

АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

На правах рукописи

ГРИШИН Анатолий Филиппович

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

01.01.01 – Математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Харьков - 1992



00816261 (O)

Робота виконана в Харківському державному університеті.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математических наук,
професор Азарин В.С.;

доктор фізико-математических наук,
професор Гольдберг А.А.;

доктор фізико-математических наук,
професор Красичков І.Ф.

Ведущая організація: Санкт-Петербурзький державний
університет.

Захита дисертації состоїтся " 14 " декабрь 1992 г.
в 15 _____ часов на засіданні спеціалізованого совета
Д 016.27.02 в ФТИНТ АН України по адресу: 310164, Харків,
пр.Ленина, 47.

С дисертацією можна ознакоMITься в бібліотеці ФТИНТ
АН України.

Автореферат розслан " 23 " октябрь 1992 г.

Ученый секретарь
спеціалізованого совета
доктор фіз.-мат.наук

В.А.Ткаченко



ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Предмет исследования.

Субгармонические функции были введены в анализ в начале XIX века Ф.Гартогсом и Ф.Риссом. В одной из первых монографий по теории субгармонических функций И.И.Привалов [3] писал следующее: "После того, как теория субгармонических функций достаточно развилась, естественно возникает вопрос о приложении их как более общего класса функций к теории аналитических функций одного комплексного переменного. Этот новый методологический подход к проблемам теории функций комплексного переменного, в основании которого лежат свойства субгармонических функций, с одной стороны, дает упрощение доказательств и объясняет ряд положений, на первый взгляд, не связанных друг с другом; с другой стороны, позволяет сформулировать ряд принципов в наиболее общем виде для широкого класса субгармонических функций." В дальнейшем появились монографии, посвященные различным аспектам теории субгармонических функций. Отметим монографии Н.С. Ландкофа (1966), У.Хеймана и П.Кеннеди (1976), М.Цудзи (1959). В последней подробно исследуются вопросы применения субгармонических функций к теории аналитических функций.

Теорема Рисса о представлении субгармонической функции утверждает, что во всякой области, компактно вложенной в область субгармоничности, субгармоническая функция отличается от логарифмического потенциала лишь на гармоническое слагаемое. Таким образом теорию субгармонических функций можно рассматривать как часть значительно ранее оформившейся теории потенциала. Теория потенциала является более общей теорией, так как в ней рассматриваются ядра более общие, чем в теории субгармонических функций. Сближение происходит на путях развития абстрактной теории субгармонических функций, большой вклад в которую внес М.Брело.

Субгармонические функции естественным образом появляются в теории винеровских процессов. Связь теории потенциала и теории случайных процессов изложена в монографиях Г.Ханта (1957), Е.Б.Дынкина (1963), П.-А.Мейера (1966), Дж.Л.Дуба (1984). П.-А.Мейер во введении к своей книге отмечает, что вероятностные методы заметно улучшили понимание некоторых фундаментальных идей теории потенциала. Это касается понятий выметания, тонкости, полярных множеств. Теория субгармонических функций связана

и с другими разделами математики. Так, А. Губер (1957) дает приложения теории субгармонических функций к геометрии. В диссертации теория субгармонических функций развивается в направлении, о котором писал И. И. Привалов.

Один из вопросов, который занимает важное место в теории субгармонических функций с момента начала развития ее, связан с изучением непрерывности субгармонической функции. Функция, субгармоническая в области D , может быть разрывной в каждой точке области D . Широко известен классический принцип Василеско и Эванса, утверждающий, что субгармоническая функция, непрерывная на носителе ее риссовской меры, является непрерывной всюду. А. Картан ввел топологию, которую он назвал тонкой, в которой все субгармонические функции непрерывны. Важные результаты по тонкой топологии получили Шоке, Брело, Фугледе. Некоторые результаты, относящиеся к непрерывности субгармонической функции в эвклидовой топологии, получили Арсов (1956), Содин (1964).

Наряду с изучением поведения субгармонической функции во внутренних точках, важное место занимает изучение граничного поведения. Этому посвящена работа Литтлвуда (1929). Граничным свойствам аналитических и субгармонических функций посвящено несколько монографий, среди них книга И. И. Привалова (1941).

Субгармоническая функция не может принимать значение $+\infty$. Однако в некоторых точках она может обращаться в $-\infty$. Такие множества имеют емкость ноль и тип G_δ . Описание множества, где выполняется более тонкая оценка снизу, чем неравенство $\mathcal{U}(z) > -\infty$, труднее. Один из наиболее известных результатов в этой области - теорема Г. Картана об оценке многочлена снизу. Оценка снизу субгармонических функций дается в работах Альфорса (1931), Альфорса и Хейнса (1949), Хеймана (1956), Говорова (1968). Оценкам снизу гармонических и голоморфных функций в единичном круге и их применениям уделяется значительное внимание в монографии Н. К. Никольского (1974). Вопросы непрерывности, асимптотической непрерывности и связанные с ними вопросы об оценке снизу субгармонических функций - предмет исследования первой главы диссертации.

Изучение свойств специальных классов целых и субгармонических функций - другой важный аспект современных исследований. Эти исследования находят приложения в спектральной теории опера-

торов (Н.Г.Крейн, М.В.Келдыш, В.А.Марченко), конструктивной теории функций (Н.И.Ахиезер), радиотехнике (Я.И.Хургин, В.П.Яковлев), теории вероятностей (Д.В.Линник, И.В.Островский). Много применений находит класс целых функций вполне регулярного роста в смысле Левина-Пфлюгера. Теория функций вполне регулярного роста изложена в [1]. Новый подход к этой теории дает созданная В.С.Азариным теория динамических систем субгармонических функций. Н.В.Говоров построил теорию функций вполне регулярного роста, голоморфных в полуплоскости. Эта теория изложена в его монографии (1986). Л.И.Ронкин (1989) получил новые результаты в этой теории, а А.Ю.Рашковский и Л.И.Ронкин (1987) изучили субгармонические функции вполне регулярного роста в многомерном конусе.

В теории субгармонических функций многие важнейшие результаты получаются при использовании многочисленных интегральных формул. Наиболее известная из них - формула Пуассона - Иенсена. Широко применяются формулы Неванлинны, Симицзу - Альфорса, Карлемана, Левина, Петренко. Две новые интегральные формулы являются основой для части результатов второй главы диссертации. Многочисленные применения имеет метод рядов Фурье в теории субгармонических функций. Таким образом, исследование интегралов от субгармонических функций - важная часть теории этих функций. Во второй главе исследуются некоторые из интегралов. В результате получают новые формулы для индикатора и нижнего индикатора субгармонической функции. В связи с исследованием других интегралов вводятся и изучаются различные обобщения класса функций вполне регулярного роста.

В третьей главе диссертации теория целых и субгармонических функций прилагается к исследованию одной задачи интерполяции целыми функциями. Различные вопросы интерполяции целыми функциями освещены в монографиях В.Л.Гончарова (1954), М.А.Евграфова (1954), А.О.Гельфонда (1967, третье издание), Б.Я.Левина (1956), И.И.Ибрагимова (1971), см. также обзор [4].

