

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

На правах рукописи

КАШТАЛЯН МАРИЯ ЮРЬЕВНА

УДК 539.3

ТРЕХМЕРНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ
СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ
ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

(01.02.04 - механика деформируемого твердого тела)

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1992

Работа выполнена в Институте механики АН Украины

Научный руководитель - доктор физико-математических наук,
профессор Ю.Н.Немиш

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
профессор А.Т.Василенко
кандидат физико-математических наук
В.И.Лавренко

Ведущая организация - Киевский автомобильно-дорожный институт

Защита состоится 27 октября 1992 г. в 10 часов на
заседании специализированного совета К 016.49.01 Института
механики АН Украины

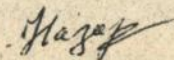
С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке
Института механики АН Украины.

Автореферат разослан

18

сентября 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного
совета
доктор технических наук

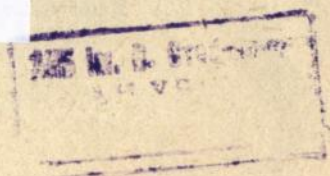


В.М.Назаренко

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00816377 (W)



ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Элементы конструкций типа пластин постоянной и переменной толщины находят широкое применение в различных отраслях современной техники. С разработкой и внедрением новых конструкционных материалов, в том числе композитных, обладающих высокими значениями удельной прочности и жесткости, пониженной сдвиговой жесткостью и анизотропией, все шире используются неоднородные пластины с различными физико-механическими и геометрическими характеристиками слоев. В процессе изготовления неоднородных слоистых элементов конструкций, в частности пластин, вследствие особенностей технологического процесса может происходить искривление первоначально плоских поверхностей раздела, как правило, волнообразного характера. Исследование влияния периодических искривлений поверхностей раздела на напряженно-деформированное состояние и прочность неоднородных и анизотропных пластин является актуальным для инженерной практики и приводит к решению нового класса трехмерных краевых задач.

К настоящему времени сложилось несколько подходов к решению задач о напряженно-деформированном состоянии неоднородных и анизотропных пластин. Первый из них основан на принятии различного рода упрощающих гипотез и предположений относительно характера деформирования либо каждого слоя пластины в отдельности, либо всего пакета слоев в целом, что позволяет перейти от трехмерной задачи, решение которой сопряжено со значительными математическими трудностями, к двумерной. Второй подход к исследованию напряженно-деформированного состояния неоднородных и анизотропных пластин также связан с переходом к двумерным задачам, однако процесс замены решения трехмерной задачи последовательностью двумерных носит при этом регулярный характер. Разработке приближенных теорий, развитию методов решения задач и исследованию напряженно-деформированного состояния неоднородных и анизотропных пластин в рамках указанных подходов посвящены работы С.А. Амбарцумяна, В.В. Болотина, А.Т. Василенко, В.К. Вериженко, И.И. Воровича, В.А. Галича, И.Г. Кадомцева, А.С. Космодамианского, Б.М. Лисицына, С.А. Лурье, Ю.Н. Немчинова, Ю.Н. Новичкова, Н.Д. Панкратовой, В.Г. Лискунова, В.К. Присяжника, А.П. Прусикова, А.О. Раскоязова, А.Ф. Рябова, В.С. Сипетова, И.И. Соколовской, Ю.А. Устинова, И.Ю. Хомя, Л.П. Хорoshуна, В.К. Чибирякова, В.А. Шалдырвана, В.И. Швабика, Н.А. Шульги, Е.Ж. Barbero, M. Levinsona,

M.V.V. Murthy, J.T. Mottrama, N.J. Pagano, J.N. Reddy, E. Reissnera, T.K. Varadana, J.M. Whitney и др.

Напряженно-деформированное состояние прямоугольных однородных изотропных, неоднородных, трансверсалино-изотропных и ортотропных пластин постоянной толщины в постановке трехмерной задачи теории упругости исследовалось в работах В.И. Акимовой, А.А. Баблюна, Б.Ф. Власова, Д.М. Коновалюка, В.И. Кривенко, Б.М. Лисицына, А.А. Мукоела, Н.Д. Панкратовой, В.Г. Пискунова, С.М. Саакяна, В.С. Сипетова, Ш.Ш. Туиметова, S.J. Hatfielda, N.J. Pagano, A.K. Rao, B. Rogowskego, S. Srinivasa и др. Решения задач найдены в основном с помощью метода разделения переменных; в случае жестко защемленных пластин для получения числовых результатов применялись также и численные методы.

Исследование напряженно-деформированного состояния при изгибе прямоугольных пластин переменной толщины проводилось в основном в рамках первых двух подходов. Изгиб трехслойных пластин симметричного строения, толщина среднего слоя которых изменяется по линейному закону, рассмотрен в работах П.А. Ткаченко и С. Libove, Ли Чу-Но. При этом последними авторами для среднего слоя учитывалось влияние поперечного сдвига. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластины со степенной зависимостью модуля сдвига от поперечной координаты, толщина которой изменяется по квадратичному закону, проведено В.К. Чибиряковым, А.М. Смоляром. Изгиб ортотропных пластин, толщина которых изменяется по степенному закону и ступенчато, рассмотрен В.С. Саркисянсом, Р.Г. Аванесяном, а ортотропные плиты с линейно-изменяющейся в одном направлении толщиной исследовались И.А. Хомой, Д.И. Чернописким.

