Академия наук Украины
Ордена Трудового Красного Знамени Институт математики

На правах рукописи

АМЕРОВ Тимур Кешафович

УСЛОВНАЯ И НЕЛОКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

01.01.03 - математическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1992

Работа выполнена в Институт

Научный руководитель: член-корреспондент АН Украины,
доктор физико-математических наук,
профессор ФУЩИЧ В.И.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
БАРНЯК М.Я.

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
ЦИФРА И.М.

Ведущая организация: Львовский институт прикладных проблем механики и математики

Защита состоится "20" октября 1992 г. в _____ часов на заседании специализированного совета Д 016.50.02 при Институте математики АН Украины по адресу: 252601 Киев 4, ГСП, ул. Репина, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "18" сентября 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета ЛУЧКА А.Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математические модели, описывающие реальные процессы механики, физики, химии и других областей современного естествознания, в большинстве случаев являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП). Методы классической математической физики, как правило, малоэффективны при изучении нелинейных ДУ. Точные решения многих уравнений математической физики могут быть построены с помощью метода С.Ли, основанного на идее понижения размерности уравнений, обладающих высокой точечной симметрией. Симметрия многочисленных уравнений изучена в работах С.Ли, Д.Биркгофа, Л.В.Овсянникова, П.Олвера, В.И.Фущича, Н.Х.Ибрагимова и многих других ученых.

С помощью алгоритма С.Ли можно найти лишь некоторое узкое подмножество точных решений исследуемых уравнений. Сравнительно недавно в работах В.И.Фущича и его учеников был предложен новый метод, основанный на концепции условной симметрии. Используя этот метод, удалось значительно расширить симметрию некоторых ДУЧП и получить их новые точные решения.

Данная работа посвящена исследованию условной симметрии некоторых нелинейных уравнений математической физики, часто используемых в прикладной математике.

Цель работы. Исследовать лиевскую, условную и нелокальную симметрию нелинейного уравнения теплопроводности, обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза и уравнений газовой динамики. Используя операторы Q -условной симметрии, провести редукцию исследуемых уравнений. Построить семейства их точных решений.

Общая методика исследования. В работе применяются теоретико-алгебраические методы исследования симметрийных свойств дифференциальных уравнений в частных производных, теория алгебр Ли, а также другие методы математической физики.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Исследована нелиевская симметрия нелинейного уравнения теплопроводности и построены его точные решения.

2. Для одномерного нелинейного уравнения теплопроводности построены неявные, нелокальные анзацы, редуцирующие исходное уравнение к обыкновенным дифференциальным уравнениям, а также указан метод размножения решений нелинейного уравнения теплопроводности при помощи нелокальных преобразований.

3. Решена задача групповой классификации для обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза и установлена его условная симметрия относительно операторов Галилея.

4. Исследована Q -условная симметрия уравнений газовой динамики и получены некоторые классы его точных решений.

5. Система нелинейных уравнений диффузии при помощи нелокальной замены сведена к скалярному нелинейному уравнение теплопроводности, что позволило построить для исходной системы нелокальные анзацы, редуцирующие ее к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдены точные решения исследуемой системы.

Теоретическая и практическая ценность. Основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми и могут быть использованы для решения прикладных задач теплофизики, фильтрации, газовой динамики и других областей теоретического естествознания.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинарах отдела прикладных исследований Института математики АН Украины.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [I - 5].

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка основной использованной литературы, содержащего 87 наименований. Объем работы 89 страниц машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан краткий обзор работ, относящихся к теме диссертационной работы, обоснована актуальность рассматриваемых задач, приведены основные результаты работы.

В первой главе исследована условная и нелокальная симметрия нелинейного уравнения теплопроводности и обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза. Описаны анзацы, редуцирующие данные уравнения, и построены их точные решения.

