КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени ТАРАСА ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

Киртадзе Леван Варламович

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ПОЧТИКОЛЕЦ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

01.01.06. - математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

КИЕВ - 1992

Работа выполнена в Киевск...

Научные руководители:

- доктор физико-математических наук, профессор Кириченко Владимир Васильевич;
- кандидат физико-математических наук, доцент Усенко Виталий Михайлович.

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук, профессор Михалев Александр Васильевич;
- кандидат физико-математических наук, доцент Новиков Борис Владимирович.

Ведущая организация: Институт математики с ВЦ АН Республики Молдова.

Защита диссертации состоится "19" октября 1992 г. в 14⁰⁰ час. на заседании специализированного совета К.068.18.II при Киевском Университете им. Тараса Шевченко по адресу:
г.Киев, проспект акад. Глушкова, механико-математический факультет Киевского Университета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан "15" сентября 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета Сливанский В.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы. Отмеченная Диксоном еще в начале XX в. взаимная независимость свойств левой и правой дистрибутивности кольца и полученные им примеры алгебр, названных впоследствии почтиполями Диксона, а также работы Менгера 40-х - нач. 50-х гг о композиционных алгебрах послужили источником теории почтиколец, сформировавшейся как самостоятельное направление к концу 50-х гг. в работах П.Йордана, Блэкетта, Дэскинса, Х.Нейманн и других математиков. В настоящее время теория почтиколец - это обширная область алгебры, связанная с теорией колец, теорией групп, теорией Ω-групп, представленная многочисленными структурными результатами, результатами о почтикольцах преобразований и о полиномиальных почтикольцах, а также результатами, позволяющими говорить о некоторых сформировавшихся самостоятельных направлениях этой теории (дистрибутивнопорожденные почтикольца, планарные почтикольца и др.). Среди работ по теории почтиколец - несколько обзоров и монографий. Одной из наиболее полных является монография Пильца (G. Pilz. Near-rings. The theory and its applications // Rev. ed. Amsterdam e.a.: North-Holl. Publ. Co.. - 1983. - XVI, 470 pp.)

Дальнейшее развитие теории почтиколец связано как с выделением и изучением новых классов почтиколец, так и с изучением конкретных почтиколец, каковыми, например, являются почтикольца преобразований групп или полиномиальные почтикольца. Синтез этих двух направлений исследований происходит при решении задачи описания представления того или иного класса почтиколец почтикольцами преобразований. Образцом подобного развития исследований являются работы об аффинных почтикольцах. Изучение аффинных преобразований линейных пространств (Блэкетт и др.) привело к возникновению понятия абстрактного аффинного почтикольца, охарактеризованного впоследствии как почтикольца преобразований модуля над кольцом.

В настоящей диссертационной работе одной из основных задач является изучение почтиколец, возникающих как обобщение аффинных почтиколец путем отказа от требования коммутативности их аддитивных групп. При этом описываются представления таких почтиколец преобразованиями групп.

Основные, известные к настоящему времени, результаты о почтикольцах преобразований групп - это теоремы о простоте таких почтиколец (Берман, Сильверман, Мельдрум, Адлер, Блэкетт) и о строении их односторонних идеалов (Хэтерли, Джонсон, Блэкетт, Скотт). Простота (в смысле отсутствия двусторонних идеалов) почтиколец преобразований групп отнюдь не упрощает изучения таких почтиколец и требует поиска новых методов их изучения.

Другой основной задачей настоящей диссертационной работы является задача изучения структуры почтиколец преобразований групп, разлагающихся в прямое произведение своих подгрупп.

Решения обеих основных задач диссертационной работы являются развитием сложившейся и всесторонне апробированной тематики современной теории почтиколец, что и служит обоснованием актуальности темы диссертации.

Цель работы. Целью работы является изучение почтиколец преобразований групп. Эта цель реализуется описанием почтиколец, порожденных эндоморфизмами группы в ее абелев нормальный делитель и константными преобразованиями, а также характеризацией почтикольца преобразований прямого произведения групп в терминах внешней почтикольцевой конструкции, построенной в работе.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми. К ним относятся следующие:

- определение и описание класса псевдоаффинных почтиколец; псевдоаффинные почтикольца являются обобщением известного понятия аффинных почтиколец, а их основное отличие от последних состоит в том, что аддитивная группа псевдоаффинных почтиколец, вообще говоря, не является абелевой;

- построение конструкции $\mathcal{NR}$-связки семейства групп, представляющей собой решение задачи о продолжении почтикольцевых умножений на группе;

- характеризация с помощью конструкции $\mathcal{NR}$-связки почтиколец с дистрибутивными идемпотентами;

- характеризация с помощью конструкции $\mathcal{NR}$-связки почтикольца преобразований прямого произведения групп.

