Міністерство освіти України
Київський університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

БАБАНІН Олександр Сергійович

УДК 517.988:519.612.2

ОЦІНЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЕННЯ НА ЕОМ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВИМИ ПОХИБКАМИ

05.13.16 — застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях

Автореферат дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук

Київ 1992

Роботу виконано в Київському університеті імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор ГІРКО В. Л.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор МАЛЮТОВ М. Б.,
доктор фізико-математичних наук, професор НАКОНЕЧНИЙ О. Г.

Провідна організація: Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова АН України.

Захист відбудеться «——» —————— 19 р. о ——— годині на засіданні спеціалізованої ради при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою:

252127 Київ 127, проспект Академіка Глушкова,6, факультет кібернетики, ауд. 40.

Із дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці університету (вул. Володимирська, 58).

Автореферат розіслано «——» —————— 19 р.

Учений секретар
спеціалізованої ради БЕЙКО І. В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Потреба у розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з випадковими похибками виникає при побудові математичних моделей складних науково-технічних та економічних об'єктів і структур, у процесі обробки та інтерпретації даних експериментів у різних галузях наук (астрофізика, геофізика, медицина, економіка тощо).

У дисертаційній роботі розглянуто задачу отримання нових G-слушних оцінок розв'язків СЛАР

$$Ax = b,$$

де $A = (a_{ij}),\ i = 1,..,n;\ j = 1,..,m$, є спостережувана матриця коефіцієнтів, $b^T = (b_1,...,b_n)$ є відомий вектор, $x^T = (x_1,...,x_m)$ - є шуканий розв'язок.

Послідовність оцінок (тобто деяких функцій від n спостережень над m величинами) $\hat{a}_{m,n}$ певної величини a_m назвемо G -- слушною, якщо

$$p\lim_{m,n\to\infty}[\hat{a}_{m,n} - a_m] = 0.$$

Незважаючи на велику кількість робіт, присвячених даній проблематиці, до цього часу не було знайдено слушних, найкращих у певному сенсі, оцінок розв'язків СЛАР, якщо їх коефіцієнти задано з деякими випадковими похибками.

Метою дисертації є дослідження та розробка нових методів оцінювання та обчислення на ЕОМ розв'язків СЛАР з випадковими похибками на підставі нових результатів загального статистичного аналізу (G-аналізу).

Відповідно до поставленої мети у роботі вирішуються такі задачі:

- дослідження сучасних методів розв'язання СЛАР;
- відшукання оцінок розв'язків СЛАР в умовах " закону арктангенса";
- знаходження оцінок розв'язків СЛАР , якщо дисперсії випадкових похибок коефіцієнтів СЛАР є однаковими;
- одержання оцінок розв'язків СЛАР з випадковими похибками при введенні матриць регуляризації;
- отримання оцінок розв'язків СЛАР , якщо дисперсії випадкових похибок коефіцієнтів СЛАР є довільними;
- розробка нових методів та ефективних алгоритмів оцінювання розв'язків СЛАР з випадковими похибками;
- програмна реалізація вищезгаданих алгоритмів.

Наукова новизна. У дисертації на базі теорії загального статистичного аналізу (G - аналізу)запропоновано якісно новий підхід до розв'язання проблеми оцінювання розв'язків СЛАР з випадковими похибками. В цьому аналізі розглянуто G- оцінки різних математичних моделей . Оцінки , отримані для СЛАР , належать до класу із порядковим номером 8. Отримано G -оцінки розв'язків СЛАР з випадковими коефіцієнтами, похибки яких мають однакові дисперсії, для дійсного та комплексного параметрів. Якщо дисперсії похибок випадкових коефіцієнтів є довільними , то одержано оцінки розв'язків СЛАР з випадковими похибками при введенні матриць регуляризації та для симетричних матриць спостережень. Узагальнено "закон арктангенса". Розроблено метод відшукання оцінок розв'язків СЛАР в умовах, якщо відоме існування лише кількох перших моментів елементів матриць і векторів правих частин при довільному їх розподілі.

Наукова і практична цінність роботи. На підставі теоретичних результатів розроблено методи та побудовано алгоритми для відшукання різних оцінок розв'язків СЛАР з випадковими похибками. Алгоритми реалізовано на ФОРТРАНі для БЕСМ-6 та на ФОРТРАНі , С і PASCAL для персональних комп'ютерів, сумісних із IBM PC. Отримані оцінки можуть бути застосовані в чисельному аналізві, задачах економіки, томографії, ядерної фізики, спектроскопії тощо.

