ЛЬВОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. И. ФРАНКО

На правах рукописи

КУЗЫК АНДРЕЙ ДАНИЛОВИЧ

УДК 517.535.4

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОГО l-ИНДЕКСА

01.01.01 - математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Львов - 1992

Работа выполнена на кафедре теории функций и теории вероятностей Львовского государственного университета им. И.Франко.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Шеремета М.Н.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Седлецкий А.М.

кандидат физико-математических наук, доцент Винницкий Б.В.

Ведущая организация: Институт математики АН Украины г. Киев

Защита состоится "15" 10 1992 г. в 15 30 час. на заседании специализированного совета К 068.12.13 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук во Львовском государственном университете им. И.Франко / 290000, г. Львов, ул. Университетская, 1 /.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Львовского госуниверситета /г. Львов, ул. Драгоманова, 5 /.

Автореферат разослан "14" 09 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
К 068.12.13 Я.В.Микитюк

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из центральных обьектов в общей теории аналитических функций является класс целых функций, с которыми в большей или меньшей мере соприкасался каждый математик. В современных исследованиях по теории целых функций можно выделить две основные тенденции: с одной стороны, доказываются результаты, пригодные для всего класса целых функций, а с другой, выделяется тот или иной подкласс целых функций и изучаются его свойства. В 1968 г. Б.Лепсон из общего класса целых функций выделил его подкласс - целые функции ограниченного индекса. Так называется целая функция f , для которой существует число $N\in\mathbb{Z}_+$ такое, что для всех $n\in\mathbb{Z}_+$ и $z\in\mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}\leq\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!}:0\leq k\leq N\right\}.$$

Исследованию свойств целых функций ограниченного индекса и различным их приложениям в теории распределения значений, дифференциальных уравнений, характеристических функций вероятностных законов и др. посвятили свои работы такие выдающиеся математики как У.Хейман, С.Шах, Г.Фрике и многие другие /библ. см. в Shah S.M. Entire functions of bounded index // Lecture Notes in Math. - 1977. - V. 589. - P.117 - 145 /.
К этим работам следует прибавить статью Ш.Стрелица / Strelits Sh. Asymptotic properties of entire transcendental solutions of algebraic differential equations // Contemporary Math. - 1983. - V.25. - P. 171 - 214 /, в которой для изучения ограниченности индекса целой функции применен метод Вимана-Валирона. С.Шах и У.Хейман показали, что каждая целая функция ограниченного индекса является функцией экспоненциального типа. Естественно возникла проблема видоизменения определения целой функции ограниченного индекса так, чтобы выйти за пределы класса целых функций экспоненциального типа с дальнейшим применением в теории дифференциальных уравнений и других разделах

современной математики. Такое обобщение целой функции ограниченного индекса пытался дать Т.Лакшминарасимхан / Lakshminarasimhan T. A note on entire functions of bounded index // J. Indian Math. Soc. - 1974.- V.38.- P.43 - 49 /, а его приложению к дифференциальным уравнениям посвящена статья Д.Сомасундарана и Р.Земичарази / Somasundaran D., Thamizharsi R. A note on the entire functions of l- bounded index and l- type // Indian J. Pure and Appl. Math. - 1988. - 19, №3. - P.284 - 293 /. Согласно Т.Лакшминарасимхану для положительной непрерывной медленно возрастающей к $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функции l целая функция f называется функцией ограниченного l-индекса, если существует число $N\in\mathbb{Z}_+$ такое, что для всех $n\in\mathbb{Z}_+$ и $z\in\mathbb{C}$

$$\frac{l(n+2)}{n!}|f^{(n)}(z)|\leq\max\left\{\frac{l(k+2)}{k!}|f^{(k)}(z)|: 0\leq k\leq N\right\},$$

а наименьшее из таких чисел N называется l-индексом функции f. Т.Лакшминарасимхан также показал, что если целая функция f имеет ограниченный l-индекс p, то

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln M(r,f)}{r\,l(r)}\leq(p+1)\frac{l(p+3)}{l(p+2)},$$

где $M(r,f)=\max\{|f(z)|: |z|\leq r\}$, причем утверждается, что эта оценка точна. Однако, как показано в [4], последнее утверждение не верно, т.е. если f имеет ограниченный l-индекс в смысле Т.Лакшминарасимхана, то ее рост не превышает нормального типа первого порядка. Таким образом, Т.Лакшминарасимхану не удалось выйти за пределы класса целых функций экспоненциального типа. Выйти за пределы указанного класса можно при помощи следующего обобщения понятия целой функции ограниченного индекса.

