

Академия наук Украины  
Институт математики

На дровах рукописи

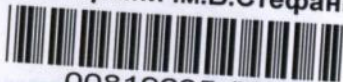
БЕСПАЛОВ Юрий Николаевич

НАБОРЫ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ  
ПРОСТРАНСТВЕ, СВЯЗАННЫХ СООТНОШЕНИЯМИ

01.01.01 - математический анализ

А в т е р е ф е р а т  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Киев - 1992



Робота виконана в відділі  
математики АН України.

Научний керівник: доктор фізико-математических наук,  
ведучий научний співробітник САМОЛЕНКО Ю.С.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математических наук,  
професор ДРОЗД Ю.А.,  
кандидат фізико-математических наук  
ВАЙНЕРМАН Л.И.

Ведуча організація: Інститут теоретическої фізики АН України.

Захита состоится "27" октєбря 1992 г. в 15 часов  
на засіданні спеціалізованого сєвета Д 016.50.01 при Інституте  
математики АН України по адресу:  
252601, Київ 4, ГСН, ул. Решиа, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разслан "25" сєнтєбря 1992 г.

Учений секретарь  
спеціалізованого сєвета

Гусак Д.В.



## I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность тем.  $\ast$ -алгебра (инволютивная алгебра) — это пара, состоящая из унитарной алгебры  $\mathcal{A}$  над полем  $\mathbb{C}$  и инволюции — отображения  $\ast: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , удовлетворяющего условиям  $(\lambda a + \mu b)^\ast = \bar{\lambda} a^\ast + \bar{\mu} b^\ast$ ,  $(ab)^\ast = b^\ast a^\ast$ ,  $(a^\ast)^\ast = a$  для любых  $a, b \in \mathcal{A}$ ;  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Представлением  $\ast$ -алгебры называется гомоморфизм, согласованный с инволюцией, этой алгебры в алгебру  $\mathcal{B}(H)$  ограниченных операторов в комплексном гильбертовом пространстве  $H$  (или в некоторую другую инволютивную алгебру, вообще говоря, неограниченных операторов в пространстве  $H$ ).

Рассмотрим некоторые классы  $\ast$ -алгебр, для которых основные задачи теории представлений решались ранее:

1)  $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x]$  — алгебра полиномов с одним самосопряженным образующим  $x^\ast = x$ . Задачу унитарной классификации представлений такой алгебры ограниченными (неограниченными) операторами решает спектральная теорема для одного ограниченного (неограниченного) самосопряженного оператора;

2)  $\mathcal{A} = \mathbb{C}[G]$  — групповая алгебра с инволюцией  $g^\ast = g^{-1}$ ,  $g \in G$ , где  $G$  — дискретная группа. Категории унитарных представлений группы  $G$  и представлений  $\ast$ -алгебры  $\mathbb{C}[G]$  эквивалентны. Унитарные представления групп интенсивно изучаются на протяжении около 100 лет, начиная с классических работ Ф.Г.Фробениуса 1896–1901 гг.;

3) изучение представлений групп Ли во многом сводится к исследованию представлений их алгебр Ли. О последних можно говорить в терминах  $\ast$ -алгебр — их универсальных обертывающих. Неприведенные представления компактных групп — конечномерны. В случае некомпактных групп Ли нужно рассматривать представления их алгебр Ли неограниченными операторами.

раниченными операторами. Простейший пример - алгебра канонических коммутационных соотношений

$$\mathcal{A} = \langle (p, q) / ([p, q] + 1), p^2 = p, q^2 = q \rangle,$$

не имеющая представлений ограниченными операторами;

4) теория представлений бесконечномерных групп (групп петель, индуктивных пределов конечномерных, группы диффеоморфизмов окружности) тесно связана со  $\ast$ -представлениями соответствующих бесконечномерных алгебр Ли (алгебр Каца-Мути, Вирасоро и т.д.). Отметим также  $\mathbb{Z}_2$ -градуированные алгебры Ли, интерес к  $\ast$ -представлениям которых связан с суперсимметричными моделями в физике;

5) бесконечные наборы самосопряженных операторов, связанных соотношениями коммутации, антикоммутации и близких к ним рассматривали *L. Garzding, A. Wightman* (1954), И.М.Гельфанд, Н.Я.Виленкин (1961), В.М.Березанский (1976), В.С.Самойленко (1984) и др. Такие наборы возникают при рассмотрении физических систем с бесконечным числом степеней свободы.

Интерес к более широким классам  $\ast$ -алгебр возник в последние десятилетия в связи с квантовым методом обратной задачи (Е.К.Склянин, Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев, 1979) и появлением затем понятия квантовой группы (Дринфельд В.Г. (1985), *Jimbo M.* (1985), *Woronowicz S.L.* (1987)); дальнейшим применением их к точно решаемым моделям математической физики, в теории специальных функций (см., например, Н.Я.Виленкин, А.У.Климык, 1991) и др. Значительное число работ связано с изучением представлений квантовых групп.

