ЧЕРНОВИЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЮРИЯ ФЕДЬКОВИЧА

На правах рукописи

Кушнирчук Василий Иосифович

ИТЕРАТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

05.13.16 - применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях.

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Черновцы - 1992

Работа выполнена в Вычислительном Центре
Российской Академии Наук.

Научные руководители: член-корреспондент РАН
Евтушенко Ю.Г.

кандидат физико-математических
наук Жадан В.Г.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических
наук, профессор Данилин Ю.М.

кандидат физико-математических
наук, доцент Маценко В.Г.

Ведущая организация: Киевский университет
имени Тараса Шевченко.

Защита состоится "27" ноября 1992 г. в 14 часов на заседании специализированного ученого совета К.068.I6.05 в Черновицком государственном университете им.Юрия Федьковича (274012 г.Черновцы, ул.Коцюбинского, 2).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Черновицкого государственного университета (ул.Леси Украинки, 23).

Автореферат разослан "26" октября 1992 г.

Ученый секретарь специализированного совета К.068.I6.05 Садовяк А.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность проблемы. Стремительно развивающаяся вычислительная техника в настоящее время проникает во все сферы человеческой деятельности. Трудно охватить все разнообразие задач, для решения которых используются ныне ЭВМ. Но не подлежит сомнению, что различные задачи оптимизации и методы решения таких задач составляют одно из наиболее динамичных направлений развития математической науки. Широкий спектр приложений является мощным стимулом для интенсивной разработки методов математического программирования. Практика порождает все новые и новые задачи оптимизации, причем их сложность растет. Требуются новые математические модели и методы, которые учитывают наличие многих критериев, проводят глобальный поиск оптимума и т.д. Это одна из причин постоянного и неослабевающего в течении последних трех десятилетий внимания математиков к задачам оптимизации.

Вместе с тем, вопросы создания эффективных и простых, но достаточно универсальных алгоритмов остаются, как и прежде, актуальными. Сравнительно проработанными являются методы решения линейных и квадратичных задач. Для таких задач разработаны конечные алгоритмы решения. Но и здесь остаются открытыми серьезные вопросы, связанные, в первую очередь, с большими размерностями практических задач.

Начиная же с задач выпуклого программирования, приходится довольствоваться методами, дающими решение лишь в пределе, за бесконечное число шагов.

Многие практические задачи конструирования, принятия решений в конфликтных ситуациях приводят к необходимости решения задач многокритериальной оптимизации. Эти задачи возникают в тех случаях, когда необходимо с помощью одного акта принятия решений добиться наилучшего выполнения нескольких, возможно противоречивых, целей. С математической точки зрения задачи многокритериальной оптимизации являются естественным обобщением обычных задач оптимизации.

Методы решения многокритериальных задач позволяют значительно расширить область применимости уже имеющихся методов нелинейного программирования, безусловной минимизации и глобальной оптимизации. Поэтому целесообразно применить имеющиеся ресурсы к решению многокритериальных задач, опираясь на те или иные премы преобразования таких задач в обычные задачи оптимизации. Подтверждение тому - использование годобных методов в пакетах прикладных программ.

Ц е л ь р а б о т ы состоит в разработке численных методов решения задач многокритериальной оптимизации на основе обобщения применяемых в нелинейном программировании вариантов метода возможных направлений и метода линеаризации.

Н а у ч н а я н о в и з н а полученных в работе результатов заключается в следующем:

I) Сформулированы и доказаны условия сведения задачи нахождения оптимальных по Парето решений к задаче отыскания особых точек вспомогательной свертывающей функции.

2) Разработаны две версии метода возможных направлений для решения задач выпуклой многокритериальной оптимизации. Доказана сходимость рассмотренных методов.

3) Обосновано применение вспомогательной функции типа негладкой штрафной функции для решения общей задачи многокритериальной оптимизации методом линеаризации.

