Академія Наук України
Ордена Трудового Червоного Прапора Інститут математики

На правах рукопису

Лучик Василь Єфремович

УДК 517.9

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1992

Робота виконана в Інституті математики [illegible]

Науковий керівник : член-кореспондент АН України, доктор фізико-математичних наук, професор САМОЙЛЕНКО А.М.

Офіціальні опоненти : доктор фізико-математичних наук, професор ПЛОТНІКОВ В.О.; кандидат фізико-математичних наук АСЛАНЯН А.А.

Провідна організація : Білоруський державний університет.

Захист дисертації відбудеться "1" грудня 1992р. в 15⁰⁰ годин на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою :

252601 Київ - 4, МСП, вул. Репіна, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "26" жовтня 1992 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ЛУЧКА А.Ю.

Академія Наук України
Ордена Трудового Червоного Прапора Інститут математики

На правах рукопису

Лучик Василь Єфремович

УДК 517.9

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1992

Робота виконана в Інституті математики АН України

Науковий керівник : член-кореспондент АН України, доктор фізико-математичних наук, професор САМОЙЛЕНКО А.М.

Офіціальні опоненти : доктор фізико-математичних наук, професор ПЛОТНІКОВ В.О.; кандидат фізико-математичних наук АСЛАНЯН А.А.

Провідна організація : Білоруський державний університет.

Захист дисертації відбудеться "_____" грудня 1992р. в ________ годин на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою : 252601 Київ - 4, МСП, вул. Репіна, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "_____" ______________ 1992 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ЛУЧКА А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертація присвячена дослідженню зліченних систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією, фундамент теорії яких був закладений в роботах М.М.Боголюбова, Ю.О.Митропольського, А.М.Самойленко, О.Д.Мишкіса, М.О.Перестюка. В дальнійшому ця теорія плідно розвивається представниками Київської математичної школи.

Багато питань цієї теорії розглянуто для скінченновимірних систем. Але цілий ряд задач з різних галузей природознавства вимагає дослідження зліченних диференціальних систем, побудова теорії яких зв'язана з роботами А.М.Тихонова, К.П.Персидського, О.А.Жаутикова, К.Г.Валєєва, В.Х.Харасахала.

Дана дисертаційна робота розширює відомі представлення щодо питань звідності, стійкості зліченних систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією та існування в них періодичних розв'язків.

Мета роботи. Знайти умови редукції задачі про звідність зліченних систем диференціальних імпульсних рівнянь з періодичними коефіцієнтами до задачі про звідність скінченновимірних періодичних імпульсних систем зростаючої розмірності, дослідити можливість редукції задачі про звідність імпульсної системи рівнянь з майже-періодичними коефіцієнтами до випадку системи з квазіперіодичними коефіцієнтами, побудувати алгоритм розв'язку періодичної задачі управління для зліченних імпульсних систем з малим параметром.

Наукова новизна. Обгрунтований аналог теореми Єругіна для диференціальних імпульсних систем в просторі обмежених числових послідовностей, наведені умови редукції задачі про звідність за Ляпуновим систем вказаного вигляду з періодичними коефіцієнтами до випадку скінченновимірних систем періодичних імпульсних рівнянь зростаючої розмірності; наведені умови редукції задачі про звідність імпульсної системи рівнянь з майже-періодичними коефіцієнтами до випадку імпульсної системи рівнянь з квазіперіодичними коефіцієнтами; одержані нові умови розв'язку класичної задачі управління для імпульсної системи з малим параметром.

Практична цінність одержаних в дисертації теоретичних положень полягає в тому, що застосування методу звідності поставлених задач до аналогічних задач в скінченновимірному просторі дає можливість наближеного їх розв'язання. Так, побудовано конструктивні алгоритми для розв'язання періодичної задачі управління зліченних систем з імпульсною дією, що дає можливість дослідити існування періодичного розв'язку. Остання задача займає важливе місце в теорії коливань і має широке застосування в математичній фізиці, а також в теорії управління і автоматичного регулювання.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на семінарах відділу диференціальних рівнянь Інституту математики АН України, кафедри диференціальних і інтегральних рівнянь Київського державного університету ім. Т.Г.Шевченка, на республіканських наукових конференціях з розривних динамічних систем в Івано-Франківську (1990 р.) і Ужгороді (1991 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 6 наукових статтях.

