АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

КЛАДИНОГА Віталій Сергійович

УДК 534.539.3

ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ
В ЗАДАЧАХ ПРО ВЗАЄМОДІЮ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА З НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНОЮ ОБОЛОНКОЮ ОБЕРТАННЯ

01.02.01 - теоретична механіка

Автореферат

дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико - математичних наук

Київ - 1992

Роботу викона[illegible]

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук
Троценко В. А.

Офіційні опоненти : член-кореспондент АН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор Шульга М. О.,

кандидат фізико-математичних наук,
доцент Мукоїд А. П.

Провідна організація : Київський університет
імені Тараса Шевченка

Захист відбудеться 17 листопада 1992 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 при інституті математики АН України за адресою:
252601, МСП, Київ 4, вул. Рєпіна, 3

З дисертацією можна ознайомитись
в бібліотеці інституту

Автореферат розіслано 16 жовтня 1992 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ЛУЧКА А. Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Розширення сфери застосування в різних галузях техніки та будівництва надувних конструкцій, що являють собою поєднання тонких високоеластичних оболонок з твердими тілами, викликає необхідність вивчення їх різноманітних фізико-механічних властивостей.

В цьому зв'язку одними з найбільш важливих є такі дві проблеми: 1) розробка ефективних методів визначення геометричних та фізичних характеристик врівноваженого стану подібних конструкцій, в якому вони можуть перебувати під впливом різноманітних силових факторів; 2) дослідження власних коливань розглядуваних систем відносно деякого положення рівноваги.

Основи загальної теорії оболонок із еластомірів викладені в працях С.А.Алексєєва, Л.І.Балабуха і В.І.Усюкіна, В.Л.Бідермана, А.С.Григор'єва, А.Гріна і Дж. Адкінса, О.М.Гузя, К.Ф.Черних. Багато важливих результатів, що стосуються вивчення великих деформацій таких оболонок, одержано на основі використання наближених методів чисельного аналізу. До них, в першу чергу, слід віднести методи чисельного інтегрування нелінійних крайових задач (А.С.Григор'єв, А.Грін, С.А.Кабріц, А.В.Коровайцев, А.М.Локощенко, В.Е.Магула, Ю.І.Солодилов, В.Ф.Терентьєв, В.І.Усюкін, Фен, К.Ф.Черних, С.А.Шестериков, Янг та інші), методи з використанням скінченноелементної апроксимації неперервних полів (В.Н.Кислоокий, Дж. Оден). Широке застосування при розв'язуванні практичних задач одержав наближений метод, запропонований Л.І.Балабухом і В.І.Усюкіним.Більш докладний огляд робіт, присвячених розв'язанню задач статики м'яких оболонок із застосуванням згаданих методів, міститься в працях К.Г.Бромштейна, А.С.Григор'єва, Ю.Н.Коробанова.

Розв'язанню нелінійних задач динаміки м'яких оболонок на основі дискретизації вихідних рівнянь присвячені праці А.Н.Гільманова, Б.В.Гуліна, Ж.М.Сахабутдінова, В.В.Ріделя.

В переважній більшості робіт згаданих авторів розглядаються оболонки, що не містять інорідних включень. Лише декілька робіт присвячені вивченню осесиметричних деформацій плоских кільцевидних мембран з жорстким концентричним включенням під дією прикладеної в центрі вставки поперечної сили за відсутності будь-якого тиску на оболонку (J.P.Fulton, J.G.Simmonds та T.E.Tezduyar, L.Graux).

С.А.Алексєєв та Е.Шверін розглянули подібну задачу в фізично лінійній постановці при суттєвих обмеженнях на величини деформацій.

Таким чином, задача про визначення положення рівноваги системи "тіло-оболонка" в фізично та геометрично нелінійній постановці під дією слідкуючого навантаження типу гідростатичного тиску є новою і практично не вивченою. Крім того, серед досліджень, що стосуються статики м'яких високоеластичних оболонок, як зі вставками, так і без них, спостерігається широке застосування чисельних методів математичної фізики, характерними рисами яких є, з одного боку, велика універсальність, а з іншого - необхідність залучення ЕОМ з високою швидкодією та великою оперативною пам'яттю. Тому виникає потреба в розробці більш простих і економічних методів розв'язання відповідних крайових задач. До таких, зокрема, належить варіаційний метод, що грунтується на принципі стаціонарності потенціальної енергії механічної системи, застосований В.А.Троценком до циліндричних та замкнених в полюсі куполоподібних оболонок обертання. Цей метод відносно просто реалізується на обчислювальних машинах і дозволяє отримувати розв'язки з високою точністю. Окрім цього, він дає можливість автоматично задовольняти досить складні натуральні граничні умови. В зв'язку з цим важливим завданням є подальший розвиток цього методу стосовно незамкнених в полюсі оболонок обертання, що мають абсолютно жорсткі вставки.

