АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ТЕПЛИНСКИЙ Юрий Владимирович

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СЧЕТНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических
наук

Киев - 1992

Работа выполнена в Институте математики АН Украины и в Каменец-Подольском государственном педагогическом институте им. В.П.Затонского.

Научный консультант - доктор физико-математических наук, чл.-кор. АН Украины, профессор САМОЙЛЕНКО А.М.

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук, профессор ГРЕБЕНИКОВ Е.А.

доктор физико-математических наук, профессор ПЕРЕСТЮК Н.А.

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник КУЛИК В.Л.

Ведущая организация - Одесский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. И.И.Мечникова.

Защита состоится 20 октября 1992 г. в 15 час. на заседании специализированного совета Д 016.50.02 при Институте математики АН Украины по адресу:

252601 Киев 4, ГСП, ул. Репина, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан 11 сентября 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
доктор физико-математических
наук Лучка А.Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследований. Диссертация посвящена исследованию колебательных решений счетных систем дифференциальных уравнений. Круг вопросов, изложенных в ней, охватывает также теорию колебаний счетных систем с импульсным воздействием. Основное внимание в работе уделено проблемам существования, свойствам устойчивости и гладкости инвариантных торов линейных и нелинейных систем уравнений. Рассмотрена задача о приводимости для случая периодических, квазипериодических и почти-периодических систем, а также приведены результаты, связанные с отысканием периодических решений рассматриваемых систем уравнений.

Цель работы. Настоящая диссертация преследует следующие цели:

построить теорию инвариантных тороидальных многообразий линейных, квазилинейных и нелинейных счетных систем дифференциальных уравнений, включая системы с импульсным воздействием;

- разработать теорию приводимости линейных счетных систем, редуцируя ее к теории конечномерных систем растущей размерности;
- исследовать проблему существования периодических решений счетных систем с импульсным воздействием.

Актуальность темы. В последнее время для отыскания и исследования поведения колебательных решений дифференциальных систем широко используются методы теории инвариантных тороидальных многообразий, истоки которой относятся к работам А.Пуанкаре и А. Данжуа. Вопросам существования таких многообразий, структурам траекторий на них самих и в их окрестностях посвящены работы В.И.Арнольда, Н.Н.Боголюбова, А.Н.Колмогорова, Ю.А.Митропольского, Ю.Мозера, Р.Секера, А.М.Самойленко, В.Л.Кулика и ряда других авторов.

Мощным аппаратом для приближенного построения движений, заполняющих инвариантные торы, являются асимптотические методы Крылова-Боголюбова-Митропольского. Разработке некоторых из этих методов послужили работы Е.А.Гребеникова и Ю.А.Рябова. Применительно к задачам нелинейной механики эффективным оказался метод возмущения инвариантных торов, предложенный А.М.Самойленко. Его развитие привело к созданию теории расширений динамических систем на компактном многообразии, завершенной в работах Ю.А.Митропольского, А.М.Самойленко и В.Л.Кулика.

В рассматриваемой теории отдельную ветвь составляют работы по проблеме приводимости систем линейных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. Это в первую очередь работы Л.Я.Андриановой, Э.Г.Белаги, А.Е.Гельмана, И.Н.Блинова, А.Н.Колмогорова, О.Б.Лыковой, Ю.А.Митропольского, А.М.Самойленко и И.З.Штокало. Приводимости почти-периодических систем посвящено значительно меньше работ (И.О.Парасюк, М.Г.Филиппов), и они решают проблему для довольно узких классов систем уравнений.

В последние десятилетия существенно возрос интерес к исследованию процессов, описываемых разрывными траекториями динамических систем. Это привело к созданию теории дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, разработке которой положили основу работы Н.Н.Боголюбова, А.М.Самойленко, А.Д.Мышкиса, Н.А.Перестюка.

Отмеченные выше разработки относятся к конечномерным системам дифференциальных уравнений. Многие задачи из области математики, физики, техники требуют рассмотрения процессов, описываемых счетными системами дифференциальных уравнений. Хотя счетные системы являются частью дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, они обладают целым рядом специфических свойств и требуют отдельного изучения. Теория счетных систем дифференциальных уравнений заложена в работах А.Н.Тихонова, К.П.Персидского, В.Х.Харасахала , О.А.Жаутыкова и К.Г.Валеева.

Разработке теории колебаний счетных систем посвящена и настоящая диссертация.

Научная новизна. При построении теории инвариантных тороидальных многообразий впервые указаны условия существования инвариантных торов линейных и нелинейных счетных систем в пространствах $\mathfrak{m}\times\mathcal{T}_m$ и $\mathfrak{m}\times\mathcal{T}_\infty$, где $\mathfrak{m}$ – пространство ограниченных числовых последовательностей, $\mathcal{T}_m$ и $\mathcal{T}_\infty$ – m – мерный и счетномерный торы, изучены свойства гладкости и устойчивости таких инвариантных торов, выяснены условия их представления пределом последовательности инвариантных торов урезанных систем.

При разработке теории приводимости линейных систем найдены новые условия приводимости периодической линейной счетной системы, предложена идея редукции приводимости линейной почти-периодической системы к приводимости линейных квазипериодических систем. Разработан процесс с ускоренной сходимостью итераций для решения линейных квазипериодических систем с неограниченным оператором в правой части. Даны новые условия расщепляемости линейной счетной системы общего вида.

При исследовании счетных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием даны условия приводимости линейных систем, доказаны теоремы существования интегральных множеств и инвариантных торов, обоснован алгоритм построения периодических решений систем стандартного вида.

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Практическая ценность работы определяется важностью проблем исследования колебаний в различных разделах естествознания. Предложенный в диссертации метод редукции рассматриваемых задач к конечномерному случаю позволил получить не только качественно новые теоретические результаты, расширяющие существующие представления об изучаемых задачах, но и создал основу для приближенного их решения, что чрезвычайно важно для приложений. Применение этого метода позволило построить конструктивные алгоритмы решения периодической задачи управления для счетных импульсных систем стандартного вида.

Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть применены при решении прикладных задач из различных областей прикладной математики, физики и техники, где приходится рассматривать системы с бесконечным числом степеней свободы.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на II республиканском симпозиуме по дифференциальным и интегральным уравнениям (г.Одесса, 1978г.) , республиканской научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения" (г.Одесса, 1987 г.) , на IX Всесоюзной школе по теории операторов в функциональных пространствах (г. Тернополь, 1984 г.) , на республиканских научных конференциях "Разрывные динамические системы" (г.Киев, 1989 г. ; г.Ивано-Франковск, 1990 г. ; г.Ужгород, 1991 г.), на Всесоюзной конференции по нелинейным проблемам дифференциальных уравнений и математической физики (г.Тернополь, 1989 г.) .

Кроме того, результаты диссертации в разное время докладывались на семинарах по обыкновенным дифференциальным уравнениям в Институте математики АН Украины, Институте математики и механики АН Казахстана, в Московском и Киевском университетах.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 27 научных статьях в центральных математических журналах и сборниках научных работ Института математики АН Украины и составили основу монографии, подготовленной к печати.

Структура диссертации. Работа, объем которой - 301 машинописная страница, состоит из введения, трех глав и списка литературы, включающего 154 наименования отечественных и зарубежных изданий.

Основное содержание диссертации.

Во введении приводится краткий обзор исследований, относящихся к рассматриваемым в диссертации задачам, дается краткое описание основных научных результатов. Обоснована актуальность темы диссертации.

Глава I. ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРЫ

Из названия главы видно, что основным объектом излагаемой в ней теории является инвариантное тороидальное многообразие счетной системы дифференциальных уравнений. Эта глава состоит из семи параграфов.

Первый параграф посвящен построению функции Грина системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \qquad (I)$$

где $\varphi \in R^m$, $x \in \mathfrak{m}$, $P(\varphi)$ - бесконечная матрица, $\mathfrak{m}$ - пространство ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|x\| = \|(x_1, x_2, \dots)\| = \sup_i \{|x_i|\}$, а также изучению свойств этой функции.

Положим $\|P(\varphi)\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |p_{ij}(\varphi)|$, где $P(\varphi) = [p_{ij}(\varphi)]_{i,j=1}^{\infty}$. Обозначим через C_φ множество бесконечных матриц $P(\varphi)$, для которых $\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \sup_\varphi |p_{ij}(\varphi)| < \infty$, а через E - единичную матрицу.

Пусть $\Omega_\tau^t(\varphi)$ - матрицант системы уравнений $\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x$, где $\varphi = \varphi_t(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi$ - решение первого уравнения системы (I).

Если существует такая матрица $C(\varphi) \in C_\varphi$ с непрерывными по φ элементами, что матричная функция

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)\, C(\varphi_\tau(\varphi)) & \text{при } \tau \le 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)\left[C(\varphi_\tau(\varphi)) - E\right] & \text{при } \tau > 0 \end{cases}$$

удовлетворяет оценке

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| G_0(\tau,\varphi) \| d\tau \le K = const < \infty ,$$

то эту функцию назовём функцией Грина системы уравнений (I).

Показано, что если система (I) имеет функцию Грина, то неоднородная система уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + c(\varphi) \qquad (2)$$

имеет семейство ограниченных решений, если только $P(\varphi) \in C_\varphi$, элементы $p_{ij}(\varphi)$ $(i,j = 1,2,\dots)$ матрицы $P(\varphi)$ непрерывны по φ и $\| c(\varphi) \| \le c^0 = const < \infty$.

Наряду с (I) рассмотрена система уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi,p), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi,p)x, \qquad (3)$$

зависящая от параметра $p \in [p_1, p_2] \subset R^1$.