Пусть l - положительная непрерывная на $[0,+\infty)$ функция. Целая функция f называется [4] функцией ограниченного l-индекса, если существует число $N\in\mathbb{Z}_+$ такое, что для всех $n\in\mathbb{Z}_+$ и $z\in\mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!\, l^{n}(|z|)} \leq \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!\, l^{k}(|z|)} : 0 \leq k \leq N\right\}. \qquad /\ \mathrm{I}\ /$$

Наименьшее из таких чисел N назовем l-индексом функции f и обозначим через $N(f;l)$.

<u>Цель работы</u>. Изучить свойства целых функций ограниченного l-индекса и их применений.

<u>Научная новизна и теоретическая ценность</u>. В работе

I/ доказаны различные критерии ограниченности l-индекса целой функции, являющиеся или аналогами известных теорем Г.Фрике [I-3], или новыми результатами, вызванными в определении / I / наличием функции l. В частности, изучено локальное поведение производных функции ограниченного l-индекса, получены оценки максимума модуля такой функции на некоторых окружностях через минимум модуля на таких окружностях и максимум модуля на окружностях меньшего радиуса, доказан критерий ограниченности l-индекса функции f в терминах ее логарифмической производной и распределения нулей;

II/ получены результаты о возможном росте целой функции ограниченного l-индекса;

III/ исследована ограниченность l-индекса произведений целых функций, некоторых суперпозиций целых функций и целых решений линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами;

IУ/ изучена ограниченность l-индекса целых функций, представленных бесконечными произведениями.

<u>Методы исследования</u>. При доказательстве приведенных в работе результатов используются методы общей теории аналитических функций и некоторые приемы из работ У.Хеймана, С.М.Шаха и Г.Фрике.

I Fricke G.H.// Indian J. Math. - 1972. - v.14, №3. - P.207 - 212.

2 Fricke G.H.// Итон леаналиса математик. J. anal. Math. - 1975. - v.28. - P.101-122

3 Fricke G.H.// Math. Annalen. - 1973. - v.203. - P.215-223.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Львовском межвузовском семинаре по теории аналитических функций /рук. проф. А.А.Гольдберг/.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1-7]. Во всех статьях, опубликованных в соавторстве с М.Н.Шереметой, М.Н.Шеремете принадлежат постановки задач. Кроме того, в статьях [5, 7] ему принадлежат результаты о нулях целой функции ограниченного l-индекса, а результаты статьи [6] принадлежат обоим авторам в одинаковой мере. Из статьи [4] в диссертации приведены только те результаты, которые получены ее автором.

В этой связи следует отметить, что изучение целых функций так называемого l-распределения значений, начатое М.Н.Шереметой в [4], затем продолжено им же в [1].

Структура и обьем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, содержащих 11 параграфов и списка литературы, включающего 26 названий. Общий обьем работы - 106 страниц машинописного текста.

Содержание работы

Через Q обозначим класс положительных непрерывных на $[0,+\infty)$ функций l таких, что

$$l\,(x + O(1/l(x))) = O\,(l(x))\,, \quad x \to +\infty\,.$$

Глава I "Критерии ограниченности l-индекса целой функции" состоит из трех параграфов. В § 1.1 изучается поведение некоторых производных целой функции ограниченного l-индекса. Основной здесь является следующая теорема, являющаяся аналогом соответствующей теоремы Г.Фрике .

Теорема 1.1. Пусть $l \in Q$. Целая функция f имеет ограниченный l-индекс тогда и только тогда, когда для каждого $r > 0$ существует $n_0 = n_0(r) \in \mathbb{Z}_+$ и $P_0 = P_0(r) \geq 1$ такие, что для любого $z_0 \in \mathbb{C}$ при некотором $k_0 = k_0(z_0)$,

---

[1] Шеремета М.Н.//Изв.вузов.Матем.-1990.-№ 2.-С. 94-96.