Отметим результаты, логически непосредственно предшествовавшие настоящему исследованию. В 1982-83 гг. Е.К.Склянин в связи с решением квантового уравнения Янга-Бакстера рассмотрел парапараметрические семейства  $\ast$ -алгебр. (В вырожденном случае это се-

мешестве совпадает с однородной формой квантовой алгебры  $U_q(\mathfrak{su}(2))$ . Для этих алгебр он построил три серии представлений, включая деформацию неприводимых представлений для  $\mathfrak{su}(2)$ . А.М. Вершик (1984) обращал внимание на важность исследования квадратичных алгебр и их представлений, привел ряд примеров, исследовал структуру и \* -представления некоторых алгебр.

В.А. Островский, Ю.С. Самойленко (1988) исследовали представления \* -алгебр с двумя самосопряженными образующими  $x_i = x_i^*$ ,  $i = 1, 2$ , и одним самосопряженным соотношением второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^2 a_i x_i + a = 0, \quad a_{ij} = \bar{a}_{ji}, \quad a_i, a \in \mathbb{R}.$$

Проведена классификация таких "некоммутативных квадратов" на вещественной плоскости (20 канонических форм). В каждом из 19 невырожденных случаев получено полное описание неприводимых представлений, вообще говоря, неограниченными операторами, доказаны структурные теоремы.

Представления отдельных \* -алгебр, заданных образующими и соотношениями, и их семейств изучали S.L. Woronowicz и его ученики, K. Smüdgen, M. Rieffel, ряд киевских математиков и др.

Цель работы. 1. Выделить новые естественные с точки зрения теории представлений классы \* -алгебр.

2. Развить методы исследования представлений \* -алгебр.

3. Исследовать представления некоторых классов конечнопорядоченных \* -алгебр, отличных от групповых и универсальных обертывающих: определять типы фактор-представлений ("ручнест" - "дикест"), в "ручнест" случае описать классы унитарной эквивалентности неприводимых представлений, доказать структурные теоремы и т.д.

Методика исследования. В работе используется техника "систем импримитивности", развитая G. Maskey (1949-52) для случая индуцированных представлений групп, а также различные ее модификации и частичные обобщения ("коммутативные модели", "метод динамических систем"), относящиеся к целому ряду работ по теории представлений. Все эти основаны на том, чтобы свести изучение представлений  $\ast$ -алгебры  $A$  к рассмотрению ее подалгебры  $A_0$  в некотором действии группы (полугруппы) или некоторого отношения на спектре этой подалгебры.

Удобным оказывается расширить класс задач (аналогично тому, как это делалось в теории конечномерных ассоциативных алгебр) и рассматривать представления  $\ast$ -категорий. Например, представление  $\ast$ -алгебры  $A$ , спектр которого при ограничении на подалгебру дискретен, можно рассматривать как представление  $\ast$ -категории, объекты которой - точки спектра  $A_0$ .

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность. В диссертации изложены основные понятия и конструкции, связанные с представлениями  $\ast$ -алгебр и  $\ast$ -категорий.

Единообразный подход к известным задачам унитарной классификации а) наборов подпространств (эрмитовых), б) алгебраических операторов, в) представлений некоторых свободных involутивных полеченев позволил исследовать представления конкретных  $\ast$ -алгебр с двумя образующими.

Развита техника индуцированных представлений для скрещенных произведений  $\ast$ -алгебр с конечными группами автоморфизмов. Для пары  $\ast$ -алгебр, имеющих общее расширение, между категориями их представлений строится пара сопряженных функторов. Эти категории можно исследовать одновременно.

Семейство деформаций алгебры  $U(\mathfrak{su}(2))$ , пространное

Б.К. Селяниным, параметризуются эллиптической кривой и точкой на ней. Для алгебр, соответствующих точкам второго порядка, получена полная унитарная классификация представлений. Это обобщает и уточняет результаты А.М. Вершика, С.А. Кругляка.

Выделены и изучены некоторые классы соотношений для наборов ортопроекторов (линейные, билинейные антисимметричные). Такие соотношения, в частности, связаны с некоторыми первыми квадратичными алгебрами Пуанкаре-Биргофа-Витта.

Результаты, связанные с "методом динамических систем" для соотношений вида  $AB = BF(A)$ , где  $A$  - самосопряженный оператор (набор коммутующих самосопряженных операторов), обобщены на более широкий класс "полулинейных соотношений":

$$\sum_i f_i(A)B g_i(A) = h(A).$$

Последние возникают в теории ортогональных полиномов, между генераторами некоторых гипергрупп.

