

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. І.ФРАНКА

На правах рукопису

КІСІЛЕВИЧ ВОЛОДИМИР ВАСИЛЬОВИЧ

УЛК 517.91

**ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ
ДЛЯ КВАЗИДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

01.01.02 - Диференціальні рівняння

А в т о р е ф е р а т
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів - 1992



00819653 (W)

Робота виконана на кафедрі вищої математики Львівського політехнічного інституту.

Науковий керівник - кандидат фізико-математичних наук, доцент Р.М.ТАШІЙ.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор Ю.В.ПОКОРНИЙ, кандидат фізико-математичних наук, доцент Ю.Д.ГОЛОВАТИЙ.

Ведуча організація - Інститут прикладних проблем механіки і математики АН України.

Захист відбудеться " 19 " листопада 1992 р. о 15³⁰ год. на засіданні спеціалізованої ради К 068.12.13 по присвоєнню вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук у Львівському державному університеті ім. І.Франка (290000, м.Львів, вул.Університетська, 1).

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Львівського держуніверситету (м.Львів, вул.Драгоманова, 5).

Автореферат розіслано " 17 " жовтня 1992 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради



ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Диференціальні рівняння з узагальненими коефіцієнтами виникають при створенні більш досконалих сучасних моделей фізичних явищ. Так, наприклад, дослідження вільних коливань балки з дискретно-неперервним розподілом параметрів приводить до розв'язування квазидиференціального рівняння четвертого порядку

$$(b_0(x)y''')' - (b_1(x)y')' + b_2(x)y - \lambda(-(a_1(x)y')' + a_2(x)y) = 0, \quad (*)$$

де λ - параметр частоти коливань. В силу механічного змісту тут $b_0^{-1}(x) > 0$ і вимірна, $b_1(x)$, $b_2(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ - міри, причому $a_1(x) = a_1'(x)$, $a_2(x) = a_2'(x)$ - узагальнені похідні від неспадних на $[a, b]$ функцій $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$. Для конкретності можна розглянути випадок жорсткого закріплення кінців балки, тобто до рівняння (*) слід додати крайові умови

$$y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0 \quad (**)$$

Це - типовий приклад ще недослідженої задачі на власні значення для диференціального рівняння з узагальненими коефіцієнтами, що має реальний фізичний зміст.

В 40 - 50 роках в роботах І.С.Каца, М.Г.Крейна і Ф.Р.Гантмахера детально вивчаються крайові задачі (задачі на власні значення) для звичайних диференціальних рівнянь другого і четвертого порядків, що описують вільні коливання струни і балки з дискретно-неперервним розподілом маси. Ці дослідження проводилися без застосування теорії узагальнених функцій, яка на той час ще не була створена, але, на наш погляд, їх можна вважати піонерськими серед робіт, що вивчають диференціальні рівняння з коефіцієнтами-мірами, тобто узагальненими функціями нульового порядку. На

користь сказаного можна привести той аргумент, що диференціальні рівняння можна записати у вигляді $y'' + \lambda M'(x)y = 0$ і $y^{(*)} - \lambda M'(x)y = 0$, де $M(x)$ - неспадна функція. На жаль, методи дослідження цих задач не вдалося застосувати навіть до задач типу (*), (**), оскільки рівняння (*) не належить до двочленного класу (що суттєво використовується в роботах названих авторів).

В даній роботі з використанням ідей Ф.Аткінсона, а також на основі розвитку концепції квазіпохідних, вивчаються крайові задачі для квазидиференціальних рівнянь довільного парного порядку з коефіцієнтами-мірами і правими частинами - узагальненими похідними високого порядку від функцій обмеженої варіації. При цьому також використовуються елементи лінійної теорії названих рівнянь, започаткованої в роботах М.Ф.Стасюк і Р.М.Тациа на основі коректно введеного поняття розв'язку.

Мета роботи полягає в дослідженні крайових задач (задач на власні значення) для квазидиференціальних рівнянь з узагальненими функціями в коефіцієнтах і правих частинах.

Методи дослідження. В роботі використано методи теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії узагальнених функцій, інтеграла Рімана-Стільтьєса і теорії функцій комплексної змінної. Всі результати оформлені у вигляді лем і теорем, достовірність яких забезпечується доведеннями.

