Академия наук Украины

Ордена Трудового Красного Знамени Институт математики

На правах рукописи

ГОНЧАРУК Наталья Юрьевна

УДК 519.21

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Киев - 1992

Работа выполнена в Киевском политехни

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор ДАЛЕЦКИЙ Ю.Л.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник КОЧУБЕЙ А.Н.

доктор физико-математических наук,
профессор МИШУРА Ю.С.

Ведущая организация: Институт прикладной математики и механики
АН Украины /г.Донецк/

Защита диссертации состоится "13" октября 1992 г.
в 15 часов на заседании специализированного совета
Д 016.50.01 при Институте математики АН Украины по адресу:
252001, Киев, ГСП, ул.Репина, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "13" июля 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета Д.В.Гусак

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Стохастические дифференциальные уравнения параболического типа - важный класс стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах, изучение которого представляет интерес как в связи с внутренними потребностями развития теории случайных процессов, так и в связи с приложениями в теории управления, популяционной генетике, статистической гидромеханике и других областях.

Теория стохастических дифференциальных уравнений в конце сороковых - начале пятидесятых годов была предложена независимо и в разных формах К.Ито и И.И.Гихманом, а затем развита А.В.Скороходом /1961/ для конечномерного случая. Первыми работами в направлении обобщения теории на бесконечномерный случай были работы В.В.Баклана /1963-1965/ и Т.Л.Чанталадзе /1964-1965/. В работе Ю.Л.Далецкого /1967/ дается инвариантное изложение теории стохастических уравнений с ограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве.

Уравнение Ито вида

$$du(t) = A(t)u(t)dt + B(t,u(t))dw(t)\ ,\ u(t_0)=u_0 \qquad /1/$$

в гильбертовом простанстве, где $A(s)$ - неограниченный производящий оператор сильно непрерывного эволюционного семейства $U(t,s)$, а B ограничен и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу, впервые было рассмотрено В.В.Бакланом /1964/. Точнее, им изучалось уравнение

$$u(t) = U(t,t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} U(t,s)\,B(s,u(s))\,dw(s) \qquad /2/$$

без доказательства его эквивалентности /1/. Впоследствии целым рядом авторов было показано с использованием методов теории полугрупп, что при некоторых дополнительных условиях решение уравнения /2/ принадлежит области определения $A(t)$ и имеет стохастический дифференциал /1/.

Б.Л.Розовский /1975/ для доказательства разрешимости задачи Коши /1/ использовал методы теории потенциала.

В работе А.Бенсуссана /1971/ для построения решения уравнения типа /1/ в банаховом пространстве с $B=I$ и $A(t)$, удовлетворяющим условию коэрцитивности, использовался метод дискретизации по времени с последующим слабым предельным переходом. Позднее А.Бенсуссан совместно с Р.Темамом применил этот же метод для исследования уравнения

$$du(t) = A(t,u(t))\,dt + B(t,u(t))\,dw(t)\,,\; u(t_0) = u_0 \qquad /3/$$

в банаховом пространстве с неограниченным нелинейным оператором "сноса" A , удовлетворяющим условиям монотонности и коэрцитивности, и $B \equiv I$.

Дальнейшее развитие метод монотонных отображений применительно к стохастическим дифференциальным уравнениям вида /3/ получил в работах Э.Парду /1972,1975/, М.Вио /1974,1976/, М.И.Вишика и А.И.Комеча /1977/, Н.В.Крылова и Б.Л.Розовского/1979/ и ряда других авторов. В работах Э.Парду и М.Вио рассмотрено стохастическое уравнение вида /3/ с неограниченными нелинейными операторами "сноса" A и "диффузии" B . Результаты Э.Парду обобщены Н.В.Крыловым и Б.Л.Розовским /1979/ на случай, когда операторы A и B зависят от случая неупреждающим образом.

В работах Я.И.Белопольской и З.И.Наголкиной /1977,1982/ получил развитие применительно к стохастическим дифференциальным уравнениям метод мультипликативных представлений решений дифференциальных уравнений. В частности, с помощью этого метода ими доказана разрешимость задачи Коши вида /3/ в случае, когда A - производящий оператор нелинейного эволюционного семейства в паре плотно вложенных гильбертовых пространств, удовлетворяющего условию Липшица в паре пространств с постоянной, равной единице, а B - оператор Гильберта-Шмидта, удовлетворяющий условию Липшица по второму аргументу.

Перечисленные выше результаты для уравнений вида /3/ с нелинейным неограниченным "сносом" не охватывают класс уравнений с $A(t,u) := A(t,u)u$, где при каждом t и u $A(t,u)$ есть производящий оператор сильно-непрерывной полугруппы с плотной областью определения в гильбертовом пространстве /например, эллиптический оператор второго порядка с коэффициентами, зависящими от решения/. Поэтому изучение такого класса уравнений представляется актуальным.

Важной задачей является исследование некорректных абстрактных параболических задач в банаховых пространствах /примером такой задачи может служить обратная по времени задача Коши для уравнения теплопроводности/. Для их изучения могут быть применены методы теории полугрупп /такой подход реализован С.Г.Крейном /1967/ /. Исследование возможности стохастической регуляризации некорректной абстрактной параболической задачи также представляет интерес.

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению некоторых классов стохастических дифференциальных уравнений параболического типа в гильбертовых и банаховых пространствах.

Цель работы. 1.Изучение класса нелинейных стохастических дифференциальных уравнений вида

$$du(t) = A(t,u(t))u(t)dt + B(t,u(t))dW(t), \; u(t_0) = u_0 \qquad /4/$$

в гильбертовом пространстве при условии, что при каждом t и u $A(t,u)$ - ограниченный справа оператор с постоянной плотной областью определения, сильно непрерывно дифференцируемый по u на области определения, $B(t,u)$ - оператор Гильберта-Шмидта, удовлетворяющий условию Липшица по u.

2.Изучение возможности стохастической регуляризации некорректной абстрактной параболической задачи в банаховом пространстве и исследование возникающих в процессе рассмотрения линейных стохастических дифференциальных уравнений параболического типа.

Методика исследований. В настоящей диссертации применяются методы теории стохастических уравнений в бесконечномерных пространствах, теории полугрупп операторов, другие методы теории случайных процессов и функционального анализа.