Методика исследований, проведенных в диссертационной работе, основана на методах оптимимзации, выпуклого анализа, исследовании операций, многокритериальной оптимизации и вычислительного эксперимента.

Реелизация результатов исследования представлена в виде комплекса программ проектирования строительных конструкций.

Апробация и публикации. По результатам делались сообщения и доклады на

- на девятом Всесоюзном симпозиуме "Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования";
- на шестой Всесоюзной конференции по управлению в механических системах;
- на восьмой Всесоюзной конференции "Проблемы теоретической кибернетики";
- на семинаре отдела "Прикладные проблемы оптимизации" ВЦ АН СССР и ВЦ РАН;
- на республиканском семинаре 19.16 "Математические проблемы управления";
- в Черновицком государственном университете.

По результатам диссертационной работы опубликованы 5 работ.

На защиту выносятся следующие результаты:

- две версии метода возможных направлений для решения задач выпуклой многокритериальной оптимизации;

- метод линеаризации для общей задачи многокритериальной оптимизации;

- алгоритмы и процедуры рассмотренных методов примененные для решения задачи проектирования строительных конструкций.

Объем и структура диссертации. Диссертация, объемом 110 страниц, состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 80 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Рассмотрение задач в работе проводится по следующей схеме: метод возможных направлений (глава I), метод линеаризации (глава 2), приложения теории к решению задаче проектирования строительных конструкций (глава 3).

В главе I "Метод возможных направлений" обобщены применяемые в нелинейном программировании две версии метода возможных направлений на случай решения задачи выпуклой многокритериальной минимизации

$$\min_{x \in X} f(x), \quad X = \{\, x \in R^n \mid g(x) \leq 0 \,\}. \qquad (\mathrm{I})$$

Под решением задачи (I) понимается множество слабо оптимальных по Парето (оптимальных по Слейтеру) точек в пространстве R^n, определяемое следующим образом:

$$X_* = \{\, x_* \in X \mid \max_{1 \le i \le r} [f^i(x) - f^i(x_*)] \geq 0, \ \forall x \in X \,\}. \quad (2)$$

В параграфе I.I формулируются основные предположения и ограничения, используемые в дальнейшем. Вводится в рассмотрение ℓ-мерная ($\ell = r + m$) вектор-функция $h(x, y)$, для $y \in R^r$, первыми r компонентами которой являются функции $f^i(x) - y^i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$), а последующими m компонентами - функции $g^j(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, m$). Составлена вспомогательная функция

$$H(x, y) = \max_{1 \le i \le \ell} h^i(x, y).$$

Сформулируем условия существования решений задачи (I).

Л е м м а I.I. Для того чтобы вектор $x_* \in R_n$ был решением задачи (I) (т.е. $x_* \in X_*$), необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор $y_* \in R^r$ такой, что

$$H(x, y) = 0, \quad (3)$$

$$x_* \in \operatorname{Argmin}_{x \in R^n} H(x, y_*). \quad (4)$$

Точки $x_* \in R^n$ и $y_* \in R^r$, в которых выполнены условия (3)-(4) назовем особыми точками функции $H(x, y)$. Лемма I.I сводит решение исходной задачи (I) к нахождению особых точек функции $H(x, y)$.

В параграфе I.2 рассматривается задача линейного программирования

$$\max_{\delta,\sigma} \sigma \qquad (5а)$$

$$\langle h_x^i(x, y), \delta \rangle + \sigma < 0, \quad i \in I_\varepsilon(x, y), \qquad (5б)$$

$$|\delta^j| < 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (5в)$$

где $I_\varepsilon(x, y) = \{1 \leq i \leq \ell \mid h^i(x, y) > H(x, y) - \varepsilon\}$ - множество индексов ε-активных компонент функции $h(x, y)$. Решение этой задачи задает направление убывания функции $H(x,y)$. Изучаются свойства решений задачи (5). В частности показано, что значение целевой функции $\sigma_0(x, y)$ в задаче (5) будет положительным, если $x \notin X_*$. А достаточным условием попадания точки x_* в множество X_* есть выполнение (3) и равенство нулю целевой функции задачи (5) в этой точке $\sigma_0(x_*, y_*) = 0$.

