Академия наук Украины
Ордена Трудового Красного Знамени Институт математики

На правах рукописи

СИНЕНКО Марина Анатольевна

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИЙ

01.01.01 - математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико- математических наук

Киев-1992

Работа выполнена в отделе теории ... математики Украины.

Научный руководитель : доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
ПЕРЕВЕРЗЕВ С.В.

Официальные оппоненты : доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
РОНТО Н.И.

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
ПОЛЯКОВ Р.В.

Ведущая организация : Научно-исследовательский центр МГУ

Защита состоится "27" жовтня 1992 г.
в 15 часов на заседании специализированного совета Д 016.50.01 при Институте математики АН Украины по адресу :
252601 Киев 4,ГСП, ул. Репина, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "25" вересня 199 г.

Ученый секретарь
специализированного совета ГУСАК Д.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одновременно с функциональным анализом, возникшим в начале нынешнего столетия, развивалась также и теория приближенных методов функционального анализа. Так, созданию и исследованию приближенных методов решения операторных уравнений посвящены работы таких известных ученых как С. Банах, Е. Шмидт, Л.В. Канторович, Ю.Д. Соколов и другие.

К наиболее широко используемым методам приближенного решения операторных уравнений следует отнести прямые и итерационные методы. Вместе с тем, начиная с классической работы Е. Шмидта, большое распространение получили методы, сочетающие в себе идеи как прямых, так и итерационных методов и поэтому, в некотором смысле, более эффективные. Такие методы иногда называют аппроксимационно-итеративными. Различные схемы аппроксимационно-итеративных методов предложены в работах Ю.Д. Соколова, В.И. Лебедева, А.М. Самойленко, Н.И. Ронто, А.Ю. Лучки, Н.С. Курпеля, Б.Г. Габдулхаева, С.В. Переверзева. Настоящая диссертация посвящена исследованию оптимальной скорости сходимости некоторых типов аппроксимационно-итеративных методов.

Следует отметить, что, в связи с потребностями вычислительной математики, в настоящее время особое место занимает вопрос оптимизации приближенных методов. В трудах А.Н. Колмогорова, С.М. Никольского, Н.П. Корнейчука, В.К. Дзядыка, В.М. Тихомирова, связанных с решением экстремальных задач теории аппроксимации, была разработана методология современной теории наилучших приближений, элементы которой успешно применялись для оптимизации приближенных методов решения операторных уравнений в работах К.И. Бабенко, Н.С. Бахвалова, Г.М. Вайникко, В.В. Иванова, В.А. Морозова, Б.Г. Габдулхаева, С.В. Переверзева, А.И. Гребенникова. В идейном плане к перечисленным работам примыкает и данная диссертация.

Цель работы состоит в получении общих теорем о двусторонних оценках скорости сходимости аппроксимационно-итеративных методов решения операторных уравнений II рода и в применении этих теорем для решения вопроса о точном порядке оптимальной скорости сходимости аппроксимационно-итеративных методов на некоторых классах интегральных уравнений.

Методика исследований. Основные результаты диссертации получены путем привлечения методов современной теории наилучших приближений и функционального анализа. В работе систематически используются теорема о поперечнике шара, элементы общей теории приближенных методов Л.В. Канторовича.

Научная новизна и практическая ценность. В работе получены следующие результаты:

I)сформулированы и доказаны общие теоремы о порядковых оценках оптимальной скорости сходимости аппроксимационно-итеративных методов применительно к линейным операторным уравнениям II рода, заданных в гильбертовом пространстве;

2) найдены точные порядковые оценки оптимальной скорости сходимости проекционно-итеративных и КР методов решения двумерных уравнений Фредгольма II рода с ядрами из определенных классов дифференцируемых функций;

3) для классов уравнений Фредгольма с дифференцируемыми ядрами получены точные порядковые оценки оптимальной скорости сходимости обобщенных КР методов, построенных на базе адаптивных и неадаптивных проекционных методов.

Апробация работы и публикации. Полученные в диссертации результаты докладывались и обсуждались на семинарах отдела теории приближения Института математики АН Украины, на республиканской научной конференции " Экстремальные задачи теории приближения и их приложения" (Киев, 1990).

Основные результаты выполненных исследований опубликованы в [I - 4] .