Обозначим через $\omega(z)$ непрерывную неубывающую на $[0, p_2 - p_1]$ скалярную функцию, принимающую значение 0 при $z = 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть система (3) такова, что выполняются условия:

1. $\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi,p} | p_{sj}(\varphi,p) | \le p^0 = const < \infty \quad (s = 1,2,\dots)$
2. $\| a(\varphi,p) - a(\bar\varphi,\bar p) \| \le \alpha_1 \| \varphi - \bar\varphi \| + \alpha_2 \omega(|p - \bar p|)$,

   $\| P(\varphi,p) - P(\bar\varphi,\bar p) \| \le \beta_1 \| \varphi - \bar\varphi \| + \beta_2 \omega(|p - \bar p|)$

   при любых $\varphi, \bar\varphi \in R^m$ и $p, \bar p \in [p_1, p_2]$. Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - положительные постоянные.
3. При любых $p \in [p_1, p_2]$ и $\varphi \in R^m$ уравнение $\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t^p(\varphi), p)x$ имеет единственное решение, ограниченное на всей числовой оси.
4. Существует функция Грина $G_0(\tau,\varphi,p)$ системы (3), удовлетворяющая оценке

   $$\| G_t(\tau,\varphi,p) \| \le K \exp\{-\gamma |t - \tau|\}, \quad t,\tau \in R^1,$$

   где $\gamma > 0, K > 0$ - постоянные, не зависящие от τ, φ, p

Тогда функция Грина $G_0(\tau,\varphi,\rho)$ непрерывна по совокупности переменных φ, ρ.

О дифференцируемости функции Грина по параметру говорит следующий результат.

Теорема 2. Пусть система уравнений (3) такова, что выполняются условия I,3,4 теоремы I, матрица $P(\varphi,\rho)$ и функция $a(\varphi,\rho)$ непрерывно дифференцируемы по ρ, φ_i $(i=1,2,\dots,m)$, причём

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\max_{\varphi,\rho}\left|\frac{\partial p_{sj}(\varphi,\rho)}{\partial\varphi_i}\right|+\max_{\varphi,\rho}\left|\frac{\partial p_{sj}(\varphi,\rho)}{\partial\rho}\right|\right\}\le\rho_s;\quad \sum_{s=1}^{\infty}\rho_s<\infty.$$

Тогда функция Грина $G_0(\tau,\varphi,\rho)$ дифференцируема по параметру ρ, если только $\gamma>\alpha$, а α выбирается из условия

$$\left|\left\langle\frac{\partial a(\varphi,\rho)}{\partial\varphi}\eta,\eta\right\rangle\right|\le\alpha|\eta|^2,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - евклидово произведение, $\eta\in R^m$, $|\cdot|$ - модуль.

Рассмотрен класс экспоненциально-дихотомичных на R^1 систем вида (I) с матричным проектором, принадлежащим множеству C_φ. Следующая теорема приводит достаточные условия существования функции Грина систем уравнений этого класса.

Теорема 3. Пусть система уравнений (I) является э-дихотомичной с матричным проектором, $P(\varphi)\in C_\varphi$, функция $a(\varphi)$ и матрица $P(\varphi)$ удовлетворяют условию Липшица по φ. Тогда существует функция Грина $G_0(\tau,\varphi)$ системы (I), удовлетворяющая оценке

$$\|G_0(\tau,\varphi)\|\le K\exp\{-\gamma|\tau|\},\ \tau\in R^1, \qquad (*)$$

где K и γ - положительные постоянные, не зависящие от φ,τ.

Для э-дихотомичных систем с матричным проектором сформулированы аналоги теорем I и 2.

Параграфы 2,3 посвящены вопросам существования и свойствам гладкости инвариантного тора системы уравнений (2), у которой $a(\varphi)$, $P(\varphi)$ и $c(\varphi)$ -2π-периодичны по φ_i $(i=\overline{1,m})$.

Множество 2π - периодических по φ_i $(i=\overline{1,m})$ функций и матриц, допускающих ограниченные по норме $\|\cdot\|$ и непрерывные по координатам относительно φ производные по φ_i до z - го порядка включительно, обозначим через $C^z(\mathcal{T}_m)$. В нём выделим подмножество элементов, производные которых по φ_i до r - го порядка включительно удовлетворяют условию Липшица по φ. Обозначим это подмножество через $C^r_{Lip}(\mathcal{T}_m)$.

Функцию Грина системы (I) назовём функцией Грина задачи об инвариантных торах системы (2), если матрица $C(\varphi)$, входящая в выражение для $G_0(\tau,\varphi)$, принадлежит $C^0(\mathcal{T}_m) \cap C_\varphi$.

<u>Теорема 4.</u> Пусть система уравнений (2) такова, что :

I. $a(\varphi) \in C^0_{Lip}(\mathcal{T}_m)$, $P(\varphi) \in C_\varphi \cap C^0(\mathcal{T}_m)$, $c(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$.

2. Существует функция Грина задачи об инвариантных торах $G_0(\tau,\varphi)$. Тогда у системы (2) существует инвариантный тор $\mathcal{T}$: $x = u(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, где

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau,\varphi) c(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau. \tag{4}$$

Для случая, когда соответствующая (2) однородная система уравнений (I) является э-дихотомичной с матричным проектором, приведены условия, при которых система (2) имеет инвариантный тор $\mathcal{T}$, определённый функцией (4), удовлетворяющей по φ условию Гёльдера

$$\| u(\varphi) - u(\bar\varphi) \| \le K^0 \, \| \varphi - \bar\varphi \|^{\frac{\vartheta}{2(\vartheta+1)}},$$

где K^0 и ϑ - некоторые положительные постоянные.

О дифференцируемости инвариантного тора по φ_i $(i = \overline{1,m})$ говорит следующее утверждение, в котором постоянная γ взята из соотношения (*).

<u>Теорема 5.</u> Пусть система уравнений (I) удовлетворяет условиям теоремы 3, причём $a(\varphi), P(\varphi), c(\varphi) \in C^1_{Lip}(\mathcal{T}_m)$.

Если ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |c_i(\varphi)|$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\partial c_i(\varphi)}{\partial \varphi_s} \right|$ равномерно сходятся для $s = \overline{1,m}$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max_{\varphi} \left| \frac{\partial p_{sj}(\varphi)}{\partial \varphi_i} \right| \le \rho_s = const, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \rho_s = \rho^* < \infty$$

и

$$\gamma > d = \max_{\varphi} \max_{\|\eta\|=1} \left\| \frac{\partial a(\varphi)}{\partial \varphi} \eta \right\|, \; \eta \in R^m,$$

то инвариантный тор системы (2) дифференцируем по φ_i $(i = \overline{1,m})$.

Для доказательства принадлежности инвариантного тора пространству $C^\ell(\mathcal{T}_m)$ воспользуемся методом укорочения системы уравнений (2).

Наряду с (2) рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_{sn}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_{si}(\varphi_t(\varphi))x_{in} + c_s(\varphi_t(\varphi)), \quad s=\overline{1,n}. \qquad (5)$$

Обозначим через $\overset{(n)}{\Omega}{}^t_\tau(\varphi)$ матрицант соответствующей однородной системы. Предположим, что система (5) имеет инвариантный тор $\mathcal{T}^{(n)}$: $\overset{(n)}{x} = \overset{(n)}{u}(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, где $\overset{(n)}{x} = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn})$. Важную роль играет следующий факт.

<u>Теорема 6.</u> Пусть система уравнений (2) такова, что

$a(\varphi) \in C^0_{Lip}(\mathcal{T}_m)$; $P(\varphi), c(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ и справедливо соотношение

$\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \max\limits_{\varphi} |p_{sj}(\varphi)| \leq K\varepsilon(n), (s=1,2,\dots)$, где $K = \mathrm{const} < \infty$, $\varepsilon(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда, если $\|\overset{(n)}{\Omega}{}^0_\tau(\varphi)\| \leq N\exp\{\gamma\tau\}$, где $\tau \leq 0$, N, γ - положительные постоянные, не зависящие от n и φ, то система уравнений (2) имеет инвариантный тор $\mathcal{T}$: $x = u(\varphi)$, где $u_j(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} \overset{(n)}{u}_j(\varphi)$ $(j=1,2,\dots)$ равномерно по $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Утверждение, доказанное в теореме 6, даёт возможность сформулировать следующую теорему.

<u>Теорема 7.</u> Пусть для системы уравнений (2) выполнены условия теоремы 6, причем $a(\varphi), P(\varphi), c(\varphi) \in C^l_{Lip}(\mathcal{T}_m)$. Тогда если

$$\frac{\gamma}{l} > d = \max_{\varphi\in\mathcal{T}_m} \max_{\|\eta\|=1} \left\| \frac{\partial a(\varphi)}{\partial\varphi}\eta \right\|, \quad \eta \in R^m,$$

то инвариантный тор системы (2) принадлежит пространству $C^l(\mathcal{T}_m)$.

Тот же подход даёт возможность для системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi,\rho)x + c(\varphi,\rho),$$

зависящей от параметра ρ, доказать теорему о принадлежности её инвариантного тора пространству $C^1_{Lip}(\rho)$.

В параграфе 4 рассмотрена система уравнений вида (2), в которой $x, \varphi \in \mathfrak{M}$. Обозначим эту систему через (2^0).