Для пластин с волнообразно искривленными поверхностями раздела К.У. Уразгильдяевым, А.Г. Чеберяком, В.А. Чубком, П.Г. Шишкиным получено решение об одноосном растяжении двухслойной тонкой пластины с волнистой в направлении растяжения одной из лицевых поверхностей. Исследование трехмерного напряженно-деформированного состояния однородной изотропной прямоугольной пластины переменной толщины, лицевые поверхности которой периодически искривлены в одном направлении, проведено Э.Н. Немишем, В.П. Масловым, И.С. Сагаликом, Д.И. Чернописким. Для решения задачи применялся второй вариант метода возмущений формы границы для неортогональных поверхностей. В работе Э.Н. Немиша, Д.И. Чернопиского дана

постановка трехмерных краевых задач для составных пластин с неканоническими поверхностями раздела.

Таким образом, до настоящего времени в постановке трехмерной задачи теории упругости остается неисследованным напряженно-деформированное состояние неоднородных, в том числе и непрерывно-неоднородных, и анизотропных прямоугольных пластин переменной толщины с периодически искривленными поверхностями раздела.

Целью работы является исследование трехмерного напряженно-деформированного состояния при изгибе неоднородных и анизотропных прямоугольных пластин переменной толщины с периодически искривленными в одном направлении поверхностями раздела, включая:

1. Построение приближенных аналитических решений краевых задач для слоистых, непрерывно-неоднородных, трансверсально-изотропных и ортотропных пластин переменной толщины с периодически искривленными поверхностями раздела.
2. Разработку и реализацию в виде пакета программ численного алгоритма решения указанного класса задач в широком диапазоне изменения механических и геометрических характеристик.
3. Получение числовых результатов, исследование на их основе закономерностей напряженно-деформированного состояния указанных пластин переменной толщины, выявление характерных механических эффектов.

Научная новизна. В настоящей работе впервые исследовано трехмерное напряженно-деформированное состояние неоднородных и анизотропных пластин переменной толщины с периодически искривленными в одном направлении поверхностями раздела при изгибе. Получены приближенные аналитические решения трехмерных краевых задач об изгибе поперечной нагрузкой слоистых, непрерывно-неоднородных, трансверсально-изотропных и ортотропных пластин переменной толщины с поверхностями раздела, периодически искривленными в одном направлении. Исследованы закономерности напряженно-деформированного состояния, изучено влияние частоты, амплитуды и типа искривления, механических характеристик и параметров нагрузки на напряжения и перемещения неоднородных и анизотропных пластин.

Достоверность результатов обеспечивается тем, что:

- решения поставленных краевых задач получены на основе трехмерных уравнений теории упругости /без использования каких-либо упрощающих гипотез/;

- приближенные аналитические решения построены с помощью аппроксимированного метода возмущения формы границы, позволяющего получить числовые результаты с требуемой для приложений точностью;
- при получении числовых результатов в конкретных задачах контролировалась их практическая сходимость;
- числовые результаты в частных и предельных случаях согласуются с данными, полученными ранее другими авторами.

Практическая ценность работы состоит в создании методики, позволяющей определять напряженно-деформированное состояние прямоугольных неоднородных и анизотропных пластин при наличии поверхностей раздела, периодически искривленных в одном направлении; оценке влияния частоты, амплитуды, типа искривлений поверхностей раздела на напряженно-деформированное состояние неоднородных и анизотропных пластин.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на семинаре отдела реологии Института механики АН Украины /1991, 1992 гг./, научном семинаре по направлению "Механика композитных и неоднородных сред" при Институте механики АН Украины /1992 г./, XIV, XVI, XVII научных конференциях молодых ученых Института механики АН Украины /1989, 1991, 1992 гг./, III Всесоюзной и IV Всероссийской школах молодых ученых по численным методам механики сплошной среды /п. Абрау-Дурсо, 1991, 1992 гг./, XV Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек /г. Казань, 1990/, III Всесоюзной конференции по механике неоднородных структур /г. Львов, 1991/, I Всесоюзной конференции "Технологические проблемы прочности несущих конструкций" /г. Запорожье, 1991 г./.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы отражены в [1-9].

Объем работы. Диссертационная работа изложена на 147 страницах включая 22 рисунка и 18 таблиц. Список литературы насчитывает 109 работ.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении дан краткий обзор работ, посвященных исследова-

нию напряженно-деформированного состояния неоднородных и анизотропных пластин постоянной и переменной толщины, сформулирована цель исследования, кратко перечислены результаты, полученные в диссертации.

В первой главе приведены некоторые основные соотношения трехмерной теории упругости и формы общих решений уравнений равновесия в перемещениях для однородного изотропного, непрерывно-неоднородного и трансверсально-изотропного тел в декартовой системе координат. Дается постановка трехмерной краевой задачи об упругом равновесии составных пластин с неканоническими поверхностями раздела. Приводятся основные соотношения метода возмущения формы границы для неортогональных поверхностей, близких к плоским. Излагается один из критериев оценки точности приближенных решений, получаемых с помощью данного метода.

Постановка задачи является следующей. Требуется определить напряженно-деформированное состояние N -слойной пластины конечных размеров, отнесенной к декартовой системе координат $oxyz$, нижняя S_0 и верхняя S_N лицевые поверхности, а также поверхности раздела слоев которой S_1, \dots, S_{N-1} являются неканоническими и описываются уравнениями вида

$$S_\ell: z = h_\ell + \varepsilon \omega_\ell f_\ell(x, y) \quad (h_0 = 0, h_N = h) \quad (I)$$

