АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

БОДНАР
Дмитрий Ильич

ВОПРОСЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

(01. 01. 01 — математический анализ)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Киев — 1992

Работа выполнена в Институте прикладных проблем механики и математики АН Украины им. Я. С. Подстригача.

Официальные оппоненты: член-корреспондент АН Украины, доктор физико-математических наук, профессор В. К. ДЗЯДЫК, член-корреспондент АН Российской федерации, доктор физико-математических наук, профессор Л. Д. КУДРЯВЦЕВ, доктор физико-математических наук, профессор В. Н. РУСАК.

Ведущее предприятие — Физико-технический институт низких температур АН Украины.

Защита состоится «10» ноября 1992 г. в 15 часов на заседании специализированного совета Д 016.50.01 при Институте математики АН Украины по адресу: 252601, Киев 4, ГСП, ул. Репина, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан «28» сентября 1992 г.

Ученый секретарь специализированного совета *Д. В. ГУСАК*

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В последнее время интерес к цепным /непрерывным/ дробям значительно возрос, о чем свидетельствуют многочисленные международные конференции по непрерывным дробям или тесно связанным с ними аппроксимациям Паде, а также выход нескольких монографий по данной тематике, две из которых из известной серии "Энциклопедия математики и ее применения" У.Джоунс, В.Трон "Непрерывные дроби. Аналитическая теории и приложения".- М.: Мир, 1985, Дж. Бейкер, П.Грейвс-Моррис "Аппроксимации Паде".- М.: Мир, 1986 переведены на русский язык.

Различные обобщения непрерывных дробей рассматривались в теоретико-числовом направлении Л.Эйлером, К.Якоби, О.Перроном, Г.Ф.Вороным, А.Н.Хованским, А.В.Озерским, Е.В.Подсыпаниным, Г.Шекересом и др. Одним из наиболее удачных обобщений является алгоритм Якоби-Перрона, который успешно применяется также и в анализе для приближения вектор-функций одного переменного или так называемых совместных приближений /см., например, Е.М.Никишин, В.Н.Сорокин "Рациональные аппроксимации и ортогональность".-М.: Наука, 1988/. Используя интерпретацию цепной дроби в виде графа и рассматривая более общие графы типа дерева, В.Я.Скоробогатько дал определение многомерного аналога непрерывной дроби, получившей название ветвящаяся цепная дробь /ВЦД/. Некоторые частные случаи ВЦД встречались и ранее: в работе И.Пратье - при рассмотрении композиций отображений Жуковского, у В.П.Терских - при исследовании механических колебаний в валопроводах различных энергетических установок в судостроении.

Ветвящиеся цепные дроби получили применение в теории функций, теоретической физике, вычислительной математиее, электротехнике. В частности, вопросами интерполяции и аппроксимации функций многих переменных с помощью ВЦД занимались П.И.Боднарчук, Х.И.Кучминская, М.М.Пагиря, В.Семашко, А.Коут, Марфи и О.Донохоэ и др. П.И.Боднарчуком, Р.В.Слоневским, Н.И.Пелехом, Н.Н.Глинским и др. с помощью дробно-рациональных выражений, образованных, в частности на основании разложений в цепные и ветвящиеся цепные дроби, построены численные нелинейные /дробно-рациональные/ методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Эти методы оказались эффективными при решении жестких систем дифференциальных уравнений. Н.А.Недашковским, М.С.Сявавком с помощью ВЦД построены экономичные, численно устойчивые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Ветвящиеся цепные дроби применялись в электротехнике для синтеза многополюсников /И.В.Ерохов, А.Цихоцкий/, для построения математических моделей транзисторов /В.К.Картузов/, в теоретической физике: в виде ВЦД Н.В.Ткач представил массовый оператор квазичастиц, взаимодействующих с фононами, ВЦД с операторными элементами были применены М.Пиндером и Г.Туршетти при решении уравнения Шредингера.

Диссертационная работа посвящена построению аналитической теории ветвящихся цепных дробей.

Актуальность рассматриваемой тематики обусловлена тем, что ВЦД являются многомерными аналогами цепных дробей, их подходящие дроби дают дробно-рациональные приближения для функций многих переменных. ВЦД получили применения в различных областях науки и техники, однако теория ветвящихся цепных дробей развита недостаточно. Здесь возникают значительные трудности, связанные с тем, что методы, применяемые при исследовании сходимости непрерывных дробей явно используют рекуррентные соотношения для числителей и знаменателей подходящих дробей, для которых нет аналогов в многомерном случае. Вторая трудность связана с тем, что совокупность многомерных дробно-линейных отображений не образуют группы, как это имеет место в одномерном случае, если в качестве групповой операции рассматривать композицию отображений. Последнее существенно при рассмотрении неограниченных областей сходимости.

Целью диссертационной работы является разработка основ аналитической теории ветвящихся цепных дробей: исследование элементарных свойств ВЦД, установление общих признаков сходимости и расходимости ВЦД, являющихся многомерными аналогами наиболее известных и употребительных признаков сходимости непрерывных дробей, определение и исследование свойств различных типов функциональных ВЦД, разложение функций, заданных формальными степенными рядами в соответствующую ВЦД с линейными частными числителями, разложение в ВЦД отношения гипергеометрических функций двух переменных.

Методика исследования. В диссертационной работе используются методы теории функций комплексного переменного, аналитической теории непрерывных дробей, различные оценки и неравенства, а также применительно к ВЦД метод мажорант.

Научная новизна и практическая значимость:

- построены основы аналитической теории ветвящихся цепных дробей;

- разработана методика исследования сходимости ВЦД с действительными положительными и комплексными компонентами;

- установлены многомерные аналоги наиболее известных и часто используемых признаков сходимости непрерывных дробей: теоремы Зейделя, Прингсгейма, Ворпицкого, Ван Флека, параболические теоремы и многие другие;

построены и исследованы многомерные аналоги некоторых типов функциональных непрерывных дробей: положительно определенных ВЦД, многомерных аналогов $\mathcal{J}$-, C-, S-, g- дробей, двумерных соответствующих непрерывных дробей с линейными частными числителями;

- разложены отношения гипергеометрических функций Аппеля в ветвящиеся цепные дроби.

Результаты, полученные в диссертации, являются новыми, они были применены в вычислительной математике при

-построении дробно рациональных приближений для функций многих переменных;

- исследовании сходимости алгоритмов решения интегральных уравнений Вольтерра, Фредгольма второго рода, Винера-Хопфа, Амбарцумяна-Чандрасекхара и др., использующих интегральные цепные дроби;

- исследовании вычислительной устойчивости алгоритмов, основанных на непрерывных дробях и их многомерных обобщениях.

Аппробация работы. Результаты диссертации докладывались на II республиканском симпозиуме по дифференциальным и интегральным уравнениям /Одесса, 1978 г./, на II республиканской конференции "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе" /Киев, 1978 г./, на всесоюзной школе молодых ученых "Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики" /Дрогобыч, 1981 г./, на международной конференции по конструктивной теории функций /Киев, 1983 г./, на всесоюзной школе молодых ученых "Численные методы решения задач математической физики" /Львов, 1983 г./, на республиканских научно-технических конференциях "Интегральные уравнения в прикладном моделировании /Киев, 1983 г., Одесса, 1989 г./, на всесоюзной конференции, посвященной 80-летию академика С.М.Никольского /Днепропетровск, 1985 г./, на Саратовских зимних школах по теории функций и приближений /1984, 1986, 1990 гг./, на всесоюзных конференциях "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений /Дрогобыч, 1987,1989,1991 гг./, на всесоюзной школе "Теория приближения функций" /Луцк, 1989 г./, на всесоюзной школе-конференции "Современные проблемы теории функций" /Баку, 1989 г./, на республиканской конференции "Экстремальные задачи теории приближения и их приложения" /Киев, 1990 г./, на XXIУ Воронежской зимней математической школе "Современные проблемы теории функций и теории дифференциальных уравнений" /1991 г./, на международной конференции, посвященной 100-летию рождения С.Банаха /Львов, 1992 г./, а также на семинаре отдела теории функций в Математическом институте им. В.А.Стеклова /руководитель академик А.А.Гончар/, на семинаре отдела теории функций Института математики АНУ /руководитель член-корр. АНУ В.К.Дзядык/, на семинаре отдела теории функций Института математики АНУ /руководитель проф. А.И.Степанец/, на семинаре по теории функций кафедры высшей математики и математической физики Минского университета /руководитель проф. В.Н.Русак/, в Московском университете на семинарах "Теория приближения и граничные свойства функций" /руководители проф. Е.П.Долженко, Е.А.Севастьянов/,"Избранные вопросы теории функций" /руководители проф. Е.А.Рахманов, А.И.Аптекарев, В.В.Вавилов/, на семинаре кафедры теории функций и функционального анализа Харьковского университета "Аналитические вопросы теории вероятностей" /руководитель член-корр. АНУ И.В.Островский/, на Львовском городском семинаре по теории аналитических функций /руководитель проф. А.А.Гольдберг/, на семинаре отдела теории дифференциальных уравнений ИППМН АНУ, на общеинститутских семинарах, заседаниях и семинарах Западного научного центра АНУ.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 32 работы.

