

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
МОРСКОЙ ГИДРОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

ФЕДОСЕНКО Василий Степанович

УДК 551.466

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ  
СРЕДЫ, ВОЗМУЩАЮЩИХ ФАКТОРОВ И НЕЛИНЕЙНОСТИ НА  
НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ И ВНУТРЕННИЕ  
ВОЛНЫ В ОКЕАНЕ

04.00.22 - геофизика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Севастополь - 1992

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Д.З.Алешков

доктор физико-математических наук  
С.Ф.Доценко

доктор физико-математических наук,  
профессор А.М.Тер-Крикоров

Ведущая организация - Институт проблем механики РАН

Защита состоится "25" ноября 1992 г. в 9 часов  
на заседании специализированного совета Д 016.01.01 по защите  
диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-матема-  
тических наук при Морском гидрофизическом институте АН Украины  
( 335000 , г.Севастополь, ул.Капитанская, 2).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "28" сентября 1992 г.

Ученый секретарь  
специализированного совета  
кандидат физ.-мат.наук

А.М.Суворов

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00816269 (W)

АВ-25.6 15

## 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Исторически основные направления исследований в теории волн были определены работами Лапласа, Стокса, Рэлея, Кельвина, Коши, Пуассона, Пуанкаре. Но только известные работы А.И.Некрасова (1921г.) и Т.Леви-Чивита (1924г.), в которых было получено строгое доказательство существования нелинейных прогрессивных волн, дали толчок к интенсивному изучению волновых процессов в жидкости. Спустя десять-пятнадцать лет фундаментальные работы Н.Е.Кочина, М.В.Келдыша, М.А.Лаврентьева, Л.И.Седова, Л.Н.Сретенского, Н.Н.Моисеева, М.Д.Хаскинда вызвали неослабеваемый интерес к изучению процессов развития гравитационных волн. Последующие десятилетия ознаменовались появлением большого количества работ, в которых в той или иной степени затрагивались вопросы, связанные с распространением океанических волн. Особенно бурно теория волн начала развиваться в последние 20 лет. Изучению волновых процессов посвящен ряд монографий и обзоров (Праудман Дж., 1957; Стокер Д.Д., 1959; Yih C.-S., 1965; Крылов Ю.М., 1966; Каменкович В.М., 1973; Некрасов А.В., 1975; Сретенский Л.Н., 1936, 1977; Уизем Дж.Б., 1977; Черкесов Л.В., 1970, 1976, 1980; Филлипс О.М., 1969, 1980; Миропольский Ю.З., 1981; Алешков Ю.З., 1981; Мурти Т.С., 1981; Фукс В.Р., 1982; Букатов А.Е., Черкесов Л.В., 1983; Ле Блон П., Майсек Л., 1981; Ефимов В.В., 1985; Гилл А., 1986 и др.).

Реальные процессы генерации волновых полей в Мировом океане в большинстве своем носят явно нестационарный характер. Механизмы возбуждения поверхностных и внутренних волн в морской среде разнообразны, а основные характеристики этих волн зависят от многих факторов, таких, например, как тип и форма возмущений, скорость их движения, параметры среды, нелинейность волновых движений и др.

Понимание процессов образования и поведения поверхностных и внутренних волн возможно лишь на основе аргументированной теории и тщательных экспериментов. Планирование и реализация экспериментальных исследований требует организации специализированных комплексных полигонов, где было бы возможно провести детальное измерение характеристик поверхностных и внутренних волн. В связи с этим возникают сложные проблемы правильного планирования и ме-

АНБ Ин. В. Стефанкина  
АН УРОР

тодики эксперимента, а по завершении его - точной интерпретации экспериментальных данных, согласующихся с теоретическими выводами. Следовательно, теоретические результаты должны быть как можно более точными по крайней мере в рамках рассматриваемой модели.

Таким образом, возникает необходимость в теоретическом изучении различных механизмов генерации поверхностных и внутренних волн и влияния на их характеристики типов и форм возмущений (вида источников генерации волн и форм пространственных областей ими занимаемых), скорости их перемещения, силы Кориолиса, стратификации, сжимаемости и вязкости морской среды, а также нелинейности волновых движений. Учет нестационарности волновых процессов важен для дальнейшего изучения физики моря и теории волн. Изучение процессов развития волн необходимо также для разработки методов прогноза волновых полей, генерируемых внешними возмущениями, и времени их установления, интерпретации данных натурных наблюдений и анализа лабораторных экспериментов.

Цель работы и постановка задач исследования. Несмотря на длительную историю развития теории волн, к настоящему времени известно только несколько точных решений задач о неустановившихся волнах. Это известные решения плоской и пространственной задач о волнах в глубоком море, возбуждаемых дельтообразными начальными возмущениями, полученные Н.Е.Кочиным в 1934 году методами теории размерностей, а также решение пространственной задачи о длинных волнах, полученное в 1978 г. С.Ф.Доценко для недельтаобразного начального возмущения. В общей постановке линейной теории волн в море конечной глубины точных решений до сих пор было неизвестно. Обычно их получают в интегральной форме, а затем исследуют методом стационарных фаз или численными методами. Однако, численные расчеты показывали, что при ширине области возмущений, превосходящей глубину океана уже в два-три раза, метод стационарных фаз дает большую ошибку в описании волн, следующих за головной, а форму волн в окрестности передних фронтов вообще не определяет. В последующем было предложено описывать головные волны посредством функции Эйри, причем амплитуда этих волн фактически не зависела ни от вида возмущений, ни от их формы. Как показано в диссертации, такое представление головной волны также приводит к большой погрешности в описании волновой поверхности. При этом

в асимптотических выражениях нельзя было получить предельный случай длинных волн. Вследствие погрешностей применяемых методов исследования часто отдельные вопросы образования и развития волн трактовались не совсем точно.

При исследовании неустановившихся волн в вязкой жидкости приближенными методами в предшествующих работах был установлен единственный результат: амплитуды образующихся волн за счет вязкости затухают с течением времени по экспоненциальному закону. Точные же решения, полученные в диссертации, выявили ряд существенных особенностей, характерных только для движения вязкой жидкости.

Нелинейность уравнений движения жидкости должна существенным образом сказываться на распространении поверхностных и внутренних волн в океане. Если по теории поверхностных гравитационных волн к настоящему времени имеется большое количество исследований, то нелинейные внутренние волны и капиллярно-гравитационные волны изучены хуже. Совершенно открытыми оставались вопросы существования и развития нелинейных изгибно-гравитационных волн под ледяным покровом и влияния силы Кориолиса на нелинейные волны.

В соответствии со сказанным выше цель настоящей работы формулируется следующим образом: получение точных и наиболее близких к точным решений линейных и нелинейных задач о распространении поверхностных и внутренних волн в океане и анализ на их основе влияния вида и формы возмущений, скорости их перемещения, силы Кориолиса, капиллярных сил, сжимаемости, стратификации и вязкости жидкости на главные характеристики образующихся волн в океане.

Методы исследования. В диссертации в подавляющем большинстве случаев решения поставленных задач получены аналитическими методами. Используются методы интегральных преобразований, методы теории функций комплексного переменного, метод возмущений, асимптотические методы исследований интегралов. Анализ полученных результатов проводился, в основном, численно. Кроме того, применялись численные методы анализа интегралов и решения краевых задач для линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В последнем параграфе диссертации разработан специальный аналитико-численный метод решения нелинейных задач

распространения прогрессивных волн в непрерывно стратифицированном океане. Во многих случаях аналитические методы лучше раскрывают природу задач, чем численные методы, которыми не всегда можно уловить те или иные специфические особенности распространения волн.

Основные результаты работы и их новизна. Работа является теоретическим исследованием процессов развития поверхностных и внутренних волн в океане на базе более общих по сравнению с предшествующими гидродинамических моделей генерации и распространения волн, учитывающих такие важные для динамики волн и физики моря факторы, как вязкость, плотностная стратификация и сжимаемость морской среды, вращение Земли, капиллярные силы, ледяной покров, нелинейность и др. Это потребовало разработки в ряде случаев новых конструктивных схем исследования нестационарных волн в рамках усовершенствованных моделей, что позволило получить в свою очередь ряд новых результатов. Логическое изложение исследований в диссертации построено на последовательном изучении волновых процессов для усложняющихся типов внешних возмущений и моделей морской среды.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

а) Предложен метод решения линейных задач о генерировании при учете капиллярных сил неустановившихся поверхностных и внутренних волн в океане начальными возмущениями или возмущениями меняющейся интенсивности в неравномерном потоке, либо давлениями, двигающимися по произвольному пути с неравномерной скоростью.

б) Для определенных видов (начальные смещения свободной поверхности, поверхностные давления, подводные и придонные возмущения) и форм плоских и пространственных возмущений найдены точные представления волн в глубоком море и волн типа цунами, на основе которых изучены основные закономерности распространения неустановившихся волн. Обобщены известные формулы Н.Е.Кочина на случай переменного потока и для неоднородной жидкости.