Структура і об'єм роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, двох глав і списку літератури, який становить 95 назв. Об'єм роботи - II3 сторінок друкарського тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність теми, формулюються задачі досліджень, дається короткий огляд літератури по темі дисертації, проводиться аннотація отриманих результатів.

Перша глава присвячена розв'язанню деяких задач звідності зліченних імпульсних систем.

В першому параграфі доведений аналог теореми Єругіна для лінійної системи з імпульсами вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x, \quad t \neq \tau_j; \qquad (1)$$

$$\Delta x\big|_{t=\tau_j} = B_j\, x(\tau_j - 0) \qquad (j = \dots, -1, 0, 1, \dots),$$

де $x \in \mathfrak{M}$, $\|x\| = \sup_i \{|x_i|, i = 1, 2, 3, \dots\}$,

$A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^{\infty}$, $B_j = [b_{is}^{(j)}]_{i,s=1}^{\infty}$,

$\dots < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_j < \dots$ - зростаюча послідовність дійсних чисел з множини $T = R^1 = (-\infty, +\infty)$.

Під нормою матриці A будемо розуміти вираз

$$\|A\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}(t)| .$$

Нехай для системи (1) виконуються умови :

I. Функції $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, 3, \dots)$ неперервні по t на $T = R^1$, причому на кожному скінченному сегменті $T_1 = [a, b] \subset T$

$$\|A(t)\|_1 \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \max_{T_1} |a_{ij}(t)| \leq \Psi_{[a,b]} = \mathrm{const} < \infty.$$

2. Матриці B_j $(j = \dots, -1, 0, 1, \dots)$ постійні і обмежені по нормі, причому існують і обмежені матриці $(B_j + E)^{-1}$, де E - одинична матриця.

3. $\tau_{j+1} - \tau_j \geq c = const > 0$ $(j = \dots, -1, 0, 1, \dots)$.

Т е о р е м а І. Система (І) звідна до вигляду $dy/dt = Py$, де $y \in \mathfrak{M}$, P - постійна матриця, тоді і тільки тоді, коли деяка її фундаментальна матриця може бути представлена у вигляді $X(t) = L(t)\, e^{Pt}$, де $L(t)$ - матриця Ляпунова.

Достатні умови редукції задачі про звідність системи (І) у випадку періодичної матриці $A(t)$ і постійних матриць B_j до випадку скінченновимірних періодичних імпульсних систем зростаючої розмірності наведені в наступному твердженні.

Т е о р е м а 2. Якщо послідовність матриць $\left\{\overset{(n)}{L}(t)\right\}$, які зводять зрізані системи

$$\begin{aligned} \frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} &= \overset{(n)}{A}(t)\,\overset{(n)}{x}, \quad t \neq \tau_j; \\ \Delta \overset{(n)}{x}\Big|_{t=\tau_j} &= \overset{(n)}{B}_j\,\overset{(n)}{x}(\tau_j - 0) \quad (j = \dots, -1, 0, 1, \dots) \end{aligned} \tag{2}$$

до вигляду $d\overset{(n)}{y}/dt = \overset{(n)}{P}\,\overset{(n)}{y}$, а також обернені матриці $\left\{\overset{(n)}{L}{}^{-1}(t)\right\}$ рівномірно правильні на кожному з відрізків $[t_0, \tau_1]$, $(\tau_1, \tau_2]$, $(\tau_2, \tau_3]$, причому послідовність $\left\{\overset{(n)}{P}\right\}$ правильна, то система

(I) звідна до вигляду $dy/dt = Py$ за допомогою матриці $L(t)$, причому $P = \lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{P}$, $L(t) = \lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{L}(t)$ в слабкому смислі.

В другому параграфі розглянута можливість редукції задачі про звідність системи рівнянь з майже-періодичними коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi)\,x, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad t \neq \tau_j;$$
$$\Delta x\Big|_{t=\tau_j} = B_j\, x(\tau_j - 0) \quad (j = \dots, -1, 0, 1, \dots) \tag{3}$$

до випадку системи з квазіперіодичними коефіцієнтами

$$\frac{d\overset{(m)}{x}}{dt} = P(\overset{(m)}{\varphi})\,\overset{(m)}{x}, \quad \frac{d\overset{(m)}{\varphi}}{dt} = \overset{(m)}{\omega}, \quad t \neq \tau_j;$$
$$\Delta \overset{(m)}{x}\Big|_{t=\tau_j} = B_j\, \overset{(m)}{x}(\tau_j - 0) \quad (j = \dots, -1, 0, 1, \dots). \tag{4}$$

Тут ω - частотний базис майже-періодичної функції, $x \in R^n$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, $\overset{(m)}{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_m, 0, 0, \dots)$, $P(\varphi)$ і B_j - $n \times n$-вимірні матриці.