Наукова новизна, теоретична і практична цінність. В роботі перенесено результати Ф.Аткінсона стосовно крайових задач для диференціальних систем з сумованими за Лебегом коефіцієнтами на узагальнені диференціальні системи з мірами.

Доведена теорема про розклад за власними функціями задачі на власні значення для квазидиференціального рівняння парного порядку $2n$ з коефіцієнтами-мірами.

Вивчена функція Гріна відповідного неоднорідного рівняння,

що містить в правій частині узагальнені похідні до n -го порядку включно від функцій обмеженої варіації. Показано, зокрема, що функція Гріна однозначно будується за допомогою лише однієї функції Коші однорідного квазідиференціального рівняння і її змішаних квазіпохідних.

Запропоновано наближений спосіб побудови еволюційного оператора узагальненої лінійної диференціальної системи, який може бути покладений в основу наближеного дослідження дискретно-неперервних систем, що підтверджується наведеними числовими прикладами.

Апробація роботи. Результати роботи доповідалися на:

щорічних конференціях професорсько-викладацького складу Львівського політехнічного інституту (1983 - 1992 р.р.);

семінарі відділу диференціальних рівнянь ІППММ АН УРСР (1985 р.);

семінарі з обчислювальної математики при Західному науковому центрі АН УРСР (1986 р.);

Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (1987 р., 1992 р.);

Всесоюзній конференції "Нові підходи до розв'язування диференціальних рівнянь", м. Дрогобич (1987, 1989, 1991 р.р.);

науковій школі-семінарі "Розривні динамічні системи", м. Ужгород (1991 р.);

семінарі кафедри диференціальних рівнянь Львівського держуніверситету (1992 р.).

Структура і об'єм роботи. Дисертація викладена на 110 сторінках машинописного тексту і складається із вступу, трьох глав, висновку і списку цитованої літератури (88 найменувань).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 12 робіт, 5 з яких спільних з Р.М.Тадієм роботах останньому належить постановка

задач.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовується актуальність теми дослідження, визначається мета роботи, подається огляд робіт, ідейно близьких до теми дисертації, а також зроблено короткий опис отриманих результатів.

В главі 1 вивчається крайова задача

$$JY'(x) = [B'(x) + \lambda A'(x)]Y(x), \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

$$Y(a) = Mv, Y(b) = Nv, \quad (2)$$

де $(k \times k)$ матриці-функції $A(x)$, $B(x) \in BV[a, b]$ ($BV[a, b]$ - клас функцій обмеженої на $[a, b]$ варіації), $A^*(x) = A(x)$, $B^*(x) = B(x)$; J - стала $(k \times k)$ матриця, причому $J^* = -J$, $J^*J = E$ (E - одинична матриця); $Y(x)$ - k -вимірний вектор; сталі матриці M і N задовольняють умови $M^*JM = N^*JN$, v - деякий ненульовий вектор, причому M і N не мають спільних анулюючих векторів: $Mv = 0$, $Nv = 0 \rightarrow v = 0$; λ - (комплексний) параметр. Розв'язком рівняння (1) вважається вектор-функція $Y(x) \in BV[a, b]$, що задовольняє його в узагальненому сенсі. При цьому встановлено необхідні й достатні умови коректності так означеного поняття розв'язку, що полягають у виконанні системи рівностей

$$\begin{aligned} \Delta A(x)J\Delta A(x) &= \Delta A(x)J\Delta B(x) + \Delta B(x)J\Delta A(x) = \\ &= \Delta B(x)J\Delta B(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b] \end{aligned} \quad (3)$$

де $\Delta C(x) = C(x + 0) - C(x - 0)$. Крім цього постулюється, що для всякого нетривіального вектора $Y(x)$ виконується умова

$$\int_a^b Y^*(x)dA(x)Y(x) > 0.$$

Постановка цієї задачі відрізняється від відомої (Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. - М.: Мир, 1968. - 749 с.) фактично тим, що матриці $A(x)$ і $B(x)$ містять не лише абсолютно неперервну (як в цитованій роботі), а й сингулярну і дискретну компоненти.