Апробація роботи. Доповіді про основні результати роботи було зроблено на Всесоюзній конференції з граничних теорем теорії ймовірностей, присвяченої 70-річчю академіка АН Узбекистану С.Х. Сіраждінова (Ташкент, 1990 р.); Міжнародній конференції з дискримінантного аналізу DIANA-III . (Бехіне, ЧСФР, 1990 р.); Міжнародному семінарі з багатовимірного статистичного аналізу (Лодзь, Польща, 1990 р.); Міжнародному семінарі з багатовимірної статистики (Тарту, Естонія, 1991 р.); IV Всесоюзній школі-семінарі " Програмно-алгоритмічне забезпечення прикладного багатовимірного статистичного аналізу" (Цахкадзор, Вірменія, 1991 р.); науковому семінарі " Багатовимірний статистичний аналіз" при кафедрі прикладної статистики Київського держуніверситету тощо.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 7 роботах.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, закінчення, списку літератури із 120 найменувань та додатку.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність та важливість вибраної теми досліджень і дано постановки задач, які досліджуються. Зроблено огляд робіт, пов'язаних із темою дисертації. Стисло викладено структуру роботи та її зміст.

У першому розділі дисертації одержано узагальнення " закону арктангенса". Ця гранична теорема посідає чільне місце серед нових тверджень про асимптотичний розподіл розв ків СЛАР з випадковими похибками.

Розглянуто задачу в новій постанові і коли елементи матриці $\Xi = (\xi_{ij})$ та компоненти η_i векторів b незалежні та їх математичні сподівання є нулевими, а їх дисперсії є додатніми обмеженими та допускають подання у вигляді

$$\mathrm{Var}\xi_{ij} = \sigma_i\sigma_j, \mathrm{Var}\eta_i = \delta_i$$

. Доведено таку теорему.

Теорема 1.1.1 *Нехай для кожного значення* n *випадкові величини* $\xi_{ij}^{(n)}, \eta_i^{(n)}, i, j = 1,\dots,n$, *є незалежними,*

$$0 < c < \mathrm{Var}\xi_{ij} = \sigma_i\sigma_j, \mathrm{Var}\eta_i = \delta_i < C < \infty,$$

для деякого $\delta > 0$

$$\max_n \max_{i,j=1,\dots,n} \mathrm{E}|\xi_{ij}^{(n)}|^{4+\delta} < \infty, \max_n \max_{i=1,\dots,n} \mathrm{E}|\eta_i^{(n)}|^{4+\delta} < \infty.$$

Тоді

$$\pi^{-1}\mathrm{arctg}(zC^{-1}c) + 1/2 \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\mathrm{P}\{x_k < z\} \le$$

$$\le \overline{\lim}_{n\to\infty}\mathrm{P}\{x_k < z\} \le \pi^{-1}\mathrm{arctg}(zCc^{-1}) + 1/2$$

де $x^T = (x_1, \ldots, x_m)$ - є шуканий розв'язок.

<u>У другому розділі</u> отримано нові оцінки розв'язків СЛАР, дисперсії випадкових похибок коефіцієнтів яких є однакові.

<u>У першому параграфі</u> запропоновано оцінку

$$G_8 = \mathrm{Re}[I(\hat{\theta} + i\varepsilon) + \beta^{-1} Z_s^T Z_s]^{-1} Z_s^T \beta^{-1} b$$

для регуляризованого псевдорозв'язку

$$x_\alpha = [I\alpha + A^T A \beta^{-1}]^{-1} A^T b \beta^{-1}$$

систем лінійних рівнянь $Ax = b$, де A є матрицею порядку $n \times m$, x та b є вектори, $\alpha > 0$, β є послідовністю чисел. Тут

$$\varepsilon \neq 0; \; Z_s = s^{-1} \sum_{i=1}^{s} X_i; \; X_i$$

є незалежними спостереженнями над матрицею $A + \Xi$; Ξ є випадкова матриця; $\hat{\theta}$ є будь-яким вимірним дійсним розв'язком деякого нелінійного рівняння. Це твердження отримано при певних умовах : для всякого $\gamma > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\{\|G_8 - x_\alpha\| > \gamma\} = 0.$$