в) Разработан метод асимптотического анализа интегральных представлений решений волновых задач, который, в отличие от известных методов, дает более высокую степень точности описания волн в области основных возмущений, в областях головных волн и в окрестностях предельных углов волновых зон, образующихся

за перемещающимися возмущениями. При этом при достаточно большой ширине области возмущений асимптотические формулы переходят в выражения для длинных волн, что невозможно было получить из всех ранее известных асимптотических представлений волновых поверхностей. На основе данного метода проведен анализ влияния на поверхностные и внутренние волны типа и формы возмущений, скорости их перемещения, силы Кориолиса, стратификации и сжимаемости морской среды.

г) Исследована устойчивость неустановившихся внутренних волн на поверхности разнонаправленных потоков при учете капиллярных сил.

д) Проведен анализ причин образования внутренних волн приливных периодов большой амплитуды и подтверждена гипотеза Дефанта.

е) Получено точное решение задачи о поверхностных и внутренних волнах в вязкой жидкости, возникающих от начальных возмущений, что позволило выявить ряд особенностей распространения волн и зависимость их характеристик от сил поверхностного натяжения, коэффициентов турбулентного обмена, скорости движения возмущений и относительной разности плотностей неоднородной жидкости.

ж) Изучено влияние частичного скольжения на дне бассейна и на поверхности раздела неоднородной вязкой жидкости на волновые поля в океане, генерируемые периодическими по времени начальными возмущениями.

з) Исследованы поверхностные и внутренние нелинейные капиллярно-гравитационные прогрессивные и стоячие волны. Установлено наличие спектров резонансных длин волн, при которых стоксовы решения недействительны, но в окрестностях этих резонансных длин волн происходит бифуркация решений и возможно существование составных волн. Изучено нелинейное взаимодействие нескольких волн с точки зрения нелинейного волнового синхронизма.

и) Доказана теорема существования и единственности прогрессивных нелинейных изгибно-гравитационных волн. Изучены нелинейные прогрессивные и стоячие волны, образующиеся на поверхности раздела лед-вода. Полученные результаты аналогичны установленным для капиллярно-гравитационных волн.

к) Исследовано влияние вращения Земли на нелинейные прогрессивные волны в однородном и стратифицированном море и выявлено образование в этом случае инерционного течения.

л) На основе учета высших членов разложения потенциала скоростей показана возможность образования в океане одnogорбых и двугорбых гравитационных, капиллярно-гравитационных и изгибно-гравитационных уединенных волн повышения и волн понижения (волн-впадин).

м) Для исследования нелинейных прогрессивных внутренних волн в океане с произвольным распределением частоты Вейселя-Брента разработан аналитико-численный метод, позволяющий решать задачи не только при аналитическом задании плотности, но и дискретном.

Научные выводы и их достоверность. В результате проведенных исследований получены следующие выводы, которые выносятся на защиту.

1. Поверхностные и внутренние неустановившиеся волны, генерируемые в однородном и стратифицированном море (при учете капиллярных сил) различного рода возмущениями (поверхностные давления, подводные и придонные возмущения, начальные смещения свободной поверхности и поверхности раздела), имеют идентичную интегральную форму представления и могут быть исследованы разработанными в диссертации методами.

Известные асимптотические методы (метод стационарных фаз и представление головных волн в виде волны Эйри) имеют большую погрешность при описании основных волн в океане конечной глубины.

Разработанные в диссертации асимптотические методы, учитывающие тип и форму возмущений, дают высокую точность описания поверхностных и внутренних волн во всей области их образования после истечения некоторого времени от начала их генерации, а также позволяют выяснить характер поведения и структуру волновых поверхностей в окрестностях предельных углов и внутри волновых зон, образующихся при движении "корабля" или возмущений переменной интенсивности. Порядок затухания головных волн с течением времени зависит от типа возмущений и их формы.

2. Обобщение известных формул Н.Е.Кочина на случай неравномерного потока и для неоднородного океана, анализ полученных

точных решений для ряда конкретных видов возмущений и исследование асимптотических выражений позволяет установить следующее:

- при  $\ell_0 = \ell/h > 50$  ( $\ell$  - ширина области возмущений,  $h$  - глубина бассейна) в океане генерируются длинные волны, структура которых близка к описываемым общей линейной теорией длинных волн;

- при  $1 < \ell_0 < 50$  в зависимости от формы начальных и подводных возмущений амплитуды головных поверхностных и внутренних волн затухают как  $t^{-(1-\rho)/3}$  ( $0 \leq \rho < 1$ ) в плоском случае и как  $R^{-1/2} t^{-(3-4\nu)/6}$  ( $0 \leq \nu < \frac{3}{4}$ ) - в пространственном ( $t$  - время,  $R$  - расстояние от эпицентра возмущений);

- при  $\ell_0 < 1$  амплитуды волн затухают как  $t^{-1/2}$  в плоском случае и как  $(Rt)^{-1/2}$  - в пространственном, причем в этом случае они хорошо описываются посредством метода стационарных фаз;

- при эволюции трехмерных волн типа цунами скорость точек, лежащих на переднем склоне волны, больше  $\sqrt{gh}$ , а скорость точек на заднем склоне меньше  $\sqrt{gh}$ . С течением времени волна "растягивается". Однако, если начальное возмущение сосредоточено в ограниченной области, то скорость переднего фронта волны цунами равна  $\sqrt{gh}$ , а скорость максимума волны больше  $\sqrt{gh}$ . В этом случае с течением времени передний склон волны становится все более крутым, что при учете нелинейности приводит к ее опрокидыванию;

- учет вращения Земли сказывается таким образом, что по истечении некоторого времени от начала эволюции волны цунами впереди основной волны повышения появляется волна понижения, причем ширина ее с течением времени увеличивается. Влияние силы Кориолиса на ширину угловой зона поверхностных корабельных волн незначительно, в то время как ширина угловой зоны внутренних корабельных волн может существенно уменьшаться;

- учет капиллярных сил на поверхности раздела двух потоков, текущих с разными по величине или по направлению скоростями, приводит к устойчивости неустановившихся внутренних волн;

- нестационарные внутренние волны в двухслойном море, возникающие от начальных или импульсивных возмущений, могут иметь амплитуды сравнимые с амплитудами поверхностных волн только в случае действия возмущений в верхнем слое жидкости, причем импульсивные поверхностные давления значительных внутренних волн

не вызывает. Если генератором волн является начальное смещение поверхности раздела, то наступает явление "мертвой воды";

- в ограниченном двумя вертикальными меридиональными берегами стратифицированном океане приливообразующие силы не вызывают, кроме резонансных случаев, сколь-нибудь значительных внутренних волн. Однако, под действием приливных течений, образующихся на континентальном шельфе или на склоне подводной горы, в океане могут образовываться внутренние волны приливных периодов, имеющие большие амплитуды;

- при генерации волн начальными возмущениями в стратифицированном сжимаемом вращающемся океане, кроме гравитационной поверхностной волны типа цунами, образуется счетное множество акустических и инерционных или внутренних (в зависимости от соотношения между частотой Вэйселя-Брента и параметром Кориолиса) волн. Сжимаемость и стратификация мало влияют на гравитационную волну, а амплитуды инерционных волн весьма незначительны. Все моды акустических волн имеют одну и ту же скорость распространения передних фронтов, равную скорости звука в океане, являются предшественниками гравитационной и внутренних волн и по своей структуре напоминают внутренние волны. В фиксированную точку пространства моды внутренних волн приходят поочередно, т.к. они имеют существенно разные скорости передних фронтов, причем амплитуда предшествующей моды в данной точке за счет затухания по времени становится уже незначительной к приходу следующей моды.

3. Полученные точные решения задач о влиянии вязкости на неустановившиеся поверхностные и внутренние (двухслойная модель) волны в океане, позволили выявить ряд ранее неизвестных особенностей распространения волн. Основными из них являются следующие:

- в вязкой жидкости не могут существовать периодические по времени стоячие колебания с длиной волны меньше критической. Существует минимальный период колебаний. Возможно периодическое колебание с одной и той же частотой, но с разными декрементами затухания, двух волн разной длины, причем более короткие волны затухают с течением времени значительно быстрее;
- капиллярные силы незначительно уменьшают частоту, декре-

мент затухания и критическую длину волны. При возрастании отношения  $A_e/A_z$  ( $A_e$  и  $A_z$  - горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентного обмена) декремент затухания, минимальный период колебаний и критическая длина волны увеличивается;

- при генерации волн произвольными начальными возмущениями образуются волны чисто "вязкого" происхождения, амплитуда которых пропорциональна коэффициенту кинематической вязкости, с большим декрементом затухания. За движущимися возмущениями корабельные волны возникают только при скоростях больших критической, причем угол волновой зоны уменьшается при уменьшении скорости; при  $A_e/A_z > 10^3$  горизонтальный коэффициент турбулентного обмена играет основную роль в формировании волнового поля;

- амплитуды внутренних неустановившихся волн затухают за счет вязкости значительно быстрее, чем амплитуды поверхностных волн. Впереди поверхностных и внутренних волн типа цунами всегда за счет вязкости образуются волны понижения;

- использование более общего условия частичного скольжения на дне бассейна (вместо условия прилипания) при генерировании волновых полей в однородном и двухслойном океане периодическими и начальными возмущениями в большей степени сказывается на характеристиках поверхностных волн, а условие частичного скольжения на поверхности раздела больше влияет на внутренние волны. При этом существенно меняются структуры погранслоев у дна бассейна и поверхности раздела.