Основні результати глави можна сформулювати в наступних твердженнях.

Теорема 1.2.1. *Еволюційний оператор $U(x, \alpha, \lambda)$ диференціальної системи (1) є цілою аналітичною функцією параметра λ , порядок росту якої не перевищує одиниці.*

Теорема 1.2.2. *Власні значення $\lambda_k, k = 1, 2, 3, \dots$ задачі (1), (2) всі дійсні і їх множина не має скінченної граничної точки, причому $\forall \epsilon > 0 \sum_{\lambda_k \neq 0} |\lambda_k|^{-1-\epsilon} < \infty$.*

Виявляється, що нормовані власні вектори, які відповідають різним власним значенням, взаємно ортогональні:

$$\int_a^b Y_m^*(x) dA(x) Y_n(x) = \delta_{mn},$$

(δ_{mn} - символ Кронекера).

В роботі часто зустрічаються інтеграли подібного вигляду і виникає питання: в якому сенсі їх розуміти? Відповідь на нього дає

Теорема 1.3.1. *Припустимо, що $C_1(x), C_2(x), C_3(x) \in BV[a, b]$, причому $C_2(x)$ - квадратна, а $C_1(x)$ і $C_3(x)$ такі, що допускають формальний добуток $C_1(x) \cdot C_2(x) \cdot C_3(x)$. Тоді для того, щоб матричний інтеграл*

$$I = \int_a^b C_1(x) dC_2(x) C_3(x)$$

був класичним інтегралом Рімана-Стільтьєса, необхідно і досить виконання системи умов $\Delta C_1(x)\Delta C_2(x) = \Delta C_2(x)\Delta C_3(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

Виявляється, що виконання умов теореми 1.3.1 всюди в роботі забезпечується виконанням умов коректності (3).

Природним чином виникає задача про розклад деякої вектор-функції $\varphi(x)$ в ряд за власними функціями задачі (1), (2)

$$\varphi(x) \sim \sum_n Y_n(x)c_n, \quad (4)$$

Теорема 1.5.2. Нехай вектор - функції $\varphi(x), \chi(x) \in BV[a, b]$, $\Delta A \Delta \chi = 0$. Нехай також $\varphi(x)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$J\varphi'(x) = B'(x)\varphi(x) + A'(x)\chi(x)$$

і крайові умови (2). Для довільного $\Lambda > 0$ позначимо

$$\varphi_\Lambda(x) = \varphi(x) - \sum_{|\lambda_n| < \Lambda} Y_n(x)c_n,$$

де коефіцієнти Фур'є c_n визначаються так:

$$c_n = \int_a^b Y_n^*(x)dA(x)\varphi(x).$$

Тоді

$$\int_a^b \varphi_\Lambda^*(x)dA(x)\varphi_\Lambda(x) \leq \Lambda^{-2} \int_a^b \chi^*(x)dA(x)\chi(x).$$

Теорема 1.6.2. В припущеннях теореми 1.5.2 ряд в правій частині (4) збігається абсолютно і рівномірно на $[a, b]$.

Результати цієї глави мають самостійне значення, хоча в контексті роботи несуть допоміжний характер, виступаючи як засіб для розв'язання задач двох наступних глав.

Глава 2 з точки зору дисертаційної роботи є центральною. В ній вивчаються крайові задачі для узагальнених квазідиференціальних рівнянь.

В §2.1 розглядається скалярне квазідиференціальне рівняння довільного парного порядку

$$L_{2n}[y] \equiv L_{n,n}[y] - \lambda L_{n-1,n-1}[y] = 0, \quad (5)$$

де

$$L_{n,n}[y] \equiv \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} (b_{ij}(x) y^{(n-i)})^{(n-j)}$$

$$L_{n-1,n-1}[y] \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} (a_{ij}(x) y^{(n-i)})^{(n-j)}$$

Коефіцієнти цих виразів дійсні і задовольняють наступні умови:

- 1) $b_{00}^{-1}(x)$ - вимірна і обмежена на $[a, b]$ функція;
- 2) $b_{ij}(x), a_{ij}(x) \forall i, j = \overline{1, n}$ - міри: $b_{ij}(x) = \beta_{ij}'(x), a_{ij}(x) = \alpha_{ij}'(x); \beta_{ij}(x), \alpha_{ij}(x) \in BV[a, b];$
- 3) $b_{i0}(x), b_{0j}(x) \in \mathcal{L}_2[a, b];$
- 4) $b_{ij}(x) = b_{ji}(x), a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \forall i, j;$
- 5) $\alpha_{ij}(x)$ - неспадні на $[a, b]$ функції.