где $f_\ell \in C^\infty(\Omega \times [0, \delta])$, $|\omega_\ell| \leq 1$, $\varepsilon (0 < \varepsilon \ll 1)$ - малый параметр ($\ell = \overline{0, N}$). Пластина находится под действием распределенных усилий Q_N и Q_0 , приложенных к ее основаниям S_N и S_0 . Предполагается, что механический контакт слоев по поверхностям их раздела идеальный (полное сцепление). Граничные условия на $S_\ell (\ell = \overline{0, N})$ имеют вид

$$(\sigma_{ix,k} n_{x,\ell} + \sigma_{iy,k} n_{y,\ell} + \sigma_{iz,k} n_{z,\ell}) S_\ell = Q_\ell n_{i,\ell} \quad (\ell = \overline{0, N});$$

$$[(\sigma_{ix,k} - \sigma_{ix,k+1}) n_{x,k} + (\sigma_{iy,k} - \sigma_{iy,k+1}) n_{y,k} +$$

$$+ (\sigma_{iz,k} - \sigma_{iz,k+1}) n_{z,k}] S_k = 0, \quad [u_{i,k} - u_{i,k+1}] S_k = 0 \quad (k = \overline{1, N-1}),$$

где $n_{i,\ell}$ - направляющие косинусы единичных нормалей к $S_\ell (\ell = \overline{0, N})$, k - номер слоя ($k=1$ при $\ell=0$, $k=N$ при $\ell=N$). На боковых гранях пластины $x=0, a$, $y=0, b$ предполагаются выполнимыми условия свободного опирания или плоского торца.

Для решения поставленной краевой задачи применяется метод возмущения формы границы, позволяющий свести исходную краевую

задачу для пластины с неганыоническими поверхностями раздела $S_{\epsilon k}$ последовательности краевых задач для пластины с координатными плоскостями раздела $z = h_{\epsilon}$. Согласно данному методу неизвестные компоненты напряженно-деформированного состояния ищутся в виде рядов по степеням малого безразмерного параметра ϵ , которые на поверхностях раздела $S_{\epsilon} (l = \overline{0, N})$ принимают вид

$$\{ \sigma_{ij,k}, u_{i,k} \}_{S_{\epsilon}} = \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon^p \sum_{r=0}^p \omega_r^r f_r^r / r! \partial^r / \partial z^r \{ \sigma_{ij,k}^{(p-r)}, u_{i,k}^{(p-r)} \}_{z=h_{\epsilon}} \quad (3)$$

Во второй главе изложено приближенное аналитическое решение трехмерных краевых задач об изгибе поперечной нагрузкой прямоугольных неоднородных пластин переменной толщины с поверхностями раздела, периодически искривленными в одном направлении, геометрия которых описывается уравнением (I) при

$$f_{\epsilon} = h_{\epsilon} \cos(\omega \pi y / b) \quad (l = \overline{0, N}) \quad (4)$$

где $\omega \in N$ - частота волнообразования. Предполагается, что изгибающая нагрузка $Q(x, y)$ приложена к верхнему основанию, а нижнее основание пластин свободно от усилий, т.е. $Q_0 = 0, Q_N = Q(x, y)$.

Решения задач в произвольном p -ом приближении ($p = 0, 1, 2, 3, \dots$) строятся в диссертационной работе на примере свободно опертой пластины в предположении, что изгибающая нагрузка представима в виде ряда

$$Q(x, y) = q_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y \quad (\lambda_m = \frac{\pi m}{a}, \lambda_n = \frac{\pi n}{b}) \quad (5)$$

Указывается переход от данных решений к решениям для пластин, на боковых гранях которых выполняются условия плоского торца.

В случае кусочно-однородной пластины с однородными изотропными слоями с модулями сдвига G_k и коэффициентами Пуассона $\nu_k (k = \overline{1, N})$ в соответствии с общим решением уравнений равновесия в форме К. Диндала компоненты напряженно-деформированного состояния в произвольном p -ом приближении представимы через три гармонические функции $\psi_{i,k}^{(p)} (i = \overline{1, 3})$, которые в рассматриваемой задаче построены в виде

$$\psi_{i,k}^{(p)}(x, y, z) = \alpha_{i,k} \frac{q_0 h_N^2}{G_N} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{p+1} \sum_{j=1,2} A_{mn}^{(p,s)}(2(i-1)+j) \tilde{f}_j(\xi_{mn}^{(p,s)}) \times \begin{cases} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n^{(p,s)} y, & i = \overline{1, 2} \\ \cos \lambda_m x \cos \lambda_n^{(p,s)} y, & i = \overline{1, 3} \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{где } \tilde{f}_1(\xi_{mn}^{(p,s)}) = ch \xi_{mn}^{(p,s)}, \quad \tilde{f}_2(\xi_{mn}^{(p,s)}) = sh \xi_{mn}^{(p,s)} \quad (7)$$

при $\sum_{mn}^{(p,s)} = \sqrt{(\lambda_{mn}^2 + \lambda_n^{(p,s)2})} h^2 z/h$; $\alpha_{1,k} = \alpha_{3,k} = 1$, $\alpha_{2,k} = 4(1 - \nu_k)$.

Постоянные $\lambda_n^{(p,s)}$ в первых четырех приближениях определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda_n^{(0)} &= \pi n / b; \quad \lambda_n^{(1,1)} = (\omega + n) \pi / b, \quad \lambda_n^{(1,2)} = (\omega - n) \pi / b; \\ \lambda_n^{(2,1)} &= (2\omega + n) \pi / b, \quad \lambda_n^{(2,2)} = (2\omega - n) \pi / b, \quad \lambda_n^{(2,3)} = n \pi / b; \\ \lambda_n^{(3,1)} &= (3\omega + n) \pi / b, \quad \lambda_n^{(3,2)} = (3\omega - n) \pi / b, \quad \lambda_n^{(3,3)} = (\omega + n) \pi / b, \quad \lambda_n^{(3,4)} = (\omega - n) \pi / b. \end{aligned} \quad (8)$$