Говорят, что функция $f(\varphi)$ удовлетворяет усиленным условиям

Коши-Липшица по φ с коэффициентом $\varepsilon(m)$, если

$$\|f(\varphi_1,\ldots,\varphi_m,\varphi'_{m+1},\varphi'_{m+2},\ldots)-f(\varphi_1,\ldots,\varphi_m,\varphi''_{m+1},\varphi''_{m+2},\ldots)\|\le$$
$$\le\varepsilon(m)\sup\{|\varphi'_{m+1}-\varphi''_{m+1}|,|\varphi'_{m+2}-\varphi''_{m+2}|,\ldots\},$$

где $\varepsilon(m)\to 0$ при $m\to\infty$.

В множестве $C^{\circ}_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$ выделим подмножество элементов, удовлетворяющих по φ усиленным условиям Коши-Липшица, и обозначим его через $\hat{C}^{\circ}_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$.

Систему (2°) можно укорачивать по x, по φ, по x и φ одновременно.

В четвёртом параграфе рассмотрены все эти возможности. Урезая систему уравнений (2°) по x до n - го порядка и по φ до m - го порядка, получаем конечномерную систему

$$\frac{d\overset{(m)}{\varphi}}{dt}=\overset{(m)}{a}(\overset{(m)}{\varphi}),\quad \frac{d\overset{(n)}{x}}{dt}=\overset{(n)}{P}(\overset{(m)}{\varphi})\overset{(n)}{x}+\overset{(n)}{c}(\overset{(m)}{\varphi}),\tag{6}$$

где $\overset{(m)}{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m,0,0,\ldots)$, $\overset{(m)}{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_m)$, $\overset{(n)}{c}=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$, $\overset{(n)}{P}(\varphi)=[p_{ij}(\varphi)]_{i,j=1}^{n}$. Обозначим матрицант соответствующей однородной системы через $\hat{\hat{\Omega}}{}^{t}_{\tau}(\overset{(m)}{\varphi})_n$, а инвариантный тор системы (6) через $\hat{\hat{\mathcal{T}}}: h=\hat{\hat{u}}_n(\overset{(m)}{\varphi}),\ \overset{(m)}{\varphi}\in\mathcal{T}_m$.

Основной результат этого параграфа сформулируем в виде следующей теоремы.

<u>Теорема 8.</u> Пусть система уравнений (2°) удовлетворяет условиям:

1. $a(\varphi), P(\varphi), c(\varphi)\in\hat{C}^{\circ}_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$, причём $a(\varphi)$ - с коэффициентом $\alpha(m)$.
2. $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\sup\limits_{\varphi}|p_{sj}(\varphi)|\le K\delta(n)$ $(s=1,2,\ldots)$, где $K=const<\infty$, $\delta(n)\to 0$ при $n\to\infty$.
3. $\|\hat{\hat{\Omega}}{}^{0}_{\tau}(\overset{(m)}{\varphi})_n\|\le N\exp\{\gamma\tau\}$, $\tau\le 0$, где положительные постоянные N и γ не зависят от n, m, φ.
4. $\gamma>\alpha(0)$.

Тогда инвариантный тор $\mathcal{T}: x=u(\varphi)$, $\varphi\in\mathcal{T}_\infty$ системы (2°) представим в виде повторного предела

$$u(\varphi)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\hat{u}_n^{(m)}(\varphi),$$

в котором внешний предел понимается в сильном, а внутренний - в слабом смысле, причём $u(\varphi)\in\hat{C}^0_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$.

В случае, если $a(\varphi)=\omega=(\omega_1,\omega_2,\dots)\in m$ есть частотный базис почти-периодической функции, доказанная теорема даёт представление для инвариантного тора системы уравнений с почти-периодическими коэффициентами.

В этом же параграфе рассмотрена система уравнений вида (2°), в которой правые части зависят от параметра p. Приведены условия, при которых инвариантный тор этой системы непрерывен по совокупности переменных φ, p.

В пятом параграфе рассмотрена счётная последовательность систем уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi),\quad \frac{dx}{dt}=P_1^{(k)}(\varphi)x+c^{(k)}(\varphi)\quad (k=1,2,\dots),\qquad (7)$$

правые части которых при любом натуральном k удовлетворяют условию I теоремы 4. Приведены достаточные условия, при которых последовательность инвариантных торов систем (7) сходится и определяет инвариантный тор системы уравнений (2). При этом порядок системы (7) не играет роли, а значит, каждую из этих систем можно брать конечномерной, соответствующей какому-нибудь способу укорочения, лишь бы не нарушались эти достаточные условия.

Шестой параграф посвящён рассмотрению вопроса существования инвариантных торов нелинейных счётных систем вида

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi,h,\mu),\quad \frac{dh}{dt}=P(\varphi,h,\mu)h+c(\varphi,\mu),\qquad (8)$$

где $\varphi\in R^m$, $h\in m$; $a(\varphi,h,\mu)$, $P(\varphi,h,\mu)$, $c(\varphi,\mu)$ - 2π-периодичны по φ_i $(i=\overline{1,m})$, $\mu\in(0,\mu_0]$ - положительный параметр, $c(\varphi,0)\equiv 0$.

Прэдполагается, что в области $\mathcal{D}: \|h\|\le d, \varphi\in\mathcal{T}_m, \mu\in(0,\mu_0]$

$$a(\varphi,h,\mu),\ P(\varphi,h,\mu),\ c(\varphi,\mu)\in C^\ell(\mathcal{T}_m) \quad \text{при} \quad h\in C^\ell(\mathcal{T}_m),$$

и справедливы неравенства

$$\|a(\varphi,h,\mu)-a(\bar\varphi,\bar h,\mu)\|\le\sigma\left(\|\varphi-\bar\varphi\|+\|h-\bar h\|\right),$$

$$\|P(\varphi,h,\mu)-P(\varphi,\bar h,\mu)\| \le \sigma\|h-\bar h\|, \quad \sigma=\mathrm{const}>0,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{\varphi,h} |p_{ij}(\varphi,h,\mu)| \le p^0=\mathrm{const}<\infty \quad (i=1,2,\dots),$$

где элементы $p_{ij}(\varphi,h,\mu)$ $(i,j=1,2,\dots)$ матрицы P непрерывны по φ.

Положим $\|f(\varphi)\|_0=\sup_{\varphi}\|f(\varphi)\|$, $\|f(\varphi)\|_\ell=\sup_{0\le s\le \ell}\|\mathcal{D}_\varphi^s f(\varphi)\|_0$, где $\mathcal{D}_\varphi^s$ – оператор дифференцирования по φ_i до s-го порядка. Итог рассуждениям, проведённым в шестом параграфе, подводит следующее утверждение.

Теорема 9. Пусть система уравнений (8) такова, что система

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi,0,0), \quad \frac{dh}{dt}=P(\varphi,0,0)h$$

имеет грубую функцию Грина, и при $h\in C^\ell(\mathcal{T}_m)$ справедливо неравенство

$$\max\{\|a(\varphi,h,\mu)-a(\varphi,0,0)\|_\ell, \|P(\varphi,h,\mu)-P(\varphi,0,0)\|_\ell, \|c(\varphi,\mu)\|_\ell\} \le \mathcal{L}_\ell(d,\mu_0),$$

где $\mathcal{L}_\ell(d,\mu_0)\to 0$ при $d\to 0$, $\mu_0\to 0$. Тогда существует такое $\tilde\mu\in(0,\mu_0]$, что при всех $\mu\in(0,\tilde\mu]$ система (8) имеет инвариантный тор $\mathcal{T}(\mu)$: $h=u(\varphi,\mu)\in C^{\ell-1}(\mathcal{T}_m)$, $\ell\ge 1$, причём $\|u(\varphi,\mu)\|\to 0$ при $\mu\to 0$.

Если правая часть уравнения для φ в системе (8) не зависит от h, то условие грубости функции Грина соответствующей системы можно ослабить. Например, для системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi), \quad \frac{dh}{dt}=P(\varphi)h+\mu c(\varphi,h), \tag{9}$$

у которой $a(\varphi)\in C^0_{Lip}(\mathcal{T}_m)$, $P(\varphi)\in C^0(\mathcal{T}_m)\cap C_\varphi$, справедливо утверждение:

пусть при $\varphi\in\mathcal{T}_m$, $\|h\|\le d$ функция $c(\varphi,h)$ липшицева по h, а при $\mu=0$ система (9) имеет функцию Грина задачи об инвариантных торах, удовлетворяющую неравенству (*). Тогда существует такое $\mu_0>0$, что для всех $\mu\in(0,\mu_0]$ система (9) имеет инвариантный тор $\mathcal{T}(\mu)$: $h=u(\varphi,\mu)$, $\varphi\in\mathcal{T}_m$, для которого $\lim_{\mu\to 0}\|u(\varphi,\mu)\|=0$.

В седьмом параграфе исследуется поведение траекторий в окрестности инвариантного тора соответствующей дифференциальной системы.

Функция Грина, о которой шла речь в предыдущем параграфе, имеет наиболее простой вид, когда матрицант соответствующей линейной системы удовлетворяет условию экспоненциального затухания. Это условие приводит к экспоненциальной устойчивости тривиального тора линейной системы и обеспечивает притяжимость её решений к этому тору. Здесь указаны условия, гарантирующие аналогичное поведение решений нелинейной счетной системы.

Для квазилинейной системы уравнений (9) имеет место теорема об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора следующего содержания.

Теорема I0. Пусть матрицант однородной системы, соответствующей системе уравнений (9), удовлетворяет неравенству

$$\|\Omega_0^t(\varphi)\| \leq K\exp\{-\gamma t\}, \ t\in R^+=[0,+\infty).$$

Тогда при достаточно малом μ траектория решения $h_t=h(h_0,t,\varphi,\mu)$, $h_0=h(h_0,0,\varphi,\mu)$ системы (9) притягивается при $t\to+\infty$ к траектории на её инвариантном торе $\mathcal{T}$: $h=u(\varphi,\mu)$, $\varphi\in\mathcal{T}_m$ по закону

$$\|h_t-u(\varphi_t(\varphi))\| \leq K_1\|h_0-u(\varphi,\mu)\|\exp\{-\gamma_1 t\}, \ t\geq 0,$$

где K_1 и γ_1 - положительные постоянные.