Большое влияние на исследования по интерполяции оказала известная статья Карлесона 1962 года "Интерполяция ограниченными функциями и проблема короны". Она породила многочисленную литературу. Исследования по этим вопросам отражены в книгах П.Кусиса и Дж.Гарнетта. Большой вклад в разработку вопросов, связанных со свободной интерполяцией в классах H^∞ , H^p и клас-

сах гладких функций внесли ленинградские математики. О некоторых из этих исследований речь идет в обзоре С.А.Виноградова и В.П.Хавина (1974, 1976) и книге Н.К.Никольского (1980). Важные результаты по интерполяции в указанных выше классах получили армянские математики М.М.Джрбашян, Г.М.Айрапетян, В.М.Мартirosян, Ф.А.Шамоян.

В исследованиях А.Ф.Леонтьева по теории интерполяции, результаты которых изложены в трех монографиях, выделен класс целых функций, удовлетворяющих условию:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln |f'(a_n)|}{|a_n|^{\rho(|a_n|)}} - h(\arg a_n) \right) = 0, \quad (I)$$

где $\{a_n\}$ - множество всех корней целой функции $f(z)$ уточненного порядка $\rho(z)$, $h(\theta)$ - индикатор этой функции. А.Ф.Леонтьев ставит следующий вопрос. Пусть $f(z)$ - целая функция экспоненциального типа и $h(\theta) > 0$. Пусть для функции $f(z)$ выполняется равенство (I) при $\rho(z) \equiv 1$. Следует ли из этого, что $f(z)$ является функцией вполне регулярного роста? А.Ф.Леонтьев дает положительный ответ на этот вопрос при условии, что $f(z)$ удовлетворяет дополнительному ограничению:

$$\min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \ln |f(z_n e^{i\theta})| \geq \delta z_n, \delta > 0, z_n \rightarrow \infty.$$

С точки зрения общей теории целых функций имеет самостоятельное значение изучение класса целых функций, удовлетворяющих условию (I). Кроме того, ограничение (I) можно заменить более слабым: функция $f(z)$ имеет регулярный рост на множестве своих корней (определение приведено в дальнейшем тексте). Это ограничение позволяет корням функции $f(z)$ иметь достаточно высокую кратность. Таким образом возникает задача об описании класса целых функций, имеющих регулярный рост на множестве своих корней.

По ассоциации с принципом Василеско и Эванса можно было бы ожидать, что справедливо утверждение: "Если целая функция имеет регулярный рост на множестве своих корней, то она есть функция

вполне регулярного роста." Однако это утверждение ложно и это причина того, что А.Ф.Леонтьев налагает дополнительное ограничение $h(\theta) > 0$ при $\rho(z) \equiv 1$.

В диссертации доказано, что функция, имеющая регулярный рост на множестве своих корней, является делителем в кольце целых функций некоторой целой функции вполне регулярного роста, причем индикаторы делимого и делителя совпадают. Этого утверждения оказалось достаточно для исследования рассматриваемой в диссертации интерполяционной задачи. Однако, полное описание класса функций, регулярно растущих на множестве своих корней, пока неизвестно, как неизвестен и ответ на вопрос А.Ф.Леонтьева. Для всех известных целых функций, регулярно растущих на множестве своих корней, предельное множество Азарина состоит из функций вида $W(z e^{i\theta}) = h(\theta) z^{\rho}$, где $h(\theta)$ - некоторая тригонометрически ρ -выпуклая функция, зависящая от выбора W . Это позволяет высказать гипотезу.

Гипотеза. Если $f(z)$ есть целая функция, имеющая регулярный рост на множестве своих корней, то любая функция W из предельного по Азарину множества для функции $f(z)$ имеет вид $W(z e^{i\theta}) = h(\theta) z^{\rho}$.

В.С.Азарин, В.Б.Гинер, Р.Л.Подошев показали, что из справедливости этой гипотезы следует утвердительный ответ на вопрос А.Ф.Леонтьева.

Цель работы. Исследование непрерывности субгармонической функции в индивидуальной точке z_0 , лежащей или в области субгармоничности, или на прямолинейном участке границы. Исследование асимптотической непрерывности функций конечного порядка, субгармонических во всей плоскости и в полуплоскости. Исследование интегралов от субгармонических функций, вывод новых формул для индикатора и нижнего индикатора. Исследование различных обобщений класса функций вполне регулярного роста. Исследование задачи свободной интерполяции в классе целых функций

Методы исследования. Применяются методы классического анализа, некоторые методы комбинаторной геометрии, различные методы теории целых и субгармонических функций. В частности, используются теоремы о представлении субгармонических функций, интегральные формулы для субгармонических функций, используется тонкая топология.

Научная новизна. Для широкого класса субгармонических в функций введено понятие полной меры. Полная мера определяет функцию из такого класса с точностью до мнимой части целой вещественной функции. С помощью полной меры дается удобное и компактное представление субгармонических в \mathbb{C}_+ функций конечного порядка. Предложен новый метод выделения исключительных множеств, приспособленный к изучению асимптотического поведения в окрестности бесконечности субгармонических в плоскости и полуплоскости функций. Получены критерии непрерывности субгармонической функции в точке z_0 , когда z_0 лежит в области субгармоничности или на прямолинейном участке границы. Для субгармонической функции конечного порядка построены различные исключительные множества F , вне которых получается хорошая оценка функции

$$v(z, h) = \frac{1}{\tau^{\rho(z)}} (v(z+h\tau) - v(z)).$$

Найдены достаточные условия на риссовскую меру функции $v(z)$, субгармонической в \mathbb{C} , для того, чтобы множество покрывалось системой кругов

- нулевой линейной плотности,
- видимых из начала координат под конечным углом,
- с конечной суммой радиусов,

и, одновременно, чтобы выполнялось соотношение

$$v(z, h) \rightarrow 0 \quad \text{при } z, z+h\tau \in F. \quad (2)$$

$h \rightarrow 0$

Эти результаты приводят к некоторому дополнению теории Левина и Пфлюгера.

Для случая полуплоскости доказан критерий существования множества F такого, чтобы оно, во-первых, покрывалось системой кругов нулевой линейной плотности и, во-вторых, чтобы выполнялось соотношение (2).

Получены новые формулы для индикатора и нижнего индикатора субгармонической функции, выраженные в терминах интегралов от нее. Из этих формул следует критерий полной регулярности роста на фиксированном луче.

Введены понятия ρ -индикатора $H_\rho(\theta)$ и нижнего ρ -индикатора $\underline{H}_\rho(\theta)$ для целой функции $f(z)$. Функции

$H_p(\theta)$ и $\underline{H}_p(\theta)$ обладают двумя свойствами. Во-первых, выполняются неравенства $H_p(\theta) \leq h(\theta)$ и $\underline{H}_p(\theta) \geq \underline{h}(\theta)$, где $h(\theta)$ и $\underline{h}(\theta)$ - индикатор и нижний индикатор функции $f(z)$. Во-вторых, функции $H_p(\theta)$ и $\underline{H}_p(\theta)$ относительно просто выражаются через корни функции $f(z)$. Все это вместе дает точную оценку снизу для $h(\theta)$ и точную оценку сверху для $\underline{h}(\theta)$. Эти оценки превращаются в равенства, если луч $\arg z = \theta$ является лучом вполне регулярного роста.