У багатьох випадках результати спостережень вхідних і вихідних величин деяких об'єктів задовольняють системі лінійних алгебраїчних рівнянь

$$u = (A + X) + \varepsilon,$$

де u є n-вимірний вектор, A та X є прямокутні матриці порядку $n \times m$, x є невідомий m-вимірний вектор, ε є n-вимірний вектор. Припустимо, що n та $A + X$ є відомими. Однак у деяких випадках бажаний розв'язок x задовольняє СЛАР

$$Ax = b,$$

в яких матриця A та вектор b є невідомими. Елементи матриці X та компоненти вектору ε назвемо шумом або похибкою спостережень. Припустимо, що вони є випадковими змінними. Відзначимо, що хоча матрицю A задано точно, в силу похибок заокруглення при великих n та m отримаємо такі розв'язки, якби матриця A є відомою з деякими випадковими похибками. Якщо природа шуму не є визначеною, то припустимо, що шум належить обмеженій множині.

Існує декілька формулювань проблеми відшукання вектора x. Першу задачу розв'язано ще К.Ф. Гауссом у випадку відомих A та b. Отже, необхідно знайти вектор $\hat{x}$, для якого вираз $\|Ax - b\|^2$ досягає мінімуму. Тут норму x визначено як скалярний добуток (x,x). Якщо матриця A^TA є несингулярною, тоді

$$\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb.$$

Але якщо матриця є сингулярною, то можлива нескінченна множина розв'язків $\hat{x}$. Одним із розв'язків, чия норма є найменшою, є

$$\tilde{x} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} x_\varepsilon, \qquad x_\varepsilon = (I\varepsilon + A^TA)^{-1}A^Tb,$$

де I є одиничною матрицею. ктор x_ε зветься регуляризованим розв'язком.

Необхідно знайти умови, при яких

$$\text{plim}_{n\to\infty}\|(A^TA)^{-1}A^Tb - (Z^TZ)^{-1}Z^Tb\| = 0.$$

Стандартний підхід до відшукання оцінок вектора $\hat{x}$ полягає у знаходженні оцінки

$$y_s = [I\alpha + Z_s{}^TZ_s\beta^{-1}]^{-1}Z_s{}^Tb\beta^{-1},$$

де

$$\beta > 0,\ \alpha \geq 0,\ Z_s = s^{-1}\sum_{i=1}^{s} X_i$$

та s є числом незалежних спостережень X над матрицею $A + \Xi$. Якщо m та n не залежать від s, α є додатнім числом і $EX_i = A$, тоді y_s є слушною, тобто $p\lim_{s\to\infty} y_s = x_\alpha$. Однак, навіть якщо материця A є добре обумовленою, то швидкість збіжності y_s до x_α є малою для "помірних" значень m та n. При визначенні G-оцінок для векторів y_s використано загальний статистичний аналіз (G-аналіз), який забезпечує більш швидку збіжність G-оцінок до x_α. При деяких загальних припущеннях щодо розподілу матриць X_i існують G-слушні оцінки нормальних псевдорозв'язків $(A^TA)^{-1}A^Tb$.

Нехай α, β, s, n, m є взаємозв'язаними і залежать від параметру. Зручно використовувати n як параметр.

Введено узагальнену G-умову

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sigma_n^2 n\beta_n^{-1}s_n^{-1} = c_1 < \infty,\ \overline{\lim}_{n\to\infty}\sigma_n^2 m_n\beta_n^{-1}s_n^{-1} = c_2 < \infty,\ \overline{\lim}_{n\to\infty}m_n n^{-1} = c_3 < 1.$$

Для оцінок розв'язків x_α, що виражаються через сингулярні матриці, вибрано регуляризований розв'язок у вигляді

$$y_\theta = \mathrm{Re}[I(\theta + i\varepsilon) + \beta^{-1}Z_s^T Z_s]^{-1} Z_s^T \beta^{-1} b,$$

де $\varepsilon \neq 0$ та θ є дійсне число.