$0 \le k_0 \le n_0$, выполняется неравенство

$$\max\left\{|f^{(k_0)}(z)| : |z-z_0| = \frac{r}{l(|z_0|)}\right\} \le P_0 |f^{(k_0)}(z_0)|.$$

Кроме того, здесь доказан также следующий критерий.

Теорема I.2. Пусть $l \in Q$, а l_* - непрерывная на $[0,+\infty)$ функция такая, что $\frac{1}{\theta} l(x) \le l_*(x) \le \theta l(x)$, $1 \le \theta \equiv \mathrm{const}$, для всех $x \ge 0$. Для того, чтобы целая функция f имела ограниченный l_*-индекс, необходимо и достаточно, чтобы f имела ограниченный l-индекс.

Параграф I.2 посвящен изучению локального поведения целой функции ограниченного l-индекса. Здесь доказаны следующие две теоремы, одна из которых дает оценку максимума модуля целой функции ограниченного l-индекса в некотором круге через ее максимум модуля в меньшем круге, а другая указывает на оценку максимума модуля через минимум модуля целой функции ограниченного l-индекса на некоторых окружностях. Эти теоремы являются аналогами соответствующих теорем Г.Фрике .

Теорема I.4. Пусть $l \in Q$. Целая функция f имеет ограниченный l-индекс тогда и только тогда, когда для любых чисел $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ существует число $P_1(r_1, r_2) \ge 1$ такое, что для всех $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\max\left\{|f(z)| : |z-z_0| = \frac{r_2}{l(|z_0|)}\right\} \le P_1(r_1,r_2) \max\left\{|f(z)| : |z-z_0| = \frac{r_1}{l(|z_0|)}\right\}.$$

Теорема I.5. Пусть $l \in Q$. Целая функция f имеет ограниченный l-индекс тогда и только тогда, когда для любого $R > 0$ существуют $P_2 = P_2(R) \ge 1$ и $\eta(R) \in (0,R)$ такие, что для каждого $z_0 \in \mathbb{C}$ и некоторого $r \in [\eta(R), R]$ выполняется неравенство

$$\max\left\{|f(z)| : |z-z_0| = \frac{r}{l(|z_0|)}\right\} \le P_2 \min\left\{|f(z)| : |z-z_0| = \frac{r}{l(|z_0|)}\right\}.$$

Наконец, в § I.3 доказан критерий ограниченности l-индекса целой функции в терминах ее логарифмической производной и распределения нулей. Чтобы его сформулировать, обозначим

$$n(r, z_0, 1/f) = \sum_{|a_k - z_0| \le r} 1$$

и

$$G_r = G_r(f) = \bigcup_k \left\{ z : |z - a_k| \le \frac{r}{l(|a_k|)} \right\},$$

где a_k - нули функции f. Имеет место

<u>Теорема 1.6</u>. Пусть $l \in Q$. Целая функция f имеет ограниченный l-индекс тогда и только тогда, когда:

1/ для любого $r > 0$ существует $P_3 = P_3(r)$ такое, что для всех $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G_r$ выполняется неравенство

$$|f'(z_0)/f(z_0)| \le P_3 l(|z_0|);$$

2/ для любого $r > 0$ существует $\tilde{n} = \tilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $n(r/l(|z_0|), z_0, 1/f) \le \tilde{n}$ для всех $z_0 \in \mathbb{C}$.

Отметим, что при $l(x) \equiv 1$ из теоремы 1.6 вытекает лемма и теорема из соответствующей статьи Г.Фрике.

Глава II "Дальнейшие свойства целых функций ограниченного l-индекса" состоит из четырех параграфов.

В § 2.1 изучается рост целых функций ограниченного l-индекса. Для любой непрерывной положительной на $[0, +\infty)$ функции l полагается

$$L(r) = \int_0^r l(t)\,dt.$$

Используя теорему 1.4, доказан следующий результат.