Апробация работы. Результаты докладывались на школах по теории операторов: Воронеж (1990), Ульяновск (1990), Нижний Новгород (1991), на конференции по теории представлений: Киев (1991), на семинарах по теории представлений в Институте математике и Институте теоретической физики АН Украины.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ [1-7]. Результаты совместной работы [1] обобщены в диссертации. В совместной работе [4] автору принадлежат результаты с размерности неприводимых представлений, часть результатов, связанных со спектральными характеристиками представлений.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 6 параграфов, разбитых на 14 пунктов, списка литературы из 82 наименований, указателя обозначений. Объем работы - 110 страниц машинописного текста.

## II. СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ.

Во введении дается обзор исследований по тематике диссертации, обоснование актуальности работы, краткий перечень основных результатов.

## §I. Основные конструкции.

Определяются основные понятия, связанные с представлениями  $\ast$ -алгебр. Аналогично случаю унитарных представлений групп строится категория представлений  $R(\mathcal{A})$   $\ast$ -алгебры  $\mathcal{A}$  ограниченными операторами в гильбертовых пространствах (наряду с этим мы рассматриваем категории представлений соотношений, в которых участвуют функции из более широкого класса, чем полиномы). Однако, эта категория не замкнута относительно бесконечных прямых сумм. Вложить ее в более широкую категорию  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ , содержащую всевозможные прямые суммы, можно, рассматривая представления в локальных гильбертовых пространствах (предложение I.1).

Коммутант  $\mathcal{T}(\mathcal{A})^!$  представления  $\mathcal{T}$  (алгебра эндоморфизмов точки  $\mathcal{T}$  в  $R(\mathcal{A})$ ) является неймановской алгеброй. Говорим, что  $\mathcal{A}$  - "ручная", если  $\mathcal{T}(\mathcal{A})^!$  имеет тип I для всех представлений  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{A}$  - "дикая" - в противном случае.

ГНС-конструкция устанавливает взаимно однозначное соответствие между положительными функционалами на алгебре и представлениями с отмеченным циклическим вектором. Она позволяет также задать топологию на спектре  $\hat{\mathcal{A}}$  (множестве классов унитарной эквивалентности неприводимых представлений) алгебры  $\mathcal{A}$  (предложения I.2-I.4).

С локально компактной группой канонически связывается групповая  $C^*$ -алгебра с теми же категорией представлений и дуальным объектом. Мы связываем с каждой  $\ast$ -алгеброй объект более широкой категории локальных  $C^*$ -алгебр, строя левый сопряженный к забы-

каждому функтору из последней категории в категорию  $\ast$ -алгебр (теорема I.1).

Удобно расширить класс задач и наряду с представлениями  $\ast$ -алгебр рассматривать представления  $\ast$ -категорий, распространяя на этот случай перечисленные выше конструкции.

Представления  $\ast$ -алгебр неограниченными операторами возникают в данной работе эпизодически. Поэтому мы ограничиваемся лишь кратким перечислением основных понятий, связанных с этой темой.

## §2. Эквивалентность некоторых задач теории представлений.

В пункте 2.1 определяются два различных отношения эквивалентности на классе  $\ast$ -алгебр ( $\ast$ -категорий): алгебраическая эквивалентность категорий представлений, как абстрактных  $\ast$ -категорий, и пространственная, которая задается с помощью унитарных операторов между соответствующими пространствами представлений. Исследуя представления конкретной  $\ast$ -алгебры ( $\ast$ -категории), мы будем заменять ее некоторой новой  $\ast$ -алгеброй ( $\ast$ -категорией) (используя полярное разложение, функции от коммутирующего семейства самосопряженных операторов, Морита-приведение категории) так, чтобы при этом можно было задать эквивалентность (алгебраическую или пространственную) категорий их представлений.

В пункте 2.2 мы иллюстрируем этот подход конкретными примерами.

Задачу унитарной классификации пар пэрипространств рассматривали *C. Jordan* (1875) в конечномерном случае, *J. Dixmier* (1948), *Ch. Davis* (1958), *P. R. Halmos* (1969) и ряд других авторов в бесконечномерном. *I. Raebusa*, *A. M. Sinclair* (1989) построили обертывающую  $C^*$ -алгебру для пары ортопроекторов. Длительность задачи унитарной классификации троек ортопроекторов  $P_1, P_2, P_3$  показана Кругляком С.А., Самойленко В.С. (1980). Эквивален-

тность задач унитарной классификации  $n$ -к подпространств в  $H$  с условием  $H = H_1 \dot{+} \dots \dot{+} H_n$  и представлений некоторого свободного инволютивного колчана показал S.V. Sundez (1988).