В § I рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_0 + F(u)u_{11} = 0 \ . \qquad (\mathrm{I})$$

Теорема I. Уравнение (I), при $F(u) = u$, Q -условно инвариантно относительно операторов

$$\begin{aligned} Q_1 &= x_1\partial_0 + u\partial_1 \ , \\ Q_2 &= x_1^2\partial_0 + 2x_1 u\partial_1 + 2u^2\partial_u \ , \\ Q_3 &= \sqrt{x_0}\,\partial_1 + \sqrt{2u}\,\partial_u \ , \\ Q_4 &= \sqrt{2x_0}\,\partial_1 + L(u)\partial_u \ , \\ Q_5 &= \partial_1 + \ln u\,\partial_u \ , \\ Q_6 &= x_0\partial_1 + x_1\partial_u \ , \end{aligned} \qquad (2)$$

где $L(u)$ - решение уравнения

$$uL'' + L' = L^{-1}.$$

По операторам (2) построены анзацы, с помощью которых уравнение (I) с $F(u) = u$ редуцировано к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). Построены точные решения исследуемого уравнения.

Все результаты, полученные для уравнения (I), обобщены на многомерный случай

$$u_0 + u\Delta u = 0 \ .$$

Теорема 2. Нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_0 + \partial_1(u^{-\frac{1}{2}}u_1) = 0 \qquad (3)$$

Q -условно инвариантно относительно оператора

$$Q = \partial_0 - 2W(x_1)u^{1/2}\partial_u , \qquad (4)$$

где $W(x_1)$ - некоторое решение уравнения $W'' = W^2$.
Анзац

$$u = (\varphi(x_1) - x_0 W(x_1))^2 ,$$

построенный с помощью оператора (4), редуцирует уравнение (3) к уравнению Ламе

$$\varphi'' = W(x_1)\varphi .$$

Во втором параграфе изучена нелокальная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности

$$u_0 = \partial_1(F(u)u_1) \qquad (5)$$

при некоторых конкретных значениях $F(u)$.
Для уравнения (5) с $F(u) = u^{-2}$

$$u_0 = \partial_1(u^{-2}u_1) \qquad (6)$$

при помощи нелокальных преобразований, связывающих его с линейным уравнением теплопроводности

$$z_t = z_{xx} , \qquad (7)$$

построены нелиевские анзацы вида

$$\begin{cases} u(x_0, x_1) = (x_0 x_1 + x_1 h(\omega))^{-1}, \quad \omega = \tau + x_0^2 , \\ exp(x_0\tau + \frac{2}{3}x_0^3)\,\varphi(\omega) = x_1 , \end{cases} \qquad (8)$$

$$\begin{cases} u(x_0, x_1) = \dfrac{2(x_0^2+1)}{x_1(2(x_0^2+1)^{1/2}h(\omega) - x_0\tau)} , \quad \omega = \tau(x_0^2+1)^{-1/2}, \\ exp\left(\lambda\, arctg\, x_0 - \dfrac{x_0\tau^2}{4(x_0^2+1)}\right)\varphi(\omega) = x_1(x_0^2+1)^{1/4} , \end{cases} \qquad (9)$$

где $\tau = \tau(x_0, x_1)$ - функциональный параметр, а функции φ и h связаны соотношением

$$h = \dot{\varphi}/\varphi .$$

Анзацы (8), (9) редуцируют уравнение (6) к уравнениям Риккати для функции h :

$$\dot{h} + h^2 = \omega ,$$

$$\dot{h} + h^2 = -\frac{1}{4}\omega^2 + \lambda , \quad \lambda = const .$$

Описан метод, позволяющий получить формулы нелиевского размножения решений нелинейного уравнения (6). Например, с помощью данного метода получены формулы

$$\text{а)} \quad \overset{2}{u}(x_0, x_1) = -[\overset{1}{u}(x_0, \tau)]^3 \left[\frac{\partial \overset{1}{u}(x_0, \tau)}{\partial \tau}\right]^{-1} , \tag{I0}$$

$$\text{в)} \quad \overset{2}{u}(x_0, x_1) = \frac{[\overset{1}{u}(x_0, \tau)]^5}{2[\overset{1}{u}_\tau(x_0, \tau)]^2 - [\overset{1}{u}(x_0, \tau)]^2 \overset{1}{u}_0(x_0, \tau)} ,$$