Научная новизна. Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нелинейного стохастического дифференциального уравнения вида /4/ в гильбертовом пространстве; исследованы свойства случайного операторного семейства, порожденного решением задачи Коши /4/; установлено, что решение задачи Коши /4/ обладает марковским свойством.

2. Результаты, полученные для абстрактного уравнения в гильбертовом пространстве, применены к доказательству разрешимости некоторых нелинейных стохастических дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа в ограниченной области и во всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

3. Установлена возможность стохастической регуляризации некорректной абстрактной параболической задачи в банаховом простран-

стве; для соответствующего линейного стохастического дифференциального уравнения построено явное решение; исследованы его свойства и свойства случайного операторного семейства, порожденного решением стохастического уравнения.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертационной работы могут быть использованы в научных исследованиях по теории стохастических дифференциальных уравнений с частными производными, при изучении некорректных абстрактных параболических задач. Ряд результатов может быть использован для разработки алгоритмов численного решения нелинейных стохастических дифференциальных уравнений параболического типа, возникающих в приложениях.

Апробация работы и публикации. Основные результаты диссертации докладывались в институте математики АН Украины /рук. семинара академик АН Украины А.В.Скороход и проф.Ю.Л.Далецкий/, на республиканской конференции по эволюционным стохастическим системам /Кацивели,1989/, Пятой международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике /1989/, 1 Крымской осенней математической школе /Ласпи,1990/, 22-24 Воронежских зимних математических школах /1989-1991/, Восьмой Республиканской конференции по нелинейным задачам математической физики /Донецк,1991/, в Университете г.Ноттингема/рук. семинара проф.Р.Хадсон/, Университете Уорика /рук.семинара проф.Д.Элворси/, Рур-Университете г.Бохума /рук.семинара проф. С.Альбеверио/ и опубликованы в [1]-[5] .

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка литературы и содержит 124 стр. машинописного текста. В списке литературы 59 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведен краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации, и краткое изложение основных результатов диссертации.

Глава 1 посвящена исследованию нелинейных стохастических дифференциальных уравнений вида /4/ в гильбертовом пространстве.

Введем некоторые обозначения. Пусть

1. $\mathcal{L}(X,Y)$ - пространство линейных ограниченных операторов из гильбертова пространства X в гильбертово пространство Y, $\mathcal{L}_2(X,Y)$ - пространство операторов Гильберта-Шмидта из X в Y с нормой σ_{2Y}, $C([t_0,T],X)$ - банахово пространство непрерывных на $[t_0,T]$ функций со значениями в X и стандартной нормой $|||\cdot|||_X$;

2. $H_0\supset H_1\supset H_2$ - цепочка плотно вложенных вещественных сепарабельных гильбертовых пространств с нормами $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, соответственно, причем для любого $u\in H_2$ $\|u\|_0\le\|u\|_1\le\|u\|_2$;

3. $(\Omega,\mathcal{F},P)$ - полное вероятностное пространство, E - среднее по $(\Omega,\mathcal{F},P)$; $L_p(\Omega,X,P)$ $(p\in N)$ - банахово пространство измеримых функций $u(\omega)(\omega\in\Omega)$ со значениями в X и нормой

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{X,p}=(E\|u\|_X^p)^{1/p},$$

ℓ - мера Лебега на $[t_0,T]\subset R$, $\mathcal{B}$ - борелевская σ - алгебра на $[t_0,T]$, $L_p([t_0,T]\times\Omega,X,\ell\times P)$ - банахово пространство измеримых функций $u(t,\omega)(t\in[t_0,T],\omega\in\Omega)$ со значениями в X с нормой

$$\langle\langle\langle u\rangle\rangle\rangle_{X,p}=\left(\int_{t_0}^{T}\langle\langle u(t)\rangle\rangle_{X,p}^p\,dt\right)^{1/p};$$

4. $\mathcal{H},\mathcal{H}_-$ -вещественные сепарабельные гильбертовы пространства, $\mathcal{H}_-$ реализовано как $\mathcal{H}_-\supset\mathcal{H}$, где вложение $j:\mathcal{H}\to\mathcal{H}_-$ есть оператор Гильберта-Шмидта, $w(t)$ - стандартный винеровский процесс в $\mathcal{H}_-$ с тождественным в $\mathcal{H}$ корреляционным оператором, $w(t_0)=0$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge t_0}$ - поток σ - подалгебр $\mathcal{F}$, согласованный с $w(t)$, $S_p^t(X)$ - совокупность $\mathcal{F}_t$ - измеримых элементов из $L_p(\Omega,X,P)$, $S_p([t_0,T],X)$ - совокупность согласованных с $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge t_0}$, непрерывных по t на $[t_0,T]$ случайных функций из $L_p([t_0,T]\times\Omega,X,\ell\times P)$.

Рассмотрим в H_0 нелинейное стохастическое уравнение вида /4/, где $A(t,u)$ - измеримая функция на $[t_0,T]\times H_0$, значение которой - ограниченный справа оператор в H_0 с постоянной областью определения $\mathcal{D}(A(t,u))=H_1$, сильно непрерывно дифференцируемый по u на H_1 , $B(t,u)$ - измеримая функция на $[t_0,T]\times H_0$ со значениями в $\mathcal{L}_2(\mathcal{H},H_0)$.

Под сильным решением задачи Коши /4/ в H_0 на $[t_0,T]$ понимается непрерывный, согласованный с потоком $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge t_0}$ случайный процесс со значениями в H_1 , удовлетворяющий /п.н./ при каждом $t\in[t_0,T]$ интегральному уравнению Ито

$$u(t)=u_0+\int_{t_0}^{t} A(s,u(s))u(s)ds+\int_{t_0}^{t} B(s,u(s))dw(s) \qquad /5/$$

в H_0 .

Исследование задачи Коши /4/ проводится с помощью аппроксимационной процедуры. Для этого в H_0 и H_2 рассматривается последовательность стохастических дифференциальных уравнений

$$du_n(t)=A_n(t,u_n(t))u_n(t)dt+B(t,u_n(t))\,dw(t), \qquad /6/$$
$$u_n(t_0)=u_0 \qquad (n\in N)$$

с ограниченными операторами "сноса", аппроксимирующими неограниченный оператор $A(t,u)$ в следующем смысле: последовательность операторов $\{A_n(t,u)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к оператору $\tilde{A}(t,u)$ в смысле равномерной на $[t_0,T]\times H_0$ сходимости в $\mathcal{L}(H_2,H_0)$ при $n\to\infty$, и $A(t,u)$ – замыкание $\tilde{A}(t,u)$ в H_0 .