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 305 стр. машинописного текста и состоит из введения, четырех глав, которые разбиты на двадцать один параграф и списка литературы из 204 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Формулируемые ниже теоремы, утверждения, следствия имеют те же номера, что и в диссертационной работе. Нумерация формул самостоятельная.

Во введении дается обзор исследований по тематике диссертации, обоснование актуальности работы, краткая характеристика основных результатов.

ГЛАВА I. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

В §I дано определение ветвящейся цепной дроби, рассмотрены различные структуры подходящих дробей, установлена связь с композицией многомерных дробно-линейных отображений. В дальнейшем $N\in\mathbb{N}$ фиксировано и $i(k)=i_1i_2\cdots i_k$ $/k\in\mathbb{N}, 1\le i_p\le N, p=\overline{1,k}/$ - сокращенное обозначение мультииндексов. Пусть $b_0\in\mathbb{C}$, $\{a_{i(k)}\}$, $\{b_{i(k)}\}$ $/k=1,2,\dots, i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}/$ - заданные последовательности комплексных чисел. Ветвящейся цепной дробью с N ветками ветвления называется последовательность $\{f_n\}$, где

$$f_n=b_0+\sum_{i_1=1}^{N}\cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}+\sum\limits_{i_2=1}^{N}\cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}+\ddots+\sum\limits_{i_n=1}^{N}\cfrac{a_{i(n)}}{b_{i(n)}}}}. \qquad /1/$$

Элементы дроби /I/ $a_{i(k)}$ называются k-ми частными числителями, $b_{i(k)}$ - k-ми частными знаменателями, b_0 - свободным членом, отношения $a_{i(k)}/b_{i(k)}$ называются k-ми частными звеньями. ВЦД сходится, если существует конечный предел f_n при $n\to\infty$. Для записи бесконечной ВЦД будем использовать по аналогии с цепными дробями более компактные

$$b_0+\sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}}+\sum_{i_2=1}^{N}\frac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}}+\dots+\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}+\cdots$$

или сокращенные

$$b_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \qquad /2/$$

обозначения. Конечные ВЦД вида /I/

$$f_0=b_0,\quad f_m=b_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{m}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \qquad /m=1,2,\dots/$$

называются m-ми подходящими дробями или m-ми аппроксимантами дроби /2/. Пусть $\{i_k\}$ - фиксированный набор индексов $/k\in\mathbb{N}, i_k=\overline{1,N}/$. Непрерывная дробь

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} = \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \frac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}} + \dots + \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} + \dots$$

называется $(i_1, i_2, \dots, i_k, \dots)$ -веткой ВЦД /2/. Характерной особенностью n-ой аппроксиманты является то, что все ее ветки имеют длину n, т.е. содержат n этажей. Фигурной подходящей дробью ВЦД /2/ называется конечная ветвящаяся цепная дробь, являющаяся частью /2/ и содержащая по крайней мере две ветки различной длины.

Пример I.I.I. Каждая последующая подходящая дробь образуется добавлением очередного звена в естественной записи ВЦД /2/

$$\tilde{f}_0 = b_0, \ \tilde{f}_1 = b_0 + \frac{a_1}{b_1}, \ \tilde{f}_2 = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}, \dots,$$

$$\tilde{f}_k = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}} + \dots + \sum_{i_{s-1}=1}^{N} \frac{a_{i(s-1)}}{b_{i(s-1)}} + \sum_{i_s=1}^{N} \delta_k\left(\frac{a_{i(s)}}{b_{i(s)}}\right), \quad /3/$$

где

$$\delta_k\left(\frac{a_{i(s)}}{b_{i(s)}}\right) = \begin{cases} a_{i(s)} / b_{i(s)}, & \text{если } i(s) \prec k(s), \\ & \text{или } i(s) = k(s), \\ 0/1 & \text{, если } i(s) \succ k(s), \end{cases}$$

число s, индексы $k_1, k_2, \dots, k_s$ определяются из разложения

$$k = k_1 N^{s-1} + k_2 N^{s-2} + \dots + k_s \quad /1 \le k_j \le N, \ j = \overline{1,s} \ /, \quad /4/$$

причем $i(s) \prec k(s)$, если $i_1 < k_1$ или существует r $/1 \le r \le s-1/$, что $i_p = k_p$ $/p = \overline{1,r}$ $/$, $i_{r+1} < k_{r+1}$.

В § 2 установлены формулы для числителей и знаменателей подходящих дробей в виде определителей.

Свернув n -ю аппроксиманту ВЦД /2/ без каких либо сокращений получим

$$f_n = \frac{A_n}{B_n}.$$

A_n называется числителем, B_n - знаменателем n -й подходящей дроби. В одномерном случае A_n и B_n связаны трехчленным рекуррентными соотношениями, для которых нет аналогов у ВЦД. Однако можно установить формулы для A_n и B_n в виде определителей. Результат удобнее записать для ВЦД вида

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)}} \qquad /5/$$

с комплексными элементами.

Следствие I.2.2. Для числителей A_k и знаменателей B_k k-й подходящей дроби ВЦД /2/ с комплексными элементами справедливы формулы

$$A_k = \det \mathcal{D}_{0\ell},\ B_k = \det \mathcal{D}_{1\ell} \qquad /k=1,2,\dots/, \quad /6/$$

где $\ell = N + N^2 + \dots + N^k$, элементы симметричных матриц

$$\mathcal{D}_{in} = \begin{Vmatrix} d_{ii} & d_{i,i+1} & \dots & d_{in} \\ d_{i+1,i} & d_{i+1,i+1} & \dots & d_{i+1,n} \\ \cdot & & \dots & \cdot \\ d_{ni} & d_{n,i+1} & \dots & d_{nn} \end{Vmatrix} \qquad /i=0,1,\ n=1,2,\dots/$$

определяются следующим образом. Если $p \in \mathbb{N}$ $/p \leq n/$, то, найдя индексы $j_1, j_2, \dots, j_m$ из разложения /4/

$$p = j_1 N^{m-1} + j_2 N^{m-2} + \dots + j_m \qquad /1 \leq j_r \leq N,\ r = \overline{1,m}/,$$

имеем $d_{00} = b_0$, $d_{pp} = b_{j(p)}$ $/p = \overline{1,n}/$, $d_{0i_1} = -a_{i_1}$,

$d_{pq} = -a_{j(m)i_{m+1}}$, если $q = Np + i_{m+1}$ $/1 \leq i_1, i_{m+1} \leq N/$,

$d_{pq} = 0$ во всех остальных случаях, когда $q > p$.

В § 3 приведена формула разности двух подходящих дробей $f_n - f_m$ $/n > m/$ ВЦД /2/, существенно используемая в дальнейшем при исследовании сходимости ветвящихся цепных дробей:

$$f_n - f_m = (-1)^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{m+1}=1}^{N} \frac{\prod_{r=1}^{m+1} a_{i(r)}}{\prod_{r=1}^{m+1} Q_{i(r)}^{(n)} \prod_{r=1}^{m} Q_{i(r)}^{(m)}}, \qquad /7/$$

где суммирование ведется по всевозможным наборам индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{m+1}$, каждый из которых независимо пробегает значения от I до N и

$$Q^{(s)}_{i(r)} = b_{i(r)} + \overset{s}{\underset{k=r+1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}.$$

При выводе формулы /7/ естественно предполагается, что все $Q^{(s)}_{i(r)}$ фигурирующие в /7/, отличны от нуля.