Результаты работы носят теоретический характер и найдут применение в исследованиях по теории почтиколец, теории полугрупп, теории групп.

<u>Общая методика исследования</u>. Методы диссертационной работы основаны на классических факторизационных методах общей алгебры и методах конкретной характеризации алгебраических систем, развитых в работах Кэли, А.И.Мальцева, Л.М.Глускина, Е.С.Ляпина, А.Г.Куроша, Пирса и др. математиков. Существенным является использование техники скрещенных приведенных гомоморфизмов, введенных В.М.Усенко и примененных в его работах о подгруппах полупрямых произведений.

В работе предложены и новые методы исследования почтиколец. Таковыми являются:

- метод описания почтиколец с помощью их дистрибутивных дефектов; этим методом выделен класс псевдоаффинных почтиколец - один из основных объектов исследования в диссертационной работе;

- метод матричных $\mathcal{NR}$-связок групп; этот метод является развитием метода пирсовской декомпозиции колец и позволяет существенно обогатить технику изучения почтиколец преобразований; с помощью этого метода охарактеризованы почтикольца с дистрибутивными идемпотентами и почтикольца преобразований прямых произведений групп.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Международных алгебраических конференциях (Новосибирск, Марибор (СФРЮ)- 1989, Барнаул - 1991), на VI Симпозиуме по теории колец, алгебр и модулей (Львов - 1990), на Сибирской школе по многообразиям алгебраических систем (Барнаул - 1988), а также на алгебраических семинарах Киевского университета (1989 - 1992).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 6 работах автора, список которых приведен в конце реферата.

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 81 стр. машинописного текста, состоит из введения, двух глав, состоящих из девяти параграфов и списка литературы, содержащего 71 наименования работ.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении дан краткий обзор основных направлений исследований по теории почтиколец, приведены мотивировка и постановка основных задач, а также краткое описание содержания работы.

Глава I содержит основные понятия и наиболее важные, относящиеся к теме диссертации, результаты теории почтиколец (§§1 - 3), а также полученные автором результаты о псевдоаффинных почтикольцах, введенных в работе (§§4, 5).

Почтикольцом называется множество $\mathcal{N}$ с двумя определенными на нем ассоциативными операциями $*$ и $\cdot$ такими, что $A(\mathcal{N}) = (\mathcal{N}, *)$ -

группа, $M(\mathcal{N}) = (\mathcal{N}, \cdot)$ - полугруппа и для всех $u, v, t \in \mathcal{N}$ выполняется тождество левой дистрибутивности:

$$t(u*v) = tu*tv.$$

Через $\theta_{\mathcal{N}}$ обозначаем нейтральный элемент группы $A(\mathcal{N})$, а через $\bar{x}$ - элемент, противоположный элементу $x \in A(\mathcal{N})$ (т.е. $x*\bar{x} = \bar{x}*x = \theta_{\mathcal{N}}$). Нейтральный элемент полугруппы $M(\mathcal{N})$ (если он существует) обозначается через $\varepsilon_{\mathcal{N}}$. Через $\mathcal{NT}(G)$ обозначается симметрическое почтикольцо на группе G, т.е. почтикольцо всех преобразований группы $(G,*)$ относительно операций композиции

$$x(\varphi\psi) = (x\varphi)\psi$$

и суммирования преобразований:

$$x(\varphi*\psi) = x\varphi*x\psi$$

$x \in G$, $\varphi, \psi \in \mathcal{NT}(G)$. При этом θ_G - нулевое, а ε_G - тождественное преобразования группы G.

Если $\mathcal{N}$ - почтикольцо, то его дистрибутивным дефектом называется функция

$$D_{\mathcal{N}}(u,v;t) = d_t(u,v) = \overline{vt}*\overline{ut}*(u*v)t, \quad u,v,t \in \mathcal{N}.$$

В п.I.6 гл.I приведены основные функциональные свойства дистрибутивных дефектов.

В §4 вводится понятие дистрибутивного мультипликатора $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ почтикольца $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{D}(\mathcal{N}) = \{t \in \mathcal{N} \mid \forall u,v \in \mathcal{N}\ (u*v)t = ut*vt\}.$$

Дистрибутивный мультипликатор, являясь подполугруппой мультипликативной полугруппы почтикольца, подпочтикольцом, вообще говоря, не является. Для характеризации дистрибутивного мультипликатора вводится следующее понятие: финитным замыканием множества $X \subseteq \mathcal{N}$ называется подгруппа группы $A(\mathcal{N})$, порожденная множеством X. Доказано (пп. 4.2, 4.4 гл.I), что финитное замыкание $\tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{N})$ дистрибутивного мультипликатора $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ является в $\mathcal{N}$ подпочтикольцом, значения дистрибутивного дефекта которого принадлежат коммутанту аддитивной группы почтикольца $\mathcal{N}$. Далее определяется понятие предабелева почтикольца как почтикольца, коммутант аддитивной группы которого является идеалом. Получен критерий предабелевости почтикольца (теорема п.4.I2).