Пусть  $R^I$  ( $R_*^I$ ) – категория наборов подпространств  $H_i \subset H$ ,  $i = \overline{1, n}$  таких, что  $H = H_1 \dot{+} \dots \dot{+} H_n$  ( $H = \overline{H_1 \dot{+} \dots \dot{+} H_n}$ ) и сплетающих операторов,  $R^{II}$  ( $R_*^{II}$ ) – категория ограниченных (замкнутых) алгебраических операторов – корней фиксированного полинома  $p(t) = (t-1) \dots (t-n)$  без кратных корней,  $R^{III}$  ( $R_*^{III}$ ) – категория представлений свободного инволютивного колчана с  $n$  точками и парами сопряженных стрелок между любыми двумя различными точками, ограниченными (замкнутыми) операторами. Следующие теоремы дополняют перечисленные выше результаты.

Теорема 2.1. Категории  $R^I$ ,  $R^{II}$ ,  $R^{III}$  пространственно эквивалентны.

Теорема 2.2. При  $n = 2$  категории  $R_*^I$ ,  $R_*^{II}$ ,  $R_*^{III}$  пространственно эквивалентны.

Приводятся "патологические" примеры, показывающие, почему теорема 2.2 не верна при  $n \geq 3$ .

В.Л.Островский, Ю.С.Самойленко (1988) описали представления  $\ast$ -алгебр с двумя самосопряженными образующими и соотношениями второго порядка. Результаты, изложенные в §2, а также использование техники индуцированных представлений (§3) позволяет рассмотреть некоторые примеры соотношений более высокого порядка.

### §3. Индуцированные представления.

При рассмотрении модулей над ассоциативными алгебрами (унитарных представлений групп) наличие у функтора ограничения представлений на подалгебру (подгруппу) левого сопряженного функтора замены основного кольца (индуцирования с подгруппы) играет важ-

ную роль. Рассматривается ситуация, когда функтор  $\text{Res}_{A_0}^A$  ограничения представлений со  $\ast$ -алгебры  $A$  на  $\ast$ -подалгебру  $A_0$  имеет сопряженный.

Пусть  $A_0$  -  $\ast$ -алгебра,  $\alpha: G \rightarrow \text{Aut } A_0$  - действие на ней автоморфизмами конечной группы  $G$  ( $\alpha(g): a \mapsto a^g, g \in G, a \in A_0$ ), подгруппа  $G_0 \leq G$  отождествлена с помощью мономорфизма  $\beta: G_0 \hookrightarrow U(A_0)$  с некоторой подгруппой по умножению унитарных элементов алгебры  $A_0$  так, что  $\alpha\beta(g_0) = \beta(g_0)\alpha^g, g_0 \in G_0, a \in A_0$ . Определим по этим данным новую алгебру.

$A = A_0 \rtimes G/G_0$ , являющаяся факторалгеброй скрещенного произведения  $A_0 \rtimes G$  ( $a \cdot g = g \cdot a^g, a \in A_0, g \in G$ ) по соотношениям  $g_0 = \beta(g_0), g_0 \in G_0$ . Алгебру  $A_0$  отождествим с подалгеброй в  $A$ . Инволюция однозначно продолжается с  $A_0$  на  $A$  так, чтобы при этом  $g^* = g^{-1}, g \in G$ .

Предложение 3.1. Функтор  $\text{Res}_{A_0}^A: R(A) \rightarrow R(A_0)$  ограничения представления на подалгебру имеет левый сопряженный функтор  $\text{Ind}_{A_0}^A: R(A_0) \rightarrow R(A)$  индуцирования с подалгебры.

Замечание 3.1. Т.к.  $R(A_0), R(A)$  -  $\ast$ -категории (т.е. в них имеются естественные антилинейные изоморфизмы

$\text{Hom}(\pi_1, \pi_2) \simeq \text{Hom}(\pi_2, \pi_1)$ ), мы можем считать любой из функторов  $\text{Res}_{A_0}^A$  или  $\text{Ind}_{A_0}^A$  левым сопряженным, а второй, соответственно, - правым.

Ряд свойств функтора  $\text{Ind}$  такой же, как в случае представлений групп: справедливы принципы сквозного индуцирования, критерий индуцированности, теорема Макки (предложения 3.2-3.3).

Теорема 3.3. Алгебра  $A$  - "ручная" тогда и только тогда, когда  $A_0$  - "ручная".

В предложении 3.4 описывается связь между классами унитарной эквивалентности неприводимых представлений  $\hat{A}_0$  и  $\hat{A}$  в простей-

шем случае, когда  $A = A_0 \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2$ . Если при этом

$$A_0 = \mathbb{C} \langle a, a^* \rangle / (\rho(a), \rho(a^*)) -$$

\*-алгебра, порожденная алгебраическим элементом  $a$  - корнем вещественного полинома  $\rho$ ,  $\deg \rho \geq 2$ , а неединичный элемент  $\mathbb{Z}_2$  действует на образующем  $a \mapsto a^*$ , то  $A(A_0)$  - "ручная" тогда и только тогда, когда  $\deg \rho = 2$ . В этой ситуации мы описываем неприводимые представления  $A$ , избегая вычислений.