Далее рассмотрена система уравнений общего вида

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi,h), \ \frac{dh}{dt}=P(\varphi,h)h+c(\varphi), \tag{I0}$$

где $\varphi\in R^m$, $h\in\mathfrak{m}$; $a(\varphi,h), P(\varphi,h), c(\varphi)\in C^1(\mathcal{T}_m)$ при $h\in C^1(\mathcal{T}_m)$.

Положим

$$\|P(\varphi,h)\|_{\mathcal{D}}=\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{\varphi,h\in\mathcal{D}}|p_{ij}(\varphi,h)|; \ \mathcal{D}:\varphi\in\mathcal{T}_m, \|h\|\leq d.$$

Множество ограниченных по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ матриц, удовлетворяющих в $\mathcal{D}$ условию Липшица по φ,h, обозначим через $C_{\mathcal{D}}$.

Пусть $\mathcal{T}: h=u(\varphi)\in C^1_{Lip}(\mathcal{T}_m)$, $\varphi\in\mathcal{T}_m$ является инвариантным тором системы (I0), входящим в область $\mathcal{D}$ с некоторой ρ - окрестностью. Пусть $\psi=\psi_t(\psi_0)$, $\psi_0=\psi_0(\psi_0)$ - решение уравнения

$$\frac{d\psi}{dt}=a(\psi,u(\psi)), \ \psi_0\in\mathcal{T}_m.$$

Тогда $u=u(\psi_t(\psi_0))$ - траектория на торе $\mathcal{T}$. Решение системы (I0) запишем в виде $\varphi=\varphi_t(\varphi_0,h_0)$, $h=h_t(\varphi_0,h_0)$, где $\varphi_0(\varphi_0,h_0)=\varphi_0$, $h_0(\varphi_0,h_0)=h_0$. Будем говорить, что движение системы (10) в окрестности инвариантного тора $\mathcal{T}$ притягивается при $t\to+\infty$ к её движению на торе по экспоненциальному закону, если существуют такие положительные постоянные $\rho_0,\rho_1\in R^1$, что для любого решения $\{\varphi,h\}$ этой системы уравнений, удовлетворяющего условию

$$\min_{\varphi\in\mathcal{T}_m}\|\varphi_0-\varphi\|\le\rho_0,\quad \|h_0-u(\varphi_0)\|\le\rho_1,$$

существует такая траектория на торе $u(\psi_t(\psi_0))$, что

$$\|\varphi_t(\varphi_0,h_0)-\psi_t(\psi_0)\|+\|h_t(\varphi_0,h_0)-u(\psi_t(\psi_0))\|\le K\exp\{-\gamma t\},\ t\in R^+.$$

В предположении, что $a(\varphi,u(\varphi))\in C^1_{Lip}(\mathcal{T}_m)$, а функции $a(\varphi,h)$ и $P(\varphi,h)h$ дифференцируемы в смысле Фреше по h, причём производные $\frac{\partial a(\varphi,h)}{\partial h}$ и $\frac{\partial P(\varphi,h)h}{\partial h}$ принадлежат C_Φ, приведены достаточные условия экспоненциального притяжения движений системы (10) в окрестности её инвариантного тора к её движениям на торе.

Глава II. ПРИВОДИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.

В этой главе речь идёт о приводимости линейных счетных систем дифференциальных уравнений, то есть о возможности отображения траекторий их решений на траектории некоторых систем более простой структуры. Здесь приведены достаточные условия приводимости в смысле Ляпунова периодической счётной системы, исследована возможность редукции задачи о приводимости почти-периодической системы уравнений к случаю системы с квазипериодическими коэффициентами, построен процесс с ускоренной сходимостью итераций для приводимости квазипериодической счетной системы с неограниченной правой частью и рассмотрена задача о расщепляемости счётной системы уравнений блочной структуры. Вторая глава состоит из пяти параграфов (§§ 8 - 12).

В восьмом параграфе вводится понятие фундаментальной матрицы счетной системы, определяется матрица Ляпунова и обсуждаются вопросы, связанные с теоремами Еругина и Флоке-Ляпунова для счетных систем.

Девятый параграф решение проблемы приводимости уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad (11)$$

где $x \in m$, $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^{\infty}$ - бесконечная матрица, связывает с задачей о приводимости конечномерных систем, получаемых из (11) путём укорочения.

Уравнение (11) назовём приводимым на R^1, если существует такая бесконечная обратимая матрица $\Phi(t)$ и такое уравнение

$$\frac{dy}{dt} = Py; \; y \in m, \; \|P\| < \infty \qquad (12)$$

с постоянной матрицей P, что любое решение $x = x(t)$ уравнения (11) связано с решением $y = y(t)$ уравнения (12) соотношением $x(t) = \Phi(t)y(t)$ для всех $t \in R^1$.

Последовательность матриц $\overset{(n)}{C} = [\overset{(n)}{c}_{ij}(t)]_{i,j=1}^{\infty}$ назовём правильной, если при каждом $t \in R^1$ она:

1. Ограничена в совокупности.
2. Слабо сходится к некоторой матрице $C(t)$.
3. Ряды $\sum_{j=1}^{\infty} |\overset{(n)}{c}_{ij}(t)|$ $(i = 1, 2, \dots)$, сходятся равномерно по n.

Если условия 1 - 3 выполняются равномерно по $t \in R^1$, то последовательность $\overset{(n)}{C}$ назовём равномерно правильной на R^1. Если условие 3 выполняется равномерно по i, то эту последовательность назовём усиленно правильной.

Наряду с (11) рассмотрим последовательность укороченных систем

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \overset{(n)}{A}(t)\overset{(n)}{x} \quad (n = 1, 2, \dots). \qquad (13)$$

Допустим, что при $n \geq N$ каждое из уравнений (13) приводимо к виду

$$\frac{d\overset{(n)}{y}}{dt} = \overset{(n)}{P}\overset{(n)}{y}, \qquad (14)$$

и $\overset{(n)}{\Phi}(t)$ - приводящие матрицы. Справедливо следующее общее утверждение.

<u>Теорема 11.</u> Пусть уравнение (11) таково, что

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \max_{t \in T_1} |a_{sj}(t)| \leq K_{T_1} \cdot \varepsilon(n), \; (s = 1, 2, \dots), \; K_{T_1} = const < \infty, \qquad (15)$$

где $\varepsilon(n) \to 0$ при $n \to \infty$, T_1 - произвольный конечный сегмент из R^1, последовательности $\overset{(n)}{\Phi}(t)$, $\overset{(n)}{\Phi}{}^{-1}(t)$ равномерно правильные, а последовательность $\overset{(n)}{P}$ правильная на T_1. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{\Phi}(t)=\Phi(t),\ \lim_{n\to\infty}\overset{(n)}{P}=P \tag{16}$$

в слабом смысле, и уравнение (II) приводится к виду (I2) с помощью предельной матрицы $\Phi(t)$.

Применив эту теорему для случая, когда $A(t)$ является периодической по t матрицей периода 2π, получаем следующий результат.

Теорема I2. Пусть элементы матрицы $A(t)$ непрерывны и периодичны по t с периодом 2π, причём

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \max_{t\in R^1} |a_{sj}(t)| \le K\,\varepsilon(n) \quad (s=1,2,\dots),$$

где $\varepsilon(n)\to 0$ при $n\to\infty$, а последовательность матриц $\overset{(n)}{\Phi}(t)$, приводящих уравнения (I3) к виду (I4), удовлетворяет условиям: $\overset{(n)}{\Phi}(t)$, $\overset{(n)}{\Phi}{}^{-1}(t)$ – равномерно правильные, и существует такое $t^*\in R^1$, что последовательности матриц $\overset{(n)}{\Phi}(t^*)$, $\frac{d}{dt}\overset{(n)}{\Phi}(t^*)$ усиленно правильные. Тогда справедливы соотношения (I6), и уравнение (II) приводится к виду (I2) с помощью матрицы $\Phi(t)$, периодической по t с периодом 4π, если только период приводящих матриц $\overset{(n)}{\Phi}(t)$ равен 4π $(n=1,2,\dots)$.

В десятом параграфе рассмотрена система уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi),\quad \frac{dx}{dt}=P(\varphi)x, \tag{17}$$

где $x\in R^n$, $P(\varphi)$ – $n\times n$ – мерная матрица, $\varphi\in\mathfrak{M}$, $a(\varphi)$ – счетномерная функция.

Частным случаем системы (I7) служит система линейных уравнений с почти-периодическими коэффициентами, являющаяся сужением системы (I7) при $a(\varphi)=\omega$, где $\omega=(\omega_1,\omega_2,\dots)$ – частотный базис почти-периодической функции.

Запишем укороченную по φ до m -го порядка систему уравнений, соответствующую системе (I7):

$$\frac{d\varphi_i}{dt}=a_i(\varphi_1,\dots,\varphi_m,0,0,\dots),\ \frac{dx}{dt}=P(\varphi_1,\dots,\varphi_m,0,0,\dots)x;\ i=\overline{1,m}. \tag{18}$$

Последняя система уравнений является системой с квазипериодическими коэффициентами, если $a(\varphi)=\omega$.

Сформулируем теперь основное утверждение параграфа.