Структура и объем работы. Диссертация объемом 138 страниц машинописного текста состоит из введения, десяти параграфов и списка цитируемой литературы из 52 наименований.

Основное содержание работы.

В первом параграфе представлено описание ряда аппроксимационно-итеративных методов приближенного решения операторных уравнений II рода, а также рассмотрено два подхода к вопросу об оптимизации скорости сходимости методов указанного типа.

Пусть $\mathcal{X}$ - произвольное гильбертово пространство. Рассмотрим в нем линейное операторное уравнение II рода

$$u = Hu + f, \tag{I}$$

где u - искомый, f - известный элементы из $\mathcal{X}$, H - некоторый линейный непрерывный оператор из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}$.

К важнейшим методам приближенного решения уравнения (I) следует отнести прямые и итерационные методы. Прямыми обычно называют методы сведения операторных уравнений к конечномерным уравнениям с последующим точным решением этих уравнений. Итерационными называют методы, приводящие к построению последовательности приближенных решений

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_k$$

уравнения (I), которая при $k \to \infty$ сходится к точному решению указанного уравнения. Однако и прямые, и итерационные методы не лишены отдельных недостатков. Поэтому естественным образом возникает необходимость создания и исследования комбинированных приближенных методов, сочетающих в себе идеи как прямых, так и итерационных подходов, и в некотором смысле более эффективных, чем каждый из исходных методов. Такие методы иногда называют аппроксимационно-итеративными методами.

В диссертации исследуются следующие аппроксимационно-итеративные методы: проекционно-итеративный метод, КР и KP_1P_2 методы, обобщенный КР метод. Каждый из названных методов можно рассматривать как комбинацию метода последовательных приближений и некоторого прямого (проекционного) метода. Кроме того, каждый из них суть линейный итерационный процесс, оставляющий точное решение $u = (I-H)^{-1} f$ уравнения (I) неподвижной точкой. В.И. Лебедев показал, что всякий линейный итерационный метод, для которого точное решение (I) - неподвижная точка, состоит в том, что последовательность приближенных решений строится согласно формулам

$$u_{k+1} = u_k + B(f + Hu_k - u_k). \tag{2}$$

Здесь B - некоторый линейный оператор, характеризующий тип итерационного метода.

Пусть X_N - некоторое конечномерное подпространство X, $\dim X_N = N$, P_N - оператор проектирования на X_N. Проекционно-итеративный метод можно описать с помощью формулы (2), положив

$$B = B_{PI} = B_{PI}(P_N, H) = I + H(I - P_N H)^{-1} P_N. \tag{3}$$

Заметим, что проекционно-итеративный метод возник на базе разработанного Ю.Д. Соколовым в 1952 году метода осреднения функциональных поправок и получил дальнейшее развитие в работах А.Ю. Лучки, Н.С. Курпеля, В.И. Тивончука и других.

Другой метод аппроксимационно-итеративного типа в 1967 году предложил В.И. Лебедев. Этот метод получил название КР метод, так как для его реализации необходимо выполнить две операции : определить элемент $u_{k+\frac{1}{2}}$, где

$$u_{k+\frac{1}{2}} = f + H u_k$$

(эту операцию В.И. Лебедев назвал К-операцией) и , кроме того, из конечномерного уравнения

$$\omega_{k+\frac{1}{2},N} = P_N H \omega_{k+\frac{1}{2},N} + P_N H (u_{k+\frac{1}{2}} - u_k)$$

вычислить поправку $\omega_{k+\frac{1}{2},N}$ (Р-операция). При этом

$$u_{k+1} = u_{k+\frac{1}{2}} + \omega_{k+\frac{1}{2},N}.$$

КР метод также можно задать с помощью соотношения (2), в котором

$$B = B_{KP} = B_{KP}(P_N, H) = I + (I - P_N H)^{-1} P_N H. \tag{4}$$

Заметим, что кроме описанного выше , существуют еще некоторые варианты КР метода.

Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ - произвольные конечномерные подпространства X, $\dim \mathcal{F}_1 = N_1$, $\dim \mathcal{F}_2 = N_2$, такие , что

$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{0\}$. Пусть также P_1 и P_2 - операторы проектирования соответственно на $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$. Положив в равенстве (2)

$$B = B_{KP_1P_2} = I + (I-P_1H)^{-1}P_1H + (I-P_2H)^{-1}P_2H + \tag{5}$$

$$+ (I-P_2H)^{-1}P_2H(I-P_1H)^{-1}P_1H,$$

получим соотношение, которое определяет KP_1P_2 метод.

