АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

на правах рукописи

БОЙЧУК АЛЕКСАНДР АНДРЕЕВИЧ

КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕТЕРОВЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Специальность 01.01.02 -
дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

КИЕВ 1992

Работа выполнена в И...
Институте геофизики им. С.И. Субботина ...

Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук,
профессор Н.В. Азбелев;
доктор физико-математических наук,
профессор Ю.А. Рябов;
доктор физико-математических наук
Н.И. Ронто.

Ведущая организация

Санкт-Петербургский государственный
университет

Защита состоится "20" октября 1992 г. в 15^{00} на заседании специализированного Совета Д 016.50.02 при Институте математики АН Украины по адресу 252601, г. Киев, ул. Репина, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики АН Украины.

Автореферат разослан "8" сентября 1992 года.

Ученый секретарь
специализированного Совета А.Ю. Лучка

Общая характеристика работы.

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Математическое моделирование многочисленных задач естествознания приводит к необходимости изучения линейных и слабонелинейных краевых задач для систем функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ),включающих в себя системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), уравнений с импульсным воздействием, систем ОДУ с запаздывающим аргументом, интегральных уравнений и т.д. При этом краевые условия задаются линейным или слабонелинейным векторным функционалом, число m компонент которого вообще говоря не совпадает с порядком n дифференциальной системы. Такого типа задачи для систем ФДУ являются нетеровыми (или с нетеровой линейной частью) и включают в себя наиболее сложные и малоисследованные как недоопределенные, так и переопределенные; как некритические, так и критические краевые задачи.

Специфика такого рода задач заключается в том, что их линейная часть является оператором, не имеющим обратного, что не позволяет непосредственно применять традиционные методы исследования краевых задач, основанные на применении принципов неподвижной точки. Применение же к исследованию краевых задач, как к операторным уравнениям с линейным ограниченным оператором, известной леммы Шмидта для построения обобщенного обратного оператора, разрешающего исходную линейную краевую задачу, ограничивается требованием ее фредгольмовости (т.е.требованием m=n).

Этим обусловливается актуальность настоящей диссертации, которая посвящена анализу линейных нетеровых и слабонелинейных (с нетеровой линейной частью) краевых задач для широкого класса систем ФДУ, а также вопросам построения обобщенных обратных и псевдообратных операторов к линейным ограниченным нетеровым операторам в банаховых и гильбертовых пространствах. Большинство работ, посвященных изучению таких задач, выполнены в предположении их фредгольмовости (m = n) (Н.В. Азбелев, О.Вейвода, Д.Векслер, И.Г. Малкин, Д.И. Мартынюк, Ю.А. Митропольский, Н.А. Перестюк, Н.И. Ронто, Ю.А.Рябов, А.М. Самойленко) и более того, в предположении, что оператор линейной части исходной краевой задачи имеет обратный.

Целью диссертационной работы является разработка конструктивных методов анализа линейных нетеровых и слабонелинейных (с нетеровой линейной частью) краевых задач для широкого класса систем ФДУ (систем ОДУ, систем ОДУ с импульсным воздействием, систем ОДУ с запаздывающим аргументом, систем операторных уравнений).

ОБЩИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ. Основные результаты работы получены с помощью применения и развития аппарата обобщенных операторов и матриц, методов теории возмущений,методов теории краевых задач для систем ФДУ, методов теории нелинейных колебаний.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА Определяется следующими основными результатами, полученными в диссертации:

- с единых позиций получены оригинальные методы построения обобщенного оператора (обобщенной матрицы) Грина полуоднородной линейной нетеровой краевой задачи для систем ФДУ; изучены основные свойства построенного обобщенного оператора Грина, его связь с обобщенным обратным оператором к оператору исходной краевой задачи; получены критерии разрешимости и структура общего решения таких задач;

- предложены новые конструкции для построения обобщенного обратного оператора к линейному ограниченному нетеровому оператору исходной краевой задачи в банаховом пространстве;

- предложены новые конструкции для построения единственного псевдообратного оператора к нетеровому оператору в гильбертовом пространстве;

- получены конструктивные условия разрешимости и предложены сходящиеся итерационные алгоритмы построения решений слаболинейных (с линейной нетеровой частью) краевых задач для систем ФДУ; предложена естественная классификация таких задач;

- впервые построено уравнение для порождающих амплитуд слабонелинейных краевых задач и показано, что оно определяет необходимое условие существования решения, а корни его задают амплитуду порождающего к искомому решения;

- получены коэффициентные условия существования слабонелинейных автономных краевых задач для систем ОДУ; предложены сходящиеся итерационные алгоритмы построения как решений, так и неизвестного правого конца отрезка, на котором ищется решение таких краевых задач;

- получены коэффициентные условия существования и предложен способ, основанный на методе типа Вишика-Люстерника, построения решения линейных нетеровых краевых задач с малым линейным возмущением, когда порождающая краевая задача не имеет решения при произвольных неоднородностях в системе и в краевых условиях.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Работа носит теоретический характер. На основе применения и развития аппарата обобщенных обратных операторов предложены новые конструктивные методы анализа линейных нетеровых и слабонелинейных (с нетеровой линейной частью) краевых задач для систем ФДУ, что существенно углубляет существующие представления об изучаемых задачах и расширяет возможности их использования. Практическая ценность исследований обусловливается широким применением теории краевых задач в самых различных областях знаний - теории нелинейных колебаний, теории устойчивости движений, теории управления, ряда геофизических и радиотехнических задач; а также конструктивностью предложенных в работе условий существования решений и алгоритмов их построения. Кроме того, вопросы существования и построения решений краевых задач занимают одно из центральных и принципиально важных мест в качественной теории дифференциальных уравнений.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

II и IV Международных конференциях " Дифференциальные уравнения и их применения" (Руссе, Болгария, июль I98I и I989);

IX и X Международных конференциях по нелинейным колебаниям -ICNO(Киев, сентябрь I98I и Варна, Болгария, сентябрь I984);

V Международной конференции по численным методам (Мишкольц, Венгрия, август I990);

II Международном коллоквиуме по дифференциальным уравнениям (Пловдив, Болгария, август I99I);

совместном заседании семинара им. И.Г.Петровского по дифференциальным уравнениям и Московского математического общества (Москва, январь I987);

VIII и XV школах по теории операторов в функциональных пространствах (Рига, октябрь I983 и Ульяновск, сентябрь I990);

Всесоюзной летней школе "Метод Функций Ляпунова в анализе динамики систем (Иркутск, июнь I985);