В §5 главы I вводится и изучается понятие псевдоаффинного почтикольца.

Почтикольцо $\mathcal{N}$ назовем псевдоаффинным, если его дистрибутивный дефект удовлетворяет тождеству

$$D_{\mathcal{N}}(u, v; t) = \overline{(\theta_{\mathcal{N}} t)}\, i_{vt}, \quad u, v, t \in \mathcal{N},$$

где $i_{vt} = \widehat{vt}$ - внутренний автоморфизм группы $A(\mathcal{N})$, определяемый элементом vt. Если G - некоторая группа, V - ее абелева нормальная подгруппа, а $\mathcal{E}_G(V) = \{\varphi \in \mathcal{E}nd\, G \mid \mathcal{I}m\,\varphi \leq V\}$, то $\mathcal{N}\mathcal{E}_G(V) = \{\tau_{\varphi,g} \in \mathcal{N}\mathcal{T}(G) \mid x\tau_{\varphi,g} = x\varphi * g,\ x, g \in G,\ \varphi \in \mathcal{E}_G(V)\}$ - псевдоаффинное подпочтикольцо симметрического почтикольца $\mathcal{N}\mathcal{T}(G)$, которое названо почтикольцом псевдоаффинных преобразований группы G. Произвольные псевдоаффинные почтикольца охарактеризованы в работе их гомоморфизмами в почтикольца псевдоаффинных преобразований. Приведем эту характеризацию.

Для почтикольца $\mathcal{N}$ полагаем

$$\mathcal{U}(\mathcal{N}) = \{x \in \mathcal{N} \mid \theta_{\mathcal{N}} x = \theta_{\mathcal{N}}\},$$

$$C(\mathcal{N}) = \{ x \in \mathcal{N} \mid \theta_{\mathcal{N}} x = x \},$$

$$\mathcal{J}_r^c(\mathcal{N}) = \{ u \in U(\mathcal{N}) \mid \forall c \in C(\mathcal{N}) \ cu = \theta_{\mathcal{N}} \}.$$

Доказано (п.5.7.3 гл.I), что в любом почтикольце $\mathcal{N}$ множество $\mathcal{J}_r^c(\mathcal{N})$ является идеалом. Если $\mathcal{N}$ псевдоаффинно, то $\mathcal{J}_r^c(\mathcal{N})$ содержит коммутант аддитивной группы подпочтикольца $U(\mathcal{N})$. Подгруппа группы $\Gamma = A(C(\mathcal{N}))$, порожденная множеством $\Gamma \cdot U(\mathcal{N})$ является абелевой нормальной в Γ.

ТЕОРЕМА (п.5.8, гл.I). Пусть $\mathcal{N}$ - псевдоаффинное почтикольцо, Γ - аддитивная группа подпочтикольца $C(\mathcal{N})$, а V - подгруппа группы Γ, порожденная множеством $\Gamma \cdot U(\mathcal{N})$. Почтикольцо $\mathcal{N}/\mathcal{J}_r^c(\mathcal{N})$ изоморфно вкладывается в почтикольцо $\mathcal{N}\mathcal{E}_\Gamma(V)$ псевдоаффинных преобразований группы Γ.

Эндоморфизм α аддитивной группы подпочтикольца $C(\mathcal{N})$ назовем W-эндоморфизмом, если $\mathcal{J}m\,\alpha \leq W \leq A(C(\mathcal{N}))$. Эндоморфизм $\beta \in End\,A(C(\mathcal{N}))$ назовем U-внутренним, если существует $u \in U(\mathcal{N})$, для которого $c\beta = cu$, каков бы ни был $c \in C(\mathcal{N})$.

Подмножество B почтикольца $\mathcal{N}$ называется редуктивным, если из того, что равенство $xt = xw$ $(t, w \in \mathcal{N})$ имеет место для всех $x \in B$, следует, что $t = w$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{N}$ - псевдоаффинное почтикольцо, $\Gamma = A(C(\mathcal{N}))$, V - подгруппа группы Γ, порожденная множеством $\Gamma \cdot U(\mathcal{N})$. Почтикольцо $\mathcal{N}$ тогда и только тогда изоморфно почтикольцу $\mathcal{N}\mathcal{E}_\Gamma(V)$ псевдоаффинных преобразований группы Γ, когда Γ - редуктивное подмножество в $\mathcal{N}$, а каждый V-эндоморфизм группы Γ является U-внутренним.