Заметим, что если подпространство $\mathcal{X}_N$, на базе которого строятся проекционно-итеративный и КР методы, связано с подпространствами $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, участвующими в построении KP_1P_2 метода, соотношениями

$$\mathcal{X}_N = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2, \quad \dim \mathcal{F}_1 = \dim \mathcal{F}_2 = \frac{1}{2}\dim \mathcal{X}_N,$$

то при реализации проекционно-итеративного и КР методов на каждом шаге итерации нужно решать систему линейных алгебраических уравнений размерности $N \times N$, а пользуясь KP_1P_2 методом - две системы размерности $\frac{1}{2}N \times \frac{1}{2}N$. Ясно, что решение двух таких систем требует, вообще говоря, меньшего числа арифметических операций, чем решение одной системы размерности $N \times N$. В этом состоит определенное преимущество KP_1P_2 метода перед проекционно-итеративным и КР методами.

В §I диссертации рассмотрен еще один подход к построению аппроксимационно-итеративных методов. Он основан на следующем соображении. Так как при $B = (I-H)^{-1}$ итерационный процесс (2) сходится за одну итерацию, то естественно выбирать оператор B близким к резольвенте $(I-H)^{-1}$ оператора H. Это можно сделать, воспользовавшись тождеством

$$(I-H)^{-1} = \sum_{k=0}^{m} H^k + (I-H)^{-1}H^{m+1}$$

и положив, например,

$$B = B_m = \sum_{k=0}^{m} H^k + (I-P_NH)^{-1}P_NH^{m+1}, \tag{6}$$

где P_N – проектор на некоторое подпространство X_N, $\dim X_N = N$.

В случае $m=0$ соотношения (2) и (6) определяют описанный выше КР метод, поэтому итерационный процесс (2),(6) естественно называть обобщенным КР методом.

Итерационный процесс (2) можно представить как метод последовательных приближений

$$u_{k+1} = Tu_k + \mathcal{Y}, \tag{7}$$

где оператор T определяется равенством

$$T = T(B, H) = I + BH - B, \tag{8}$$

а $\mathcal{Y} = Bf$.

Заметим, что в случае проекционно-итеративного, КР, KP_1P_2 и обобщенного КР методов оператор B и, следовательно, оператор T зависят от оператора H из уравнения (1) и проектора P_N, т.е. $T = T(H, P_N)$.

Будем говорить, что стационарный итерационный метод (2) сходится к решению u уравнения (1) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\mu < 1$, если для любого $k = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$\| u - u_k \|_X \le c\mu^k,$$

где постоянная c не зависит от k.

В монографиях Г.И. Марчука и В.И. Лебедева, а также М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицкого и В.Я. Стеценко показано, что если оператор T вполне непрерывен и его спектральный радиус

$$\mu(T) = \lim_{k \to \infty} \| T^k \|_{X \to X}^{1/k}$$

удовлетворяет неравенствам $0<\mu(T)<1$, то метод последовательных приближений (7) сходится к точному решению исходного уравнения со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\mu(T)$.

Мы будем рассматривать лишь такие операторы H и P_N, при которых операторы $T=T(H,P_N)$ вполне непрерывны и $\mu(T)>0$.

Таким образом, можно утверждать, что итерационные процессы типа (2) сходятся к решению конкретного уравнения (I) со скоростью геометрической прогресси со знаменателем

$$\mu(T(H,P_N))=\lim_{k\to\infty}\|T^k(H,P_N)\|^{1/k}_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}}.$$

Пусть $\mathcal{P}_{\mathcal{X}_N}$ – множество всех проекторов на фиксированное подпространство $\mathcal{X}_N$ ($\dim\mathcal{X}_N=N$), а $\mathcal{P}_N$ – множество всевозможных проекторов размерности N, т.е.

$$\mathcal{P}_N=\bigcup_{\substack{\mathcal{X}_N\subset\mathcal{X}\\ \dim\mathcal{X}_N=N}}\mathcal{P}_{\mathcal{X}_N}.$$

Одним из возможных подходов к оптимизации скорости сходимости процессов (3),(4),(5), (6) на множестве уравнений (I) с операторами из некоторого класса $\mathcal{H}$ является оптимизация в смысле величины

$$\mu_N(\mathcal{H},T)=\inf_{\substack{\mathcal{X}_N\\ \dim\mathcal{X}_N=N}}\ \sup_{H\in\mathcal{H}}\ \inf_{P_N\in\mathcal{P}_{\mathcal{X}_N}}\mu(T(H,P_N)).$$

В этом случае всем операторам $H\in\mathcal{H}$ сопоставляется одно и то же подпространство $\mathcal{X}_N$ и лишь потом это подпространство выбирается наилучшим образом для всего класса $\mathcal{H}$ среди различных подпространств размерности N.