Рівняння (5) розглядається разом з крайовими умовами

$$y^{(i)}(a) = y^{(i)}(b) = 0, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (6)$$

Теорема 2.1.1. При виконанні наведених вище умов на коефіцієнти $b_{ij}(x), a_{ij}(x)$ задача (5), (6) зводиться до задачі типу (1), (2).

Доведення цього факту ґрунтується на введенні квазіпохідних $y^{[k]}(x)$:

$$y^{[k]}(x) = y^{(k)}(x), \quad \forall k = \overline{0, n-1};$$

$$y^{[n]}(x) = \sum_{i=0}^n b_{i0}(x) y^{(n-i)}(x);$$

$$y^{[n+m]}(x) = b_{0m}(x) y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^n (b_{im}(x) - \lambda a_{im}(x)) y^{(n-i)}(x) - (y^{[n+m-1]}(x))', \quad m = \overline{1, n-1}.$$

На основі цього результату деякі властивості задачі на власні значення (5), (6) отримуються тепер як наслідки з відповідних теорем глави 1.

Наслідок 2.1.2. Еволюційний оператор $\mathcal{U}(x, \alpha, \lambda)$, що відповідає квазидиференціальному рівнянню (5), є цілою аналітичною функцією параметра λ , порядок росту якої не перевищує одиниці.

Наслідок 2.1.3. Власні значення λ_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ задачі (5), (6) всі дійсні і їх множина не має скінченної граничної точки, причому $\forall \epsilon > 0 \sum_{\lambda_k \neq 0} |\lambda_k|^{-1-\epsilon} < \infty$.

Отже, власні значення задачі (5), (6) (із врахуванням їх кратності) можна перенумерувати, наприклад, в порядку неспадання їх абсолютних величин.

Теорема 2.1.2. Нормовані власні функції задачі (5), (6) задовольняють співвідношення ортогональності:

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b y_i^{[k]} y_j^{[m]} d\alpha_{n-m, n-k} = \delta_{ij}.$$

Так, наприклад, для задачі (*), (***) це співвідношення набуває

вигляду

$$\int_a^b y_i(x)y_j(x)d\alpha_n(x) + \int_a^b y_i'(x)y_j'(x)dx = \delta_{ij}.$$

§2.2 присвячений дослідженню розв'язальності неоднорідної задачі і вивченню структури та властивостей функції Гріна. Тут розглядається крайова задача для неоднорідного квазідиференціального рівняння

$$L_{nn}[y] - \lambda L_{n-1, n-1}[y] = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} F_i^{(i)} \quad (7)$$

з крайовими умовами (6), де $F_i^{(i)}(x)$ - i -та узагальнена похідна від функції $F_i(x) \in BV[a, b]$. При цьому для рівняння (7) квазіпохідні вводяться так:

$$y^{[k]}(x) = y^{(k)}(x), \quad \forall k = \overline{0, n-1};$$

$$y^{[n]}(x) = \sum_{i=0}^n b_{i0}(x)y^{(n-i)}(x);$$

$$y^{[n+m]}(x) = b_{0m}(x)y^{[n]}(x) + \sum_{i=1}^m (b_{im}(x) - \lambda a_{im}(x))y^{[n-i]}(x) - (y^{[n+m-1]})' - F_{n-m+1}'(x), \quad m = \overline{1, n-1}.$$

