

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ
КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

КЛИМКО Игорь Андреевич

УДК 639.3

УСТОЙЧИВОСТЬ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ БИФУРКАЦИИ
НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК
ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Специальность 05.23.17 - Строительная механика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

К и е в - 1992

Работа выполнена на кафедре строительной механики и в НИИ строительной механики Министерства Украины при Киевском орденов рудового Красного Знамени инженерно-строительном институте.

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Г. В. Исаханов

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор А. Т. Васильченко

кандидат технических наук, с. н. с.
С. П. Физалко

Ведущее предприятие: Институт проблем прочности
АН Украины

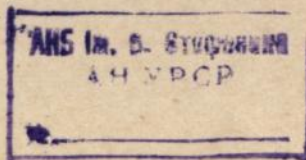
Защита состоится "16" ОКТАБРЯ 1992 г. в 13 часов
на заседании специализированного совета К 069.05.04 Киевского
инженерно-строительного института (252037, г. Киев-37, Водухо-
флотский проспект, 31) в зале заседаний Совета института.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Киевского
инженерно-строительного института.

Автореферат разослан "14" СЕНТЯБРЯ 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
кандидат технических наук,
доцент

Г. И. МЕЛЬНИЧЕНКО



Актуальность проблемы. В современном строительстве широко и в приборостроении широко используются конструктивные элементы в виде пластин и оболочек. Во многих случаях их эксплуатация сопровождается значительными динамическими воздействиями, приводящими к возбуждению колебательных режимов, характеризуемых прогибами, сравнимыми с толщиной элемента. Исследование возникающих при этом динамических состояний может быть выполнено только с позиций геометрически нелинейной теории пластин и оболочек. В нелинейных системах даже при гармоническом воздействии могут реализовываться многие сложные режимы колебаний: периодические, квазипериодические, хаотические. Этот факт важно учитывать в инженерной практике в силу двух обстоятельств: во-первых, сложным режимам колебаний соответствуют сложные напряженно-деформированные состояния, сказывающиеся на надежности и долговечности элементов конструкции; во-вторых, это свойство нелинейных объектов может служить конструирующим началом, позволяющим организовать полезные типы движений. В частности, квазипериодические режимы колебаний используются в устройствах механического преобразования частоты. Поэтому разработка методики изучения устойчивости и бифуркаций нелинейных колебаний пластин и оболочек при различных параметрах внешнего воздействия является весьма актуальной темой научных исследований.

Цель работы состоит в разработке, реализации на ЭВМ и применении к решению инженерных задач численной методики исследования устойчивости и квазипериодических бифуркаций нелинейных колебаний пластин и оболочек при периодическом возбуждении.

Научная новизна. На основе расчетных динамических моделей с несколькими степенями свободы разработана методика построения и исследования устойчивости периодических и квазипериодических режимов колебаний, методика построения отвечающих в точках бифуркации квазипериодических решений. Выявлены и проанализированы особенности квазипериодических режимов колебаний пластин и оболочек, обусловленные взаимодействием изгибных форм; получены новые данные об устойчивости указанных режимов колебаний.

Достоверность результатов, полученных в работе определяет-

ся использованием обоснованной геометрически нелинейной модели динамического деформирования тонких пластин и оболочек, достижением внутренней сходимости результатов при сгущении конечно-элементной сетки и увеличении числа степеней свободы расчетных полимодалных моделей, сравнением решений, полученных различными методами, а также сопоставлением с известными теоретическими и экспериментальными результатами.

Практическая ценность. Предложенная методика численного исследования вынужденных нелинейных колебаний пластин и оболочек может использоваться при расчетах тонкостенных конструкций. Применяемые динамические модели позволяют учесть сложный характер деформирования срединной поверхности. Учет высших временных гармоник дает возможность получить динамические характеристики пластины и оболочки, отражающие особенности поведения конструкции, связанные с комбинационными резонансами между различными изгибными формами. Разработанная численная методика реализована в программном комплексе, позволяющем решать широкий класс задач, возникающих в машино-, приборостроении и строительстве.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с общим планом исследований, проводимых на кафедре строительной механики и в Проблемной научно-исследовательской лаборатории тонкостенных пространственных конструкций Киевского инженерно-строительного института. Результаты работы внедрены в инженерную практику.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационной работы доложены на 49, 50, 52 научно-практических конференциях Киевского инженерно-строительного института (Киев, 1988, 1989, 1991 гг.), на республиканском семинаре молодых ученых по проблемам механизации и автоматизации земляных работ в строительстве (Киев, 1988 г.), на научно-практической конференции по пространственным конструкциям (Ростов-на-Дону, 1988 г.).

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 4 работах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из пяти глав, заключения, списка использованной литературы из 221 наименования и приложения, изложена на 112 страницах машинописного текста, содержит 28 страниц рисунков и 8 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел (введение) содержит краткий обзор основных этапов развития методов построения дискретных моделей, описывающих нелинейные динамические процессы в тонкостенных конструкциях, и методов исследования устойчивости и бифуркаций нелинейных колебаний механических систем. Показано, что тема настоящей диссертации является актуальной, сформулированы цель диссертации и основные направления исследований.

