КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕТСИТЕТ ИМЕНИ Т.Г.ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

ОНИЩУК ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ГРУППЫ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ СЛАБОМУ УСЛОВИЮ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ И РАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУПП

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Киев - 1992

Работа выполнена в отделе алгебры Института математики АН Украины.

Научные руководители - доктор физико-математических наук ЗАЙЦЕВ Д.И.

- кандидат физико-математических наук СЫСАК Я.П.

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук, профессор ЧАРИН В.С.

- кандидат физико-математических наук, доцент ПЕТРАВЧУК А.П.

Ведущая организация - Ужгородский государственный университет

Защита состоится "19" октября 1992 г. в 14 часов на заседании специализированного совета К 068.18.11 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Киевском государственном университете имени Т.Г.Шевченко по адресу: 252127, Киев-127, проспект академика Глушкова, д. 6, механико-математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Киевского государственного университета имени Т.Г. Шевченко.

Автореферат разослан "17" сентября 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета СУЩАНСКИЙ В.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Под условием конечности в теории групп понимается такое свойство, присущее всем конечным группам, что существует хотя бы одна бесконечная группа, которая этим свойством не обладает.

Хорошо известными условиями конечности являются: условие локальной конечности, условие минимальности и максимальности для подгрупп, условие локальной нормальности, условие конечности специального ранга группы и другие. Большой вклад в изучение групп, удовлетворяющих различным условиям конечности внесли работы А.И.Мальцева, С.Н.Черникова, В.С.Чарина, Д.И.Зайцева, Р.Бэра, Д.Робинсона и других.

Одним из класических условий конечности является условие минимальности для подгрупп. С.Н.Черниковым были изучены обширные классы групп с условием минимальности для всех подгрупп, всех абелевых подгрупп, всех неабелевых подгрупп, всех нормальных подгрупп, всех субнормальных подгрупп и других. Д.И.Зайцев изучал группы с условием минимальности для подгрупп фиксированной ступени нильпотентности и разрешимости.

Однако условие минимальности является весьма сильным ограничением, так как ни одна из непериодических групп, очевидно, ему не удовлетворяет. Д.И.Зайцевым были введены слабые условия минимальности и максимальности, которые являются обобщением обычных условий минимальности и максимальности. Им были описаны локально разрешимые группы со слабым условием минимальности для всех подгрупп, локально почти разрешимые группы со слабым условием минимальности для неабелевых подгрупп, а также установлена равносильность слабых условий минимальности и максимальности в классе локально почти разрешимых групп.

В этом аспекте естественно возникает вопрос об исследовании нильпотентных и разрешимых групп,а также их обобщений, со слабым условием минимальности для подгрупп, имеющих фиксированную ступень нильпотентности или, соответственно, разрешимости. Задача изучения строения таких групп была предложена автору Д.И.Зайцевым. Её решению и посвящена настоящая диссертация.

Ц е л ь р а б о т ы. Изучение строения обобщенных нильпотентных и разрешимых групп, удовлетворяющих слабому условию минимальности для нильпотентных и разрешимых подгрупп, имеющих одну и ту же ступень нильпотентности, соответственно, разрешимости.

М е т о д и к а и с с л е д о в а н и я. В работе применяются методы, конструкции и результаты теории групп и теории модулей,

Н а у ч н а я н о в и з н а. В диссертационной работе получены новые теоретические результаты, в частности:

- доказана нетривиальность центра локально нильпотентной группы, у которой централизатор конечно порожденной подгруппы является группой конечного ранга;

- доказана гиперцентральность локально нильпотентной группы с конечно порожденным централизатором элемента;

- изучены локально нильпотентные группы со слабым условием минимальности и максимальности для нильпотентных подгрупп фиксированной ступени нильпотентности;