В главе II строится конструкция $\mathcal{N}\mathcal{R}$-связки семейства групп и с ее помощью характеризуются почтикольца с дистрибутивными идемпотентами и симметрические почтикольца на прямых произведениях групп. При этом существенно используется понятие приведенного бискрещенного аддитивного отображения - аналога понятия приведенного скрещенного гомоморфизма (Усенко В.М. Полупрямые произведения моноидов// Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.- Киев, 1984), в связи с чем в §I приводятся основные свойства этого понятия.

Пусть U, H, G - группы. Отображение $\eta : U \times H \to G : (u; h) \mapsto (u; h)\eta$ назовем R-аддитивным (R-антиаддитивным), если $(u; h_1 * h_2)\eta = (u; h_1)\eta * (u; h_2)\eta$ (соответственно - $(u; h_1 * h_2)\eta = (u; h_2)\eta * (u; h_1)\eta$) для всех $u \in U$, $h_1, h_2 \in H$. Если $\Delta \trianglelefteq G$, $\varphi : U \times H \to Aut\, G : (u; h) \mapsto \varphi_{u,h}$ - R-аддитивное, а $\psi : U \times H \to Aut\, G : (u; h) \mapsto \psi_{u,h}$ - антиаддитивное отображение, то отображение $\lambda : U \times H \to G : (u; h) \mapsto (u; h)\lambda$ назовем $R^{\Delta}_{\varphi,\psi}$-аддитивным (аддитивным Δ-приведенным (φ,ψ)-бискрещенным), если существует отображение $\tau_{\lambda} : U \times H \times H \to \Delta : (u; h; t) \mapsto (h; t)\tau^{u}_{\lambda}$ такое, что

$$(u; h * t)\lambda = (u; h)\lambda\varphi_{u,t} * (h; t)\tau^{u}_{\lambda} * (u; t)\lambda\psi_{u,h} .$$

При $U = \{\theta_U\}$ говорим о Δ-приведенном (φ,ψ)-бискрещенном гомоморфизме ($R^{\Delta}_{\varphi,\psi}$-гомоморфизме) группы H в группу G. При $\Delta = \{\theta_G\}$ ($\mathcal{J}m\varphi = id\, G$ или $\mathcal{J}m\psi = \mathcal{J}d\, G$) будем говорить о $R_{\varphi,\psi}$-аддитивном ($R^{\Delta}_{0,\psi}$-аддитивном или $R^{\Delta}_{\varphi,0}$-аддитивном) отображении. Доказана

ТЕОРЕМА (п.1.3, гл.II). Для групп U, H, G, R-аддитивного отображения $\varphi : U \times H \to Aut\, G$ и отображения $\lambda : U \times H \to G$ следующие утверждения равносильны:

1) λ - $R_{\varphi,0}$-аддитивное отображение;

2) существуют группа Γ, мономорфизм $\gamma: G \to \Gamma$, R-аддитивное отображение $\pi: U \times H \to \Gamma$ и R-антиаддитивное отображение $\sigma: U \times H \to \Gamma$ такие, что $\varphi_{u,h} = \gamma i_{\overline{(u;h)\sigma}} \gamma^{-1}$ для всех $u \in U$, $h \in H$ и $\lambda = (\sigma * \pi)\gamma^{-1}$.

Один из мотивов изучения R-аддитивных отображений состоит в том, что почтикольцо можно рассматривать как группу, снабженную R-аддитивным отображением. А именно: $\mathcal{NR}$-умножением на группе G называется R-аддитивное отображение $\mu: G \times G \to G$, удовлетворяющее условию:

$$\forall u, v, w \in G \quad ((u;v)\mu; w)\mu = (u;(v,w)\mu)\mu.$$

Группа с определенным на ней $\mathcal{NR}$-умножением является, как легко заметить, почтикольцом.