Теоретической основой методов построения динамических моделей тонких пластин и оболочек является геометрически нелинейная теория оболочек. Ее основы заложены в трудах В. В. Волотина, А. С. Вольмира, К. З. Галимова, Э. И. Григольца, Х. М. Мухтари, С. П. Тимошенко, Донелла, Т. Кармана и других авторов.

Классические непрерывные модели оболочек допускают точные решения только для отдельных случаев, поэтому при решении практических задач необходимым является переход к рассмотрению дискретных моделей распределенных систем.

Нелинейные колебания пластин и оболочек на базе дискретных моделей с одной или двумя степенями свободы исследовались в работах В. В. Волотина, А. С. Вольмира, Э. И. Григольца, Я. М. Григоренко, И. Г. Кильдибекова, В. Д. Кубенко, И. Рейсснера, Д. Эвансена.

Одно и двумерные модели позволили выявить ряд особенностей, характерных для нелинейных колебаний пластин и оболочек: несимметрию отклонений оболочек относительно их недеформированного состояния, зависимость частот собственных колебаний и жесткости от амплитуды колебаний, срывы колебательного режима при резонансах, стоящие и бегущие волны. Однако эти модели, как показали исследования В. Д. Кубенко, В. А. Смирнова и других, не позволяют описать и выявить физические эффекты, обусловленные взаимодействием различных собственных форм колебаний.

Исследовать объекты со сложной геометрией и нагрузкой позволяет их дискретизация на основе метода конечных элементов (МКЭ) или конечных разностей (МКР). Развитию МКЭ посвящены работы А. С. Городецкого, И. Ф. Образцова, А. С. Сахарова, Дж. Аргирова, К. Бате, О. Зенкевича, Р. Клафа. Конечноразностный подход использовали В. А. Важенков, Е. А. Гоцуляк, В. И. Гудяев, Н. В. Ва-

лишвили. Необходимо отметить, что изучение нелинейных колебаний тонкостенных конструкций на базе полной конечноэлементной или конечноразностной модели затруднительно, так как требует больших затрат ресурсов ЭЕМ. Избежать этих трудностей можно путем редуцирования на основе метода обобщенных координат. Такой подход в настоящее время является доминирующим.

Основы нелинейной динамики заложены в работах А. Пуанкаре, Э.Е. Лоренца, Ван-дер-Поля. Аналитические методы нелинейной механики, разработанные А.А. Андроновым, Н.М. Боголюбовым, М.М. Крыловым, А.М. Ляпуновым, Л.М. Мандельштамом, Ю.А. Игнропольским, П.Д.Палалекси, Е.П.Поповым, позволяют выполнить качественный анализ поведения слабонелинейных систем. Для исследования существенно нелинейных систем в настоящее время применяются численные методы: гармонического баланса, малого параметра, медленно меняющихся амплитуд, асимптотические методы, метод продолжения по параметру и другие. Метод продолжения по параметру был предложен Д.Ф. Давиденко и развит в работах Э.И. Григолюка, В.И. Швашилина, В.И. Гуляева и других авторов.

Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования показывают, что только при малой интенсивности внешнего воздействия в гибких пластинах и оболочках возбуждаются гармонические колебания. С ростом нагрузки происходит потеря устойчивости периодических колебаний с последующим переходом в закритические режимы, как регулярные - периодические, квазипериодические, так и нерегулярные - хаотические. Теории бифуркаций посвящены работы А.А. Андропова, Н.М. Вайнберга, А.М. Ляпунова, В.А. Треногина, К. Якоби, Дж. Джузефа, Ж. Йосса, В. Хопфа и ряда других авторов.

Необходимо отметить, что только глобальные исследования эволюции динамических состояний, включая бифуркации и закритическое поведение, могут дать ответ о физической реализуемости тех или иных режимов. Поэтому актуальной в прикладном отношении и перспективной в научном плане представляется разработка эффективных методов исследования устойчивости и бифуркаций нелинейных колебаний пластин и оболочек при периодическом воздействии.

Во втором разделе излагается численная методика формирования нелинейных полиномиальных дискретных динамических моделей

пластинчатых и оболочечных элементов конструкций. Приняты следующие допущения: максимальные прогибы имеют порядок толщины (средний изгиб); деформации остаются малыми (сохраняется справедливость закона Гука); материал конструкции считается однородным изотропным; не учитываются эффекты, связанные с распространением упругих волн в срединной поверхности; используется допущение о недеформируемости нормали и линейной аппроксимации перемещений по толщине; полагается, что частотный диапазон нагрузки охватывает несколько низших собственных частот линейных колебаний конструкции.

Континуальная динамическая модель формируется на основе вариационного принципа Гамильтона. Преобразование континуальной модели в дискретную производится на основе конечноэлементной аппроксимации в сочетании с методом обобщенных координат.

В настоящей работе в качестве базового при построении моделей используется шестигранный конечный элемент с полилинейной аппроксимацией перемещений. Для улучшения свойств конечноэлементной модели используется моментная схема конечных элементов, разработанная А. С. Сахаровым.

При формировании редуцированной дискретной полимодальной динамической модели оболочки используется следующий вариант метода обобщенных координат.