- выяснено строение радикальных (в частности, разрешимых) групп со слабым условием минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть применены в теории бесконечных групп, а также быть использованы при чтении специальных курсов по алгебре.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на семинарах по теории групп Института математики АН Украины (Киев, 1988 - 1992 гг.), на Киевском алгебраическом семинаре (Киев, 1991 - 1992 гг.), на УI симпозиуме по теории колец, алгебр и модулей (Львов, 1990 г.), на Международной конференции по алгебре (Барнаул, 1991 г.), на на алгебраических семинарах Ужгородского и Днепропетровского университетов (Ужгород и Днепропетровск, 1992 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1 - 6] , список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из списка обозначений, введения, трех глав, разбитых на 13 параграфов, и списка использованной литературы. Общий объем составляет 74 страниц машинописного текста. Библиография содержит 46 наименований. Используется сквозная нумерация параграфов, нумерация утверждений ведется по номерам параграфов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении даны краткий обзор работ по теме диссертации, обоснование актуальности темы и формулируются основные результаты работы.

В первой главе диссертационной работы изучаются нильпотентные и локально нильпотентные группы, содержащие такую конечно порожденную подгруппу, централизатор которой имеет конечный ранг. В §I приводятся необходимые определения, а также известные теоремы, используемые при доказательстве результатов главы I. В §2 изучаются локально нильпотентные группы, в которых централизатор некоторой конечно порожденной подгруппы удовлетворяет заданному условию конечности. В случае нильпотентных групп имеет место следующее утверждение, дающее полное их описание.

Т е о р е м а 2.I. Для того чтобы нильпотентная группа была группой конечного ранга (конечно порожденной группой, черниковской группой, минимаксной группой) необходимо и достаточно, чтобы централизатор некоторой её конечно порожденной подгруппы был группой конечного ранга (конечно порожденной группой, черниковской группой, минимаксной группой).

Как показывает следующий пример, теорема 2.I для произвольных локально нильпотентных групп не верна.

Пусть $A = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n \rangle \times \cdots$ - бесконечная элементарная абелева p-группа и $B = \langle b \rangle$ - бесконечная циклическая группа. Определим полупрямое произведение $G = A \leftthreetimes B$ следующим образом: $a_1^b = a_1$, $a_n^b = a_{n-1}a_n$ при $n \geq 2$. Тогда G - локально нильпотентная группа бесконечного ранга, в то время как её централизатор $C_G(B) = \langle a_1 \rangle \times \langle b \rangle$ имеет конечный ранг. Заметим, что группа G имеет нетривиальный центр $Z(G) = \langle a_1 \rangle$. Оказывается, этот факт справедлив и в общем случае.

Т е о р е м а 2.2. Пусть G - локально нильпотентная группа и F - некоторая её конечно порожденная подгруппа. Если централизатор $C_G(F)$ имеет конечный ранг, то центр группы G отличен от единицы.

Легко видеть, что свойство иметь конечный ранг для централизатора конечно порожденной подгруппы F не сохраняется при переходе к произвольным фактор-группам группы G. Тем не менее справедлива

Т е о р е м а 2.3. Если локально нильпотентная группа G содержит такую конечно порожденную подгруппу F, что централизатор $C_G(F)$ имеет конечный ранг, то централизатор $C_{G/Z}(FZ/Z)$ образа подгруппы F в фактор-группе G/Z группы G по её центру Z также имеет конечный ранг.

В §3 первой главы с помощью ряда лемм, представляющих и самостоятельный интерес, доказывается, что аналогичное утверждение справедливо и для фактор-группы G/T группы G по её периодической части T.

Т е о р е м а 3.1. Пусть G - локально нильпотентная группа с периодической частью $T = t(G)$ и F - некоторая её конечно порожденная подгруппа. Если ранг централизатора $C_G(F)$ подгруппы F в группе G конечен, то ранг централизатора $C_{G/T}(FT/T)$ образа подгруппы F в фактор-группе G/T также конечен.

Эта теорема позволяет сводить изучение произвольных локально нильпотентных групп с централизатором конечного ранга к изучению таких локально нильпотентных групп без кручения.