Изучение некоторых алгебр с двумя самосопряженными образующими  $x = x^*$ ,  $y = y^*$  можно свести к описанному выше случаю:

а) алгебра  $\mathbb{C} \langle x, y \rangle / (xyz - yxy)$  - "дикая" (сводится к случаю, когда  $\rho(t) = t^2 - \delta$ ,  $\delta > 0$ );

б)  $\mathbb{C} \langle x, y \rangle / (xyz + \alpha xy - \beta y)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$  - "ручная" (ей соответствует полином  $\rho(t) = \beta t(t + \alpha) - \delta$ ,  $\delta > 0$ ).

Пусть \*-алгебры  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  таковы, что

$$A_1 \otimes_{\mathbb{Z}_2} G^{(1)} / G_0^{(1)} \simeq A \simeq A_2 \otimes_{\mathbb{Z}_2} G^{(2)} / G_0^{(2)};$$

тогда имеется пара сопряженных функторов

$$R(A_1) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Res}_{A_2}^{A_1} \circ \text{Ind}_{A_1}^{A_2}} \\ \xleftarrow{\text{Res}_{A_1}^{A_2} \circ \text{Ind}_{A_2}^{A_1}} \end{array} R(A_2).$$

Наличие такой связи между  $A_1$  и  $A_2$  позволяет исследовать категории представлений этих алгебр одновременно. В частности,  $A_1$  - "ручная" тогда и только тогда, когда  $A_2$  - "ручная". В пункте 3.2 рассмотрены примеры пар \*-алгебр такого вида:

а)  $A_1 = U(\mathfrak{su}(2))$ ;

$$A_2 = \mathbb{C} \langle x, y, z \rangle / ((xy) - z, (yz) - x, (zx) - y), x^2 = x, y^2 = y, z^2 = z;$$

$$G^{(1)} = G^{(2)} = \{ \pm \sigma_i \mid i = \overline{0, 3} \}$$

- группа матриц Паули. Аналогично, в качестве  $A_2$  можно взять алгебры Сльямина (см. §4). Соответствующие им алгебры  $A_1$  принадлежат к некоторому классу ал-

гебр (см. §5), изучение которых сводится к рассмотрению наборов ортопроекторов, связанных дополнительными соотношениями. На  $\mathcal{A}_2$  ( $\mathcal{A}_2$ ) действует группа Клейна  $K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , изменяя знаки у некоторых из образующих. Это действие переносится на  $\hat{\mathcal{A}}_2$  ( $\hat{\mathcal{A}}_2$ ). Между орбитами  $\hat{\mathcal{A}}_2/K$  и  $\hat{\mathcal{A}}_2/K$  устанавливается биекция такая, что для  $\pi \in \hat{\mathcal{A}}_2$  представление  $\text{Res}_{\hat{\mathcal{A}}_2}^{\mathcal{A}} \circ \text{Ind}_{\hat{\mathcal{A}}_2}^{\mathcal{A}} \pi$  - прямая сумма представлений из соответствующей орбиты из  $\hat{\mathcal{A}}_2$ , и наоборот;

б)  $\mathcal{A}_2 = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], x_i^* = x_i;$

$$\mathcal{A}_2 = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle / \langle x_i x_j - \varepsilon_{ij} x_j x_i, 1 \leq i < j \leq n \rangle, x_i^* = x_i, \varepsilon_{ij} = \pm 1$$

$G^{(n)} = G^{(n)}$  - прямое произведение нескольких экземпляров групп матриц Паули. Алгебры  $\mathcal{A}_2$  такого вида изучались Ю.С.Самойленко (1984). Его подход может рассматриваться как частный случай предложенной техники.

#### §4. Представления эллиптических алгебр.

Е.К.Склянин (1982-83) в связи с квантовым методом обратной задачи построил семейство деформаций однородной формы алгебры  $U(SU(2))$ , параметризуемое комплексным тором и вещественной точкой на нем:

$$\mathbb{C}\langle s_0, s_1, s_2, s_3 \rangle / \langle i[s_0, s_1] + J_{\beta 1} \{s_2, s_3\}, i[s_2, s_3] + \{s_0, s_1\},$$

$$(i, \beta, \gamma) \in \{(4, 2, 1), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}; s_i^* = s_i, i = \overline{0, 3}.$$

Соотношения между эллиптическими функциями, через которые выражаются параметры  $J_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ , накладывают на них дополнительное ограничение  $J_{12} + J_{23} + J_{31} + J_{12} J_{23} J_{31} = 0$ . Он построил 3 серии представлений для этого семейства. Вопрос об унитарной классификации неприводимых представлений не рассматривался. Эта задача решалась затем А.М.Вершиком (1984) и А.С.Кругляком (1984) для случая  $J_{12} = 1, J_{23} = -1, J_{31} = 1$ , Э.Е.Вайслебом (1990) для случая  $J_{12} = 0$ . Последний случай содержит в качестве под-

семейства однородную форму "квантовых" алгебр  $U_q(SU(2))$ , изученных многими авторами.