В §1.1 вне связи с уравнением /4/ и неограниченным оператором $A(t,u)$ рассматривается последовательность стохастических уравнений /6/, и при определенных условиях устанавливается сходимость их решений.

Теорема 1. Пусть при каждом $n\in N$

1/ для любых $t\in[t_0,T]$, $u\in H_0$, $A_n(t,u)\in\mathcal{L}(H_0)$, $A_n(t,u)$ $(t\in[t_0,T], u\in H_k)$ измерима по t и u на $[t_0,T]\times H_k$, оставляет инвариантным H_2 , и семейство операторов $A_n(t,u)$ $(t\in[t_0,T], u\in H_k)$ равномерно на $[t_0,T]\times H_k$ ограничено в $\mathcal{L}(H_k)$ $(k\in\{0,2\})$;

2/ $A_n(t,u)$ $(t\in[t_0,T], u\in H_k)$ сильно непрерывно дифференцируемы по u на H_k , и семейство операторов $A'_{n\,u}(t,u)h$ $(t\in[t_0,T], u\in H_k)$ при каждом $h\in H_k$ равномерно на $[t_0,T]\times H_k$ ограничено в $\mathcal{L}(H_k)$;

3/ семейство операторов $A_n(t,u_1)$ $(n\in N, t\in[t_0,T], u_1\in H_0)$ и семейство сужений операторов $A_n(t,u_2)$ $(n\in N, t\in[t_0,T]$, $u_2\in H_2)$ на H_2 ограничены справа в H_0 равномерно на $N\times[t_0,T]\times H_0$ и в H_2 равномерно на $N\times[t_0,T]\times H_2$, соответственно;

4/ при каждом $h\in H_0$ семейство операторов $A'_{n\,u}(t,u)h\in\mathcal{L}(H_1,H_0)$ $(n\in N, t\in[t_0,T], u\in H_0)$ ограничено равномерно на $N\times[t_0,T]\times H_0$;

5/ последовательность операторов $\{A_n(t,u)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в смысле равномерной на $[t_0,T]\times H_0$ сходимости в $\mathcal{L}(H_2,H_0)$.

Пусть $B(t,u)$ $(t\in[t_0,T], u\in H_k)$ $(k\in\{0,2\})$ – измеримая по t и u функция на $[t_0,T]\times H_k$ со значениями в $\mathcal{L}_2(\mathcal{H},H_k)$, и сушествует константа c такая, что для любых $t \in [t_0, T], u, v \in H_k$ имеют место неравенства

$$\sigma^2_{2H_k}(B(t,u)) \le c(1+\|u\|_k^2),$$

$$\sigma^2_{2H_k}(B(t,u)-B(t,v)) \le c\|u-v\|_k^2.$$

Пусть также $u_0 \in S^{t_0}_{2q+1}(H_2)$ $(q \in N)$.

Тогда при каждом $n \in N$ и $k \in \{0,2\}$ существует сильное решение задачи Коши /6/ $u_n(t)$ $(t \in [t_0, T])$ в H_k на $[t_0, T]$, и в $C([t_0,T], H_0)$ существует $P\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$, причем $u \in C([t_0,T], H_0)$ /п.н./.

Пусть T – замкнутый положительно-определенный линейный оператор в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $\mathcal{D}(T)$ такой, что

$$\|Tu\|_H \ge \|u\|_H \quad (u \in \mathcal{D}(T)).$$

Будем говорить, что гильбертова цепочка $H_0 \supset H_1 \supset H_2$ построена по оператору T, если $H_0 = H$ с нормой $\|u\|_0 = \|u\|_H$ $(u \in H)$, $H_1 = \mathcal{D}(T)$ с нормой $\|u\|_1 = \|Tu\|_H$ $(u \in \mathcal{D}(T))$, $H_2 = \mathcal{D}(T^{1+\gamma})$ $(\gamma \in (0,1])$ с нормой $\|u\|_2 = \|T^{1+\gamma} u\|_H$ $(u \in \mathcal{D}(T^{1+\gamma}))$.

Теорема 2. Пусть гильбертова цепочка $H_0 \supset H_1 \supset H_2$ построена по оператору T, и выполнены условия теоремы 1. Тогда $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ в $L_{2q}([t_0,T]\times\Omega, H_2, \ell\times P)$ $(q \in N)$, где u и u_n определены так же, как и в теореме 1, причем при каждом $t \in [t_0, T]$ $u(t) \in S^t_{2q}(H_2)$.

В §1.2 изучается случайное операторное семейство, порожденное построенным в теореме 2 предельным случайным процессом. Определим при каждом $t \in [t_0, T]$

$$V(t,t_0) : S^{t_0}_{2q+1}(H_2) \to S^t_{2q}(H_2) \text{ -}$$

случайное отображение, порождаемое по формуле $u(t) = V(t,t_0) \circ u_0$, где $u_0 \in S^{t_0}_{2q+1}(H_2)$, $u(t) \in S^t_{2q}(H_2)$ – предельный случайный процесс из теоремы 2.

Теорема 3. В условиях теоремы 2 случайное операторное семейство $V(t,s)$ $(t_0 \le s \le t \le T)$ эволюционно /п.н./ в H_2 в смысле операции композиции, то есть для любых $u \in S^{\lambda}_{2q+2}(H_2)$ $(q \in N)$, λ, s, t таких, что $t_0 \le \lambda \le s \le t \le T$, п.н. в H_2 имеют место равенства

$$V(\lambda,\lambda)\circ u = u,$$

$$V(t,s)\circ V(s,\lambda)\circ u = V(t,\lambda)\circ u.$$

В §1.3 устанавливается, что при определенных условиях предельный случайный процесс из §1.1 есть сильное решение задачи Коши /4/ в H_0 на $[t_0,\tau]$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2, $u_0 \in S^{t_0}_{2q+2}(H_2)(q\in N)$, последовательность операторов $\{A_n(t,u)\}_{n=1}^{\infty}$ $(t\in[t_0,\tau], u\in H_0)$ сходится к оператору $\tilde{A}(t,u)$ в смысле равномерной на $[t_0,\tau]\times H_0$ сходимости в $\mathcal{L}(H_2,H_0)$.
Пусть $A(t,u)$ - его замыкание в H_0 - линейный оператор с постоянной областью определения H_1. Пусть также операторы семейства $A(t,u)(t\in[t_0,\tau], u\in H_0)$ подчинены оператору T равномерно на $[t_0,\tau]\times H_0$.