В качестве базиса выбираются несколько низших собственных форм изгибных колебаний, хорошо аппроксимирующих изгибные составляющие поля перемещений, и дополнительные функции для повышения точности аппроксимации мембранных составляющих поля перемещений при конечных прогибах. Добавки к мембранным составляющим определяются из линейной краевой задачи с правой частью, представляющей дополнительную нагрузку, обусловленную значительными прогибами оболочки и выраженную квадратичной формой от нормальных перемещений срединной поверхности. Таким образом поле перемещений представляется в виде:

$$u_N^B = \dot{u}_N^{B_i} y_i(t), \quad u_N^T = \dot{u}_N^{T_i} y_i(t) + \Delta \dot{u}_N^{T_{ij}} y_i(t) y_j(t). \quad (1)$$

Здесь u_N^B - вектор изгибных перемещений, характеризующий прогибы и углы поворота нормали, u_N^T - вектор мембранных перемещений, характеризующий тангенциальные смещения в касательной плоскости, $\dot{u}_N^{B_i}$, $\dot{u}_N^{T_i}$ - основные базисные функции (изгибные собственные формы), $\Delta \dot{u}_N^{T_{ij}}$ - дополнительные базисные функции, характеризующие ге-

симметрическую нелинейность, $y_i(t)$ - обобщенные перемещения.

На основании представления (1) выполняется редуцирование полной конечноэлементной системы уравнений движения конструкции. Учет сил диссипации производится согласно модели частотно-независимого демпфирования (модель Фойхта). В итоге изучение нелинейных периодических и квазипериодических колебаний пластин и оболочек сводится к задаче о построении и исследовании периодических и квазипериодических решений системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{y}_i + 2\varepsilon_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i + K_q^{ijk} y_j y_k + K_o^{ijk} y_j y_k = \lambda p_i(\omega), \quad (2)$$

где $2\varepsilon_i$ - коэффициент демпфирования, ω_i - собственные частоты, K_q, K_o - матрицы квадратичной и кубической нелинейности (для пластин $K_q = 0$), λ, ω - параметры, характеризующие интенсивность и частоту внешнего воздействия, p_i - вектор обобщенной T -периодической во времени нагрузки ($T = 2\pi/\omega$).

С помощью изложенной методики были построены динамические модели защемленной квадратной пластины, шарнирно-опертой цилиндрической панели и печатной платы (защемленная прямоугольная пластина); подтверждена их достоверность.

В третьем разделе рассмотрены методы численного построения траекторий, описывающих эволюцию регулярных колебаний. Математически эта задача сводится к нахождению вектор-функции обобщенных координат, являющейся решением системы (2) и удовлетворяющей условию

$$y(t, \lambda) = y(t + nT, \lambda) \quad (3)$$

в случае периодических колебаний, и условию

$$y(t, \lambda) = y(\omega t, \omega_0 t, \lambda) \quad (4)$$

в случае квазипериодических колебаний. В выражении (4) вектор-функция $y(\varphi_1, \varphi_2, \lambda)$ удовлетворяет условиям

$$y(\varphi_1, \varphi_2, \lambda) = y(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2, \lambda); \quad y(\varphi_1, \varphi_2, \lambda) = y(\varphi_1, \varphi_2 + 2\pi, \lambda) \quad (5)$$

При этом периоды $T = 2\pi/\omega$ и $T_0 = 2\pi/\omega_0$ - рационально независимы. Семейство решений $y(t, \lambda)$ системы (2), удовлетворяющих условию (3) или (4), представляется кривой реакций.

Рассматриваемой задаче (2) ставится в соответствие операторное уравнение

$$F(y, \lambda) = 0. \quad (6)$$

Если при определенных значениях параметра λ_k , характеризующего интенсивность внешнего воздействия, известно приближенное решение u_k уравнения (6), то решение, отвечающее $\lambda_{k+\varepsilon} = \lambda_k + \Delta\lambda$, ищется в виде:

$$u_{k+\varepsilon} = u_k + [F_y]^{-1} [F(u_k, \lambda_k) + F'_\lambda(u_k, \lambda_k) \Delta\lambda] \quad (7)$$

где F'_y и F'_λ - производные Фреше оператора F .

Исходя из известного состояния λ_0, u_0 , меняя пошагово параметр λ , можно проследить соответствующую эволюцию динамических состояний. В настоящей работе в качестве исходного обычно выбиралось либо ненагруженное состояние $\lambda_0 = 0, u_0 = 0$ (при построении периодических режимов), либо значения λ и u в окрестности бифуркационной точки, полученные методами теории ветвлений (для квазипериодических режимов).

Изложенный подход реализован как в пространстве состояний путем решения ряда задач Коши (для периодических колебаний), так и в частотной области на основе представления искомого решения в виде отрезка ряда Фурье (для периодических и квазипериодических колебаний).

Точки на кривых состояний, в которых линеаризованный оператор F'_y уравнения (6) вырождается, являются особыми. В них выражение (7) неприменимо, и возможно ветвление кривых состояний. Построение кривых реакций сопровождается анализом устойчивости получаемых решений, проводимом путем исследования устойчивости тривиального решения уравнений в вариациях и основанного на теоремах устойчивости по первому приближению. В пространстве состояний заключение об устойчивости делается при помощи анализа мультипликаторов матрицы монодромии, а в частотной области - при помощи характеристических показателей.

