamma_2^{(2)}; u_{\alpha_*}^{(4)}(l) = w_*^{(4)}(l) = \gamma_{\alpha_*}^{(4)}(l) = 0, u_{\alpha_*}^{(2)} = u_{\alpha_*}^{(2)}(0) + \gamma_{\alpha_*}^{(2)}(0) d_3,$$

$$u_{\gamma, \beta_*}^{(2)} = w_*^{(4)}(0) \text{ на } \Gamma_2^{(2)}\}; \quad -h/2 \leq \alpha_3 \leq h/2.$$

В (I5)-(I6) под Ω_1 понимается срединная поверхность цилиндрической оболочки радиуса R , длины l . h - толщина оболочки, $A^{(4)}$, $A^{(2)}$ - матрицы дифференциальных операторов теории оболочек типа Тимошенко и теории упругости,

$\frac{1}{\theta} (A^\theta u, u)$ - штрафное слагаемое; M_1, M_2 - матрицы физических констант, граница $\Gamma_2^{(u)}$ прямолинейна. Обозначим через $\omega_\theta^2, \omega_*^2$ - минимальные значения функционалов $F_\theta(u_\theta), F(u_*)$.

Имеют место следующие теоремы.

Лемма. Операторы комбинированной математической модели A_θ и M симметричны

$$\begin{aligned} (A_\theta u, \tilde{u}) &= (u, A_\theta \tilde{u}), \quad \forall \tilde{u} \in V, \\ (Mu, \tilde{u}) &= (u, M\tilde{u}). \end{aligned}$$

Теорема I. Операторы комбинированной модели A_θ и M положительно определены

$$\begin{aligned} (A_\theta u, u) &\geq c_1^2 \|u\|_{0,\Omega}^2, \\ (Mu, u) &\geq c_2^2 \|u\|_{0,\Omega}^2, \end{aligned}$$

где

$$\|u\|_{0,\Omega}^2 = \int_{\Omega_2} (u_v^2 + u_z^2) d\Omega_2 + \int_0^L (u_1^2 + w^2 + y_1^2) d\alpha_1.$$

Теорема 2. Решение задачи о свободных колебаниях комбинированной модели со штрафом ω_θ^2 сходится к решению ω_*^2 комбинированной модели без штрафа

$$(\omega_*^2 - \omega_\theta^2) \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0$$

Теорема 3. Для любого k -го собственного числа оператора комбинированной модели со штрафом $\omega_{k\theta}^2$ имеет место неравенство

$$\omega_{k*}^2 \geq \omega_{k\theta}^2,$$

где ω_{k*}^2 - k -ое собственное число оператора комбинированной модели без штрафа.

Вторая глава посвящена разработке единого подхода к построению схемы МКЭ в рамках комбинированной модели для решения задач о свободных колебаниях составных тел вращения. Согласно МКЭ перемещения в теле представляются в виде ряда Фурье по полной системе тригонометрических функций вдоль окружной переменной. По другим переменным применяются кусочно-полиномиальные аппроксимации МКЭ.

Меридиональные сечения Ω_{1m} и Ω_{2m} областей Ω_1 и Ω_2 разбиваются соответственно на одномерные и двумерные квадратичные КЭ Ω_{1mi} и Ω_{2mi} . Искомые вектора перемещений на Ω_{1mi} и Ω_{2mi} .

имеют вид

$$u_i^{(1)} = \sum_{m=0}^L \Phi_m^{(1)} N^{(1)} q_{mi}^{(1)}, \quad (17)$$

$$u_i^{(2)} = \sum_{m=0}^L \Phi_m^{(2)} N^{(2)} q_{mi}^{(2)},$$

где $q_{mi}^{(1)}$, $q_{mi}^{(2)}$ - столбцы неизвестных узловых значений компонентов векторов $u_i^{(1)}$ и $u_i^{(2)}$; $\Phi_m^{(1)}$ и $\Phi_m^{(2)}$ - матрицы, составленные из тригонометрических функций, которые составляют на промежутке $[0, 2\pi]$ полную ортогональную систему функций; $N^{(1)}$, $N^{(2)}$ - блочно-диагональные матрицы аппроксимационных полиномов.

Благодаря введению условий упругого сопряжения (II), (I2), схема МКЭ комбинированной модели свободна от необходимости использования переходных элементов. Сопряжение между телом Ω_2 и оболочкой Ω_1 осуществляется путем стыковки конечных элементов Ω_{2mi} и Ω_{1mi} в узлах, геометрические координаты которых совпадают.