Тогда предельный случайный процесс из теоремы 2 $u(t)=V(t,t_0)\circ u_0$ $(t\in[t_0,\tau])$ есть сильное решение задачи Коши /4/ в H_0 на $[t_0,\tau]$.

Пусть E - разложение единицы I в H_0, построенное по оператору T в соответствии со спектральной теоремой. Тогда $P_n=\int_{\lambda_0}^{n} E(d\lambda)$ - оператор проектирования в H_0 /здесь $I=\int_{\lambda_0}^{\infty} E(d\lambda)$, $\lambda_0 \geq 1$ /.

Везде дальше предполагается, что цепочка $H_0 \supset H_1 \supset H_2$ построена по оператору T.

Теорема 5. Пусть

1. $A(t,u)$ - измеримая функция на $[t_0,\tau]\times H_0$, значение которой - замкнутый линейный оператор в H_0 с постоянной областью определения H_1, сужение оператора $A(t,u)$ на $\mathcal{D}(T^{2+\gamma})$ есть измеримая функция на $[t_0,\tau]\times H_2$, и $A_n(t,u)=P_n A(t,u) P_n$ $t\in[t_0,\tau], u\in H_0)$;
2. операторы семейств $A(t,u_1)$, $T^{\gamma} A(t,u_1) T^{-\gamma}$ $(t\in[t_0,\tau],$ $u_1\in H_0)$ и $T^{1+\gamma}A(t,u_2)T^{-(1+\gamma)}$ $(t\in[t_0,\tau], u_2\in H_2)$ подчинены оператору T равномерно на $[t_0,\tau]\times H_0$ и $[t_0,\tau]\times H_2$, соответственно;
3. операторы $A(t,u_1)$ и $T^{1+\gamma}A(t,u_2)T^{-(1+\gamma)}$ сильно непрерывно дифференцируемы по $u_1\in H_0$ и $u_2\in H_2$, соответственно, на H_1, и для любых $h_1\in H_0$, $h_2\in H_2$ операторы семейств $A'_{u_1}(t,u_1)h_1$ $(t\in[t_0,\tau], u_1\in H_0)$, $T^{1+\gamma}A'_{u_2}(t,u_2)h_2T^{-(1+\gamma)}$ $(t\in[t_0,\tau], u_2\in H_2)$, подчинены оператору T равномерно на $[t_0,\tau]\times H_0$ и $[t_0,\tau]\times H_2$, соответственно;
4. операторные семейства $A(t,u_1)(t\in[t_0,\tau], u_1\in H_0)$ и

$T^{1+\gamma} A(t,u_2) T^{-(1+\gamma)}$ $(t\in[t_0,T], u_2\in H_2)$ ограничены справа в H_0 равномерно на $[t_0,T]\times H_0$ и $[t_0,T]\times H_2$, соответственно.

Пусть также $B(t,u)$ $(t\in[t_0,T], u\in H_k)$ $(k\in\{0,2\})$ — измеримая по t и u функция на $[t_0,T]\times H_k$ со значениями в $\mathcal{L}_2(\mathcal{H}, H_k)$, существует константа C такая, что для любых $t\in[t_0,T]$, $u, v\in H_k$ имеют место неравенства

$$\sigma^2_{2H_k}(B(t,u))\le C(1+\|u\|^2_k),$$

$$\sigma^2_{2H_k}(B(t,u)-B(t,v))\le C\|u-v\|^2_k;$$

и $u_0\in S^{t_0}_{2q+2}(H_2)$ $(q\in N)$.

Тогда

1. при каждом $n\in N$ существует единственное /п.н./ сильное решение $u_n(t)$ $(t\in[t_0,T]$ задачи Коши /6/ в H_0 и H_2 на $[t_0,T]$, принадлежащее при каждом $k\in\{0,2\}$ $S_{2q+2}([t_0,T], H_k)$ $(q\in N)$.
2. существует $u=\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ в $L_{2q+1}([t_0,T]\times\Omega; H_2, \ell\times P)$, и $u\in S_{2q+1}([t_0,T], H_2)$.
3. выполнены условия теоремы 4, и предельная функция $u(t)=V(t,t_0)\circ u_0$ $(t\in[t_0,T])$ есть сильное решение задачи Коши /4/ в H_0 на $[t_0,T]$.

В § 1.4 при некоторых дополнительных условиях доказывается, что задача Коши /4/ имеет единственное, с точностью до стохастической эквивалентности, сильное решение в некотором классе сильных решений.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 4, операторы $A(t,u)$ сильно непрерывно дифференцируемы по u на H_1, для любого $h\in H_0$ операторы семейства $A'_u(t,u)h$ $(t\in[t_0,T], u\in H_0)$ подчинены оператору T равномерно на $[t_0,T]\times H_0$, и $u_0\in S^{t_0}_{2q+3}(H_2)$ $(q\in N)$.

Тогда случайный процесс $u(t)=V(t,t_0)\circ u_0$ есть единственное /п.н./ сильное решение задачи Коши /4/ в H_0 на $[t_0,T]$, удовлетворяющее условию $u(t_0)=u_0\in S^{t_0}_{2q+3}(H_2)$, $u(t)\in S^t_{2q+2}(H_2)$ $(t\in[t_0,T])$ $(q\in N)$.

Замечание 1. Условия теоремы 6 выполнены, если выполнены условия теоремы 5, и $u_0\in S^{t_0}_{2q+3}(H_2)$.