Кроме того, мы рассмотрим также оптимизацию скорости сходимости итерационных процессов (3) –(6) в смысле величины

$$\mu_N^*(\mathcal{H},T)=\sup_{H\in\mathcal{H}}\ \inf_{P_N\in\mathcal{P}_N}\mu(T(H,P_N)).$$

При таком подходе подпространство $\mathcal{X}_N$ подбирается отдельно к каждому конкретному оператору H из уравнения (1). Естественно предполагать, что в этом случае точность итерационных процессов существенно повысится.

Во втором параграфе определены конкретные классы операторов.

Будем говорить, что нормированное пространство $\mathcal{Y}$ вложено в нормированное пространство $\mathcal{X}$ (и обозначать $\mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$), если $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ и для любого элемента $f \in \mathcal{X}$ $\|f\|_{\mathcal{Y}} \geq \|f\|_{\mathcal{X}}$.

Пусть $\mathcal{X}$ - гильбертово пространство и $\mathcal{Y}$ вложено в $\mathcal{X}$. Первый класс операторов определим следующим образом:

$$\mathcal{H}^{\mathcal{Y}} = \mathcal{H}^{\mathcal{Y}}(\alpha,\beta) = \{ H \,/\, H: \mathcal{X} \to \mathcal{Y},\ \|H\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}} \leq \alpha,$$

$$\|(I-H)^{-1}\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}} \leq \beta \}. \tag{9}$$

Через $\mathcal{Y}^u$, $\mathcal{Y}^v$ обозначим некоторые подпространства $\mathcal{X}$. На каждом из этих подпространств зададим линейные необязательно ограниченные операторы соответственно $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_\ell$ на $\mathcal{Y}^u$, $\mathcal{U}_i: \mathcal{Y}^u \to \mathcal{X}$ и $V_1, V_2, \dots, V_m$ на $\mathcal{Y}^v$, $V_j: \mathcal{Y}^v \to \mathcal{X}$. Положим $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_\ell)$, $V = (V_0, V_1, \dots, V_m)$, $\mathcal{U}_0 = V_0 = I$.

Нормы в $\mathcal{Y}^u$ и $\mathcal{Y}^v$ определим с помощью равенств

$$\|f\|_{\mathcal{Y}^u} = \sum_{i=0}^{\ell} \|\mathcal{U}_i f\|_{\mathcal{X}}, \quad \|f\|_{\mathcal{Y}^v} = \sum_{j=0}^{m} \|V_j f\|_{\mathcal{X}}.$$

Теперь введем следующий класс операторов:

$$\mathcal{H}^{u,v} = \mathcal{H}^{u,v}(\alpha,\beta,\gamma) = \{ H \,/\, H: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}^u,\ \|H\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}^u} \leq \alpha,$$

$$(\mathcal{U}_i H)^*: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}^v,\ \|(\mathcal{U}_i H)^*\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}^v} \leq \beta_i,\ i = 0, 1, \dots, \ell,$$

$$\|(I-H)^{-1}\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}} \leq \gamma \}. \tag{10}$$

Заметим, что описанные выше классы операторов можно рассматривать как некоторые обобщения интегральных операторов, возникающих при решении задач математической физики.

Так, пусть L_2 – пространство суммируемых в квадрате на отрезке $[0;1]$ функций f с обычной нормой, а L_2^1 – пространство абсолютно непрерывных на $[0;1]$ функций f, производные которых принадлежат L_2, $\|f\|_{L_2^1} = \|f\|_2 + \|f'\|_2$.

В §2 показано, что при $\mathcal{X} = L_2$, $\mathcal{Y} = L_2^1$ классу $\mathcal{H}^{\mathcal{Y}}$ принадлежат операторы из слабо-сингулярных уравнений Пайерлса, возникающих в рамках теории переноса частиц.