где $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ - решения (6), а функция $\tau = \tau(x_0, x_1)$ определяется соответственно из условий

$$\text{а)} \quad \overset{1}{u}(x_0, \tau) = x_1^{-1} ,$$

$$\text{в)} \quad \overset{1}{u}_\tau(x_0, \tau) + x_1[\overset{1}{u}(x_0, \tau)]^3 = 0 .$$

Получена формула размножения решений уравнения (5) при

$$F(u) = \frac{f(\ln u)}{u} , \quad (f(-\alpha) = f(\alpha)) .$$

Она имеет вид

$$\overset{2}{u}(x_0, x_1) = \frac{1}{\overset{1}{u}(x_0, \tau)} , \tag{II}$$

где параметр $\tau = \tau(x_0, x_1)$ является решением уравнений

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{1}{\overset{1}{u}(x_0,\tau)} \,, \\ \tau_0 = f(\ln \tau_1)\, \dfrac{\tau_{11}}{\tau_1} \,. \end{cases}$$

Формулы (I0), (II) применены для получения новых решений соответствующих нелинейных уравнений теплопроводности.

Для уравнения (5) с нелинейностью $F(u)=u^{-2/3}$ построены нелокальные анзацы

I) $\quad u=(\varphi^1(x_0)x_1^2+\varphi^2(x_0))^{-3/2}$,

2) $\quad (x_1+\varphi^1(x_0))(\dot{\varphi}^2(x_0))^{3/4}=-\tau\dot{\varphi}^3(\omega)+\varphi^3(\omega)$,

$$\omega=\varphi^2(x_0)+\tau, \quad -\frac{\tau_1}{\tau}=u \,, \tag{I2}$$

3) $\quad (x_1+\varphi^1(x_0))(\dot{\varphi}^2(x_0))^{3/4}=\int[\dot{\varphi}^3(\tau)]^{3/2}\varphi^4(\omega)d\tau$,

$$\omega=\varphi^2(x_0)+\varphi^3(\tau), \quad \tau_1=u \,,$$

которые невозможно получить с помощью операторов, принадлежащих лиевской алгебре инвариантности исследуемого уравнения. Анзацы (I2) использованы для редукции (5) к системам ОДУ и построения частных решений исследуемого уравнения.

В § 3 проведена групповая классификация обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза

$$u_0+f(u)u_1^{\kappa}+u_{111}=0 \,. \tag{I3}$$

Доказана теорема.

Теорема 3. Уравнение (I3) Q-условно инвариантно относительно оператора галилеевского типа

$$Q=x_0^m\partial_1+\Phi(x_1,u)\partial_u\,, \quad m=const \,, \tag{I4}$$

если

$$\text{I.}\quad f(u)=\lambda_1 u^{\frac{2-\kappa}{2}}+\lambda_2 u^{\frac{1-\kappa}{2}},\quad \Phi(u)=\left(\frac{\kappa\lambda_1}{2}\right)^{-\frac{1}{\kappa}}\sqrt{u},$$

$$\text{2.}\quad f(u)=(\lambda_1 \ln u)u^{+1-\kappa},\quad \Phi(u)=(\kappa\lambda_1)^{-\frac{1}{\kappa}}u,$$

$$\text{3.}\quad f(u)=(\lambda_1 \arcsin u+\lambda_2)(1-u^2)^{\frac{1-\kappa}{2}},\quad \Phi(u)=(\kappa\lambda_1)^{-\frac{1}{\kappa}}\sqrt{1-u^2}, \tag{I5}$$

$$\text{4.}\quad f(u)=(\lambda_1 \operatorname{Arsh} u+\lambda_2)(1+u^2)^{\frac{1-\kappa}{2}},\quad \Phi(u)=(\kappa\lambda_1)^{-\frac{1}{\kappa}}\sqrt{1+u^2},$$

$$\text{5.}\quad f(u)=\lambda_1 u,\quad \Phi(u)=(\kappa\lambda_1)^{-\frac{1}{\kappa}},$$

6. При $\kappa=3$ уравнение (I3) Q-условно инвариантно относительно оператора

$$Q=(3\lambda x_0)^{1/3}\partial_1+\Phi(u)\partial u,\quad \lambda=const,$$

если $f(u)=F(u)\Phi^{-2}(u)$, где $F(u)$ определяется выражением

$$F'=\frac{\lambda}{\Phi}-(\Phi\Phi')'',$$

где $\Phi(u)$ - произвольная функция.

