БЕЛОРУССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В.И. ЛЕНИНА

на правах рукописи

НАСЫХОВА ЛЯЛЯ ГАЛЕЕВНА

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

01.01.02. - дифференциальные уравнения

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МИНСК, 1992

Работа выполнена на кафедре математического анализа Рязанского ордена "Знак Почета" государственного педагогического института им. С.А. Есенина

Научный руководитель - кандидат физико-математических наук, проф. ТЕРЕХИН М.Т.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор НОСОВ В.Р.

кандидат физико-математических наук, доцент АЛЬСЕВИЧ В.В.

Ведущая организация - Пермский политехнический институт.

Защита состоится 17 апреля 1992 года в 10 часов на заседании специализированного Совета К 056.03.10 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Белорусском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете имени В.И. Ленина по адресу: 220080, г. Минск, проспект Ф. Скорины, 4, главный корпус, ауд. 206.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета имени В.И. Ленина.

Автореферат разослан

Ученый секретарь специализированного Совета, доцент КОРЗЮК В.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, зависящих от параметра в течении последних лет получили широкое распространение и находят много приложений в различных вопросах механики, физики, в математической экологии и в теории автоколебаний.

В настоящее время как вся теория дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, так и теория уравнений нейтрального типа очень бурно развиваются. За последние годы появились в дополнении к известным монографиям Л.Э. Эльсгольца и С.Б. Норкина, А.Д. Мышкиса, А. Халаная, С.Б. Норкина, В.П. Рубаника, такие работы как книги Ю.А. Митропольского и Д.И. Мартынюка,"Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием", Дж. Хейла "Теория функционально-дифференциальных уравнений", С.Ф. Фещенко и др. "Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом", В.Б. Колмановского и В.Р. Носова "Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием".

Несмотря на достигнутые успехи в развитии, в целом теория дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, зависящих от параметра изучена неполностью. Трудность в исследовании состоит в том, что дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом интегрируются в замкнутой форме в редких случаях. Поэтому большой интерес представляет разработка различных методов качественного исследования дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа.

Вопросы существования периодических решений системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, зависящих от параметра являются основными в качественной теории. Однако достаточно общих методов, позволяющих решить проблему существования периодических решений для таких систем не существует.

Если в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений зависящих от параметра для определения периодических решений наиболее удобными являются методы малого параметра Ляпунова-Пуанкаре, то для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом применение методов малого параметра встречает трудности. В том случае, когда существование и аналитическая зависимость периодического решения от параметра заранее известны, то это решение может быть вычислено с любой степенью точности методом разложения его по степеням малого параметра. Однако аналитическая зависимость периодических решений от параметров для систем с запаздыванием и нейтрального типа имеет место не всегда, а если она есть, то доказать ее очень трудно. Значительно более общими являются методы последовательных приближений, разработанные и обоснованные С.Н. Шимановым. Но метод построения приближенных периодических решений для систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, зависящих от параметра применим только для систем с постоянными параметрами и постоянным отклонением аргумента.

Между тем на практике часто приходится иметь дело с процессами описываемыми сложными системами с переменным отклонением и переменными параметрами в которых требуется найти условия существования периодических решений при малых значениях параметра. Интенсивное развитие теорий, в которых изучаются такие системы, показывает важность и актуальность выяснения условий существования периодических решений систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, с параметром при малых значениях параметра.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. В диссертационной работе решается задача о нахождении достаточных условий существования периодических решений системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, зависящих от параметра близких к нулю при малом значении параметра.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ. Основными методами, применяемыми в работе для определения условий существования бифуркационного значения параметра системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, зависящих от параметра является метод неподвижной точки.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. Диссертация содержит результаты исследования систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, содержащих параметр. Получены новые достаточные условия существования периодических решений систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, зависящих от параметра. Существенным является то, что приведенные в работе теоремы сформулированы в терминах свойств собственных чисел матрицы $L(\mu)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ работы состоит в том, что полученные достаточные признаки существования периодических решений применимы к новым конкретным системам дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, зависящих от параметра, связанным с изучением многих практически важных задач. Все критерии сформулированы в сравнительно легко проверяемом виде, что может оказаться удобным при решении практических задач.