В § 4 определены различные виды сходимости ВЦД. Доказано, что для ветвящихся цепных дробей с положительными элементами безусловная сходимость эквивалентна обычной сходимости, а также

Утверждение I.4.2. Если ВЦД /2/ с действительными положительными элементами сходится, то она сходится фигурно и к тому же пределу, причем фигурные подходящие дроби $\tilde{F}_n$ выбираются произвольным образом лишь бы минимальные длины веток m_n стремились к ∞ при $n \to \infty$.

В этом же параграфе определены, существенно используемые при сходимости ВЦД с комплексными элементами, максимантные и мажорантные ветвящиеся цепные дроби.

В § 5 дано полное описание класса эквивалентных ВЦД. Ветвящиеся цепные дроби /2/ и

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a^*_{i(k)}}{b^*_{i(k)}} \qquad /8/.$$

называются эквивалентными, если

$$\tilde{f}_n = \tilde{f}^*_n \qquad /n = 1,2,\ldots/, \qquad /9/$$

где $\tilde{f}_n$, $\tilde{f}^*_n$ - их n-е фигурные подходящие дроби вида /3/.

Теорема I.5.I. ВЦД /2/ и /8/ с отличными от нуля частными числителями эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют отличные от нуля константы $\rho_{i(k)}$ $/k=1,2,\ldots, i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}/$, $\rho_{i(0)} = \rho_0 = 1$, такие, что

$$a^*_{i(k)} = a_{i(k)} \rho_{i(k)} \rho_{i(k-1)}, \quad b^*_{i(k)} = b_{i(k)} \rho_{i(k)} \qquad /10/$$

$/k=1,2,\ldots, i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}/$.

Если условие /9/ заменить просто равенством обычных подходящих дробей /I/, то построен пример, показывающий, что теорема I.5.I. в этом случае не верна.

В § 6 рассмотрен многомерный аналог тождеств Эйлера, используемых в случае $N=1$ для тождественного преобразования цепной дроби в равноценный ряд.

Т е о р е м а I.6.I. Пусть $a_{i(k)} \in \mathbb{C}$ $/k=1,2,\ldots, i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}/$. Тогда справедливы тождества

$$\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{-a_{i(k)}}{Na_{i(k)}+1}\right)^{-1}=$$

$$=\left[1+Na_{i(1)}\left[1+Na_{i(2)}\left[1+\cdots+Na_{i(n-1)}\left[1+Na_{i(n)}\right]\cdots\right]\right]\right]$$

$/n=1,2,\ldots/$, где каждое выражение в квадратных скобках обозначает среднее гармоническое

$$\left[c_{i(k)}\right]=N\left(\sum_{i_k=1}^{N}\frac{1}{c_{i(k)}}\right)^{-1}. \qquad /II/$$

ГЛАВА 2. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В § I рассмотрены специальные неравенства, которые в дальнейшем будут применяться при исследовании сходимости ВЦД с положительными членами.

Т е о р е м а 2.I.4. Пусть $\delta\geq 0$, $x_i>0 /i=\overline{1,n}/$ - действительные числа. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\delta+\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i}{x_j}\right)^{-1}\geqslant(\delta+1)^{-1}. \qquad /I2/$$

Т е о р е м а 2.I.8. Пусть $\delta\geq 0, \gamma\geq 0, \mu\geq 0$, x_i, y_i $/i=\overline{1,n}/$ принадлежат области

$$\mathcal{D}=\{0<x\leq x_i\leq X,\ 0<y\leq y_i\leq Y,\ i=\overline{1,n}\}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{1+\delta\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}+\gamma\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}+\mu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_j}{y_i}\right)\right\}^{-1}\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{n}+\delta+\gamma+n_{\mathcal{D}}\mu\right)^{-1},$$

где

$$n_{\mathcal{D}}=\frac{[(n-n_\varepsilon)X+n_\varepsilon x][(n-n_\varepsilon)Y+n_\varepsilon y]}{(n-n_\varepsilon)XY+n_\varepsilon xy}, \qquad /I3/$$

n_ε - наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$n_\varepsilon\geq\frac{n}{1-\varepsilon}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{4n^2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}\right)^{1/2},\qquad \varepsilon=\frac{xy}{XY}.$$

В § 2 установлены необходимые признаки сходимости ВЦД с положительными действительными компонентами.

Т е о р е м а 2.2.I. ВЦД

$$b_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{1}{b_{i(k)}} \qquad /I4/$$

с положительными частными знаменателями расходится, если

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=2}^{2m+1}\beta_{k-1}\left(\beta_k+\frac{N}{\alpha_{k+1}}+\frac{N}{\beta_{k+2}}+\frac{N}{\alpha_{k+3}}+\dots+\frac{N}{\beta_s}\right)<\infty,$$

где

$$\begin{cases}\alpha_k=\min(b_{i(k)}:i_p=\overline{1,N},p=\overline{1,k}),\\ \beta_k=\max(b_{i(k)}:i_p=\overline{1,N},p=\overline{1,k})\end{cases} - \qquad /I5/$$

минимальный и соответственно максимальный частный знаменатель этой дроби на k-м этаже, $s=s(k,m)=2m+k-2\left[\frac{k}{2}\right]$.

Т е о р е м а 2.2.2. В обозначениях предедущей теоремы ВЦД /I4/ расходится, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k. \qquad /I6/$$

Т е о р е м а 2.2.4. Для ВЦД /14/, где $b_{i(k)}>0$ $/k=1,2,\ldots,$ $i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}/$ независимо от того сходится она или расходится

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=2}^{2m+1}\beta_{k-1}\left[\beta_k+\frac{N}{\alpha_{k+1}+}\frac{N}{\beta_{k+2}+}\frac{N}{\alpha_{k+3}+}\cdots+\frac{N}{\alpha_{s-1}+}\frac{N}{\beta_s^*}\right]=\infty,$$

где $\beta_{2m}^*=\beta_{2m}$, $\beta_{2m+1}^*=\beta_{2m+1}+N^{-1}\alpha_{2m+2}^{-1}$, S определено в теореме 2.2.1.

В § 3 установлены достаточные признаки сходимости ВЦД с положительными действительными членами.

Т е о р е м а 2.3.1. ВЦД /14/ с положительными действительными частными знаменателями сходится, если в обозначениях теоремы 2.2.1

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=2}^{2m+1}\alpha_{k-1}\left[\alpha_k+\frac{N}{\beta_{k+1}+}\frac{N}{\alpha_{k+2}+}\frac{N}{\beta_{k+3}+}\cdots+\frac{N}{\alpha_s}\right]=\infty.$$

С л е д с т в и е 2.3.1. ВЦД /2/ с положительными компонентами сходится, если расходится ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty}\delta_k=\infty,$$

где

$$\delta_k=\min\left\{\frac{b_{i(k)}\,b_{i(k-1)}}{a_{i(k)}}: i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}\right\}.$$

Т е о р е м а 2.3.5. ВЦД /14/, где $b_0=0$, $b_{i(k)}>0$ $/k=1,2,\ldots,$ $i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}/$, сходится, если $a_1(m)\to\infty$ при $m\to\infty$, причем справедлива оценка

$$\frac{f_{2m+1}}{f_{2m}}-1\le\frac{N}{a_1(m)},$$

где f_k - k-я аппроксиманта ВЦД /14/, $a_1(m)$ - первая компонента вектора

$$\begin{pmatrix}a_1(m)\\ b_1(m)\\ c_1(m)\\ d_1(m)\end{pmatrix}=\prod_{i=2}^{2m}\begin{pmatrix}N^{-1}\alpha_{i-1}\alpha_i+1 & 0 & N^{-1}\alpha_{i-1} & 0\\ N^{-1}\alpha_i & 0 & N^{-1} & 0\\ 0 & \alpha_{i-1}\alpha_i+N_i & 0 & \alpha_{i-1}\\ 0 & \alpha_i & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{2m}\alpha_{2m+1}\\ \alpha_{2m+1}\\ N\alpha_{2m}\\ N\end{pmatrix}$$

α_i, β_i определяются согласно /I5/, N_i - согласно /I3/ в предположении, что $n=N$, $x=\alpha_i^{(2m)}$, $y=\alpha_i^{(2m+1)}$, $X=\beta_i^{(2m)}$, $Y=\beta_i^{(2m+1)}$ и

$$\alpha_i^{(s)}=\alpha_i+\frac{N}{\beta_{i+1}}+\frac{N}{\alpha_{i+2}}+\frac{N}{\beta_{i+3}}+\cdots+\frac{N}{\gamma_s},$$

$$\beta_i^{(s)}=\beta_i+\frac{N}{\alpha_{i+1}}+\frac{N}{\beta_{i+2}}+\frac{N}{\alpha_{i+3}}+\cdots+\frac{N}{\gamma_s^*}$$

$/i=\overline{2,s-1}$, $s=2m, 2m+1/$, $\gamma_s=\alpha_s$, если $s-i$ четное и β_s в противном случае, $\gamma_s^*=\alpha_s\beta_s\gamma_s^{-1}$.