В §4 изучаются локально нильпотентные группы без кручения с централизатором элемента конечного ранга. Здесь устанавливается, что ранги всех факторов верхнего центрального ряда группы G с натуральными номерами не превосходят числа r, если ранг централизатора $C_G(f)$ равен r. В случае, когда $F = \langle f \rangle$ - циклическая подгруппа группы G, то имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 4.I. Если в локально нильпотентной группе G без кручения централизатор $C_G(f)$ некоторого элемента f в группе G имеет конечный ранг, то она гиперцентральна.

Когда G - произвольная локально нильпотентная группа, то вопрос о гиперцентральности этой группы решается в §5 этой главы.

Т е о р е м а 5.I. Пусть G - локально нильпотентная группа и f - некоторый её элемент. Если централизатор $C_G(f)$ элемента f в группе G имеет конечный ранг и все силовские подгруппы периодической части $t(C_G(f))$ централизатора $C_G(f)$ конечны, то G - гиперцентральная группа.

Из теоремы 5.I вытекает следствие, описывающее строение произвольной локально нильпотентной группы с конечно порожденным централизатором элемента.

Следствие 5.I. Пусть G - локально нильпотентная группа и f - некоторый её элемент. Если централизатор $C_G(f)$ элемента f в группе G является конечно порожденной подгруппой, то группа G - гиперцентральна.

Д.И.Зайцев показал, что локально нильпотентные группы, содержащие подгруппы ступени нильпотентности c и удовлетворяющие условию минимальности для подгрупп ступени нильпотентности c являются черниковскими группами, т.е. почти абелевыми группами с условием минимальности для подгрупп. Им было показано, что локально нильпотентные группы со слабым условием минимальности или максимальности для абелевых подгрупп (нильпотентных групп ступени нильпотентности $c = 1$) минимаксны. Напомним, что группа минимакна, если она обладает конечным субнормальным рядом с факторами, удовлетворяющими условию минимальности или максимальности для подгрупп.

Во второй главе диссертации изучаются локально нильпотентные группы, содержащие нильпотентные подгруппы ступени нильпотентности c , $c > 1$, и удовлетворяющие слабому условию минимальности или максимальности для подгрупп ступени нильпотентности c . В §6 приводятся необходимые определения, а также известные утверждения, используемые при доказательстве результатов главы II. §7 этой главы посвящен изучению нильпотентных групп, содержащих подгруппы ступени нильпотентности c , $c > 0$ и удовлетворяющих слабому условию минимальности или максимальности для подгрупп ступени нильпотентности c .

Доказано, что нильпотентные группы с таким условием минимаксны. (теорема 7.I). Более того, если в нильпотентной группе G все подгруппы ступени нильпотентности c имеют конечные ранги, то и группа G также имеет конечный ранг.

В §8 доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 8.I. Пусть G - локально нильпотентная периодическая группа, содержащая подгруппу ступени нильпотентности c, $c > 0$.

а). Если группа G удовлетворяет слабому условию минимальности или максимальности для подгрупп ступени нильпотентности c, то она черниковская.

б). Если в группе G все подгруппы ступени нильпотентности c имеют конечные ранги, то группа G также имеет конечный ранг.

Эти утверждения представляют собой некоторый аналог известной теоремы А.И.Мальцева о локально нильпотентных группах, все абелевы подгруппы которых имеют конечный ранг, а также теоремы Д.И.Зайцева о локально нильпотентных группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности для абелевых подгрупп.

В §9 приводится пример, показывающий, что результаты теоремы 8.I не имеют места в случае, когда G - произвольная локально нильпотентная группа. Показано, что существует гиперцентральная группа G без кручения, обладающая для каждого натурального числа $c > 1$ нильпотентной подгруппой ступени нильпотентности c и имеющая бесконечный ранг, у которой каждая нильпотентная подгруппа ступени нильпотентности c является конечно порожденной группой ранга не выше $2c$.