4. Доказанная в диссертации теорема существования и единственности нелинейных изгибно-гравитационных волн на поверхности раздела лед-вода определяет также и способ нахождения методом возмущений нелинейных прогрессивных и стоячих изгибно-гравитационных, капиллярно-гравитационных и внутренних (в двухслойном и непрерывно стратифицированном море) волн как при произвольных длинах волн, так и при резонансных, так как структура волн во всех этих случаях имеет много общих свойств.

Известно, что у нелинейных прогрессивных и стоячих гравитационных волн амплитуда гребня больше амплитуды подошвы, гребень уже подошвы, а скорость волны зависит от амплитуды и она больше, чем скорость линейной волны. Учет капиллярных и упругих сил, а также стратификации приводит к тому, что эти свойства могут

сохраняться, но может быть и обратное: амплитуды гребней меньше амплитуд впадин, гребни шире впадин, а скорости волн меньше, чем у линейной волны. Это связано с тем, что существуют спектры длин волн, при которых амплитуды нелинейных добавок в стоксовых разложениях обращаются в бесконечность, т.е. наступает явление нелинейного резонанса (спектр резонансных длин стоячих волн содержит, как подмножество, спектр резонансных длин прогрессивных волн). Как следует из теоремы существования, в малых окрестностях резонансных длин волн образуются составные волны, а для первых двух длин волн из указанных спектров происходит бифуркация решений: в первом случае существуют две ветви, а во втором — три. Установлено, что при следующих длинах волн из спектра бифуркация решений не происходит. Показано, что длины и частоты волн, при которых происходит нелинейный резонанс, удовлетворяют условиям общего нелинейного волнового синхронизма. Для двух и трехволнового взаимодействия изгибно-гравитационных и капиллярно-гравитационных поверхностных и внутренних волн выведены разрешающие уравнения и получены их решения. Ранее предполагалось, что подобные решения неустойчивы, т.е. в течение некоторого периода взаимодействующие волны обмениваются между собой энергией. Однако, как установлено в диссертации, при определенном соотношении между фазами взаимодействующих волн, совпадающих с найденными методом возмущений, решения устойчивы. Получено также, что  $n$  - волновое взаимодействие ( $n \geq 4$ ) является слаби<sup>не</sup>линейным. Возможность существования составных волн приводит к многообразию профилей поверхностных и внутренних волн. Если резонансные длины капиллярно-гравитационных волн малы (порядка 3–4 см), то для изгибно-гравитационных волн они порядка нескольких сотен метров, а для внутренних — порядка нескольких километров.

Показано, что в случае непрерывной стратификации первая мода не имеет резонансных длин волн, а мода с номером  $n$  ( $n \geq 2$ ) имеет  $n-1$  резонансную длину волны.

5. Ранее было известно, что в океане могут образовываться уединенные гравитационные волны только в виде волны повышения, а учет капиллярных сил приводил к образованию уединенных волн-впадин, но для глубин жидкости меньше 1 мм. Учет высших членов

разложения исходных уравнений гидродинамики при решении их методом узких полос позволил установить, что в океане могут образовываться гравитационные одnogорбые и двугорбые уединенные волны как в виде волн повышения, так и в виде волн-впадин.

6. В работе разработан аналитико-численный метод решения нелинейных задач для непрерывно стратифицированного океана с учетом вращения Земли, причем предлагаемая методика позволяет задавать плотность или частоту Вайсяля-Брента не только аналитической функцией, но и дискретно. Апробация метода проводилась для постоянной частоты Вайсяля-Брента, т.к. в этом случае получено аналитическое решение. Проведенные расчеты для реального распределения плотности в районе полигона ПОЛИМОДЕ дали хорошее согласование с известными результатами.

Научные положения и выводы работы не противоречат результатам предшествующих исследований, проведенных в рамках более простых гидродинамических моделей. Отдельные из полученных результатов были подтверждены в более поздних исследованиях других авторов. В ряде случаев теоретические выводы и оценки параметров поверхностных и внутренних волн удовлетворительно согласуются, по литературным данным, с результатами лабораторных и натуральных экспериментов и наблюдений. Все теоретические исследования проведены строгими математическими методами. Это свидетельствует об обоснованности научных положений и достоверности сделанных выводов.

Практическая значимость работы. Материалы диссертации расширяют и углубляют знания, а также уточняют представления о динамике линейных и нелинейных поверхностных и внутренних нестационарных волн в океане. Изложенные в работе методы анализа и модели могут быть использованы в океанологических исследованиях для количественного описания характеристик волновых полей. Выводы работы представляют интерес для теории волн и физики моря. Они полезны при планировании натуральных исследований, интерпретации данных наблюдений и лабораторного моделирования. Предложенная методика расчета нелинейных внутренних волн в непрерывно стратифицированном океане может быть использована при расчете волновых полей в отдельных районах Мирового океана. Отдельные

научные результаты исследований были использованы в хозяйственной тематике прикладного характера, выполнявшейся в БГУ (х/д № 37819, 1981-1983 г.г.; х/д № 21901, 1987-1989 г.г.), а также в отчетах по междуведомственным проектам "Волна" и "Внутренние волны".

Личный вклад автора. В диссертации обобщены результаты исследований, выполненных в Морском гидрофизическом институте АН УССР (1970-1976 г.г.) и в Белорусском государственном университете (1981-1991 г.г.) лично автором, под его руководством и при его непосредственном участии. Основные научные положения и выводы работы получены автором. В совместных работах автор принимал паритетное участие в постановках задач, выборе методов исследования, их реализации и интерпретации теоретических результатов.

Апробация работы и публикации. Основные результаты диссертации докладывались на 15-й Генеральной Ассамблее МГТС (Ленинград, 1971); Международном симпозиуме "Термодинамическое взаимодействие атмосферы и океана в Арктике" (Ленинград, 1972); Шестом и Седьмом Всесоюзных съездах по теоретической и прикладной механике (Ташкент, 1986; Москва, 1991); Всесоюзной школе молодых ученых "Вычислительные методы и математическое моделирование" (Минск, 1984); Всесоюзной школе молодых ученых "Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики и математической физики" (Рига, 1985); III-ей и V-ой Республиканских конференциях математиков Белоруссии (Минск, 1971; Гродно, 1980); Республиканских научно-практических конференциях "Актуальные проблемы информатики" (Минск, 1988, 1989); Республиканских научных конференциях, посвященных 60 и 70-летиям БГУ (Минск, 1981, 1991); Всесоюзных совещаниях и конференциях по проектам "Волна" и "Внутренние волны" (Севастополь, 1980, 1983, 1985, 1987, 1989, 1990, 1991).

Основные результаты опубликованы в нижеприведенном списке научных работ.

## II. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Результаты исследований изложены в 2-х томах. Первый том состоит из введения, шести глав и заключения (объем 447 страниц).

Во втором томе (объем 128 страниц) содержится 127 рисунков и 16 таблиц к основному тексту диссертации, 3 приложения и список литературы, включающий 246 наименований.

Во введении обсуждается актуальность и современное состояние исследований нестационарных линейных и нелинейных поверхностных и внутренних волн в океане, сформулированы цель и научные задачи диссертации, излагаются основные результаты и их апробация.

Первые три главы посвящены исследованию волн в однородном море: последовательно изучается влияние различных факторов на линейные неустановившиеся волны в идеальной жидкости (1-я глава) и влияние на эти же волны вязкости (2-я глава), а в третьей главе исследуются нелинейные прогрессивные и стоячие волны. В четвертой – шестой главах изучаются эти же вопросы, но для неоднородного океана (на двухслойных моделях и при непрерывной стратификации океана).

В приложениях вынесены три вопроса, связанные с проведенными исследованиями.

Такова структура диссертации. Приведем изложение основного содержания работы.

## ГЛАВА I. Развитие неустановившихся поверхностных волн в океане и зависимость их характеристик от капиллярных сил, типа и скорости движения возмущений.

На основе точных и наиболее близких к точным решениям изучается влияние вида и формы начальных возмущений, скорости их движения, капиллярных сил и вращения Земли на плоские и пространственные неустановившиеся волны в однородном океане.

В § II приведена схема решения задач о генерации, при учете капиллярных сил, различного вида и формы возмущениями переменной интенсивности (поверхностные и придонные возмущения, источник, начальные смещения свободной поверхности) неустановившихся волн в океане постоянной глубины. Возмущения действуют либо в переменном потоке, либо перемещаются по произвольному пути  $x = x_1(t)$ ,

$y = y_1(t)$ . Решение найдено в интегральной форме. При равномерном потоке или при постоянной скорости перемещения возмущений интегралы представляют собой свертку передаточной функции,

характеризующей отклик гидродинамических моделей на импульсное эталонное воздействие, и функции, описывающей изменение интенсивности возмущений во времени. В общем случае интегралы свертки не являются.