§2 содержит также примеры интегральных операторов, принадлежащих классу $\mathcal{H}^{u,v}$.

Рассмотрим в L_2 интегральные операторы Фредгольма

$$Hf(t) = \int_0^1 h(t,\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

резольвенты которых ограничены константой γ, и, кроме того, для всякой функции выполняются неравенства

$$\left\| \frac{d^\mu}{dt^\mu} \int_0^1 \frac{\partial^\nu h(\tau,t)}{\partial \tau^\nu} f(\tau)\, d\tau \right\|_2 \le C_{\mu\nu} \|f\|_2, \quad \mu = 0,1,\dots,s, \quad \nu = 0,1,\dots,r.$$

Класс таких операторов обозначим $\mathcal{H}^{r,s} = \mathcal{H}^{r,s}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Пусть L_2^ν – пространство функций, $(\nu-1)$-е производные которых абсолютно непрерывны на $[0;1]$ а $f^{(\nu)} \in L_2$

$$\|f\|_{L_2^\nu} = \|f\|_2 + \sum_{j=1}^{\nu} \left\| \frac{d^j}{dt^j} f(t) \right\|_2.$$

Во втором параграфе мы показали, что $\mathcal{H}^{r,s} \subset \mathcal{H}^{u,v}(\alpha,\beta,\gamma)$ при $\mathcal{X} = L_2$, $\mathcal{Y}^u = L_2^r$, $\mathcal{Y}^v = L_2^s$.

Пусть теперь $L_2(Q)$ – пространство суммируемых в квадрате на $Q = [0;2\pi]\times[0;2\pi]$ периодических функций $f = f(u,v)$.

Класс двумерных операторов Фредгольма

$$Hf(t,\tau) = \int_Q h(t,\tau,u,v)\, f(u,v)\, du\, dv,$$

которые удовлетворяют следующим требованиям:

1) $\| (I-H)^{-1} \|_{L_2(Q)\to L_2(Q)} \le \gamma$;

2) для любой функции f из $L_2(Q)$ выполняются неравенства

$$\Big\| \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial t^k \partial \tau^\ell} \int_Q \Big[\frac{\partial^{m+p}}{\partial u^m \partial v^p} h(u,v,t,\tau) \Big] f(u,v)\, du\, dv \Big\|_{L_2(Q)}$$

$$\le C_{k\ell m p} \|f\|_{L_2(Q)}, \quad k,\ell,m,p = 0,1,2,\dots,r,$$

обозначим $\mathcal{H}_F^r = \mathcal{H}_F^r(\alpha,\beta,\gamma)$.

Через $L_2^{r,r}$ обозначим пространство периодических функций $f(t,\tau)$, смешанные производные которых $f^{(\mu,\nu)}$, $\mu,\nu=\overline{0,r}$, принадлежат пространству $L_2(Q)$

$$\|f\|_{L_2^{r,r}} = \sum_{\mu=0}^{r} \sum_{\nu=0}^{r} \Big\| \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^\mu \partial \tau^\nu} f(t,\tau) \Big\|_{L_2(Q)}.$$

При $\mathcal{X} = L_2(Q)$, $\mathcal{Y}^u = \mathcal{Y}^v = L_2^{r,r}$, $\mathcal{H}_F^r \subset \mathcal{H}^{u,v}$.

В §3 приведены некоторые вспомогательные сведения из теории приближения и функционального анализа. В частности, рассмотрены ортопроекторы S_{Γ_n}, сопоставляющие функции $f \in L_2$ частные суммы Фурье $S_{\Gamma_n} f$ с гармониками из гиперболического креста.

В §4 для проекционно-итеративного и КР методов получены оценки сверху и снизу величин $\mu_N(\mathcal{H},T)$ и $\mu_N^*(\mathcal{H},T)$ на множестве уравнений (I), операторы H которых принадлежат классам $\mathcal{H}^v$ и $\mathcal{H}^{u,v}$.