З числа надрукованих робіт, що стосуються власних коливань попередньо деформованих оболонок при скінченних початкових деформаціях, існують лише поодинокі праці, в яких деформована оболонка знаходиться в неоднорідному напруженому стані. В переважній більшості робіт розглянуто випадок однорідно напруженої оболонки (Ж.С.Єржанов і Н.К.Єгоров, В.А.Івович, І.Ф.Киричок, В.К.Стишина, А.Я.Ционський). Таке припущення значно спрощує визначення динамічних характеристик оболонки і в ряді випадків дозволяє отримувати розв'язки в замкненому вигляді. Розв'язанню деяких динамічних задач неоднорідно деформованих м'яких оболонок присвячена робота Дж.Леонарда. При цьому для розв'язання нелінійних задач статики застосовуються методи збурень, а розв'язки лінеаризованих рівнянь динаміки знаходяться чисельними методами. В працях В.А.Троценка розроблено варіаційний метод для дослідження вільних коливань нелінійно-пружних оболонок обертання, що перебувають в неоднорідному напруженому стані, як з урахуванням взаємодії з рідиною, так і без нього. Автору невідомі публікації, в яких розглядаються вільні коливання неоднорідно деформованих оболонок, що взаємодіють з приєднаним абсолютно твердим тілом.

В зв'язку з вищенаведеним, задачі про динамічну поведінку механічної системи "абсолютно тверде тіло - попередньо деформована високоеластична оболонка" відносяться до числа не досліджених з точки зору впливу геометричних та інерційних параметрів тіла, а також пружних властивостей матеріалу оболонки на динамічні характеристики системи, а отже становлять певний науковий та практичний інтерес.

Мета роботи полягає в розробці ефективних методів дослідження статичної та динамічної взаємодії абсолютно твердого дисковидного тіла з приєднаною до його бічної поверхні високоеластичною оболонкою обертання, включаючи :

- постановку нелінійної задачі статики системи " тіло - м'яка оболонка обертання" та розробку варіаційного методу її розв'язання;
- побудову математичної моделі статичної взаємодії тіла з попередньо напруженою осесиметричним чином оболонкою при малих збуреннях системи;
- дослідження спільних коливань попередньо деформованої оболонки з жорсткою вставкою;
- програмну реалізацію розроблених алгоритмів та чисельне розв'язання конкретних задач і встановлення на цій основі меж застосування інших наближених способів їх розв'язання, а також виявлення основних закономірностей впливу геометричних та фізичних параметрів конструкції на її статичні та динамічні характеристики.

Наукова новизна дисертаційної роботи полягає в тому, що в ній вперше отримані такі результати:

1. Розроблено наближений метод розв'язання нелінійної задачі статики для тонкої високоеластичної оболонки обертання та концентрично приєднаного до неї абсолютно твердого дисковидного тіла, що знаходяться під впливом слідкуючого осесиметричного навантаження.

2. Побудовано математичну модель статичної та динамічної взаємодії тіла з прикріпленою до нього попередньо напруженою осесиметричним чином безмоментною оболонкою при малих збуреннях системи.

3. На основі енергетичного підходу запропоновано алгоритм для визначення власних частот і форм спільних коливань абсолютно твердого тіла з неоднорідно деформованою рівномірним тиском оболонкою.

4. Наведено спрощені фізично лінійні постановки розглядуваних задач для полого деформованих кільцевидних мембран та розроблено методи їх дослідження.

Розрахункові формули виведені в загальному вигляді для всіх нестисливих матеріалів оболонки безвідносно до форми пружного потенціалу та початкової конфігурації меридіана серединної поверхні. Чисельні результати одержані для початково плоских кільцевидних мембран, виготовлених з неогуківського матеріалу та матеріалу Муні. Вивчена залежність певних статичних та динамічних характеристик системи від деяких її параметрів. Встановлені межі застосування спрощених моделей та наближених методів їх дослідження.

Достовірність одержаних в роботі **результатів забезпечується:**

- використанням незалежних підходів для виведення основних визначальних співвідношень;

- зведенням розглядуваних задач до більш простих, що допускають ефективне чисельне дослідження з допомогою добре опробованих алгоритмів та програм;

а також **підтверджується:**

- практичною збіжністю запропонованих алгоритмів та контрольованою точністю всіх виконаних на ЕОМ обчислень;

- перевіркою точності задоволення побудованих розв'язків вихідним рівнянням і граничним умовам;

- порівнянням одержаних результатів з даними інших робіт;

- кількісним збігом розв'язків ряду задач в межах точної та спрощеної постановок;

- узгодженістю результатів між собою та несуперечливістю встановлених закономірностей якісного характеру фізичним міркуванням і теоретично обгрунтованим фактам.

Практична цінність роботи полягає в побудові математичних моделей і розробці ефективних методів дослідження взаємодіючих між собою та зовнішнім середовищем абсолютно жорстких і високоеластичних елементів тонкостінних конструкцій, що набули широкого використання в інженерній практиці. При цьому безпосереднє практичне значення мають: визначення форм рівноваги та напружено-деформованого стану високоеластичних оболонок обертання з жорсткими включеннями під дією слідкуючого навантаження гідростатичного типу для розрахунку міцності елементів конструкції; обчислення власних частот і форм коливань попередньо напружених оболонок з вставкою для дослідження впливу збурюючих зовнішніх факторів, запобіганню резонансним явищам та для оцінки стійкості положень рівноваги. Значна частина проведених в роботі прикладних досліджень виконана в межах госпдоговірних тем.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідались і обговорювались на семінарах відділу динаміки та стійкості багатовимірних систем Інституту математики АН України (1990 - 1992 рр.) ; XVII нуковій конференції молодих вчених Інституту механіки АН України (с.Кийлів, 1992 р.); спільному семінарі з проблем механіки Київського університету ім. Тараса Шевченка та Інституту гідромеханіки АН України (1992 р.); міжнародній науковій конференції, присвяченій пам'яті академіка М.П. Кравчука (м.Київ, 1992 р.); семінарі відділу електропружності Інституту механіки АН України (1992 р.).