Мы решаем задачу унитарной классификации неприводимых представлений для алгебр, соответствующих точкам второго порядка на торе, т.е. когда  $\{J_{12}, J_{23}, J_{31}\} = \{1, -1, J\}$ ,  $J \neq 0$ . С точностью до автоморфизма есть две возможности (в зависимости от циклического порядка  $(1, -1, J)$ ): (А)  $J_{12} = 1, J_{23} = J, J_{31} = -1$ ; (В)  $J_{12} = -1, J_{23} = J, J_{31} = 1$ ;  $J \neq \pm 1$ . В обоих перечисленных случаях  $S_i^2, i = \overline{0, 3}$ , коммутируют между собой, а для  $\chi \in V := RS_0^2 + RS_1^2 + RS_2^2 + RS_3^2$  выполнены соотношения  $S_i \chi = s_i(\chi) S_i$ , где  $S_i$  - некоторые линейные операторы на  $V$ . Операторы  $S_i$  порождают дискретную подгруппу  $G$  в  $GL(V) : Z_2 \times Z_2$  в случае (А),  $Z \times (Z_2 \times Z_2)$  в случае (В). Действие  $G$  на двойственном пространстве  $V^*$  имеет измеримое сечение, поэтому совместный спектр операторов, соответствующих  $S_i^2, i = \overline{0, 3}$ , при неприводимом представлении, дискретен и содержится в некоторой орбите этого действия. Таким образом, изучение неприводимых представлений свелось к рассмотрению некоторых  $\ast$ -категорий, чьи точки - элементы орбиты. Далее все сводится к исследованию колец эндоморфизмов точек категорий, имеющих достаточно простой вид. В случае (А) неприводимые представления имеют размерности 1, 2, 4 (теорема 4.1), т.е. такие же, как и в частном случае, рассмотренном А.М.Вершиком и А.С.Кругляком. В случае (В) неприводимые представления, кроме того, могут иметь любую нечетную размерность, либо быть бесконечномерными (теорема 4.2).

И.В.Чередник (1985), А.В.Одесский, Б.Л.Фейгин (1989) построили более общие семейства алгебр (в частности, деформации  $U(SL(n, C))$ ), также параметризующиеся точками комплексного тора. В случае торов, соответствующих прямоугольной решетке, и

вещественных точек эти алгебры допускают инволюцию, тождественную на образующих. В пункте 4.2 рассматривается алгебра из этого семейства с минимальным числом образующих:  $x = x^*$ ,  $y = y^*$ ,  $z = z^*$ ;

$$\mathbb{C}\langle x, y, z \rangle / (x^2 - yz - \bar{y}zy, y^2 - zx - \bar{z}xz, z^2 - xy - \bar{x}yx); \varphi \in \mathbb{C}.$$

Если для алгебр Сильянина самосопряженные представления, при которых центральному элементу  $S_0^2 + S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$  соответствует ограниченный оператор, реализуются ограниченными операторами, то в последнем случае представляют интерес именно представления неограниченными операторами. Мы рассматриваем неприводимые представления лишь при некоторых значениях параметра  $\varphi$ .

§5. Некоторые классы  $\ast$ -алгебр с соотношениями второго порядка и наборы ортопроекторов, связанных соотношениями.

О наборах подпространств  $\mathcal{H}_i$  (ортопроекторов  $P_i$ ) в этом параграфе нам удобнее говорить в терминах самосопряженных операторов  $R_i = 2P_i - I$ , являющихся корнями из единицы:

$$R_i^2 = I. \quad \text{Для пары операторов } R_i = R_i^* = R_i^{-1}, \quad i = 1, 2,$$

имеется спектральная теорема о представлении ее в виде прямого интеграла неприводимых, одномерных и двумерных. Задача унитарной классификации троек  $R_i = R_i^* = R_i^{-1}, \quad i = 1, 2$ , даже если

$$[R_1, R_2] = 0 \quad \text{— "дикая". Мы рассматриваем некоторые классы}$$

$\ast$ -алгебр с соотношениями второго порядка, при изучении представлений которых возникают наборы операторов  $R_i = R_i^* = R_i^{-1}$  связанных дополнительными соотношениями: линейными, билинейными антисимметричными.

В пункте 5.1 рассматриваются квадратичные алгебры с образующими  $x_1, \dots, x_n$  и однородными симметричными ( $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$ ) соотношениями

$$R_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_i x_j = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad N = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

В пространстве  $\mathbb{C}^{n^2(n-1)/4}$  коэффициентов  $a_{ij}^{(k)}$  выделается

плотное в топологии Зерисского подмножество. Об алгебрах, коэффициенты которых принадлежат этому подмножеству, говорим, что они находятся в "общем положении".