Для минимизации функционала со штрафом (I4) поверхность сопряжения $\Gamma_2^{(3)}$ разбивается на поверхностные КЭ, на которых вектор перемещений в узлах сопряжения представляется в виде

$$u^{(1)} = \Phi_m^{(1)} \tilde{q}_m^{(1)}, \quad (18)$$

$$u^{(2)} = \Phi_m^{(2)} N \tilde{q}_m^{(2)}.$$

Учитывая (18), штрафное слагаемое функционала (I4) представляется в виде квадратичной формы

$$\frac{1}{2} \tilde{q}_m^T K_m^{(3)} \tilde{q}_m,$$

где $K_m^{(3)}$ - матрица размерности $[14 \times 14]$, $\tilde{q}_m = (\tilde{q}_m^{(1)}, \tilde{q}_m^{(2)})^T$ - вектор узловых неизвестных на границе сопряжения.

Минимизируя функционал (I4) с учетом ортогональности базисных функций на промежутке $[0, 2\pi]$, приходим к L обобщенным проблемам на собственные значения

$$K_{\theta m} q_m - \omega_{\theta}^2 M_{\theta m} q_m = 0, \quad m=0, 1, \dots, L, \quad (19)$$

которые решаются методом итераций в подпространстве.

Здесь $K_{\theta m}$ и $M_{\theta m}$ - матрицы жесткости и масс, $q_m = (q_m^{(1)}, q_m^{(2)})^T$.

На тестовых примерах, имеющих аналитическое решение, проведено детальное исследование точности и сходимости построенной схемы. Приведено сравнение частот, полученных по теории оболочек

типа Тимошенко и линейной теории упругости с аналитическим решением; получены апостериорные оценки.

На примерах расчета сплошного цилиндра, сопряженного с полым цилиндром (рис.1) исследуется зависимость собственных частот $\lambda_k = \omega_k/2\pi$ от параметра штрафа ρ . Для этого же примера приведено сравнение решений, полученных по комбинированной модели со штрафом и по теории упругости λ_y (табл.1).

В третьей главе описаны основные характеристики программного комплекса СОВБ, ориентированного на решение задач о свободных колебаниях составных тел вращения и реализация их основных этапов на основе схем ПМКЭ. Приводятся некоторые характеристики и описываются возможности программных модулей. Все модули записаны на алгоритмическом языке Фортран. Работа комплекса организована в рамках операционной системы ОС для ЭВМ серии ЕС.

Для всех конструкций, приведенных в главах 2 и 3, объем входной информации сведен к минимуму и распределяется полностью инженерной документацией для рассматриваемых объектов.

Основные общие этапы вычислений на основе использования полуаналитического метода конечных элементов при решении рассмотренных задач представлены на структурной схеме программного комплекса СОВБ (рис.2).

В этой же главе рассмотрены задачи об определении частот и форм свободных колебаний сложных составных оболочек вращения, встречающихся в инженерной практике. Исследована зависимость решения от сгущения сетки КЭ.

Построенная комбинированная модель используется для расчета сложной конструкции вращения (рис.3), которая содержит одновременно массивные и тонкостенные фрагменты. В табл.2 приведены значения частотного параметра λ_k для различных способов закрепления массивного участка конструкции. Это решение получалось при разбиении данной конструкции на 28 двумерных и 27 одномерных квадратичных КЭ, система уравнений включает 605 степеней свободы. Общее время использования центрального процессора ЭВМ ЕС 1045 для получения решения задачи по комбинированной математической модели составило 11 минут времени работы центрального процессора.

В заключении сформулированы основные результаты и приведены некоторые выводы:

1. Исходя из соотношений линейной теории оболочек типа Тимо-

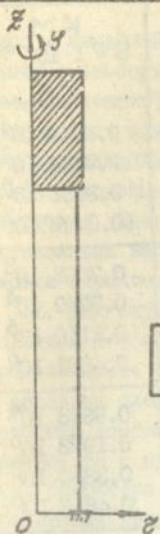


Рис. 1.