АПРОБАЦИЯ ДИССЕРТАЦИИ. Результаты диссертации докладывались на семинарах по качественной теории дифференциальных уравнений в Рязанском государственном педагогическом институте им. А. С. Есенина, в Московском государственном педагогическом университете им. В.И. Ленина, в Московском областном педагогическом институте им. Н.К. Крупской, в Московском институте электронного машиностроения, в Пермском политехническом институте, на межвузовских конференциях в Пермском политехническом институте, в Уфимском авиационном институте им. С. Орджоникидзе, в Башкирском государственном педагогическом институте,

ПУБЛИКАЦИИ. По результатам выполненых исследований опубликовано семь работ [I-7] .

СТРУКТУРА И ОБЬЕМ РАБОТЫ. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, включающего 63 названий, изложена на I02 страницах машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается краткий обзор литературы по вопросам, примыкающим к теме диссертации, излагается методика исследований и основные результаты.

Глава первая посвящена рассмотрению вопроса существования периодических решений системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом вида

$$\dot z(t)=[L(\mu)+F(t,z(t),z(t-\tau(t,z(t),\dot z(t),\mu)),\dot z(t-\nu(t,z(t),\dot z(t),\mu)),\mu)]z(t). \qquad (I.I)$$

В § I.I дается определение бифуркационного значения параметра системы (I.I) . Сформулируем его.

Определение. Вектор μ_0 назовем бифуркационным значением параметра μ системы (I.I) , если каждому $\delta>0$ соответствует такой вектор μ , который удовлетворяет неравенству $|\mu-\mu_0|$ и при котором система (I.I) имеет ненулевое ω -периодическое решение, удовлетворяющее неравенству $|z(t,\mu)|<\varepsilon$ при любом $t\in[0,\omega]$.

Под решением системы (I.I) понимается двустороннее решение.

Пусть $R>0$, $p>0$, $\omega>0$, $\beta>0$ некоторые постоянные числа.

Будем говорить, что матрица F , вектор-функции T , N удовлетворяют условию H , если

I/ матрица $F(t,z,\theta,u,\mu)$ на множестве

$$\mathcal{D}=\{(t,z,\theta,u,\mu): t\in[0,\omega],\ z\in E_n,\ \theta\in E_{j_1},\ u\in E_{j_2},\ \mu\in\Lambda,\ |z|\le R,\ |\theta|\le R,\ |u|\le p,\ |\mu-\mu_0|\le\beta\}$$

определена, непрерывна по совокупности аргументов, ω -периодична по t , удовлетворяет условию Липшица по переменным t , z , θ , u соответственно с постоянными K_1, K_2, K_3, K_4,

2/ вектор-функция $T:(t,z,v,\mu)\to T(t,z,v,\mu)$ на множестве

$$\mathcal{D}_1=\{(t,z,v,\mu): t\in[0,\omega],\ z\in E_n,\ v\in E_n,\ \mu\in\Lambda,\ |z|\le R,\ |v|\le p,\ |\mu-\mu_0|\le\beta\}$$

определена, непрерывна по совокупности аргументов, ω -периодична по t и удовлетворяет условию Липшица по переменным t , z , v с постоянными S_1 , S_2 , S_3 ,

3/ вектор-функция $N:(t,z,v,\mu)\to N(t,z,v,\mu)$ на множестве $\mathcal{D}_1$ определена, непрерывна по совокупности аргументов, ω -периодична по t и удовлетворяет условию Липшица по переменным t , z , v с постоянными τ_1 , τ_2 , τ_3 .

Символом $W(R,p)$ обозначим множество всех непрерывно-дифференцируемых на $\mathcal{J}$, ω -периодических по t вектор-функций $\varphi(t)$, для которых при любом t $|\varphi(t)|\le R$, $|\dot\varphi(t)|\le p$.

Одновременно с системой (I.I) рассмотрена система уравнений

$$\dot{x}(t)=[L(\mu)+\bar{F}_\varphi(t,\mu)]\,x(t), \tag{I.2}$$

где $\varphi(t)\in W(\ell,p)$, $\bar{F}_\varphi(t,\mu)=F\big(t,\varphi(t),\varphi(t-\tau(t,\varphi(t),\dot\varphi(t),\mu)),\dot\varphi(t-\nu(t,\varphi(t),\dot\varphi(t),\mu)),\mu\big)$.

Пусть $X_\varphi(t,\mu)$ фундаментальная матрица решения системы (I.2) и такая, что $X_\varphi(0,\mu)=E$.