Выписана также двойственная к (5) задача. С ее помощью уставлено, что вектор

$$p(x, y) = \sum_{i \in I_\varepsilon(x,y)} u^i(x, y) h_x^i(x, y),$$

где $u(x, y) = \{u^i(x, y), \ i \in I_\varepsilon(x, y)\}$ - вектор двойственных переменных, является ε-субградиентом функции $H(x,y)$ в точке $[x, y]$. А направление убывания функции $H(x, y)$ вектор $\delta_\varepsilon(x, y)$ обладает тем свойством, что из всех векторов δ, удовлетворяющих условию нормировки (5в), скалярное произведение вектора $-\delta_\varepsilon(x, y)$ на вектор $p(x, y)$ есть наибольшее возможное.

В параграфе I.3 рассматривается численный метод отыскания особых точек функции $H(x, y)$. Поскольку функция $H(x, y)$ негладкая, то используется ε-алгоритм. Задаются начальные значения $x_0 \in R^n$, $y_0 \in F_+$, направление $e \in R^r_+$, $\varepsilon > 0$. Очередная итерационная точка строится по правилу

$$y_{k+1} = y_k - \beta(x_k, y_k, e)e, \tag{6а}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \delta_\varepsilon (x_k, y_{k+1}), \tag{6б}$$

где $\beta(x, y, e) = \min\limits_{1 \le i \le r} \dfrac{y^i - f^i(x)}{e^i}$, а параметр ε изменяется по стандартной, для метода возможных направлений, схеме. Для удобства изучения свойств итерационного процесса (6) введены обозначения

$$\varphi(x, y) = \max_{1 \le i \le r} [f^i(x) - y^i], \qquad \Psi(x) = \max_{1 \le i \le m} g^i_+(x).$$

Предлагаемый численный метод таков, что на каждой итерации наряду с равенством $H(x_k, y_{k+1}) = \Psi(x_k)$ выполняется также равенство $\varphi(x_k, y_{k+1}) = 0$, что характерно для прямых методов условной оптимизации. Шаг спуска α_k в итерационном процессе (6) находится путем деления пополам начального шага α пока не будет выполнено условие

$$H(x_k + \alpha_k \delta_k, y_{k+1}) < H(x_k, y_{k+1}) - \alpha_k \sigma_k / 2.$$

При этом на каждой итерации шаг спуска не может быть слишком малым и удовлетворяет неравенству

$$\alpha_k > \min \left[\alpha, \frac{\sigma_k}{2Ln}, \frac{\varepsilon_k}{\sigma_k + 2Kn^{1/2}} \right].$$

Получена также оценка снизу для величины $\beta(x, y, e)$ на каждой итерации.

Пусть $G(x_0) = \{ x \in R^n \mid \Psi(x) \leqslant \Psi(x_0) \}$, а $Y(x_0, e)$ - множество предельных точек последовательности $\{x_k\}$. Доказательство теоремы о сходимости метода проведено при выполнении следующих условий

Условие A_1. Градиенты функций $f^i(x)$, $i=1,2,\ldots,r$ и $g^j(x)$, $j=1,2,\ldots,m$, удовлетворяют на R^n условию Липшица с константой L.

Условие A_2. Существует константа $K<+\infty$ такая, что

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant r} \max_{x \in G(x_0)} \| f^i_x(x) \| \leqslant K,$$

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant r} \max_{x \in G(x_0)} \| g^j_x(x) \| \leqslant K.$$

Условие A_3. Множество X ограничено.

Тогда справедлива

Теорема 1.1. Пусть выполнены предположения A_1-A_3. Тогда $Y(x_0, e) \subseteq X_*$.