Следствие 2.3.4. ВЦД /I4/ с положительными частными знаменателями сходится, если

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m-1}N^{-n}\sum_{\tau=1}^{2(m-n)}\alpha_\tau\alpha_{\tau+2n+1}=\infty.$$

Теорема 2.3.7. Пусть для ВЦД /I4/ с действительными положительными частными знаменателями и $b_0=0$ выполняется условие: существует натуральное число $\mathcal{M}$, что для всех индексов i и m, таких, что $2(m-i)\geq \mathcal{M}-1$ справедливы неравенства

$$N_{2i+1}+2\alpha_{2i}(\alpha_{2i+1}+\alpha_{2i+3}+\cdots+\alpha_{2m+1})\geq N,$$

$$N_{2i+2}+2\alpha_{2i+1}(\alpha_{2i+2}+\alpha_{2i+4}+\cdots+\alpha_{2m})\geq N,$$

где N_i определены в теореме 2.3.5. Тогда ВЦД /I4/ сходится, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ расходится.

В § 4 установлены необходимые и достаточные признаки сходимости ВЦД с положительными действительными элементами.

Теорема 2.4.3. Если для ВЦД /I4/ с положительными частными знаменателями существует константа $\mathcal{M}>0$, такая, что

$$\beta_k\leq\mathcal{M}\,\alpha_k \qquad /k=1,2,\ldots/,$$

где α_k, β_k определяются согласно /I5/, то эта дробь сходится тогда и только тогда, когда ряд /I6/ расходится.

Теорема 2.4.5. Пусть в обозначениях предедущей теоремы для ВЦД /I4/ существует константа $\mathcal{M}>0$, такая, что

$$\beta_K \leq M \alpha_{K+1}, \; \beta_{K+1} \leq M \alpha_K \qquad /K = 1,2,\dots/.$$

Тогда дробь /I4/ сходится тогда и только тогда, когда ряд /I6/ расходится.

В § 5 рассмотрены вопросы сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными действительными компонентами.

ГЛАВА 3. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ВЦД С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛОВЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

В § I исследованы вопросы сходимости ВЦД с частными числителями равными единице, в частности, рассмотрены многомерные аналоги теорем Ван Флека и Кох.

Т е о р е м а 3.I.I. Пусть все частные знаменатели ВЦД /I4/ принадлежат области

$$G_\varepsilon = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\}, \qquad /I7/$$

где ε - произвольное, как угодно малое положительное действительное число $/0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}/$. Тогда

I/ каждая m-я аппроксиманта f_m $/m = 1,2,\dots/$ ВЦД /I4/ принадлежит области /I7/;

2/ существуют конечные пределы четных f_{2n} и нечетных f_{2n+1} подходящих дробей при $n \to \infty$;

3/ ВЦД /I4/ сходится, если при введении обозначений

$$\alpha_K = \min\left(|b_{i(K)}| : i_p = \overline{1,N}, p = \overline{1,K}\right),$$
$$\beta_K = \max\left(|b_{i(K)}| : i_p = \overline{1,N}, p = \overline{1,K}\right) \qquad /I8/$$

выполняется одно из условий:

а/ расходится ряд

$$\sum_{K=2}^{\infty} \alpha_K S_{K-1},$$

где $S_K = \alpha_K + N^{-1}\alpha_{K-2} + N^{-2}\alpha_{K-4} + \dots + N^{-r}\alpha_{K-2r}$

и $r = \left[\frac{K-1}{2}\right]$ - целая часть $\frac{K-1}{2}$;

б/

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=2}^{2m+1}\alpha_{k-1}\left(\alpha_k+\frac{N}{\beta_{k+1}}+\frac{N}{\alpha_{k+2}}+\frac{N}{\beta_{k+3}}+\cdots+\frac{N}{\alpha_s}\right)=\infty,$$

где $s=2m+k-\left[\frac{k}{2}\right]$.

Т е о р е м а 3.I.3. Пусть для ВЦД /I4/, где $b_0=0$, $b_{i(k)}\in\mathbb{C}$ $/k=1,2,\dots,\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}$ / ряд /I6/ сходится, где β_k определяются согласно /I8/. Тогда справедливы оценки

$$|A_m|\leq \mathcal{K}_m P_m,\ |B_m|\leq \mathcal{K}_m Q_m,$$

где A_m и B_m, P_m и Q_m соответственно числитель и знаменатель m-й аппроксиманты /I4/ и цепной дроби

$$\frac{N}{\beta_1}+\frac{N}{\beta_2}+\cdots+\frac{N}{\beta_k}+\cdots,$$

$$\mathcal{K}_m=C_1^{-1}\left(\beta_m^{N-1}C_2\right)^{N^{m-1}},\quad C_1=CN^{N^{p}(N^2-1)^{-1}},\quad C_2=CN^{N^2(N^2-1)^{-1}},$$

$$C=\prod_{k=1}^{\infty}(1+\beta_k)\qquad \text{и}\ p=\begin{cases}1, & \text{если } m \text{ четное,}\\ 2, & \text{если } m \text{ нечетное.}\end{cases}$$

Из полученных оценок следует, что

$$\lim_{m\to\infty}A_m=0,\quad \lim_{m\to\infty}B_m=0.$$

Однако из сходимости ряда /I6/ в данном случае еще не следует, как это имеет место в одномерном случае, сходимость ВЦД /I4/. Построен соответствующий пример.

В § 2 установлены признаки сходимости ВЦД с частными знаменателями равными единице.

Т е о р е м а 3.2.I. Если для ВЦД

$$\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \tag{I9}$$

с комплексными частными числителями выполняются условия:

$$|c_{i(k)}| \le \alpha = N^{-1}t(1-t),\ 0 \le t \le \frac{1}{2}\quad /k=1,2,\ldots, i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k}\ /, \qquad /20/$$

то 1/ ВЦД /19/ абсолютно сходится;

2/ справедливы неулучшаемые оценки скорости сходимости

$$|f_n - f_m| \le \frac{(1-2t)t^m(1-t)^m[(1-t)^{n-m} - t^{n-m}]}{[(1-t)^{n+1} - t^{n+1}][(1-t)^{m+1} - t^{m+1}]},$$

если $0 \le t < \frac{1}{2}$ или

$$|f_n - f_m| \le \frac{2(n-m)}{(n+1)(m+1)}\quad, \text{ если } t = \frac{1}{2},$$

где $n > m$, f_k - k-я подходящая дробь ВЦД /19/;

3/ наилучшей областью значений, соответствующей области элементов /20/, является круг

$$|z - (1-t^2)^{-1}| \le t(1-t^2)^{-1};$$

4/ предельная константа $\alpha = \frac{1}{4N}$ является наилучшей, ее нельзя увеличить, сохраняя при этом сходимость ВЦД /19/.

Теорема 3.2.2. Пусть для ВЦД

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}}{1} \qquad /21/$$

с комплексными частными числителями выполняются условия

$$|c_{i(k)}| \le N^{-1} g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)})\quad /k=1,2,\ldots, i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}, i_0=0/, \qquad /22/$$

где

$$g_{i(k)} \in \mathbb{R},\ 0 \le g_{i(k)} < 1,\ g_{i(0)} = g_0 = 0\ /k=1,2,\ldots, i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}\ /, \qquad /23/$$

или

$$g_{i(k)} \in \mathbb{R},\ 0 < g_{i(k)} \le 1,\ g_{i(0)} = g_0 = 0\ /k=1,2,\ldots, i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}\ /. \qquad /24/$$

Тогда ВЦД /21/ абсолютно сходится и ее наилучшей областью значений является круг: $|z - b_0| \le 1$.