Задача об аддитивной факторизации $\mathcal{NR}$-умножений состоит в поиске условий, необходимых и достаточных для того, чтобы сумма $u\ell^t * tr^u$, $u, t \in G$, $\ell: G \to \mathcal{NT}(G): t \mapsto \ell^t$, $r: G \to \mathcal{NT}(G): u \mapsto r^u$ задавала некоторое $\mathcal{NR}$-умножение $(u;t)\mu_{\ell,r} = u\ell^t * tr^u$ на группе G. Для решения этой задачи рассматриваются следующие операторы, определяемые для произвольных $\varphi(\psi): G \to \mathcal{NT}(G): g \mapsto \varphi^g(\psi^g)$, $u, t, w \in G$:

$$u\mathcal{D}_{\varphi}^{t,w} = (t*w)\varphi^u * \overline{w\varphi^u} * \overline{t\varphi^u}; \quad u\widetilde{\mathcal{D}}_{\varphi}^{t,w} = (u\mathcal{D}_{\varphi}^{t,w})\, i_{t\varphi^u * w\varphi^u};$$

$$u\mathcal{E}_{t,w}^{\varphi} = \overline{u\varphi^w} * \overline{u\varphi^t} * u\varphi^{t*w}; \quad u\widetilde{\mathcal{E}}_{t,w}^{\varphi} = (u\mathcal{E}_{t,w}^{\varphi})\, i_{u\varphi^t * u\varphi^w};$$

$$u\mathcal{H}_{\varphi}^{t,w} = \overline{(u\varphi^t)\varphi^w} * u\varphi^{t\varphi^w}; \quad u\widetilde{\mathcal{H}}_{\varphi}^{t,w} = \overline{(u\mathcal{H}_{\varphi}^{t,w})}\, i_{\overline{(u\varphi^t)\varphi^w}};$$

$$w\mathcal{P}_{\varphi,\psi}^{u,t} = \overline{(t\psi^u)\varphi^w} * u\mathcal{H}_{\varphi}^{t,w} * (t\varphi^w)\psi^u; \quad w\mathcal{Q}_{u,t}^{\varphi,\psi} = u\psi^{w\psi^t} * u\mathcal{H}_{\varphi}^{t,w} * \overline{w\psi^{u\psi^t}};$$

$$u\mathcal{K}_{\varphi,\psi}^{t,w} = [\overline{u\varphi^w}; t\psi^u].$$

Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы функция $(u;t)\psi_{l,r} = ul^t * tr^u$ задавала $\mathcal{NR}$-умножение на группе G, принимают в этих обозначениях вид (теорема п.I.8 гл.II):

$$\mathcal{E}^{l}_{t,w} * \mathcal{D}^{t,w}_{r} = \mathcal{K}^{t,w}_{l,r},$$

$$\tilde{\mathcal{D}}^{ul^t,\, tr^u}_{l} * \tilde{\mathcal{E}}^{r}_{ul^t,\, tr^u} = \mathcal{P}^{u,t}_{l,r} * Q^{r,l}_{u,t}.$$

Пусть, далее, $G = U \times H$, причем U - $\mathcal{NR}$-группа над почтикольцом $\mathcal{N}$. Вторая задача, рассматриваемая в §I гл.II, состоит в поиске условий, необходимых и достаточных для того, чтобы G была $\mathcal{NR}$-группой над $\mathcal{N}$, содержащей U в качестве $\mathcal{N}$-подгруппы. Такие условия приведены в теореме п.I.I2:

ТЕОРЕМА. Пусть U - $\mathcal{NR}$-группа над почтикольцом $\mathcal{N}$. Группа $G = U \times H$ тогда и только тогда будет $\mathcal{NR}$-группой над $\mathcal{N}$, содержащей U в качестве $\mathcal{N}$-подгруппы, когда для всех $g \in G$, $v, u \in U$ существуют гомоморфизмы $\varphi_g : A(\mathcal{N}) \to \operatorname{Aut} G$, $\psi_u : A(\mathcal{N}) \to \operatorname{Aut} G$ и, соответственно, $R_{\varphi_g, 0}$-гомоморфизмы $d^g : A(\mathcal{N}) \to G$ и $R_{\psi_u, 0}$-гомоморфизмы $f^{u,v} : A(\mathcal{N}) \to U$ такие, что $gt = (g\pi_u)t * td^g$ и выполняются условия:

$$\forall u, v \in U,\ \forall t, w \in \mathcal{N} \left(td^u = \theta_G;\ wf^{g\pi_u t;\, td^{g\pi_u}} = \overline{(g\pi_u)tw * (g\pi_u t * td^{g\pi_u})w} \right)$$

$$\forall g \in G,\ \forall t, w \in \mathcal{N} \left(t\varphi_g = i_{(g\pi_u)t};\ (tw)d^g = wf^{g\pi_u t;\, td^{g\pi_u}} * wd^{gt} \right)$$

Здесь через π_u обозначена каноническая проекция $U \times H$ на U.

В §2 гл.II осуществляется построение внешней почтикольцевой конструкции, названной здесь $\mathcal{NR}$-связкой семейства групп. С одной стороны эта конструкция служит решением задачи о продолжении $\mathcal{NR}$-умножений, а с другой - применяется в §§3, 4 для решения других задач.