Публікації. За основними результатами досліджень, викладених в дисертації, надруковано вісім наукових робіт [1-8].

Обсяг та структура роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох глав, висновків та списку використаної літератури. Вона викладена на 168 сторінках, включаючи 14 рисунків і 16 таблиць. Бібліографічний список нараховує 116 назв робіт.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі подано характеристику актуальності проблеми, що склала предмет досліджень, зроблено огляд робіт, а також аналіз сучасного стану проблеми та наявних досягнень. На цій основі визначено мету дисертаційної роботи, сформульовано основні наукові положення, що виносяться на захист, а також дано стислу анотацію всіх глав дисертації.

Глава I присвячена побудові математичних моделей статичної взаємодії абсолютно твердого тіла з гіперпружною оболонкою обертання.

Розглядається механічна система, що складається з абсолютно твердого круглого диска радіуса a та прикріпленої до його бічної поверхні тонкої оболонки обертання, виготовленої з гіперпружного нестисливого матеріалу. Зовнішній контур оболонки з радіусом R_0 вважається нерухомо закріпленим. В умовах геометричної та фізичної нелінійності наведено постановку крайової задачі статики механічної системи, що перебуває під дією гідростатичного тиску Q та прикладеної в центрі мас диска поперечної сили P (рис.I,б). Вивчення поведінки конструкції під впливом такого типу слідкуючого осесиметричного навантаження пов'язане, в першу чергу, з визначенням форми і двовісного напруженого стану високоеластичної оболонки. Для цього необхідно розв'язати два рівняння статики безмоментної тонкої оболонки

$$\frac{d}{ds}(rT_1) = T_2 \frac{dr}{ds}, \quad k_1 T_1 + k_2 T_2 = Q, \quad Q=C+Dz, \tag{1}$$

з такими граничними умовами:

$$\lambda_2=1, \ z=0 \ \text{при} \ s=s_1; \quad \lambda_2=1, \ 2\pi a T_1 \sin\alpha = F+\pi a^2 Q \ \text{при} \ s=s_0. \tag{2}$$

Тут α - кут між нормаллю до деформованої серединної поверхні і віссю симетрії системи; z, r - віддаль від деякої точки М серединної поверхні оболонки у напруженому стані відповідно до площини закріпленого контура та осі обертання (рис.I,б); s - довжина дуги меридіана недеформованої серединної поверхні, s_0 та s_1 - значення s відповідно на внутрішньому та зовнішньому контурах (рис.I,а). Зусилля T_1, T_2 в напруженій оболонці пов'язані з головними ступенями видовжень λ_1, λ_2, λ_3 через пружний потенціал W матеріалу мембрани формулою

$$T_k=2h_0\lambda_3(\lambda_k^2-\lambda_3^2)\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_{3-k}^2\frac{\partial W}{\partial I_2}\right), \quad k=1,2, \tag{3}$$

$$I_1=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2, \quad I_2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 .$$

В свою чергу, кратності видовжень та кривизни k_1, k_2 виражаються через функції $r(s)$ і $z(s)$, а також їх перші та другі похідні. Останнє співвідношення в (2) випливає з умов рівноваги диска під дією осьової сили, гідростатичного тиску та сил пружної деформації оболонки.

З позицій теорії малих пружних деформацій, накладених на великі, будується математична модель малих, в загальному випадку неосесиметричних, відхилень системи від осесиметричного положення рівноваги; здійснюється постановка відповідних крайових задач в інтегро-диференційному та варіаційному формулюваннях та доводиться їх еквівалентність. В умовах взаємодії з важкою рідиною виводяться лінеаризовані рівняння статики високоеластичних оболонок обертання, які у випадку невагомої рідини чи газу збігаються з лінеаризованими рівняннями рівноваги оболонок, попередньо деформованих рівномірним тиском. Отримані рівняння являють собою систему трьох лінійних диференційних рівнянь в частинних похідних другого порядку зі змінними кое-

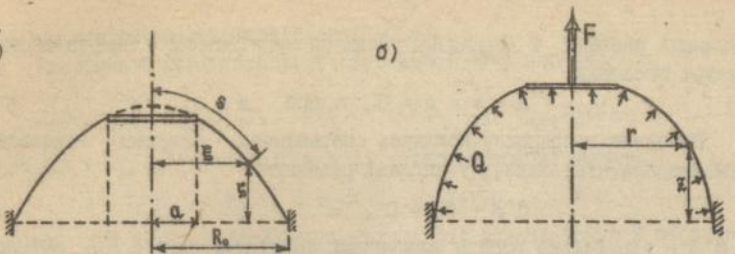

Рис.1

фіцієнтами, що є функціями розв'язків нелінійної осесиметричної задачі статики (1)-(2) та їх похідних по s до третього порядку включно. Грунтуючись на основних положеннях статики абсолютно твердого тіла, виведено шість рівнянь рівноваги вставки при малих збуреннях системи