В дальнейшем в этом параграфе проводится исследование вида волн, возбуждаемых либо импульсивными возмущениями, либо начальными смещениями свободной поверхности. В плоском случае определение вида волн сводится к исследованию интегралов

$$\xi = \begin{bmatrix} Re \\ Im \end{bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} F(z) \tilde{b}(z) e^{i t N(z, x, t)} dz, \quad (I)$$

где  $N = z(\sqrt{z} + q)$ ,  $q = [z^{-1}(g + \alpha z^2) t h z h]^{1/2}$ ,

$$v = (x - \tilde{x}) t^{-1}, \quad \tilde{x} = \int_0^t c_1(\xi) d\xi = x_1(t) - x_1(0) = x_1(t),$$

$F(z)$  - преобразование Фурье функции  $f(x)$ , характеризующей форму возмущений;  $\tilde{b}(z)$  - голоморфная функция, характеризующая вид возмущений (в частности, если волны возникают от начальных смещений свободной поверхности, то  $\tilde{b}(z) \equiv 1$ );  $\alpha = const$  - величина, пропорциональная коэффициенту поверхностного натяжения;  $c_1(t)$  - скорость потока или движения возмущений. Следует заметить, что интегралы типа (I) (с функцией  $N(z)$ , зависящей от параметров среды океана и вида рассматриваемых волновых движений) всегда получаются при решении линейных задач о генерации вынужденных неустановившихся волн в однородном и стратифицированном океане.

Обычно интегралы (I) исследуют методом стационарных фаз (Черкесов Л.В., 1970; Букатов А.Е., Черкесов Л.В., 1983), а в окрестности переднего фронта вид свободной поверхности описывают волной Эйри, амплитуда которой вычисляется в стационарной точке  $z=0$  (Ле Влон П., Майсек Л., 1981; Боровиков В.А. и др., 1984). Но, очевидно, что  $F(0)$  - величина, пропорциональная площади поперечного сечения начального возмущения, т.е. амплитуда волны Эйри фактически не зависит ни от типа, ни от формы возмущений.

Для исследования таких интегралов разработан метод, базирующийся на теореме о близких седловых точках, лемме Эрдейи и методе перевала (Федорюк М.В., 1987). Идея его заключается в следующем. Преобразование Фурье от функции  $f(x)$  всегда содержит па-

параметр, характеризующий линейный размер области возмущений. Учет его при определении точек перевала, перевальных путей и близких седловых точек имеет существенное значение, если ширина области большая. Применение же теоремы о близких седловых точках приводит к зависимости амплитуды волны (типа волны Эйри) от исходных параметров, координаты и времени. Смысл метода поясним на простом примере.

Пусть  $\alpha = C_1(t) = 0$ , а начальное смещение свободной поверхности имеет вид  $\zeta(x, 0) = a_0 \exp(-\kappa x^2)$ . Тогда, проделывая соответствующие вычисления, находим такие выражения для вида волн на свободной поверхности (величины  $x \sim x/h$  и  $t \sim t\sqrt{g/h}$  безразмерные)

$$\zeta = \begin{cases} \frac{a_0}{2} \zeta_1, & x > vt + d; & \varepsilon = \frac{x}{t} - 1, \quad \varepsilon_1 = 1 - \frac{x}{t}; \\ \frac{a_0}{2} \zeta_2, & vt - d < x < vt + d; & \delta = \varepsilon/2\mu^2, \quad \delta_1 = \varepsilon_1/2\mu^2; \\ a_0 \zeta_3, & x < vt - d; & \mu = 1/4\kappa t, \quad \nu = 1 - 2\mu^2; \end{cases}$$

$$\zeta_1 = \frac{e^{-t\mu_0}}{\sqrt{1+\delta}} [1 + O(t^{-1})], \quad \mu_0 = \frac{4}{3} \mu^3 (1 - \sqrt{1+\delta})^2 (2\sqrt{1+\delta} + 1),$$

$$\zeta_2 = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \left(\frac{2}{t}\right)^{1/3} \exp(-\nu_0) \text{Ai}\left[\left(\frac{t}{2}\right)^{2/3} (4\mu^2 - 2\varepsilon_1)\right] \cdot [1 + O(t^{-2/3})],$$

$$\zeta_3 = \frac{e^{-t\mu_1}}{\sqrt{\delta_1 - 1}} \left[ \cos(\nu_1 t - \frac{\pi}{4}) + O(t^{-1}) \right], \quad \mu_1 = -\frac{8}{3} \mu^2 \left(\frac{3}{2} \delta_1 - 1\right),$$

$$\nu_1 = \frac{3}{8} \mu^2 (\delta_1 - 1)^{3/2}, \quad \nu_0 = \begin{cases} \frac{t}{2\kappa} (1 - \frac{3}{2} \delta_1), & x \leq vt; \\ 0, & x \geq vt. \end{cases}$$

Анализ этих выражений показывает, что в случае, когда ширина области начальных возмущений намного превосходит глубину океана ( $\kappa \leq 1$ ), образующаяся головная волна  $\zeta_1$  является длинной и ее можно аппроксимировать волной, получающейся из линейной теории длинных волн. Действительно, в этом случае  $\delta$  - величина малая и  $\zeta_1 \approx \exp[-\kappa(x-t)^2]$ . После прохождения головной волны остается след в виде волны Эйри, амплитуда которой затухает как

$t^{-1/3}$ . Волна  $\xi_3$  - "хвост" основной волны - является быстро осциллирующей и затухает по экспоненциальному закону. Если к исходному интегралу применить метод стационарных фаз, то в результате фактически получим выражение для  $\xi_3$

При увеличении  $\kappa$  (уменьшении ширины области начальных возмущений)  $\psi$  стремится к единице, т.е. волна  $\xi_1$  становится определенной только при  $x > t$ , а амплитуда ее начинает затухать экспоненциально. Головной волной в этом случае является волна Эйри, амплитуда которой сложным образом зависит от  $x$  и  $t$  и затухает как  $t^{-1/3}$ . Следом ее становится волна  $\xi_3$ .

Такова и общая схема распространения волн типа цунами при произвольных начальных возмущениях. Анализ показывает, что при  $\rho_0 > 50$  ( $\rho_0 = \ell/h$ ,  $\ell$  - ширина области начальных возмущений) при описании волн цунами можно пользоваться общей линейной теорией длинных волн. При  $\rho_0 < 1$  область, занятая волной Эйри, фактически стягивается в точку ( $d \rightarrow 0$ ) и в этом случае вид волн хорошо описывается методом стационарных фаз.

При  $1 < \rho_0 < 50$  вид головной волны зависит как от вида возмущений, так и от их формы, т.е. от функции  $F(z) \cdot \beta(z) = z^n \varphi(z)$  ( $n > 0$ ). Если  $\varphi(0) = \text{const}$ , то асимптотическое представление интеграла (I) имеет вид

$$\xi = \begin{bmatrix} Re \\ Im \end{bmatrix} \left\{ t^{-1/3} C(\bar{z}) A_1(z) + i t^{-2/3} D(\bar{z}) A_1'(z) \right\} [1 + o(t^{-1})], \quad (2)$$

где  $C(\bar{z})$  и  $D(\bar{z})$  - известные функции, вычисленные в близких седловых точках. При этом, если  $\varphi(z)$  и  $n$  одинаковой четности, то  $D = 0$ , если разной, то  $C = 0$ . Амплитуды головных волн, возникающих от начальных смещений свободной поверхности, от придонных и подводных возмущений (в случае четной функции  $f(x)$ ) затухают как  $t^{-1/3}$ , а от поверхностных импульсивных давлений - как  $t^{-2/3}$ . Во всех случаях головная волна является волной повышения, но в случае поверхностных давлений основной волной является следующая за ней волна понижения. Проведенные численные расчеты показали, что формулы (2) с погрешностью не более 3% описывают не только головные волны, но и следующие за ними три-четыре волны.

На вопрос: существуют ли такие формы начальных возмущений, при которых амплитуды головных волн затухали бы медленнее, чем

$t^{-1/3}$ , следует ответить утвердительно. В диссертации построены примеры форм начальных возмущений, при которых амплитуды головных волн затухают как  $t^{-(1-\rho)/3}$  ( $0 \leq \rho < 1$ ).

Образующиеся за головными волнами, амплитуда которых затухает как  $t^{-1/2}$ , имеют задний фронт (за счет учета капиллярных сил), в окрестности которого свободная поверхность описывается волной Эйри с амплитудой, затухающей как  $t^{-1/3}$ . Однако, величина ее незначительна.