<u>Теорема 13.</u> Пусть $a(\varphi)$, $P(\varphi)\in \hat{C}^{\circ}_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$ и выполняются условия:

1. При каждом натуральном m существует матрица $\overset{(m)}{\Phi}(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$, приводящая укороченную систему (18) к виду
$$\frac{d\varphi_i}{dt}=a_i(\varphi_1,\dots,\varphi_m,0,0,\dots),\ \frac{dy}{dt}=\overset{(m)}{B}y,\ i=\overline{1,m}.$$
2. Матрицы $\overset{(m)}{\Phi}(\overset{(m)}{\varphi})$, $\overset{(m)}{\Phi}{}^{-1}(\overset{(m)}{\varphi})\in\hat{C}^{\circ}_{Lip}(\mathcal{T}_m)$ с коэффициентами, не зависящими от m.
3. Последовательности $\overset{(m)}{\Phi}(\varphi)$, $\overset{(m)}{B}$, $\overset{(m)}{\Phi}{}^{-1}(\overset{(m)}{\varphi})$ сходятся по норме при $m\to\infty$, причём последняя - равномерно по $\overset{(m)}{\varphi}$.

Тогда система уравнений(17) приводима на всей числовой прямой.

Объединяя результаты о приводимости систем с квазипериодическими коэффициентами вида
$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega,\ \frac{dx}{dt}=Ax+\varepsilon P(\varphi)x \tag{19}$$
с теоремой о приводимости 13, удаётся сформулировать новый результат о приводимости систем вида (19) с почти-периодическими коэффициентами.

Если матрица A в (19) бесконечна и не ограничена по норме, то рассмотренный метод решения задачи о приводимости применить нельзя. Этому случаю посвящен одиннадцатый параграф. В нём при помощи метода с ускоренной сходимостью итераций строится приводящая матрица для системы уравнений
$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega,\ \frac{dx}{dt}=Ax+P(\varphi)x \tag{20}$$
в предположении, что норма матрицы $P(\varphi)$ достаточно мала.

Предполагается, что A - бесконечная постоянная действительная диагональная матрица, $x\in\mathfrak{m}$, $\varphi\in R^m$, $P(\varphi)$ - 2π - периодическая по φ_i $(i=\overline{1,m})$, аналитическая в области $|\Im m\,\varphi|=\max\{|\Im m\,\varphi_1|,\dots,|\Im m\,\varphi_m|\}\le\rho_0$ действительная при действительных φ бесконечная матрица такая, что
$$\|P(\varphi)\|_\varphi=\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}\sup_\varphi|p_{ij}(\varphi)|\le M_0,$$
где M_0 - достаточно малая постоянная.

Пусть $k=(k_1,\dots,k_m)$ - целочисленный вектор, $|k|=\sum_{i=1}^{m}|k_i|$, $(k,\omega)=\sum_{i=1}^{m}k_i\omega_i$, а M - пространство функций $z(t)=\{z_1(t),z_2(t),\dots\}$ таких, что $\sup_{i,t\in T}\{|z_i(t)|\}<\infty$, $\sup_{i,t\in T}\left\{\left|\frac{dz_i(t)}{dt}\right|\right\}<\infty$ на промежутке T (конечном или бесконечном).

Под решением системы (20) на T будем понимать функцию $x=x(t)$, превращающую уравнения (20) в тождества при $t\in T$ и принадлежащую M на любом конечном отрезке $T_1\subset T$.

В этом параграфе получен следующий результат.

Теорема I4. Пусть матрица $A=\operatorname{diag}\{a_1,a_2,\dots\}$ такова, что $\inf_{i\neq j}|a_i-a_j|=z>0$ и существуют такие числа $\varepsilon>0$ и $d>1$, что при всех $|k|\neq 0$ справедлива оценка $|(k,\omega)|\geqslant\varepsilon|k|^{-d}$. Тогда существует достаточно малая постоянная $M^\circ>0$ такая, что при любых $M_0\leq M^\circ$ всякое решение $x=x(t)$ системы уравнений (20) представимо в виде $x(t)=\Phi(\varphi_t(\varphi))z(t)$, где $z(t)\in M$ - некоторое решение системы

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega,\ \frac{dz}{dt}=A_0 z \tag{21}$$

с постоянной диагональной матрицей A_0, а t меняется так, что $|\mathrm{Im}\,\varphi_t|\leq\frac{\rho_0}{2}-\sigma>0$, где σ - достаточно малая положительная постоянная. При этом приводящая матрица $\Phi(\varphi)$ 2π- периодична по φ_i $(i=\overline{1,m})$, аналитична в области $|\mathrm{Im}\,\varphi|\leq\frac{\rho_0}{2}$ и действительна при действительных φ.

При действительных φ утверждение теоремы I4 справедливо для всех $t\in R^1$, при которых $x(t)\in M$. Если на отрезке T существует решение $z=z(t)\in M$ системы уравнений (21) с начальными значениями $t_0\in T$, $\Phi^{-1}(\varphi(t_0))x^\circ$, $x^\circ\in\mathfrak{M}$, то при условиях теоремы I4 на T существует и решение $x=x(t)\in M$ системы (20) с начальными значениями t_0, x°.

Двенадцатый параграф посвящён решению задачи расщепляемости системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi),\qquad \begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=P_1(\varphi)x+P_{12}(\varphi)y,\\ \frac{dy}{dt}&=P_{21}(\varphi)x+P_2(\varphi)y,\end{aligned} \tag{22}$$

где $x,y\in\mathfrak{M}$; $\varphi\in R^m$; бесконечные матрицы $P_1(\varphi),P_2(\varphi),P_{12}(\varphi),P_{21}(\varphi)\in C^\circ(\mathcal{T}_m)$ и ограничены по норме $\|P(\varphi)\|_{\mathcal{T}_m}=\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}\max_{\varphi\in\mathcal{T}_m}|P_{ij}(\varphi)|$. Не исключается случай, когда x или y принадлежат R^n.

Задача состоит в отыскании замены переменных

$$x = x_1 + U_1(\varphi) y_1, \quad y = y_1 + U_2(\varphi) x_1, \tag{23}$$

где $U_1(\varphi), U_2(\varphi)$ - бесконечные матрицы, приводящей систему (22) к виду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx_1}{dt} = \mathcal{P}_1(\varphi) x_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = \mathcal{P}_2(\varphi) y_1. \tag{24}$$

Множество матриц из $C^0(\mathcal{T}_m)$, ограниченных вместе со своими производными по φ_i $(i = \overline{1,m})$ по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_m}$, обозначим через $C^1_{\mathcal{T}_m}(\mathcal{T}_m)$. Запишем укороченную по x и y систему уравнений, соответствующую системе (22):

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \begin{aligned} \frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} &= \overset{(n)}{P}_1(\varphi)\overset{(n)}{x} + \overset{(n)}{P}_{12}(\varphi)\overset{(n)}{y}, \\ \frac{d\overset{(n)}{y}}{dt} &= \overset{(n)}{P}_{21}(\varphi)\overset{(n)}{x} + \overset{(n)}{P}_2(\varphi)\overset{(n)}{y}. \end{aligned} \tag{25}$$

Обозначим через $\Omega^t_\tau(P)$ матрицант системы уравнений $\frac{dx}{dt} = P(t)x$. Система (25) конечномерна, и если

$$\begin{aligned} \|\Omega^t_0(\overset{(n)}{P}_1)\| &\le K_1(n)\exp\{\gamma(n)t\}, \ t \le 0, \\ \|\Omega^0_t(\overset{(n)}{P}_2)\| &\le K_2(n)\exp\{\gamma(n)t\}, \ t \le 0, \end{aligned} \tag{26}$$

то при достаточно малых $P_{12}(\varphi)$ и $P_{21}(\varphi)$ она расщепляется, причём матрицы $\overset{(n)}{U}_1(\varphi)$ и $\overset{(n)}{U}_2(\varphi)$, осуществляющие нужную замену переменных, находятся из матричных уравнений Риккати вида

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{\partial \overset{(n)}{U}_1}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) &= \overset{(n)}{P}_1 \overset{(n)}{U}_1 - \overset{(n)}{U}_1 \overset{(n)}{P}_2 - \overset{(n)}{U}_1 \overset{(n)}{P}_{21} \overset{(n)}{U}_1 + \overset{(n)}{P}_{12}, \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial \overset{(n)}{U}_2}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) &= \overset{(n)}{P}_2 \overset{(n)}{U}_2 - \overset{(n)}{U}_2 \overset{(n)}{P}_1 - \overset{(n)}{U}_2 \overset{(n)}{P}_{12} \overset{(n)}{U}_2 + \overset{(n)}{P}_{21}. \end{aligned} \tag{27}$$

Доказано следующее утверждение.

<u>Теорема 15.</u> Пусть существуют такое $\varepsilon_0 = \mathrm{const} > 0$ и такая последовательность натуральных чисел $m_1 < m_2 < \dots < m_q < \dots$, что при $n = m_q$ $(q = 1, 2, \dots)$ справедливы оценки (26), и при $\max\{\|P_{12}\|_{\mathcal{T}_m}, \|P_{21}\|_{\mathcal{T}_m}\} \le \varepsilon_0$ решения $\overset{(m_q)}{U}_1$, $\overset{(m_q)}{U}_2$ уравнений Риккати (27) таковы, что $\|\overset{(m_q)}{U}_i(\varphi)\|_{\mathcal{T}_m} \le \ell = \mathrm{const} < 1$ $(i = 1, 2)$ и

$$\lim_{\nu \to \infty} U_i^{(m,\nu)}(\varphi) = U_i(\varphi) \in C^1_{\mathcal{T}_m}(\mathcal{T}_m)$$

по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_m}$. Тогда система уравнений (22) заменой (23) приводится к виду (24).