<u>Теорема 2.1</u>. Пусть $l \in Q$. Если функция f имеет ограниченный l-индекс, то

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M(r, f)}{L(r)} < +\infty \qquad / 2 /$$

Оценку / 2 / при дополнительных условиях на функцию l можно уточнить. С этой целью скажем, что $l \in \mathbb{L}^0$, если функция l положительная непрерывная на $[0,+\infty)$ и удовлетворяет условию

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{l(r)} \min\left\{l(t): \frac{r}{1+\delta} \le t \le r\right\} = æ(\delta) \to 1 \ (0<\delta\to 0).$$

Теорема 2.3. Пусть f - целая трансцендентная функция, $l\in \mathbb{L}^0$. Если $N(f;l)<+\infty$, то

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,f)}{L(r)} \le N(f;l)+1. \qquad / 3 /$$

Оценка / 3 / точна.

Справедливость теоремы 2.3 нетрудно получить из теоремы 2.2, которая утверждает, что если $l\in \mathbb{L}^0$ и $N(f;l)<+\infty$, то

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\nu(r,f)}{r\, l(r)} \le N(f;l)+1, \qquad / 4 /$$

где $\nu(r,f)$ - центральный индекс степенного разложения функции f. Если f - целая трансцендентная функция, то $\nu(r,f)\to\infty \ (r\to\infty)$. Поэтому из / 4 / следует, что для того, чтобы для данной функции $l\in \mathbb{L}^0$ существовала целая трансцендентная функция f ограниченного l-индекса, необходимо, чтобы $r\,l(r)\to+\infty \ (r\to\infty)$.

Условие $l\in \mathbb{L}^0$ означает, что функция l не может расти достаточно быстро. Например, функция $l(r)=e^r$ классу $\mathbb{L}^0$ не принадлежит. Наличие условия $l\in \mathbb{L}^0$ в теореме 2.3 вызвано методикой доказательства. От него можно избавиться, если наложить дополнительные условия на гладкость функции l.

Для непрерывной на $[0,+\infty)$ функции h положим

$$V(t,h) = \sum_{x_k+\delta_k\le t} (h(x_k)-h(x_k+\delta_k)),$$

где $(]x_k, x_k+\delta_k[)$ - последовательность интервалов, на которых функция h убывает, $x_k+\delta_k < x_{k+1}$. Ясно, что

$V(t,h)\equiv 0$, если h - неубывающая функция, и $V(t,h)=h(0)-h(t)$, если h - невозрастающая функция.

Теорема 2.4. Пусть l - положительная аналитическая функция переменного $t\in[0,+\infty)$ такая, что $V(r,\ln l)=o(L(r))$ при $r\to+\infty$. Тогда, если целая функция f имеет ограниченный l-индекс $N(f;l)$, то имеет место неравенство / 3 /.

В § 2.2 указано применение теоремы I.6 к исследованию ограниченности l-индекса произведения целых функций. Имеет место следующая

Теорема 2.5. Пусть $l\in Q$, f - целая функция ограниченного l-индекса, φ - целая функция и $\Psi(z)=\varphi(z)f(z)$. Для того, чтобы функция Ψ была функцией ограниченного l-индекса, необходимо и достаточно, чтобы функция φ была функцией ограниченного l-индекса.

В приложениях теории целых функций ограниченного l-индекса определенный интерес представляет вопрос об ограниченности l-индекса целого решения линейного дифференциального уравнения, коэффициентами которого являются целые функции, т.е. линейного дифференциального уравнения вида

$$g_0(z)f^{(n)}(z)+g_1(z)f^{(n-1)}(z)+\ldots+g_n(z)f(z)=h(z), \quad / 5 /$$

где g_k и h - целые функции. Этому вопросу посвящен § 2.3, где основной является следующая теорема, дающая необходимые условия ограниченности l-индекса целого решения уравнения / 5 /. Эта теорема является обобщением соответствующей теоремы Г.Фрике и С.Шаха, а также более слабой теоремы из статьи С.Шаха, доказанной для случая, когда $g_0, g_1, \ldots, g_n$ и h - многочлены.