Всесоюзной конференции по теории и приложениям ФДУ (Душанбе, сентябрь 1987);

III Уральской региональной конференции "ФДУ и их приложения" (Пермь, февраль 1988);

VII Всесоюзной конференции "Качественная теория дифференциальных уравнений" (Рига, апрель 1989);

Всесоюзной конференции "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики"(Тернополь,сентябрь 1989);

на семинарах:

по математической физике и теории нелинейных колебаний (руководитель - академик Ю.А.Митропольский, Институт математики АН Украины);

по аналитической механике (руководитель член-корреспондент АН России В.В.Румянцев, ВЦ АН России);

по дифференциальным уравнениям (руководитель - член-корреспондент АН Украины А.М.Самойленко, Институт математики АН Украины);

по функционально-дифференциальным уравнениям (руководитель-профессор Н.В.Азбелев, Пермский политехнический институт);

по функциональному анализу (руководитель - профессор В.А.Треногин, Московский институт стали и сплавов);

по дифференциальным уравнениям (руководитель - профессор Ю.А.Рябов, Московский автомобильно-дорожный институт);

по дифференциальным уравнениям в частных производных (руководитель - профессор М.Л. Горбачук, Институт математики АН Украины).

ПУБЛИКАЦИИ. Полученные в диссертации результаты опубликованы в монографии [I4] и статьях автора [I-I3], в статьях автора и его учеников [I5-24,26,30-33], а также в статьях, написанных в соавторстве [25,27-29]. Из работ, выполненных в соавторстве, в автореферат и диссертацию включены результаты, полученные автором самостоятельно.

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТ. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Она содержит 278 страниц машинописного текста, включая библиографический список из I6I работы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении обоснована актуальность выбранного направления исследования, дан краткий обзор литературы по теме диссертации, приведена аннотация полученных результатов.

Первая глава посвящена изучению линейных нетеровых краевых задач вида

$$\Lambda z = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ l \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} \varphi \\ \alpha \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где $\mathcal{L} = \frac{d}{dt} - A : C^1[a,b] \to C[a,b]$ линейный обыкновенный дифференциальный оператор; $l = col(l_1, \dots, l_m): C[a,b] \to R^m$ – линейный m-мерный векторный функционал; $-\infty < a \le t \le b < \infty$; $\alpha \in R^m$.

Введем обозначения: $X(t)$ - $n \times n$ -мерная фундаментальная матрица однородного уравнения $\mathcal{L} z = 0$, $K(t,\tau) = \frac{1}{2} X(t) X^{-1}(\tau) \, sign(t-\tau)$ - - n × n-мерная матрица Коши, определенная в квадрате $\{(t,\tau): a \le t \le b;\ a \le \tau \le b\}$; $Q = lX(\cdot)$ - $m \times n$-мерная постоянная матрица; $P_{Q^*}: R^m \to N(Q^*)$ - $m \times m$ -мерная матрица-ортопроектор: $P^2_{Q^*} = P_{Q^*} = P^*_{Q^*}$; Q^+ - $n \times m$-мерная матрица псевдообратная к Q по Муру-Пенроузу.

ТЕОРЕМА I.2.[*] Если $\operatorname{rank} Q = n_1 \le \min(n, m)$, то соответствующая (1) однородная краевая задача $\Lambda z = 0$ имеет $r = n - n_1$ и только r линейно независимых решений. Неоднородная краевая задача (1) разрешима тогда и только тогда, когда $\varphi(t) \in C[a,b]$, $\alpha \in R^m$ удовлетворяют условию

$$P_{Q^*_d}\left\{ \alpha - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau)\varphi(\tau)d\tau \right\} = 0 \tag{2}$$

и при этом имеет r параметрическое семейство решений

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + \bar{z}_0(t), \quad \bar{z}_0(t) = (G\varphi)(t) + X(t)Q^+\alpha,$$

где $X_r(t)$ - $n \times r$ -матрица, столбцы которой есть полная система r линейно независимых решений однородной задачи $\Lambda z = 0$, $P_{Q^*_d}$ - $d \times m$-мерная матрица, строки которой есть полная система $d = m - n_1$ линейно независимых строк матрицы P_{Q^*}; G - обобщенный оператор Грина, определяемый по формуле:

$$(G\varphi)(t) \stackrel{def}{=} \int_a^b K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau - X(t)Q^+\ell \int_a^b K(\cdot,\tau)\varphi(\tau)d\tau .$$

Если функционал ℓ такой, что имеет место равенство

$$\ell \int_a^b K(\cdot,\tau)\varphi(\tau)d\tau = \int_a^b \ell K(\cdot,\tau)\varphi(\tau)d\tau ,$$

то обобщенный оператор Грина имеет интегральное представление

$$(G\varphi)(t) = \int_a^b G(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau ,$$

---

[*] Нумерация утверждений соответствует принятой в диссертации.

ядро которого

$$G(t,\tau) = K(t,\tau) - X(t)Q^{+}\ell K(\cdot,\tau) \qquad (3)$$

называется обобщенной матрицей Грина.

Обобщенная матрица Грина (3) краевой задачи (1) обладает следующими свойствами:

1. Каждый столбец матрицы при $t \neq \tau$ является непрерывно-дифференцируемым решением однородного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t} = A(t)G(t,\tau) \quad , \quad t \neq \tau \ ;$$

2. В точке $t = \tau$ матрица имеет разрыв первого рода по

$$G(\tau+0,\tau) - G(\tau-0,\tau) = E_n \quad .$$

3. Матрица удовлетворяет краевому условию:

$$\ell G(\cdot,\tau) = P_{Q^*}\ell K(\cdot,\tau) \ .$$

Обозначим через $\Lambda^- : C[a,b] \times R^m \to C^1[a,b]$ следующий оператор

$$\Lambda^- * = [G*, XQ^+ *] ;$$

Оператор Λ^-, разрешающий задачу (1) $z = \Lambda^- \begin{bmatrix} \varphi \\ \alpha \end{bmatrix}$, является обобщенным обратным к оператору Λ и удовлетворяет его определяющим свойствам

$$\Lambda^- \Lambda \Lambda^- = \Lambda^- \quad , \quad \Lambda \Lambda^- \Lambda = \Lambda \ .$$

Такой подход позволил с единых позиций исследовать так называемые критические случаи краевых задач (1), когда соответствующая (1) однородная задача $\Lambda z = 0$ имеет нетривиальные решения. Большинство авторов исследовали такие задачи в некритических случаях, когда задача $\Lambda z = 0$ имеет лишь тривиальные решения, а также в предположении фредгольмовости (n = m) оператора Λ (И.Г.Малкин, А.Ю.Лучка, Ю.А.Рябов). Кроме того предложенный подход применим при исследовании краевых задач вида (1) с более общим функционально-дифференциальным оператором и в более общих пространствах (что продемонстрировано в четвертой главе диссертации).