Теорема 4.I. Пусть натуральное число N, подпространство $\mathcal{X}_N$, $\dim \mathcal{X}_N = N$ и ортопроектор $P_N : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_N$ таковы, что

$$\nu = \alpha\beta \, \| I - P_N \|_{\mathcal{Y} \to \mathcal{X}} < 1$$

(α, β – константы из определения класса $\mathcal{H}^{\mathcal{Y}} = \mathcal{H}^{\mathcal{Y}}(\alpha, \beta)$). Тогда для проекционно-итеративного и КР методов, построенных на базе подпространства $\mathcal{X}_N$, справедливы оценки

$$\mu_N^{*}(\mathcal{H}^{\mathcal{Y}}, T_{KP}) \le \mu_N(\mathcal{H}^{\mathcal{Y}}, T_{KP}) \le \frac{\alpha\beta}{1-\nu} \| I - P_N \|_{\mathcal{Y} \to \mathcal{X}},$$

$$\mu_N^{*}(\mathcal{H}^{\mathcal{Y}}, T_{PI}) \le \mu_N(\mathcal{H}^{\mathcal{Y}}, T_{PI}) \le \frac{\alpha\beta}{1-\nu} \| I - P_N \|_{\mathcal{Y} \to \mathcal{X}}.$$

Обозначим $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ множество линейных непрерывных операторов, действующих из гильбертова пространства $\mathcal{X}$ в гильбертово пространство $\mathcal{Y}$, а $\mathcal{P}_N$ – множество всевозможных ортопроекторов на различные подпространства размерности N.

Теорема 4.2. Имеют место следующие оценки :

$$\mu_N(\mathcal{H}^{\mathcal{Y}}, T_{KP}) \ge \mu_N^{*}(\mathcal{H}^{\mathcal{Y}}, T_{KP}) \ge \delta \sup_{P \in \mathcal{P}_{2N+1} \cap \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} \| P \|^{-1}_{\mathcal{X} \to \mathcal{Y}},$$

$$\mu_N(\mathcal{H}^{\mathcal{Y}}, T_{PI}) \ge \mu_N^{*}(\mathcal{H}^{\mathcal{Y}}, T_{PI}) \ge \delta \sup_{P \in \mathcal{P}_{2N+1} \cap \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} \| P \|^{-1}_{\mathcal{X} \to \mathcal{Y}},$$

где $\delta = \min\{\alpha, \frac{\beta - 1}{\beta}\}$.

Теорема 4.3. Пусть $\mathcal{H}^{u,v} = \mathcal{H}^{u,v}(\alpha, \beta, \gamma)$ – класс операторов, определенный условиями (10). Если натуральное число N, подпространство $\mathcal{X}_N \subset \mathcal{X}$, $\dim \mathcal{X}_N = N$ и ортопроектор $P_N : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_N$ таковы, что

$$\nu = \alpha\gamma \, \| I - P_N \|_{\mathcal{Y}^u \to \mathcal{X}} < 1,$$

то для проекционно-итеративного и КР методов, построенных на базе подпространства $\mathcal{X}_N$, имеют место оценки

$$\mu_N^*(\mathcal{H}^{u,v}, T_{KP}) \le \mu_N(\mathcal{H}^{u,v}, T_{KP}) \le C\|I-P_N\|_{Y^u \to X} \|I-P_N\|_{Y^v \to X},$$

$$\mu_N^*(\mathcal{H}^{u,v}, T_{PI}) \le \mu_N(\mathcal{H}^{u,v}, T_{PI}) \le C\|I-P_N\|_{Y^u \to X} \|I-P_N\|_{Y^v \to X},$$

где $$C = (\alpha\beta_0\gamma + \sum_{i=0}^{\ell}\beta_i)(1+\frac{\alpha\delta}{1-\gamma}\|I-P_N\|_{Y^u \to X}).$$

В определении класса положим $Y^u \subset Y^v$.

Теорема 4.4. Для проекционно-итеративного и КР методов справедливы следующие оценки :

$$\mu_N(\mathcal{H}^{u,v}, T_{KP}) \ge \mu_N^*(\mathcal{H}^{u,v}, T_{KP}) \ge \delta \sup_{P \in \mathcal{P}_{2N+1} \cap \mathcal{L}(X, Y^u)} \|P\|^{-1}_{X \to Y^u} \|P\|^{-1}_{X \to Y^v},$$

$$\mu_N(\mathcal{H}^{u,v}, T_{PI}) \ge \mu_N^*(\mathcal{H}^{u,v}, T_{PI}) \ge \delta \sup_{P \in \mathcal{P}_{2N+1} \cap \mathcal{L}(X, Y^u)} \|P\|^{-1}_{X \to Y^u} \|P\|^{-1}_{X \to Y^v},$$

где $$\delta = \min\{\alpha, \{\beta_i\}, i=0,1,2,\dots,\ell, \frac{\gamma-1}{\gamma}\}.$$

Отметим , что при доказательстве теорем 4.2 и 4.4 приводилась схема рассуждений , связанная с известной теоремой В.М. Тихомирова о поперечнике шара. Ранее подобная схема применялась в работах С.В. Переверзева и С.Г. Солодкого.