В § 1.5 в условиях теоремы 6 устанавливается, что сильное решение задачи Коши /4/, построенное в §§ 1.3, 1.4, есть марковский случайный процесс в H_2, но прежде доказывается утверждение о зависимости решения от начального условия.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 6, $u_0, u_{n0} \in S_{2q+2}^{t_0}(H_2)$ $(n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N})$ и $u_0 = \lim_{n\to\infty} u_{n0}$ в $L_{2q+1}(\Omega, H_2, P)$. Тогда $V(t,t_0)\circ u_{n0}$ $(t \in [t_0, T])$ сходится к $V(t,t_0)\circ u_0$ $(t \in [t_0,T])$ в $L_{2q}([t_0,T]\times\Omega, H_2, \ell\times P)$ при $n\to\infty$.

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда $u(t) = V(t,t_0)\circ u_0$ $(t\in[t_0,T])$ есть марковский случайный процесс в H_2, и его переходные вероятности задаются соотношением

$$P(s,u\,;t,\Delta) = P\{u_{s,u}(t)\in\Delta\},$$

где $u_{s,u}(t)$ - решение уравнения

$$u_{s,u}(t) = u + \int_s^t A(\theta, u_{s,u}(\theta))\,u_{s,u}(\theta)\,d\theta + \int_s^t B(\theta, u_{s,u}(\theta))\,dW(\theta)$$

в H_0, $u \in H_2$, $\Delta \in \mathcal{B}_{H_2}$, $\mathcal{B}_{H_2}$ - борелевская σ - алгебра подмножеств H_2, $u_{s,u}(t) \in L_{2q}(\Omega, H_2, P)$ $(q\in\mathbb{N})$.

В § 1.6 рассматриваются два примера нелинейных стохастических дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, для которых в некоторых функциональных пространствах выполнены условия теоремы 5.

Пример 1. Пусть G - ограниченная связная область в $\mathbb{R}^n$ с границей ∂G класса C^6, T - замыкание оператора

$$L_2(G) \supset \tilde{C}^2(G\cup\partial G) \ni u \mapsto T'u = u - \Delta u \in L_2(G),$$

где $\tilde{C}^2(G\cup\partial G) = \{u\in C^2(G\cup\partial G) : u|_{\partial G} = 0\}$, $\mathcal{D}(T) = \mathring{W}_2^1(G)\cap W_2^2(G)$, T имеет дискретный спектр $\sigma_T = \{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, $1<\lambda_0<\lambda_1<\ldots$, $\lambda_k\in\mathbb{R}$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k = \infty$. В соответствии со спектральной теоремой имеет место разложение $T = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k \tilde{P}_k$, где $\tilde{P}_k$ - конечномерные ортопроекторы в $L_2(G)$.

Пусть $H = L_2(G)$, $\gamma = 1$, $P_n = \sum_{k=0}^{j}\tilde{P}_k$ ($\lambda_{j+1}>n,\ \lambda_j\le n$), для каждого $t\in[t_0,T]$, $u\in H_0$ $A(t,u)$ есть замыкание оператора

$$L_2(G)\supset\tilde{C}^2(G\cup\partial G)\ni v\mapsto \tilde{A}(t,u)v = \alpha(t,u)\Delta v - \beta(t,u)v \in L_2(G),$$

где α, β - вещественнозначные измеримые функции на

$[t_0,T]\times L_2(G)$ и $[t_0,T]\times H_2$ такие, что при каждом $t\in[t_0,T]$,

$\alpha(t,\cdot),\beta(t,\cdot)\in C^1(L_2(G))$, $\alpha(t,\cdot),\beta(t,\cdot)\in C^1(H_2)$,

и выполнены условия: найдутся константы $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ такие, что для любых $t\in[t_0,T]$, $u_1\in L_2(G)$, $u_2\in H_2$

$$0<\alpha_0\le\alpha(t,u_1)\le\alpha_1,\quad \sup_{t,u_1}|\beta(t,u_1)|\le\alpha_1,$$

$$\sup_{t,u_1}\|\alpha'_{u_1}(t,u_1)\|_{L_2(G)}\le\alpha_2,\quad \sup_{t,u_1}\|\beta'_{u_1}(t,u_1)\|_{L_2(G)}\le\alpha_2,$$

$$\sup_{t,u_2}\|\alpha'_{u_2}(t,u_2)\|_{H_2}\le\alpha_2,\quad \sup_{t,u_2}\|\beta'_{u_2}(t,u_2)\|_{H_2}\le\alpha_2,$$

где $\alpha'_{u_1}(t,u_1)$, $\beta'_{u_1}(t,u_1)$ – производные $\alpha(t,u_1)$ и $\beta(t,u_1)$ по $u_1\in L_2(G)$, $\alpha'_{u_2}(t,u_2)$, $\beta'_{u_2}(t,u_2)$ – производные $\alpha(t,u_2)$ и $\beta(t,u_2)$ по $u_2\in H_2$, соответственно.

Пусть $\mathcal{H}=L_2(G)$, $\mathcal{H}_-=W_2^{-\ell}(G)$, $\ell>\frac{n}{2}$, и $\xi\in W_2^{-1}([t_0,T])\otimes\mathcal{H}_-$ – "белый шум", соответствующий гильбертову пространству $L_2(G)$.

Пусть $B(t,u)$ – функция на $[t_0,T]\times L_2(G)$, определяемая равенством

$$(B(t,u)v)(x)=\int_G c(t,x,y,u(x))v(y)\,dy=\int_G\tilde c(t,x,y,u)v(y)\,dy,$$

где $\tilde c(\cdot,x,y,\cdot)$ – измеримая функция на $[t_0,T]\times L_2(G)$ и $[t_0,T]\times H_2$ со значениями в $L_2(G\times G)$ $(x,y\in G)$ такая, что для любых $t\in[t_0,T]$, $u\in H_2$, $y\in G$ $\tilde c(t,\cdot,y,u)\in C^4(G)$, и для любых $u_1,v_1\in L_2(G)$, $u_2,v_2\in H_2$ справедливы следующие неравенства:

$$\sup_t\int_{G\times G}|\tilde c(t,x,y,u_1)|^2\,dy\,dx\le\gamma\,(1+\|u_1\|^2_{L_2(G)}),$$

$$\sup_t\int_{G\times G}|\tilde c(t,x,y,u_1)-\tilde c(t,x,y,v_1)|^2\,dy\,dx\le\gamma\,\|u_1-v_1\|^2_{L_2(G)},$$

$$\sup_t\int_{G\times G}|(1-\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_k^2})^2\tilde c(t,x,y,u_2)|^2\,dy\,dx\le\gamma\,(1+\|u_2\|^2_{H_2})$$

$$\sup_t\int_{G\times G}|(1-\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_k^2})^2(\tilde c(t,x,y,u_2)-\tilde c(t,x,y,v_2))|^2\,dy\,dx\le\gamma\,\|u_2-v_2\|^2_{H_2}.$$