Теорема 2.2.2. Якщо λ не є власним значенням задачі (5), (6), то неоднорідна задача (7), (6) має єдиний розв'язок $y(x)$, що є абсолютно неперервною на $[a, b]$ функцією разом з квазіпохідними $y^{[k]}(x)$ до $(n-1)$ -го порядку включно; квазіпохідні $y^{[n+i]}(x)$ при $i = \overline{0, n-1} \in BV[a, b]$ і із стрибки визначаються формулами

$$\Delta y^{[n+i-1]}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta \beta_{n-j, i}(x) - \lambda \Delta \alpha_{n-j, i}(x)) y^{[j]}(x-0) + \Delta F_{n-i}(x),$$

$$i = \overline{1, n};$$

цей, оскільки зображення представимий у вигляді

$$y(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\partial^i G(x, \xi, \lambda)}{\partial \xi^i} dF_i(\xi). \quad (9)$$

За означенням функція $G(x, \xi, \lambda)$ називається функцією Гріна задачі (7), (6).

В §2.3 вивчаються властивості функції $G(x, \xi, \lambda)$.

Теорема 2.3.1. *Мають місце наступні властивості:*

1) функція Гріна $G(x, \xi, \lambda)$ на кожному з інтервалів $(a; \xi), (\xi; b)$ по змінній x задовольняє однорідне квазідиференціальне рівняння (5);

2) $G(x, \xi, \lambda)$ в точках a і b задовольняє крайові умови (8);

3) $G(x, \xi, \lambda)$ абсолютно неперервна по змінній x при фіксованому ξ і навпаки;

4) функція Гріна симетрична: $G(x, \xi, \lambda) = G(\xi, x, \lambda)$;

5) при $x = \xi$ $G(x, \xi, \lambda)$ задовольняє умови стрибка:

$$G^{[k]}(\xi + 0, \xi, \lambda) - G^{[k]}(\xi - 0, \xi, \lambda) = 0, \quad k = \overline{0, n-1};$$

$$G^{[n+m-1]}(\xi + 0, \xi, \lambda) - G^{[n+m-1]}(\xi - 0, \xi, \lambda) = P(\Delta\beta_{ij}, \Delta\alpha_{ij}), \quad m = \overline{1, n-1};$$

$$G^{[2n-1]}(\xi + 0, \xi, \lambda) - G^{[2n-1]}(\xi - 0, \xi, \lambda) = 1 + Q(\Delta\beta_{ij}, \Delta\alpha_{ij}),$$

де вирази $P(\Delta\beta_{ij}, \Delta\alpha_{ij}) = Q(\Delta\beta_{ij}, \Delta\alpha_{ij}) = 0$ при $\Delta\beta_{ij} = \Delta\alpha_{ij} = 0$.

Тут слід підкреслити, що в точках відсутності дискретної компоненти в коефіцієнтах $b_{ij}(x)$ і $a_{ij}(x)$ остання властивість функції Гріна набуває "класичного" вигляду.

В §2.4 розглядається задача про розклад деякої скалярної функції $\psi(x)$ в ряд за власними функціями задачі (5), (6), тобто встановлюються умови, при яких ряд

$$\psi(x) \sim \sum_n Y_n(x) c_n \quad (10)$$

в певному сенсі збігається до функції $\psi(x)$, визначається характер його збіжності, а також вказується спосіб обчислення коефіцієнтів Фур'є c_n .

Теорема 2.4.1. *Нехай $p(x)$ - абсолютно неперервна на $[a, b]$ функція разом зі своїми похідними до $(n-1)$ -го порядку включно і функція $\psi(x)$ задовольняє неоднорідне квазіди, еренціально різння*

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} (b_{ij} \psi^{(n-i)})^{(n-j)} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} (a_{ij} p^{(n-i)})^{(n-j)}$$

і крайові умови (8);

$\forall \Lambda > 0$ позначимо

$$\psi_{\Lambda}^{[i]}(x) = \psi^{[i]}(x) - \sum_{|\lambda_r| \leq \Lambda} c_r y_r^{[i]}(x), \quad i = \overline{0, n-1},$$

де коефіцієнти c_r обчислюються так:

$$c_r = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b \psi^{[j]} y_r^{[i]} d\alpha_{n-j, n-i}. \quad (11)$$

Тоді ряд Фур'є (10) наближає функцію $\psi(x)$, в тому сенсі, що

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b \psi_{\Lambda}^{[i]} \psi_{\Lambda}^{[j]} d\alpha_{n-j, n-i} \leq \Lambda^{-2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b p^{[j]} p^{[i]} d\alpha_{n-i, n-j}.$$