Теорема 3.2.5. ВЦД /19/ с комплексными частными числителями сходится, если для произвольного натурального n и произвольного набора индексов $i_1, i_2, \ldots, i_n$ выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{i(k)}| \le N^{-1} \quad (n=1,2,\ldots, i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}).$$

Т е о р е м а 3.2.6. Пусть частными числителями ВЦД /I9/ являются комплексные числа, такие, что

$$a_k = N \max(|c_{i(k)}| : i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}) \quad (k=1,2,\ldots)$$

является цепной последовательностью с минимальными параметрами m_p $(p=0,1,2,\ldots)$, удовлетворяющими условиям

$$0 \le m_p < 1 \qquad (p=1,2,\ldots).$$

Тогда ВЦД /I9/ абсолютно сходится, если сходится ряд

$$T = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} m_i (1-m_i)^{-1} \tag{25}$$

Значение ВЦД /I9/ и всех ее аппроксимант принадлежит области

$$|z - T(2T-1)^{-1}| \le T(T-1)(2T-1)^{-1},$$

где T - сумма ряда /25/.

Теоремы 3.2.I, 3.2.2, 3.2.5, 3.2.6 являются многомерными аналогами признаков сходимости цепных дробей соответственно Ворпицкого, Скотта-Уолла, Кох, Ван Флека.

В § 3 установлены многомерные аналоги параболических теорем.

Т е о р е м а 3.3.I. Пусть частными числителями ВЦД /I9/ являются комплексные числа, принадлежащие области

$$P_\varepsilon = \{ z \in \mathbb{C} : |z| - \mathrm{Re}\, z \le (2N)^{-1}(1-\varepsilon) \},$$

где ε - как угодно малое действительное число $(0<\varepsilon<1)$, N - число веток ветвления дроби /I9/. Тогда

I/ существуют конечные пределы четных f_{2n} и нечетных f_{2n+1} подходящих дробей при $n \to \infty$;

2/ ВЦД /I9/ сходится, если выполняется одно из двух условий: либо существует такой номер k, что все $c_{i(k)} = 0$ $(i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k})$, либо расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k ,$$

где

$$\delta_k = \min\left[\frac{1}{|c_{i(k)}|} : i_p = \overline{1,N}, p = \overline{1,k}\right],$$

причем те наборы индексов, при которых $c_{i(k)} = 0$ при минимизации не рассматриваются;

3/ область значений ВЦД /I9/ принадлежит кругу $|z-1| < 1$.

Т е о р е м а 3.3.2. Пусть элементы $c_{i(k)}$ $/k=1,2,\dots, i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}/$ ВЦД /I9/ принадлежат области

$$P_{\varepsilon,\gamma} = \{z \in \mathbb{C} : |z| - \mathrm{Re}(z \exp(-2\gamma i)) \leq (2N)^{-1}(1+\varepsilon)\cos^2\gamma\},$$

где $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$, ε - как угодно малое действительное число $/\ 0<\varepsilon<1\ /$. Тогда выполняются следствия I/ и 2/ предедущей теоремы и область значений ВЦД /I9/ принадлежит кругу

$$\left|z - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\cos\gamma\right)^{-1}\exp(-i\gamma)\right| \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\cos\gamma\right)^{-1}.$$

В § 4 установлены аналоги признаков сходимости Прингсгейма для ВЦД. В качестве следствия теоремы 3.2.2 имеем два аналога теоремы Слешинского-Прингсгейма.

Т е о р е м а 3.4.I. ВЦД /2/ с комплексными компонентами, удовлетворяющими условиям

$$|b_{i(k)}| \geq N|a_{i(k)}| + 1 \qquad /k=1,2,\dots, i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}/,$$

абсолютно сходится и ее наилучшей областью значений является круг: $|z - b_0| \leq 1$.

Т е о р е м а 3.4.2. ВЦД /2/ с комплексными элементами, удовлетворяющими условиям

$$|b_{i(k)}| \geq |a_{i(k)}| + N \qquad /k=1,2,\dots, i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}/$$

абсолютно сходится и ее наилучшей областью значений является круг: $|z - b_0| \leq N$.

Усиление этих теорем связано либо с переходом в действительную область, либо с изучением дробей, значение которых принадлежат границе области значений.

Обозначим через $\mathcal{J}$ множество мультииндексов

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(N) = \{ i(k) : k = 1, 2, \ldots, i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k} \}. \qquad /26/$$

Рассмотрим ВЦД /2/ с действительными элементами, такими, что все $a_{i(k)} \neq 0$ $/i(k) \in \mathcal{J}$ /. Используя эквивалентные преобразования /2/ приведем к виду, когда все $b_{i(k)} \geq 0$ $/i(k) \in \mathcal{J}$ /. Пусть выполняются неравенства

$$\gamma_{i(k)} = b_{i(k)} - n_{i(k-1)} \varepsilon_{i(k)} a'_{i(k)} - \delta_{i(k)} \geq 0 \quad /i(k) \in \mathcal{J}\ /, \qquad /27/$$

где $a'_{i(k)} = |a_{i(k)}|$, $n_{i(k)}$ - число отрицательных элементов $a_{i(k+1)}$ $/1 \leq i_{k+1} \leq N$ /, $n_{i(0)} = n_0$,

$$\delta_{i(k)} = \begin{cases} 1, \text{ если } n_{i(k)} > 0, \\ 0, \text{ если } n_{i(k)} = 0, \end{cases} \qquad \varepsilon_{i(k)} = \begin{cases} 1, \text{ если } a_{i(k)} < 0, \\ 0, \text{ если } a_{i(k)} > 0. \end{cases}$$

Преобразуем ВЦД /2/, для которой выполняются условия /27/, к ВЦД с неотрицательными элементами, используя следующий алгоритм: каждое звено

$$b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}}{b_{i(k+1)}},$$

где $k = 0$ или $a_{i(k)} > 0$ при $k \geq 1$, $i_0 = 0$, заменим ему тождественно равным выражением

$$b_{i(k)} - \delta_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{n_{i(k)}} \frac{1/n_{i(k)}}{1 + \dfrac{n_{i(k)} a'_{i(k+1)}}{b_{i(k+1)} - n_{i(k)} a'_{i(k+1)}}} + \sum_{i_{k+1}=n_{i(k)}+1}^{N} \frac{a'_{i(k+1)}}{b_{i(k+1)}}.$$

Аналогичную процедуру проделаем для всех новообразованных звеньев

$$b_{i(k+1)} - n_{i(k)} a'_{i(k+1)} + \sum_{i_{k+2}=1}^{N} \frac{a_{i(k+2)}}{b_{i(k+2)}}.$$

Теорема 3.4.3. Пусть элементами /2/ являются действительные числа, удовлетворяющие условиям: все $a_{i(k)} \neq 0 / i(k) \in \mathcal{J}$ /, справедливы неравенства /27/, где $\mathcal{J}$ определяется согласно /26/. Если преобразованная ВЦД, построенная согласно описанного выше алгоритма, сходится, то дробь /2/ сходится и к тому же пределу.

Теорема 3.4.4. Пусть для ВЦД /2/ выполняются условия предедущей теоремы, причем $\gamma_{i(k)} > 0$, если $n_{i(k-1)} < i_k \leq N$. Тогда /2/ сходится, если расходится ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \min(\xi_{k-1}, \eta_{k-1}, \zeta_k),$$

где

$$\xi_k = \min\left(\frac{\gamma_{i(m)}}{n_{i(m-1)} a'_{i(m)}} : i(m) \in \mathcal{J}_{m,n}^{2m-k},\ m = \overline{\left[\frac{k+1}{2}\right], k}\right),$$

$$\eta_k = \min\left(\gamma_{i(m)} n_{i(m)} : i(m) \in \mathcal{J}_m^{2m-k},\ m = \overline{\left[\frac{k+1}{2}\right], k}\right),$$

$$\zeta_k = \min\left(\frac{\gamma_{i(m-1)} \gamma_{i(m)}}{a'_{i(m)}} : i(m) \in \mathcal{J}_{m,N}^{2m-k},\ m = \overline{\left[\frac{k}{2}\right]+1, k}\right)$$

и $\mathcal{J}_m^{\tau}$ обозначает множество всех мультииндексов $i(m)$, τ индексов которых удовлетворяют неравенствам $n_{i(s-1)} < i_s \leq N$, остальные $m-\tau$ индексов - неравенствам $1 \leq i_s \leq n_{i(s-1)}$, $\mathcal{J}_{m,N}^{\tau}$ - подмножество $\mathcal{J}_m^{\tau}$, у которого заранее известно, что последний индекс i_m удовлетворяет неравенству $n_{i(m-1)} < i_m \leq N$, а $\mathcal{J}_{m,n}^{\tau} = \mathcal{J}_m^{\tau} \setminus \mathcal{J}_{m,N}^{\tau}$, причем каждое из указанных множеств индексов является пустым, если хотя бы одно из характеризующих его неравенств противоречиво.