По операторам теоремы 3 построены анзацы, редуцирующие (I3) с соответствующей нелинейностью $f(u)$ к ОДУ. Получены широкие классы точных решений уравнения (I3).

Вторая глава диссертации посвящена изучению симметрии уравнений газовой динамики и системы нелинейных уравнений диффузии.

В первом параграфе исследована Q-условная симметрия системы уравнений, описывающих одномерное изэнтропическое движение газа

$$\begin{cases} u_0+uu_1+f(\rho)\rho_1=0, \\ \rho_0+u\rho_1+\rho u_1=0. \end{cases} \tag{I6}$$

Теорема 4. Система (I6) при $f=\lambda_1\rho^{-3}+\lambda_2\rho^{-1}$ Q-условно инвариантна относительно оператора

$$Q = \partial_0 + u\partial_1 + \lambda_3[(\lambda_1\rho^{-2} + \lambda_2)\partial_u + \sqrt{\lambda}\,\partial\rho] \; . \qquad (17)$$

Теорема 5. Система (16) при $f = \rho^{-2}(\lambda_1 + \lambda_2\rho)^{-1}$ Q-условно инвариантна относительно оператора

$$Q = \partial_0 + u\partial_1 + \lambda_3\partial_u - \frac{\lambda_1\rho + \lambda_2\rho^2}{\lambda_1 x_0}\partial\rho \; . \qquad (18)$$

Теорема 6. Система (16) при произвольном $f(\rho)$ Q-условно инвариантна относительно операторов

$$Q_1 = -\partial_0 + \lambda u\rho\partial_u + \lambda\rho^2\partial\rho \; ,$$
$$Q_2 = \partial_0 + \lambda\partial_u + \lambda u f^{-1}\partial\rho \; , \qquad (19)$$
$$Q_3 = f\partial_1 + \lambda\partial\rho \; .$$

По операторам условной инвариантности (17)-(19) построены анзацы, редуцирующие систему ДУЧП (16) к системам ОДУ. Получены широкие классы точных решений системы уравнений (16). Некоторые из результатов, полученных для (16), удалось обобщить на многомерный случай.

Во втором параграфе предложен способ построения нелокальных анзацев для системы нелинейных уравнений диффузии

$$\begin{cases} u_0 = f(v)\,u_{11} \; , \\ v_0 = u_{11} \; . \end{cases} \qquad (20)$$

С помощью нелокальных преобразований система уравнений (20) сведена к нелинейному уравнению теплопроводности (5). Как лиевские, так и Q-условные операторы уравнения (5) использованы для построения нелиевских анзацев системы (20). Осуществлена редукция (20) к системам ОДУ и получены классы точных решений.

<u>В заключении</u> кратко сформулированы результаты диссертационной работы.

Основные положения диссертации опубликованы в работах:

I. Амеров Т.К. Об условной инвариантности нелинейного уравнения теплопроводности // Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. - С. I2-I4.

2. Фущич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. Об условной симметрии обобщенного уравнения Кортевега-де Фриза // Докл. АН УССР. - 1991. - № I2. - С. I5-I9.

3. Фущич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. - 1990. - № II. - С. I5-I8.

4. Фущич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. О нелокальных анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности // Докл. АН Украины. - I992. - № I. - С. 26-30.

5. W.I. Fushchich, N.I. Serov, T.K. Amerov Conditional invariance and exact solutions of gas dynamics equations // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy - 1992. - N 5. - P.35-40.

Подп. в печ. 20.07.92. Формат 60х84/I6. Бумага тип. Офс. печать. Усл. печ. л. 6,9. Усл. кр.-отт. 6,9. Уч.-изд. л. 0,5. Тираж I00 экз. Зак. 205 . Бесплатно.

Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН Украины Киев 4, ГСП, ул. Репина, 3