Позначимо через $C_{\widetilde{Lip}}(\varphi)$ множину матриць, які задовольняють підсилені умови Коші-Ліпшіца по φ.

Т е о р е м а 3. Нехай система (3) така, що для неї виконуються умови :

1) $P(\varphi) \in C_{\widetilde{Lip}}(\varphi)$ з коефіцієнтом $\mathcal{E}(m)$;

2) при кожному натуральному m зрізана система (4) за допомогою матриці $\overset{(m)}{\Phi}(\overset{(m)}{\varphi})$ звідна до вигляду

$$\frac{d\overset{(m)}{y}}{dt} = \overset{(m)}{N}\overset{(m)}{y}, \quad \frac{d\overset{(m)}{\varphi}}{dt} = \overset{(m)}{\omega}, \quad t \neq \tau_j;$$

$$\Delta\overset{(m)}{y}\Big|_{t=\tau_j} = \overset{(m)}{Q}_j(\tau_j)\overset{(m)}{y}(\tau_j - 0) \quad (j = \dots, -1, 0, 1, \dots);$$

3) послідовності $\left\{\overset{(m)}{\Phi}(\overset{(m)}{\varphi})\right\}$, $\left\{\overset{(m)}{\Phi}{}^{-1}(\overset{(m)}{\varphi})\right\} \subset C_{\widetilde{Lip}}(\varphi)$, $\left\{\overset{(m)}{Q}_j(t)\right\}$, $\left\{\overset{(m)}{N}\right\}$ збіжні за нормою, причому $\left\{\overset{(m)}{\Phi}{}^{-1}(\overset{(m)}{\varphi})\right\}$ - рівномірно по $\overset{(m)}{\varphi}$.

Тоді система (3) звідна до системи вигляду

$$\frac{dy}{dt} = Ny, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad t \neq \tau_j;$$

$$\Delta y\Big|_{t=\tau_j} = Q_j(\tau_j)\,y(\tau_j - 0) \quad (j = \dots, -1, 0, 1, \dots).$$

Далі розглянуто систему загального вигляду

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi)\,x, \quad \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad t \neq \tau_j;$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_j} = B_j\,x(\tau_j - 0) \quad (j = \dots, -1, 0, 1, \dots),$$

де $a(\varphi)$ - зліченновимірна функція, $a(\varphi) \in C_{\widetilde{Lip}}(\varphi)$ з коефіцієнтом $\mathcal{L}(m)$. Для неї показано справедливість теореми 3.

В третьому параграфі для дослідження системи вигляду (I) застосований "метод зрізання". Наведені умови, при яких розв'язок $\overset{(n)}{x}(t, t_0, \overset{(n)}{x}_0)$ зрізаної системи (2) задовольняє умову :

$$\lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{x}(t, t_0, \overset{(n)}{x}_0) = x(t, t_0, x_0), \tag{5}$$

де $x(t, t_0, x_0)$ - розв'язок системи (I), а збіжність - рівномірно слабка (покоординатна) на кожному скінченному відрізку з R^1, що не містить імпульсних моментів τ_j.

Більш сильне твердження гарантує наступна теорема.

Т е о р е м а 4. Нехай для системи (I) справедливі нерівності

$$\|A(t) - \overset{(n)}{A}(t)\| \le \xi(n), \quad \|B_j - \overset{(n)}{B}_j\| \le \beta(n) \quad (j = \dots, -1, 0, 1, \dots).$$

Тоді для кожного розв'язку системи (I)

$x = x(t, t_0, x_0)$, $x_0 = (\overset{(1)}{x}_0, \overset{(2)}{x}_0, \dots)$

такого, що $\|(0, \dots, 0, \overset{(n+1)}{x}_0, \overset{(n+2)}{x}_0, \dots)\| \le \delta(n)$,

має місце нерівність

$$\|x - \overset{(n)}{x}\| \le K\alpha(n),$$

де $0 < K = const < \infty$, $\alpha(n) = max\{\xi(n), \beta(n), \delta(n)\}$, а $\overset{(n)}{x}$ - розв'язок системи (2) з початковими умовами t_0 $(\overset{(1)}{x}_0, \overset{(2)}{x}_0, \dots, \overset{(n)}{x}_0)$. Якщо $\alpha(n) \to 0$ при $n \to \infty$, то граничний перехід (5) відбувається в сильному смислі (за нормою).