$$
\begin{aligned}
&\oint[(\Delta T_1\cos\alpha-T_1\theta_1\sin\alpha)\cos\eta-(\Delta S+T_1\omega_1)\sin\eta]dL+\pi a^2Q_0\varphi_2=-\Delta F_1,\\
&\oint[(\Delta T_1\cos\alpha-T_1\theta_1\sin\alpha)\sin\eta+(\Delta S+T_1\omega_1)\cos\eta]dL-\pi a^2Q_0\varphi_1=-\Delta F_1,\\
&\oint(\Delta T_1\sin\alpha+T_1\theta_1\cos\alpha)dL-D\pi a^2u_{03}=\Delta F_3,\\
&a\oint(\Delta T_1\sin\alpha+T_1\theta_1\cos\alpha)\sin\eta dL+\pi a^2\varphi_1(T_{10}\cos\alpha_0-\tfrac{1}{4}Da^2)=\Delta M_1,\\
&a\oint(\Delta T_1\sin\alpha+T_1\theta_1\cos\alpha)\cos\eta dL-\pi a^2\varphi_2(T_{10}\cos\alpha_0-\tfrac{1}{4}Da^2)=\Delta M_2,\\
&a\oint(\Delta S+T_1\omega_1)dL-2\pi a^2\varphi_3T_{10}\cos\alpha_0=-\Delta M_3\ .
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Тут ΔT_1, ΔT_2, ΔS; ω_1, θ_1- відповідно малі додаткові зусилля та параметри деформацій серединної поверхні оболонки; ΔF_k і ΔM_k (k=1,2,3) - компоненти додаткових сили та моменту відповідно, прикладених в центрі мас диска; u_{0k}, φ_k (k=1,2,3) - складові векторів поступального переміщення диска та кута його малого повороту; η - полярний кут; L- внутрішній контур оболонки; через T_{10}, Q_0 та α_0 позначено відповідні величини на L.

Крім, того компоненти переміщень точок серединної поверхні оболонки u, v, w пов'язані на внутрішньому її контурі з шістьма узагальненими координатами диска такими співвідношеннями:

$$
\begin{aligned}
&u=(u_{01}\cos\alpha+a\varphi_2\sin\alpha)\cos\eta+(u_{02}\cos\alpha-a\varphi_1\sin\alpha)\sin\eta-u_{03}\sin\alpha\ ,\\
&v=-u_{01}\sin\eta+u_{02}\cos\eta+a\varphi_3\ ,\\
&w=(u_{01}\sin\alpha-a\varphi_2\cos\alpha)\cos\eta+(u_{02}\sin\alpha+a\varphi_1\cos\alpha)\sin\eta+u_{03}\cos\alpha\ .
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Останньою ланкою в постановці крайової задачі статики при малих збуреннях системи є граничні умови на зовнішньому (закріпленому) контурі оболонки

$$u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad s = s_1 . \tag{6}$$

Виходячи з принципу можливих переміщень, одержано варіаційне формулювання цієї задачі у вигляді рівняння

$$\delta' A - \delta\Pi = 0 , \tag{7}$$

де $\delta' A$ - віртуальна робота додаткових зовнішніх сил, а Π - потенціальна енергія механічної системи, що визначається енергією пружних деформацій оболонки та роботою гідростатичного тиску. Π є квадратичним функціоналом від узагальнених координат диска та параметрів додаткового напружено-деформованого стану, які, в свою чергу, залежать від розв'язків нелінійної задачі статики (1)-(2) та їх перших двох похідних. З рівняння (7), враховуючи умови (5) та (6), традиційними методами варіаційного числення отримано рівняння рівноваги оболонки та вставки при малих відхиленнях системи від осесиметричного стану рівноваги. Цим показано еквівалентність сформульованої крайової задачі варіаційному рівнянню (7) при виконанні умов (5) і (6). Однак варіаційний підхід має низку істотних переваг. По-перше, рівняння (7) вже не містить третіх похідних від розв'зків задачі (1)-(2), внаслідок чого суттєво послаблюються вимоги до якості цих розв'язків. По-друге, при розв'язуванні задачі варіаційним методом, натуральні граничні умови, а саме такими для варіаційного співвідношення (7) є рівняння рівноваги диска, виконуються автоматично; головні ж граничні умови (6) та умови спряження (5) досить просто задовольняються спеціальним вибором базисних функцій та форм представлення шуканих величин у вигляді розкладів по цих функціях.

У главі II розробляється варіаційний метод наближеного розв'язання нелінійної задачі статики (1)-(2). Використовуючи принцип стаціонарності потенціальної енергії механічної системи, її зведено до еквівалентної варіаційної задачі для функціоналу

$$\mathcal{E} = \pi \int_{s_0}^{1} \left(W \xi + Q r^2 \frac{dz}{ds} \right) ds - F z(s_0) . \tag{8}$$

на класі функцій, що задовольняють умови

$$r(s_0) = a, \quad r(1) = R_0, \quad z(1) = 0 . \tag{9}$$

Всі величини в (8) та (9) представлені в обезрозміреному вигляді, причому лінійні розміри віднесені до s_1.