В §5 исследуется задача об оптимальной скорости сходимости KP_1P_2 метода и доказываются утверждения,аналогичные теоремам 4.3, 4.4.

§§ 6,7 и 8 посвящены применению общих теорем из §§ 4 и 5 для случая конкретных функциональных пространств и интегральных операторов.

Так, в §6 определены оптимальные порядки скорости сходимости проекционно-итеративного, КР и KP_1P_2 методов на множестве одномерных интегральных уравнений Фредгольма II рода

$$u = Hu + f = \int_0^1 h(t,\tau)u(\tau)d\tau + f(t), \tag{11}$$

операторы H которых принадлежат либо классу $\mathcal{H}^{r,s}$, либо $\widetilde{\mathcal{H}}^{r,s}$, отличающемуся от $\mathcal{H}^{r,s}$ наличием условий периодичности. Кроме того, указаны подпространства $\mathcal{X}_N$, на базе которых строятся проекционно-итеративный, КР и KP_1P_2 методы, реализующие эти оптимальные порядки

В частности, §6 содержит следующий результат:

$$\mu_N(\mathcal{H}^{r,s}, T_{PI}) \asymp N^{-r-s}. \tag{12}$$

Ранее соотношение (12) было установлено С.В. Переверзевым непосредственно для интегральных уравнений (11). При этом существенно использовалась установленная А.Ю. Лучкой оценка сверху для скорости сходимости проекционно-итеративного метода в зависимости от гладкости ядра уравнения. У нас же соотношение (12) следует из общих теорем 4.3 и 4.4.

В §7 установлены теоремы об оптимальной скорости сходимости проекционно-итеративного и КР методов для двумерных уравнений Фредгольма II рода с дифференцируемыми ядрами. В качестве примера приведем следующее утверждение.

Теорема 7.1. При $r = 1, 2, \ldots$ верны следующие соотношения:

$$\mu_N^*(\mathcal{H}_F^r, T_{KP}) \asymp \mu_N(\mathcal{H}_F^r, T_{KP}) \asymp N^{-2r} \ln^{2r} N,$$

$$\mu_N^*(\mathcal{H}_F^r, T_{PI}) \asymp \mu_N(\mathcal{H}_F^r, T_{PI}) \asymp N^{-2r} \ln^{2r} N.$$

Оптимальный порядок для класса $\mathcal{H}_F^r$ реализуют КР и проекционно-итеративный методы, построенные на базе подпространства $\mathcal{X}_{\Gamma_n}^T$ тригонометрических полиномов с гармониками из гиперболического креста, $n = [N \ln^{-1} N]$.

В §8 в качестве следствия из общей теоремы 4.1 мы получили оценку сверху для скорости сходимости проекционно-итеративного и КР методов на классе слабо-сингулярных уравнений Пайерлса.

Девятый параграф посвящен изучению обобщенных КР методов (2), (6) на классе интегральных уравнений Фредгольма II рода (11), операторы H которых принадлежат классу $\mathcal{H}^{r,s}=\mathcal{H}^{r,s}(\alpha,\beta,\gamma)$. Здесь указаны оптимальные порядки скорости сходимости обобщенных КР методов на классе $\mathcal{H}^{r,s}$ как в случае, когда подпространство X_N, на базе которого строятся рассматриваемые методы, адаптировано к конкретному оператору H из $\mathcal{H}^{r,s}$, так и в случае, когда такая адаптация отсутствует. Кроме того, обсуждается вопрос о целесообразности использования для приближенного решения уравнения (II) с операторами из класса $\mathcal{H}^{r,s}$ того или иного метода из множества обобщенных КР методов.