В параграфе 1.4 предлагается обобщение еще одного варианта метода возможных направлений, а именно версии Топкиса-Вейнотта. Отличие этой версии метода от версии, рассматриваемой в предыдущих параграфах состоит в том, что задача линейного программирования здесь имеет вид:

$$\max_{\delta, \sigma} \sigma \tag{7а}$$

$$\langle h^i_x(x,y), \delta \rangle + h^i(x,y) - H(x,y) + \sigma \leqslant 0, \quad i=1,2,\ldots,\ell, \tag{7б}$$

$$| \delta^j | \leqslant 1, \quad j=1,2,\ldots,n. \tag{7в}$$

Если в (5б) попадали лишь ε-активные компоненты вектор-функции $h(x, y)$, то в (7б) входят все компоненты. Изучены свойства решений задачи (7). Предлагается численный метод, итерации в котором проводятся по схеме (6) с решением на каждом шаге вспомогательной задачи (7). Итерационный процесс обладает свойствами, аналогиными свойствам, рассмотренными в предыдущем параграфе. Доказана теорема о сходимости второй версии метода возможных направлений.

Обобщению еще одного широко используемого в нелинейном программировании метода на случай решения общей задачи многокритериальной оптимизации посвящена глава 2 "Метод линеаризации".

В параграфе 2.I для общей задачи (I) вводится в рассмотрение вспомогательная функция

$$M(x, y, t) = \varphi_e(x, y) + t\Psi(x), \qquad (8)$$

где функции $\varphi_e(x,y)$ и $\Psi(x)$, для выбранного направления $e \in \operatorname{int} R^r_+$, задаются следующим оразом

$$\varphi_e(x, y) = \max_{1 \leq i \leq r} \frac{f^i(x) - y^i}{e^i}, \quad \Psi(x) = \max_{0 \leq j \leq m} g^j(x).$$

Коэффициент $t > T(u_*, v_*) = (\sum_{i=1}^{r} u_*^i e^i)^{-1} \sum_{i=1}^{m} v_*^i$, вектор

$y \in \delta(y_*, e) = \{ y \in R^r \mid y = y_* + \sigma e, \sigma \in R^1 \}$.

Пусть множество $Z = \{ [x, y] \in R^{n+r} \mid \varphi_e(x, y) = 0 \}$, а Z_* - множество точек $z_* = [x_*, y_*] \in Z$, в которых выполнены необходимые условия первого порядка. Точку $[x, y, t] \in R^{n+r+1}$ будем называть особой точкой функции (8) если $[x, y] \in Z$,

$\Psi(x)=0$ и

$$\inf_{\|\delta\|=1} \frac{M'_*(x, y, t)}{\delta} > 0.$$

Основным результатом этого параграфа является лемма, выражающая связь между точками множества Z_* и особыми точками функции $M(x, y, t)$:

Л е м м а 2.I. Если $[x_*, y_*] \in Z_*$, тогда $[x_*, y_*, t]$- особая точка функции $M(x, y, t)$ для всех $t > T(u_*, v_*)$. Обратно, если $[x_*, y_*, t_*]$ - особая точка функции $M(x, y, t)$, то $[x_*, y_*] \in Z_*$.

Таким образом, решение задачи (I) равносильно отысканию особых точек функции $M(x, y, t)$. Численный метод их нахождения предполагает решение на каждой итерации некоторой вспомогательной задачи линейного программирования. В параграфе 2.2 рассмотрена эта задача: найти

$$\min_{\delta, \eta, \sigma} [\eta + P(x, y)\sigma], \tag{9а}$$

$$\langle f^i_x(x), \delta \rangle + f^i(x) \leqslant y^i + e^i\eta, \quad i \in I_\delta(x, y), \tag{9б}$$

$$\langle g^i_x(x), \delta \rangle + g^i(x) \leqslant 0, \quad i \in J_\delta(x), \tag{9в}$$

$$|\delta^j| \leqslant 1 + \sigma, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \sigma \geqslant 0, \tag{9г}$$