Введены и изучены классы функций ρ -регулярного роста и более узкий класс функций слабо регулярного роста, который содержит класс функций вполне регулярного роста. Получена система неравенств для корней функции $f(z)$, имеющей заданный индикатор. Произвольная ограниченная тригонометрически ρ -выпуклая функция порождает такое неравенство. Из этих неравенств следует новая теорема единственности для целых функций с индикатором, не превосходящим заданный.

Доказана теорема, утверждающая, грубо говоря, что если $W(z)$ есть положительная функция, представимая в виде разности субгармонических, то ограничение риссовской меры этой функции на множество, где она обращается в ноль, есть положительная мера.

Введен класс функций, регулярно растущих на множестве своих корней. Доказано, что если целая функция с индикатором $h(\theta)$ регулярно растет на множестве своих корней, то она является делителем в кольце целых функций целой функции вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$.

Получено полное решение задачи свободной интерполяции с простыми узлами интерполяции в классе целых функций $[\rho(z), h(\theta)]$.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при развитии теории целых и мероморфных функций в различных направлениях. Автор считает, что таким результатом, в частности, является следующее представление для функций, субгармонических в полуплоскости и удовлетворяющих условию $v(z) \leq Mz^{\rho(z)}$,

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K_p(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \sum_{k=1}^{P_1} c_k \operatorname{Im} z^k,$$

где $\rho = \lim_{z \rightarrow \infty} \rho(z)$, $P = [P]$, $P_1 = \max(\rho, 1)$, λ -

полная мера функции $\mathcal{V}(z)$ (здесь предполагается, что она не нагружает некоторой окрестности нуля). Ядро представления определяется формулами:

$$K_p(z, \xi) = \frac{1}{\text{Im } \xi} \operatorname{Re} \left(\ln \frac{z-\xi}{z-\bar{\xi}} + z \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\bar{\xi}} \right) + \dots + \frac{z^p}{p} \left(\frac{1}{\xi^p} - \frac{1}{\bar{\xi}^p} \right) \right),$$

$$K(z, \xi) = K_0(z, \xi) = \frac{1}{\text{Im } \xi} \ln \left| \frac{z-\xi}{z-\bar{\xi}} \right|,$$

при $\text{Im } z > 0$, $\text{Im } \xi > 0$ и продолжается по непрерывности по переменной ξ на вещественную ось. Многие авторы, в частности, Неванлинна, Хейман, Говоров, Ито при изучении голоморфных, мероморфных, субгармонических функций в полуплоскости пользовались аналогичными формулами. Однако, в одних случаях эти формулы получались при других ограничениях на функцию $\mathcal{V}(z)$, в других - выглядели более сложно.

Некоторые результаты диссертации использовались в исследованиях других авторов, другие явились исходным пунктом для дальнейших исследований. Так, М.Л.Содин (1984) нашел для функций, субгармонических в \mathbb{C} , критерий существования множества F такого, что оно покрывается системой кругов нулевой линейной плотности и, кроме того, выполняется равенство (2). М.Л.Содин (1985) также изучил асимптотический модуль непрерывности субгармонической функции и ее частных производных. Б.Н.Хабибуллин (1991) получил новые неравенства для корней целой функции с заданным индикатором. Одна из теорем, представляющая интерес для общей теории субгармонических функций, в дальнейшем тексте именуемая теоремой 18, использовалась в работах Еременко и Содиной (1990, 1990). В последнее время Фуглде (1991) доказал усиленный вариант этой теоремы и нашел его применение.

Полученное в диссертации решение задачи свободной интерполяции в классе целых функций $[\rho(r), h(\theta)]$ позволяет приступить к решению аналогичной задачи, для соответствующего класса функций, голоморфных в полуплоскости.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на VI и VII конференциях "Некоторые проблемы комплексного анализа" (Черноголовка, 1983, 1987 годы), на республиканской конференции по теории целых и субгармонических функций, Харьков, 1990 г., на семинаре во Львове (руководитель А.А.Гольдберг), Ростове

(руководитель Д.Ф.Коробейник), Санкт-Петербурге (руководитель В.П.Хавин), Уфе (руководитель В.В.Напалков), Харькове (руководитель Б.Я.Левин).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [5 - 12], список которых приведен в конце автореферата. Одна работа написана в соавторстве с М.Л.Содиным. Некоторые из результатов приведены в книге [2] и обзоре [4].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и трех глав. Общий объем диссертации 434 страницы. Библиография содержит 136 названий.

Содержание работы. Вначале отметим, что теоремы из диссертации, на которые мы будем ссылаться, но не формулировать полностью, будут иметь двойную нумерацию, например, теорема 3.2-теорема 3 из главы 2. Теоремы, которые доказаны в диссертации, и которые мы будем формулировать в автореферате, будут снабжены последовательными номерами - теорема I, теорема 2 и так далее. Буквой M будем обозначать константы, не обязательно одни и те же. Введем необходимые определения и обозначения.

Абсолютно непрерывная функция $\rho(z)$, $z \in [0, \infty)$, называется уточненным порядком (в смысле Валирона), если выполняются условия:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \rho(z) = \rho, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z \ln z \rho'(z) = 0.$$

Часто рассматривается случай, когда ρ - положительное число. Иногда нам удобно будет предполагать, что ρ - произвольное вещественное число. Функцию $z^\rho(z)$ мы будем обозначать $V(z)$.

Уточненный порядок $\rho(z)$ называется формальным порядком функции $\mathcal{V}(z)$, субгармонической во всей плоскости \mathbb{C} (верхней полуплоскости \mathbb{C}_+), если существует такая константа M , что выполняется неравенство

$$\mathcal{V}(ze^{i\theta}) \leq M V(z), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (\theta \in (0, \pi)).$$

Уточненный порядок $\rho(z)$ называется полуформальным порядком субгармонической в \mathbb{C}_+ функции $\mathcal{V}(z)$, если $\rho(z)$ - формальный порядок этой функции и существуют числа $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\varrho \in (0, 1)$, M такие, что в каждой области $D(R, \varrho, \delta) = \{z: \varrho R < |z| < \frac{1}{\varrho} R, \quad \delta < \arg z < \pi - \delta\}$ найдется точка z такая,

что $v(z) > M V(z)$.

Через $SF(\rho(z))$ обозначаем класс субгармонических в \mathbb{C}_+ функций, для которых $\rho(z)$ является формальным порядком.

Через $SHF(\rho(z))$ обозначаем класс субгармонических в \mathbb{C}_+ функций, для которых $\rho(z)$ является полуформальным порядком.

