Академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

КОВАЛЬЧУК Людмила Василівна

СЕМІМАРТИНГАЛИ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ГРУПАХ ТА АЛГЕБРАХ ЛІ

01.01.05 - теорія ймовірностей і математична статистика

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1992

Робота виконана у відділі теорії випадкових процесів Інституту математики АН України.

Науковий керівник: академік АН України СКОРОХОД А. В.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, ведучий науковий співробітник САМОЙЛЕНКО Ю. С.,

доктор фізико-математичних наук, професор ЛЕОНЕНКО М. М.

Ведуча організація: Київський політехнічний інститут

Захист дисертації відбудеться "24" листопада 1992 р о ____ годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою: 252601, Київ-4, МСП, вул. Репіна, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці інституту.
Автореферат розісланий "22" жовтня 1992 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради ГУСАК Д. В.

Загальна характеристика роботи.

Актуальність теми. В останні роки інтенсивно розвивається теорія ймовірностей на алгебраїчних структурах. Це пов'язано не тільки з теоретичним, а й з практичним інтересом до цих проблем, оскільки існують задачі фізики, теорії зв'язку, статистики, що приводять до вивчення ймовірнісних розподілів на алгебраїчних структурах.

Перші результати в цьому напрямку відносяться до 1938 - 1940 років і належать Леві, Марцинкевичу, Іто, Каваді. Свій подальший розвиток теорія ймовірностей на алгебраїчних структурах отримала у роботах Гренандера, Хеннана й Хейера. Роботи перших двох авторів присвячені вивченню зв'язку між теорією ймовірнісних мір на групах й теорією представлень груп. Хейер одержав аналоги формули Леві-Хінчина для процесів, що приймають значення в групах Лі, тобто описав явний вигляд відповідного породжуючого функціоналу. Подібні питання вивчали також Feinsilver P., Schott R. В теорії випадкових процесів особлива увага приділяється процесам з незалежними приростами. Такі процеси виникають при розгляді конкретних важливих фізичних задач і досі повністю не вивчені. Аналог таких процесів побудовано і для процесів, що приймають значення в групах. Це мультиплікативні процеси (у випадку абелевих груп - адитивні). Такі процеси в матричному випадку були введені Скороходом А.В. і далі вивчались тим же автором, а також Буцаном Г.П., Feinsilver P. та іншими.

Цікавими є також процеси, що звуться семімартингалами. Вони виникли як природне розширення класу процесів, до яких можна застосувати теорію Іто (такі процеси звуться процесами Іто). Сучасна теорія семімартингалів і стохастичного числення розвинуті французькими вченими Мейером, Жакодом та іншими.

Семімартингали й процеси з незалежними приростами , що приймають значення в лінійних векторних просторах, вивчені досить добре. Але при вивченні таких процесів зі значеннями в групах виникають труднощі, пов'язані з нелінійною структурою групи. Та якщо група є групою Лі, то з нею пов'язаний лінійний простір - її алгебра Лі. Експоненціальне відображення, що діє з алгебри в групу, в деякому околі одиниці має зворотне - логарифм. Використовуючи ще й інші властивості груп Лі, автор цієї дисертації будує взаємно-однозначну відповідність між семімартингалами з незалежними приростами у групі Лі та її алгеброю Лі. Така відповідність зберігає основні властивості процесів, такі як неперервність з ймовірністю 1, однорідність та інші. Зокрема, броунівському руховi в групі відповідає броунівський рух в її алгебрі.

Мета роботи. 1. Вивчення ймовірностей переходу однорідних інваріантних марківських процесів зі значеннями в групах.

2. Побудова взаємно-однозначної відповідності між мультиплікативними семімартингалами, що приймають значення в групах Лі, й адитивними, що приймають значення в її алгебрі Лі; вивчення властивостей цієї відповідності.

3. Побудова матричної стохастичної експоненти й вивчення її властивостей.

Загальна методика дослідження.

В роботі використовуються результати з теорії груп Лі, теорії представлень груп, функціонального аналізу та теорії випадкових процесів, а також результати й методи теорії стохастичних диференційних рівнянь.

Наукова новизна.

В дисертації вивчена структура мультиплікативних мартингалів, що приймають значення в групах Лі. Показано, що кожному такому процесу однозначно відповідає адитивний семімартингал зі значеннями у відповідній алгебрі Лі, який зберігає основні властивості процесу (неперервність з ймовірністю 1, однорідність і т.д.). Вивчені властивості матричної стохастичної експоненти, узагальнена формула Йора. Знайдені ймовірності переходу однорідних марківських процесів, інваріантних відносно зсувів, що приймають значення в групах S_3 та $SU(2)$.

Практичне й теоретичне значення.