Напомним, что если $m=0$, мы получим обычный КР метод, оптимальный порядок скорости сходимости которого на классе $\mathcal{H}^{r,s}$ установлен в §6, а именно

$$\mu_N^*(\mathcal{H}^{r,s},T_0)\asymp\mu_N(\mathcal{H}^{r,s},T_0)\asymp N^{-r-s} \tag{I3}$$

При этом оптимальный порядок скорости сходимости реализует КР метод, построенный на базе подпространства X_N^a алгебраических полиномов степени $N-1$.

Ясно, что применение любого аппроксимационно-итеративного метода, построенного на базе фиксированного подпространства X_N, более удобно, чем использование метода, предполагающего адаптацию подпространства к конкретному оператору H. С другой стороны, подбирая подпространство наилучшим образом к каждому оператору H отдельно, естественно ожидать существенного увеличения точности итерационных процессов. Из соотношения (I3), в частности, следует, что при $m=0$ (т.е. в случае обычного КР метода) оптимальный порядок скорости сходимости на классе $\mathcal{H}^{r,s}$ не может быть улучшен даже за счет адаптации подпространства X_N отдельно к каждому оператору из $\mathcal{H}^{r,s}$. Однако при $m>0$ это уже не так. При $m=1$ адаптация подпространства позволяет теоретически в два раза увеличить скорость сходимости (2),(6). Но, к сожалению, предложенный способ адаптации подпространства неконструктивен. Имеет место теорема.

Теорема 9.2. При $r,s=1,2,\dots$, $m=1$

$$\mu_N^*(\mathcal{H}^{r,s},T_m)\asymp N^{-2(r+s)}.$$

Указанный оптимальный порядок достигается , если обобщенный КР метод ($m = 1$) построен на базе подпространства

$$\mathcal{X}_N = span\{\psi_i, \ i = 1, 2, \dots, N\}$$

Здесь $\psi_i, i = 1, 2, \dots, N$, суть собственные элементы оператора $H^2(H^2)^*$, соответствующие первым N собственным числам этого оператора с учетом их кратности.

Следующая теорема устанавливает оптимальный порядок скорости сходимости обобщенных КР методов в случае, когда указанные методы построены на базе фиксированного подпространства $\mathcal{X}_N$. А именно , имеет место следующая теорема.

Теорема 9.4. При $r, s = 1, 2, \dots$, $m = 1$ верно неравенство

$$\mu_N(\mathcal{H}^{r,s}, T_m) \geq c N^{-r-s},$$

где c - некоторая константа , не зависящая от N .

Отметим ,что для получения приведенной выше оценки снизу была построена конструкция, опирающаяся на глубокую теорему о существовании идеального сплайна с заданными свойствами. Ранее эта теорема использовалась рядом авторов при решении различных экстремальных задач теории аппроксимации.

В §10 рассмотрен метод решения операторных уравнений, предложенный Е. Шоком. Этот метод,не являясь линейным итерационным процессом, также представляет собой сочетание метода последовательных приближений и некоторого прямого метода.

Для класса уравнений Вольтерра II рода с дифференцируемыми ядрами получена оценка сверху скорости сходимости этого итерационного метода,из которой следует, что при фиксированном числе итераций данный метод обеспечивает более высокую точность, чем стандартный метод последовательных приближений.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах :

I. Синенко М.А. О связи между проекционно-итеративным методом и КР методом для уравнений II рода. // Экстремальные задачи теории приближения и их приложения.- Тез. докл. Республ. научн.конф.

Киев, 29-30 мая 1990 г. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990.- С.116

2. Синенко М.А. О связи между проекционно-итеративным методом и КР методом для уравнений II рода // Современные вопросы теории приближения и комплексного анализа. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990.-С. 113-122.

3. Синенко М.А. Об оптимальной скорости сходимости метода В.И. Лебедева на некоторых классах операторных уравнений // Укр. мат. журн. - 1992. - 44. №4. - С.541-547.

4. Переверзев С.В., Синенко М.А. Об оптимальной скорости сходимости КР метода и некоторых его обобщений / Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1991. - 31 , №10.-С. 1452 - 1459.

Подп. в печ. 24. 06. 92. Формат 60x84 / 16. Бумага тип. Офс.печать
Усл. печ.л. 1,04.Усл.кр.-отт.1,04.Уч.-изд.л.0,9.Тираж 100
экз.Зак. 191 . Бесплатно
Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН Украины.
252601 Киев 4, ГСП, ул. Репина , 3