Через SK обозначаем класс субгармонических в \mathbb{C}_+ функций, для которых в каждой ограниченной области $D \subset \mathbb{C}_+$ существует положительная гармоническая мажоранта.

Имеют место соотношения

$$SHF(\rho(z)) \subset SF(\rho(z)) \subset SK.$$

Известно, что если $\rho > 1$, то классы $SF(\rho(z))$ и $SHF(\rho(z))$ совпадают.

Для функций $v \in SK$ вводится понятие полной меры. Пусть $v \in SK$, μ - ее риссовская мера. Функция

$$v(t) = \overline{\lim}_{y \rightarrow +0} v(t+iy)$$

называется граничными значениями функции $v(z)$. Таким образом функции из класса SK можно считать определенными в замкнутой полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$. По теореме 39.1 функция $v(t)$ интегрируема по Лебегу на каждом сегменте $[a, b]$. Кроме того, для почти всех a и b существует предел

$$v([a, b]) = \lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b v(x+iy) dx.$$

Указанное равенство определяет меру ν на \mathbb{R} . Мера ν называется граничной мерой функции $v(z)$. Имеет место равенство $d\nu(t) = v(t)dt + d\sigma(t)$, где σ - сингулярная мера на \mathbb{R} , которая называется сингулярной граничной мерой функции $v(z)$. Мера λ , определяемая по формуле

$$d\lambda(\xi) = 2\pi \text{Im } \xi d\mu(\xi) - d\nu(t)$$

называется полной мерой субгармонической функции $v(z)$. Нам удобно считать, что мера λ - это мера в плоскости \mathbb{C} .

Мера λ обладает такими свойствами.

1) Мера λ конечна на каждом компакте.

2) Ограничение меры λ на полуплоскость \mathbb{C}_- есть нулевая мера.

3) Ограничение меры λ на полуплоскость \mathbb{C}_+ есть положительная мера.

Сама же мера λ в общем случае есть знакопеременная мера. Ее жорданова составляющая λ_- сосредоточена на \mathbb{R} и равна

$$d\lambda_-(t) = v_+(t)dt + d\sigma_+(t),$$

где σ_+ - положительная жорданова компонента меры σ ,

$$v_+(t) = \max(v(t), 0).$$

Теорема 40.1 утверждает, что равенство

$$v_2(z) - v_1(z) = \operatorname{Im} g(z), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

где $g(z)$ - целая вещественная функция, есть необходимое и достаточное условие равенства полных мер функций $v_1(z)$ и $v_2(z)$. Теорема 46.1 утверждает, что для функций $v(z) \in SF(\rho(z))$ сингулярная граничная мера отрицательная, и что справедливы формулы

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K(z, \xi) d\lambda(\xi) + d_1 y, \quad d_1 \leq 0 \quad \text{при } \rho < 1,$$

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K_\rho(z, \xi) d\lambda(\xi) + \sum_{k=1}^{\rho} d_k \operatorname{Im} z^k, \quad \rho = [\rho] \geq 1,$$

причем для справедливости второй формулы необходимо дополнительное предположение о сходимости в нуле написанного интеграла.

Символами $C(z, a)$, $B(z, a)$ обозначаем, соответственно, открытый и замкнутый круг с центром в точке z и радиусом a .

Уточненный порядок $\rho(z)$ называется формальным порядком меры λ , если существует константа M такая, что

$$|\lambda|(B(a, z)) \leq M V(z), \quad \text{где } |\lambda| = \lambda_+ + \lambda_- \text{ - полная вариация меры } \lambda.$$

Пусть μ - положительная мера формального порядка $\rho(z)$.

Функцию

$$\varphi(\lambda) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\mu(B(z, \lambda z))}{V(z)}, \quad z = |z|$$

мы называем функцией концентрации меры μ .

В параграфе 1.3 главы I описываются выделение и оценка исключительного множества для положительной меры. Исключительное множество определяется двумя строго возрастающими непрерывными функциями $A(\tau)$, $\tau \in [0, \infty)$, $A(0) = 1$, $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\varphi(0) = 0$. Обычно $A(\tau) = V(\tau)$, где $\rho(\tau)$ - формальный порядок меры μ . Однако рассматриваются и другие функции $A(\tau)$.

Исключительным множеством для положительной меры μ , определяемым функциями $A(\tau)$ и $\varphi(\lambda)$, называется множество $F \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, для которых существует $\lambda \in (0, 1]$ такое, что

$$\mu(B(z, \lambda z)) \geq \varphi(\lambda) A(\tau). \quad (3)$$

Для каждой точки $z \in F$ существует максимальное из чисел $\lambda \in (0, 1]$, для которых выполняется неравенство (3). Это число обозначается λ_z . Если $\lambda_z < 1$, то выполняется равенство

$$\mu(B(z, \lambda_z z)) = \varphi(\lambda_z) V(\tau).$$

С множеством F мы связываем открытое множество G ,

$$G = \bigcup_{z \in F} C(z, \lambda_z z).$$

Пусть $G = \bigcup G_i$ есть разложение множества G на связанные компоненты. Допустим, что каждая компонента G_i ограничена и \mathcal{A} есть система кругов $C(g_i, r_i)$, где $C(g_i, r_i)$ - круг наименьшего радиуса, содержащий компоненту G_i . Тогда система кругов \mathcal{A} покрывает множество F .

Для произвольной системы \mathcal{A} кругов $C(g_i, r_i)$ верхней линейной плотностью системы \mathcal{A} называется величина

$$l^*(A) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sum_{|g_i| \leq R} R_i.$$

Множество F называется C_0 - множеством, если существует система кругов A , покрывающая F , такая, что $l^*(A) = 0$.

Основные результаты главы I содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть $v(z)$ субгармоническая в \mathbb{C} функция формального порядка $\rho(z)$. Тогда существует константа M_1 , такая, что если выделение исключительного множества F производится с помощью функций $A(z) = V(z)$, $\varphi(\alpha) = \frac{M_1}{2} \alpha$, $\alpha \in (0, \frac{1}{4}]$, то множество F покрывается системой кругов A такой, что $l^*(A) \leq \alpha$ и справедливы неравенства

$$|v(z, h)| \leq M \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{|h|}{\alpha t} \right) dt, \quad z, z + hz \in F,$$

$$|v(z)| \leq M \ln \frac{1}{\alpha} V(z), \quad z \in F.$$

Теорема 2. Пусть $v(z)$ субгармоническая во всей плоскости функция формального порядка $\rho(z)$. Пусть функция концентрации $\Phi(\alpha)$ ее риссовской меры удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \ln \frac{1}{\alpha} d\Phi(\alpha) < \infty. \quad (4)$$

Пусть $\Phi_1(\alpha)$ вогнутая мажоранта функции $\Phi(\alpha)$, также удовлетворяющая условию (4) (такая мажоранта всегда существует).