Тогда задача Коши для уравнения /4/ записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\alpha(t,u)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(t,x)+b(t,u)\,u(t,x)+$$

$$+\int_G c(t,x,y,u(t,x))\,\xi(t,y)\,dy,\quad x\in G,$$

$$u(t,x)\,\big|_{x\in\partial G}=0,$$

$$u(t_0,x)\,\big|_{x\in\partial G\cup G}=u_0(x),$$

и для нее выполнены условия теоремы 5 в $L_2(G)$

<u>Пример 2.</u> Пусть T – замыкание оператора

$$L_2(\mathbb{R}^n)\supset C_0^2(\mathbb{R}^n)\ni v\mapsto T'v=v-\Delta v\in L_2(\mathbb{R}^n)$$

$\mathcal{D}(T)=W_2^2(\mathbb{R}^n)$, T имеет спектральное разложение $T=\int_1^\infty \lambda E(d\lambda)$, $P_n=\int_1^\infty E(d\lambda)$, где E – разложение единицы в $H=L_2(\mathbb{R}^n)$, $\gamma=1$.

Пусть для каждого $t\in[t_0,\tau],\ u\in L_2(\mathbb{R}^n)$ оператор $A(t,u)$ определен как замыкание

$$L_2(\mathbb{R}^n)\supset C_0^2(\mathbb{R}^n)\ni v\mapsto \widehat{A}(t,u)v=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a(t,x,u(x))\frac{\partial v}{\partial x_i}+$$

$$+b(t,x,u(x))\,v\in L_2(\mathbb{R}^n),$$

где $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, и

1/ пусть $a(t,x,u(x))=\widehat{a}(t,x,u),\ b(t,x,u(x))=\widehat{b}(t,x,u)$ вещественнозначные измеримые функции по t и u на $[t_0,\tau]\times L_2(\mathbb{R}^n)$ и $[t_0,\tau]\times H_2$, для любых $t\in[t_0,\tau],\ u_1\in L_2(\mathbb{R}^n)$, $u_2\in W_2^4(\mathbb{R}^n)$ $\widehat{a}(t,\cdot,u_1)\in C^{\max\{2+[\frac{n}{2}],4\}}(\mathbb{R}^n)$,

$\widehat{b}(t,\cdot,u_1)\in C^{2+[\frac{n}{2}]}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{a}(t,\cdot,u_2)\in C^{\max\{2+[\frac{n}{2}],6\}}(\mathbb{R}^n)$,

$\widehat{b}(t,\cdot,u_2)\in C^{\max\{2+[\frac{n}{2}],4\}}(\mathbb{R}^n)$;

2/ существуют константы $a_0,a_1,a_2,\ b_0,b_1$ такие, что для любых $t\in[t_0,\tau],\ u_1\in L_2(\mathbb{R}^n),\ u_2\in W_2^4(\mathbb{R}^n),\ x\in\mathbb{R}^n$

$0<a_0\le\widehat{a}(t,x,u_1)\le a_1$, $b_0\le\widehat{b}(t,x,u_1)\le b_1<0$,

$$\sup_{t,x,u_1} |D^\alpha \tilde{a}(t,x,u_1)| \le a_2, \quad |\alpha|\le 3,$$

$$\sup_{t,x,u_1} |D^\alpha \tilde{b}(t,x,u_1)| \le a_2, \quad |\alpha|\le 2,$$

$$\sup_{t,x,u_2} |D^\alpha \tilde{a}(t,x,u_2)| \le a_2, \quad |\alpha|\le 5,$$

$$\sup_{t,x,u_2} |D^\alpha \tilde{b}(t,x,u_2)| \le a_2, \quad |\alpha|\le 4;$$

3/ пусть для любых $t\in[t_0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$ функции $\tilde{a}(t,x,\cdot)$ и $\tilde{b}(t,x,\cdot)\in C^1(L_2(\mathbb{R}^n))$ и $C^1(W_2^4(\mathbb{R}^n))$; для любых $t\in[t_0,T]$, $u_1,h_1\in L_2(\mathbb{R}^n)$, $u_2,h_2\in W_2^4(\mathbb{R}^n)$

$$\tilde{a}'_{u_1}(t,\cdot,u_1)h_1\in C^{2+[\frac{n}{2}]}(\mathbb{R}^n),\ \tilde{b}'_{u_1}(t,\cdot,u_1)h_1\in C^{2+[\frac{n}{2}]}(\mathbb{R}^n),$$

$$\tilde{a}'_{u_2}(t,\cdot,u_2)h_2\in C^{\max\{2+[\frac{n}{2}],6\}}(\mathbb{R}^n),\ \tilde{b}'_{u_2}(t,\cdot,u_2)h_2\in C^{\max\{2+[\frac{n}{2}],4\}}(\mathbb{R}^n)$$

где $\tilde{a}'_{u_1}(t,x,u_1)$, $\tilde{b}'_{u_1}(t,x,u_1)$ и $\tilde{a}'_{u_2}(t,x,u_2)$, $\tilde{b}'_{u_2}(t,x,u_2)$-производные $\tilde{a}(t,x,u_1)$, $\tilde{b}(t,x,u_1)$ и $\tilde{a}(t,x,u_2)$, $\tilde{b}(t,x,u_2)$ по $u_1\in L_2(\mathbb{R}^n)$ и $u_2\in W_2^4(\mathbb{R}^n)$, соответственно;

4/ пусть выполнены неравенства

$$\sup_{t,x,u_1} |D^\alpha a'_{u_1}(t,x,u_1)h_1| \le a_2, \quad |\alpha|\le 1,$$

$$\sup_{t,x,u_1} |b'_{u_1}(t,x,u_1)h_1| \le a_2,$$

$$\sup_{t,x,u_2} |D^\alpha \tilde{a}'_{u_2}(t,x,u_2)h_2| \le a_2, \quad |\alpha|\le 5,$$

$$\sup_{t,x,u_2} |D^\alpha \tilde{b}'_{u_2}(t,x,u_2)h_2| \le a_2, \quad |\alpha|\le 4.$$