G-оцінки величин x_α належать до класу оцінок $\tilde{G}_8$ і їх позначено G_8. У цьому параграфі знайдено таку G_8-оцінку із класу $\tilde{G}_8$

$$G_8 = \mathrm{Re}[I(\hat{\theta} + i\varepsilon) + \beta^{-1}Z_s^T Z_s]^{-1} Z_s^T \beta^{-1} b,$$

де $\hat{\theta}$ є вимірний дійсний розв'язок системи рівнянь

$$f_n(\theta) = \alpha,$$
$$f_n(\theta) = \theta\,\mathrm{Re}[1+\delta_1 a(\theta)]^2 - \varepsilon\,\mathrm{Im}[1+\delta_1 a(\theta)]^2 + (\delta_1 - \delta_2)[1 + \delta_1 \mathrm{Re}\,a(\theta)]\,, \quad (2.1.1)$$
$$a(\theta) = n^{-1}\mathrm{Tr}[I(\theta + i\varepsilon) + \beta^{-1}Z_s^T Z_s]^{-1},\ \ \delta_1 = \sigma^2 n\beta^{-1}s^{-1},\ \ \delta_2 = \sigma^2 m\beta^{-1}s^{-1}.$$

Теорема 2.1.1. ***Нехай для кожного*** $n = 1,2,\ldots$ ***елементи*** $x_{pl}^{(i)}$, $p = 1,\ldots,n$, $l = 1,\ldots,m$, ***матриці*** X_l ***є незалежними,***

$$\mathrm{E}x_{pl}^{(i)} = a_{pl},\ \ \mathrm{Var}x_{pl}^{(i)} = \sigma^2,$$

виконується узагальнена G-умова,

$$\lambda_m + \alpha \geq h.$$

Тут h ***є додатнім числом,*** $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m$ ***є власними числами матриці*** $A^T A\beta^{-1}$;

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\beta^{-1/2}[(b^T b) + \sup_{k=1,\ldots,m} a_k^T a_k] < \infty,$$

де a_k ***є вектор-стовпчики матриці*** $A^T A\beta^{-1}$;

$$\sup_n \lambda_1 < \infty,$$

і для деякого $\delta>0$

$$\sup_n \sup_{p=1,\dots,n;l=1,\dots,m} \mathrm{E}|x_{pl}^{(i)} - a_{pl}|^{4+\delta} < \infty.$$

Тоді для $\varepsilon \neq 0$

$$p\lim_{n\to\infty} \|G_8 - \mathrm{Re}\, x_{\alpha+i\gamma(\varepsilon)}\| = 0,$$

де

$$x_\alpha = [I\alpha + A^T A\beta^{-1}]^{-1} A^T b\beta^{-1},$$

$$\gamma(\varepsilon) = \varepsilon \,\mathrm{Re}[1 + \delta_1 \mathrm{E}a(\tilde{\theta})]^2 + \tilde{\theta}\,\mathrm{Im}[1 + \delta_1 \mathrm{E}a(\tilde{\theta})]^2 + (\delta_1 - \delta_2)\delta_1 \,\mathrm{Im}\,\mathrm{E}a(\tilde{\theta})],$$

і $\tilde{\theta}$ *є k – й за величиною розв'язок системи рівнянь*(2.1.1) *, в якому* $a(q)$ *замінено на* $\mathrm{E}a(q)$.

<u>У третьому розділі</u> розглянуто нові оцінки розв'язків СЛАР із різними дисперсіями похибок випадкових коефіцієнтів.

<u>У першому параграфі</u> розроблено метод дослідження елементів резольвент симетричних випадкових матриць, який є основним при знаходженні G-оцінок розв'язків СЛАР. В цьому розділі розглядаються СЛАР, матриці коефіцієнтів яких є симетричними. Варто сказати, що чимало практичних задач математичної фізики зводяться до таких лінійних систем. Зокрема, відомий приклад інтегрального рівняння Фредгольма 1- го роду, який часто використовується як тестова задача в різних роботах школи А.М. Тихонова. У цій задачі ядро

$$K(t.s) = [1 + 100(t-s)^2]^{-1}$$

інтегрального рівняння

$$\int_0^1 K(t.s)x(s)ds = b(t)$$

з допомогою скінченно-різницевої апроксимації зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь із симетричною та додатньо визначеною матрицею. До таких матриць зручно застосовувати метод Холецького та зводити їх до дводіагональних, для обернення я них існують явні формули. Однак, якщо "шум" у вхідних матрицях є доволі значним, використання методу регуляризації не дає

бажаного ефекту.

Для дослідження таких систем пропонується використовувати теорію матриць з випадковими збуреннями, яка спирається на розвинутий математичний апарат і має сучасний інструментарій для отримання набагато простіших формул розв'язання таких задач. Як приклад, що підтверджує справедливість нової теорії, розглянуто одну задачу, в якій оцінка СЛАР відшукується в явному вигляді. Розглянуто послідовність симетричних дійсних випадкових матриць

$$\Xi_n = (\xi_{ij}^{(n)})_{i,j=1}^{n}, \quad n = 1,2\ldots,$$

елементи яких $\xi_{ij}^{(n)}, i \geq j, \quad i,j = 1,\ldots,n$, є незалежними для кожного значення n.