В случае непрерывно-неоднородной пластины с модулем сдвига $G = G(z)$ и коэффициентом Пуассона $\nu = \text{const}$ в соответствии с результатами В.П.Плехеко компоненты напряженно-деформированного состояния в произвольном p -ом приближении представимы в форме

$$\begin{aligned} u_x^{(p)} &= -\frac{1}{2G} \left(\nu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial L^{(p)}}{\partial x} + \frac{\partial N^{(p)}}{\partial y}, \\ u_y^{(p)} &= -\frac{1}{2G} \left(\nu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial L^{(p)}}{\partial y} - \frac{\partial N^{(p)}}{\partial x}, \\ u_z^{(p)} &= -\frac{1}{G} \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial L^{(p)}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2G} \left(\nu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) L^{(p)} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Функции $L^{(p)}$, $N^{(p)}$ при экспоненциальной зависимости модуля сдвига от поперечной координаты

$$G(x) = G_1 \exp[\gamma(z/h - 1)], \quad G_1 = G(h) \quad (10)$$

где γ - показатель неоднородности, выбираются в рассматриваемой задаче в виде

$$\begin{aligned} L^{(p)}(x, y, z) &= q h^4 \exp\left(\frac{\gamma z}{2h}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{p+1} \sum_{j=1}^4 A_{mnj}^{(p,s)} \tilde{f}_j^{(p,s)}(z) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y, \\ N^{(p)}(x, y, z) &= \frac{q h^2}{G_1} \exp\left(-\frac{\gamma z}{2h}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{p+1} \sum_{j=5,6} A_{mnj}^{(p,s)} \tilde{f}_j^{(p,s)}(z) \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y, \end{aligned} \quad (II)$$

где $\tilde{f}_1^{(p,s)}(\xi) = ch \xi_{mn1}^{(p,s)} \cos \xi_{mn2}^{(p,s)}$, $\tilde{f}_2^{(p,s)}(\xi) = sh \xi_{mn1}^{(p,s)} \cos \xi_{mn2}^{(p,s)}$,
 $\tilde{f}_3^{(p,s)}(\xi) = ch \xi_{mn1}^{(p,s)} \sin \xi_{mn2}^{(p,s)}$, $\tilde{f}_4^{(p,s)}(\xi) = sh \xi_{mn1}^{(p,s)} \sin \xi_{mn2}^{(p,s)}$. (12)
 $\tilde{f}_5^{(p,s)}(\xi) = ch \xi_{mn3}^{(p,s)}$, $\tilde{f}_6^{(p,s)}(\xi) = sh \xi_{mn3}^{(p,s)}$

при $\xi_{mn1}^{(p,s)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left[\beta_{mn}^{(p,s)2} + \delta^2 (\lambda_m^2 + \lambda_n^2) h^2 \frac{\nu}{1-\nu} \right]^{1/2} \pm \beta_{mn}^{(p,s)2} \right]^{1/2} \xi / h$,
 $\xi_{mn3}^{(p,s)} = \beta_{mn}^{(p,s)} \xi / h$, $\beta_{mn}^{(p,s)} = \sqrt{\delta^2 / 4 + (\lambda_m^2 + \lambda_n^2) h^2}$.

Произвольные постоянные $A_{mki,k}^{(p,s)}$ ($i=1,6, k=1,N$) и $A_{mki}^{(p,s)}$ ($i=1,6$), входящие в (6) и (11) соответственно, определяются в p -ом приближении из совокупности $p+1$ систем линейных алгебраических уравнений, к которым приводят граничные условия (2) на поверхностях раздела пластины. При таком выборе разрешающих функций граничные условия на торцах пластины выполняются автоматически.

В диссертационной работе получены представления компонент напряженно-деформированного состояния для указанных неоднородных плит, содержащие произвольные постоянные. Также приводится матрично-векторная запись систем линейных алгебраических уравнений с конкретизацией вида правых частей в первых четырех приближениях.

На основе полученных приближенных аналитических решений исследованы закономерности напряженно-деформированного состояния двухслойных пластин с однородными изотропными слоями и непрерывно-неоднородных пластин с экспоненциальной зависимостью модуля сдвига от поперечной координаты в виде (10) и постоянным коэффициентом Пуассона при их изгибе поперечной нагрузкой вида

$$Q(x,y) = -q \xi_{d\beta} \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b). \quad (13)$$

Алгоритм вычислений реализован в виде пакета программ на языке Фортран-4, позволяющего производить расчеты с точностью до $O(\epsilon^3)$. Числовые результаты приведены для нетонких пластин ($a/h=3, 6/h=6, 12, 18$) двух типов: I: $\omega_0=0, \omega_1=\omega_2=-1$ / для двухслойной / и $\omega_0=0, \omega_1=-1$ / для непрерывно-неоднородной /; II: $\omega_0=1, \omega_1=\omega_2=0$ и $\omega_0=1, \omega_1=0$ соответственно.

Исследованы закономерности распределения по толщине напряжений и прогибов в зависимости от типа искривления пластины и ее механических характеристик ($G_1/G_2, \gamma$). В частности, для двухслойной пластины с $h_1/h_2 = 0,5, G_1/G_2 = 5, \nu_1 = \nu_2 = 0,3, \epsilon = 0,2, \omega = 2$ распределение по толщине σ_{xx} и σ_{yy} показано на рис.1 линиями (—) и (— —). Кроме того приведены соответствующие зависимости для пластины постоянной толщины (линии (---) и (.....)). В неоднородных пластинах рассматриваемых типов происходит уменьшение прогибов по сравнению с номинальными /для пластин с координатными плоскостями раздела $z = h_1/2$ /, практически не зависящее от удаленности точки внутри пластины от искривленной поверхности.