Пусть $\mathcal{G} = \{G_{ij}\}$, $i, j \in \{1,2\}$ - семейство групп. $\mathcal{G}$ -матрицей назовем 2×2-матрицу $[u_{ij}]$ такую, что $u_{ij} \in G_{ij}$, $i,j \in \{1,2\}$. Множество всех $\mathcal{G}$-матриц обозначим через $\mathcal{M}(\mathcal{G})$. Нуль группы G_{ij} будем обозначать через θ_{ij}. Предполагая, что заданы гомоморфизм

$$\sigma_1 : G_{11} \to Aut\, G_{21} : x \mapsto \sigma_1^x ,$$

и антигомоморфизм

$$\sigma_2 : G_{22} \to Aut\, G_{12} : x \mapsto \sigma_2^x ,$$

на множестве $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ зададим операцию по правилу:

$$[u_{ij}] * [v_{ij}] = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} ; & u_{12} + v_{12}\sigma_2^{u_{22}} \\ u_{21}\sigma_1^{v_{11}} + v_{21} ; & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}.$$

Относительно этой операции множество $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ является группой с нейтральным элементом $\theta_{\mathcal{M}} = [\theta_{ij}]$, причем

$$\overline{[u_{ij}]} = \begin{bmatrix} \overline{u}_{11} ; & \overline{u}_{12}\,\sigma_2^{\overline{u}_{22}} \\ \overline{u}_{21}\,\sigma_1^{\overline{u}_{11}} ; & \overline{u}_{22} \end{bmatrix}.$$

Группа $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ изоморфна группе $(G_{11} \,{}_{\sigma_1}\!\times G_{21}) \times (G_{12} \times_{\sigma_2} G_{22})$, где $G_{11} \,{}_{\sigma_1}\!\times G_{21}$ - полупрямое произведение с гомоморфизмом связи σ_1, а $G_{12} \times_{\sigma_2} G_{22}$ - полупрямое произведение с антигомоморфизмом связи σ_2.

Введем, далее, следующие обозначения: если $x \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$ то будем полагать $x = [x_{ij}] = [k_{ij}^x]$, $x_{ij} = k_{ij}^x \in G_{ij}$, $i,j \in \{1,2\}$; через $\rho_{ij}(t)$ будем обозначать $\mathcal{G}$-матрицу, на (i,j)-м месте которой находится элемент $t \in G_{ij}$ $(i,j \in \{1,2\})$, а на остальных - нули соответствующих групп из $\mathcal{G}$; для всех $x \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$, $i,j \in \{1,2\}$ положим

$$m_{ij}^{x} = p_{ij}(\ell_{ij}^{x}),$$

$$\ell_i^{x} = m_{i1}^{x} * m_{i2}^{x}, \quad c_i^{x} = m_{1i}^{x} * m_{2i}^{x},$$

$$\mathcal{M}_i^{c}(\mathcal{G}) = \{ c_i^{x} \mid x \in \mathcal{M}(\mathcal{G})\}, \quad \mathcal{M}_i^{\ell}(\mathcal{G}) = \{ \ell_i^{x} \mid x \in \mathcal{M}(\mathcal{G})\},$$

$$\mathcal{M}_{ij}(\mathcal{G}) = \{ m_{ij}^{x} \mid x \in \mathcal{M}(\mathcal{G})\}.$$

Получаем

$$\mathcal{M}_1^{c}(\mathcal{G}) \cong G_{11} \,{}_{\sigma_1}\!\times G_{21}, \quad \mathcal{M}_2^{c}(\mathcal{G}) \cong G_{12} \,{}_{\sigma_2}\!\times G_{22},$$

$$\mathcal{M}_i^{\ell}(\mathcal{G}) \cong G_{i1} \times G_{i2}, \quad \mathcal{M}_{ij}(\mathcal{G}) \cong G_{ij},$$

для всех $i, j \in \{1, 2\}$. В предположении, что заданы $\mathcal{NR}$-умножения $\mu_{ii} : G_{ii} \times G_{ii} \to G_{ii}$, $i \in \{1,2\}$, на группе $\mathcal{M}(\mathcal{G})$, далее, описывается $\mathcal{NR}$-умножение, служащее продолжением $\mathcal{NR}$-умножений μ_{ii}. Для этого используются R-аддитивные отображения

$$\tau_{ii} : \mathcal{M}_i^{\ell}(\mathcal{G}) \times G_{2i} \to G_{ii} : (x; y) \mapsto (x; y)\tau_{ii},$$