Пусть $\mathcal{H}=L_2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{H}_-=W_2^{-(l,g)}(\mathbb{R}^n)$ / $l>\frac{n}{2}$, $g(x)\in C^2(\mathbb{R}^n)$, $g(x)\ge 1$ и $\int g^{-2}(x)dx<\infty$ /, $\xi\in W_2^{-1}([t_0,T])\otimes\mathcal{H}_-$ и ξ - "белый шум", соответствующий гильбертову пространству $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $B(t,u)$ - функция на $[t_0,T]\times L_2(\mathbb{R}^n)$, определяемая при каждом $t\in[t_0,T]$, $u\in L_2(\mathbb{R}^n)$ равенством

$$(B(t,u)v)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} c(t,x,y,u(x))v(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{c}(t,x,y,u)v(y)dy \quad (v\in L_2(\mathbb{R}^n)),$$

где $\tilde{c}(t,\cdot,\cdot,u)$ - измеримая функция на $[t_0,T]\times L_2(\mathbb{R}^n)$ со значениями в $L_2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ / $x,y\in\mathbb{R}^n$ /, сужение $\tilde{c}(t,\cdot,\cdot,u)$

на $[t_0,\tau]\times W_2^4(\mathbb{R}^n)$ есть измеримая функция по t и u на $[t_0,\tau]\times W_2^4(\mathbb{R}^n)$, и для любых $t\in[t_0,\tau]$, $u\in W_2^4(\mathbb{R}^n)$ справедливы следующие неравенства:

$$\sup_t \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |\hat{c}(t,x,y,u_1)|^2 dy\,dx \le \gamma\,(1+\|u_1\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}),$$

$$\sup_t \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |\hat{c}(t,x,y,u_1)-\hat{c}(t,x,y,v_1)|^2 dy\,dx \le \gamma\,\|u_1-v_1\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

$$\sup_t \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \Big|\Big(1-\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\Big)^2 \hat{c}(t,x,y,u_2)\Big|^2 dy\,dx \le \gamma\,(1+\|u_2\|^2_{W_2^4(\mathbb{R}^n)}),$$

$$\sup_t \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \Big|\Big(1-\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\Big)^2 (\hat{c}(t,x,y,u_2)-\hat{c}(t,x,y,v_2))\Big|^2 dy\,dx \le \gamma\,\|u_2-v_2\|^2_{W_2^4(\mathbb{R}^n)}$$

где γ - константа.

Тогда задача Коши для уравнения /4/ записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\, a(t,x,u(t,x))\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)+$$

$$+b(t,x,u(t,x))u(t,x)+\int_{\mathbb{R}^n} c(t,x,y,u(t,x))\,\xi(t,y)\,dy,$$

$$u(t_0,x)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^n$$

и для нее выполнены условия теоремы 5 в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Глава 2 посвящена стохастической регуляризации некорректной абстрактной параболической задачи в банаховом пространстве.

Рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{d\xi}{dt}(t)=\alpha A\xi(t),\ t\in R,\ \xi(t_0)=u_0 \qquad /7/$$

в банаховом пространстве B, где A - неограниченный производящий оператор аналитической полугруппы e^{tA} в B, $t\in R$, $u_0\in B$.

При $\alpha(t-t_0)>0$ решение задачи Коши /7/ существует и дается формулой $\xi(t)=e^{\alpha(t-t_0)A}u_0$, а при $\alpha(t-t_0)<0$ соответствующая задача Коши не корректна.

Пусть $w(t)$ - стандартный скалярный винеровский процесс. Прибавляя к коэффициенту α "белый шум" $\dot{w}(t)$ с коэффициентом $\beta\in R$, получим уравнение

$$\frac{d\xi}{dt}(t) = (\alpha + \beta\dot{w}(t))\, A\,\xi(t), \quad \xi(t_0) = u_0,$$

имеющее смысл как стохастическое дифференциальное уравнение в $\mathcal{B}$:

$$d\xi(t) = \alpha A\xi(t)\,dt + \beta A\xi(t)\,dw(t), \quad t\in\mathbb{R}, \ \xi(t_0) = u_0. \qquad /8/$$

Можно показать, что при $\beta \neq 0$ задача Коши /8/ корректна при произвольном знаке $\alpha(t-t_0)$, и ее решение дается формулой

$$\xi(t) = V_\beta(t,t_0)\,u_0 = \exp\left\{\alpha\Delta t A - \frac{1}{2}\beta^2|\Delta t|A^2 + \beta\Delta w A\right\}u_0, \quad t\in\mathbb{R}, \qquad /9/$$

где $\Delta t = t - t_0$, $\Delta w = w(t) - w(t_0)$. Эта формула может быть получена из формулы Ито, если операторная экспонента в /9/ определена. В этом случае можно говорить о стохастической регуляризации некорректной задачи Коши /7/.

В качестве примера рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения с частными производными, где A – эллиптический оператор второго порядка

$$A = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k} + c(x). \qquad /10/$$

Здесь $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, ξ, u_0 – скалярные функции. В случае, когда задача Коши для невозмущенного уравнения корректна, задача Коши /8/ с оператором типа /10/ с коэффициентами, зависящими только от t, рассматривалась Ил.И.Гихманом и Т.М.Местечкиной /1987/.

В § 2.1 и § 2.2 рассматриваются два примера операторной экспоненты /9/ в банаховом и гильбертовом пространстве, соответственно.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – полное вероятностное пространство, E – среднее по $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $w(t)$ – стандартный винеровский процесс в $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}^*$ – пространство, сопряженное к $\mathcal{B}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – спаривание в $(\mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$, $-A$ – секториальный оператор в $\mathcal{B}$ с плотной в $\mathcal{B}$ областью определения $\mathcal{D}_A$, удовлетворяющий условиям: а/ существует $\varphi \in (0, \frac{\pi}{4})$ такое, что сектор $S_{0,\varphi} = \{\mu\in\mathbb{C} \mid \varphi \le |\arg\mu| \le \pi, \mu\neq 0\} \subset \rho_{-A}$, где ρ_{-A} –

резольвентное множество оператора $-A$, $\rho_{-A} \neq \emptyset$; б/ существует M такое, что для любого $\mu \in S_{0,\varphi}$ $\|(\mu I+A)^{-1}\| \le M/|\mu|$, где I - единичный оператор в B . Тогда A порождает в B аналитическую полугруппу

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{t\lambda}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda, \; t \geq 0,$$

где γ - кусочно-гладкая кривая в ρ_A , состоящая из двух лучей $\{re^{-i\theta} | 1 \le r < \infty\}$, $\{re^{i\theta} | 1 \le r < \infty\}$ и дуги единичной окружности $arc\,\{e^{i\delta} | -\theta \le \delta \le \theta\}$, $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$.
Пусть $U_c(A)$ - множество целых векторов оператора A .