Екстремалі функціоналу (8) розшукуються у вигляді

$$z(s) = \sum_{k=1}^{q} x_k u_k(s), \quad r(s) = \xi(s) + \sum_{k=1}^{q} x_{k+q} v_k(s), \tag{10}$$

де $u_k(s)$ і $v_k(s)$ – базисні функції, підпорядковані умовам

$$v_k(s_0) = v_k(1) = u_k(1), \qquad k=\overline{1,q} . \tag{11}$$

В (8) і (10) через ξ позначено віддаль від деякої точки M серединної поверхні оболонки в початковому стані до осі обертання (рис.1, а). Для визначення коефіцієнтів x_k з умови стаціонарності функціоналу (8) маємо алгебраїчну систему нелінійних рівнянь

$$g(x)=0, \quad x=\| x_1, x_2, \ldots, x_{2q} \|, \quad g=\left\| \frac{\partial \mathcal{E}}{\pi \partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{E}}{\pi \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{E}}{\pi \partial x_{2q}} \right\| . \tag{12}$$

Її наближений розв'язок знаходиться методом Ньютона за схемою

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - y^{(n)} , \quad H(x^{(n)})\, y^{(n)} = g(x^{(n)}) . \tag{13}$$

Тут n – номер ітерації, H(x) – матриця Якобі вектора-функції g відносно змінних $x_1, x_2, \ldots x_{2q}$.

Таким чином, задача визначення скінченних осесиметричних деформацій високоеластичної оболонки обертання з жорстким концентричним включенням зводиться, в основному, до обчислення квадратур з наступним розв'язанням систем лінійних рівнянь на кожному кроці ітераційного процесу Ньютона. Такий алгоритм може виявитися ефективним лише за умови вдалого вибору координатних функцій, які давали б можливість отримувати високоточні розв'язки при невеликій кількості наближень. Раціональний вибір координатних систем тісно переплітається з визначенням властивостей шуканих розв'язків, що, в свою чергу, пов'язано з наявністю особливих точок у розв'язуваних рівнянь. Для рівнянь статики оболонки (1) особливою є точка s=o. Однак безпосередній аналіз цих рівнянь є досить складним завданням. Тому для визначення швидкості росту розв'язків нелінійної задачі при s→o досліджується структура фундаментальних розв'язків лінеаризованих рівнянь статики відносно деякого врівноваженого стану для замкненої в полюсі куполоподібної оболонки. Якщо при цьому обмежитись оболонками, твірні яких задаються формулою

$$\xi(s) = s + \xi_1 s^3 + \xi_2 s^5 + \ldots , \tag{14}$$

(плоска мембрана; сферичний сегмент; еліпсоїд, гіперболоїд та параболоїд обертання і т.і.), можна одержати такі представлення для функцій Δr та Δz, що відповідають малим відхиленням попередньо деформованої оболонки в радіальному та вертикальному напрямках:

$$\begin{aligned} \Delta r &= sf_1(s) + sf_2(s)\ln s + sf_3(s)\ln^2 s + c/s\,, \\ \Delta z &= f_4(s) + f_5(s)\ln s + f_6(s)\ln^2 s\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Через $f_k(s)$ позначені ряди по парних степенях s з вільними членами. Оскільки лінеаризована задача породжена нелінійною, то властивості її розв'язків максимально наближені до вихідної нелінійної задачі, що дозволяє використовувати асимптотичні представлення фундаментальних розв'язків для побудови раціональних систем базисних функцій. Підпорядковуючи розклади (15) граничним умовам (9), можна одержати такий координатний базис:

$$\begin{aligned} &u_k(s)=(s^2-1)s^{2k-2}\ \ (k=\overline{1,q_1}), \quad u_{q_1+k}(s)=s^{2k-2}\ln^2 s\ \ (k=\overline{1,q_2}), \\ &u_{q_1+q_2+k}(s)=s^{2k-2}\ln s\ \ (k=\overline{1,q_3}), \quad v_{q_1}(s)=s-\frac{1}{s}+\frac{1-s_0^2}{s_0^2\ln s_0}\, s\ln s\,, \\ &v_{q_1+q_2}(s)= s\ln s\ln\frac{s}{s_0}\,, \qquad v_q(s)=s\Big(s^2-1+\frac{1-s_0^2}{\ln s_0}\ln s\Big)\,, \\ &v_k(s)=s(s^2-s_0^2)u_k(s) \quad (k=\overline{1,q_1-1},\ \overline{q_1+1,q_1+q_2-1},\ \overline{q_1+q_2+1,q}). \end{aligned} \tag{16}$$

Тут q_1, q_2, q_3 – цілі невід'ємні числа такі, що $q_1+q_2+q_3=q$.