Теорема 3.1.1. *Нехай*

$$\mathrm{E}\xi_{ij}^{(n)} = a_{ij}^{(n)}, \mathrm{Var}\xi_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{(n)}, i \geq j, \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

$$\sup_n \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^{(n)} < \infty,$$

$$\sup_n \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}^{(n)}| < \infty$$

і виконується умова Ліндеберга: для всякого $\tau > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}[\xi_{ij}^{(n)}]^2 \chi\{|\xi_{ij}^{(n)}| > \tau\} = 0,$$

де χ *є індикатор випадкової події*

$$\mu_n(x) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \chi(\omega: \lambda_k < x),$$

де $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ *є власними числами випадкової матриці* $\Xi_n = (\xi_{ij}^{(n)})_{i,j=1}^{n}$.

Тоді

$$p\lim_{n\to\infty}|\mu_n(x)-F_n(x)|=0,$$

де $F_n(x)$ *- функції розподілу, перетворення Стілтьєса яких дорівнюють*

$$\int(x-z)^{-1}dF_n(x)=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}c_{ii}(z),\quad z=t+is,\ s\neq 0$$

і функції $c_{ii}(z)$ *задовольняють системі рівнянь*

$$c_{ii}(z)=\{[A-zI_n-\delta_{pl}\sum_{s=1}^{n}c_{ss}(z)\sigma_{sl}^{(n)}]^{-1}\}_{ii},i=1,\ldots,n, \qquad (3.1.1)$$

де δ_{pl} *- символ Кронекера,* $A_n=(a_{ij}^{(n)})_{i,j=1}^{n}$, I_n *- одинична матриця n-го порядку.*

Розв'язок системи рівнянь (3.1.1) існує і єдиний у класі аналітичних функцій $L=\{c_{ii}(z):\ \varepsilon\operatorname{Im}c_{ii}(z)>0,\varepsilon\neq 0\}$

<u>У другому параграфі</u> досліджено розв'язки систем лінійних алгебраїчних рівнянь із симетричною матрицею спостережень. Тривалий час намагання розв'язати цю проблему були марними. У цьому параграфі запропоновано розв'язання цієї задачі із допомогою нових результатів *G*-аналізу.

Розглянуто систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax=b,$$

де *A* є симетрична випадкова матриця *n*-го порядку, *x* і *b* є *n*- вимірні вектори. Вектор *b* відомий, а матриця *A* невідома і замість неї є реалізація випадкової симетричної матриці Ξ , елементи якої ξ_{ij} задовольняють умовам теореми 3.1.1. За допомогою цієї теореми знайдено G_8- оцінку виразу

$$c^T A^{-1}b,$$

де *c* є довільний *n*- вимірний вектор (природньо, що матриця *A*

вважається невиродженою) Спочатку доведело деякі допоміжні означення. Оскільки

$$\sup_n \max_{i=1,\dots,n} \gamma_i < \infty, \gamma_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^{(n)},$$

то для будь-якого $\delta > 0$ тільки скінченне число величин $\gamma_i, i = 1,\dots,N,$ буде відрізнятися одне від одного більш, ніж на $\delta > 0$. Для визначеності нех. л

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_N, |\gamma_i - \gamma_N| < \delta, i = N+1,\dots,n.$$

Введено позначення

$$Y^{(N)} = \mathrm{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N, \dots, \gamma_N\}$$

діагональна матриця n-го порядку, де $y_1, y_2, \dots, y_N, \dots, y_N$ є дійсні розв'язки системи рівнянь

$$\varphi_i(Y^{(N)}) = 0, i = 1,\dots,N;$$

де

$$\varphi_j(Y^{(N)}) = \gamma_j - \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n} \sigma_{kj}^{(n)} \{(Y^{(N)} + i\varepsilon I_n + \Xi)^{-1}\}_{kk},$$

$\varepsilon \neq 0$ - дійсний параметр.

Легко бачити, що функції $\varphi_i(Y^{(N)}) = 0, i = 1,\dots,N;$ неперервні і вони прямують до ∞ при $y_j \to \infty$ і до $-\infty$, якщо $y_j \to -\infty$. Отже, існують розв'язки $y_1, y_2, \dots, y_N, \dots, y_N$, до того ж їх може бути багато і вони можуть бути невимірними. Нехай вибрано якийсь вимірний розв'язок $y_1, y_2, \dots, y_N, \dots, y_N$. Наприклад, y_1 - це перша компоне :а розв'язку, яка найближча до нуля, відповідних других компонент може бути багато, але ми візьмемо тільки ту, яка найближча до нуля,і так далі.