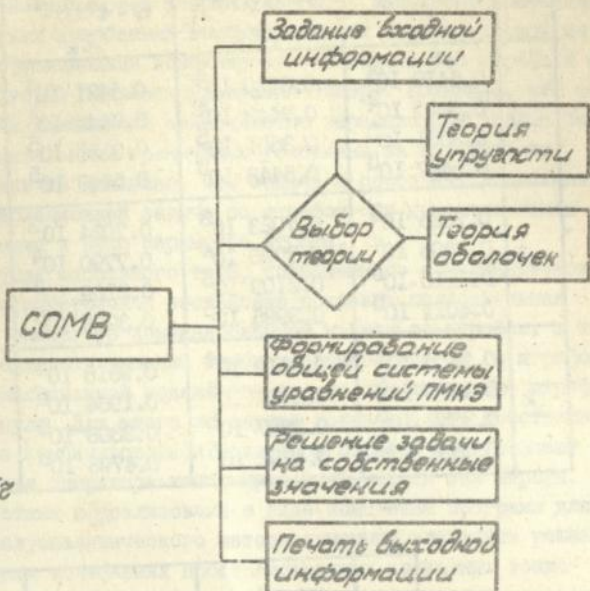


Рис. 2.

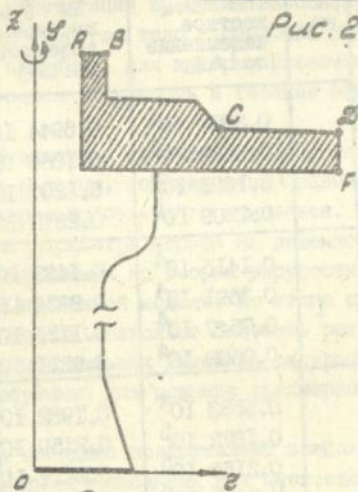


Рис. 3.

Табл. I

m	теория упругости λ_y	КМ $\Theta = 1 \cdot 10^{-14}$ λ_k	КМ $\Theta = 1 \cdot 10^{-16}$ λ_k	КМ $\Theta = 1 \cdot 10^{-18}$ λ_k
0	0.6419 10^4	0.6420 10^4	0.6421 10^4	0.6544 10^4
	0.7449 10^4	0.7443 10^4	0.7444 10^4	0.7444 10^4
	0.3551 10^5	0.3551 10^5	0.3551 10^5	0.3551 10^5
	0.5457 10^5	0.5448 10^5	0.5449 10^5	0.5449 10^5
I	0.7036 10^3	0.7023 10^3	0.7024 10^3	0.7092 10^3
	0.7805 10^4	0.7790 10^4	0.7790 10^4	0.7799 10^4
	0.2115 10^5	0.2109 10^5	0.2109 10^5	0.2110 10^5
	0.4011 10^5	0.3996 10^5	0.3996 10^5	0.4001 10^5
2	0.9655 10^4	0.9617 10^4	0.9618 10^4	0.9643 10^4
	0.1979 10^5	0.1964 10^5	0.1964 10^5	0.1973 10^5
	0.3342 10^5	0.3307 10^5	0.3308 10^5	0.3324 10^5
	0.4852 10^5	0.4792 10^5	0.4793 10^5	0.4818 10^5

Табл. 2

m	КМ λ_k жесткое зачемление по АВ	КМ λ_k жесткое зачемление по DE	КМ λ_k жесткое зачемление по CD
0	0.3994 10^4	0.5944 10^4	0.1011 10^5
	0.5222 10^4	0.1060 10^5	0.1208 10^5
	0.1006 10^5	0.1207 10^5	0.3158 10^5
	0.1209 10^5	0.2816 10^5	0.4536 10^5
I	0.1415 10^4	0.1433 10^4	0.1456 10^4
	0.3691 10^4	0.8929 10^4	0.9591 10^4
	0.7547 10^4	0.1120 10^5	0.2262 10^5
	0.9693 10^4	0.2221 10^5	0.2790 10^5
2	0.5583 10^4	0.1982 10^5	0.2159 10^5
	0.1872 10^5	0.2159 10^5	0.2416 10^5
	0.2159 10^5	0.2417 10^5	0.2919 10^5
	0.2352 10^5	0.2899 10^5	0.3420 10^5

шенко и линейной трехмерной теории упругости выполнена постановка задачи о свободных колебаниях комбинированной математической модели. Записаны функционалы комбинированной модели без штрафа и со штрафом, для которых получены уравнения Эйлера. Показано, что задача о свободных колебаниях эквивалентна вариационной задаче без штрафа с дополнительными граничными условиями на поверхности сопряжения. Здесь же показано, что задача о свободных колебаниях эквивалентна вариационной задаче со штрафом при дополнительном условии стремления к нулю параметра штрафа.

2. Для случая массивного тела, сопряженного с цилиндрической оболочкой в осесимметричной постановке доказана положительная определенность оператора комбинированной модели со штрафом, а также доказана сходимость решения комбинированной модели со штрафом к решению комбинированной модели без штрафа при параметре штрафа, стремящемся к нулю. Для этого же случая показано, что собственные числа оператора комбинированной модели со штрафом не превышают собственных чисел оператора комбинированной модели без штрафа.