В случае трехмерных начальных возмущений наблюдается полная качественная аналогия с плоской задачей, но имеется и существенное различие. Если в плоском случае максимум волн, генерируемых начальными смещениями свободной поверхности, подводными и придонными возмущениями, смещен влево от точки переднего фронта  $x = t$ , то в пространственном случае существует некоторое критическое значение  $\ell_0 = \ell_0^0 \approx 25$ , что при  $\ell_0 < \ell_0^0$  максимум волны находится левее линии переднего фронта  $R = t$ , а при  $\ell_0 > \ell_0^0$  - правее, причем расстояние от линии переднего фронта до линии максимума в обоих случаях с увеличением времени увеличивается. Кроме того, образующиеся головные волны в плоском и пространственном случаях имеют разный порядок затухания. Проведенные исследования головных волн (с использованием специально построенных и вычисленных эталонных интегралов) при  $1 < \ell_0 < 50$  показали, что они описываются выражениями вида

$$\xi = \begin{bmatrix} R e \\ I m \end{bmatrix} R^{-1/2} \left\{ t^{-1/2} C(\bar{z}) A_1(z) A_1'(z) + t^{-5/6} D(\bar{z}) A_1^2(z) \right\},$$

причем в случае поверхностных давлений  $C = 0$ , а при других возмущениях  $D = 0$ .

Для трехмерных волн также построены примеры форм начальных возмущений, при которых наблюдается другой порядок затухания. Установлено, что в зависимости от крутизны (от отношения  $a_0/\ell$ ) возмущений в случае поверхностных давлений головные волны затухают как  $R^{-1/2} t^{-(5-4\nu)/6}$ , а при других видах рассмотренных возмущений - как  $R^{-1/2} t^{-(3-4\nu)/6}$  ( $0 \leq \nu < 3/4$ ).

Действие переменного потока для рассматриваемых возмущений сказывается в том, что он сносит образующиеся волны в направлении и со скоростью своего движения.

Подробное изложение результатов этого параграфа проведено в связи с тем, что предложенная методика исследования интегралов применялась в диссертации везде при изучении неустановившихся волн в однородном и стратифицированном океане, в том числе при учете вязкости и для волн типа корабельных.

Оценку точности полученных асимптотических формул для произвольных начальных возмущений можно сделать только численно, т.к. до настоящего времени были известны только сравнительно простые формулы для вида волн на свободной поверхности глубокого моря, полученные Н.Е.Кочиным при дельтообразных начальных возмущениях методом теории размерностей: в виде рядов по параметру в плоской задаче и в виде комбинации бесселевых функций дробного порядка в случае трехмерных волн. Поэтому во втором параграфе была поставлена цель: получить точные решения задач о генерации поверхностных волн в глубоком море недельтаобразными возмущениями. Такие решения были получены в случаях начальных смещений свободной поверхности, поверхностных давлений и импульсивно действующего источника (в плоском и пространственном случаях и в переменном потоке). Обобщены также формулы Н.Е.Кочина на случай переменного потока.

На основании точных решений были изучены основные характеристики образующихся волн и показано, что вид волн на свободной поверхности не зависит явно от ширины области возмущений или глубины погружения источника  $\ell$  (если ввести безразмерные  $R \sim R/\ell$  и  $t \sim t\sqrt{g/\ell}$ ). Это означает, что все волновые характеристики растягиваются по пространственным переменным и по времени при увеличении  $\ell$ . Установлена также хорошая точность метода стационарных фаз при описании коротких неустановившихся волн. Асимптотика заметно отличается от точных формул только вблизи эпицентра возмущений.

В последующих четырех параграфах изучались неустановившиеся пространственные волны, возникающие от движущихся возмущений постоянной и переменной интенсивности и влияние на них сил поверхностного натяжения и силы Кориолиса.

Впервые неустановившиеся корабельные волны были изучены Черкесовым Л.В. (1963, 1970). Однако до сих пор оставался открытым вопрос о поведении волновой поверхности в окрестности пре-

дельных углов волновой зоны за движущимся "кораблем". Для исследования этого вопроса в работе был применен метод близких седловых точек, разработанный в первом параграфе. Оказалось, что основные возмущения как раз и генерируются в окрестности этих предельных углов, что можно наблюдать в природе визуально. Во всей остальной угловой зоне амплитуды волн значительно меньше.

Влияние капиллярных сил, вращения Земли и переменной интенсивности движущихся возмущений автором изучены впервые. Установлен ряд неочевидных свойств и характеристик особенностей образования волн внутри основных областей возмущений и на предельных углах. Отдельные результаты были подтверждены другими авторами в более поздних работах. Поэтому на свойствах этих волн не останавливаемся. Заметим только, что сила Кориолиса на поверхностные корабельные волны влияет незначительно.

В последнем параграфе изучались плоские и трехмерные длинные волны типа цунами, которые образуются, как показано в первом параграфе, при  $\ell_0 \geq 50$  от различного рода возмущений. Исследование проводилось исходя не из общих линейных уравнений теории длинных волн, а из интегральных представлений, полученных в первом параграфе (при  $\alpha = 0$ ). Делалось единственное упрощение:  $th(2h)$  заменялось аргументом. Это позволило получить более общие точные решения и установить границы применимости теории длинных волн.

В пространственном случае до недавнего времени точных решений было неизвестно. Впервые удалось сделать это Доценко С.Ф. (1978) для одного вида начальных смещений свободной поверхности недельтообразного типа. В диссертации получены точные решения для ряда конкретных форм начальных смещений свободной поверхности и поверхностных импульсивных давлений. Анализ этих решений подтвердил основные выводы, сделанные в первом параграфе на основании асимптотических представлений пространственных волн типа цунами:

- а) амплитуда волн в фиксированной точке затухает как  $t^{-1/2}$
- а в фиксированный момент времени как  $R^{-1/2}$ ;
- б) максимум волны цунами смещен вправо от линии  $R = \sqrt{gh} t$ ;
- в) если начальные возмущения заданы в неограниченной области, то передний склон волны является более пологим, чем задний,

а скорости точек волны, лежащих на переднем склоне, больше скоростей точек волны на заднем склоне, т.е. с течением времени волна растягивается;

г) если начальные возмущения заданы в ограниченной области, то впереди переднего фронта, скорость которого постоянна и равна  $\sqrt{gh}$ , свободная поверхность невозмущена, максимум волны имеет скорость большую  $\sqrt{gh}$ , т.е. с течением времени передний склон волны становится все более крутым, что при учете нелинейности должно привести, вообще говоря, к ее опрокидыванию;

д) позади основной волны повышения остается "хвост", который представляет собой волну повышения для пологих форм начальных возмущений и волну понижения для более крутых.

В этом параграфе показано также, что при ширине области возмущений сравнимой или большей глубины жидкости волны цунами, генерируемые придонными возмущениями, только амплитудами отличаются от волн, генерируемых начальными смещениями свободной поверхности.

## ГЛАВА 2. Влияние вязкости на развитие поверхностных гравитационных и капиллярно-гравитационных волн в океане

Проводится исследование влияния вязкости, капиллярных сил, коэффициентов турбулентного обмена, скорости движений возмущений и частичного скольжения на развитие поверхностных волн в океане, генерируемых начальными смещениями свободной поверхности и поверхностными давлениями.

Первое исследование влияния вязкости на неустановившиеся волны принадлежит Л.Н.Сретенскому (1941). В последующие годы к этому вопросу обращались Черкесов Л.В., Никитин А.К., Потетюнко Э.Н., Debnath I., Miles J.W. и др. Однако, во всех этих работах были найдены лишь приближенные решения задач о генерации неустановившихся волн. Фактически основным результатом являлось: амплитуда волн затухает с течением времени по экспоненциальному закону. Автору впервые удалось получить точные решения и на их основе выявить ряд особенностей распространения волн в вязкой жидкости.

Исходя из общих линейных уравнений движения вязкой жидкости

в параграфах I-4 последовательно изучается влияние на короткие неустановившиеся волны вязкости, капиллярных сил, скорости движения поверхностных возмущений, а также коэффициентов вертикального и горизонтального турбулентного обмена.

В случае косинусоидальных начальных смещений свободной поверхности или импульсивных поверхностных давлений установлено следующее:

- существует критическая длина волны  $\lambda_0$  такая, что при длине волны меньше критической образуются только аperiodические стоячие колебания очень быстро затухающие со временем. Учет капиллярных сил уменьшает незначительно  $\lambda_0$ , но при  $\delta = A_2/A_z > 1$  ( $A_2$  и  $A_z$  - горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентного обмена)  $\lambda_0$  увеличивается, причем при  $\delta > 10^3$  существенно;

- частота периодических стоячих колебаний зависит от волнового числа  $\kappa$  таким образом, что  $\sigma(0) = \sigma(\kappa_0) = 0$ , а при  $\kappa = \kappa^0$   $\sigma$  достигает своего единственного максимума  $\sigma^0 = \sigma(\kappa^0)$ , т.е. существует минимальный период колебаний  $\tau^0 = 2\pi/\sigma^0$ . Капиллярность уменьшает  $\tau^0$ , а при  $\delta \gg 1$   $\tau^0$  существенно увеличивается;

- в вязкой жидкости могут существовать два вида волн с одной и той же частотой колебаний, но разными длинами и декрементом затухания, причем волна с меньшей длиной затухает значительно быстрее;

- хотя за счет вязкости происходит экспоненциальное по времени затухание амплитуды, однако декремент затухания пропорционален коэффициенту кинематической вязкости  $\nu$ , т.е. затухание является весьма медленным при  $\delta = 1$ . Так как декремент затухания в то же время пропорционален величине  $(1+\delta)/2$ , то, очевидно, что при  $\delta \gg 1$  основную роль в формировании волнового поля играет  $A_2$ ;

- установлено, что  $A_2$  зависит от характерных линейных размеров волнового движения. Так, например, при длине волны  $\lambda \approx 100$  м  $A_2 \leq 2 \cdot 10^5$  см<sup>2</sup>/с, а при  $\lambda \approx 1$  км  $A_2 \leq 6,4 \cdot 10^6$  см<sup>2</sup>/с;

- существует критическая скорость движения возмущений  $c_0$  такая, что при  $c < c_0$  корабельные волны не возникают. Предельный угол волновой зоны зависит от вязкости и скорости возмущений, причем при уменьшении  $c$  он уменьшается, а при  $c = c_0$

равен нулю; декременты затухания корабельных волн зависят не только от  $R$ , но и от луча  $\gamma$ .