Для системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P_1(t)x + P_{12}(t)y\,, \quad \frac{dy}{dt} = P_{21}(t)x + P_2(t)y\,, \tag{28}$$

где $x, y \in m$; $P_1(t), P_2(t), P_{12}(t), P_{21}(t)$ - непрерывные по t бесконечные матрицы, ограниченные по норме $\|\cdot\|_{T_1}$,приведены условия расщепляемости, не связанные с укорочением. Здесь T_1 - произвольный конечный отрезок полуоси R^- . Будем предполагать, что матрицы $\Omega_\tau^t(P_1), \Omega_\tau^t(P_2)$ дифференцируемы по τ , и что при всех $t \in R^-$ $\Omega_0^t(P_1)$ и $\Omega_t^0(P_2)$ удовлетворяют неравенствам вида (26) с постоянными K и γ , а матрицы $P_{12}(t)$ и $P_{21}(t)$ таковы, что

$$\max\{\|P_{12}(t)\|, \|P_{21}(t)\|\} \le \frac{\alpha\gamma}{K^2}\,,$$

где $0 < \alpha = \mathrm{const} < \min\{1, \frac{1}{K^2}\}$.

Уравнения (27) для системы (28) имеют вид

$$\frac{dU_1(t)}{dt} = P_1(t)U_1(t) - U_1(t)P_2(t) - U_1(t)P_{21}(t)U_1(t) + P_{12}(t),$$

$$\frac{dU_2(t)}{dt} = P_2(t)U_2(t) - U_2(t)P_1(t) - U_2(t)P_{12}(t)U_2(t) + P_{21}(t). \tag{29}$$

Обозначим через G множество матриц $V(t)$, для которых при $t \in R^-$

$$\|V(t)\|_0 = \sup_{t \in R^-} \|V(t)\| \le \alpha.$$

Доказано, что интегральное уравнение

$$V_2(t) = \int_{-\infty}^{t} \{\Omega_s^0(P_2)P_{21}\Omega_0^s(P_1) - V_2\Omega_s^0(P_1)P_{12}\Omega_0^s(P_2)V_2\}\,ds \tag{30}$$

имеет единственное решение $V_2(t) \in G$. В таком случае матрица $U_2(t) = \Omega_0^t(P_2)V_2(t)\Omega_t^0(P_1)$ является решением второго уравнения (29), если только

$$\|V_2(t)\|_{T_1} < \infty\,; \qquad \left\|\frac{dV_2(t)}{dt}\right\|_{T_1} < \infty. \tag{31}$$

Первое уравнение (29) решается аналогично. Следующая теорема подводит итог двенадцатому параграфу.

Теорема 16. При сделанных предположениях система уравнений (28) расщепляема на полуоси R^-, если решение $V_2(t) \in G$ уравнения (30), а также решение $V_1(t) \in G$ аналогичного уравнения, соответствующего первому уравнению (29), удовлетворяют условию (31).

Глава III. ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ

Счётные системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием определяются аналогично конечномерным системам с импульсами. Принятые в теории конечномерных систем с импульсами терминология и обозначения естественно переносятся на счётные системы дифференциальных уравнений.

В настоящей главе рассмотрены задачи теории счётных систем с импульсным воздействием, связанные с задачами, близкими к рассмотренным в предыдущих главах. Третья глава состоит из четырёх параграфов (§§ 13 - 16).

В тринадцатом параграфе рассмотрена импульсная система уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,\ t \neq \tau_j;\ \Delta x\big|_{t=\tau_j} = B_j x(\tau_j - 0), \qquad (32)$$

где $x \in \mathfrak{m}$, $A(t) = [a_{ik}(t)]_{i,k=1}^{\infty}$ и $B_j = [b_{ik}^{(j)}]_{i,k=1}^{\infty}$ - бесконечные матрицы, $\ldots, \tau_{-2} < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ - возрастающая последовательность действительных чисел, $j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$.

Предполагается, что система (32) такова, что выполняются условия:

1°. Функции $a_{is}(t)$ $(i,s = 1,2,\ldots)$ непрерывны по t на отрезке $T = R^1$, причем на любом конечном сегменте $T_1 = [a,b] \subset T$

$$\|A(t)\|_{T_1} = \sup_i \sum_{s=1}^{\infty} \max_{t \in T_1} |a_{is}(t)| \leq \Psi_{[a,b]} = \text{const} < \infty.$$

2°. Матрицы B_j $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ постоянны и ограничены по норме $\|\cdot\|$, причём матрицы $B_j + E$ обратимы, и матрицы $(B_j + E)^{-1}$ также ограничены.

3°. Моменты импульсов разделены, то есть $\tau_{j+1} - \tau_j \geq c = \text{const} > 0$ $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$.

Тогда для любой точки (x_0, t_0) области $\mathfrak{D} = \mathfrak{m} \times T$ существует единственное решение $x = x(x_0, t)$, $x_0 = x(x_0, t_0)$ системы (32), продолжимое на весь отрезок T . Утверждение о существовании фундаментальной матрицы решений этой системы уравнений получено как следствие условий $1^\circ - 3^\circ$, при которых её матрицант $X(t, t_0)$ ограничен по норме $\|\cdot\|_{T_1}$.

Матрицу $L(t)$ назовём матрицей Ляпунова, если она :

1) кусочно непрерывна на отрезке T и в точках τ_j $(j = \dots, -1, 0, 1, \dots)$ имеет разрывы первого рода;
2) обратима на T и непрерывно дифференцируема на множестве $T \setminus \{\tau_j\}$, причём на каждом конечном сегменте $T_1 \subset T$

$$\max \left\{ \|L(t)\|_{T_1}, \|L^{-1}(t)\|_{T_1}, \left\|\frac{d}{dt} L(t)\right\|_{T_1} \right\} < \infty.$$

Будем говорить, что система (32) на отрезке T приводится в смысле Ляпунова к виду

$$\frac{dy}{dt} = Py, \quad y \in \mathfrak{m}, \tag{33}$$

где P - постоянная матрица, ограниченная по норме $\|\cdot\|$, если существует такая матрица Ляпунова $L(t)$, что любое решение $x = x(t)$ системы (32) представимо в виде $x(t) = L(t) y(t)$, $t \in T$, где $y = y(t)$ - решение уравнения (33).

Для импульсной системы (32) доказан аналог теоремы Еругина, а также указаны достаточные условия приводимости в случае ω - периодической матрицы $A(t)$. Приведём здесь эти условия. Для этого запишем укороченную систему, соответствующую системе уравнений (32) :

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \overset{(n)}{A}(t)\overset{(n)}{x}, \quad t \neq \tau_j; \quad \Delta \overset{(n)}{x}\Big|_{t=\tau_j} = \overset{(n)}{B_j}\,\overset{(n)}{x}(\tau_j - 0). \tag{34}$$

Хорошо известно, что при любом натуральном n конечномерная система (34) приводится с помощью матрицы Ляпунова $\overset{(n)}{L}(t)$ к виду

$$\frac{d\overset{(n)}{y}}{dt} = \overset{(n)}{P}\,\overset{(n)}{y}, \quad \overset{(n)}{y} \in R^n, \tag{35}$$

если существует такое натуральное число p , при котором $\tau_{j+p} = \tau_j + \omega$, $\overset{(n)}{B}_{j+p} = \overset{(n)}{B_j}$. Основной результат, полученный в этом параграфе, сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема I7. Пусть матрица $A(t)$ периодична по t с периодом ω и существует такое число p, что при всех целых j $B_{j+p}=B_j$, $\tau_{j+p}=\tau_j+\omega$. Если последовательности матриц $\overset{(n)}{L}(t)$, приводящих (34) к виду (35), а также обратных матриц $\overset{(n)^{-1}}{L}(t)$ равномерно правильные на каждом из отрезков $[t_0,\tau_1], (\tau_1,\tau_2], \ldots$, причём после - довательность $\overset{(n)}{P}$ правильная, то $\lim\limits_{n\to\infty}\overset{(n)}{P}=P$, $\lim\limits_{n\to\infty}\overset{(n)}{L}(t)=L(t)$ в слабом смысле, и система (32) приводится к виду (33) с помощью предельной матрицы $L(t)$.

В формулировке теоремы I7 без ограничения общности положено $T=[t_0,+\infty)$, а моментам τ_j присвоены номера $1,2,3,\ldots$.

Четырнадцатый параграф посвящён интеральным множествам и инвариантным торам импульсных счётных систем уравнений различного вида. Рассмотрена система

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi),\ \frac{dy}{dt}=A(\varphi)y+c(\varphi),\ t\neq t_j; \qquad (36)$$
$$\Delta y\big|_{t=t_j}=J_j(\varphi_{t_j}(\varphi))\quad (j=\ldots,-1,0,1,\ldots),$$

где $\varphi, y\in m$, матрица $A(\varphi)$ и функции $c(\varphi)$, $J_j(\varphi)$ при всех целых j принадлежат $C^0(\mathcal{T}_\infty)$; $a(\varphi)\in C^0_{Lip}(\mathcal{T}_\infty)$, $\varphi=\varphi_t(\varphi)$ - решение уравнения угловых переменных такое, что $\varphi_0(\varphi)=\varphi\in\mathcal{T}_\infty$.

Предполагается, что матрица A удовлетворяет условию

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sup_{\varphi\in\mathcal{T}_\infty}|a_{is}(\varphi)|\leq a^0=\mathrm{const}<\infty,$$

а импульсные моменты разделены.