Для исследования устойчивости квазипериодических колебаний использовались характеристики, полученные при помощи численного интегрирования уравнений движения (2): дискретные спектры, фазовые траектории, отображения Пуанкаре. Их реакное изменение при малом изменении параметра нагрузки свидетельствует о потере устойчивости квазипериодическим режимом колебаний.

В четвертом разделе работы исследуется перестройка основного динамического состояния на границе области неустойчивости, переход с периодического на квазипериодический режим колебаний.

Для анализа перестройки основного динамического состояния

в бифуркационной точке предложена численная методика, конкретизирующая применительно к полиномиальным динамическим моделям развитый Л. Йоссом и Дж. Дюзефом подход, основанный на использовании метода рядов и альтернативы Фредгольма.

Для удобства построения выполняется в локальной форме. При этом $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, здесь λ_0 - значение параметра, соответствующее точке бифуркации. При переходе от динамических переменных к фазовым система дифференциальных уравнений (2) примет вид:

$$\dot{x} = f(t, \lambda, x) \quad (8)$$

где для функции правых частей выполняется условие периодичности.

Пусть u - произвольное возмущение решения x системы (8), соответствующее изменению амплитуды нагрузки на $\Delta\lambda$, тогда

$$\dot{u} = f_u(t, \Delta\lambda, u) + N(t, \Delta\lambda, u), \quad (9)$$

где $N(t, \Delta\lambda, u) = f(t, \Delta\lambda, u) - f_u(t, \Delta\lambda, u)$ - нелинейные члены, вызванные наличием в системе (2) билинейного и трilinearного операторов. Оператору $\Gamma_u(t, \Delta\lambda, \cdot)$ отвечает касательная матрица, вектор $N(t, \Delta\lambda, u)$ выражается через операторы K_p и K_c системы (2), вектор-функции обобщенных перемещений и собственные функции спектральной задачи

$$J(\Delta\lambda) \zeta = \sigma \zeta, \quad (10)$$

где $J = -d(\cdot)/dt + f_u(t, \Delta\lambda, \cdot)$; в критической точке $\sigma = \pm i\omega$.

Любое решение уравнения (9) представимо в виде:

$$u(\Delta\lambda, t) = \underline{z}(\Delta\lambda, t) \zeta(t) + \overline{z}(\Delta\lambda, t) \overline{\zeta}(t) + W(\Delta\lambda, t), \quad (11)$$

где $\zeta(\Delta\lambda, t)$ - T -периодическая собственная вектор-функция спектральной задачи ($\overline{\zeta}(\Delta\lambda, t)$ - собственная вектор-функция сопряженной задачи), вектор-функции W ортогональна собственному пространству спектральной задачи.

При определении z используется метод проектирования. Для получения биортогонального разложения представление (11) подставляется в (9) и выполняется ряд преобразований с учетом при этом свойств ортогональности функции W собственному подпространству. Затем переходим к новым переменным:

$$z = \underline{z} + Y(t, \Delta\lambda, \underline{z}, \overline{z}); \quad V = W + \Gamma(t, \Delta\lambda, \underline{z}, \overline{z}), \quad (12)$$

где Y - комплексная, а Γ - вещественная T -периодические функции.

Y и Γ ищутся в виде полиномов третьей степени (что соответствует "точному" в рамках принятой нелинейной модели представлению). В итоге приходим к выражениям:

$$z = z_0 + \sum_{j+k \geq 2} Y_{jk}^i(t, \Delta\lambda) z_0^{j+k} \bar{z}_0^k ; \quad W = V + \sum_{j+k \geq 2} \Gamma_{jk}^i(t, \Delta\lambda) z_0^j \bar{z}_0^k, \quad (13)$$

где $Y_{jk}^i = -Y_{jk} +$ функции от Y_{cm} ; $\Gamma_{jk}^i = -\Gamma_{jk} +$ функции от Γ_{cm} ($1 + m < j + k - 1$).

Функции Y_{jk} и Γ_{jk} получаем путем решения дифференциальных уравнений

$$\dot{Y}_{jk} + [\bar{\sigma}(j-1) + \bar{\sigma}K] Y_{jk} + \beta_{jk} = 0 \quad (14)$$

$$\dot{\Gamma}_{jk} - f_u(t, \Delta\lambda | \Gamma_{jk}) + [j\bar{\sigma} + K\bar{\sigma}] \Gamma_{jk} + V_{jk} = 0$$

T-периодическая функция β_{jk} и вектор-функция V_{jk} выражаются через операторы K_r , K_c и собственные функции ξ и $\bar{\xi}$.

Уравнения (14) решаются в два этапа. Сначала находятся функции Y_{jk} и Γ_{jk} , для которых $(j, k) = (1, 1), (0, 2), (2, 0)$, затем вычисляются неизвестные ранее функции β_{jk} и V_{jk} для $(j, k) = (1, 2), (2, 1), (0, 3), (3, 0)$ и определяются функции Y_{jk} и Γ_{jk} с этими коэффициентами. Если для нахождения всех функций Y_{jk} необходимо решить семь уравнений, то для нахождения функций Γ_{jk} , учитывая свойства сопряженности, достаточно решить четыре уравнения.