Получены зависимости величины напряжений, достигаемых на искривленных поверхностях раздела, от соотношений модулей сдвига G_1/G_2 и показателя неоднородности γ , проведено сравнение с соответствующими зависимостями для пластин с координатными поверхностями раздела. Для непрерывно-неоднородной пластины / тип II, $\epsilon = 0,2, \omega = 2, \nu = 0,3$ / зависимости $\sigma_{ij}|_{s_c}$ от γ приведены на рис.2 / (---) линии соответствуют зависимостям для номинальных напряжений/.

Установлен характер влияния частоты волнообразования ω и амплитуды ϵ на величину напряжений и прогибов на искривленных поверхностях раздела в зависимости от типа искривления и механических характеристик. Оказалось, что с увеличением $\omega / \omega = 2,6, 10$ / отклонение $\sigma_{xx,k}$ от номинальных в двухслойной пластине уменьшается, в непрерывно-неоднородной при $\gamma < 0$ уменьшается, при $\gamma > 0$ увеличивается. Отклонение прогибов u_z уменьшается. На поверхности раздела слоев названное отклонение для σ_{xx} при $G_1/G_2 < 1$ увеличивается для пластины I типа, и уменьшается, изменяя знак, для пластины II типа /при $G_1/G_2 > 1$ наоборот, табл.I/. С увеличением амплитуды искривления ϵ отклонение напряженно-деформированного состояния от номинального возрастает.

Исследовано влияние α, β -степени локализации нагрузки (I3) на распределение σ_{ij} и их величину на искривленных поверхностях. В частности, в непрерывно-неоднородных пластинах с увеличением степени локализации нагрузки отклонение от номинальных значений для $\sigma_{xx}|_{s_c}$ увеличивается /от 7,5 % при $\alpha = \beta = 0$ до 17,7% при $\alpha = \beta = 5$ /, а для прогибов $u_z|_{s_c}$ уменьшается /соответственно

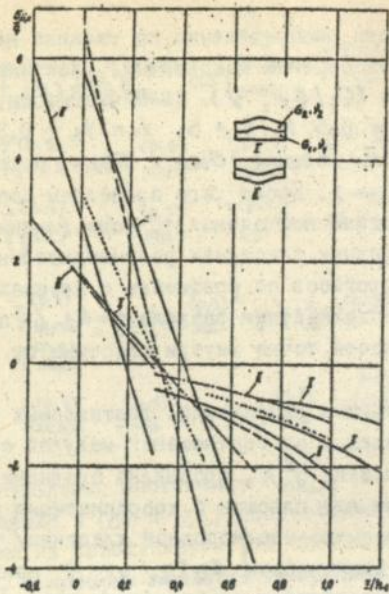


рис. 1

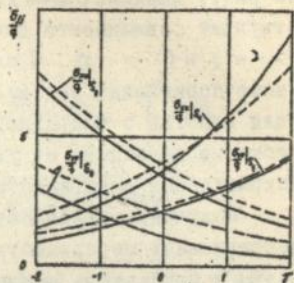


рис. 2

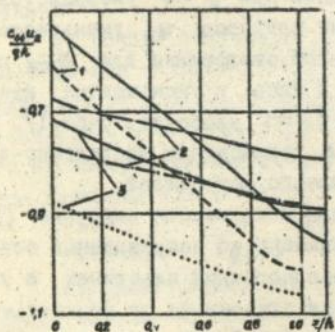


рис. 3

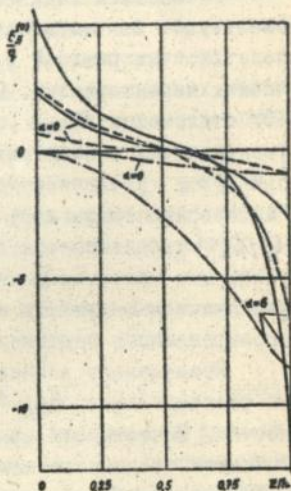


рис. 4

от 12,3 % до 8,7 % ($\nu = -1$, $\nu = 0,3$, $\omega = 2$, $\epsilon = 0,1$, I).

Таблица I

ω	$\frac{\sigma_{xx,1}^{(0)}}{q} \Big _{s_1}$	I		II	
		$\frac{\sigma_{xx,1}}{q} \Big _{s_1}$	$\Delta, \%$	$\frac{\sigma_{xx,1}}{q} \Big _{s_1}$	$\Delta, \%$
$G_1/G_2 = 10$					
2	-8,085	-7,099	-12,2	-6,620	-18,1
6	-8,085	-8,716	7,8	-6,204	-22,2
10	-8,085	-9,641	19,3	-5,340	-33,8
$G_1/G_2 = 0,1$					
2	0,820	0,660	-19,5	0,737	-10,2
6	0,820	0,630	-23,2	0,900	9,7
10	0,820	0,540	-34,1	0,993	21,1

Проведена оценка точности и достоверности полученных результатов.

В третьей главе изложено приближенное аналитическое решение трехмерных краевых задач об изгибе поперечной нагруженной трансверсально-изотропной и ортотропной пластин переменной толщины с лицевыми поверхностями, периодически искривленными в одном направлении по закону (4). Постановка задачи и методика решения такие же, как и для неоднородных пластин.