Любое решение системы (I.2) определяется равенством

$$x_\varphi(t,\mu)=X_\varphi(t,\mu)\,\gamma_\varphi, \tag{I.3}$$

где γ_φ некоторый постоянный вектор.

В данном параграфе сформулирована общая теорема о существовании периодического решения, сводящая исследование проблемы существования периодического решения к исследованию проблемы существования неподвижной точки оператора, содержащего параметр.

Т е о р е м а I.I. Неподвижные точки оператора (I.3) во множестве $W(\ell,p)$ являются ω-периодическими решениями системы уравнений (I.I).

В доказательствах имеющихся в работе теорем о существовании периодических решений системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом используется следующая теорема.

Т е о р е м а I.2. Пусть 1/ W и Λ некоторые непустые замкнутые компактные множества некоторых линейных нормированных пространств, W выпуклое множество, 2/ на подмножестве множества $W\times\Lambda$ определен оператор $\mathcal{F}(x,\mu)$ такой, что для любого $x\in W$ существует единственное $\mu\in\Lambda$, удовлетворяющее включению $\mathcal{F}(x,\mu)\in W$, 3/ из того, что $x_n\to x_0$, $\mu_n\to\mu_0$, $y_n=\mathcal{F}(x_n,\mu_n)$, $y_n\to y_0$ следует, что $y_0=\mathcal{F}(x_0,\mu_0)$.
Тогда существуют $x^*\in W$, $\mu^*\in\Lambda$ удовлетворяющие равенству $x^*=\mathcal{F}(x^*,\mu^*)$.

В § I.2 на основании теоремы I.I при определенных условиях решается проблема существования периодических решений системы (I.I) в случае, когда матрица линейного приближения при критическом значении параметра $\mu=0$ имеет нулевые собственные числа.

Пусть матрица $L(\mu)$ имеет действительные собственные значения $\ell_{m+1}(\mu)$, $\ell_{m+2}(\mu)$, ..., $\ell_n(\mu)$ и с помощью неособого линейного преобразования матрица $L(\mu)$ представима в виде

$$L(\mu) = diag\,[L_m(\mu), \ell_{m+1}(\mu), \ldots, \ell_n(\mu)],$$

где $L_m(\mu)$ $(m \times m)$ матрица.

Теорема I.3. Пусть числа $R>0$ и $p>0$ таковы, что
I/ на множестве $^{\bullet}\mathcal{D}$ выполняется неравенство

$$\left|L(\mu)+\bar{F}_\psi(t,\mu)\right| \le \frac{\rho}{R}, \quad \frac{\rho}{R} = \bar{k} - const, \quad \bar{k} < \infty,$$

2/ матрица F, вектор-функции T, N удовлетворяют H_1,
3/ матрица $\bar{F}_\psi(t,\mu)$ имеет вид $\bar{F}_\psi(t,\mu) = [f_\psi^{ij}(t,\mu)]$, $(i,j=\overline{1,n})$,
где функции $f_\psi^{ij}(t,\mu)$, $(i,j=\overline{1,n})$ непрерывны по t, μ
и имеют непрерывные частные производные по t и μ в $\mathcal{D}$,
4/ $\lambda>0$, $\eta^2-4\lambda \ge 0$, где $\eta = 1-(k_3 p s_2 + k_4 + k_4 \tau_1 + k_4 \tau_2 p)R$,
$\lambda = k_4 \tau_3 d R$, $d = R(\bar{k}^2 + k_1 + k_2 p + k_3 p + k_3 p s_1 + k_3 p^2 s_2)$,
5/ в системе (I.I) $\ell_{m+1}(\mu), \ldots, \ell_n(\mu)$ непрерывные функции векторного аргумента $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_{n-m})$, определенные в Λ, и такие, что $\ell_{m+1}(0)=0$, $\ell_{m+2}(0)=0$, ..., $\ell_n(0)=0$, $\det L_m(\mu) \ne 0$ при $|\mu|=0$, $\ell_i(\mu) = a_{i1}\mu_1 + a_{i2}\mu_2 + \ldots + a_{i\,n-m}\mu_{n-m} + O_i(\mu)$, $O(\mu) = col(O_{m+1}(\mu), \ldots, O_n(\mu))$, $i=\overline{m+1,n}$, $O_i(\mu)$ -непрерывно-дифференцируемые по μ функции, $\lim\limits_{\|\mu\|\to 0} \frac{\|O(\mu)\|}{\|\mu\|} = 0$
6/ матрица $B=[a_{ij}]$, $(i=\overline{m+1,n}, j=\overline{1,n-m})$ неособенная.