При произвольных начальных возмущениях показано, что кроме гравитационных и капиллярно-гравитационных волн, аналогичных волнам в идеальной жидкости, на свободной поверхности образуются неустановившиеся волны чисто вязкого происхождения: амплитуда их пропорциональна  $\sqrt{t}$  и быстро затухает со временем. Эти волны являются предшественниками гравитационных.

В шестом параграфе изучены неустановившиеся волны, генерируемые начальными возмущениями свободной поверхности в океане конечной глубины. Здесь многие результаты идентичны тем, которые получены для коротких волн, за исключением формы представления волн чисто вязкого происхождения, а также качественного поведения частоты и декремента затухания в диапазоне длинных волн, где, например, декремент затухания пропорционален  $\sqrt{t}$ . В предельном случае коротких волн расчетные формулы совпадают с полученными в первом параграфе, а в случае длинных волн - с полученными в пятом параграфе, где изучались длинные волны.

Для волн типа цунами характерно, что влияние вязкости сказывается меньше на головные волны, чем на цуг волн, следующий за головной.

В шестом и седьмом параграфах в постановке теории длинных волн исследовалось влияние частичного скольжения на дне бассейна на прогрессивные и неустановившиеся волны, т.е. вместо условия прилипания для горизонтальной составляющей скорости потока бралось более общее условие  $p \nu u_z = \gamma u$  ( $\gamma$  - коэффициент частичного скольжения). Установлено, что характер волнового движения существенным образом зависит от параметра  $S = \ln \varepsilon_1 / \ln \varepsilon$  ( $\varepsilon_1 = \rho c \gamma^{-1}$ ,  $\varepsilon = \nu^{1/2} k^{-1/2} c^{-1/2}$ ,  $c = \sqrt{g/h}$ ). При  $S > -1$  все характеристики волнового поля являются фактически такими же, как и в случае использования условия прилипания, а при  $S < -2$  движение становится близким к волновым процессам в идеальной жидкости. При  $-2 < S < -1$  значения всех волновых характеристик резко изменяются от своих значений в режиме полного скольжения, до значений в режиме полного прилипания. Значение коэффициента частичного скольжения на дне бассейна играет также определяющую роль в формировании придонного погранслоя.

### ГЛАВА 3. Исследование распространения нелинейных поверхностных волн в океане постоянной глубины.

В настоящее время нелинейные гравитационные волны в однородном океане довольно хорошо изучены. Хуже исследованы нелинейные капиллярно-гравитационные волны, а влияние вращения Земли и упругих характеристик ледяного покрова на нелинейные прогрессивные и стоячие волны фактически не исследовалось. По изгибно-гравитационным волнам имеется только несколько работ: Марченко А.В. (1987, 1988) и *Forbes L. K.* (1968, 1988), в которых, однако, не учитывались инерционные свойства пластины, моделирующей ледяной покров.

Теорему существования и единственности для нелинейных прогрессивных гравитационных волн разными методами впервые доказали А.И. Некрасов и Леви-Чивита Т., а для капиллярно-гравитационных волн — Я.И. Секерж-Зенькович (1963). В диссертации (четвертый параграф) впервые, используя идеи метода Леви-Чивита, доказана аналогичная теорема для изгибно-гравитационных волн, из которой, как частный случай, следуют доказательства предыдущих теорем.

Способ доказательства теоремы указывает и путь нахождения решений задач как при произвольных длинах прогрессивных и стоячих волн в океане постоянной глубины, так и при критических, которые были получены в § 5 (прогрессивные волны) и в § 6 (стоячие волны) методом возмущений.

Известно, что в случае нелинейных гравитационных волн гребень всегда уже подошвы, амплитуда гребня всегда больше амплитуды подошвы, а скорость волны зависит от амплитуды и она больше скорости линейной волны. Изгибно-гравитационные волны могут иметь эти же свойства, но возможно и обратное: гребень шире подошвы, амплитуда гребня меньше амплитуды подошвы, скорость меньше скорости линейной волны. Это связано с тем, что как у прогрессивных, так и у стоячих волн существуют бесконечные спектры резонансных длин волн (каждое следующее приближение имеет дополнительно, по крайней мере, одну резонансную длину волны), при которых амплитуды стоковых приближений обращаются в бесконечность. При этом спектр для стоячих волн содержит, как подмножество, спектр для прогрессивных волн. В указанных выше работах это явление не ис-

следовалось, а в работах *Fogves* сказано, что при этих длинах волн происходит взламывание ледяного покрова. Однако, как следует из теоремы существования, в окрестностях этих длин волн происходит бифуркация решений, а нулевое приближение следует искать в виде составных волн. При первой длине из этого спектра решение имеет две ветви, а при второй — три ветви, т.е. существуют несколько волн одной длины, но имеющих разные скорости распространения (или частоты для стоячих волн). При следующих длинах волн бифуркации решений не происходит, а сами волны являются слабонелинейными.

Установлено, что резонансные длины волн удовлетворяют условиям общего нелинейного волнового синхронизма, характерного для диспергирующих сред. Найдены разрешающие уравнения для двухволнового и трехволнового нелинейного взаимодействия и получены их решения. В общем случае показано, что в течение соответствующего периода взаимодействующие волны обмениваются энергией. Однако, при согласовании фаз взаимодействующих волн существуют устойчивые волны, вид которых совпадает с найденными методом возмущений. Последнее свойство для такого типа уравнений обнаружено впервые.

Показано, что свойства прогрессивных и стоячих нелинейных капиллярно-гравитационных волн, исследованных в §§ I-3, фактически такие же, как и у изгибно-гравитационных. Качественное отличие состоит в том, что резонансные длины изгибно-гравитационных волн находятся в диапазоне нескольких сот метров, а капиллярно-гравитационных — нескольких сантиметров. Существование резонансных длин волн в обоих случаях приводит к богатому разнообразию форм свободной поверхности, далеко отличных от синусоидальной.

Исследование влияния вращения Земли на нелинейные прогрессивные волны, проведенное в § 7, позволило установить, что линейная волна вызывает во втором приближении инерционное периодическое течение (с периодом  $\mathcal{T}/\omega$ ), охватывающее всю толщу океана, скорость которого на порядок превосходит известное Стоксово течение.

Используя метод узких полос (Моисеев Н.Н., Тер-Крикоров А. М., 1959) и сохраняя в разложении потенциала скоростей слагае-

мые более высокого порядка, для определения вида уединенных волн в океане получено нелинейное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Решение этого уравнения позволило установить, что в океане могут существовать одногорбые и двугорбые уединенные волны повышения и понижения (волны-впадины). Показано, что капиллярные и упругие силы весьма мало влияют на форму этих волн. Ранее считалось, что уединенные волны могут существовать только в виде волны повышения. Имеются экспериментальные данные о существовании уединенных волн-впадин (Amick C. J., 1986). Предполагалось, что они образуются исключительно благодаря силам поверхностного натяжения и в качестве доказательства приводились теоретические исследования, основанные на учете лишь низших членов разложения уравнений по малому параметру. Но из этих исследований вытекало: глубина бассейна должна была быть меньше 1 мм (Amick C. J., 1986, 1987), что противоречило эксперименту, т.к. глубина жидкости в лотке была больше.