При вычислении функций Y_{jk} и Γ_{jk} при $(j, k) = (2, 1)$ в силу вырождения задачи для Y_{21} и невыполнения условия ортогональности для Γ_{21} и ξ^* выполняются дополнительные построения.

Аналитические выражения для функций $z(t, \varepsilon)$ и $W(t, \varepsilon)$ могут быть представлены в виде:

$$z(t, \varepsilon) = \varepsilon \exp[i(\omega_0 + \varepsilon^2 \hat{\theta})t] + \sum_{j+k \geq 2} Y_{jk}^i(t, \Delta\lambda(\varepsilon)) \varepsilon^{j+k} \exp\{i(j-k)[\omega_0 + \varepsilon^2 \hat{\theta}]t\},$$

$$W(t, \varepsilon) = \sum_{j+k \geq 2} \Gamma_{jk}^i(t, \Delta\lambda(\varepsilon)) \varepsilon^{j+k} \exp\{i(j-k)[\omega_0 + \varepsilon^2 \hat{\theta}]t\} \quad (15)$$

Здесь ε - произвольно выбираемый радиус бифуркационного тора, $\Delta\lambda(\varepsilon)$ - соответствующее выбранному ε приращение амплитуды нагрузки (между ε и $\Delta\lambda$ существует взаимно однозначное соответствие), $\varepsilon^2 \hat{\theta}$ выражается через $\Delta\lambda$ и параметры критической точки и используется при вычислении второй основной частоты квазипериодической функции $\omega_0 = \omega_{br} + \varepsilon^2 \hat{\theta}$.

Суммируя T-периодическую вектор-функцию обобщенных переменных y и квазипериодическую вектор-функцию z получаем искомое квазипериодическое решение в окрестности особой точки. Дальней-

ная эволюция квазипериодического режима исследуется методом продолжения по параметру в частотной области.

В пятом разделе излагаются результаты исследований периодических и квазипериодических режимов нелинейных колебаний пластин и оболочек под действием равномерно распределенного по поверхности нормального давления, интенсивность которого изменяется во времени по гармоническому закону, их устойчивости и бифуркации.

Поскольку пространственная конфигурация нагрузки является симметричной, то критические режимы представляют собой симметричные в пространстве колебания и описываются симметричными формами. Режимы с несимметричной пространственной конфигурацией возбуждаются лишь при определенных значениях параметров нагрузки и в настоящей работе не рассматриваются.

На рис. 1, а-д представлены результаты исследований комбинационного резонанса второго порядка между первой и шестой собственными формами колебаний заземленной квадратной пластины. Схема пластины и узловые линии для трех симметричных форм приведены на рис. 1 а. Анализ проводился в окрестности соответствующей критической частоты $\bar{\omega}_2^{kc} = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_6) / 2 = 2,405$. Здесь $\bar{\omega}_1 = 1,000$ и $\bar{\omega}_6 = 3,810$ - относительные (в долях первой) собственные частоты.

Кривые реакции, соответствующие относительной частоте нагрузки $\bar{\omega} = \omega / \omega_1 = 2,6$ приведена на рис. 1 б. По оси абсцисс отложена величина w , равная максимальному значению безразмерного ($w = W_{max}/h$, h - толщина) прогиба в центре пластины, достигаемого в процессе колебаний. По оси ординат отложено значение параметра интенсивности внешнего воздействия λ . Кривая реакции O - A-B-C соответствует режиму периодических колебаний, она построена с помощью метода продолжения по параметру в пространстве состояний. Участки кривых реакций соответствующие устойчивым режимам колебаний проведены сплошной линией, неустойчивым - пунктиром. Точки А и В являются особыми. В точке А происходит "жесткое", а в точке В - "мягкое" возбуждение квазипериодических колебаний. Перестройка динамического состояния в окрестности бифуркационной точки исследовалась с помощью описанной выше методики. Участок кривой B-D-A соответствует режиму квазипериодических колебаний, он построен с помощью метода продолжения по параметру в частотной области.