Во второй главе разработанные методы построения решений линейных нетеровых краевых задач для систем ОДУ применяются к построению решений слабонелинейных краевых задач с нетеровой линейной порождающей ($\varepsilon = 0$) задачей вида

$$(\mathcal{L} z)(t) = \varphi(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad \ell z = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \tag{4}$$

где $Z(z,t,\varepsilon)$ нелинейная по z, n-мерная вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по z в окрестности порождающего решения и непрерывная по t, ε: $Z(z,t,\varepsilon) \in C^1[z]$, $\|z - z_0\| \leq q$; $C[t]$, $t \in [a,b]$; $C[\varepsilon]$ $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$- m-мерный векторный нелинейный функционал, непрерывно дифференцируемый по z (в смысле Фреше) и непрерывный по ε в окрестности порождающего решения, причем

$$J(0,0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial J(0,0)}{\partial z} = 0 \quad . \tag{5}$$

Найдены условия существования и алгоритмы построения решения $z(t,\varepsilon) \in C[\varepsilon]$ краевой задачи (4), обращающегося при $\varepsilon = 0$ в решение порождающей краевой задачи (1) в некритическом случае, когда однородная порождающая краевая задача (1) не имеет решений, кроме тривиального.

Полученные в этой главе результаты расширяют и дополняют исследования по теории нелинейных колебаний для слабовозмущенных краевых задач. Практически все известные исследования в этой области относились к теории слабонелинейных фредгольмовых (n = m) и более того - периодических ($n = m$, $\ell z = z(a) - z(b) = \alpha = 0$) краевых задач. Исследованы и классифицированы наиболее интересные и малоизученные критические случаи, когда порождающая для (4) краевая задача (1) имеет r - параметрическое ($r = n - \operatorname{rank} Q$) семейство решений. Ставится задача об определении необходимых и достаточных условий существования и алгоритмов построения решения $z(t,\varepsilon) \in C^1[t]$, $t \in [a,b]$; $C[\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, обращающегося при $\varepsilon = 0$ в одно из решений $z_0(t,c_r)$ порождающей нетеровой краевой задачи (1).

Необходимые условия существования таких решений дает следующая.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть краевая задача (4) удовлетворяет указанным выше условиям и имеет решение $z(t,\varepsilon) \in C[\varepsilon]$ $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ обращающееся при $\varepsilon = 0$ в порождающее решение $z_0(t,c_0^*)$ с константой $c_r = c_0^*$. Тогда вектор $c_0^* \in R^r$ удовлетворяет уравнению

$$F(c_0^*) = P_{Q_d^*}\left\{J(z_0(\cdot,c_0^*),0) - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau)\,Z(z_0(\tau,c_0^*),\tau,0)\,d\tau\right\} = 0 \tag{6}$$

Уравнение (6) по аналогии с периодическими задачами (И.Г.Малкин) будем называть уравнением для порождающих амплитуд краевой задачи (4).

Выполнив в (4) замену переменной $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon)$, в которой вектор констант $c_0^* \in R^r$ удовлетворяет уравнению (6), приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x &= \varepsilon Z(z_0(t,c_0^*) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon) \quad , \\ \ell x &= \varepsilon J(z_0(\cdot,c_0^*) + x(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

Используя непрерывную дифференцируемость вектор-функции $Z(z,t,\varepsilon)$ и векторного функционала $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ по z в окрестности точки $z = z_0$, $\varepsilon = 0$, выделяем у вектор-функции $Z(z_0 + x, t, \varepsilon)$ и векторного функционала $J(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ линейную часть по x и члены нулевого порядка по ε. Тогда имеет место

$$Z(z_0+x,t,\varepsilon)=f_0(t,c_0^*)+A_1(t)x+R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\quad,$$

$$J(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)=J_0(z_0(\cdot,c_0^*))+l_1x(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),$$

где $f_0(t,c_0^*)=Z(z_0(t,c_0^*),t,0)\in C[t]$;

$$J_0(z_0(\cdot,c_0^*))=J(z_0(\cdot,c_0^*),0)\quad,$$

$$A_1(t)=A_1(t,c_0^*)=\frac{\partial Z(z,t,0)}{\partial z}\Bigg|_{z=z(t,c_0^*)}\quad,$$

$l_1x(\cdot,\varepsilon)$ – линейная по x часть векторного функционала $J(z_0+x,\varepsilon)$. Нелинейная вектор-функция $R(x,t,\varepsilon)$ принадлежит $C^1[x]$, $C[t]$, $C[\varepsilon]$ в области $\|x\|\le q$, $t\in[a,b]$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ при этом

$$R(0,t,0)=0\ ;\quad \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial x}=0\ ;\quad R_1(0,0)=0;\quad \frac{\partial R_1(0,0)}{\partial x}=0\ .$$

На основании теоремы 1.2 для решения $x(t,\varepsilon)$ краевой задачи (7) имеем представление $x(t,\varepsilon)=X_r(t)c+x^{(1)}(t,\varepsilon)$. Здесь неизвестный вектор $c\in R^r$ определяется из условия разрешимости задачи (7)

$$P_{Q_d^*}\{J_0(z_0(\cdot,c_0^*))+l_1x(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-l\int_a^b K(\cdot,\tau)[f_0(\tau,c_0^*)+A_1(\tau)(X_r(t)c+x^{(1)}(\tau,\varepsilon))+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau\}=0\ ,$$

а неизвестная вектор-функция $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ - по формуле для нахождения частного решения

$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon\big(G[f_0(\tau,c_0^*)+A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon)+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]\big)(t)+$$

$$+\varepsilon X(t)Q^+\{J_0(z_0(\cdot,c_0^*))+l_1x(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}.$$