Тогда $\mu_0 = 0$ бифуркационное значение параметра системы (I.I)

В § I.3 рассмотрен вопрос существования периодических решений системы (I.I) в случае, когда матрица линейного приближения $L(\mu)$ при критическом значении параметра $\mu=0$ имеет комплексно-сопряженные собственные числа.

В § I.4 обобщаются результаты § I.2, § I.3 на случай, когда собственные числа представлены в виде разложения по степеням, где показатели степени являются целые, нечетные, положительные числа отличные от единицы.

Во второй главе рассматривается автономная система дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом вида

$$\dot{z}(t) = [L(\mu) + F(z(t), z(\tau(z(t), \dot{z}(t), \mu)), \dot{z}(\gamma(z(t), \dot{z}(t), \mu)), \mu)]\, z(t) \qquad (2.I)$$

Устанавливаются условия существования бифуркационого значения параметра системы (2.I). Рассматривается возможность применения операторов рассмотреных конструкций главы I к автономной системе дифференциальных уравнений (2.I)

В § 2.I рассматривается вопрос существования бифуркационного значения параметра системы (2.I) в случае, когда матрица $L(\mu)$ линейного приближения при критическом значении параметра $\mu = 0$ имеет пару комплексно-сопряженных собственных чисел.

В § 2.2 получены условия существования бифуркационного значения параметра системы (2.I) в случае, когда матрица $L(\mu)$ линейного приближения при критическом значении параметра $\mu=0$ имеет два комплексно-сопряженных и $(p-2)$ нулевых собственных числа.

В § 2.3 установлены условия существования бифуркационного значения параметра μ системы (2.I) в случае, когда матрица линейного приближения $L(\mu)$ при критическом значении параметра $\mu=0$ имеет $2p$ комплексно-сопряженных и $(m-2p)$ нулевых собственных числа.

В главе III установлены достаточные условия существования бифуркационного значения параметра μ системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом вида

$$\dot{z}(t)=A(\mu)z(t)+B(\mu)z(t-\tau)+F(t,z(t),z(t-\tau(t,z(t),\dot{z}(t),\mu)),\dot{z}(t-\nu(t,z(t),\dot{z}(t),\mu)),\mu)z(t) \qquad (3.I)$$

в случае, когда характеристическое уравнение имеет нулевые и комплексно-сопряженные собственные значения при $\mu=0$. Рассматривается возможность применения операторов рассмотренных конструкций главы I к системе (3.I).

В § 3.I построено решение системы (3.I). Хотя полученные результаты сходны с соответствующими результатами для обыкновенных дифференциальных уравнений, однако между ними имеется важное отличие: характеристическое уравнение для обыкновенных дифференциальных уравнений всегда имеет конечное число корней, а для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в общем случае характеристическое уравнение имеет бесконечное множество решений. Рассмотрены некоторые общие свойства решений системы (3.I)

В § 3.2 используется возможность применения операторов главы I к системе (3.I). Устанавливаются достаточные условия существования бифуркационного значения параметра системы (3.I) в случае, когда характеристическое уравнение

$$\det [A(\mu)+B(\mu)e^{-\ell(\mu)\tau}-E\ell(\mu)]=0$$

при критическом значении параметра $\mu = 0$ имеет нулевые, комплексно-сопряженные собственные значения.

Т е о р е м а 3.2. Пусть числа $R>0$, $\rho>0$ такие, что I/ на множестве $\mathcal{D}$ выполняется неравенство

$$|A(\mu)|+|B(\mu)|+|\bar{F}_{\varphi}(t,\mu)| \le \frac{\rho}{R}=K^*(K^*<\infty,\ K^*-const),$$

2/ матрица F, вектор-функции T, N удовлетворяют условию H, 3/ матрица $\bar{F}_{\varphi}(t,\mu)$ имеет вид $[f_{\varphi}^{ij}(t,\mu)]\ (i,j=\overline{1,n})$, где функции $f_{\varphi}^{ij}(t,\mu)$ непрерывны по t, μ и имеют частные производные по t, μ в $\mathcal{D}$, 4/ $\lambda>0$, $\eta^2-4\lambda\ge 0$, где $\eta=1-(K_3\rho S_3+K_4+K_4\tau_1+K_4\tau_2\rho)R$, $\lambda=K_4\tau_3 dR$,