Зауважимо, що для задачі (*), (***) остання нерівність набуває вигляду

$$\int_a^b (\psi_{\Lambda})^2 d\alpha_2 + \int_a^b (\psi'_{\Lambda})^2 d\alpha_1 \leq \Lambda^{-2} \left[\int_a^b p^2 d\alpha_2 + \int_a^b (p')^2 d\alpha_1 \right];$$

$$c_n = \int_a^b \psi(x) y_n(x) d\alpha_2(x) + \int_a^b \psi'(x) y_n'(x) d\alpha_1(x).$$

Теорема 2.4.2. В умовах теореми 2.4.1 ряд в правій частині (10'), а також ряди, що отримані його почленним диференціюванням до $(n-1)$ -го порядку включно, збігаються абсолютно і рівномірно на $[a, b]$.

Наведені результати, очевидно, справедливі не лише для крайових умов (6). Допуст п'ятьма крайовими умовами слід вважати принаймні такі, для яких при зведенні до системи першого порядку існують квадратні матриці M і N , що володіють властивістю $M^*JM = N^*JN$. Цьому питанню присвячено §2.5, де для квазидиференціального рівняння (*) при різних умовах закріплення вказано конкретний вигляд цих матриць.

В главі 3 запропоновано наближений спосіб розв'язування дискретно-неперервних крайових задач. Його основна ідея - наближення побудова еволюційного оператора узагальненої диференціальної системи першого порядку на основі спеціальної апроксимації коефіцієнтів.

В класичному аналізі добре відомі теореми про граничний перехід під знаком скалярного інтеграла Рімана-Стільтьєса. В §3.1 наступний результат для матричного інтеграла отримано з використанням першої і другої теорем Хеллі.

Теорема 3.1.1. Нехай:

1) $C(x), C_n(x), Y(x) \in BV[a, b]$, $C(x) \equiv \{c_{ij}(x)\}$, $C_n(x) \equiv \{c_{ij}^n(x)\}$, $i, j = \overline{1, k}$, $Y(x)$ - k -вимірний вектор, причому $\Delta C(x)\Delta Y(x) = \Delta C_n(x) \cdot \Delta Y(x) = 0$;

2) варіації функцій $c_{ij}^n(x)$ рівномірно обмежені (по n) на $[a, b]$:

$$V_a^b c_{ij}^n(x) < V \equiv \text{const}, \quad i, j = \overline{1, k};$$

3) $c_{ij}^n(x) \rightarrow c_{ij}(x)$ рівномірно на $[a, b]$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dC_n(x)Y(x) = \int_a^b dC(x)Y(x).$$

Цей результат суттєво використовується в §3.2, де розв'язується питання апроксимації розв'язків диференціальних систем з узагальненими коефіцієнтами. Тут розглядається задача Коші для диференціальних систем

$$Y'(x) = C'(x)Y(x), \quad Y(x_0) = Y_0$$

$$Y_n'(x) = C_n'(x)Y_n(x), \quad Y_n(x_0) = Y_0$$

Теорема 3.2.1. В умовах теореми 3.1.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Y(x) - Y_n(x)\| = 0$$

рівномірно на $[a, b]$. (За норму матриці $P(x)$ приймається сума модулів її елементів: $\|P(x)\| = \sum_{i,j} |p_{ij}(x)|$). В цьому ж параграфі розглядаються деякі важливі апроксимації. Один з них - дискретизація, тобто апроксимація елементів матриць-функцій обмеженої варіації $A(x)$ і $B(x)$ сідчастими функціями.

На основі відомих властивостей еволюційного оператора в §3.3 пропонується наближений спосіб його побудови. При цьому одночасно встановлено такий результат.

Теорема 3.3.1. Якщо $A(x)$ - сідчаста матриця-функція, що має скінченне число точок розриву на $[a, b]$, то задача (1), (2) має скінченне число власних значень і власних векторів.

Звідси випливає, що, по-перше, задача (1), (2) може бути апроксимована послідовністю скінченновимірних задач, а, по-друге,

ця задача описує поведінку як дискретно-неперервних, так і чисто дискретних систем.