Введено G_8 - оцінку виразу $c^T A^{-1} b$:

$$\mathrm{Re}\, c^T (Y^{(N)} + iI_n \varepsilon + \Xi)^{-1} b.$$

Теорема 3.2.1. ***Нехай елементи***

$$\xi_{ij}^{(n)}, i \geq j, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

є незалежними для кожного значення n,

$$\mathrm{E}\xi_{ij}^{(n)} = a_{ij}^{(n)}, \mathrm{Var}\xi_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{(n)}, i \geq j, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

$$\sup_n \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} \{|a_{ij}| + \sigma_{ij}^{(n)} + |c_j| + |b_j|\} < \infty$$

і виконується умова Ліндеберга : для всякого $\tau > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}[\xi_{ij}^{(n)} - a_{ij}^{(n)}]^2 \chi\{|\xi_{ij}^{(n)} - a_{ij}^{(n)}| > \tau\} = 0,$$

де χ ***є індикатор випадкової події,***

$$\sup_n \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^{(n)} \lambda_j^{-2} < 1,$$

де $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ ***є власними числами матриці A,***

$$\inf_n \lambda_n > 0.$$

Тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{N\to\infty} p\lim_{n\to\infty} [G_8^{(N)}(\varepsilon) - c^T A^{-1} b] = 0.$$

<u>У третьому параграфі</u> розглянуто один явний приклад знаходження G_8 **оцінки для розв'язків СЛАР. Вищенаведені оцінки є складними,і з них не видно, чи вдалося досягти істотного поліпшення відомих традиційних аналогічних**

результатів. Проте проведені чисельні експерименти свідчать, що це справді так. Тому для підсилення розуміння того, що ця теорія дає кращі результати, в дисертації розглянуто один приклад, який дає змогу знайти G-8 оцінку в явному вигляді. Точніше, розглянуто систему, для якої матриця A є одиничною, а всі дисперсії дорівнюють $\sigma^2 n^{-1}$, де n є розмірність системи.

У цьому випадку система рівнянь $\psi_i(Z^{(N)})=0, i=1,\dots,N; N<n$, переходить в одне рівняння.

$$y-\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 n^{-1}(\Xi+ily)_{kk}^{-1}=i\varepsilon\ , \qquad (3.3.1)$$

де y є комплексне число.

Величини $(\Xi+il/y)_{kk}^{-1}$ в цьому випадку легко досліджуються і вони збігаються до розв'язку системи рівнянь

$$m(y)=[1+y-\sigma^2 m(y)]^{-1}, \qquad (3.3.2)$$

а рівняння (3.3.1) буде мати вигляд

$$y-\sigma^2 m(y)=i\varepsilon\ . \qquad (3.3.3)$$

Але тоді рівняння (3.3.2) дорівнює

$$m(y)=[1+i\varepsilon]^{-1}.$$

Отже, рівняння (3.3.1) має вигляд

$$y-\sigma^2[1+i\varepsilon]^{-1}=i\varepsilon\ .$$

Звідси

$$y=\sigma^2[1+\varepsilon^2]^{-1}+i[\varepsilon-\varepsilon\sigma^2[1+\varepsilon^2]^{-1}] \qquad (3.3.4)$$

і шукана оцінка має вигляд

$$G_8 = c^T \operatorname{Re}(ly+\Xi)^{-1} b \ .$$

Таким чином, G_8 -оцінку знайдено в явному вигляді. Легко бачити, що за рахунок дисперсій зміщення розв'язку системи лінійних рівнянь може бути як завгодно великим. Відомі традиційні оцінки цього факту не враховують, тобто можуть мати таке велике зміщення. Нова запропонована оцінка дає такий результат, наче збурень немає взагалі . Єдине , чого слід вимагати,- це те , що уявна ч: гина розв'язку y, через який виражається G_8 -оцінка, не повинна дорівнювати нулеві.

<u>У четвертому параграфі</u> різглянуто оцінки розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь при використанні діагональних матриць регуляризації. Тут також знайдено G_8-оцінки розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою певних невироджених матриць C_1 та C_2.