$d=R((K^*)^2+K_1+K_2\rho+K_3\rho+K_3\rho S_1+K_3\rho^2 S_2)$,

5/ $\ell_1(\mu),\ldots,\ell_n(\mu)$ различные непрерывные функции векторного аргумента $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_{n-m})$, определенные в Λ такие, что

$$\ell_1(0)\ne 0,\ \ldots,\ \ell_m(0)\ne 0,\ \ell_{m+1}(0)=0,\ \ldots,\ \ell_n(0)=0,$$

$$\ell_i(\mu)=a_{i1}\mu_1+a_{i2}\mu_2+\ldots+a_{i\,n-m}\mu_{n-m}+O_i(\mu),\ (i=\overline{m+1,n}),$$

$$O(\mu)=col(O_{m+1}(\mu),O_{m+2}(\mu),\ldots,O_n(\mu)),$$

$$\lim_{\|\mu\|\to 0}\frac{\|O(\mu)\|}{\|\mu\|}=0$$

$O(\mu)$ - непрерывно-дифференцируемая по μ вектор-функция,
6/ матрица $B=[a_{ij}],\ (i=\overline{m+1,n};\ j=\overline{1,n-m})$ неособенная,
7/ матрица $\tilde{A}=[\tilde{A}_{ij}^{m}],\ (i,j=\overline{m+1,n})$ неособенная.

Тогда $\mu_0=0$ бифуркационное значение параметра μ системы (3.I).

НА ЗАЩИТУ ВЫНОСЯТСЯ СЛЕДУЮЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

- Получены достаточные условия существования периодических решений системы (I.I) в случае, когда матрица $L(\mu)$ линейного приближения при критическом значении параметра $\mu = 0$ имеет нулевые, комплексно-сопряженные собственные значения.

- Получены достаточные условия существования бифуркационного значения параметра автономной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (2.I) в случае, когда матрица $L(\mu)$ линейного приближения при критическом значении параметра $\mu = 0$ имеет пару комплексно-сопряженных и $(p-2)$ нулевых собственных числа, $2p$ комплексно-сопряженных и $(m-2p)$ нулевых собственных числа.

- Установлены условия существования периодических решений системы (3.I) в случае, когда характеристическое уравнение при критическом значении параметра $\mu = 0$ имеет $2p$ комплексно-сопряженных и $(n-m)$ нулевых собственных числа.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Насыхова Л.Г. Существование бифуркационного значения параметра системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. // Рязан. гос. пед. ин-т. - Рязань, 1986.-10с.- Деп. в ВИНИТИ, № 1945 - В 86.

2. Насыхова Л.Г. Существование периодических решений системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, с параметром. // Рязан. гос. пед. ин-т. -Рязань, 1986. - Деп. в ВИНИТИ, № 2201 - В 86.

3. Насыхова Л.Г. К вопросу о бифуркации системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. // Рязан. гос. пед. ин-т. - Рязань, 1986. - Деп. в ВИНИТИ, № 1544 - В 86.

4. Насыхова Л.Г. О периодических решениях системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, зависящих от параметра. // Дифференциальные и интегральные уравнения: межвузовский сборник. - Горький, 1986. - С. 94-95.

5. Насыхова Л.Г. О существовании ненулевых периодических решениях системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. // Башкирский гос. пед ин-т. - Уфа, 1987. - Деп. в ВИНИТИ, № 3540- В 87.

6. Насыхова Л.Г. Бифуркация периодических решений системы

дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. // Всесоюзный симпозиум по теории приближенных функций. - Уфа, 1987.

7. Насыхова Л.Г. Бифуркация периодических решений системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. // Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения. Тезисы докладов IУ Уральской Региональной конференции. - Уфа, 1989.- С. 135.

НАСЫХОВА ЛЯЛЯ ГАЛЕЕВНА

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 21.02.92		Формат бумаги 60х84 I/16
Печать офсетная	Объём 0,75 п.л.	Заказ № 451
Тираж I00		Бесплатно

Ротапринт Рязанского ордена "Знак Почета" государственного педагогического института имени С.А. Есенина

390000, г. Рязань, ул. Свободы, 46