В § 2.1 доказана

Теорема 9. Для $\beta \neq 0$ случайная функция /9/ с $V_\beta(t,t_0)$, определяемыми формулами

$$V_\beta(t_0,t_0) = I, \; t \in \mathbb{R}, \qquad /11/$$

$$V_\beta(t,t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{\alpha\lambda\Delta t - \frac{1}{2}\beta^2\lambda^2|\Delta t| + \beta\lambda\Delta w}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda \qquad /12/$$

в B , имеет стохастический дифференциал в B и удовлетворяет уравнению /8/ в B для $t \neq t_0$ при $u_0 \in B$ и для $t \in \mathbb{R}$ при $u_0 \in D_A$. Кроме этого, семейство операторов $V_\beta(t,t_0)$ обладает п.н. следующими свойствами:

а/ $V_\beta(t,\tau) = V_\beta(t,s)V_\beta(s,\tau)$, $t \geq s \geq \tau$ или $t \le s \le \tau$;
$V_\beta(t,\tau)V_\beta(\tau,t) = \exp\{-\beta^2|t-\tau|A^2\}$ не случайно;

б/ $\|V_\beta(t,t_0)\| < \infty$;

в/ для любого $x \in D_A$, $\lim\limits_{t \to t_0} \|V_\beta(t,t_0)x - x\| = 0$;

г/ $V_\beta(t,t_0)$ - единственное эволюционное семейство задачи Коши /8/;

д/ для любого $x \in U_c(A)$

$$\lim_{\beta \to 0} \|V_\beta(t,t_0)x - e^{\alpha\Delta t A}x\| = 0, \qquad /13/$$

более того, для $\alpha\Delta t > 0$ равенство /13/ справедливо для любого $x \in B$;

е/ при $\alpha\Delta t > 0$ для любых $x \in B$, $f \in B^*$

$$E\langle V_\beta(t,t_0)x, f\rangle = \langle e^{\alpha\Delta t A}x, f\rangle$$

Пусть $\mathcal{B}=\mathcal{H}$ - гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, $A=\int_{-\infty}^{\sigma}\lambda E(d\lambda)$ - ограниченный справа самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ с плотной в $\mathcal{H}$ областью определения $\mathcal{D}_A=\{x\in\mathcal{H}\mid\int_{-\infty}^{\sigma}\lambda^2(E(d\lambda)x,x)<\infty\}$ / здесь E - разложение единицы в $\mathcal{H}$/ .

Рассматриваемый пример является частным случаем предыдущего, так как $-A$ секториальный оператор в $\mathcal{B}=\mathcal{H}$. Поэтому для эволюционного семейства $V_\beta(t,t_0)$, определенного как функция оператора A в /9/, справедливо представление в виде спектрального интеграла

$$V_\beta(t,t_0)=\int_{-\infty}^{\sigma}\exp\{\alpha\lambda\Delta t-\tfrac{1}{2}\beta^2\lambda^2|\Delta t|+\beta\lambda\Delta w\}E(d\lambda). \qquad /14/$$

$$(\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \beta\neq 0),$$

и все результаты § 2.1, касающиеся решения задачи Коши /8/ и свойств семейства операторов $V_\beta(t,t_0)$, целиком переносятся на случай самосопряженного оператора в $\mathcal{H}$. Однако, для рассматриваемого оператора A можно получить некоторые дополнительные результаты, которые сформулированы и доказаны в § 2.2. А именно, в § 2.2 получены оценки для $\|V_\beta(t,t_0)\|$ более простые, чем доказанные в § 2.1 для общего случая секториального оператора в $\mathcal{B}$; показано, что решение задачи Коши /8/, полученное по формуле /9/ с $V_\beta(t,t_0)$, определенным в /14/, единственно /п.н./ в $\mathcal{B}=\mathcal{H}$.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Гончарук Н.Ю. Об одном классе квазилинейных стохастических дифференциальных уравнений параболического типа в гильбертовом пространстве//Киев.политехн.ин-т.-Киев,1992.-43с.-Деп. в УкрНИИНТИ 27.02.92 №259-Ук92.
2. Гончарук Н.К.,Далецкий Ю.Л. Случайные функции операторов, определяемые стохастическими дифференциальными уравнениями// Пятая междунар. Вильнюс. конф. по теории вероятностей и мат. статистике, Вильнюс,1989г.: Тез докл. - Вильнюс, 1989.- Т.3.- С. 154-155.

3. Гончарук Н.Ю., Далецкий Ю.Л. Метод расщепления для квазилинейных стохастических дифференциальных уравнений параболического типа// Восьмая Респ. конф. "Нелинейные задачи математической физики и задачи со свободной границей", Донецк, 1991 г.:Тез. докл. - Донецк, 1991. - С. 34.

4. Dalecky Yu.L., Goncharuk N.Yu. Stochastic regularization of the ill-posed abstract parabolic problem//Supplement to chapter VII in Dalecky Yu.L., Fomin S.V. Measures and Differential Equations in Infinite-Dimensional Space.-Kluwer Acad.Pub. .1991.- P. 323-333.

5. Goncharuk N.Yu., Dalecky Yu.L. Random operator functions defined by stochastic differential equations//In "Prob.Theory Math. Stat.", B.Grigelionis et al (Eds.), 1990 VSP/Mokslas.-Vol.I.- P. 433-445.

Подп. в печ. 19.05.92. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс. печать. Усл. печ. л. 1,16. Усл. кр.-отт. 1,16. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Зак. 166 . Бесплатно.

Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН Украины 252601 Киев, ГСП, ул. Репина, 3