#### ГЛАВА 4. Развитие внутренних волн в океане и зависимости их характеристик от сил поверхностного натяжения, стратификации и типа возмущений

Двухслойная плотностная модель является исторически первой моделью стратифицированного океана. Благодаря ее простоте удалось исследовать многие важные характеристики внутренних волн, генерируемых различными возмущениями (см., например, монографии: Черкесов Л. В., 1970, 1973, 1976, 1980; Букатов А. Е., Черкесов Л. В., 1983). Однако, основным инструментом исследования, как и для поверхностных волн, являлся метод стационарных фаз, который, как показано в первой главе, в большинстве основных случаев дает неточные результаты. Поэтому в первых четырех параграфах методами, разработанными в § 1.1, обобщены отдельные результаты первой главы на случай двухслойного океана. Исследовались поверхностные и внутренние волны, генерируемые начальными смещениями свободной поверхности и поверхности раздела, поверхностными давлениями, придонными возмущениями и источниками, действующими в верхнем и нижнем слоях переменного потока. Установлены следующие особенности:

а) ширина области, занимаемой головными внутренними волнами, значительно меньше, чем у поверхностных волн, а в остальном

они имеют те же характерные особенности, что и головные поверхностные волны;

б) капиллярные силы на поверхности раздела оказывают почти такое же влияние на поверхностные волны, как и капиллярные силы на свободной поверхности, но последние фактически не оказывают влияния на внутренние волны;

в) при любых видах возмущений отголосок внутренних волн на свободной поверхности имеет амплитуду порядка  $O(\epsilon)$  ( $\epsilon = 1 - \rho_1/\rho_2$ ,  $\rho_i$  — плоскости слоев); импульсивные поверхностные давления не вызывают сколь-нибудь значительных внутренних волн; ощутимые внутренние волны в двухслойном океане образуются при начальных смещениях свободной поверхности и поверхности раздела, а также при подводных импульсивных возмущениях в верхнем слое;

г) учет капиллярных сил на поверхности раздела разнонаправленных потоков или потоков, имеющих разные скорости, приводит к устойчивости неустановившихся внутренних волн;

д) сила Кориолиса существенно уменьшает угловые зоны внутренних корабельных волн, длины которых значительно больше, чем у поверхностных волн;

е) возможно обобщение известных формул Н.Е.Кочина для коротких волн на случай переменного потока в двухслойном океане.

Как показано Ямпольским А.Д. (1962), внутренние волны приливных периодов являются в океане преобладающими. Исследования на двухслойных моделях не смогли выявить причин образования значительных внутренних волн. В диссертации получено точное решение задачи о возбуждении волн приливообразующими силами в непрерывно стратифицированном океане, ограниченном вертикальными берегами. Показано, что, исключая резонансные длины бассейна, приливообразующие силы не вызывают заметных внутренних волн. Однако, учет приливных течений на континентальном шельфе или на склонах подводных гор, привело к образованию внутренних волн большой амплитуды. Этим самым доказана известная гипотеза А.Дефанта (1952).

В шестом параграфе изучается совместное влияние стратификации, сжимаемости, вращения Земли и формы начальных возмущений на генерацию неустановившихся волн. Показано, что в океане возбуждаются гравитационные, внутренние или инерционные (в зависимости от соотношения между параметром Кориолиса и частотой Брен-

та-Вяйсяля) и акустические волны. Установлено, что инерционные волны получают свое развитие лишь в малой окрестности начальных возмущений, но амплитуды их весьма малы. Акустические волны по своей структуре напоминают внутренние волны, причем все моды акустических волн имеют одинаковую скорость передних фронтов, равную скорости звука в океане, т.е. они являются предшественниками гравитационных и внутренних волн, однако, амплитуды их незначительны. Так как скорости передних фронтов каждой моды внутренних волн существенно различны, то в фиксированную точку пространства следующая мода приходит тогда, когда амплитуда предыдущей моды, из-за затухания по времени, уже становится незначительной. Вращение Земли сказывается на гравитационные волны таким образом, что впереди основной головной волны образуется волна понижения, причем ширина ее с течением времени увеличивается.

#### ГЛАВА 5. Влияние вязкости на развитие внутренних волн в двухслойном море.

Результаты второй главы обобщаются на случай двухслойного океана.

В первых трех параграфах исследуются поверхностные и внутренние волны, генерируемые начальными возмущениями. Показано, что основные особенности распространения поверхностных волн в вязкой жидкости, установленные во второй главе, характерны и для внутренних волн. Однако, критическое значение длины внутренних волн, при котором возможны периодические по времени колебания, значительно меньше, а минимальный период колебаний значительно больше, чем у поверхностных волн. Это означает, что в определенном диапазоне длин волн в двухслойном море возможно только возбуждение внутренних волн, в то время как поверхностные волны фактически отсутствуют. Вторым отличием является то, что внутренние волны за счет вязкости затухают значительно быстрее, чем поверхностные. Так, например, на расстоянии 200 км от эпицентра начальных возмущений при  $\nu = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$  максимальное значение амплитуды внутренних волн затухает за счет вязкости на 5 %, в то время как амплитуда поверхностных волн уменьшается только на 0,25 %. При локальных начальных возмущениях как у поверхностных, так и внут-

ренных волн перед основной волной повышения образуется волна понижения. Таким образом, можно считать доказанным, что наблюдаемое на практике (Соловьев С.А., Милитеев А.Н., 1967) явление прихода волны понижения перед основной волной цунами происходит, главным образом, из-за совместного действия силы Кориолиса и вязкости жидкости.

В последующих двух параграфах проведено исследование влияния частичного скольжения на дне бассейна и поверхности раздела на поверхностные и внутренние волны, генерируемые начальными и периодическими по времени возмущениями. Вместо условия прилипания на поверхности раздела и на дне бассейна используются более общие условия, которые соответственно имеют вид:  $\beta_2 v_2 u_{2z} = \gamma_1 (u_1 - u_2)$  и  $\beta_2 v_2 u_{2z} = \gamma_2 u_2$ . Показано, что волновое поле, генерируемое возмущениями, складывается из двух составляющих: первая из них ( $\psi_1$ ) соответствует полю поверхностных волн, а вторая ( $\psi_2$ ) - внутренним. Частичное скольжение на поверхности раздела практически не оказывает никакого влияния на поле поверхностных волн и оно остается таким же, как и в однородном море.

В формировании поля внутренних волн большую роль играет коэффициент частичного скольжения на поверхности раздела, чем на дне бассейна. В формировании придонного погранслоя вклад  $\psi_2$  в 10-12 раз меньше вклада  $\psi_1$ . Погранслоем же у поверхности раздела создается исключительно внутренними волнами, а его величина и структура находятся в прямой зависимости от значения коэффициента частичного скольжения на поверхности раздела. Его ширина может в два раза превосходить ширину придонного погранслоя. Классификация характера скольжения аналогична классификации для поверхностных волн. Коэффициенты частичного скольжения на дне бассейна и поверхности раздела существенно изменяют скорости и декременты затухания поверхностных и внутренних волн соответственно.

## ГЛАВА 6. Нелинейные прогрессивные внутренние волны в океане постоянной глубины.

Методами, изложенными в третьей главе, изучены нелинейные внутренние волны в двухслойном и непрерывно стратифицированном океане.

В первом параграфе исследованы нелинейные поверхностные и внутренние волны в двухслойном океане, причем учитывается действие капиллярных сил как на свободной поверхности, так и на поверхности раздела. Показано, что в двухслойном океане возможно существование двух типов волн одной длины, но распространяющихся с разными скоростями: скорость  $C_1$  близка к скорости поверхностных волн в однородном море, а скорость  $C_2 \ll C_1$  и характеризует внутренние волны. Основное развитие поверхностные волны получают на свободной поверхности, а отголосок внутренних волн на ней имеет весьма малую амплитуду. Если коэффициенты поверхностного натяжения  $\alpha_1$  (на свободной поверхности) и  $\alpha_2$  (на поверхности раздела) отличны от нуля, то для поверхностных и внутренних волн справедливы все те свойства, которыми обладают поверхностные волны в однородном море. Только во всех резонансных случаях амплитуда внутренних волн примерно в 1,25 раза больше амплитуды поверхностных. Если же  $\alpha_2 = 0$ , то не существует длин волн, при которых возможен нелинейный резонанс у внутренних волн, в то время как у поверхностных волн он возможен. Отметим, что резонансные длины внутренних волн находятся в метровом диапазоне, а поверхностных — в сантиметровом.

Нелинейные прогрессивные волны в непрерывно стратифицированном океане при  $N(z) = \text{const}$  с учетом вращения Земли изучены во втором параграфе. Показано, что при произвольных длинах волн нелинейность оказывает малое влияние на амплитуды образующихся волн. Учет вращения Земли и нелинейности приводит к несимметричности внутренних волн относительно вертикали, проведенной через вершину гребня. В зависимости от исходных параметров либо задний, либо передний склон может быть более крутым, чем противоположный. При увеличении глубины профиль внутренней волны становится близким к симметричному, а затем уже другой склон становится более крутым. Для моды с номером  $n$  такое чередование повторяется  $n$  раз. Как и в однородном океане, учет вращения Земли приводит к образованию прогрессивными волнами во втором нелинейном приближении периодического инерционного течения.

Установлено, что первая мода внутренних волн не имеет резонансных длин волн (при  $\alpha_2 = 0$  внутренние волны в двухслойном океане также не имели резонансных длин волн!), а мода с номером

$n$  ( $n \geq 2$ ) имеет  $n-1$  резонансную длину волны. Получена приближенная формула, определяющая эти длины:  $\lambda_{mn} \approx 2\sqrt{3} h \sqrt{n^2 - m^2}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ;  $m = \overline{1, n-1}$ ), т.е. резонансные длины волн при небольших сравнимы или больше глубины океана. В окрестностях резонансных длин нелинейные внутренние волны имеют профили, существенно отличные от синусоидальной формы, а амплитуды волн значительно превосходят амплитуду линейной волны. Показано также, что при исследовании нелинейных волн в стратифицированном море на свободной поверхности можно пользоваться условием твердой "крышки".