Теорема 3.4.6. Пусть для ВЦД /2/, где $b_0 = 0$, выполняются условия теоремы 3.4.1. Тогда

I/ дробь /2/ абсолютно сходится и ее наилучшей областью значений является круг $|z| \leq 1$;

2/ $|z| = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\lim_{k \to \infty} [1 + N a'_{i(1)} [1 + N a'_{i(2)} [1 + \cdots + N a'_{i(k-1)} [1 + N a'_{i(k)}] \cdots] = \infty,$$

где $a'_{i(k)} = |a_{i(k)}|$, каждое выражение в квадратных скобках обозначает среднее гармоническое /II/, существует угол φ $/-\pi < \varphi \leq \pi/$, что

$$|b_{i(1)}||a_{i(1)}|^{-1} b_{i(1)}^{-1} a_{i(1)} = e^{i\varphi} \qquad /i_1 = \overline{1,N}\ /,$$

$$|b_{i(k)}| = N|a_{i(k)}| + 1 \qquad /i(k) \in \mathcal{I}/$$

и

$$a_{i(k+1)} b_{i(k)}^{-1} b_{i(k+1)}^{-1} < 0 \qquad /k = 1,2,\ldots, i(k) \in \mathcal{I}/.$$

При выполнении этих условий $z = \exp(i\varphi)$.

Применяя пункт 2/ теоремы 3.4.6 можно получить усиление теоремы 3.4.I.

Т е о р е м а 3.4.II. Пусть элементами ВЦД /2/ являются комплексные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$|b_{i(1)}| \geq 1 \ /i_1 = \overline{1,N}/, \ |b_{i(k)}| \geq N|a_{i(k)}| + 1 \ /k \geq 2, i(k) \in \mathcal{I}/.$$

Тогда дробь /2/ сходится, если для каждого i_1 $/i_1 = \overline{1,N}/$ хотя бы одно из этих неравенств строгое.

В § 5 рассмотрены области сходимости, окрестности сходимости и области устойчивости для ВЦД.

ГЛАВА 4. НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

В § I установлены признаки равномерной сходимости функциональных ВЦД, рассмотрен многомерный аналог теоремы Стилтьеса-Витали.

Т е о р е м а 4.I.2. Пусть элементами ВЦД

$$b_0(z)+\overset{\infty}{\underset{k=1}{D}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}(z)}{b_{i(k)}(z)} \qquad /28/$$

являются действительные функции, заданные в некоторой области $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}^n$ и удовлетворяющие условиям:

I/ существует константа $M>0$, что для всех $z\in\mathcal{D}$

$$|a_{i(1)}(z)b_{i(1)}^{-1}(z)|\leq M \qquad /i_1=\overline{1,N}\ /;$$

2/ $b_{i(k)}(z)\neq 0 \quad /i(k)\in\mathcal{I},\ z\in\mathcal{D}\ /;$

3/ существует неотрицательная константа t $/0\leq t\leq\frac{1}{2}/$, такая, что для всех $z\in\mathcal{D}$

$$d_{i(k+1)}(z)+N^{-1}t(1-t)\geq 0 \qquad /i(k+1)\in\mathcal{I}\ /.$$

Тогда ВЦД /28/ равномерно сходится в области $\mathcal{D}$, если выполняется одно из двух условий: либо сущестует такой номер k, что все $a_{i(k)}(z)=0$ $/i(k)\in\mathcal{I},\ z\in\mathcal{D}/$, либо расходится ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty}\delta_k,$$

если $0\leq t<\frac{1}{2}$, либо

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\delta_k}{m-k}=\infty \qquad \text{, если } t=\frac{1}{2},$$

где $\mathcal{I}$ определяется согласно /26/,

$$\delta_k=\inf\left(|d_{i(k+1)}^{-1}(z)|:\ i_p=\overline{1,N},\ p=\overline{1,k+1},\ z\in\mathcal{D}\right),$$

$$d_{i(k+1)}(z)=a_{i(k+1)}(z)\,b_{i(k+1)}^{-1}(z)\,b_{i(k)}^{-1}(z),$$

причем те наборы индексов и те значения z, при которых $a_{i(k+1)}(z)=0$ при минимизации не учитываются.

В § 2 исследованы положительно определенные ветвящиеся цепные дроби и многомерные аналоги $\mathcal{J}$-дробей.

ВЦД

$$\left[b_0 + z_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)} + z_{i(k)}} \right]^{-1}, \qquad /29/$$

где b_0, $b_{i(k)}$, $a_{i(k)}$ $/ i(k) \in \mathcal{J} /$ - комплексные числа, z_0, $z_{i(k)}$ $/ i(k) \in \mathcal{J} /$ - комплексные переменные, называется положительно определенной, если для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\xi_{i(k)} \in \mathbb{R} / i(k) \in \mathcal{J} /$ неотрицательно определены квадратические формы

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{N} \beta_{i(k)} \xi_{i(k)}^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1} \alpha_{i(k)} \xi_{i(k)} \xi_{i(k-1)}. \qquad /30/$$

Здесь $\alpha_{i(k)} = \operatorname{Im} a_{i(k)}$, $\beta_{i(k)} = \operatorname{Im} b_{i(k)}$ $/ i(k) \in \mathcal{J} /$, $\mathcal{J}$ определяется согласно /26/.

Т е о р е м а 4.2.1. Если ВЦД /29/ положительно определена, тогда все знаменатели подходящих дробей $B_n(z) \neq 0$ в областях $\operatorname{Im} z_{i(k)} > 0$ $/ i(k) \in \mathcal{J} /$, где $\mathcal{J}$ определяется согласно /26/.

Т е о р е м а 4.2.2. ВЦД /29/ положительно определена, если выполняются условия:

1/ $\beta_{i(k)} \geq 0$ $/ i(k) \in \mathcal{J} /$;

2/ существуют такие действительные числа $0 \leq g_{i(k)} \leq 1$ $/ i(k) \in \mathcal{J} /$, что

$$\alpha_{i(k)}^2 = N^{-1} \beta_{i(k-1)} \beta_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)}) g_{i(k)},$$

где $g_0 = 0$, $\alpha_{i(k)} = \operatorname{Im} a_{i(k)}$, $\beta_{i(k)} = \operatorname{Im} b_{i(k)}$.

Условие 2/ в теореме можно заменить неравенством

$$\alpha_{i(k)}^2 \leq N^{-1} \beta_{i(k-1)} \beta_{i(k)} (1 - g_{i(k-1)}) g_{i(k)}. \qquad /31/$$

Т е о р е м а 4.2.4. Если для ВЦД /29/ выполняются условия /31/, где

$$\beta_{i(k)} \geq 0, \; g_0 \beta_0 + y_0 > 0, \; y_{i(k)} > 0 \quad / i(k) \in \mathcal{J} /$$

$y_{i(k)} = \operatorname{Im} z_{i(k)} / i(k) \in \mathcal{J} /$, то ее p-е аппроксиманты $f_p(z)$ удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{Im} f_p(z) \leq 0, \ |f_p(z)| \leq (y_0 + \beta_0 g_0)^{-1} \qquad /p = 1, 2, \ldots /.$$

ВЦД

$$\left[b_0 + \zeta_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)} + \zeta_{i_k}} \right]^{-1}, \qquad /32/$$

где $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$, $a_{i(k)}, b_{i(k)} \in \mathbb{C}$ $/i(k) \in \mathcal{J}$ / называется многомерной $\mathcal{J}$ -дробью. Если существуют такая действительная константа $M > 0$, что

$$|a_{i(k)}| \leq M(1 + 2\sqrt{N})^{-1}, \ |b_{i(n)}| \leq M(1 + 2\sqrt{N})^{-1}, \qquad /33/$$

где $i(k), i(n) \in \mathcal{J}$, $n = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, \ldots, b_{i(0)} = b_0$, то $\mathcal{J}$ -дробь /32/ называется ограниченной, а минимальное число M , при котором справедливо /33/ называется ее границей.