Теорема 2.3. Пусть краевая задача (4) удовлетворяет указанным условиям так, что имеет место критический случай $\operatorname{rank} Q=n_1$ и соответствующая порождающая краевая задача (1) при условии (2) $(d=m-n_1)$ и только при нем имеет r- параметрическое семейство $(r=n-n_1)$ порождающих решений. Тогда для каждого значения вектора $c_r=c_0^*\in R^r$, удовлетворяющего уравнению (6) для порождающих амплитуд, при

$$P_{B_0}=0\ ,\quad P_{B_0^*}P_{Q_d^*}=0$$

краевая задача (4) имеет решение $z(t,\varepsilon):\ z(t,\varepsilon)\in C^1[t],C[\varepsilon]$ обращающееся в порождающее $z_0(t,c_0^*)$ при $\varepsilon=0$. Это решение можно определить с помощью сходящегося на $[0,\varepsilon_*]$ итерационного процесса

$$c_k=-B_0^+P_{Q_d^*}\{l_1x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)x_k^{(1)}(\tau,\varepsilon)+R(x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau\},$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon\big(G[f_0(\tau,c_0^*)+A_1(\tau)(X_r(\tau)c_k+x_k^{(1)}(\tau,\varepsilon))+R(x_k,\tau,\varepsilon)]\big)(t)+ \tag{8}$$

$$+\varepsilon X(t)Q^+\{J_0(z_0(\cdot,c_0^*))+l_1x_k(\cdot,\varepsilon)+R_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\},$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon)=X_r(t)c_k+x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$z_{k+1}(t,\varepsilon)=z_0(t,c_0^*)+x_{k+1}(t,\varepsilon),\quad x_0(t,\varepsilon)=x_0^{(1)}(t,\varepsilon)=0;\ k=0,1,2,\dots;$$

где

$$B_0 = P_{Q_d^*}\left\{ l_1 X_r(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) X_r(\tau) d\tau \right\} - d \times r -$$

мерная матрица; P_{B_0} и $P_{B_0^*}$ - $r \times r$ и $d \times d$ мерные матрицы (ортопроекторы), проектирующие R^r и R^d на нуль пространства $N(B_0)$ и $N(B_0^*)$ матриц B_0 и B_0^*, соответственно.

По аналогии с периодической краевой задачей (Ю. А. Рябов), рассмотренный случай $P_{B_0} = 0$ $(\operatorname{rank} B_0 = r)$ будем называть критическим случаем первого порядка. Он характерен тем, что вопрос о существовании решения нетеровой краевой задачи (4) полностью решается после анализа системы, служащей для нахождения первого приближения к искомому решению.

Случай $P_{B_0} \neq 0$ $(\operatorname{rank} B_0 < r)$ назван критическим случаем второго порядка. Для него также получены проверяемые достаточные условия разрешимости и предложены сходящиеся алгоритмы построения решений.

Аналогичные вопросы нахождения условий существования и построения решений поставлены и решены для автономных слабонелинейных краевых задач вида

$$\frac{dz}{dt} = Az + \varepsilon Z(z,\varepsilon), \qquad (9)$$

$$lz = Mz(a) + Nz(b(\varepsilon)) = \alpha,$$

где A, M и N - постоянные $n \times n$ - матрицы;

$$Z(z,\varepsilon) \in C^1[z],\ C[\varepsilon],\quad \|z - z_0\| \le q,\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0];$$

$$z(t,\varepsilon) \in C^1[t],\ t \in [a, b(\varepsilon)],\ b(0) = b^*;\ z(t,\varepsilon) \in C[\varepsilon];\ z(t,0) = z_0(t, c_0^*).$$

Исследованы критические случаи, когда порождающая ($\varepsilon = 0$)

краевая задача (9) имеет r- параметрическое семейство решений

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + \bar{z}_0(t) .$$

Такие автономные задачи имеют существенную особенность, поскольку правый конец $b(\varepsilon)$ промежутка $[a, b(\varepsilon)]$, на котором ищется решение краевой задачи (9) неизвестен и определяется вместе с самим решением.

В случае периодической краевой задачи ($M = -N = E_n, \alpha = 0$) приходим к известной постановке задачи о построении периодического решения задачи (9) и определении его периода.

<u>Теорема 2.7</u>. Пусть автономная задача (9) имеет решение на отрезке $[a, b(\varepsilon)]$, обращающееся при $\varepsilon = 0$ в порождающее решение $z_0(t, c_r^*)$, тогда вектор $c^* = col\,(c_r^*, \beta^*) \in R^{r+1}$ удовлетворяет уравнению для порождающих амплитуд задачи (9)

$$F(c^*) = \int\limits_a^{b^*} H(s)\{\beta^* A z_0(s, c_r^*) + Z(z_0(s, c_r^*), 0)\} ds = 0 \qquad (10)$$

Здесь $H(s) - r \times n$ - мерная матрица, строки которой - полная система r- линейно-независимых решений задачи, сопряженной к однородной порождающей задаче. Последняя компонента β^* вектора c^* представляет собой начальную поправку на длину отрезка $[a, b(\varepsilon)]$: $\quad b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon)$, $\beta(0) = \beta^*$.

С использованием оригинальной замены независимой переменной

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))$$

получена

<u>Теорема 2.8</u> (Критический случай первого порядка). Для каждого корня $c^* \in R^{r+1}$ уравнения (10) для порождающих ампли-

туд, который удовлетворяет условию $P_{B_0^*}=0$, задача (9) имеет однопараметрическое семейство решений, которое может быть найдено при помощи сходящейся на $[0, \varepsilon_*]$ итерационной процедуры типа (8),

$$z(t,\varepsilon)\in C^1[t],\ C[\varepsilon];\ z(t,0)=z_0(t,c_r^*),$$

где $P_{B_0^*}: R^r \to N(B_0^*)$ - $r\times r$ - матрица-ортопроектор

$$B_0=\frac{\partial F(c^*)}{\partial c} \quad - \quad r\times(r+1) \text{ - мерная матрица.}$$

Для автономных периодических краевых задач алгоритм построения решения упрощается, поскольку последняя компонента вектора $c^*\in R^{r+1}$ может быть всегда сделана нулевой и матрица B_0 при этом становится квадратной.

Третья глава диссертации уточняет, дополняет и иллюстрирует полученные в предыдущих главах результаты для случая фредгольмовых слабовозмущенных линейных и нелинейных краевых задач, когда размерность n дифференциальной системы совпадает с числом m краевых условий ($n=m$). Рассмотрение фредгольмных краевых задач позволило разделить полученные ранее условия существования решений, связанные с нетеровостью задачи, и условия, связанные с ее критичностью. К фредгольмовым задачам относятся также и нередко встречающиеся в приложениях периодические краевые задачи. Применение к ним разработанных методов позволило получить некоторые новые результаты даже для этих хорошо изученных задач. В частности, решен вопрос о нахождении периодических решений слабонелинейных дифференциальных систем при кратных корнях уравнения для порождающих амплитуд. Периодические краевые задачи (задачи о нахождении периодических решений уравнений Матье, Риккати, Ван-дер-Поля) послужили хорошими тестовыми примерами, показавшими эффективность полученных критериев и алгоритмов.