Пусть F^- - исключительное множество для меры μ , построенное с помощью функций $A(z) = V(z)$, $\varphi(\alpha) =$

$\max(M_1 \alpha, \sqrt{\alpha}, 2\Phi_1(\alpha))$ со специально выбранной константой M_1 . Тогда F^- есть C_0 - множество и справедливо неравенство

$$|v(z, h)| \leq M\sqrt{|h|} + \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{|h|}{t}\right) d\varphi_1(t), \quad z, z+hz \in F.$$

Теорема 3. Пусть $v(z)$ - субгармоническая во всей плоскости функция формального порядка $\rho(z)$, μ - ее рисовская мера. Пусть существуют возрастающая функция $\Phi(\alpha)$, удовлетворяющая условию (4), и функция $\epsilon(z) \downarrow 0$ ($z \rightarrow \infty$) такие, что

$$\mu(B(z, \alpha z)) \leq (\Phi(\alpha) + \epsilon(z))v(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда, если для каждого $\epsilon > 0$ сходится интеграл

$$\int_1^\infty e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon(\frac{1}{2}z)}} \frac{d\mu(B(0, z))}{v(z)} < \infty, \quad (5)$$

то существует множество F , покрываемое системой кругов $A = \{C(q_i, r_i), i=1, 2, \dots\}$, видимых из начала координат под конечным углом

$$\left(\text{то есть } \sum_i \arcsin \frac{r_i}{|q_i|} < \infty\right)$$

и такое, что

$$v(z, h) \geq 0 \quad \text{при } z, z+h z \in F. \\ h > 0$$

Если для каждого $\epsilon > 0$ сходится интеграл

$$\int_1^\infty z e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon(\frac{1}{2}z)}} \frac{d\mu(B(0, z))}{v(z)} < \infty \quad (6)$$

то существует множество F , покрываемое системой кругов с конечной суммой радиусов, и такое, что

$$v(z, h) \geq 0 \quad \text{при } z, z+h z \in F. \\ h > 0$$

Замечание. Из условия $\lim_{z \rightarrow \infty} \varepsilon(z) \ln \ln z = 0$ следует условие (5), из условия $\lim_{z \rightarrow \infty} \varepsilon(z) \ln z = 0$ следует условие (6).

Теорема 4. Пусть $\nu(z) \in SHF(\rho(z))$, μ - рисовская мера $\nu(z)$, $d\mu_1(\xi) = 2\pi \operatorname{Im} \xi d\mu(\xi)$.

Для того, чтобы существовало C_0 - множество F такое, что

$$\nu(z, h) \underset{h \rightarrow 0}{\Rightarrow} 0 \quad \text{при } z, z+hz \in \bar{C}_+ \setminus F \quad (7)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие четыре условия.

1) Существует множество $E_1 \subset \mathbb{R}$ линейной плотности ноль такое, что

$$\nu(t, h) \underset{h \rightarrow 0}{\Rightarrow} 0 \quad \text{при } t, t+ht \in (-\infty, \infty) \setminus E_1.$$

2) Мера $-\sigma$ имеет минимальный тип относительно уточненного порядка $\rho(z)+1$.

3) Для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$ линейной плотности ноль мера χ_E , $d\chi_E(t) = \chi_E(t) \nu_-(t) dt$ имеет

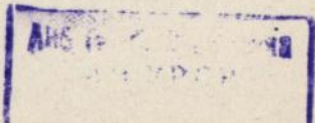
минимальный тип относительно уточненного порядка $\rho(z)+1$.

$$4) \psi_1(\theta, \delta) \underset{\delta \rightarrow 0}{\Rightarrow} 0 \quad \text{при } \theta \in (0, \pi), \quad \text{где}$$

$$\psi_1(\theta, \delta) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{z \nu(z)} \int_{\eta}^{\delta} \frac{\mu_1(B(z, tz))}{t(t+\sin \theta)^2} dt, \quad z = ze^{i\theta}$$

Субгармоническая в \mathbb{C} функция $\nu(z)$ с индикатором $h(\theta)$ называется функцией вполне регулярного роста в смысле Б.Я. Левина - А. Флугера, если существует C_0 - множество F такое, что

$$\frac{\nu(ze^{i\theta})}{\nu(z)} - h(\theta) \underset{z \rightarrow \infty}{\Rightarrow} 0 \quad \text{при } ze^{i\theta} \notin F. \quad (7')$$



Из теоремы 3 следует такое дополнение к теории Левина - Пфлюгера.

Теорема 5. Пусть $v(z)$ - функция вполне регулярного роста. Пусть существуют возрастающая функция $\varphi(\alpha)$, удовлетворяющая условию (4), и функция $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \infty$) такие, что выполняется одно из неравенств

$$\mu(B(z, \alpha z)) \leq \left(\varphi(\alpha) + \frac{\varepsilon(z)}{\ln \ln z} \right) v(z), \quad (8)$$

$$\mu(B(z, \alpha z)) \leq \left(\varphi(\alpha) + \frac{\varepsilon(z)}{\ln z} \right) v(z). \quad (9)$$

Тогда, если выполняется неравенство (8), то существует множество F , покрываемое системой кругов, видимых из начала координат под конечным углом, и такое, что выполняется соотношение (7). Если выполняется неравенство (9), то существует множество F , покрываемое системой кругов с конечной суммой радиусов и такое, что выполняется соотношение (7).

Перейдем к изложению результатов главы II. Главный результат первой части этой главы составляет следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $v(z) \in SF(\rho(z))$, $\theta \in (0, \pi)$

S - произвольное вещественное число,

$$W_S(\alpha) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^{1+S} v(z)} \int_0^{(1+\alpha)z} t^S v(te^{i\theta}) dt,$$

$$\underline{W}_S(\alpha) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^{1+S} v(z)} \int_0^{(1+\alpha)z} t^S v(te^{i\theta}) dt.$$

Пусть $h(\theta)$ и $\underline{h}(\theta)$ - индикатор и нижний индикатор функции $v(z)$. Тогда

1) существуют пределы

$$W_S = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{W_S(\alpha)}{\alpha}, \quad \underline{W}_S = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\underline{W}_S(\alpha)}{\alpha},$$

2) выполняются равенства

$$h(\theta) = W_S, \quad \underline{h}(\theta) = \underline{W}_S,$$

3) если $N \in (-\infty, \infty) \cap [h(\theta), \underline{h}(\theta)]$,

$$W(\alpha) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z \sqrt{z}} \int_1^{(1+\alpha)z} |v(te^{i\theta}) - NV(t)| dt,$$

то

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{W(\alpha)}{\alpha} = 0.$$

Из теоремы 6 следует следующий критерий полной регулярности на луче $\arg z = \theta$.

Теорема 7. Пусть $v(z) \in SF(\rho(z))$, $\alpha < \rho$.

Для того, чтобы функция $v(z)$ была функцией вполне регулярного роста на луче $\arg z = \theta$, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел

$$H(\theta) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^\alpha}{\sqrt{z}} \int_1^z \frac{v(te^{i\theta})}{t^{1+\alpha}} dt$$

Заменив область интегрирования на луч $[z, \infty)$, можно получить аналогичный критерий для случая $\alpha > \rho$. Теорема 7 при дополнительном предположении, что $H(\theta) = \frac{1}{\rho - \alpha} h(\theta)$

была доказана Б.Я. Левиным [1]. В главе II приводятся два обобщения теоремы 7 путем замены субгармонической функции $v(te^{i\theta})$ на вещественную функцию $u(t)$ при некоторых ограничениях на функцию $u(t)$, которые заменяют свойство субгармоничности.