У другій главі розглянута періодична задача управління для зліченної системи диференціальних рівнянь з імпульсами, досліджуються деякі питання стійкості розв'язків цієї системи.

В четвертому параграфі розглянута нелінійна система з імпульсами вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x), \quad t \neq \tau_j;$$
$$\Delta x\Big|_{t=\tau_j} = \varepsilon H_j(\tau_j, x) \quad (j = \dots, -1, 0, 1, \dots), \tag{6}$$

де $f(t, x)$ і $H_j(t, x)$ - зліченновимірні періодичні по t з періодом T функції, визначені в області

$$\mathcal{D}^*: (t, x) \in R^1 \times \mathcal{D} = (-\infty, +\infty) \times \left\{ x \in \mathfrak{M} \mid \|x\| \leq R = \mathrm{const} \right\},$$

ε - малий параметр.

Про те, що існує таке μ, що розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x) - \mu, \quad t \neq \tau_j;$$
$$\Delta x\Big|_{t=\tau_j} = \varepsilon H_j(\tau_j, x) \quad (j = \dots, -1, 0, 1, \dots), \tag{7}$$

який приймає при $t = t_0$ значення $x = x_0$, є T-періодичним, говорить наступне твердження.

Т е о р е м а 5. Нехай функції $f(t, x)$ і $H_j(t, x)$, визначені в області $\mathcal{D}^*$, задовольняють умови :

I) $\max\limits_{t \in [t_0, t_0+T]} \left\{ \|f(t, x)\|, \|H_j(t, x)\| \right\} = M = \mathrm{const} < \infty$;

2) $\max\limits_{t \in [t_0, t_0+T]} \left\{ \|f(t, \bar{x}) - f(t, \bar{\bar{x}})\|, \|H_j(t, \bar{x}) - H_j(t, \bar{\bar{x}})\| \right\} < L \|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\|$

де $0 < L = \mathrm{const} < \infty$, $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \mathcal{D}$;

3) неперервні і T-періодичні по t ;

4) при всіх цілих j $H_{j+d} = H_j$, $\tau_{j+d} - \tau_j = T$, $d \in \mathbb{N}$.

Тоді при всіх $0<\varepsilon<\min\left\{\frac{R}{M(\frac{T}{2}+2d)}, \frac{1}{L(\frac{T}{2}+2d)}\right\}$

існує єдине управління μ таке, що система (7) має

T -періодичний розв'язок $x^{\circ}(t, t_0, x_0)$, який

задовольняє початкову умову $x^{\circ}(t_0, t_0, x_0) = x_0$,

$$x_0\in \mathcal{D}_f - \left\{x\in \mathfrak{M} \;\middle|\; \|x\| < R - \varepsilon M\left(\frac{T}{2}+2d\right)\right\} \subset \mathcal{D}.$$

Далі будується зрізана система

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \varepsilon \overset{(n)}{f}(t, \overset{(n)}{x}), \quad t\neq\tau_j;$$

$$\Delta \overset{(n)}{x}\Big|_{t=\tau_j} = \varepsilon \overset{(n)}{H}_j(\tau_j, \overset{(n)}{x}) \quad (j=\dots,-1,0,1,\dots),$$

що відповідає системі (6). Для неї при кожному натуральному

n справедлива теорема 5 про існування управління $\overset{(n)}{\mu}$,

при якому система

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \varepsilon \overset{(n)}{f}(t, \overset{(n)}{x}) - \overset{(n)}{\mu}, \quad t\neq\tau_j;$$

$$\Delta \overset{(n)}{x}\Big|_{t=\tau_j} = \varepsilon \overset{(n)}{H}_j(\tau_j, \overset{(n)}{x}) \quad (j=\dots,-1,0,1,\dots) \tag{7'}$$

має T -періодичний розв'язок з початковими умовами

t_0, $(\overset{(1)}{x}_0, \overset{(2)}{x}_0, \dots, \overset{(n)}{x}_0)$.

Наступне твердження встановлює зв'язок між розв'язками

систем (7), (7') та між управліннями μ, $\overset{(n)}{\mu}$.

Т е о р е м а 6. Нехай система (6) така, що для неї

виконані всі умови теореми 5.