Здесь же рассмотрена слабовозмущенная линейная фредгольмова краевая задача

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon A_1(t)x + \varphi(t), \quad \ell x = \alpha \tag{11}$$

в предположении, что порождающая ($\varepsilon = 0$) для нее задача не разрешима при произвольных $\varphi(t) \in C[a,b]$, $\alpha \in R^n$.

Ставится и решается задача о нахождении условий на возмущающее слагаемое, при которых задача (11) будет разрешимой при любых $\varphi(t) \in C[a,b]$, $\alpha \in R^n$.

На основе метода типа Вишика-Люстерника и построенного в первой главе обобщенного оператора Грина получены условия существования решений краевой задачи (11) при произвольных $\varphi(t) \in C[a,b], \alpha \in R^n$. Для получения этих условий строятся $r \times r$ - мерные матрицы

$$B_i = P_{Q_r^*} \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) G_i(\tau)\, d\tau, \quad i = 0,1,2,\dots;$$

где

$$G_i(t) = \left(G\left[A_1(\tau) G_{i-1}(\tau)\right]\right)(t), \quad i = 1,2,3,\dots;$$

$$G_0(t) = X_r(t) .$$

<u>Теорема 3.3.</u> Пусть относительно краевой задачи (11) выполнены условия , указанные выше. Тогда справедливы следующие эквивалентные утверждения:

а) при произвольных $\varphi(t) \in C[a,b]$, $\alpha \in R^n$

краевая задача (11) имеет единственное решение $x(t,\varepsilon)\in C^1[I]$ в виде сходящегося при $\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_*]$ ряда

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{i=-(k+1)}^{+\infty}\varepsilon^i x_i(t)\ ;$$

б) при произвольном r- мерном постоянном векторе $f_0\in R^r$ $(1\le r\le n)$ r- мерная алгебраическая система

$$(B_0+\varepsilon B_1+\varepsilon^2 B_2+\cdots)u_\varepsilon=f_0$$

имеет единственное решение в виде сходящегося при $\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_*]$ ряда

$$u_\varepsilon=\sum_{i=-k}^{+\infty}\varepsilon^i u_i\ ;$$

в) выполнены условия

$$P_{B_0}\ne 0\ ,\ P_{B_0}P_{B_1}\ne 0\ ,\ \dots\ ,\ P_{B_0}P_{B_1}\cdots P_{B_{k-1}}\ne 0\ ,\ P_{B_0}\cdots P_{B_{k-1}}P_{B_k}=0\ ,$$

где $P_{B_0^{(i)}}$ - ортопроекторы матриц $B_0^{(i)}$, которые строятся по матрицам B_i.

Этот результат использован при исследовании с помощью функции Ляпунова, построенной в виде ряда Лорана по степеням параметра, на экспоненциальную дихотомию линейных слабовозмущенных периодических систем в наиболее интересном и сложном для изучения критическом случае, когда порождающая система такимсвойством не обладает.

В четвертой главе диссертации показано, что предложенные в предыдущих главах алгоритмы конструктивного анализа краевых задач для систем ОДУ могут быть распространены на более широкие классы систем ОДУ.

Получен критерий разрешимости краевых задач для систем ОДУ с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени

$$\begin{aligned} &\dot z = A(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_i ; \\ &\Delta z\Big|_{t=\tau_i} = S_i z(\tau_i - 0) + a_i ; \qquad (12) \\ &\ell z = \alpha ; \end{aligned}$$

где $A(t), f(t) \in C([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I)$ - пространство непрерывных или кусочно-непрерывных на $[a,b]$, имеющих разрывы первого рода по t при $t=\tau_i$, вектор-функций; S_i - $n \times n$-постоянные матрицы такие, что ($E + S_i$) - невырождены; $a_i \in R^n$ $(i=1,\dots,p)$; $\alpha \in R^m$; $-\infty < a < \tau_1 < \dots < \tau_i < \dots < \tau_p < b < \infty$.
Доказана следующая

<u>Теорема 4.1</u>. Пусть импульсная краевая задача (12) удовлетворяет указанным выше условиям. Если $\operatorname{rank} Q = n_1$, то соответствующая (12) однородная $(f(t)=0,\ a_i=0,\ \alpha=0)$ краевая задача имеет r и только r линейно-независимых решений. Неоднородная краевая задача (12) разрешима тогда и только тогда, когда

$$f(t) \in C([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I),\ a_i \in R^n,\ \alpha \in R^m$$

удовлетворяют условию

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau) f(\tau)d\tau - \ell\sum_{i=1}^{p}\bar K(\cdot,\tau_i)a_i\} = 0 ,$$

и при этом имеет в $C^1([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I)$

r - параметрическое семейство решений $(r = n - n_1,\ d = m - n_1)$:

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + \left(G\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t) + X(t)Q^+\alpha ,$$

где $\left(G\begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}\right)(t)$ - обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи (12):

$$\left(G\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t) \stackrel{def}{=} \Big[\int_a^b K(t,\tau) * d\tau - X(t)Q^+ \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) * d\tau ,$$

$$\sum_{i=1}^{p} \bar{K}(t,\tau_i) * - X(t)Q^+ \ell \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i) * \Big] \begin{bmatrix} f(\tau) \\ a_i \end{bmatrix} .$$

Здесь $X(t)$ -нормальная фундаментальная матрица соответствующей (12) однородной системы; $Q = \ell X(\cdot)$;

$$K(t,\tau) = \begin{cases} X(t)X^{-1}(\tau) , & a \le \tau \le t \le b ; \\ 0 , & a \le t < \tau \le b ; \end{cases}$$

$$\bar{K}(t,\tau_i) = K(t,\tau_i+0) .$$

Рассмотрен вопрос о существовании и построении периодических решений систем ОДУ с импульсным воздействием

$$\dot{z} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon) , \quad t \ne \tau_i ; \tag{13}$$

$$\Delta z \Big|_{t=\tau_i} = S_i z(\tau_i - 0) + a_i + \varepsilon J_i(z(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon) ;$$

$$A(t+T) = A(t) , \quad f(t+T) = f(t) \in C([0,T] \setminus \{\tau_i\}_I) ;$$

$$S_{i+p} = S_i , \quad a_{i+p} = a_i , \quad \tau_{i+p} = \tau_i + T ; \quad 0 < \tau_1 < \dots < \tau_p < T ;$$

$$J_{i+p} = J_i , \quad Z(z,t+T,\varepsilon) = Z(z,t,\varepsilon) \in C^1[z], C([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I) ;$$

$$J(z,\varepsilon)\in C^1[z],C[\varepsilon]\ ,\ \|z-z_0\|\le q\ ,\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]\ .$$

При этом в отличие от ранее изученного некритического (А. М. Самойленко, И. А. Перестюк) нами рассмотрен критический случай.