Т е о р е м а 4.2.6. ВЦД /32/ ограничена тогда и только тогда, когда существует действительное число $H > 0$, что

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} b_{i(k)} u_{i(k)} v_{i(k)} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} a_{i(k)} (u_{i(k)} v_{i(k-1)} + u_{i(k-1)} v_{i(k)} \right| \leq H \|u\| \|v\| \qquad /n = 1, 2, \ldots /, /34/$$

где $u_{i(k)}, v_{i(k)}$ - произвольные комплексные числа и

$$\|u\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{N} |u_{i(k)}|^2.$$

Минимальное число H , при котором справедливо /34/ называется нормой дроби /32/.

Т е о р е м а 4.2.7. Многомерная ограниченная $\mathcal{J}$ -дробь /32/ с границей M равномерно сходится в области $|\zeta_i| \geq M$ $/i = \overline{0, N}$ /.

Т е о р е м а 4.2.8. Многомерная ограниченная $\mathcal{J}$ -дробь /32/ равномерно сходится на каждом ограниченном множестве из $\mathbb{C}^{N+1}$, расстояние которого до множества $\mathcal{K}_0$ положительно, где

$$\mathcal{K}_0 = \{z \in \mathbb{C}^{N+1}: z_k = x_k + i y_k,\ x_k \sin\theta + y_k \cos\theta \le Y_0(\theta)$$

$$0 \le \theta < 2\pi,\ k = \overline{0,N},\ Y_0(\theta) = \inf(\Phi(\xi,\theta): \|\xi\| = 1,\ n \ge 1)\}$$

$\Phi(\xi,\theta)$ - квадратическая форма вида /30/, где вместо $\beta_{i(k)}$, $\alpha_{i(k)}$ поло..ено соответственно $\operatorname{Im}(b_{i(k)} e^{i\theta})$, $\operatorname{Im}(a_{i(k)} e^{i\theta})$.

$\mathcal{F}$ -дробь называется действительной, если все $b_0 \in R$, $a_{i(k)}$, $b_{i(k)} \in R$ $/ i(k) \in \mathcal{J}_i$.

Т е о р е м а 4.2.9. Действительная ограниченная многомерная $\mathcal{F}$ -дробь /32/ с нор..й H равномерно сходится на каждом компакте $\mathbb{C}^{N+1}$, расстояние которого до области

$$\operatorname{Im} \zeta_i = 0,\ |\operatorname{Re} \zeta_i| \le H \quad / i = \overline{0,N} /$$

положительно.

В § 3 рассмотрены многомерные аналоги C-, S-, g-дробей. Ветвящаяся цепная дробь

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \qquad /35/$$

где $a_{i(k)} \ne 0 / i(k) \in \mathcal{J} /$ - комплексные числа, $z = (z_1, z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ называется многомерной регулярной C -дробью. Если все $a_{i(k)} > 0$, то /35/ называется многомерной S -дробью, если же $a_{i(k)} = g_{i(k)}(1 - g_{i(k-1)})$, где $0 \le g_{i(k)} \le 1$ $/ i(k) \in \mathcal{J} /$, то /35/ называется многомерной g -дробью. В каждом из этих случаев наряду с /35/ можно рассматривать ВЦД, обратную к ней.

Т е о р е м а 4.3.2. Пусть /35/- многомерная C-дробь, такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} a_{i(k)} = a \ne 0$ и

$$\Omega^{(N)} = \bigcup_{\gamma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \Omega^{(N)}_{a,\gamma},$$

где $\Omega^{(N)}_{a,\gamma} = \Omega_{a,\gamma} \times \Omega_{a,\gamma} \times \dots \times \Omega_{a,\gamma}$ - декартово произведение N областей

$$\Omega_{a,\gamma} = \{w: |w| - Re[w\exp(\arg a - 2\gamma)i] < \frac{\cos^2\gamma}{2N|a|}.$$

Тогда ВЦД /35/ сходится к функции f, мероморфной в $\Omega^{(N)}$ или тождественно равной бесконечности.

Т е о р е м а 4.3.4. ВЦД

$$\left(1 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)} z_{i_k} z_{i_{k-1}}}{1}\right)^{-1}, \qquad /36/$$

где $z_{i_0}=1$, $z \in \mathbb{C}^N$, $a_{i(k)}>0$ /$k=1,2,\dots$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$ / равномерно сходится на каждом компакте области $Re\, z_i > 0$ /$i=\overline{1,N}$ /, если расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left(a_{i(k)}^{-1} : i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}\right).$$

Т е о р е м а 4.3.8. Многомерная g-дробь /35/, где вместо каждого z_{i_k} положено $z_{i(k)}$/ $z_{i(k)}$-вообще говоря, независимые переменные/ абсолютно сходится, если для произвольного набора индексов $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}$

$$\sum_{i_k=1}^{N} |z_{i(k)}| \le 1 \qquad /k=1,2,\dots/.$$

Сходимость будет абсолютной и равномерной, если кроме того

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-m_k}{m_k} = 0 \quad , \text{ где } m_k = \min(g_{i(k)} : i_p=\overline{1,N}, p=\overline{1,k}).$$

Т е о р е м а 4.3.10. ВЦД /36/, где $a_{i(k)} = -b_{i(k)}^2 \in \mathbb{R}$ и $b_{i(k)}^2 \le N^{-1} g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)})$, $0 \le g_{i(k)} \le 1$ /$k=1,2,\dots$, $i_p=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,k}$ / равномерно сходится в каждом компакте из $\mathbb{C}^{N+1}$, расстояние которого до области

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^{N+1} : Im\, z_i = 0, |Re\, z_i| > 1, i=\overline{0,N}\}$$

положительно.

ВЦД называется соответствующей кратному степенному ряду, если разложение ее каждой n-ой подходящей дроби /$n=1,2\dots$/ в формальный степенной ряд совпадает с исходным рядом до всех членов степени n включительно. Построение соответствующих цепных дробей является одним из основных подходов, применяющихся для разложения аналитических функций в непрерывные дроби. В § 4 рассмотрен новый тип двумерной соответствующей цепной дроби к двойному степенному ряду. Ранее в работах Х.И.Кучминской, Марфи и О. Донохое, В.Семашко, А.Коут и В. Вердонк исследовались три типа таких дробей для двойных степенных рядов, два из которых в отличие от одномерного случая имели нелинейные частные числители, в третьем - переменные x и y в разложение входили не равноправно.

Для заданного формального двойного степенного ряда соответствующую ВЦД ищем в виде

$$b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{2} \frac{b_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \qquad /37/$$

где $b_{i(k)} = a_{2k-|i(k)|,|i(k)|-k}$, $|i(k)| = i_1 + i_2 + \dots + i_k$.
Построен рекуррентный алгоритм для вычисления коэффициентов дроби /37/, установлены необходимые и достаточные условия существования данного алгоритма.

Утверждение 4.4.I. Если формальный двойной степенной ряд является разложением функции $f(z_1+z_2)$, то соответствующая ВЦД /37/ вырождается в непрерывную дробь вида

$$a_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(z_1+z_2)}{1}.$$

Последнее утверждение не справедливо для трех других типов ранее рассматриваемых соответствующих ВЦД.