В случае трансверсально-изотропной пластины компоненты напряженно-деформированного состояния в соответствии с решением в форме Т.Эллиота в произвольном p -ом приближении представимы в виде

$$\begin{aligned}
 u_x^{(p)} &= \frac{\partial \Phi_1^{(p)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2^{(p)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_3^{(p)}}{\partial y}, \\
 u_y^{(p)} &= \frac{\partial \Phi_1^{(p)}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2^{(p)}}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3^{(p)}}{\partial x}, \\
 u_z^{(p)} &= \kappa_1 \frac{\partial \Phi_1^{(p)}}{\partial z} + \kappa_2 \frac{\partial \Phi_2^{(p)}}{\partial z},
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

где $\kappa_i = (c_{41} \alpha_i - c_{44})(c_{13} + c_{44})^{-1}$, α_i ($i = 1, 2$) - корни характеристического уравнения, функции $\Phi_i^{(p)}$ ($i = \overline{1,3}$) удовлетворяют квазигармоническому уравнению с параметром α_i ($\alpha_3 = 2c_{44}(c_{11} - c_{12})^{-1}$). Выбор вида функций $\Phi_i^{(p)}$ определяется типом корней характеристического уравнения. В диссертационной работе вид $\Phi_i^{(p)}$ конкретизируется для случая неравных / действительных или комплексно-сопряженных / корней характеристического уравнения, что соответствует большинству реальных трансверсально-изотропных материалов. В частности, когда характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $\alpha_{1,2} = \alpha_1 \pm i \gamma_2$ функции $\Phi_i^{(p)}$ построены в форме

$$\Phi_{1,2}^{(p)} = \Psi_1^{(p)} \pm i \Psi_2^{(p)}, \quad (15)$$

$$\Psi_1^{(p)}(x, y, z) = \frac{q h^2}{c_{44}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{p+1} \sum_{j=1}^4 A_{mnj}^{(p,s)} \tilde{f}_j^{(p,s)}(z) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y,$$

$$\Psi_2^{(p)}(x, y, z) = \frac{q h^2}{c_{44}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{p+1} \sum_{j=1}^4 A_{mnj}^{(p,s)} \delta_j \tilde{f}_{5-j}^{(p,s)}(z) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y,$$

$$\Phi_3^{(p)}(x, y, z) = \frac{q h^2}{c_{44}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{p+1} \sum_{j=5,6} A_{mnj}^{(p,s)} \tilde{f}_j^{(p,s)}(z) \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y.$$

Здесь $\tilde{f}_j^{(p,s)}(z)$ ($j = \overline{1,4}$) имеют вид (12), $\tilde{f}_j^{(p,s)}(z)$ ($j = \overline{5,6}$) - вид (7),

$$\xi_{mn1}^{(p,s)} = \sqrt{\frac{x \Theta_{mn1}^{(p,s)} + \sqrt{\Theta_{mn1}^{(p,s)2} + \Theta_{mn2}^{(p,s)2}}}{2(\Theta_{mn1}^{(p,s)2} + \Theta_{mn2}^{(p,s)2})}} \frac{z}{h}, \quad \Theta_{mai}^{(p,s)} = \frac{z i}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^{(p,s)2}) h^2}$$

$$\xi_{mn3}^{(p,s)} = \sqrt{(\lambda_m^2 + \lambda_n^{(p,s)2})} h^2 \alpha_3^{-1} \frac{z}{h}; \quad \delta_1 = \delta_2 = -1, \quad \delta_3 = \delta_4 = 1.$$

Произвольные постоянные $A_{mni}^{(p,s)}$ ($i = \overline{1,6}$) в p -ом приближении определяются из совокупности $p+1$ систем линейных алгебраических уравнений 6-го порядка.

В случае ортотропной пластины решение задачи в произвольном p -ом приближении ищется путем непосредственного разделения переменных в уравнениях равновесия. Представление компонент напряженно-деформированного состояния, в частности, перемещений в p -ом приближении получено в виде

$$u_x^{(p)} = \frac{q h}{C_H} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{p+1} \sum_{l=1}^6 A_{mni}^{(p,s)} v_{x mni}^{(p,s)}(z) \cos \lambda_m x \sin \lambda_n y,$$

$$u_y^{(p)} = \frac{q h}{C_H} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{p+1} \sum_{l=1}^6 A_{mni}^{(p,s)} v_{y mni}^{(p,s)}(z) \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y. \quad (16)$$

$$u_z^{(p)} = \frac{q h}{C_H} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{p+1} \sum_{l=1}^6 A_{mni}^{(p,s)} v_{z mni}^{(p,s)}(z) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y.$$

Вид функций $v_{\pm mni}^{(p,s)} (t=x, y, z; i=\overline{1,6})$ определяется типом корней характеристического уравнения, возникающего при решении полученной в результате разделения переменных системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В диссертационной работе он конкретизируется для случаев, когда кубическое уравнение, отвечающее характеристическому бикубическому, имеет действительные /как положительные, так и отрицательные/ или комплексно-сопряженные корни, что соответствует большинству реальных ортотропных материалов. В автореферате вид указанных функций приводится для действительной пары корней характеристического уравнения $\pm \beta_{mni}^{(p,s)}$

$$v_{x mni}^{(p,s)}(z) = ch \beta_{mni}^{(p,s)} z/h, \quad v_{z mni}^{(p,s)}(z) = sh \beta_{mni}^{(p,s)} z/h,$$

$$v_{y mni}^{(p,s)}(z) = \theta_{mni}^{(p,s)} v_{x mni}^{(p,s)}(z), \quad v_{y mni}^{(p,s)}(z) = \theta_{mni}^{(p,s)} v_{x mni}^{(p,s)}(z). \quad (17)$$

$$v_{z mni}^{(p,s)}(z) = \eta_{mni}^{(p,s)} v_{x mni}^{(p,s)}(z), \quad v_{z mni}^{(p,s)}(z) = \eta_{mni}^{(p,s)} v_{x mni}^{(p,s)}(z),$$

где $\theta_{mni}^{(p,s)}, \eta_{mni}^{(p,s)}$ зависят от $\beta_{mni}^{(p,s)}$ и постоянных коэффициентов системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

На основе полученных приближенных аналитических решений исследованы закономерности напряженно-деформированного состояния при изгибе поперечной нагрузкой, распределенной по закону (13) трансверсально-изотропных и ортотропных пластин переменной толщины. Числовые результаты, полученные с точностью $O(\epsilon^2)$, приведены для нетонких $a/h=2; 3; 6; \phi/h=6; 12/$ пластин из реальных анизотропных материалов /кобальт, цинк, арагонит/ двух типов:

I - $\omega_0=0, \omega_1=1$, II - $\omega_0=1, \omega_1=0$. Установлены закономерности распределения по толщине напряжений σ_{ij} ($j = x, y, z$) и прогибов u_z в зависимости от типа пластины, выявлен характер влияния однонаправленности искривления лицевых поверхностей.