<u>Теорема 4.4</u>. Пусть для импульсной системы (13) выполнены указанные выше условия, так, что имеет место критический случай ($\operatorname{rank} Q = n_1 < n$). Тогда для каждого простого $\left(\det \frac{\partial F(c_0^*)}{\partial c_r} \neq 0\right)$ корня $c_r = c_0^* \in R^r$ уравнения для порождающих амплитуд периодической задачи (13):

$$F(c_r)=P_{Q_r^*}\Big\{\int\limits_0^T K(T,\tau)Z(z_0(\tau,c_r),\tau,0)d\tau+\sum_{i=1}^{p}\bar K(T,\tau_i)J_i(z_0(\tau_i-0,c_r),0)\Big\}=0$$

импульсная система (13) имеет единственное в $C^1([0,T]\setminus\{\tau_i\}_I)$ решение $z(t,\varepsilon)$, обращающееся в порождающее $z_0(t,c_0^*)$ при $\varepsilon=0$. Это решение может быть найдено с помощью сходящегося в $[0,\varepsilon_*]$ метода простых итераций вида (8).

В случае краевых задач для систем без импульсов из теорем 4.1., 4.4 получим соответствующие результаты, приведенные в предыдущих главах.

В большинстве работ, посвященных изучению краевых задач для дифференциальных систем с запаздыванием предполагалась их фредгольмовость и даже однозначная разрешимость (Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк), что нами не предполагается. Использование техники исследования краевых задач с запаздыванием, развитой в работах Н.В. Азбелева и его учеников, позволило распространить разработанные в предыдущих главах диссертации методы анализа на общие нетеровы линейные и слаболинейные краевые задачи для систем с запаздыванием и для операторных систем. Полученные здесь результаты иллюстрируют, с одной стороны, возможность обобщения предложенных методов на более широкий класс краевых задач для систем ФДУ, с другой стороны, возможность расширения пространства, в котором ищется решение задачи: от пространства $C^1[l]$ непрерывно-дифференцируемых вектор-функций до пространства D_p абсолютно непрерывных вектор-функций $x : [a,b] \to R^n$ таких, что $\dot{x} \in L_p$ - пространство функций суммируемых со степенью p $(1 \le p < +\infty)$.

Заключительные параграфы четвертой главы посвящены построению обобщенных обратных Λ^- (псевдообратных Λ^+) операторов в банаховых (гильбертовых) пространствах к линейному ограниченному нетерову оператору Λ. Как известно, линейные краевые задачи для широкого класса систем ФДУ представляются в виде операторных уравнений с нетеровым оператором Λ. Поэтому, наряду с предложенными в предыдущих параграфах конструкциями обобщенных обратных операторов Λ^- на основе построения обобщенных операторов Грина соответствующих краевых задач, предложены конструкции операторов Λ^- и Λ^+ на основе теории операторов в функциональных пространствах.

Пусть $\{\varphi_i\}, i=1,\dots,r$; $\{\psi_s\}, s=1,\dots,d$ - базисы нуль-пространств $N(\Lambda)$ и $N(\Lambda^*)$ соответственно, где Λ^* сопряженный к Λ оператор, определяемый равенством

$$g(\Lambda x) = \Lambda^* g(x) \quad , \; \forall x \in X \, , \, g \in Y^*$$

действует из пространства Y^* в пространство X^*. Для гильбертовых пространств:

$$X^* = X \, , \, Y^* = Y \quad , \; g(\Lambda x) = (g, \Lambda x) = (\Lambda^* g, x) \, .$$

С помощью введенных в работе операторов P_Λ и P_{Λ^*} проектирующих пространства X и Y на нуль-пространства $N(\Lambda)$, $N(\Lambda^*)$:

$$P_\Lambda x = \sum_{i,j=1}^{r} \alpha_{ij}^{(-1)} (f_j, x) f_i \quad : \; X \to N(\Lambda) \; ;$$

$$P_{\Lambda^*} y = \sum_{s,k=1}^{d} \beta_{sk}^{(-1)} (\varphi_k, y) \varphi_s \quad : \; Y \to N(\Lambda^*) \; ;$$

где числа $\alpha_{ij}^{(-1)}$ и $\beta_{sk}^{(-1)}$ являются элементами матриц α^{-1} и β^{-1} обратных к симметрическим матрицам Грама $\alpha = [(f_i, f_j)]$, $\beta = [(\varphi_s, \varphi_k)]$ доказана

<u>Теорема 4.10</u>. Оператор

$$\Lambda^+ = (\Lambda^* \Lambda + P_\Lambda)^{-1} \Lambda^* = \Lambda^* (\Lambda \Lambda^* + P_{\Lambda^*})^{-1}$$

является единственным ограниченным псевдообратным оператором к нетерову оператору Λ и удовлетворяет его определяющим свойствам:

1. $\Lambda \Lambda^+ \Lambda = \Lambda$, 2. $\Lambda^+ \Lambda \Lambda^+ = \Lambda^+$,

3. $(\Lambda^+ \Lambda)^* = \Lambda^+ \Lambda$ 4. $(\Lambda \Lambda^+)^* = \Lambda \Lambda^+$.

Эта конструкция обобщает ранее известные (А. Ф. Турбин, M. Z. Nashed) формулы для матрицы, пседообратной к квадратной матрице (простейший случай нетерового оператора). Кроме того, с ее помощью доказано следующее утверждение о разрешимости и представлении решений линейного нетерового операторного уравнения.