В §3.4 розглядається приклад задачі на власні значення для квазидиференціального рівняння другого порядку. Тут апробація з запропонованого вище методу виявилася цілком задовільною: в частинних випадках знайдені власні значення з достатньою точністю узгоджуються з відомими в літературі.

Ще одна задача в §3.5 в певній мірі ілюструє обґрунтування відомого в механіці способу заміни неперервно розподіленої маси скінченним числом зосереджених мас. Розглядаються вільні коливання круглої кінцевої балки з насадженими дисками. Як показують обчислення перших двох власних частот, при запропонованому способі апроксимації (дискретизації) спостерігається достатньо швидко збіжність обчислювального процесу.

Автор висловлює щиру вдячність доценту Р.М.Тацию за наукове керівництво та допомогу при написанні роботи.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Кисилевич В.В., Таций Р.М. Свойство функции Коши дифференциального уравнения с суммируемыми коэффициентами // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференц. уравн. и их приложения. - Львов: Выща школа, 1985. - N^o 192. - С. 48 - 50.
2. Таций Р.М., Стасюк М.Ф., Кисилевич В.В. Общие квазидифференциальные уравнения с мерами. - К., 1985. - 34 с. - Деп. в УкрНИИТИ, N^o 2701.
3. Кисилевич В.В., Таций Р.М. Рекуррентные схемы для квазидифференциальных уравнений с мерами // I Всесоюзн. конф. "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений": Тез. докл. - М., 1987. - С. 59 - 60.

4. Кисилевич В.В. Теорема типа Хелли для матричного аналога интеграла Римана-Стилтьеса. - Львов, 1989. - 6 с. - Дес. в УкрНИИНТИ, N^o 1308.
5. Кисилевич В.В., Пахолок Б.Б., Тацій Р.М. О приближенном решении линейных дифференциальных систем с обобщенными коэффициентами // 2 Всесоюз. конф. "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений": Тез. докл. - М., 1989. - С. 82.
6. Тацій Р.М., Іщук В.В., Кісілевич В.В. Про апроксимацію розв'язків диференціальних рівнянь з мірами // Вісн. Київ. ун-ту: Математика і механіка. - Київ: Либідь, 1990. - N^o 32. - С. 128 - 131.
7. Кісілевич В.В. Про граничний перехід під знаком матричного інтеграла Римана-Стилтьеса // Вісн. Львів. політехн. ін-ту: Діференц. рівн. та їх застосування. - Львів: Вища школа, 1991. - С. 60 - 62.
8. Кисилевич В.В., Тацій Р.М. О разложении по собственным векторам обобщенной дифференциальной системы // 3 Республ. конф. "Разрывные динамические системы": Тез. докл. - Киев, 1991. - С. 26 - 27.
9. Кисилевич В.В. Об одном представлении эволюционного оператора дифференциальной системы с мерами // 3 Всесоюз. конф. "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений": Тез. докл. - М., 1991. - С. 78.
10. Кісілевич В.В. Задачі на власні значення для квазідиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами // Вісн. Львів. політехн. ін-ту: Діференц. рівн. та їх застосування. - Львів: Вища школа. - N^o 272.
11. Тацій Р.М., Кисилевич В.В. Свойства функции Грина обобщенного квазидифференциального уравнения. Всесоюз. конф.



"Современные методы в теории краевых задач": Тез. докл. -
Воронеж, 1992.

12. Кисилевич В.В., Тапий Р.М. Краевая задача для обобщенной
дифференциальной систем. - Львов, 1992. - 38 с. - Деп. в
УкрИНТЭИ, N^а 1047.

АН УССР
Лит. ф-т
№ 1047

Підписано до друку 16.10.92. Формат 60x84/16. Друк офсет.
Папір офсет. Умов. д.ар. 1. Умов. кр.відб. 1,25. Об.-вид. ар. 1.
Тираж 100. Безкоштовно.

Обласна книжкова друкарня, 290000, Львів, вул. Стефаника, 7

467504

AB 25.718

AB 25.718

Безоптовко.

[Handwritten scribble]

[Handwritten scribble]