Теорема 5.1. Для алгебры  $\mathcal{A}$  "в общем положении":

- 1)  $\mathcal{A}$  - ПЭВ-алгебра (т.е. имеет ряд Пуанкаре такой же, как у алгебры многочленов);
- 2) если коэффициенты  $a_{ij}^{(k)}$  вещественны, то неприводимые представления  $\mathcal{A}$  как  $\ast$ -алгебры с инволюцией  $x_i^{\ast} = x_i$  имеют размерности не выше 2.

В качестве примера применения предыдущей теоремы рассматривается семейство  $\ast$ -алгебр, которые после факторизации по идеалу, порожденному центральным элементом, могут быть записаны в терминах образующих  $z_i = z_i^{\ast}$ ,  $z_i^2 = 1$ ,  $i = \overline{0, N}$ ,  $N = n(n-1)/2$ , связанных  $N - n + 1$  однородными линейными соотношениями.

В пункте 5.2 рассматривается неоднородный аналог таких соотношений. Задача унитарной классификации неприводимых четверок операторов  $R_i = R_i^{\ast} = R_i^{-1}$ ,  $i = \overline{0, 3}$ , связанных соотношением

$$\lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 = hI, \quad \lambda_i, h \in \mathbb{R},$$

применением спектральной теоремы для пар  $R_0, R_1$  и  $R_2, R_3$  сводится к описанию орбит некоторого действия  $Z_1 \times Z_2$  на  $\mathbb{R}$ . К рассмотрению таких четверок сводится задача описания представлений алгебры

$\mathbb{C}\langle x, y, z \rangle / (\langle x, y, z \rangle - \mathbb{Z}, \langle y, z \rangle - x, \langle z, x \rangle - y)$ ,  $x^{\ast} = x$ ,  $y^{\ast} = y$ ,  $z^{\ast} = z$ , возникшей в пункте 3.2; алгебры

$\mathbb{C}\langle x, y, z \rangle / (\langle x^2, y, z \rangle, \langle y^2, z, x \rangle, \langle z^2, x, y \rangle)$ ,  $x^{\ast} = x$ ,  $y^{\ast} = y$ ,  $z^{\ast} = z$ ,  $q \in \mathbb{R}$ , являющейся частным случаем алгебр из пункта 4.2. Неприводимые представления последней алгебры не более чем двумерны.

В пункте 5.3 рассматривается некоторый класс квадратичных алгебр, часть соотношений которых симметрична, часть - антисим-

метрична. Выделяется подмножество алгебр общего положения. Для них доказывается теорема 5.3, аналогичная теореме 5.1. Алгебры, возникающие в пункте 3.2 при рассмотрении алгебр Склианина, принадлежат нашему классу. Однако, условие того, что они находятся в общем положении, имеет вид  $J_{12} + J_{23} + J_{34} + J_{42} J_{23} J_{34} \neq 0$ .

Рассматриваются примеры алгебр, не находящихся в общем положении. В частности, мы получаем другим путем результат Э.Б.Вайслеба о "дикости" алгебр Склианина при некоторых значениях параметров.

§6. Наборы операторов, связанных полулинейными соотношениями.

Результаты этого параграфа получены в совместной работе [4].

Если оператор  $B$  связан с самосопряженным оператором  $A$  (набором коммутирующих самосопряженных операторов  $A = (A_k)_{k \in K}$ ) соотношением вида

$$AB = BF(A), \quad F: R \rightarrow R, \\ (A_k B = BF_k(A), \quad F_k: R^k \rightarrow R),$$

то существует восходящий к G. Mackey (1949-52) метод изучения пары  $A, B$  (семейства  $A, B$ ). В ряде работ для таких пар построены мздели, при дополнительных ограничениях  $B = B^*$ , или  $B^* = B^{-1}$ , или  $B$  - нормальный, или  $B$  -  $\varphi$ -нормальный ( $BB^* = \varphi(B^*B, A)$ ), описаны неприводимые представления, доказаны структурные теоремы.

Мы рассматриваем более общий класс "полулинейных" соотношений

$$\sum_{i=1}^n f_i(A) B g_i(A) = h(A),$$

где  $f_i, g_i, h$  - борелевские комплекснозначные функции. Рассмотрение неоднородных соотношений сводим к однородным ( $h \equiv 0$ ), с последними связываем "характеристическую функцию"

$$\varphi(t, s) = \sum_{i=1}^n f_i(t) g_i(s).$$

и характеристическое бинарное отношение  $r = \{(t, s) : \varphi(t, s) = 0\}$

которые можно рассматривать как множество дуг ориентированного графа.

В пункте 6.2 рассматривается случай, когда спектр оператора  $A$  дискретен. Собственным числам  $\lambda_i$  оператора  $A$  отвечают подпространства  $H_i$ . Оператор  $B$  имеет вид  $B = (B_{ij})$  относительно разложения. Следующее предложение сводит задачу описания пар  $(A, B)$  к изучению представлений графа  $\Gamma$ .