$R_{\lambda^1, 0}$-аддитивное и, соответственно, $R_{\rho^1, 0}$-аддитивное отображения

$$\mu_{21} : \mathcal{M}_1^{c}(\mathcal{G}) \times G_{11} \to G_{21} : (g; h) \mapsto (g; h)\mu_{21},$$

$$\tau_{21} : \mathcal{M}(\mathcal{G}) \times G_{21} \to G_{21} : (w; t) \mapsto (w; t)\tau_{21},$$

где

$$\lambda^1_{g,h} = \sigma_1^{(\ell_{11}^{g}; h)\mu_{11}}, \quad \rho^1_{w,t} = \sigma_1^{(\ell_1^{w}; t)\tau_{11}},$$

а также R_{0,λ^2}-аддитивное и, соответственно, R_{0,ρ^2}-аддитивное отображения

$$\mu_{12} : \mathcal{M}_2^{c}(\mathcal{G}) \times G_{22} \to G_{12} : (u; v) \mapsto (u; v)\mu_{12},$$

$$\tau_{12} : \mathcal{M}(\mathcal{G}) \times G_{12} \to G_{12}, \quad (s,z) \mapsto (s,z)\tau_{12},$$

где

$$\lambda^2_{u,v} = \sigma_2^{(\ell^u_{22};\, v)\mu_{22}}, \quad \rho^2_{s,z} = \sigma_2^{(\ell^z_2;\, z)\tau_{22}}.$$

Соответствующее продолжение $\mathcal{NR}$-умножений μ_{ii} задается введением мультипликативной операции для $u, v \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$: $uv = w$, где элемент $w \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$ определяется следующим образом:

$$\ell^w_{11} = (u_{11};\, v_{11})\mu_{11} * (\ell^u_1;\, v_{21})\tau_{11},$$

$$\ell^w_{12} = (u;\, v_{12})\tau_{12} * (\ell^u_2;\, v_{22})\mu_{12}\,\sigma_2^{(\ell^u_2;\, v_{12})\tau_{22}},$$

$$\ell^w_{21} = (\ell^u_1;\, v_{11})\mu_{21}\,\sigma_1^{(\ell^u_1;\, v_{21})\tau_{11}} * (u;\, v_{21})\tau_{21},$$

$$\ell^w_{22} = (\ell^u_2;\, v_{12})\tau_{22} * (u_{22};\, v_{22})\mu_{22}.$$

причем указаны ограничения для τ_{ij}, μ_{ij} , необходимые и достаточные для того, чтобы $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ было почтикольцом. Полученное таким образом почтикольцо названо $\mathcal{NR}$-связкой семейства $\mathcal{G} = \{G_{ij}\}$, $i,j \in \{1,2\}$ относительно факторной системы $\mathcal{F}(\mathcal{G}) = \langle \mu_{ij}, \tau_{ij};\, \sigma_i \rangle_{i,j \in \{1,2\}}$.

В §3 гл.II рассмотрены почтикольца, допускающие описание в терминах $\mathcal{NR}$-связок. Такими почтикольцами оказываются почтикольца, обладающие ортодоксальными идемпотентами. Ненулевой идемпотент e почтикольца $\mathcal{N}$ называется ортодоксальным, если он дистрибутивен и удовлетворяет условию:

$$\forall x, t \in \mathcal{N} \quad (te)i_x \in \mathcal{N}e .$$

Если ε_1 - ортодоксальный идемпотент почтикольца $\mathcal{N}$ с единицей $\varepsilon_{\mathcal{N}}$, то $\varepsilon_2 = \overline{\varepsilon}_1 * \varepsilon_{\mathcal{N}}$ - также ортодоксальный идемпотент. Подгруппа $U \leq A(\mathcal{N})$ называется L-инвариантной, если $ut \in U$ для всех $u \in U$, $t \in \mathcal{N}$. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (п.3.4 гл.II). Почтикольцо $\mathcal{N}$ тогда и только тогда обладает ортодоксальными идемпотентами, когда его аддитивная группа разлагается в прямое произведение L-инвариантных подгрупп.

Пусть $\mathcal{N}$ - однородное почтикольцо с единицей $\varepsilon_{\mathcal{N}}$ и с ортодоксальным идемпотентом ε_1, $\varepsilon_2 = \overline{\varepsilon_1} * \varepsilon_{\mathcal{N}}$ и

$$A_{11}^{\mathcal{N}} = \varepsilon_1 \mathcal{N} \varepsilon_1, \quad A_{12}^{\mathcal{N}} = \{ x\varepsilon_2 * \overline{\varepsilon_2 x \varepsilon_2} \mid x \in \mathcal{N} \},$$

$$A_{21}^{\mathcal{N}} = \{ \overline{\varepsilon_1 x \varepsilon_1} * x\varepsilon_1 \mid x \in \mathcal{N} \}, \quad A_{22}^{\mathcal{N}} = \varepsilon_2 \mathcal{N} \varepsilon_2 .$$