Переходим ко второй половине главы II. Пусть $f(z)$ - целая функция формального порядка ρ ,

$$J(z e^{i\theta}) = \int_1^z \frac{\ln |f(te^{i\theta})|}{t^{1+\rho}} dt.$$

В стандартной ситуации величина $|J(z)|$ возрастает, как $\ln |z|$, а в общем случае ее рост не превышает $\ln |z|$. Поэтому естественно ввести величины

$$H_p(\theta) = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{J(\tau e^{i\theta})}{\ln \tau},$$

$$H_p(\theta) = \underline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{J(\tau e^{i\theta})}{\ln \tau},$$

которые мы называем ρ -индикатором и нижним ρ -индикатором целой функции $f(z)$. Еще Валирон (1931) заметил, что $H_p(\theta)$ есть тригонометрически ρ -выпуклая функция. Пусть $\cos^* \rho \theta$ есть 2π -периодическое продолжение функции $\cos \rho \theta$ с сегмента $[-\pi, \pi]$. Пусть μ - риссовская мера функции $\ln |f(z)|$, т.е. мера, сосредоточенная на последовательности z_n корней функции $f(z)$, причем $\mu(\{z_n\}) = K$, где K - кратность корня z_n . Введем меру μ_1 по формуле

$$d\mu_1(\xi) = \cos^* \rho(\arg \xi - \theta - \pi) d\mu(\xi).$$

При $\rho > \frac{1}{2}$ мера μ_1 , вообще говоря, знакопеременная.

Справедлива следующая теорема, являющаяся источником остальных результатов главы II.

Теорема 8. Пусть $f(z)$ - целая функция формального порядка ρ . Тогда справедливо следующее равенство (ρ - нецелое)

$$J(\tau e^{i\theta}) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \int_1^{\tau} \frac{\mu_1(B(0, t))}{t^{1+\rho}} dt + O(1) \quad (\tau \rightarrow \infty) \quad (10)$$

Из теоремы 8 непосредственно следует такое утверждение.

Теорема 9. Пусть $f(z)$ целая функция формального порядка ρ , ρ - нецелое. Тогда справедливы следующие равенства

$$H_p(\theta) = \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln z} \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \int_1^z \frac{\mu_1(B(0, t))}{t^{1+\rho}} dt, \quad (11)$$

$$H_p(\theta) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln z} \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \int_1^z \frac{\mu_1(B(0,t))}{t^{1+\rho}} dt + O(1). \quad (I2)$$

Формулы, аналогичные формулам (I0), (II), (I2), но имеющие более сложный вид, приведены в диссертации и для случая целого ρ .

Формулы (I0), (II) показывают, что ρ - индикатор и нижний ρ - индикатор, в отличие от индикатора и нижнего индикатора весьма просто выражаются через корни функции $f(z)$. Эти формулы вместе с неравенствами $H_p(\theta) \leq h(\theta)$,

$H_p(\theta) \geq h(\theta)$ дают точную оценку снизу индикатора $h(\theta)$ и точную оценку сверху нижнего индикатора $h(\theta)$. Отметим,

что соответствующие неравенства превращаются в равенства, если луч $\arg z = \theta$ есть луч вполне регулярного роста для функции $f(z)$. Отметим также, что оценками индикатора и нижнего индикатора, через меры, порожденные корнями функции $f(z)$, занимались многие математики. Мы укажем лишь на цикл работ А.А. Гольдберга (1962-1965).

Если функция $f(z)$ является функцией вполне регулярного роста на луче $\arg z = \theta$, то существует предел

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln z} \int_1^z \frac{\ln |f(te^{i\theta})|}{t^{1+\rho}} dt, \quad (I3)$$

и выполняется равенство $H_p(\theta) = h(\theta)$. Однако, аналог теоремы 7 для случая $\lambda = \rho$ не имеет места. Из существования предела (I3) не следует, что функция $f(z)$ является функцией вполне регулярного роста на луче $\arg z = \theta$. Следовательно, имеет смысл следующее определение.

Целая функция формального порядка ρ называется функцией ρ - регулярного роста на луче $\arg z = \theta$, если существует предел

$$H_p(\theta) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{J(z e^{i\theta})}{\ln z}$$

Из ρ -регулярности роста не вытекает равенство $H_\rho(\theta) = h(\theta)$. Поэтому вводится еще одно определение.

Целая функция формального порядка ρ называется функцией слабо регулярного роста на луче $\arg z = \theta$, если она является функцией ρ -регулярного роста на этом луче и выполняется равенство $H_\rho(\theta) = h(\theta)$.

Множество корней целой функции $f(z)$ называется ρ -правильно распределенным в случае нецелого ρ , если существует не более, чем счетное множество Θ такое, что при $\nu, \theta \in [0, 2\pi] \setminus \Theta$ существует предел

$$\Delta_\rho(\nu, \theta) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln z} \int_1^z \frac{n(t, \nu, \theta)}{t^{1+\rho}} dt,$$

где $n(t, \nu, \theta)$ - число корней функции $f(z)$ в секторе $\{z: |z| \leq t, \nu \leq \arg z \leq \theta\}$. В случае целого ρ дополнительно требуется, чтобы существовал предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln R} \sum_{|z_n| \leq R} \frac{1}{z_n^\rho} \ln \frac{R}{|z_n|}$$

где $\{z_n\}$ - множество корней функции $f(z)$ без учета нуля.

Теорема I0. Для того, чтобы целая функция $f(z)$ формального порядка ρ была функцией ρ -регулярного роста во всей плоскости \mathbb{C} , необходимо и достаточно, чтобы множество ее корней было ρ -правильно распределено.

Теорема II. Для того, чтобы целая функция $f(z)$ была функцией слабо регулярного роста на луче $\arg z = \theta$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\Delta > 0$ множество

$$E = \{z: \ln |f(ze^{i\theta})| < (h(\theta) - \Delta) z^\rho\}$$

имело логарифмическую плотность ноль, т.е., чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln z} \int_1^z \chi_E(t) \frac{dt}{t} = 0.$$

Класс функций ρ -регулярного роста значительно более широкий, чем класс функций вполне регулярного роста. В частности, этот класс содержит целые функции, предельное множество Азарина которых является периодическим [4].