Тоді розв'язок $\overset{(n)}{x}(t, t_0, \overset{(n)}{x}_0)$ зрізаної системи

(7') в слабкому смислі задовольняє умову (5), де

$x(t, t_0, x_0)$ - T-періодичний розв'язок системи

(7), причому $\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \overset{(n)}{\mu}$

Для випадку лінійної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A(t)\, x, \quad t \neq \tau_j;$$
$$\Delta x\Big|_{t=\tau_j} = \varepsilon B_j\, x(\tau_j - 0) \quad (j = \dots, -1, 0, 1, \dots) \tag{8}$$

доведено аналог теореми 6 та знайдено умови, при яких граничний перехід виду (5) відбувається в сильному смислі.

В п'ятому параграфі наведені умови існування управління $\{\mu_1, \mu_2\}$ такого, що розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x) - \mu_1, \quad t \neq \tau_j;$$
$$\Delta x\Big|_{t=\tau_j} = \varepsilon H_j(\tau_j, x) - \mu_2 \quad (j = \dots, -1, 0, 1),$$

який проходить при $t = t_0$ через точку x_0, буде T-періодичним.

При цьому припускається, що одне з μ_k $(k = 1, 2)$ задане наперед, а друге відшукується як функція від першого.

В цьому випадку доведено аналоги теорем 5-6. Запропоновано алгоритми для наближеного знаходження T-періодичного розв'язку та відповідного управління.

В шостому параграфі розглянуто окремі задачі стійкості нульового розв'язку системи рівнянь з імпульсами в лінійному і нелінійному випадках.

Розглядається нелінійна зліченна система вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq \tau_j;$$
$$\Delta x\Big|_{t=\tau_j} = H_j(\tau_j, x) \quad (j = \dots, -1, 0, 1, \dots), \tag{9}$$

де функції $f(t,x)$ і $H_j(t,x)$ неперервні по t в області $\mathcal{D}^*$, $f(t,x)$ задовольняє умову Ліпшіца по x, $\|H_j(t,x)\| \le M$ $(j = \cdots, -1, 0, 1, \ldots)$.

Справедливе твердження.

Теорема 7. Нехай функції $f(t,x)$ і $H_j(t,x)$ або не залежні від змінної t або є періодичними функціями по t з періодом $T>0$ та мають місце рівності : $f(t,0) \equiv 0$, $H_j(t,0) \equiv 0$

Тоді, якщо нульовий розв'язок системи (9) стійкий, то він і рівномірно стійкий.

На завершення розглянуто випадок лінійної системи (I). Для неї доведено умови стійкості, асимптотичної стійкості і нестійкості нульового розв'язку в залежності від поведінки матриціанта на нескінченності.

Автор висловлює щиру вдячність науковому керівнику члену-кореспонденту АН України А.М.Самойленко за корисні поради і критичні зауваження.

Основні положення дисертації опубліковані в таких працях.

I. Самойленко А.М., Теплінський Ю.В., Лучик В.Є. Звідність диференціальних рівнянь з імпульсами в просторі обмежених числових послідовностей // Доп. АН УРСР. Сер. мат. - 1990. - №5. - С. 27-30.

2. Теплинский Ю.В., Лучик В.Е. О приводимости дифференциальных уравнений с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Укр. мат. журн. - 1990. - №10. - С. 1376-1382.

3. Теплинский Ю.В., Лучик В.Е. О периодической задаче управления для бесконечных дифференциальных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. - 1992. -№11.

4. Лучик В.Е. Метод укорочения для линейных уравнений с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Методы исследования дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений. - Киев : Изд-во АН УССР, 1990. - С. 50-54.

5. Лучик В.Е. О приближенном решении бесконечных импульсных систем // Разрывные динамические системы : Тез. докл. респ. науч. конф., Ивано-Франковск, 11-14 сент. 1990 г. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. - С. 25.

6. Лучик В.Е. Об устойчивости решений счетных дифференциальных импульсных систем // Разрывные динамические системы : Тез. докл. науч. шк.-семинара, Ужгород, 17-20 сент. 1991 г. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. - С. 34.

Підп. до друку 20.10.92. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум.-друк. арк. 0,93. Ум. фарб.-відб. 0,93. Обл.-вид.арк. 0,7.
Тираж 100 прим. Зам. 282 Безкоштовно.

Підготовлено та віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Репіна, 3

Підп. до друку 20.10.92. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум.-друк. арк. 0,93. Ум. фарб.-відб. 0,93. Обл.-вид.арк. 0,7.
Тираж 100 прим. Зам. 282 Безкоштовно.

Підготовлено та віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Репіна, 3