3. Разработана и реализована в виде комплекса программ для ЕС ЭВМ схема полуаналитического метода конечных элементов решения задач о свободных колебаниях пространственных составных тонкостенных и массивных конструкций вращения на основе комбинированной математической модели "упругое тело - оболочка типа Тимошенко".

4. На тестовых примерах, для которых известны аналитические решения, показана хорошая сходимость и высокая эффективность схемы ЛМСЭ.

5. На модельной задаче о свободных колебаниях сплошного цилиндра, сопряженного с полым, подтверждена правильность функционирования разработанного программного комплекса, а также исследовано влияние величины параметра штрафа на решение. Приведено сравнение результатов, полученных по теории упругости, с результатами, полученными по комбинированной модели. Из этого сравнения следует, что комбинированная модель позволяет получить результаты требуемой точности при существенно меньших затратах ресурсов ЭВМ в сравнении с затратами, требуемыми для решения трехмерной задачи теории упругости.

6. Предложенная методика представляет возможность успешно решать задачи о свободных колебаниях для многосвязных оболочечных конструкций. Проведены расчеты частот и форм свободных колебаний

сложных инженерных приборов, а также исследована зависимость решения от сетки КЭ.

7. Расчет составной конструкции вращения, содержащей тонкостенные и массивные фрагменты демонстрирует эффективность применения комбинированной модели. Результаты расчета этой конструкции хорошо согласуются с инженерными оценками. Проведено исследование зависимости частот и форм свободных колебаний от способа закрепления массивного фрагмента.

В приложении представлены документы, подтверждающие внедрение научных разработок в инженерную практику.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ
ОПУБЛИКОВАНЫ В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ АВТОРА:

1. Дьяк И.И., Коссак О.С. Многокритериальная оптимизация термоупругих напряжений в объектах сложной геометрии // Тез. докл. конф. "Оптимальное проектирование неупругих элементов конструкций". - Тарту-Тэарик, 1989. - С. 26-27.
2. Дьяк И.И., Коссак О.С., Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Расчет и оптимизация термонапряжений в паянных силовых полупроводниковых приборах // Теоретическая электротехника. Межведомственный республиканский научно-технический сб. 1990. - № 48. - С. 24-29.
3. Копытко М.Ф., Коссак О.С. Исследование динамических характеристик составных оболочек методом конечных элементов // Актуальные проблемы механики оболочек: Тез. докл. III Всесоюз. совещания-семинара молодых ученых. - Казань: КИСИ, 1988. - С. 29.
4. Коссак О.С. Численное решение задач о свободных колебаниях составных оболочек вращения / Львов. ун-т. - Львов, 1989. - 23 с. - Деп. в УкрНИНТИ 1.03.89, № 644-Ук89.
5. Коссак О.С. Численный анализ условий сопряжения составных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью // Вест. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1990. - Вып. 33. - С. 31-37. На укр. яз.
6. Коссак О.С. Численное решение задач о свободных колебаниях осесимметричных тел на основе моделей теории оболочек типа Тимошенко и теории упругости // Тр. XV науч. конф. мол. ученых Ин-та механики АН УССР, Киев, 29 мая - 1 июня 1990. Ч. I / АН УССР. Ин-т механики. - Киев, 1990.

7. Коссак О.С., Щербатий М.В. Исследование динамических характеристик составных оболочек вращения полуаналитическим методом конечных элементов // Тез. докл. школы мол. ученых "Численные методы механики сплошной среды". - Абакан, 1999. - С. 81-82.
8. Савула Я.Г., Коссак О.С. Анализ собственных частот комбинированной модели // Вестник Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1991. - Вып. 35. - С. 90-95. На укр. яз.
9. Савула Я.Г., Коссак О.С., Щербатий М.В., Дыак И.И. Исследование свободных колебаний конструкций на основе комбинированной модели // Тез. докл. II Всесоюзной конференции "Механика неоднородных структур". - Львов, 1991. - С. 294.

К

Подп. к печати 10.12.91. Формат 60x84¹/16
Бумага типсграф. № 2. Офс. печ. Усл.печ. л 7
Усл.крас.-отт. 1. Учетно-изд. л 0,95
Тираж 100 экз. Зак. 164. Бесплатно

ЛПМ 290646 Львов-13, Мирз, 12

Участок оперативной печати опытного завода ЛПМ
Львов, ул. 1-го Мая, 286

466694

AB 25.369

~~2~~

~~2~~