З практичних розрахунків можна зробити висновок, що врахування сингулярностей в розкладах (15) та пов'язаний з ним вибір базисних функцій у вигляді (16) є суттєвим лише при досить малих значеннях радіуса жорсткої вставки. При середніх розмірах диска особливості розв'язків в нулі практично не проявляються, і шукані розв'язки добре апроксимуються регулярними частинами представлень (15), поповненими парними степенями s в розкладі r і непарними – в розкладі z. Отож за базисні можна взяти такі функції:

$$u_k(s)=s^k-1\,, \quad v_k(s)=(s-s_0)u_k(s) \quad (k=\overline{1,q})\,. \tag{17}$$

З допомогою побудованого алгоритма проведено розрахунки геометричних та фізичних характеристик деформованих гідростатичним тиском і зосередженою силою оболонок з включенням, які в недеформованому стані мають форму кільцевидної мембрани. Всі обчислення проводились для матеріалів оболонок, що описуються моделями Трелоара та Муні з пружним потенціалом $W=C_1(I_1-3)+C_2(I_2-3)$, де C_1, C_2 - фізичні константи. Для обчислення інтегралів використовувались квадратурні формули Гауса. В результаті відповідного аналізу зроблено висновок, що для того, аби запобігти впливу похибок чисельного інтегрування на загальну точність обчислювального процесу, слід взяти 20 вузлів при використанні регулярного базиса (17) і 32 вузли - для сингулярного базиса (16). На основі накопиченого досвіду розв'язання конкретних задач сформульовано основні принципи вибору початкового наближення в ітераційному процесі Ньютона. Побудовано розподіл внутрішніх зусиль і кратностей видовжень вздовж меридіана деформованої мембрани для декількох значень радіуса вставки. Зазначено, що при малих відносних розмірах вставки в околі внутрішнього контура спостерігається ефект примежового шару, коли основні параметри напружено-деформованого стану зазнають стрімких змін. В той же час при однакових навантаженнях розмір вставки майже не впливає на значення внутрішніх зусиль і ступенів видовжень поблизу закріпленого контура. Встановлено, що при визначенні форми деформованої оболонки всі вставки, радіуси яких не перевищують 1% від зовнішнього радіуса мембрани, можуть вважатись точковими включеннями. Отримувана при цьому похибка не перевищує 0,1%.

У главі III здійснено постановку та розв'язання задачі про спільні коливання абсолютно твердого тіла в формі круглого диска та прикріпленої до його бічної поверхні високоеластичної оболонки обертання, попередньо деформованої рівномірним тиском довільної інтенсивності. Спираючись на принцип Даламбера та результати першої глави, виписано рівняння малих коливань системи "тіло-оболонка" відносно деякого осесиметричного положення рівноваги, а з них одержано крайові задачі на власні значення для кожного класу коливань (чисто-зсувні, осесиметричні, неосесиметричні). Проаналізовано ускладнення, з якими доводиться стикатись при дослідженні власних коливань системи, безпосередньо користуючись рівняннями її руху, та обгрунтовано доцільність застосування енергетичного підходу. При цьому компоненти переміщень представляються у вигляді

$$u=\sum_{k=1}^{N} q_k u_k+\sum_{k=1}^{N_0} q_{3N+k} u_{N+k}; \qquad v=\sum_{k=1}^{N} q_{N+k} v_k+\sum_{k=1}^{N_0} q_{3N+k} v_{N+k};$$

$$W=\sum_{k=1}^{N} q_{2N+k}W_k+\sum_{k=1}^{N_o} q_{3N+k}W_{N+k}. \qquad (18)$$

Тут $q_k=q_k(t)$ - узагальнені координати механічної системи; u_k, v_k, w_k - спеціально вибрані базисні функції, що залежать лише від просторових координат; N_o- деяке заздалегідь відоме ціле невід'ємне число, що визначається кількістю накладених на систему геометричних в'язей, які не вдається задовольнити з допомогою одних тільки базисних функцій; N - довільне натуральне число. Воно визначається в процесі розв'язання задачі, виходячи з двох суперечливих умов: необхідності максимально точної апроксимації шуканих величин, для чого слід нарощувати кількість базисних функцій, з одного боку, а з іншого - потреби постійно обмежувати їх число, виходячи з обчислювальних особливостей ЕОМ.

Оскільки розклади (18) задовольняють головні граничні умови (6) та умови спряження (5) - які з точки зору аналітичної механіки є геометричними (голономними) в'язями, накладеними на систему, то її рівняннями динаміки є рівняння Лагранжа другого роду. Підстановкою в них $q(t)=x\ \exp(ipt)$ (тут i - уявна одиниця, p - частота власних коливань, x - власний вектор) задача зводиться до алгебраїчної проблеми власних значень з симетричними матрицями

$$(A - p^2 B)\, x = 0\,, \qquad (19)$$

$$A = \left\| \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_k \partial q_j} \right\|, \quad B = \left\| \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_k \partial \dot q_j} \right\| \quad (k,j=\overline{1,3N+N_o})\,.$$

Для кожного із згадуваних типів коливань спрощуються умови спряження, вирази для потенціальної та кінетичної енергій, виписується конкретний вигляд розкладів (18) та елементів матриць A і B, а також здійснюється програмна реалізація розроблених алгоритмів для оболонок, які в недеформованому стані мають вигляд плоских кільцевидних мембран. При визначенні необхідних характеристик попереднього напружено-деформованого стану застосовується варіаційний метод, описаний в главі II. Досліджено вплив різних джерел похибок обчислювального характеру на швидкість збіжності обчислювального процесу і точність одержуваних результатів, а також зроблено якісний аналіз поведінки власних частот і форм коливань при зміні деяких параметрів конструкції. Виявилось, що із збільшенням маси вставки власні частоти, зменшуючись, швидко прямують до деяких своїх асимптотичних значень. Останні можна знайти, розв'язуючи задачу про власні коливання тієї ж системи з нерухомою вставкою. Звідси теоретично виводяться нерівності, що пов'язують власні частоти з їх асимптотичними значеннями, і слугують одним із можливих способів контролю достовірності чисельних результатів.