Множество $\Gamma_0(t)$: $y=u(\varphi,t)$ назовём интегральным множеством системы (36), если $u(\varphi,t)$ - ограниченная по норме $\|\cdot\|$ функция, такая, что $y=u(\varphi_t(\varphi),t)$ является ограниченным решением этой системы уравнений. Доказано следующее утверждение.

Теорема I8. Пусть $\|J_j(\varphi)\|\leq J=\mathrm{const}<\infty$ при всех целых j и уравнение $\frac{dy}{dt}=A(\varphi_t(\varphi))y$ имеет функцию Грина задачи об инвариантных торах, удовлетворяющую неравенству вида (*). Тогда система уравнений (36) имеет интегральное множество Γ_0, определённое соотношением

$$u(\varphi,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G_0(\tau,\varphi)c(\varphi_\tau(\varphi))d\tau+\sum_{-\infty<t_j<\infty}G_0(t_j-t,\varphi)J_j(\varphi_{t_j-t}(\varphi)),$$

где $u(\varphi,t)$ - 2π - периодическая по φ_i $(i=1,2,\ldots)$ функция.

Особый интерес представляют интегральные множества, порождаемые 2π - периодическими по φ_i $(i=1,2,\dots)$ функциями, не зависящими от t, так как такие множества представляют собой инвариантные торы.

Запишем систему уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi_1,\psi),\ \frac{dy}{dt}=A(\varphi_1,\psi)y+c(\varphi_1,\psi),\ t\neq t_j; \qquad (37)$$

$$\Delta y\big|_{t=t_j(\varphi)}=J_j(\varphi_{t_j(\varphi)}(\varphi_1,\psi)) \quad (j=\dots,-1,0,1,\dots),$$

где φ_1 - скаляр, $\varphi=(\varphi_1,\psi)=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\dots)\in\mathfrak{M}$, а $t_j(\varphi)$ - решение уравнения $\varphi_{1t_j(\varphi)}(\varphi)=\varphi^{(j)}$, причём $\varphi^{(j)}$ - действительные постоянные. Матрица $A(\varphi)$ и функции $a(\varphi)$, $c(\varphi)$, $J_j(\varphi)$ обладают теми же свойствами, что в системе (36). Вопрос существования инвариантного тора системы уравнений (37) решает следующая теорема.

<u>Теорема 19.</u> Пусть функция $a(\varphi_1,\psi)=\{a_1(\varphi_1,\psi),a_2(\varphi_1,\psi),\dots\}$ такова, что $a_1(\varphi_1,\psi)\geqslant d_0=\mathrm{const}>0$, постоянные $\varphi^{(j)}$ удовлетворяют соотношению $0<\varphi^{(1)}<\varphi^{(2)}<\dots<\varphi^{(p)}<2\pi$ и $\varphi^{(j+p)}=\varphi^{(j)}+2\pi$ при всех целых j. Тогда если функции скачков при всех целых j удовлетворяют тождеству $J_{j+p}(\varphi)\equiv J_j(\varphi)$, то система уравнений (37) имеет инвариантный тор $\mathcal{T}$: $h=u(\varphi)$, $\varphi\in\mathcal{T}_\infty$, где

$$u(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}G_0(\tau,\varphi)c(\varphi_\tau(\varphi))d\tau+\sum_{-\infty<t_j(\varphi)<\infty}G_0(t_j(\varphi),\varphi)\left[J_j(\varphi)\right]_{\varphi_1=\varphi^{(j)}}.$$

Далее решается вопрос о существовании инвариантного тора системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega+\mu a(\varphi),\ \frac{dy}{dt}=A(\varphi)y+c(\varphi), \qquad (38)$$

подверженной импульсному воздействию по закону

$$\Delta y\big|_{\langle z,\varphi\rangle=2\pi k}=H_k(\varphi), \qquad (39)$$

где $y\in\mathfrak{M},\varphi\in R^m,\omega\in R^m,z=(z_1,\dots,z_m)\in R^m$, $a(\varphi)\in C^0_{Lip}(\mathcal{T}_m)$; $c(\varphi),A(\varphi),H_k(\varphi)\in C^0(\mathcal{T}_m)$; $\langle z,\varphi\rangle=\sum_{\nu=1}^{m}z_\nu\varphi_\nu$; μ - положительный параметр, $k=\dots,-1,0,1,\dots$. Здесь импульсы действуют в моменты времени $t_k(\varphi)$, в которые траектория $\varphi=\varphi_t(\varphi)$ пересекает поверхности $\langle z,\varphi\rangle=2\pi k$.

Следующее утверждение приводит условия, при которых система (38) с импульсным воздействием (39) имеет инвариантный тор.

Теорема 20. Предположим, что система (38) имеет функцию Грина задачи об инвариантных торах, удовлетворяющую оценке $(*)$, $a_i(\varphi)>0$, $\tau_i>0$ при всех $i=\overline{1,m}$, $\varphi\in\mathcal{T}_m$; $\sum\limits_{i=1}^{m}\tau_i=p$, где p – целое, $\langle\omega,\tau\rangle>0$. Тогда если $H_{k+p}(\varphi)=H_k(\varphi)$ при всех целых k, то система (38) с импульсным воздействием (39) имеет инвариантный тор $\mathcal{T}$ при всех значениях $0<\mu\leq\mu^0$, где μ^0 – достаточно малая положительная постоянная.

От системы уравнений (37), сохранив обозначения, перейдем к рассмотрению квазилинейной системы

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi,\psi),\ \frac{dy}{dt}=A(\varphi,\psi)y+c(\varphi,\psi,y,\mu),\ t\neq t_j(\varphi);$$
$$\Delta y\big|_{t=t_j(\varphi)}=J_j(\varphi_t(\varphi),y,\mu)\big|_{t=t_j(\varphi)}\quad(j=\dots,-1,0,1,\dots),\tag{40}$$

в которой $c(\varphi,0,0)=J_j(\varphi,0,0)=0$, μ – положительный параметр. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 21. Пусть для системы уравнений (40) сохраняются условия теоремы 19 и справедливо неравенство

$$\max\{\|c(\varphi,y,\mu)-c(\varphi,\bar y,\bar\mu)\|,\ \|J_j(\varphi,y,\mu)-J_j(\varphi,\bar y,\bar\mu)\|\}\leq$$
$$\leq N(d,\mu_0)\|y-\bar y\|+\mathcal{L}\|\mu-\bar\mu\|,$$

где $\|y\|\leq d$, $\|\bar y\|\leq d$; $\mu,\bar\mu\in(0,\mu_0]$, $\mathcal{L}=const>0$, $N(d,\mu_0)\to0$ при $d\to0$, $\mu_0\to0$, причём при любом фиксированном $0\leq d_0\leq d$ функция $N(d_0,\mu)$ возрастает на отрезке $[0,\mu_0]$. Тогда существует $\mu^0\in(0,\mu_0]$ такое, что при всех $0\leq\mu\leq\mu^0$ система уравнений (40) имеет инвариантный тор $\mathcal{T}$: $y=u(\varphi,\mu)$, $\varphi\in\mathcal{T}_\infty$ такой, что $\|u(\varphi,\mu)\|\to0$ при $\mu\to0$.

Результат, аналогичный теореме 21, получен для квазилинейной системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega+\mu a(\varphi),\ \frac{dy}{dt}=A(\varphi)y+\mu c(\varphi,y);$$
$$\Delta y\big|_{\langle\tau,\varphi\rangle=2\pi k}=\mu H_k(\varphi,y)\quad(k=\dots,-1,0,1,\dots),\tag{41}$$

в которой сохранён смысл обозначений, введённых в (38), (39).

В заключение параграфа доказана теорема о притяжении траекторий систем уравнений (40), (41) к их траекториям на инвариантных торах по экспоненциальному закону.

Пятнадцатый параграф посвящён периодическим решениям импульсных систем с малым параметром. В нём рассмотрена система уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon f(t,x),\ t\neq t_j; \qquad (42)$$

$$\Delta x|_{t=t_j}=\varepsilon H_j(t_j,x) \quad (j=\dots,-1,0,1,\dots),$$

где $x\in\mathfrak{m}$; $f(t,x)$, $H_j(t,x)$ - счетномерные периодические по t с периодом T (T- периодические) функции, определённые в некоторой области $\mathfrak{D}^*$:

$$(t,x)\in R^1\times\mathfrak{D}=(-\infty,\infty)\times\{x\in\mathfrak{m}\mid \|x\|\leq R=\mathrm{const}\},$$

ε - малый положительный параметр.

Задача состоит в отыскании управления (u_1,u_2) , обеспечивающего T - периодичность решения системы уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon f(t,x)-u_1,\ t\neq t_j; \qquad (43)$$

$$\Delta x|_{t=t_j}=\varepsilon H_j(t_j,x)-u_2 \quad (j=\dots,-1,0,1,\dots),$$

принимающего при $t=\tau$ значение $x=x_0\in\mathfrak{m}$.

Относительно функций H_j и импульсных моментов t_j предположим, что $H_{j+d}=H_j$, $t_{j+d}-t_j=T$, где d - целое положительное число, равное количеству импульсов на периоде.

Оказывается, что искомое управление не единственно. Рассмотрено три способа определения управления (u_1,u_2) . Каждому из них соответствует одна из трёх последующих теорем.