Теорема 4.11. Нетерово операторное уравнение

$$\Lambda x = y$$

разрешимо для тех и только тех $y \in \mathcal{Y}$, для которых

$$P_{\Lambda^*} y = 0$$

и при этом имеет r- параметрическое семейство решений в виде прямой ортогональной суммы

$$x = [f_1, \dots, f_r] c + \Lambda^+ y \quad , \quad r = \dim N(\Lambda) .$$

Первое слагаемое есть общее решение соответствующего однородного уравнения $\Lambda x = 0$, $f_i \in N(\Lambda)$, $c \in R^r$; $\Lambda^+ y$- единственное частное решение, ортогональное к любому решению однородного уравнения. Попытка перенести полученные результаты для гильбертовых пространств на случай банаховых - встречает естественные препятствия, ибо применение известной леммы Шмидта, позволяющей строить обобщенный обратный оператор Λ^- к линейному оператору Λ ограничивается требованием его фредгольмовости (В. А. Треногин)

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ банаховы пространства. По следствию из теоремы Хана-Банаха существуют линейно-независимые функционалы $\gamma_j \in \mathcal{X}^*$ и элементы $\psi_k \in \mathcal{Y}$ такие, что

$$\gamma_j (f_i) = \delta_{ij} \quad , \quad i,j = 1, \dots, r \ ;$$

$$\varphi_s (\psi_k) = \delta_{sk} \quad , \quad s,k = 1, \dots, d \ .$$

Следуя [1] определим проекторы и конечномерные операторы

$$P_{\Lambda} x = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i(x) \xi_i \quad : \quad X \to N(\Lambda) \ ;$$

$$P_{\Lambda^*} y = \sum_{s=1}^{d} \varphi_s(y) \psi_s \quad : \quad Y \to N(\Lambda^*) \ ;$$

$$\bar{P}_{\Lambda} x = \sum_{i=1}^{\rho} \gamma_i(x) \psi_i \quad : \quad X \to \begin{cases} N_1(\Lambda^*) \subset N(\Lambda^*), \text{ если } & r \le d \ ; \\ N(\Lambda^*) \text{ если } & r \ge d \ ; \end{cases}$$

$$\bar{P}_{\Lambda^*} y = \sum_{s=1}^{\rho} \varphi_s(y) \xi_s \quad : Y \to \begin{cases} N(\Lambda), \text{ если } & r \le d \ ; \\ N_1(\Lambda) \subset N(\Lambda), \text{ если } & r \ge d \ ; \end{cases}$$

где $\rho = \min(m, n)$.

<u>Лемма 4.5.</u> Оператор $\bar{\Lambda} = \Lambda + \bar{P}_{\Lambda}$ имеет ограниченный обратный

$$\bar{\Lambda}^{-1}_{l,r} = \begin{cases} (\Lambda + \bar{P}_{\Lambda})^{-1}_{l} & \text{- левый, если } r \le d \ ; \\ (\Lambda + \bar{P}_{\Lambda})^{-1}_{r} & \text{- правый, если } r \ge d \ . \end{cases}$$

<u>Теорема 4.14.</u> Оператор

$$\Lambda^{-} = \bar{\Lambda}^{-1}_{l,r} - \bar{P}_{\Lambda^*} \tag{14}$$

является ограниченным обобщенным обратным к линейному нетерову ограниченному оператору Λ.

1/ Аткинсон Ф.Н. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах // Мат.сборник. Новая серия.-1951. - 28, № 15.- С. 3 - 14.

В случае $p=r=d$ теорема 4.14. переходит в известную лемму Шмидта, позволяющую строить обобщенный обратный оператор к фредгольмовому в банаховых пространствах.

Для фредгольмова оператора Λ в гильбертовом пространстве с использованием обобщенной конструкции (14) вытекает следующая конструкция псевдообратного оператора.

Теорема 4.15. Оператор

$$\Lambda^{+} = (\Lambda + \bar{P}_{\Lambda})^{-1} - \bar{P}_{\Lambda^*}$$

является единственным ограниченным пседообратным к фредогольмову оператору Λ. Конечномерные операторы $\bar{P}_{\Lambda}$ и $\bar{P}_{\Lambda^*}$ определяются по формулам:

$$\bar{P}_{\Lambda} x = \sum_{i,j=1}^{p} \beta_{ij}^{(-1)} (f_j, x) \varphi_i \quad : X \to N(\Lambda^*) \ ;$$

$$\bar{P}_{\Lambda^*} y = \sum_{s,k=1}^{p} \alpha_{sk}^{(-1)} (\varphi_k, y) f_s \quad : Y \to N(\Lambda) \ .$$

Предложенные в предыдущих параграфах способы построения обобщенного обратного оператора Λ^{-} краевой задачи вида (1)

$$\Lambda z = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \ell . \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} \varphi \\ \alpha \end{bmatrix} \tag{15}$$

с помощью обобщенного оператора Грина касались случаев когда операторное уравнение $\mathcal{L}z=\varphi$ всюду разрешимо. К таким уравнениям относятся системы ОДУ, ОДУ с импульсным воздействием ,запаздывающим аргументом, и т. д. Предложенные выше конструкции обобщенного обратного оператора, позволяют рассмотреть краевую задачу (15) с нетеровым оператором $\mathcal{L} : X \to Y$.

Действительно, пусть $\dim N(\mathcal{L}) = s$, а $P_{\mathcal{L}^*} : Y \to N(\mathcal{L}^*)$ - проектор, конструкция которого описана выше. Тогда краевая задача (15) разрешима тогда и только тогда, когда $\varphi \in Y$ и $\alpha \in R^m$ удовтеворяют условиям

$$P_{\mathcal{L}^*} \varphi = 0 \quad ,$$

$$P_{Q^*_{d_1}} \{ \alpha - l(\mathcal{L}^- f)\} = 0 \quad , \quad d_1 = m - \operatorname{rank} Q_1 ;$$

и при этом имеет r_1 - параметрическое семейство решений $(r_1 = n - \operatorname{rank} Q_1)$:

$$z(t) = X_{r_1}(t) c_{r_1} + X_s(t) Q_1^+ \alpha + (G_1 \varphi)(t) \, ,$$

где $X_{r_1}(t) - n \times r_1$ - мерная фундаментальная матрица однородной краевой задачи $\Lambda z = 0$; $Q_1^+ - s \times m$ - мерная постоянная матрица пседообратная к $m \times s$ - мерной матрице $Q_1 = l X_s(\cdot)$; G_1 - обобщенный оператор Грина полуоднородной краевой задачи (15), имеющий представление

$$(G_1 \varphi)(t) = (\mathcal{L}^- \varphi)(t) - X_s(t) Q_1^+ l(\mathcal{L}^- \varphi) \, .$$

При этом обобщенный обратный оператор Λ^-, разрешающий краевую задачу (15) с нетеровым оператором $\mathcal{L}$, имеет вид:

$$\Lambda^- * = [G_1 * \, , \, X_s Q_1^+ *] \, .$$

Содержание диссертации отражено в следующих основных публикациях:

1. Бойчук А. А. Оптимальные функции Ляпунова для линейных периодических систем // Тр. II конф.: Дифференц. уравнения и их применения. Руссе. 29 июня - 4 июля 1981 г. - Руссе, 1982. - Т. 1. - С. 91-97.
2. Бойчук А. А. О дихотомии периодических систем в критических случаях // Приближенные методы исследования нелинейных колебаний. - Киев, 1983. - С. 24-28.
3. Бойчук А. А. Бифуркация периодических решений линейных систем // VIII Шк. по теории операторов в функцион. пространствах, Рига, 27 октября - 4 ноября 1983 г.: Тез. докл. - Рига, 1983. - Т. 1. - С. 27-28.
4. Бойчук А. А. Функции Ляпунова для периодических систем // Тр. IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям, Киев, 30 авг. - 6 сент. 1981 г. - Киев, 1984. - С. 61-64.
5. Бойчук А. А. Построение периодических решений нелинейных систем при резонансе методом простых итераций // X Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям, Варна, 12 - 17 сент. 1984 г.: Тез. докл. - София, 1984. - С. 36-37.
6. Бойчук А. А. Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений. - Киев, 1985. - С. 24-30.
7. Бойчук А. А. Построение решений краевых задач для нелинейных систем в критических случаях // Некоторые вопросы теории асимптотических методов нелинейной механики. - Киев, 1986. - С. 39-43.

8. Бойчук А. А. Условия возникновения дихотомии линейных периодических систем // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. - Новосибирск, 1987. - С. 251-256.

9. Бойчук А. А. Итерационные методы построения решений двухточечных краевых задач для нелинейных систем // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1988. - N 3. - С. 6-9.

10. Бойчук А. А. Функция Грина линейной неоднородной краевой задачи // Там же. - N 7. - С. 2-6.

11. Бойчук А. А. Краевые задачи для слабовозмущенных линейных и нелинейных систем в критических случаях. - Киев, 1988. - 44 с. - (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 88.39).

12. Бойчук А. А. Конструктивные методы анализа слабовозмущенных краевых задач // Всесоюзн. конф. "Нелиненые проблемы дифференц. уравнений и матем. физики. Тернополь, 12 - 15 сент. 1989г.: Тез. докл., 1989, ч. 1. - С. 68-69.

13. Бойчук А. А. Построение решений двухточечных краевых задач для слабовозмущенных нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журн. - 1989. - 41, N 10. - С. 1416-1420.

14. Бойчук А. А. Конструктивные методы анализа краевых задач. - Киев: Наук. думка, 1990. - 96 с.

15. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф. Условия возникновения решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // III Урал. регион. конф. "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения", Пермь, 1 - 5 февр. 1988 г.: Тез. докл. - Пермь, 1988. - С. 219.

16. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф. Краевые задачи для слабовозму-

щенных дифференциальных систем с запаздыванием при резонансе // VII Всесоюз. конф. "Качественная теория дифференциальных уравнений", Рига, 3 - 7 апр. 1989 г.: Тез. докл. - Рига, 1989. - С. 39.

17. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф. Возникновение решений слабовозмущенных линейных краевых задач для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // В кн.: Краевые задачи математической физики. - Киев: Наук. думка. - 1990. - С. 34-38.

18. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф. Построение решений краевых задач для дифференциальных систем с запаздыванием в критических случаях // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1990. - N 6. - С. 3-6.

19. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф. Построение решений линейных нетеровых операторных уравнений в гильбертовых пространствах // Там же. - N 8. - С. 6-9.

20. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф. Операторы псевдообратные к нетеровым в гильбертовых пространствах // В сб.: XV Школа по теории операторов в функцион. пространствах. Ульяновск, 5 - 12 сент. 1990 г.: Тез. докл. - Ульяновск, 1990. - С.

21. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф. Обобщенный обратный оператор к нетеровому в банаховом пространстве // Докл. АН УССР. - 1991. - N 1. -С. 5-8.

22. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф. Построение решений линейных нетеровых операторных уравнений в банаховых пространствах // Укр. мат. журн. - 1991. - т. 43. -N 10. - С. 1343-1350.

23. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Лыкова О. Б. Построение решений

краевых задач для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Всесоюз. конф. по теории и прил. функцион.-дифференц. уравнений. Душанбе, 28 - 30 сент. 1987 г.: Тез. докл. - Душанбе, 1987. - Т.1. - С. 54-55.

24. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Чуйко С.М. Периодические решения нелинейных автономных систем в критических случаях // Укр. мат. журн. - 1990. N 9. - С.1180-1187.

25. Бойчук А.А., Перестюк Н.А., Самойленко А.М. Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях//Дифференц. уравнения. -1991. -Т.27. -N 9. -С.1516-1521.

26. Бойчук А.А., Чуйко С.М. Автономные краевые задачи в критических случаях //. 1. Автономные периодические краевые задачи в критических случаях // АН Украины. Ин-т геофизики им. С.И.Субботина. - Препр. - Киев, 1991. - 50 с.

27. Лыкова О.Б., Бойчук А.А. Периодические решения и дихотомия слабовозмущенных линейных систем: Рез. докл. совмест. заседаний семинара им. И.Г.Петровского по дифференц. уравнениям и Моск. мат. об-ва // Успехи мат. наук. - 1987. - 42, N 4. - С. 135.

28. Лыкова О.Б., Бойчук А.А. Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журн. - 1988. - 40, N 1. - С. 62-69.

29. Самойленко А.М., Бойчук А.А. Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием //Укр. мат. ж. - 1992, N 4. - С.564-568.

30. Boichuk A., Chuiko S. Autonomic nonlinear boundary problems

in crucial cases // 5-th Conf. on numeric. methods. Hungary. -1990. - P. -10.

31. Boichuk A., Juravliov V. Generalized inverses for Noeter's operators in Banach spases // Там же. P. 11.

32. Boichuk A., Chuiko S. Autonomik nonlinear bondary value problems in crucial cases // Abstracts of Invitet lecture and Short communications delivered at the Second International Colloquium on Differential Equations. Plovdiv. Bulgaria. 19 - 24 august. 1991. - P. 43.

33. Boichuk A., Juravliov V. Psevdoinverse for Noether's operator in Hilbert spases // Там же. P. 44.

Подп. к печ. 7.07.92 Формат 60×84 1/16 Бумага оберт. печ. офс.

Усл. печ. л. 1,6 Уч.-изд. л. 1,3 Тираж 150.

Зак. 2-2056 Бесплатно

Киевская книжная типография научной книги. Киев, Репина, 4.