За допомогою методів, запропонованих у розділі 2 , також розглянуто СЛАР із несиметричною матрицею коефіцієнтів, але дисперсії елементів таких матриць мають спеціальний вигляд, а саме, дорівнюють добуткові деяких випадкових величин. Це дає змогу позбутися громіздких обчислень, викладених у попередньому параграфі,й використати викладки з другого розділу. Таким чином, оцінку , отриману у попередньому параграфі, значно спрощено.

Перейдемо до точно о формулювання постановки задачі: припустимо, що випадкові елементи x_{ij} мають різні дисперсії. Із допомогою незалежних спостережень X_i. $i = 1,...,s$,над матрицею $A+C_2\Xi C_1$, $A = (a_{ij})$, $\Xi = (\xi_{ij})$, $i = 1,...,n$, $j = 1,...,m$, слід знайти G-слушну оцінку регуляризованого псевдорозв'язку

$$d^T x_\alpha = d^T\left(C_1^T C_1\alpha + A^T C_2^{T-1} C_2^{-1} A\beta^{-1}\right)^{-1} A^T C_2^{T-1} C_2^{-1} b\beta^{-1}$$

системи рівнянь $Ax = b$, де C_1, C_2 є невироджені, відповідно, (mxm) і (nxn) матриці, $d \in R^m$, ξ_{ij}, $i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots,m$, є незалежні випадкові елементи для будь-якого значення n та m ; якщо числа $\sigma_n^2, s_n, m_n, \beta_n$ залежать від n та G, умова виконується.

Очевидно, якщо $\alpha = 0$, то матриця A^TA є невиродженою, тоді

$$d^T x_\alpha = d^T\left(A^T C_2^{T-1} C_2^{-1} A\beta^{-1}\right)^{-1} A^T C_2^{T-1} C_2^{-1} b\beta^{-1}.$$

якщо $\alpha = 0$, то матриця A є квадратною, тоді

$$d^T x_\alpha = d^T A^{-1} b.$$

В цьому випадку введено таку G_8 оцінку:

$$G_8 = \operatorname{Re} d^T [C_1^T C_1(\hat{\theta} + i\varepsilon) + \beta^{-1}(C_2^{-1}Z_s)^T C_2^{-1} Z_s]^{-1} (C_2^{-1} Z_s)^T C_2^{-1} \beta^{-1} b,$$

де $\hat{\theta}$ є вимірним дійсним розв'язком рівняння

$$f_n(\theta) = \alpha,$$

$$f_n(\theta) = \theta \operatorname{Re}[1 + \delta_1 a(\theta)]^2 - \varepsilon \operatorname{Im}[1 + \delta_1 a(\theta)]^2 + (\delta_1 - \delta_2)[1 + \delta_1 \operatorname{Re} a(\theta)], \quad (3.4.1)$$

$$a(\theta) = n^{-1} \operatorname{Tr}[I(\theta + i\varepsilon) + \beta^{-1}(C_2^{-1} Z_s C_1^{-1})^T C_2^{-1} Z_s C_1^{-1}]^{-1},$$

Теорема 3.4.1. *Нехай для кожного* n = 1,2,.. *величини* $x_{pl}^{(i)}$, $p = 1,\dots,n$, $l = 1,\dots,m$, *матриці* X_i *є незалежними,*

$$\mathrm{E}x_{pl}^{(i)} = a_{pl}, \ \mathrm{V}x_{pl}^{(i)} = \sigma^2,$$

виконано узагальнену G-умову,

$$\lambda_m + \alpha \geq h. \quad (3.4.2)$$

Тут h є додатне число, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$ є власні числа матриці $\tilde{A}^T \tilde{A} \beta^{-1}$, $\tilde{A} = C_2^{-1} A C_1^{-1}$,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \beta^{-1/2}[(\tilde{b}^T \tilde{b} + \tilde{d}^T \tilde{d}) + \sup_{k=1,\dots,m} a_k^T a_k] < \infty, \quad (3.4.3)$$

де a_k є вектор-стовпчики матриці $\tilde{A}^T$, $\tilde{b} = C_2^{-1} b$, $\tilde{d} = C_1^{-1} d$;

$$\sup_n \lambda_1 < \infty, \quad (3.4.4)$$

і для деякого $\delta > 0$

$$\sup_n \sup_{p=1,\dots,n; l=1,\dots,m} \mathrm{E}|x_{pl}^{(i)} - a_{pl}|^{4+\delta} < \infty. \quad (3.4.5)$$