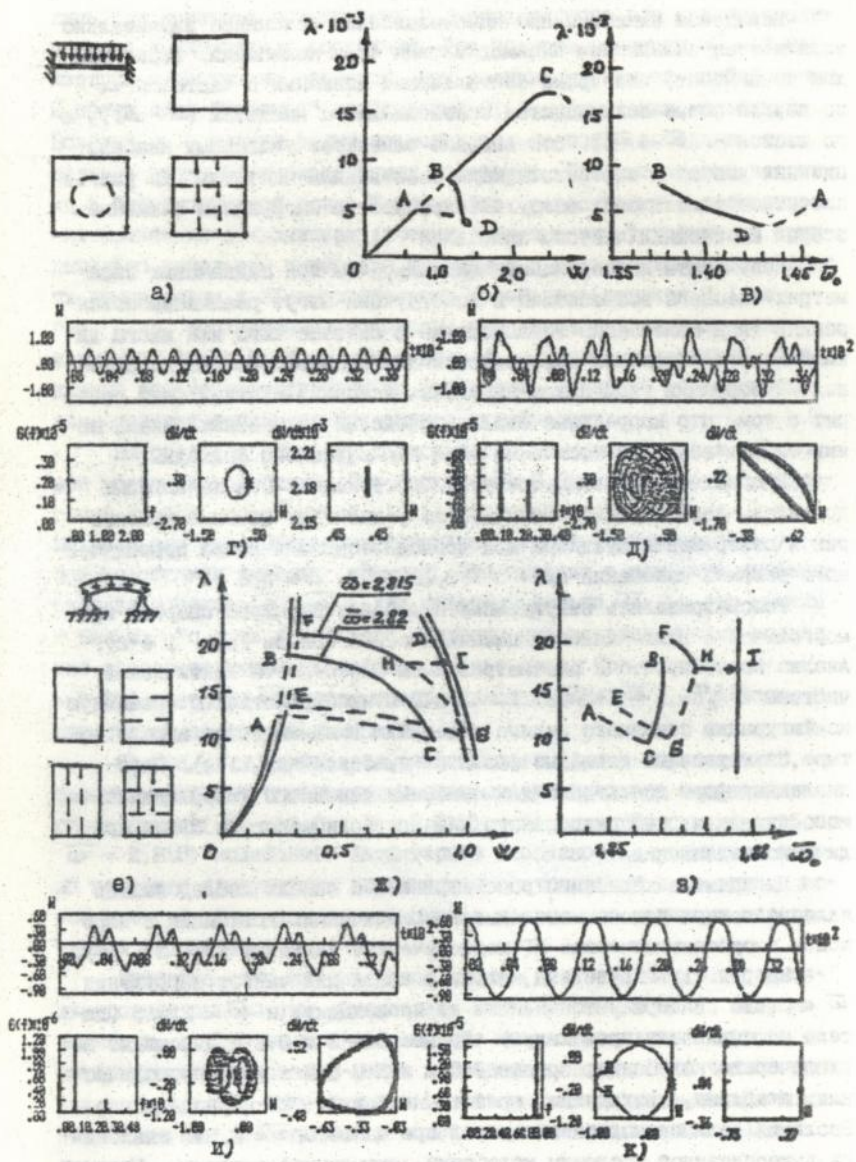


Рис. I

Поведение пластины при комбинационном резонансе значительно усложняется вследствие взаимодействия форм колебаний. Фурье-анализ показывает, что кроме составляющих движения с частотой $\bar{\omega}$ по первой форме возбуждаются составляющие с частотой $(\bar{\omega} - \bar{\omega}_0)$, а по шестой - $(\bar{\omega} + \bar{\omega}_0)$. Это вызвано близостью указанных комбинационных частот к соответствующим собственным частотам. На рис. 1в построена зависимость между интенсивностью нагрузки и значением второй автономной частоты колебаний.

Результаты исследований показали, что при одинаковых параметрах внешнего воздействия в конструкции могут реализовываться разные типы колебаний. Установление в системе того или иного динамического состояния определяется последовательностью нагружения конструкции (или видом начальных условий). Данный факт говорит о том, что корректный анализ поведения нелинейных динамических систем возможен только на базе эволюционного подхода.

Вышеизложенное иллюстрируется рисунками 1 г, д на которых приведены зависимости "время-прогиб", спектры, фазовые траектории и отображения Пуанкаре для периодического и почти периодического режимов колебаний при $\lambda = 3,25 \cdot 10^3$ и $\bar{\omega} = 2,6$.

Рассматривались вынужденные колебания шарнирно-опертой прямоугольной в плане полкой цилиндрической панели (рис. 1 е-к). Анализ показал, что в рассматриваемой окрестности критической частоты $\bar{\omega}_{2,11}^{1,11} = (\bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_{11})/2 = 2,846$ в пространственно-временную конфигурацию основного режима колебания главный вклад вносят четыре симметричные изгибные формы (1-я, 5-я, 7-я, 11-я). Перечисленные формы достаточно для описания основного T-периодического движения, бифуркационного квазипериодического и 3T-периодического движений.

На примере колебаний рассматриваемой панели исследовалось явление потери устойчивости квазипериодических колебаний с переходом в субгармоническое 3T-периодическое движение ($T = 2\pi/\omega$).

На рис. 1 к приведены кривые реакции для частот нагружения $\bar{\omega} = 2,820$ (потеря устойчивости не происходит) и $\bar{\omega} = 2,815$ (потеря устойчивости происходит). Кривые O-A-B и O-E-F описывают периодические колебания, кривые B-C-A и F-H-G-E - квазипериодические, а кривые, проходящие через точки D и I - 3T-периодические. Эволюция режимов колебаний панели при частоте $\bar{\omega} = 2,820$ аналогична вышеописанной эволюции колебаний защемленной пластины. Переход

на режим 3Т-периодических колебаний при этой частоте возможен лишь при конечных возмущениях Т-периодического или квазипериодического динамических состояний. При частоте нагрузки $\bar{\omega} = 2,815$ картина существенно меняется. При достижении нижней особой точки Е произойдет "жесткое" возбуждение 3Т-периодических колебаний. Возврат на основной режим возможен только после выхода за предельную точку 3Т-периодических колебаний. При уменьшении нагрузки в бифуркационной точке F произойдет перестройка Т-периодических колебаний в квазипериодические. Однако они устойчивы в сравнительно небольшом интервале нагрузки, и в дальнейшем произойдет их перестройка в 3Т-периодические колебания (переход Н-1 на рис. 1 ж). Исследования показали, что указанный переход сопровождается очень быстрым изменением характеристик движения. При данных параметрах нагрузки он необратим. В работе проанализированы условия возникновения потери устойчивости.