Теорема 2.6. Пусть $l\in Q$, а $g_0, g_1, \ldots, g_n$ и h - целые функции ограниченного l-индекса. Пусть для любого $R\in(0,+\infty)$ существует $M=M(R)\in(0,+\infty)$ такое, что для всех $z\in\mathbb{C}\setminus G_R(g_0)$ и $j=1,2,\ldots,n$ выполняется неравенство $|g_j(z)|\le M|g_0(z)|l^j(|z|)$. Тогда целая функция f , удовлетворяющая уравнению / 5 /, является функцией ограниченного l -индекса.

Выбирая определенным образом функцию h , из теоремы 2.6 получим ряд следствий. Используя теорему 2.6, в § 2.4 изучается ограниченность l -индекса целых функций вида $f(z)=g(z^m), m\geq 2$ и $f(z)=\exp g(z)$.

Наконец, в главе III "Ограниченность l -индекса целых функций, представленных бесконечными произведениями" изучается ограниченность l -индекса функций

$$\pi_1(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^p}{\lambda_k^p}\right), \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^p}<\infty, p\in N,$$

и

$$\pi_2(z)=\prod_{k=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{\lambda_k}, p-1\right), \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^p}<\infty, p\in N,$$

где $E(z,p)$ - первичный множитель Вейерштрасса, а $0<\lambda_k\uparrow+\infty\ (k\to\infty)$. Положим $l_1=\lambda_1^p$ и $l_k=\lambda_k^p-\lambda_{k-1}^p$ $(k\geq 2)$. Результаты теорем 3.1 и 3.3 можно сформулировать следующим образом.

<u>Теорема 3.1 /3.3/</u>. Если $l_k\uparrow+\infty\ (k\to\infty)$, то функция π_1 / π_2 / имеет l -индекс $N(f;l)=1$ с $l(x)=\max\{æ, x^{p-1}\}$, где $æ$ - некоторая положительная постоянная.

Условие $l_k\uparrow+\infty(k\to\infty)$ в теоремах 3.1 и 3.3 существенно. Существует последовательность $0<\lambda_k\uparrow+\infty$ $(k\to\infty)$ такая, что $l_k\to\infty\ (k\to\infty)$, но утверждение теоремы 3.1 не верно. То же самое можно сказать и о теореме 3.3.

В заключение отметим, что из теоремы 3.1 и теоремы 3.3 при $p=1$ вытекает известный результат Г.Фрике.

Автор выражает глубокую признательность проф. Шеремете М.Н. за внимательное руководство и помощь.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих статьях.

I. Кузик А.Д. Про обмеженість l-індексу цілого розв"язку лінійного диференціального рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. - 1990. - Вип. 34. - С. 46-47.
2. Кузык А.Д. Об ограниченности l-индекса одного канонического произведения // Львов. ун-т. - Львов, 1992. - 29 С. - библиогр. 8 назв. - Рус. - Деп. в УкрНИИНТИ 13.07.92, №1070-Ук92.
3. Кузык А.Д. Об ограниченности l-индекса канонического произведения с положительными нулями // Львов. ун-т. - Львов, 1992. - 32 С. - библиогр. 5 назв. - Рус. - Деп. в УкрНИИНТИ 13.07.92, №1071-Ук92.
4. Кузык А.Д., Шеремета М.Н. Целые функции ограниченного l-распределения значений // Мат. заметки. - 1986. - Т. 39, № I. - С. 3-13.
5. Кузык А.Д., Шеремета М.Н. Целые функции ограниченного l-индекса // Докл. АН УССР. - Сер. А. - 1988. - № 6. - С. 16-17.
6. Кузык А.Д., Шеремета М.Н. О целых функциях, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям // Диф. уравн. - 1990. - Т. 26, № 10. - С. 1716-1722.
7. Шеремета М.Н., Кузык А.Д. О логарифмической производной и нулях целой функции ограниченного l-индекса // Сиб. мат. журн. - 1992. - Т. 33, № 2. - С. 142-150.

КУЗЫК АНДРЕЙ ДАНИЛОВИЧ

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОГО l-ИНДЕКСА

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 14.07.92. Формат 60х84/16. Бум.тип.№1.
Печ.офсет.Усл.печ.л.0,93.Усл.кр.от.1,16.Уч.изд.л.0,98.
Тираж 100. Заказ 281. Бесплатно.

Машинно-офсетная лаборатория Львовского государственного
университета, 290602, Львов, ул. Университетская, 1.