Тоді для $\varepsilon \neq 0$

$$p\lim_{n\to\infty}\|G_8 - \operatorname{Re} d^T x_{\alpha+i\gamma(\varepsilon)}\| = 0,$$

де

$$x_\alpha = \left(C_1^T C_1 \alpha + A^T C_2^{T^{-1}} C_2^{-1} A \beta^{-1}\right)^{-1} A^T C_2^{T^{-1}} C_2^{-1} b \beta^{-1},$$

$$\gamma(\varepsilon) = \varepsilon \operatorname{Re}[1+\delta_1 \mathrm{E}a(\bar\theta)]^2 + \bar\theta \operatorname{Im}[1+\delta_1 \mathrm{E}a(\bar\theta)]^2 + (\delta_1-\delta_2)\delta_1 \operatorname{Im} \mathrm{E}a(\bar\theta)]$$

і $\bar\theta$ є k – и за величиною розв'язок системи рівнячь (3.4.1) *,де* $a(\theta)$ *замінено на* $\mathrm{E}a(\theta)$.

<u>У четвертому розділі</u> описано проведення ряду чисельних експериментів для підтвердження теоретичних результатів. Експерименти було проведено на ЕОМ БЕСМ-6 та IBM PC-сумісних комп'ютерах. Програми написано на алгоритмічних мовах FORTRAN, PASCAL і C. Результати експериментів свідчать про перевагу в точності запропонованих нових оцінок розв'язків СЛАР над традиційними регуляризованими оцінками.

<u>У додатку</u> вміщено тексти програм, а також графіки результатів експериментів.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Одержано узагальнення " закону арктангенса ".
2. Отримано нові оцінки розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь у випадку, якщо дисперсії похибок випадкових коефіцієнтів СЛАР однакові , для дійсного та комплексного параметрів.
3. Одержано нові оцінки розв'язків СЛАР у випадку використання "матриць регуляризації", якщо дисперсії похибок випадкових коефіцієнтів СЛАР різні.
4. Отримано нові оцінки для розв'язків СЛАР із симетричними матрицями спостережень у випадку різних дисперсій похибок випадкових коефіцієнтів СЛАР.
5. Розроблено алгоритми одержання нових оцінок розв'язків СЛАР з випадковими коефіцієнтами.
6. Виготовлено програмні продукти, в яких реалізовано нові оцінки

розв'язків СЛАР із коефіцієнтами, що мають випадкові похибки.

Основні результати дисертації опубліковано в таких роботах:

1. Бабанин А.С. Обобщение закона арктангенса // Теория вероятностей и мат. статистика. - 1983. - 28. - С. 3-5.

2. Гирко В.Л., Бабанин А.С. Об оценке G_8 решений эмпирических систем линейных алгебраических уравнений // Теория вероятностей и мат. статистика, 1988. - Вып. 39. - С. 29-33.

3. Гирко В.Л., Бабанин А.С. Об одной оценке решений эмпирических систем линейных алгебраических уравнений // Вестн. Киев. ун-та. Моделирование и оптимизация слож. систем. - 1989. - Вып. 8. - С. 10-13.

4. Babanin A. On a G_8-estimate for the solutions of systems of linear algebraic equations with random coefficients when " regularization matrices" are used //Abstracts of Intern. conf. on Discriminant Analysis DIANA-III, Bechyne, Czechoslovakia, 4-6 June 1990. - Bechyne, 1990. - P. 3.

5. Babanin A. Estimates for the solutions of systems of linear algebraic equations based on the theory of general statistical analysis // Acta et Comment. Univ. Tartuensis. - 1991. - N12. - P. 4-12.

6. Babanin A. New limit theorems for the solutions of systems of linear algebraic equations based on the theory of general statistical analysis // Abstracts of Intern. Seminar on Multivar. Statistics WAS-90, Lodz, Poland, 26-27 October 1990. - Lodz, 1991. - P. 4.

7. Girko V.L., Babanin A. and Kurotschka V. Consistent estimates for the solutions of systems of linear algebraic equations whose coefficients have different variances // Random Operators and Stochastic Equations. - 1992.- Vol. 1.- N 2. - P. 218-225.

Підп. до друку 16.09.92. Формат 60×84/16. Офс. друк. Папір кн.-журн. Ум. друк. арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. 1,05. Обл.-вид. арк. 1,0. Зам. 1269. Тираж 80 прим.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова АН України 252207 Київ 207, проспект Академіка Глушкова, 40

Бесплатно