В главі IV за рахунок відмови від фізичної нелінійності (внутрішні зусилля в оболонці приймаються лінійно залежними від деформацій) при збереженні геометричної нелінійності (повороти нормалей до серединної поверхні при статичних деформаціях вважаються немалими) здійснюється спрощення визначальних співвідношень на випадок, коли оболонка обертання має вигляд плоскої кільцевидної мембрани.

Для визначення геометричних та фізичних характеристик полого деформованої оболонки отримана нелінійна крайова задача в термінах функції напружень і прогинів. Для її розв'язання застосовується метод степеневих рядів. На відміну від опублікованих результатів розв'язання подібних задач в деяких частинних випадках осесиметричного навантаження знайдено рекурентні співвідношення, що дозволяють обчислити будь-який коефіцієнт розвинень шуканих величин в ряди, якщо відомі перші два коефіцієнти. Останні знаходяться методом послідовних наближень із розв'язку двох трансцендентних рівнянь.

Як і у випадку довільних попередніх деформацій та переміщень системи побудовано математичну модель статичної взаємодії абсолютно твердого диска з полого деформованою оболонкою під впливом малого додаткового навантаження. Наводяться інтегро-диференційне та варіаційне формулювання задачі в термінах функції напружень і нормального переміщення. Дається геометричне та механічне тлумачення граничних умов змішаної задачі теорії пологих оболонок у випадку абсолютно жорстких границь. Отримане варіаційне рівняння за формою повністю збігається з (7), проте як незалежні тут виступають варіації функції напружень та прогину. На підставі принципу Даламбера варіаційне рівняння статичних збурень використовується потім при дослідженні спільних коливань полого деформованої оболонки з жорсткою вставкою відносно осесиметричного положення рівноваги. В такий спосіб визначення власних частот і форм коливань зводиться до відшукання стаціонарних значень деякого функціоналу $J(\Phi,w)$ від додаткового поперечного зміщення w точок серединної поверхні та функції напружень Ф. Для розв'язання останньої задачі використовується метод Рітца. В результаті отримано такі системи лінійних рівнянь:

$$A x - B y = p^2 C x , \quad B^T x + H y = 0 . \tag{20}$$

Тут A,B,C,H - матриці, що функціонально залежать від базисних функцій та деяких параметрів полого деформованої оболонки; x та y - вектори коефіцієнтів розкладів Рітца нормального переміщення та функції напружень відповідно; p - частота власних коливань. Задача (20) може бути зведена до послідовного розв'язання матричного рівняння XH=B відносно матриці X, що на практиці означає розв'язання системи лінійних рівнянь з кількома правими частинами, та алгебраїчної проблеми власних значень $(A + X B^T) x = p^2 C x$ з симетричними матрицями. Остання задача подібна до (19), однак має меншу розмірність.

Ефективність запропонованих підходів та розроблених на їх основі формульних схем ілюструється численними прикладами комп'ютерних розрахунків. Шляхом зіставлення результатів, одержаних на основі точної та спрощеної моделей, встановлено межі застосування теорії невеликих осесиметричних деформацій плоских високоеластичних мембран, що мають жорсткі включення, як при розрахунках статичного стану, так і при визначенні динамічних характеристик системи при її малих коливаннях відносно даного положення рівноваги.

Із характеру збіжності наближених значень частотного параметра зроблено висновок, що власна частота є максиміном для функціоналу $J(\Phi,w)$. Цей факт узгоджується з загальними результатами змішаних варіаційних задач для пружних систем, якщо вихідна задача формулюється в термінах функції напружень і переміщень оболонки.

В межах застосування спрощеної моделі дістали підтвердження всі факти, встановлені раніше з використанням загального підходу.

В **заключній частині** дисертації викладено основні результати, одержані в роботі, та сформульовано висновки, **зроблені на підставі** цих результатів.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

В цій роботі на основі нелінійної та лінеаризованої теорій тонких гіперпружних оболонок вперше досліджено задачі, пов'язані з статичною та динамічною взаємодією оболонок обертання та концентрично приєднаних до них абсолютно твердих дисковидних тіл.

При цьому одержано такі основні результати :

1. Для широкого класу м'яких нелінійно-пружних оболонок обертання з жорстким концентричним включенням розвинуто варіаційний метод визначення їх врівноваженої конфігурації та напружено-деформівного стану під дією гідростатичного тиску та прикладеної в центрі мас вставки поперечної сили.

2. Проведено якісне дослідження властивостей розв'язків лінеаризованих рівнянь статики і на цій основі побудовано дві системи координатних функцій (регулярну та сингулярну) в варіаційному методі, що дозволило отримувати рівномірну збіжність як для самих розв'язків, так і для їх перших двох похідних.

3. Дано інтегро-диференційне та варіаційне формулювання задачі статики системи "тіло - попередньо напружена оболонка" при малих відхиленнях від осесиметричного положення рівноваги, включаючи вивід лінеаризованих рівнянь статики для оболонки та абсолютно твердої вставки, умов спряження для додаткових переміщень на лінії з'єднання оболонки з тілом, а також виразу для потенціальної енергії системи.