На рис. 1 а показаны зависимости между нагрузкой и автономной частотой колебаний. При частоте $\bar{\omega} = 2,820$ кривая А-С-D аналогична кривой, построенной для заземленной пластины (рис. 1 в). Но если там при уменьшении нагрузки частота $\bar{\omega}_0$ возрастает, то при колебаниях панели - убывает. Это связано с тем, что комбинационная частота $(\bar{\omega} - \bar{\omega}_0)$ для пластины больше $\bar{\omega}_0$, а для панели - меньше. То есть в процессе эволюции квазипериодических колебаний соответствующая расстройка уменьшается. При частоте $\bar{\omega} = 2,815$ частота $\bar{\omega}_0$ "стремится" к значению $2/3 \bar{\omega}$, и в точке Н происходит ее резкое изменение.

На рис. 1 и, к приведены зависимости "время-перемещение", спектры, фазовые траектории и отображения Пуанкаре для квазипериодических ($\lambda = 19,0$, $\bar{\omega} = 2,815$) и 3Т-периодических ($\lambda = 16,0$, $\bar{\omega} = 2,815$) колебаний. Характерной особенностью колебаний панели является присутствие статической составляющей в ее динамической реакции. Это вызвано наличием в уравнениях движения квадратичной нелинейности.

Известно, что значительная часть (до 40 %) отков радиоэлектронной аппаратуры обусловлена влиянием вибрации на несущие элементы, в том числе и на печатные монтажные платы. Частоты их механического резонанса лежат в пределах возмущающих частот внешних воздействий, существующих на объектах эксплуатации. Поэтому были численно исследованы наиболее устойчивые колебания

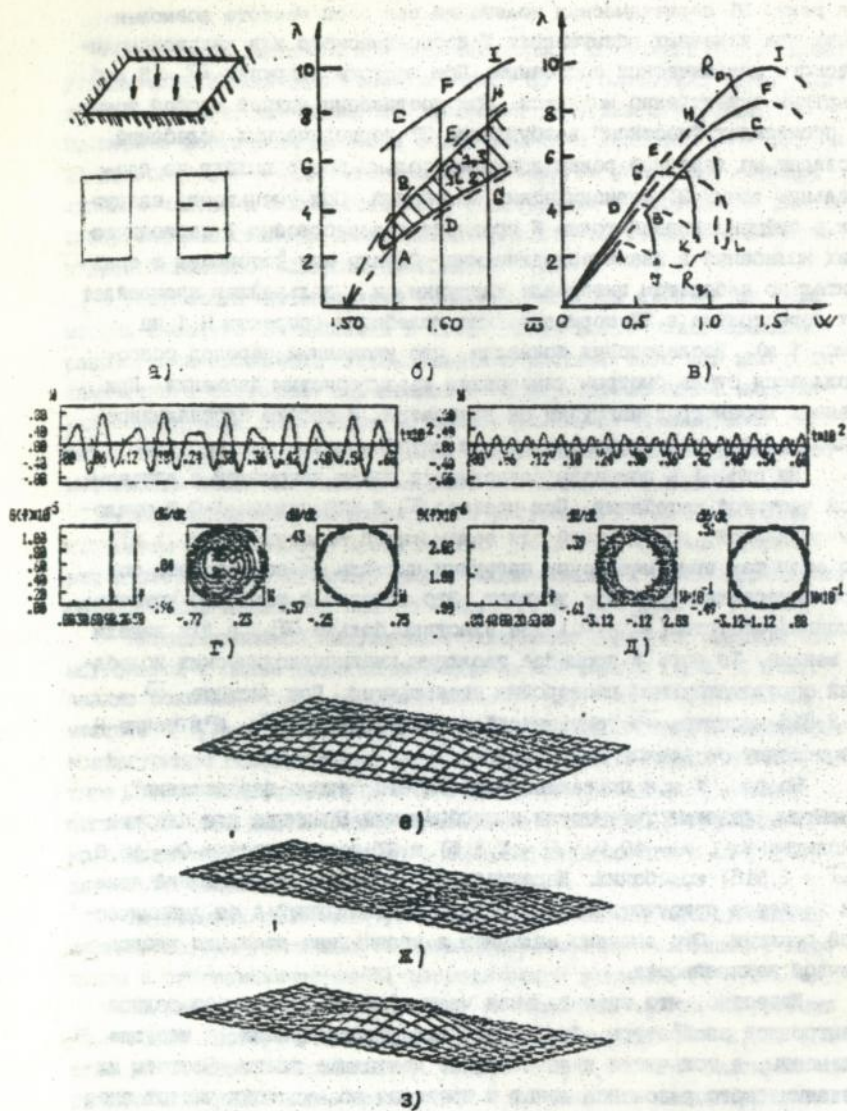


Рис. 2

печатной платы, представляющей собой заземленную прямоугольную стеклотекстолитовую пластину, на которой способом печатного монтажа закреплены микросхемы (рис. 2 а-в). На плату действует внешняя равномерно распределенная, гармоническая во времени нагрузка. Исследовалось взаимодействие изгибных форм в комбинационном резонансе второго порядка между первой и третьей собственными формами.