Напряжения σ_{xx} , в отличие от σ_{yy} , с удалением от искривленных лицевых поверхностей приближаются к соответствующим номинальным значениям. Распределение прогибов u_z по толщине трансверсально-изотропных пластин из цинка 1, кобальта 2 и изотропного материала 3 при $\nu=0,3$ показано на рис.3 / $\epsilon=0,2$; $\omega=2$; I/. Для трансверсально-изотропных пластин получены зависимости величины напряжений и прогибов, достигаемых на искривленном верхнем основании /тип I/ от упругих постоянных. Установлено, что для σ_{yy} , в отличие от σ_{xx} и u_z характер указанных зависимостей для пластин переменной и постоянной толщины существенно отличаются.

Исследовано влияние амплитуды искривления ϵ и частоты волнообразования ω на величину напряжений и прогибов на искривленных поверхностях. В трансверсально-изотропных плитах отклонение значений $\sigma_{xx}|_{s_1}$, $u_z|_{s_1}$ от номинальных с ростом ω / $\omega=2, 6, 10$ / уменьшается. В частности, для $u_z|_{s_1}$ оно составляет - 13,2 % при $\omega=2$ и - 3,1 % при $\omega=10$ /кобальт, тип I, $\epsilon=0,1$ /. В рассматриваемых ортотропных пластинах названное отклонение для σ_{xx} при $\omega=2, 10$ составляет соответственно - 10,6 % и 18,2 %, а для σ_{yy} - 21,1 % и - 49,4 %.

Установлено влияние степени локализации нагрузки α, β на распределение по толщине напряжений и прогибов в трансверсально-изотропных и ортотропных пластинах переменной толщины. В частности, на рис.4 показано распределение по толщине ортотропной пластины из арагонита напряжений σ_{xx} (—), σ_{yy} (---), σ_{zz} (-.-.-) при $\alpha=\beta=0$; б. С ростом степени локализации нагрузки отклонение значений σ_{xx} от номинального на искривленных поверхностях увеличивается; в частности для $\sigma_{xx}|_{s_1}$ оно составляет 6,3 % при $\alpha=\beta=0$ и 24,4 % при $\alpha=\beta=6$ ($a/h=2$; $b/h=6$; $\epsilon=0,1$; $\omega=2$; I; кобальт/. Проведена оценка практической оходимости и точности полученных числовых результатов.

В заключении кратко сформулированы основные положения и выводы диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В диссертационной работе впервые рассмотрены трехмерные краевые задачи: об изгибе прямоугольных неоднородных и анизотропных пластин переменной толщины с поверхностями раздела, периодически искривленными в одном направлении. На основе приближенного аналитического решения указанного класса задач с помощью второго варианта метода возмущений формы границы для неканонических поверхностей, близких к плоским, исследованы закономерности напряженно-деформированного состояния двухслойных, непрерывно-неоднородных /с экспоненциальной зависимостью модуля сдвига от поперечной координаты/, трансверсально-изотропных и ортотропных пластин переменной толщины.

Основные результаты, полученные в диссертационной работе, заключаются в следующем:

1/ получено приближенное аналитическое решение нового класса задач для неоднородных и анизотропных прямоугольных пластин переменной толщины с поверхностями раздела, периодически искривленными в одном направлении; решение построено в рамках трехмерной теории упругости с применением второго варианта метода возмущений формы границы для неортогональных поверхностей с точностью до четвертой степени малого параметра, характеризующего амплитуду отклонения поверхностей раздела от близких к ним координатных плоскостей;

2/ предложен и реализован в виде пакета программы на языке Фортран алгоритм расчета компонент напряженно-деформированного состояния неоднородных и анизотропных пластин переменной толщины, позволяющий определить напряжения и перемещения с достаточной для приложений точностью в широком диапазоне изменения механических и геометрических характеристик;

3/ проведена оценка точности и достоверности получаемых числовых результатов;

4/ исследованы закономерности трехмерного напряженно-деформированного состояния при изгибе прямоугольных двухслойных, непрерывно-неоднородных /с экспоненциальной зависимостью модуля сдвига от поперечной координаты/, трансверсально-изотропных и ортотропных пластин переменной толщины с периодически искривлен-

ными в одном направлении поверхностями раздела в зависимости от типа, частоты и амплитуды искривлений, механических характеристик и параметров нагрузки.