где $\delta \in R^n$, $\delta > 0$, $P(x, y)$ - произвольная непрерывная на $R^n x R^r$ функция такая, что

$$P(x, y) \geqslant 1 + n^{1/2} \max_{i \in I_\delta(x,y)} \| f^i_x(x) \| / e^i.$$

Множества индексов определяются следующим образом

$$I_{\delta}(x, y) = \{ 1 \leq i \leq r \mid h^{i}_{e}(x, y) > \varphi_{e}(x, y) - \delta \},$$

$$J_{\delta}(x) = \{ 1 \leq j \leq m \mid g^{j}(x) > \psi(x) - \delta \}$$

здесь $h^{i}(x, y) = [f^{i}(x) - y^{i}]/e^{i}$ для всех $1 \leq i \leq r$.

Далее изучаются основные свойства вспомогательной задачи. Доказано, что если допустимое множество в задаче (9) не пусто, то ее решение существует и конечно. С помощью двойственной к (9) задаче показано, что если точка $[x, y] \in Z$, то направление $\delta(x, y)$, найденное из решения задачи (9), является направлением убывания функции $M(x, y, t)$ по x при достаточно больших t. Кроме того существование особой точки функции $M(x, y, t)$ эквивалентно наличию среди решений $[\delta, \eta, \sigma] = q \in Q(x, y)$ задачи (9) нулевого решения.

Численный метод нахождения особых точек функции $M(x,y,t)$ рассмотрен в параграфе 2.3. Пусть $x_0 \in R^n$, $y_0 \in R^r$, выбраны шаг $\alpha > 0$ и параметр $0 < \beta < 1$. Итерационный процесс ведется по следующим формулам:

$$y_{k+1} = y_k + \lambda(x_k, y_k, e)e, \tag{10а}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \delta(x_k, y_{k+1}), \tag{10б}$$

где $\lambda(x, y, e) = \max\limits_{1 \leq i \leq r} \dfrac{f^{i}(x) - y^{i}}{e^{i}}$, $\delta(x_k, y_{k+1})$ - решение задачи (9) в точке $[x_k, y_{k+1}]$. Шаг спуска α_k получается делением пополам начального шага α пока не будет выполнено неравенство

$$M(x_k+\alpha_k\delta_k, y_{k+1}, t) \leqslant M(x_k, y_{k+1}, t)+\alpha_k\beta[\eta(x_k, y_{k+1})-t\psi(x_k)].$$

При этом на каждой итерации шаг α_k ограничен снизу

$$\alpha_k \geqslant \min\{\alpha, \frac{\delta}{\psi(x_k)+K\|\delta_k\|}, \frac{(1-\beta)[t\psi(x_k)-\eta(x_k, y_{k+1})]}{(1/e_0+t)\Lambda\alpha_k\|\delta_k\|^2}\}.$$

Итерационный процесс (IO) построен таким образом, что все точки $[x_k, y_{k+1}]$ принадлежат множеству Z, так что на каждом шаге кроме спуска по переменной x осуществляется коррекция путем выполнения равенства $\varphi_e(x_k, y_{k+1})=0$. Если точка $[x_k, y_{k+1}]\notin Z_*$, то шаг спуска из этой точки всегда строго положителен и может быть получен делением начального шага α пополам за конечное число раз.

Обозначим $Y(x) = \{ y\in R^r \mid [x, y]\in Z \}$,

$X^1(y_0, e) = \{ x\in R^n, y\in \gamma(y_0, e) \mid [x, y]\in Z_* \}$,

$\hat{X}(x_0, y_0)$ - множество предельных точек последовательности $\{x_k\}$.

Теорема о сходимости метода доказана при следующих предположениях:

Условие B_1. Множество

$G_t(x_0, y_0)=\{x\in R^n \mid M(x, y_0, t) \leqslant M(x_0, y_0, t)\}$ ограничено.