В заключительном параграфе предлагается аналитико-численный метод решения задач о нелинейных прогрессивных волнах во вращающемся океане для случая, когда плотность морской воды является произвольной функцией глубины. Решение предлагается искать методом возмущений. Тогда определение характеристик волнового поля в нулевом приближении сводится к нахождению некоторой функции  $v(z)$ , являющейся решением однородной краевой задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка с переменными коэффициентами. Все последующие приближения определяются из решений граничных задач для ОДУ второго порядка с переменными коэффициентами, правая часть которого зависит от  $v(z)$  и  $v'(z)$ . В связи с этим задачу на собственные значения предлагается решать методом ортогональной прогонки (т.к. метод позволяет определять сразу  $v(z)$  и  $v'(z)$ ) с корректировкой собственных значений методом Ньютона, а получающиеся задачи Коши — асимптотически устойчивым методом В.В.Бобкова. При применении данного метода аналитическое задание плотности или частоты Вэйсяля-Брента не обязательно, а достаточно их задание в узлах сетки, которая может быть неравномерной.

Апробация предлагаемого аналитико-численного метода проводилась для случая  $N(z) = \text{const}$ . Численные расчеты показали, что имеется не только качественное, но и количественное согласование с результатами, полученными во втором параграфе. Даже при резонансных длинах волн отличие составляло не более 5 %.

В работе проведены расчеты внутренних волн для модели плотности с двумя пикноклинами и для распределения плотности, взятой из натуральных измерений в районе ПОЛИМОДЕ. В последнем случае имеется хорошее согласование с известными результатами.

В приложения вынесены вопросы, связанные с исследованием интегралов, встречающихся в теории неустановившихся корабельных волн и в теории неустановившихся движений вязкой жидкости, а также дано обоснование динамического граничного условия на поверхности раздела упругой пластины и жидкости в нелинейной теории изгибно-гравитационных волн.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах.

1. Неустановившиеся внутренние волны в вязкой жидкости.// Морские гидрофизические исследования, 1969, № I(43). С.148-169. (Совместно с Черкесовым Л.В.)
2. О влиянии вязкости на внутренние волны типа цунами.// Изв. АН СССР. ФАО, 1969, т.5, № 2, С. 1197-1203.
3. Неустановившиеся внутренние волны в вязкой жидкости конечной глубины.// Морские гидрофизические исследования, 1970, № I(47). С. 29-49 (Совместно с Черкесовым Л.В.)
4. Развитие корабельных волн в неоднородной жидкости.// Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 4. С. 137-146. (Совместно с Черкесовым Л.В.)
5. Задача Коши-Пуассона для капиллярно-гравитационных волн в вязкой жидкости.// Тез. докл. на III Республик. конфер. математиков Белоруссии. Минск, 1971. С. 58.
6. Развитие волн, возникающих от движущихся периодических возмущений.// Морские гидрофизические исследования, 1971, № I(51). С. 62-80.
7. Деформация волн цунами при выходе на мелководье.// Тез. докл. на 15-й Генеральной Ассамблее МГТС. Л., 1971. С. 81. (Совместно с Черкесовым Л.В.)
8. Развитие внутренних волн.// Морские гидрофизические исследования, 1971, № 2(52). С. 9-61 (Совместно с Черкесовым Л.В.)
9. Диссипация внутренних волн.// Морские гидрофизические исследования, 1971, № 2(52). С. 88-112. (Совместно с Черкесовым Л.В.)
10. Влияние вязкости и ледяного покрова на волновые движения, возникающие от начальных возмущений.// Тез. докл. на Международном симпозиуме "Термодинамическое взаимодействие атмосферы и океана в Арктике". Л., 1972. С.15.

11. Deformation of tsunami waves while they reach the shallow water. // *Proces-Verbovy, Japso, 1979, s. 58-59.*  
(Совместно с Черкесовым Л.В., Кнышом В.В. и Лукиной И.П.)

12. О развитии поверхностных волн в вязкой жидкости. // *Морские гидрофизические исследования, 1972, № 2(58). С. 27-39.*

13. Неустановившиеся корабельные волны в неоднородной жидкости конечной глубины. // *Морские гидрофизические исследования, 1972, № 2(58). С. 11-26 (Совместно с Черкесовым Л.В.)*

14. О влиянии силы Кориолиса на неустановившиеся волны, возникающие от движущихся возмущений. // *Морские гидрофизические исследования, 1973, № 1(60). С. 66-74.*

15. Каналовая теория внутренних приливных волн. // *Морские гидрофизические исследования, 1975, № 1(68). С. 50-61. (Совместно с Черкесовым Л.В.)*

16. О влиянии сил поверхностного натяжения на неустановившиеся волны в вязкой жидкости. // *Морские гидрофизические исследования, 1975, № 2(69). С. 61-62.*

17. О диссипации неустановившихся волн. // *Морские гидрофизические исследования, 1976, № 4(75). С. 88-101. (Совместно с Черкесовым Л.В.)*

18. О влиянии горизонтального обмена количеством движения на волны, возникающие от начальных возмущений. // *Сб.: Цунами и внутренние волны, 1976. С. 45-46.*

19. Неустановившиеся волны в вязкой жидкости от движущихся возмущений. // *Тез. докл. на У Республиканской конференции математиков Белоруссии, Гродно, 1980. С. 63-64. (Совместно с Абрашиной Н.Н.)*

20. Нелинейные волны в вязкой жидкости. // *Материалы Республиканской конфер., посвященной 60-летию БГУ, Минск, 1981. С. 121-122.*

21. Влияние силы Кориолиса на нелинейные прогрессивные волны. // *Материалы Республик. конфер., посвященной 60-летию БГУ, Минск, 1981. С. 123-124.*

22. Нелинейное установившееся движение упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости. // *Труды Всес. совещ.: Волновые процессы в морях и океанах. Севастополь, 30-31 марта, 1983. С. 30-33. Сб. деп. в ВИНТИ 9.01.1984 (Совместно с Глазуном О.М.)*

23. Нелинейные колебания упругой пластины, плавающей на поверхности идеальной жидкости. // Тез. докл. и лекц. Всесоюз. школы молодых ученых "Вычислительные методы и математическое моделирование", М., 1984. С.212 (Совместно с Гладуном О.М.)

24. Неустановившиеся длинные волны в вязкой жидкости. // В сб.: Теоретическое исследование волновых процессов в океане, Севастополь, 1984. С.87-93. (Совместно с Гончаренко Ж.Ф.)

25. О характере ветвления решений некоторых нелинейных задач гидродинамики волн. // Аннотации докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и приклад. мех., Ташкент, 1986. С.196 (Совместно с Гладуном О.М.)

26. О нелинейном установившемся движении упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости бесконечной глубины. // Изв. АН СССР, МЖТ, 1987, № 2: С.119-123. (Совместно с Гладуном О.М.)

27. Нелинейные стоячие колебания упругой пластины, плавающей на поверхности тяжелой жидкости бесконечной глубины. // ПММ, 1988, т.52, в.3. С.460-464. (Совместно с Гладуном О.М.)

28. Нелинейные капиллярно-гравитационные волны. // В сб.: Материалы Республ. научно-практич. конф., Минск, 1988. С.74-75. (Совместно с Санкович Т.В.)

29. О влиянии вязкости на неустановившиеся внутренние волны. // В сб.: Математ. моделир. волновых процессов в океане, Севастополь, 1988. С.91-99.

30. Нелинейные установившиеся колебания упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины. // Изв. АН СССР, МЖТ, 1989, № 3. С.146-154. (Совместно с Гладуном О.М.)

31. Особенности распространения уединенных волн в жидкости. // В сб.: Материалы республ. научно-практ. конф., Минск, 1989. С.118-119. (Совместно с Гладуном О.М.)

32. О влиянии силы Кориолиса и сжимаемости морской среды на распространение неустановившихся волн. // В сб.: Волновые движения жидкости, Ростов-на-Дону, 1989. С.69-86. (Совместно с Кузнецовой Л.Л.)

33. Особенности распространения нелинейных волн в жидкости. // Аннот. докл. 7-го Всесоюз. съезда по теор. и приклад. мех., М., 1991. С.103-104. (Совместно с Гладуном О.М.)

34. Зависимость характеристик неустановившихся волн в жидкости от сил поверхностного натяжения, типа возмущений и скорости их движения. // В сб.: Актуальные проблемы социально-гуманит. и естественных наук, Минск, 1991. С.98-99

Подписано к печати 29.07.92 . Формат 60x84/16.

Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0.

Тираж 100. Заказ № 131

Отпечатано на ротапринте БГУ.

220080, г.Минск, Бобруйская, 7.





467542

71823.375  
AB 25.615

✱

252