Построенная область неустойчивости в окрестности соответствующей критической частоты показана на рис. 2 б. Линия С-F-I является линией верхних предельных точек. Кривые реакций, соответствующие частотам воздействия $\bar{\omega} = 1,55; 1,60; 1,65$ приведены на рис. 2 в. Периодическим режимам колебаний соответствуют кривые Rp, квазипериодическим - Rq.

Как отмечалось ранее, при комбинационных резонансах, вследствие взаимодействия форм колебаний, значительно усложняется динамическое поведение конструкции. Это иллюстрируется рис. 2 г, д, на которых показаны зависимости обобщенных координат от времени для первой и третьей собственных форм, а также соответствующие спектры, фазовые траектории и отображения Пуанкаре ($\lambda = 2,5$, $\bar{\omega} = 1,6$). По первой форме ($\bar{\omega}_1 = 1,000$) возбуждаются составляющие движения с частотой $(\bar{\omega} - \bar{\omega}_0) = 1,096$, по третьей ($\bar{\omega}_3 = 2,016$) с частотой $(\bar{\omega} + \bar{\omega}_0) = 2,110$. Взаимодействие форм в процессе почти периодических колебаний приводит к тому, что существуют моменты времени, когда деформированное состояние платы определяется в основном вкладом первой формы (рис. 2 е), третьей (рис. 2 ж), или совместным вкладом первой и третьей форм (рис. 2 з). В последнем случае вследствие наложения форм колебаний помимо возрастания прогиба в центре платы значительно увеличивается кривизна поверхности в отдельных ее точках, что может привести к нарушению крепления радиоэлементов. Кроме того, возрастание амплитуды колебаний и появление в спектре новых частот оказывает влияние на усталостную прочность конструкции. Опасность представляет также возможное совпадение комбинационных частот с собственными частотами узлов радиоэлементов.

В заключении приведены основные результаты, полученные в диссертационной работе:

1. На базе метода конечных элементов реализованы эффективные вычислительные процедуры, позволяющие формировать конечно-мерные полиномиальные нелинейные модели пластики и оболочек.

2. Разработаны и реализованы численные методики построения и исследования устойчивости периодических и квазипериодических установившихся режимов колебаний, основанные на методе продолжения по параметру в пространстве состояний и в частотной области.

3. Предложена численная методика построения асимптотически квазипериодических колебаний, отвечающих в точках бифуркаций.

4. Разработанные методики реализованы в пакете прикладных программ для ПКЭМ, позволяющем осуществить все этапы исследования сложных установившихся режимов нелинейных вынужденных колебаний пластин и оболочек и их бифуркаций. Созданный программный комплекс может быть сопряжен с любым пакетом прикладных программ, позволяющем формировать дискретные динамические модели.

5. Решены новые задачи о периодических и квазипериодических колебаниях пластин и оболочек при внешнем периодическом воздействии. Исследовано явление потери устойчивости квазипериодическими колебаниями.

Основное содержание диссертации отражено в следующих публикациях:

1. Захарченко Т. Г., Клишко И. А., Лумельский Е. Д. Нелинейные колебания тонкостенных комбинированных конструкций // Тез. докл. научно-практической конференции по пространственным конструкциям. - Ростов-на-Дону, 1988. - С. 50-51.

2. Захарченко Т. Г., Клишко И. А. Периодические и неперидические режимы установившихся нелинейных колебаний пластин и оболочек // Тез. докл. 52-й научно-практической конференции профессорско-преподавательского состава, аспирантов и студентов. - К.: КИСИ, 1991. - С. 87.

3. Клишко И. А., Лумельский Е. Д. Численное построение асимптотически квазипериодических решений в задачах о нелинейных колебаниях пластин и оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1990. - Вып. 57. - С. 99 - 104.

4. Статический и динамический расчёт рабочих органов землеройных машин отвального типа / Б. Г. Волк, И. А. Клишко, Е. Д. Лумельский и др. // Тез. докл. республиканского семинара молодых учёных по проблемам механизации и автоматизации земляных работ в строительстве. - Киев, 1988. - С. 14.

ANS. IN. B. STVCHHINI
AHVPCP

467818

№ 25.763
АВ 25.763

Подписано к печати 28.08.92г. Формат 60x84 1/16. Бумага белая писчая.
Печать офсетная. Объем 1 п. л. Тираж 102. Заказ №1155. Бесплатно.
Подразделение оперативной полиграфии управления статистики Полтавской области.
г. Полтава, ул. Пушкина, 103.