Множества $A_{ij}^{\mathcal{N}}$ оказываются подгруппами аддитивной группы почтикольца $\mathcal{N}$. Для семейства $\mathfrak{U} = \{A_{ij}^{\mathcal{N}}\}$ существует такая факторная система $\mathcal{F}(\mathfrak{U}) = \langle \mu_{ij}, \tau_{ij}; \sigma_i \rangle_{i,j \in \{1,2\}}$, что верной оказывается

ТЕОРЕМА (п.3.II гл.II). $\mathcal{NR}$-связка $\mathcal{M}(\mathfrak{U})$ относительно факторной системы $\mathcal{F}(\mathfrak{U})$ является почтикольцом, изоморфным почтикольцу $\mathcal{N}$.

Эта теорема указывает на роль $\mathcal{NR}$-связок, аналогичную роли пирсовских разложений в теории колец.

В §4 гл.II рассматриваются симметрические почтикольца на прямых произведениях групп.

Пусть $G = U_1 \times U_2$ - прямое произведение групп U_1 и U_2, ε_i - идемпотентные эндоморфизмы группы G $(i \in \{1,2\}$ с $\mathcal{J}m\, \varepsilon_i = U_i$. Эндоморфизмы ε_i являются ортодоксальными идемпотентами однородной части $\mathcal{NS}_e(G)$ симметрического почтикольца $\mathcal{NS}(G)$ на группе G. С помощью идемпотентов охарактеризованы некоторые структурные свойства почтикольца $\mathcal{NS}_e(G)$ как $\mathcal{NR}$-группы над собой (предложение п.4.3 гл.II).

Для $\mathcal{N}\mathcal{T}_0(G)$ введем следующие обозначения:

$$G_{11} = \{\varphi \in \mathcal{N}\mathcal{T}_0(G) \mid G\varphi \subseteq U_1,\ U_2\varphi = \{\theta_G\}\},$$

$$G_{12} = \{\varphi \in \mathcal{N}\mathcal{T}_0(G) \mid G\varphi \subseteq U_2,\ U_2\varphi = \{\theta_G\}\},$$

$$G_{21} = \{\varphi \in \mathcal{N}\mathcal{T}_0(G) \mid G\varphi \subseteq U_1,\ U_1\varphi = \{\theta_G\}\},$$

$$G_{22} = \{\varphi \in \mathcal{N}\mathcal{T}_0(G) \mid G\varphi \subseteq U_2,\ U_1\varphi = \{\theta_G\}\},$$

$$\mathcal{G} = \{G_{ij}\},\ i,j \in \{1,2\}.$$

Основным результатом параграфа является

ТЕОРЕМА (п.4.5 гл.II). Для семейства $\mathcal{G} = \{G_{ij}\}, i,j \in \{1,2\}$ существует факторная система $\mathcal{F}(\mathcal{G}) = \langle \mu_{ij}, \tau_{ij}; \sigma_i \rangle\ i,j \in \{1,2\}$, относительно которой множество $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ всех $\mathcal{G}$-матриц является почтикольцом, изоморфным почтикольцу $\mathcal{N}\mathcal{T}_0(G)$.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ.

I. Киртадзе Л.В. О коммутаторно определенных почтикольцах// Сибирская школа по многообразиям алгебраических систем. Тез. докл.- Барнаул, 1988.- с.25.

2. Kirtadze L.V. Affine near-rings and its generalizations // 7 Konferenca Algebra in logika.- Maribor, 1989.-p.19.

3. Киртадзе Л.В. Предаффинные почтикольца// Международная конференция по алгебре. Тез. докл. по теории колец, алгебр и модулей.- Новосибирск, 1989.- с.68.

4. Киртадзе Л.В., Усенко В.М. Скрещенные эндоморфизмы аддитивных групп почтиколец и дистрибутивные дефекты// I Симп. по теории колец, алгебр и модулей. Тез. докл.- Львов 1990.- с.70.

5. Киртадзе Л.В., Усенко В.М. NR -связки и почтикольца преобразований// Международная конференция по алгебре. Тез. докл. по теории колец, алгебр и модулей.- Барнаул, 1991.- с.121.

6. Киртадзе Л.В. Предабелены и псевдоаффинные почтикольца// Киев. ун-т.- Киев, 1992.- 22 с.- Деп. в УкрНИИНТИ.

Подп. в печ. 16.06.92. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс. печать.
Усл. печ. л. 1,16. Усл. кр.-отт. 1,16. Уч.-изд. л. 0,9. Тираж
100 экз. Зак. 188 Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики АН Украины
252601 Киев 4, ГСП, ул. Репина, 3