Результати дисертації дозволяють звести вивчення мультиплікативних семімартингалів зі значеннями в групах Лі до вивчення адитивних семімартингалів зі значеннями в їх алгебрах Лі, тобто в лінійних векторних просторах. Ці результати можуть бути застосовані в теорії випадкових процесів і стохастичних диференційних рівнянь.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались:
- на Міжнародній конференції по випадкових еволюціях (Кацівелі, 1992 р.);
- на конференції, присвяченій пам'яті академіка М.Ф.Кравчука (Київ, 1992 р.);
- на Другій Українсько-Угорській конференції по нових напрямках в теорії ймовірностей і математичній статистиці (Мукачів, 1992 р.);
- на семінарі Інституту математики АН України (1990 - 1992 р.р.).

Публікації. Основні результати опубліковані в роботах автора [1 - 6].

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається із вступу і чотирьох глав, розбитих на 12 параграфів. Вона займає 78 сторінок машинописного тексту. Бібліографія містить 76 назв.

Автор виражає вдячність своєму науковому керівнику А.В. Скороходу за постійну увагу до цієї роботи, а також професору А.А. Дороговцеву за обговорювання і критичні зауваження.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Глава I. Інваріантні ОПМ в локально-компактних групах.

У першій главі розглядаються однорідні марківські процеси, інваріантні відносно зсувів (інваріантні ОПМ), що приймають значення в локально-компактних групах.

Позначимо $P_t(x, \Gamma)$ - ймовірність переходу інваріантного ОМП, що приймає значення в групі G, $x \in G$, $\Gamma \in G$; $P_t(x, \Gamma) = P_t(e, x^{-1}\Gamma) =: P_t(x^{-1}\Gamma)$.

Нехай $B(G)$ - банахів простір дійсних, обмежених B-вимірних функцій на G (B-борелівська σ-алгебра на G). Для таких функцій визначено оператор T_t, що відповідає мірі P_t:

$$(T_t f)(y) := \int_G f(x)\, P_t(y, dx) = \int_G f(yx)\, P_t(dy), \qquad (1.1)$$

а також відповідні інфінітезімальний оператор A та породжуючий функціонал N.

Теорема 1.1.

Нехай ОПМ $P_t(x, \Gamma)$ у групі G інваріантний відносно відображення $\varphi: G \to G$. Тоді його напівгруповий оператор T_t (а також оператори A і N) перестановочні з відображенням φ:

$$T_t(\varphi f)(x) = (\varphi T_t)f(x).$$

Нехай P - деяка міра на G;

$$T f(y) = \int_G f(yx)\, P(dx).$$

Позначимо Aut G - група автоморфізмів G.

$P^h(\Gamma) := P(\Gamma^h)$, $\Gamma \subset G$, $h \in$ Aut G, $\Gamma^h = \{ y^h | y \in \Gamma \}$.

Теорема 1.2.

Нехай H - підгрупа в Aut G, $P^h = P$ для всіх $h \in H$, E - деякий простір функцій з G в R. Тоді простір

$$E^H = \{ f \in E: \forall h \in H \ f^h = f \}$$

інваріантний відносно T.

Теорема 1.3.

Нехай E_G - простір, породжений матричними елементами представлень D групи G. Тоді E_G інваріантно відносно T.

Наслідок.

У випадку, коли $P^h = P$ для всіх $h \in$ Inn G, де Inn G - група внутрішніх автоморфізмів G, характери є власними функціями оператора T.

Теорема 1.4.

Нехай T_t - напівгруповий оператор, що відповідає інваріантному СПМ P_t в скінченній групі G; $e^{\lambda_j t}$, $j=\overline{0,k}$, - його власні числа, що відповідають характерам χ_j, $j=\overline{0,k}$, групи G. Тоді

$$\forall g \in G \quad P_t(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{j=0}^{k} e^{\lambda_j t} \chi_j(e)\, \chi_j(g), \qquad (1.2)$$

де |G| - кількість елементів групи G.

Приклад 1.

Для групи підстановок S_3 одержимо:

$$P_t(g) = \frac{1}{6} + e^{\lambda_1 t}\chi_1(g)/6 + e^{\lambda_2 t}\chi_2(g)/3, \quad g \in S_3, \ \lambda_2 \le \lambda_1 / 2 \le 0.$$

$$P_t(e) = \frac{1}{6}(1 + e^{\lambda_1 t} + 4 e^{\lambda_2 t});$$

$P_t(\,(12)\,) = P_t(\,(13)\,) = P_t(\,(23)\,) = \frac{1}{6}\,(\,1 - e^{\lambda_1 t}\,);$

$P_t(\,(123)\,) = P_t(\,(213)\,) = \frac{1}{6}\,(\,1 + e^{\lambda_1 t} - 2\,e^{\lambda_2 t}\,);$

Дослідимо поведінку P_t при $t \to \infty$ в залежності від λ_1, λ_2 :

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: $P_t(\,e\,) \equiv 1$, $P_t(\,g\,) \equiv 0$, $g \neq e$;

2) $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 < 0$: $P_t(\,e\,) \to 1/3$, $t \to \infty$;

$P_t(\,(12)\,) = P_t(\,(23)\,) = P_t(\,(13)\,) \equiv 0$;

$P_t(\,(123)\,) = P_t(\,(213)\,) \to 1/3$, $t \to \infty$;

3) $\lambda_2 \le \lambda_1 /2 < 0$: $P_t(\,g\,) \to 1/6$, $t \to \infty$, $\forall\, g \in S_3$.