Условие B_2. Для любых $x\in G_t(x_0, y_0)$, $y\in Y(x)$ задача линейного программирования (9) разрешима и $T_\delta(v(x, y)) \leqslant t - 1$ для всех $q(x, y)\in Q(x, y)$.

Условие B_3. Градиенты функций $f^i(x)$, $1\leqslant i\leqslant z$ и $g^j(x)$, $1\leqslant j\leqslant m$ удовлетворяют на $G_t(x_0, y_0)$ условию Липшица с константой Λ.

Т е о р е м а 2.1. Если выполнены условия $B_1 - B_3$, то $\hat{X}(x_0, y_0) \subseteq X^1_*(y_0, e) \cap G_t(x_0, y_0)$.

В результате работы методов получается одна слабо оптимальная по Парето оценка. Для получения различных точек из множества Парето следует либо изменить начальный вектор y_0 и двигаться в том же направлении e, либо наоборот, закрепив начальный вектор y_0 варьировать направлене e. Если при этом $y_0^i > \max_{x \in X} f^i(x)$ для всех $i=1,2,\ldots,r$, то изменяя направление e в пределах положительного ортанта R^n_+ можна получить любую точку из X_*.

В третьей главе "Вычислительные эксперименты и практическое использование прямых методов" приводятся результаты решения тестовых задач и практического применения методов к решению одной прикладной задачи. Испытания методов проводились на задаче, для которой известны таблицы решений их другими методами многокритериальной оптимизации. Это позволяет наглядно, в виде таблиц и графиков сопоставить исследуемые методы с ними. Кроме того, сравниваются и различные способы параметрического управления итерационным процессом - изменением начальных значений векторов уровней y_0 и направлений e.

Во второй части этой главы описывается математическая модель одной практической проблемы - проектирования строительных конструкций. Решается задача оптимального выбора параметров строительных ферм минимального общего веса, выдерживающих максимальные нагрузки и отвечающих условиям устойчивости и прочности. Приводятся результаты ее численного изучения с помощью предложенных в работе методов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ.

Основными результатами диссертационной работы являются:

- разработка двух вариантов метода возможных направлений для решения задач выпуклой многокритериальной оптимизации;
- разработка метода линеаризации для решения общей задачи многокритериальной оптимизации;
- разработка алгоритмов и процедур рассмотренных методов и их применение для решения задачи проектирования строительных конструкций.

Предложенные в диссертационной работе методы могут быть использованы для решения задач многокритериальной оптимизации.

По результатам диссертации опубликованы работы:

I. Жадан В.Г., Кушнирчук В.И. Об одном обобщении метода возможных направлений для решения задач многокритериальной оптимизации// Материалы девятого Всесоюзного симпозиума "Системы програмного обеспечения решения задач оптимального планирования. М., 1986. С.39-40.

2. Жадан В.Г., Кушнирчук В.И. Пакет методов многокритериальной оптимизации в системе ДИСО// Пакеты прикл. программ: Програмное обеспечение оптимизационных задач. М.: Наука,1987. С.17-26.

3. Жадан В.Г., Кушнирчук В.И. Метод возможных направле-

ний для решения задач выпуклой многокритериальной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т.27. №6. С.829-838.

4. Кушнирчук В.И. Об одном методе решения задач многокритериальной оптимизации// Материалы восьмой Всесоюзной конференции "Проблемы теоретической кибернетики". Горький. 1988. С.4-5.

5. Кушнирчук В.И. Решение задачи многокритериальной оптимизации методом возможных направлений//Материалы шестой Всесоюзной конференции по управлению в механических системах. Львов. 1988. С.98.

Подписано к печати 26.10.92.
Формат 60x84/16. Бумага писчая № 1.
Офсетная печать. Усл. печ. листов 1,1.
Уч. -изд.листов 1,2. Заказ 333.
Тираж 100. Бесплатно

Лаборатория копировально-множительной печати

Черновицкого государственного университета

г.Черновцы, ул.Коцюбинского,2

БЕСПЛАТНО