Теорема 22. Пусть функции $f(t,x)$, $H_j(t,x)$ в области $\mathfrak{D}^*$ непрерывны по t и удовлетворяют условиям:

1) $\max\limits_{t\in[\tau,\tau+T]}\{\|f(t,x)\|,\|H_j(t,x)\|\}\leq M=\mathrm{const}<\infty$, $j=\dots,-1,0,1,\dots$;

2) $\|f(t,\bar{x})-f(t,\bar{\bar{x}})\|\leq L\|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\|$, $\|H_j(t,\bar{x})-H_j(t,\bar{\bar{x}})\|\leq L\|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\|$,

где $0<L=\mathrm{const}<\infty$, $\bar{x},\bar{\bar{x}}\in\mathfrak{D}$.

Тогда для любого $0<\varepsilon<\min\left\{\frac{R}{M(\frac{T}{2}+2d)};\frac{1}{L(\frac{T}{2}+2d)}\right\}$ и любых начальных значений $\tau\in R^1$, $x_0\in\mathfrak{D}_f=\{x\in\mathfrak{D}\mid \|x\|<R-\varepsilon M(\frac{T}{2}+2d)\}\subset\mathfrak{D}$ существует единственное управление (u_1,u_2) такое, что система уравнений (43) имеет T - периодическое решение $x=x^0(t,\tau,x_0)$, $x^0(\tau,\tau,x_0)=x_0$, связанное с управлением по формулам

$$u_1=\frac{\varepsilon}{T}\int\limits_{\tau}^{\tau+T}f(t,x^0(t,\tau,x_0))dt,\quad u_2=\frac{\varepsilon}{d}\sum_{\tau<t_j<\tau+T}H_j(t_j,x^0(t_j,\tau,x_0)).$$

Это управление мы назвали смешанным.

и для счетных систем уравнений с малым параметром без импульсного воздействия.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах :

I. Теплинский Ю.В. О существовании и гладкости инвариантного тороидального многообразия нелинейной счетной системы дифференциальных уравнений// Укр.мат.журн.-1975.-27,№6.-С.847-851.

2. Теплинский Ю.В. О существовании инвариантного тороидального многообразия счетных систем дифференциальных уравнений //Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений.-Киев:Ин-т математики АН УССР,1975.-С. 164-170.

3. Теплинский Ю.В. О приводимости линейной счетной системы дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Приближенные методы исследования нелинейных систем.-Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976.- С.172-181.

4. Теплинский Ю.В. О существовании инвариантного тороидального многообразия счетной системы дифференциальных уравнений с мгновенными изменениями // Укр.мат.журн.-1977.-29,№6.- С.835-841.

5. Теплинский Ю.В. О приводимости счетных систем дифференциальных уравнений // Мат.физика.-1977.-Вып.22.- С.47-54.

6. Теплинский Ю.В. О гладкости инвариантного тороидального многообразия линейной счетной системы дифференциальных уравнений // Мат.физика.-1978,-Вып.23.- С.32-39.

7. Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах счетных систем дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР.Сер.А.-1978.-№9.- С.796-800.

8. Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах и приводимости счетных систем // Дифференц.уравнения.-1979.-15,№4.- С.259-261.

9. Теплинский Ю.В. К вопросу о приводимости счетных систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Укр.мат.журн.-1979.-31,№4.- С.463-465.

I0.Самойленко А.М.,Теплинский Ю.В. Функция Грина задачи об инвариантных торах счетных систем дифференциальных уравнений // Докл.АН УССР.Сер.А.-1981.-№1.- С.26-30.

II.Самойленко А.М.,Теплинский Ю.В.,Цыгановский Н.С. О поведении решений квазилинейной системы дифференциальных уравнений с импульсами в окрестности инвариантного тора // Дифференц.уравнения.-1982.-28,№5.- С.833-839.

I2.Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах линейных систем дифференциальных уравнений в пространстве m // Укр.мат.журн.-1983.-35,№2.- С.194-199.

I3.Самойленко А.М.,Теплинский Ю.В.,Цыгановский Н.С. Об инвариантных торах счетных систем дифференциальных уравнений.- Киев : 1983.-43с.-(Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 83.30).

Теорема 23. Пусть выполняются условия теоремы 22. Тогда для любого $0<\varepsilon<\min\left\{\frac{R}{2M(T+d)};\frac{1}{2L(T+d)}\right\}$ и любых начальных значений $\tau\in R^1$, $x_0\in\mathcal{D}_f^1=\{x\in\mathcal{D}\mid\|x\|<R-2\varepsilon M(T+d)\}\subset\mathcal{D}$ существует единственное управление импульсной частью $(0,u_2)$, при котором система (43) имеет T - периодическое решение $x=x_\infty(t,\tau,x_0)$, такое, что $x_\infty(\tau,\tau,x_0)=x_0$.

Теорема 24. Пусть выполняются условия теоремы 22. Тогда для любого $0<\varepsilon<\min\left\{\frac{R}{M(\frac{T}{2}+2d)};\frac{1}{L(\frac{T}{2}+2d)}\right\}$ и любых начальных значений $\tau\in R^1$, $x_0\in\mathcal{D}_f$ существует единственное управление дифференциальной частью $(u_1,0)$, при котором система уравнений (43) имеет T - периодическое решение $x=x^\infty(t,\tau,x_0)$, такое, что $x^\infty(\tau,\tau,x_0)=x_0$.

Из теорем 22 - 24 следует, что решение $x=x(t,\tau,x_0)$ системы уравнений (42) будет T - периодическим тогда и только тогда, когда управление её дифференциальной частью, смешанное управление, управление импульсной частью будут равны нулю.

Доказан топологический признак существования T-периодического решения системы уравнений (42), являющийся аналогом теоремы А.М.Самойленко, сформулированной для счётных систем без импульсов.

В этом же параграфе рассмотрена система уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon f(t,x),\ t\neq t_j;\ \Delta x\big|_{t=t_j}=\varepsilon H(t)\big|_{t=t_j}\quad (j=\dots,-1,0,1,\dots),\qquad (44)$$

для которой выполнены условия теоремы 22. Для неё доказано следующее утверждение.

Теорема 25. Пусть система уравнений (44) такова, что:

1) $H(-t)=-H(t)$, $f(t,x)=-f(-t,x)$;
2) на отрезке $\left(-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right)$ импульсные моменты $t_j(j=\overline{1,d})$ расположены симметрично относительно нуля.

Тогда любая точка $x_0\in\mathcal{D}_f$ является начальным значением T- периодического решения этой системы уравнений.

В заключительном шестнадцатом параграфе доказан ряд теорем, которые решают вопрос о редукции задачи управления, рассмотренной в предыдущем параграфе, к случаю конечномерной системы. Это позволило предложить алгоритмы для приближённого решения периодической задачи управления, что представляет практический интерес

14. Теплинский Ю.В.,Авдеюк П.И. О зависимости функции Грина задачи об инвариантном торе линейной дифференциальной системы уравнений в пространстве m от параметра // Приближенные методы анализа нелинейных колебаний.-Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984.-С.120-128.

15. Самойленко А.М.,Теплинский Ю.В. Об инвариантных торах дифференциальных систем с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Дифференц.уравнения.-1985.-21,№8.-С.1353-1361.

16. Самойленко А.М.,Теплинский Ю.В.,Авдеюк П.И. Существование экспоненциально устойчивых инвариантных торов дифференциальных систем с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Докл. АН УССР.Сер.А.-1985.-№11.-С.21-25.

17. Самойленко А.М.,Теплинский Ю.В. О приводимости дифференциальных уравнений в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Укр.мат.журн.-1989.-41,№2.-С.194-201.

18. Самойленко А.М.,Теплинский Ю.В. О приводимости дифференциальных систем в пространстве ограниченных числовых последовательностей.-Киев,1989.- 45 с.- (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 89.44).

19. Самойленко А.М.,Теплинский Ю.В. Приводимость дифференциальных систем в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Докл.АН УССР.Сер.А.-1989.-№10.-С.38-41.

20. Теплинский Ю.В.,Цыгановский Н.С. Об одной периодической задаче управления для дифференциальных уравнений с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Укр.мат. журн.-1990.-42,№2.-С.271-275.

21. Теплинский Ю.В.,Авдеюк П.И. Об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора нелинейной счетной системы дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн.- 1990.-42,№3.-С.401-40[illegible].

22. Самойленко А.М.,Теплинский Ю.В.,Лучик В.Е. Приводимость дифференциальных уравнений с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Докл.АН УССР. Сер.А.- 1990.-№5.-С.27-30.

23. Самойленко А.М.,Теплинский Ю.В. О приводимости линейных дифференциальных систем с почти-периодическими коэффициентами // Методы исследования дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений.- Киев: Ин-т математики АН УССР,1990.-С.69-80.

24. Теплинский Ю.В.,Лучик В.Е. О приводимости дифференциальных уравнений с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей// Укр.мат.журн.-1990.-42,№10.-С.1376-1382.

25. Самойленко А.М.,Теплинский Ю.В. Об устойчивости инвариантного тора нелинейной счетной системы уравнений //Докл.АН УССР.Сер. А.-1991.-№7.-С.31-33.

26. Теплинский Ю.В.,Авдеюк П.И. Редукция задачи о существовании инвариантного тора бесконечной дифференциальной системы к конечномерному случаю// Укр.мат.журн.-1991.-43,№9.-С.1251-1255.

27. Самойленко А.М.,Теплинский Ю.В. О периодической задаче управления для импульсных счетных систем с малым параметром //Докл. АН Украины.Сер.А.-1992.-№3.-С.7-11.

Подп. в печ. 21.08.92. Формат 60 × 84/16. Бумага тип. Офс.печать. Усл.печ.л. 1,86. Усл.кр.-отт. 1,86. Уч.-изд.л. 1,5. Тираж 100 экз. Зак. 230. Бесплатно.

Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН Украины 252601 Киев 4, ул. Репина , 3