Предложение 6.2. Для того, чтобы пара  $(A, B)$  удовлетворяла полулинейному соотношению, необходимо и достаточно, чтобы блочная матрица  $(B_{ij})$  была сосредоточена на множестве  $\Gamma' / \sigma(A)$  (т.е.

$$B_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad (\lambda_i, \lambda_j) \notin \Gamma'.$$

Вводится понятие носителя представления (подграф графа  $\Gamma$ , точкам и ребрам которого соответствуют ненулевые пространства и операторы) и размерности (функции на точках и ребрах). Для случая, когда  $B$  — самосопряженный, достаточно просто решается вопрос о "ручности" задачи, получено описание размерностей и носителей неприводимых представлений. Условие унитарности  $B^* = B^{-1}$  задает более сложные соотношения в графе. В этом случае более подробно рассмотрены конечномерные представления.

В пункте 6.3 рассмотрен общий случай, когда спектр  $A$  не обязательно дискретен. Пусть  $E_A(\cdot)$  — спектральная мера оператора  $A$ ,  $K \subset \mathbb{R}^2$  — борелевское множество. Будем говорить, что оператор  $B$  сосредоточен на  $K$  относительно  $E_A(\cdot)$  (или относительно  $A$ ), если  $E_A(M) B E_A(N) = 0$  для любых борелевских множеств  $M, N \subset \mathbb{R}^2$  таких, что  $M \times N$  не пересекает  $K$ .

Теорема 6.2. Если  $A, B$  удовлетворяют полулинейному соотношению, то  $B$  сосредоточен на графе  $\Gamma$  этого соотношения относительно  $A$ .

Верно лишь частичное обращение этого утверждения (теорема 6.3),

например, когда  $\Gamma$  "локально устроено", как график функции. Основные результаты, связанные с этим вопросом, получили Arveson W.B. (1974), Б.С. Шульман (1988-90).

Вопрос о "ручности" соотношений с произвольным  $B$ , с самосопряженным  $A$  решается аналогично случаю с дискретным спектром. Построена модель.

Фиксируется спектральный тип оператора  $A$  (класс эквивалентности спектральных мер  $E_A(\cdot)$ ). В ряде теорем устанавливается связь между существованием неприводимых, полных (без тривиальных подпредставлений) представлений и эргодичностью, квазиинвариантностью спектрального типа. При этом, т.к. мы имеем дело с отношением вместо функции, используются понятия лево-, право-, двусторонне-квазиинвариантной, эргодической меры.

На основании общих результатов о пространствах Лебега показывается существование разложения представления в прямой интеграл представлений с эргодической спектральной мерой  $E_A(\cdot)$ .

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Криво Стефановичу Самойленко за постоянное внимание к работе, Виктору Семеновичу Шульману за интересное введение в круг вопросов, касающихся содержания последнего параграфа диссертации.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Беспалов Ю.Н., Самойленко Ю.С. Алгебраические операторы и пары самосопряженных операторов, связанных полиномиальным соотношением // Функцион. анализ и его прил. - 1991. - 25, вып. 4. - С. 72-74.
2. Беспалов Ю.Н. О самосопряженных представлениях алгебр Сильванна // Укр. мат. журн. - 1991. - 43, № II. - С. 1567-1574.



467734

3. Беспалов Ю.Н. Наборы операторов, связанных соотношениями // Укр. мат. журн. - 1992. - 44, № 3. - С. 309-317.
4. Беспалов Ю.Н., Самойленко Ю.С., Шульман В.С. О наборах операторов, связанных полудлинейными соотношениями // Применение методов функционального анализа в математической физике. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. - С. 28-51.
5. Беспалов Ю.Н. Представления некоторых инволютивных алгебр // XV всеукр. шк. по теории операторов в функцион. пространствах, Ульяновск, 5-12 сент. 1990 г.: Тез. докл. - Ульяновск, 1990. - С. 37.
6. Беспалов Ю.Н. О  $\ast$ -представлениях эллиптических алгебр Склианина // XVI всеукр. шк. по теории операторов в функцион. пространствах, Нижний Новгород, 13-20 сент. 1991 г.: Тез. докл. - Нижний Новгород, 1991. - С. 21.
7. Беспалов Ю.Н. Метод индуцированных представлений для инволютивных алгебр // IX коллоквиум "Современный групповой анализ. Методы и приложения", Нижний Новгород, 24-30 июня 1992 г.: Тез. докл. - Нижний Новгород, 1992. - С. 11.

---

Педл. в печ. 21.08.92. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс. печать.  
 Усл. печ. л. 1,16. Усл. кр.-этт. 1,16. Уч.-изд. л. 1,0.  
 Тираж 100 экз. Зак. 234 Бесплатно.

---

Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН Украины  
 252601 Киев 4, ГСП, ул. Рейна, 3