Пусть $K(\psi)$ - произвольная ограниченная 2π -периодическая тригонометрически ρ -выпуклая функция, $f(z)$ - целая функция формального порядка ρ , μ - риссовская мера функции $\ln |f(z)|$,

$$d\mu_2(\xi) = K(\arg \xi) d\mu(\xi).$$

Теорема 12. Пусть $f(z)$ - целая функция формального порядка ρ , $\rho > 0$, $h(\theta)$ - ее индикатор, $K(\psi)$ - ограниченная 2π -периодическая тригонометрически ρ -выпуклая функция, μ - мера на единичной окружности, порожденная функцией

$$S(\psi) = h'(\psi - 0) + \rho^2 \int_0^\psi h(\varphi) d\varphi.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r \frac{\mu_2(B(0, t))}{t^{1+\rho}} dt \leq \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} K(\varphi) dS(\varphi).$$

В силу произвольности функции K , эта теорема дает целую систему ограничений на корни функции $f(z)$ при условии, если известен индикатор этой функции. Из этой теоремы следует теорема единственности для целых функций с индикатором, не превышающий заданный. Первые утверждения такого рода были установлены в классических теоремах Ф. Карлсона, Т. Карлемана, Р. Неванлинны. Дальнейшие теоремы были получены В. Я. Левиным [1, гл. IV, § 2, 3]. Случай положительных корней и $\rho = 1$ был с достаточной полнотой разобран в работах В. Фукса, Ж. П. Кахана, П. Маявена и Л. Рубела. Эти теоремы находят применения в вопросах полноты систем аналитических функций, в аналитическом продолжении степенных рядов, во многих других вопросах анализа.

Теорема 13. Пусть $f(z)$ - целая функция формального порядка ρ , $\rho > 0$, $h_2(\theta)$ - ее индикатор, $f|_\Lambda = 0$, где $\Lambda = \{z_n e^{i\psi_n}, n = 1, 2, \dots\}$, $h(\theta)$ - 2π -периоди-

ческая ограниченная тригонометрически ρ - выпуклая функция. Пусть $h_f(\theta) \leq h(\theta)$. Пусть K , $K \geq 0$, - произвольная 2π - периодическая ограниченная тригонометрически ρ - выпуклая функция, $d\mu_2(\xi) = K(\arg \xi) d\mu(\xi)$, где μ - считающая функция множества Λ . Пусть S - мера на единичной окружности, построенная по функции $h(\theta)$ способом, указанным в теореме I2. Тогда, если

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln z} \int_1^z \frac{\mu_2(B(0,t))}{t^{1+\rho}} dt > \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} K(\varphi) dS(\varphi),$$

то $f(z) \equiv 0$.

Остановимся теперь на результатах главы III. Введем вначале необходимые определения. Пусть $\rho(z)$ - уточненный порядок, E - счетное множество, μ_E - считающая функция множества E , т.е. $\mu_E(D)$ равно количеству точек в множестве $E \cap D$. Пусть $\mu_E(B(0,r)) \leq M V(r)$. Обозначим

$$\tilde{d}_E(K) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_E(K^t)}{V(t)}, \quad K^t = \{z: \frac{z}{t} \in K\}$$

Пусть $K_\sigma = \bigcup_{z \in K} B(z, \sigma)$. Функцией плотности множества E относительно уточненного порядка $\rho(z)$ называется функция

$$d_E(K) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \tilde{d}_E(K_\sigma).$$

Функция $d_E(K)$ - это аналог верхней угловой плотности $\Delta(u, \theta)$. Имеет место равенство

$$\Delta(u, \theta) = \tilde{d}_E(\{z: |z| \leq 1, u \leq \arg z \leq \theta\}).$$

Пусть $f(z)$ - целая функция с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(z)$. Множество E называется множеством регулярного роста для функции $f(z)$, если существует отображение T , определенное на множестве E , и обладающее свойствами

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{T(z)}{z} = 1, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in T(E)}} \left(\frac{\ln |f(z)|}{\sqrt{|z|}} - h(\arg z) \right) = 0.$$

Введенное определение позволяет говорить о функциях, регулярно растущих на множестве своих корней.

Третья глава посвящена изучению одной задачи по интерполяции целыми функциями. Вопросами, близкими к исследованию автора, ранее занимались Б.Я. Левин, А.Ф. Леонтьев, О.С. Фирсакова, А.М. Руссаковский, А.В. Братищев, К.Г. Малютин. Так, А.Ф. Леонтьев впервые поставил задачу о свободной интерполяции в заданном классе и решил ее для классов $[p, \infty)$, $[p, \infty]$. Мы рассматриваем задачу свободной интерполяции в классе $[p(z), h(\theta)]$, т.е. в классе таких целых функций, чей индикатор относительно уточненного порядка $\rho(z)$ не превышает $h(\theta)$. В предыдущих работах по задаче свободной интерполяции в классе $[p(z), h(\theta)]$ дополнительно предполагалось, что узлы интерполяции таковы, что существует целая функция с индикатором $h(\theta)$, обращающаяся в ноль в узлах интерполяции. Основным результатом наших исследований состоит в том, что указанное условие является необходимым условием разрешимости задачи свободной интерполяции в классе $[p(z), h(\theta)]$.

Теорема I4. Пусть $E = \{a_n = z_n e^{i\theta_n}, n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность комплексных чисел с единственной точкой сгущения на бесконечности, $\rho(z)$ — уточненный порядок, $\rho = \lim_{z \rightarrow \infty} \rho(z) > 0$, $h(\theta)$ — 2π -периодическая ограниченная тригонометрически ρ -выпуклая функция, $H(z e^{i\theta}) = h(\theta) z^\rho$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

а) Для любой последовательности b_n , удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{r_n}} \ln |b_n| - h(\theta_n) \right] \leq 0 \quad (I4)$$

существует $f(z) \in [p(z), h(\theta)]$ такая, что $f(a_n) = b_n$.

- б) Для любой последовательности b_n , удовлетворяющей условию (I4), существует целая функция $f(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$ и такая, что $f(a_n) = b_n$.
- в) Существует целая функция с индикатором $h(\theta)$, обращающаяся в ноль в каждой точке a_n и такая, что

$$\overline{\lim} \left[\frac{1}{\sqrt{r_n}} \ln \frac{1}{|\varphi'(a_n)|} + h(\theta_n) \right] \leq 0. \quad (I5)$$

- г) Существует целая функция $\psi(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$, которая обращается в ноль в каждой точке множества E и такая, что если $\{\lambda_n\}_1^\infty$ - множество всех корней функции $\psi(z)$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{|\lambda_n|}} \ln \frac{1}{|\psi'(\lambda_n)|} + h(\arg \lambda_n) \right] \leq 0.$$

- д) 1) $d_E(K) \leq \mu_H(K)$ для любого компакта K , где μ_H - риссовская мера функции $H(z)$,

$$2) \lim_{\delta \rightarrow +0} \sup_Z \int_0^\delta \frac{\varphi_{E,z}(\alpha)}{\alpha} d\alpha = 0,$$

где

$$\varphi_{E,z}(\alpha) = \frac{(\mu_E(B(z, \alpha z)) - 1)_+}{\sqrt{r}}, \quad r = |z|.$$

Импликацию $r \Rightarrow a$ ранее доказала О.С.Фирсакова, $b \Rightarrow a$ А.М.Руссаковский, $a \Rightarrow \delta$ Малютин. Новыми являются импликации $a \Rightarrow \delta$, $\delta \Rightarrow e$.