4. На основі енергетичного підходу розроблено алгоритм для визначення власних частот і форм чисто-зсувних, осесиметричних та неосесиметричних коливань неоднорідно деформованої рівномірним тиском оболонки обертання з жорсткою вставкою. Запропонований метод дає можливість розраховувати нижчі частоти та форми власних коливань з високою точністю при відносно невеликій кількості наближень.

5. Запропоновано спрощені фізично лінійні постановки розглядуваних задач для полого деформованих осесиметричним чином кільцевидних мембран та розроблено методи їх дослідження.

6. Проведено чисельні розрахунки для оболонок, які в недеформованому стані мають вигляд плоских кільцевидних мембран і виготовлені з матеріалу Муні.

Одержані результати дозволяють зробити такі висновки :

1. При розрахунках статичних осесиметричних деформацій та переміщень оптимальним є регулярний базис, якщо відношення радіуса вставки до радіуса зовнішнього контура мембранного кільця не менше 0.2, і - сингулярний базис, якщо це відношення менше 0.2 .

2. При цьому розмір вставки суттєво впливає на напружено-деформований стан оболонки в околі її внутрішнього контура і майже не впливає в околі зовнішнього (закріпленого) контура.

3. Для кожного значення радіуса вставки і типу навантаження існує таке відношення матеріальних констант потенціалу Муні $(C_2/C_1)_*$, що при всіх $C_2/C_1<(C_2/C_1)_*$ існують нестійкі положення рівноваги, а при всіх $C_2/C_1>(C_2/C_1)_*$ всі стани рівноваги стійкі.

4. Залежність власних частот неоднорідно напруженої оболонки з вставкою від інтенсивності прикладеного статичного навантаження, а отже і від величини початкових деформацій розтягу, не носить монотонного характеру, що зумовлено взаємовпливом факторів зміни геометрії оболонки та її напруженого стану.

5. При збільшенні маси абсолютно твердої вставки від 0 до ∞ за умови незмінності інших параметрів системи її власні частоти падають, наближаючись до деяких своїх асимптотичних значень, а форми коливань мало відрізняються від певної граничної конфігурації. Перші два тони антисиметричних коливань і найнижчий тон чисто-зсувних та осесиметричних осциляцій при цьому вироджуються.

6. Із збільшенням числа n окружних хвиль при неосесиметричних коливаннях зростають і відповідні частоти. У випадку, коли n перевищує 1, вставка перебуває в стані спокою і не коливається.

7. Теорія пологих оболонок дає прийнятні з інженерної точки зору результати при розрахунках параметрів напружено-деформованого стану, коли максимальний прогин статично деформованої кільцевидної мембрани з вставкою не перевищує 10% від ширини мембранного кільця, а при визначенні самої форми рівноваги та власних частот коливань - 20 - 25 відсотків. Це свідчить про надзвичайно широкі межі застосування закону Гука при пружних деформаціях розтягу еластомірів.

Основний зміст дисертації викладено в таких публікаціях:

1. Кладинога В.С., Троценко В.А. Конечные перемещения гиперупругой кольцеобразной мембраны с жестким концентрическим включением под осесимметричной нагрузкой // Устойчивость движения твердых тел и деформируемых систем. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. - С.61-69.
2. Кладинога В.С. Малые деформации эластичной кольцеобразной мембраны с жесткой концентрической вставкой при гидростатической нагрузке // Моделирование динамических процесов взаимодействия в системах тел с жидкостью. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. - С.52-59.
3. Кладинога В.С. Малые крутильно-сдвиговые колебания осесимметрично деформированной кольцеобразной мембраны с жестким концентрическим

включением // Фильтрация и управление в механических системах. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991.- С.28-34.
4.Кладинога В.С.Собственные колебания полого деформированной мембраны с жесткой вставкой //Проблемы динамики и устойчивости многомерных систем. - Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991.- С.18-29.
5.Кладинога В.С.,Троценко В.А. Об уравнениях возмущенного состояния предварительно деформированной гибкой оболочки с присоединенным твердым телом // Докл. АН Украины. - 1992.- №5.- С.61-65.
6.Кладинора В.С.,Троценко В.А. Собственные колебания предварительно деформированной осесимметричной нагрузкой гиперупругой кольцеобразной мембраны с жестким диском. - Киев, 1992.- 48 с.- (Препр. / АН Украины. Ин-т маиематики; 92.19).
7.Кладинога В.С. Власні коливання високоеластичної попередньо напруженої оболонки з твердим тілом // Тр. XVII науч. конф. мол. ученых Ин-та механики АН Украины, Киев, 19-32 мая, 1992 г. Ч.2 / Ин-т механики АН Украины. - Киев, 1992.- С.83-87.- Укр.- Деп. в УкрИНТЭИ 7.07.92, № 1022.
8.Троценко В.А.,Кладинога В.С. Осесимметричное деформирование мягких оболочек вращения из высокоэластичных материалов с малой центральной вставкой // Мат. физика и нелинейн. механика.- 1992.- вып.17.- С.55-61.

Подп.в печ. 7.10.92.Формат 60х84/16.Бумага типографская. Офс.печать.Усл.печ.л. 1,16.Уч.-изд.л.0,9.Тираж 100 экз. Заказ 275.Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики АН Украины
252601 Киев-4,ГСП,ул.Ленина,3