На основе анализа полученных числовых результатов выявлены следующие механические эффекты и закономерности:

- 1/ периодическое в одном направлении искривление поверхностей раздела рассматриваемых типов приводит к практически равномерному по толщине уменьшению прогибов неоднородных и анизотропных пластин /т.е. их величина практически не зависит от удаленности точки внутри пластины от искривленной поверхности раздела/;
- 2/ с увеличением частоты волнообразования ω прогибы неоднородных и анизотропных пластин приближаются к соответствующим значениям для пластин с неискривленными /координатными/ поверхностями раздела. Так, например, отклонение от номинальных значений для прогибов $u_z|_{S_1}$ непрерывно неоднородной пластины ($a/h = 3$; $b/h = 18$; $\nu = 0,3$; $\gamma = -1$; $\epsilon = 0,1$; $\chi_{\text{III}} I$) при $\omega = 2$ составляет 14,7 %, при $\omega = 10$ - 2,9 %;
- 3/ искривление поверхностей раздела оказывает существенное влияние на напряженное состояние неоднородных и анизотропных пластин; с удалением от искривленной поверхности в трансверсально-изотропных и ортотропных пластинах напряжения действующие перпендикулярно направлению искривления, приближаются к соответствующим номинальным значениям; в неоднородных пластинах это зависит также от соотношений жесткостей слоев и величины показателя неоднородности;
- 4/ с увеличением частоты волнообразования отклонение от номинальных значений на лицевых поверхностях для напряжений σ_{yy} увеличивается, а для σ_{xx} - уменьшается; на поверхности раздела слоев названное отклонение для напряжений, действующих перпендикулярно направлению искривления, может как увеличиваться, так и уменьшаться в зависимости от соотношений модулей сдвига слоев и типа искривления. В частности, в двухслойной пластине ($a/h = 3$; $b/h = 18$; $k_1/k_2 = 0,5$; $G_1/G_2 = 0,1$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $\epsilon = 0,1$); II/ отклонение $\sigma_{xx,1}$ от $\sigma_{xx,1}^{(0)}$ при $\omega = 2$; 10 на S_0 составляет 23,4 % и 1,0 %, а на S_1 - соответственно 19,5 % и 34,1 %;
- 5/ с увеличением амплитуды искривления отклонение напряжений и

прогибов в неоднородных и анизотропных пластинах от номинальных увеличивается. Так, в двухслойной пластине $G_1/G_2 = 2$, $\omega = 2$, $\epsilon = 0,3$, I/δ значение $\sigma_{xx} |_{S_1}$ меньше номинального по абсолютной величине в 6,2 раза, при этом вклад нулевого приближения составляет 28,6 %, первого 51 %, второго 10,1 %, третьего 1,3 %;

б/ с ростом степени локализации нагрузки отклонение значений напряжений от номинальных на рассматриваемых искривленных поверхностях увеличивается, а прогибов - уменьшается.

Например, в трансверсально-изотропной пластине $a/h = 2$; $b/h = 6$; $\epsilon = 0,1$, $\omega = 2$; I; кобальт) для $\sigma_{xx} |_{S_1}$, оно составляет 6,3 % при $\alpha = \beta = 0$ и 24,4 % при $\alpha = \beta = 3$, для u_z соответственно 11,7 % и 6,4 %.

Основное содержание диссертационной работы изложено в следующих публикациях:

1. Кашталян М.Д. Пространственное напряженно-деформированное состояние двухслойной квадратной пластины при изгибе // Тр. XIV науч. конф. мол. ученых Ин-та механики АН УССР, Киев, 23-26 мая 1989. - Ч. I. - С. 76-80. - Деп. в ВИНТИ 2.08.89, № 5154-В89.
2. Немиш Ю.Н., Маслов В.П., Чернопиский Д.И., Кашталян М. Д. О трехмерном напряженно-деформированном состоянии прямоугольных двухслойных пластин с неплоскими поверхностями // Прикл. мех. - 1990. - 26, № II. - С. 39-44.
3. Кашталян М.Д. Расчет напряженно-деформированного состояния прямоугольных составных плит с искривленными слоями // Числ. методы механики сплошной среды: Тез. докл. III Всесоюзн. школы молодых ученых /п.Абрам-Двроо, 27.05 - 1.06.91/ - С. 134-135.
4. Немиш Ю.Н., Кашталян М.Д. Об изгибе прямоугольных непрерывно-неоднородных плит постоянной и переменной толщины // Прикл. мех. - 1991. - 27, № 8. - С. 29-36.
5. Кашталян М.Д. Напряженно-деформированное состояние при изгибе неоднородных плит переменной толщины // Механика неоднородных структур: Тез. докл. III Всесоюзн. конференции /Львов, 17-19 сентября 1991/. - Ч. I. - С. 144.
6. Немиш Ю.Н., Кашталян М.Д. К расчету напряженно-деформированного состояния прямоугольных плит при изгибе локализованной нагрузкой // Технологические проблемы прочности несущих кон-

ИБС И. Д. ВИНТИ
АН УССР

4 1 7 0 8 2

струкций: Тр. I Всесоюзн. ...
сентября 1991/. Т.2, Ч.1.

7. Кашталян М.Ю. Об изгибе локализованной нагрузкой прямоугольных непрерывно-неоднородных по толщине плит // Тр. XVI науч. конф. мол. ученых Ин-та механики АН УССР, Киев, 21-24 мая 1991. - Ч.1. - С. 96-101. - Деп. в ВИНТИ 12.II.91, № 4259-В91.
8. Кашталян М.Ю. К расчету напряженно-деформированного состояния анизотропных плит переменной толщины при действии локализованных нагрузок // Числ. методы механики сплошной среды: Тез. докл. IV Всерос. школы молодых ученых /п.Абрау-Дурсо, 26.05 - 1.06.92/. - С.142-143.
9. Немш Ю.Н., Кашталян М.Ю. Напряженно-деформированное состояние при изгибе прямоугольных трансверсально-изотропных плит переменной толщины // Прикл. мех. - 1992. - 28, № 6. - С. 14-22.

и

ие



Подписано к печати 08.09.1992г. Формат 60x84/16
Бумага офсетная Усл.-печ.лист.10.Уч.-изд.лист.10.
Тираж 100. Заказ 852. Бесплатно

Полиграф. уч-к Института электродинамики АН Украины,
252057, Киев-57, проспект Победы, 56.