Имеется аналогия между сформулированной теоремой о теореме о разрешимости задачи свободной интерполяции в классе H^∞ в круге. Неравенство $d_E(K) \leq \mu_H(K)$ есть аналог условия, что мера, порождаемая узлами интерполяции, есть карлесонова мера, а условие 2 из пункта д) есть аналог требования несгущаемости

$$\left| \frac{z_n - z_k}{1 - z_k \bar{z}_n} \right| \gg 2$$

при $n \neq k$.

Отметим еще, что задача свободной интерполяции в классе $[p(z), h(\theta)]$ без ограничений на кратность узлов интерполяции была позднее решена в совместной работе А.М. Руссаковского и автора (1985).

Приведем еще некоторые результаты из главы III. Следующая теорема - это вариант теоремы В. Бернштейна о существовании функции с заданным индикатором.

Теорема 15. Пусть $\rho(z)$ - уточненный порядок, $\rho = \lim_{z \rightarrow \infty} \rho(z) > 0$, $h(\theta)$ - 2π -периодическая ограниченная тригонометрически ρ -выпуклая функция, $H(ze^{i\theta}) = z^\rho h(\theta)$, μ_H - риссовская мера функции $H(z)$.

Пусть E - счетное множество такое, что $d_E(K) \leq \mu_H(K)$ для любого компакта K . Тогда существует целая функция $\psi(z)$ вполне регулярного роста относительно уточненного порядка $\rho(z)$ с индикатором $h(\theta)$, которая обращается в ноль в каждой точке множества E , причем выполняются следующие дополнительные условия.

1) Пусть $\rho' > \rho - 1$ (ρ' - произвольное, удовлетворяющее написанному неравенству, а функция $\psi(z)$ зависит от выбора ρ'), а $E_1 = \{\lambda_n, n=1, 2, \dots\}$, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$, - множество корней функции $\psi(z)$, не принадлежащих множеству E . Тогда круги $C(\lambda_n, |\lambda_n|^{-\rho'})$ не пересекаются между собой и не пересекают множество E .

2) Существует число $d > 0$ такое, что

$$|\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_n| + d |\lambda_n|^{1-\rho(1\lambda_n)}$$

В случае, когда E - пустое множество, такого рода утверждения были получены в более ранних работах В. Бернштейна, Б.Я. Левина, В.Н. Логвиненко, А.Ф. Леонтьева. Значительно более сильное утверждение в этом случае можно получить из работы Р.С. Олмухаметова (1984).

Вопросы о существовании целых функций, для которых выполняется условие

$$\ln |f(z)| - h(\theta) z^p = O(1)$$

вне "малых" множеств, рассматривали в своих работах Б.Я. Левин (1961), Б.Я. Левин и Ю.И. Любарский (1975), Д.И. Любарский и М.Л. Содин (1986).

Случай, когда p - целое, а множество E имеет угловую плотность, рассматривал Г.Л. Лунц (1970).

В главе III изучается класс функций, регулярно растущих на множестве своих корней. Этот класс естественно возникает при рассмотрении задачи свободной интерполяции в классе $[p(z), h(\theta)]$. Как легко усмотреть из формулы Коши для производной голоморфной функции, если целая функция удовлетворяет равенству (I), то она регулярно растет на множестве своих корней. Обратное утверждение неверно. Однако, можно доказать, что если функция $f(z)$ регулярно растет на множестве своих корней, то существуют функция $f_1(z)$, для которой выполняется равенство (I), и C_0 - множество F такие, что

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \left(\ln |f(z)| - \ln |f_1(z)| \right) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0 \quad \text{при } z \in F.$$

Мы приведем две теоремы, относящиеся к описанию класса функций, регулярно растущих на множестве своих корней. Как мы уже отмечали, полное описание этого класса пока неизвестно.

Теорема I6. Пусть $f(z)$ - целая функция с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(z)$, регулярно растущая на множестве своих корней. Тогда функция $f(z)$ является делителем в кольце целых функций некоторой целой функции $\psi(z)$ вполне регулярного роста относительно уточненного порядка $\rho(z)$ с индикатором $h(\theta)$.

Теорема I7. Пусть $f(z)$ - целая функция с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(z)$, регулярно растущая на множестве своих корней. Пусть $H(re^{i\theta}) = h(\theta)r^p$, $\mathcal{V}(z)$ - субгармоническая функция из предельного множества Азарина целой функции $f(z)$, μ - риссовская мера функции $\mathcal{V}(z)$. Тогда $\mathcal{V}(z) = H(z)$ при $z \in \text{supp } \mu$.

Отметим, что для любой целой функции выполняется неравен-

ство $v'(z) \leq H(z)$.

Технической основой результатов третьей главы служит следующая теорема, представляющая, как нам кажется, интерес для общей теории субгармонических функций.

Теорема 18. Пусть $u(z)$ и $v'(z)$ - субгармонические функции, $W(z) = u(z) - v'(z) \geq 0$. Пусть

$$E = \left\{ z: \lim_{\tau \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} W(z + \tau e^{i\varphi}) d\varphi = 0 \right\}$$

Пусть μ - риссовская мера функции $W(z)$. Тогда μ_E - ограничение меры μ на множество E - является положительной мерой.

Эта теорема является усилением одного результата Валле-Пусена (1938), см. также Брело (1950 - 1951). Теорема 18 усилена в недавней работе Фугледе (1991).

Цитированная литература

1. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, Москва, 1956, 632.
2. Levin B. Ja. *Distribution of zeros of entire functions. Revised edition, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island*, 523.
3. Привалов И.И. Субгармонические функции. ГИТТЛ, Москва, Ленинград, 1937, 199.
4. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, том 85. ВИНТИ, Москва, 1991, 256.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах

5. Гришин А.Ф. О регулярности роста субгармонических функций // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1968, 6, С.3-29.
6. Гришин А.Ф. О регулярности роста субгармонических функций // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1968, 7, С.59-84.

7. Гришин А.Ф. О регулярности роста субгармонических функций // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1969, 8, С.126-135.
8. Гришин А.Ф. О множествах регулярного роста целых функций // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1983, 40, С.36-47.
9. Гришин А.Ф. О множествах регулярного роста целых функций // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1984, 41, С.39-55.
10. Гришин А.Ф. О множествах регулярного роста целых функций // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1984, 42, С.37-43.
11. Гришин А.Ф., Содин М.Л. Рост по лучу, распределение корней по аргументам целой функции конечного порядка и одна теорема единственности // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1988, 50, С.47-61.
12. Гришин А.Ф. Функции первого порядка, субгармонические в полуплоскости и одна тауберова теорема // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1990, 53, С.87-94.

Ответственный за выпуск А.Е.Фрынтов

Подписано к печати 16.06.92 Физ. п.л. 1.8

Уч.-изд. л. 1.8 Заказ № 117. Тираж 100 экз.

Ротапринт ФТИНТ АН Украины, Харьков 164, просп.Ленина,47

AB 25.725

[Handwritten mark]

[Handwritten mark]