В частности, группа G обладает следующими свойствами:

а) удовлутворяет слабому условию минимальности для подгрупп ступени нильпотентности c ;

б) удовлетворяет слабому условию максимальности для подгрупп ступени нильпотентности c (и даже условию максимальности для подгрупп ступени нильпотентности c);

в) все нильпотентные подгруппы ступени нильпотентности c группы G имеют конечные ранги (теорема 9.I).

В связи с результатами Д.И.Зайцева о группах, удовлетворяющих условию минимальности для разрешимых подгрупп ступени разрешимости S и с результатами главы II диссертации представляют интерес группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности для разрешимых подгрупп ступени разрешимости S . Изучению таких групп и посвящена глава III диссертации. В §10 приводятся необходимые определения, а также известные теоремы, используемые при доказательстве результатов главы III. В §II рассматриваются разрешимые группы со слабым условием минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп (неабелевых разрешимых подгрупп ступени разрешимости $S = 2$). В этом параграфе излагается один из основных результатов диссертации, который сформулируется следующим образом.

Т е о р е м а II.I. Пусть G - неабелева разрешимая группа. Если группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп, то она минимаксна.

Важную роль при доказательстве теоремы II.I играет следующее утверждение, представляющее и самостоятельный интерес.

Лемма 11.1. Пусть $G = AM$, где A - двуступенно нильпотентная нормальная подгруппа и M - максимальная абелева подгруппа группы G. Если каждая двуступенно разрешимая подгруппа группы G минимаксна, то группа G также минимаксна.

Из этой теоремы и результатов работы Н.С.Черникова вытекает следующее утверждение.

Следствие 11.1. Неабелева локально конечная группа G, удовлетворяющая слабому условию минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп, черниковская.

Группа G называется радикальной, если она обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп с локально нильпотентными факторами. Изучению таких групп со слабым условием минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп и посвящен §12 этой главы.

Теорема 12.1. Неабелева радикальная группа G, удовлетворяющая слабому условию минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп, минимаксна.

В связи с теоремой 12.1 естественно возникает следующий вопрос: будет ли локально разрешимая группа со слабым условием минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп минимаксной? Отрицательный ответ на этот вопрос дает пример локально полициклической группы без кручения бесконечного ранга, у которой все разрешимые подгруппы полициклические, построенный Ю.И.Мерзляковым.

В §13 (заключительном параграфе) приводится пример разрешимой группы ступени разрешимости 3, удовлетворяющей слабому условию минимальности для разрешимых подгрупп ступени 3 и не являющейся минимаксной группой.

Основные результаты, полученные в диссертации, опубликованы в следующих работах:

I. Зайцев Д.И., Онищук В.А. О локально нильпотентных группах с централизатором, удовлетворяющим условию конечности // Укр. мат. журн. - I99I. - 43, №7,8. - С. I084 -I087.
2. Зайцев Д.И., Онищук В.А. Локально нильпотентные группы с централизатором конечного ранга // УI симпозиум по теории колец, алгебр и модулей: Тез. сообщ. - Львов, I990. - С.55.
3. Онищук В.А. Локально нильпотентные группы с централизатором элемента конечного ранга // Международная конференция по алгебре: Тез. сообщ. - Барнаул, I99I. - С.77.
4. Онищук В.А., Сысак Я.П. Локально нильпотентные группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности или максимальности для подгрупп фиксированной ступени нильпотентности // Укр. мат. журн. - I992. - 44, №3. - С. 384 - 389.
5. Онищук В.А. О локально нильпотентных группах с централизатором конечного ранга // Укр. мат. журн. - (в печати).
6. Онищук В.А., Сысак Я.П. Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп // Укр. мат. журн. - (в печати).

ОНИЩУК ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ГРУППЫ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ СЛАБОМУ УСЛОВИЮ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ И РАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУПП

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 6.07.92. Формат 60х84/16.Бум.тип.№ 1.
Печ.офсет.Усл.печ.л.0,90.Усл.кр.от.1,13.Уч.изд.л.0,95.
Тираж 100. Заказ 256.
Машинно-офсетная лаборатория Львовского государственного университета, 290602, Львов, ул. Университетская, 1.