В § 5 построены разложения отношения гипергеометрических функций Аппеля в ветвящиеся цепные дроби. Доказано, что эти дроби являются соответствующими к формальным степенным рядам, в которые разлагаются рассматриваемые отношения. Как и в одномерном случае из этих разложений можно получить представление гипергеометрических функций Аппеля $F_1(1,b,b';c;z_1,z_2)$, $F_2(1,b,b';c,c';z_1,z_2)$, $F_4(1,b;c,c';z_1,z_2)$ в виде ВЦД. В качестве иллюстрации запишем разложение $F_2(1,b,b';c,c';z_1,z_2)$ в ветвящуюся цепную дробь

$$F_2(1,b,b';c,c';z_1,z_2) =$$

$$= \left(1 - \sum_{i_1=1}^{2} \frac{u_{i(1)} z_{i_1}}{1 - \cfrac{v_{i(1)} z_{i_1}}{1 - \sum\limits_{i_2=1}^{2} \cfrac{u_{i(2)} z_{i_2}}{1 - \cfrac{v_{i(2)} z_{i_2}}{1 - \dots}}}} \right)^{-1},$$

где

$$v_{i(n)} = \begin{cases} b_{pq}, & \text{если } i_n = 1, \\ b'_{pq}, & \text{если } i_n = 2, \end{cases}$$

$u_1 = a_0,\ u_2 = a'_0$ и

$$u_{i(n+1)} = \begin{cases} a_{pq}, & \text{если } i_n = i_{n+1} = 1, \\ a'_{pq}, & \text{если } i_n = i_{n+1} = 2, \\ a_p, & \text{если } i_n = 2,\ i_{n+1} = 1, \\ a'_q, & \text{если } i_n = 1,\ i_{n+1} = 2, \end{cases}$$

p - количество единиц в мультииндексе $i(n)$, $q = n - p$ и

$$a_{pq} = \frac{(c+p-q-1)(b+p)}{(c+2p-1)(c+2p)},\ a_p = \frac{b+p}{c+2p},\ b_{pq} = \frac{(p+q)(c-b+p-1)}{(c+2p-2)(c+2p-1)},$$

a'_{pq}, a'_q, b'_{pq} определяются с помощью аналогичны формул, где вместо c, b, p и q соответственно взято c', b', q и p.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Построены основы аналитической теории ветвящихся цепных дробей, в частности,

I/ исследованы свойства ветвящихся цепных дробей: обоснованы формулы для числителей и знаменателей подходящих дробей в виде определителей, дано полное описание класса эквивалентных ВЦД, установлен многомерный аналог тождеств Эйлера равноценных преобразований цепных дробей в ряды и др.

2/ разработана методика исследования сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными и комплексными компонентами. В первом случае используется метод специальных неравенств типа средних гармонических, во втором, в основном,- применительно к ВЦД метод мажорант.

3/ получены многомерные аналоги наиболее известных и часто используемых признаков сходимости непрерывных дробей: теоремы Зейделя, Прингсгейма, Ворпицкого, Ван Флека, параболических теорем и многие другие.

4/ построены и исследованы многомерные аналоги некоторых типов функциональных непрерывных дробей : положительно определенных ВЦД, многомерных аналогов J-, C-, S-, g-дробей, двумерных соответствующих цепных дробей с линейными частными числителями.

5/ разложены отношения гипергеометрических функций Аппеля в ветвящиеся цепные дроби.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ:

I. Боднар Д.I. Аналог ознаки збIжностI ВорпIтського для гIллястих ланцюгових дробIв //Питання якIсноI теорII диференцIальних рIвнянь та Iх застосування.- КиIв: IМ АН УРСР, I978.- С.7-8.
2. Боднар Д.И. Необходимый признак сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными компонентами //Мат. методы и физ.-мех. поля.- 1979.- Вып. I0.- С.I5- I9.
3. Боднар Д.И. Необходимый и достаточный признак сходимости ветвящихся цепных дробей с положительными членами //Там же.- I98I.- Вып. I3.- С. I2- I5.
4. Боднар Д.И. Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей с частными звеньями вида $\frac{(1-g_{i_1 i_2 \dots i_k})\hat{g}_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1 i_2 \dots i_k}}{1}$ //Там же.- I982.- Вып. I5.- С.30- 35.
5. Боднар Д.И. Современное состояние аналитической теории ветвящихся цепных дробей //Числ. методы решения задач мат. физики: Тез. докл. Всесоюзн. школы молодых ученых 26 мая - 4 июня

1983, Львов: В 3 ч.- М.: 1983, ч.3.- С.16- 18.

6. Боднар Д.И. Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей //Докл. АН УССР. Сер. А.- 1983.- № 8.- С.3- 7.
7. Боднар Д.И. О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей //Межд. конф. по конструктивной теории функций. Варна 27 мая - 2 июня 1984: Доп. представленные тез. докладов.- София, 1984.- С.15.
8. Боднар Д.И. Многомерные положительно определенные дроби //Мат. методы и физ.- мех. поля.- 1985.- Вып. 22.-С.25 -29.
9. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби.- Киев: Наукова думка, 1986.- 176 с.
10. Боднар Д.И. Положительно определенные ветвящиеся цепные дроби //Теория функций и приближений: Труды 2-й Саратовской зимней школы 24 января - 5 февраля 1984, Саратов. В 3 ч.- Саратов, 1986, ч.2.- С.45- 49.
11. Боднар Д.И. Области сходимости и области устойчивости для ветвящихся цепных дробей //Теория функций и приближений: Труды 3-й Саратовской зимней школы 27 января - 7 февраля 1986, Саратов: В 3 ч.- Саратов, 1987, ч. 2.- С. 6- 8.
12. Боднар Д.И. Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей //Теория функций и смежные вопросы анализа: Труды МИ АН СССР им. В.А.Стеклова.- 1987.- 180.- С.52- 53.
13. Боднар Д.И. Признаки сходимости некоторых типов ветвящихся цепных дробей //Теория приближения функций: Труды межд. конф. 31 мая - 5 июня 1983, Киев.- М.: Наука, 1987.- С.63- 65.
14. Боднар Д.И. Признаки сходимости различных типов функциональных ветвящихся цепных дробей //Новые подходы к решению диф. уравнений: Тез. докл. Всесоюзной конф. май 1987, Дрогобыч.- М., 1987.- С.15- 16.
15. Боднар Д.И. Аналоги признаков сходимости Прингсгейма для ветвящихся цепных дробей //Докл. АН УССР. Сер. А.- 1988.- № 10.- С. 36- 39.
16. Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби и интегральные уравнения //Интегральные уравнения в прикладном моделировании: Тез. докл. III республ. научно-техн. конф. 14- 16 ноября 1989, Одесса: В 2 ч.- Киев, 1989, ч. 1.- С. 32 -33.
17. Боднар Д.И. Гипергеометрические функции двух переменных и ветвящиеся цепные дроби //Теория приближения функций: Тез.

докл. Всесоюзн. школы 3I августа - 8 сентября I989, Луцк.- Киев, I989.- С.I9- 20.

I8. Боднар Д.И. Двумерные соответствующие ветвящиеся цепные дроби с линейными относительно переменных компонентами //Современные проблемы теории функций: Тез. докл. Всесоюзн. школы-конф. I9- 29 мая I989.- Баку, I989.- С. 22- 23.

I9. Боднар Д.И. Признаки сходимости многомерных g-дробей //Методы исследований дифференциальных и интегральных операторов.- Киев: Наукова думка, I989. С.22- 27.

20. Боднар Д.И. Признаки сходимости типа Прингсгейма для ветвящихся цепных дробей //Укр. мат. журнал.- I989.- 4I, № II.- С.I559- I563.

2I. Боднар Д.И. Двумерные соответствующие ветвящиеся цепные дроби с линейными относительно переменных частными числителями //Докл. АН УССР. Сер. А.- I990.- № I0.- С. 3- 6.

22. Боднар Д.И. Некоторые типы функциональных ветвящихся цепных дробей и свойства функций, которые они представляют //Экстремальные задачи теории приближения и их приложения: Тез. докл. научн. конф. 29- 3I мая I990.- Киев, I990.- С.I8.

23. Боднар Д.И. Разложение отношения гипергеометрических функций двух переменных в ветвящиеся цепные дроби //Мат. методы и физ.- мех. поля.- I990.- Вып. 32.- С.40 - 44.

24. Боднар Д.И. Соответствующие ветвящиеся цепные дроби с линейными частными числителями для двойного степенного ряда //Укр. мат. журнал - I99I.- 43.- № 4.- С. 474 - 482.

25. Боднар Д.И. Аналог признака сходимости Зейделя для ветвящихся цепных дробей //Новые подходы к решению диф. уравнений: Тез. докл. третьей всесоюзной конференции I7- 2I июня I99I, Дрогобыч.- М., I99I.- С.I3.

26. Bodnar D.I. Convergence criteria of some types of branched continued fractions //Тези МІжнародноI математичноI конференцII, присвяченоI I00-рIччю народження С.Банаха, 6-8 травня I992.- ЛьвIв, I992.- С.6.

Подписано к печ. 29.06.92. Формат 60x84/16 Печать офсет. Бумага офсет.Усл.п.л. I,86. Усл. кр.-отт 2,I Уч. -изд.л. I,25 Тираж 100 экз. Зак. 2869.

Областная книжная типография, 290000, Львов, ул. Стефаника,II.

Бесплатно