Далі розглядаються інваріантні ОМП зі значеннями окінченновимірних компактних групах Лі.

Приклад 2.

Для групи SU(2) одержимо

$$P_t(u) = \int\limits_{(\varphi,\psi,\tilde{t}:\, g(\varphi,\psi,\tilde{t}) \in u)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp\Big\{ \frac{t}{m+1}\Big[\frac{1}{3}[(m+1)^2 - (m+1)^3] +$$

$$+ \int\limits_0^{2\pi} \Big[\frac{\sin(m+1)p}{\sin p} - (m+1)\Big]\, d\eta \Big\} \Big[\sqrt{\tilde{t}}\,\cos\varphi + \sqrt{\tilde{t}\,\cos^2\varphi - 1}\,\Big]^{m+1} -$$

$$- \Big[\sqrt{\tilde{t}}\,\cos\varphi - \sqrt{\tilde{t}\,\cos^2\varphi - 1}\,\Big]^{m+1} \frac{d\tilde{t}\, d\varphi\, dq}{4\pi^2}\,,$$

$0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le q < 2\pi$, $0 \le \tilde{t} < 1$, $u \subset SU(2)$,

$d\eta$ - інваріантна міра Леві на SU(2).

Глава II. Властивості матричнозначних семімартингалів.

У цій главі одержано ряд властивостей матричнозначних семімартингалів, які є аналогами властивостей дійсних семімартингалів.

Нехай $(\,\Omega,\, F,\, P\,)$ - ймовірнісний простір. Далі вважаємо фіксованим потік σ-алгебр $\{\, F_t\,,\ t \ge 0\,\}$ на σ, що має "звичайні" властивості.

Для процесу $X(t) : \Omega \times R_+ \to M_N$, $X(t) = (\,X_{ij}(t)\,)_{i,j=1}^{N}$ де M_N -простір квадратних матриць розмірності $M \times N$, визначено математичне сподівання $M X(t) = (M X_{ij}(t))_{i,j=1}^{N}$.

Далі розглядаємо стохастично неперервні процеси.

Означення 2.2.

Нехай $X(t) \in M^2_{loc}$. Його характеристика $\langle X \rangle_t$ - це процес, який є матрицею з елементами $a_{ij}(t) = \sum\limits_{s=1}^{N} \langle X_{is}, X_{sj} \rangle_t$.

Означення 2.3.

Квадратична варіація процесу $X(t) \in S$ - це процес $[X, X]_t = (b_{ij}(t))_{i,j=1}^{N}$, де $b_{ij}(t) = \sum\limits_{k=1}^{N} [X_{ik}, X_{kj}]_t$.

Аналогічно визначаються сумісна квадратична коваріація процесів $X(t), Y(t) \in S$:

$$[X, Y]_t = (d_{ij}(t))_{i,j=1}^{N}, \text{ де } d_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{N} [X_{ik}, Y_{kj}]_t .$$

Лемма 2.1.

Нехай $X(t) \in S$. Тоді

$$[X, X]_t = \langle X^c \rangle_t + \sum_{u \le t} (\Delta X_u)^2 ,$$

де u - марківський момент, $\Delta X_u = X(u) - X(u-)$, $X^c(t)$ - неперервна складова мартингальної частини процесу $X(t)$.

Нехай $X(t) \in S$,

$f : M_N \times R_t \to M_N$ - неперервна функція.

Теорема 2.1.

Існує границя

$$P\text{-}\lim_{|\pi| \to 0} \sum_{k=0}^{n_\pi - 1} f(X(t_k^\pi); t_k^\pi) \Delta X(t_k^\pi)^2 =$$

$$= \int_0^t f(X(s), s) d [X, X]_s . \qquad (2.1)$$

де $\pi = \{0 = t_0^\pi < t_1^\pi < \ldots t_{n_\pi}^\pi = t \le 1\}$ - поділ відрізка $[0, t]$

n_π - кількість точок поділу, $|\pi|$ - його діаметр.

Зауваження. Твердження теореми 2.1 справедливе й для більш загального випадку, а саме:

нехай $X(t), Y(t) \in S$, $t \in [0; 1]$;

$f : M_N \times M_N \times R_t \to M_N$ - неперервна функція. Тоді існує

$$P - \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{k=0}^{n_{\pi}-1} f(X(t_k^{\pi}), Y(t_k^{\pi}), t_k^{\pi}) \Delta X(t_k^{\pi}) \Delta Y(t_k^{\pi}) =$$

$$= \int_0^t f(X(s), Y(s), s)\, d[X, X]_s.$$

Теорема 2.2.

Нехай $X(t) \in \mathcal{S}$; $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ - аналітична функція по першій змінній і тричі диференційовна по обом. Тоді

$$f(X(t),t) - f(X(0),0) = \int_0^t f_2'(X(s), s)\, ds + \int_0^t f_1'(X(s), s)\, dX(s) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t f_{11}''(X(s), s)\, d\langle X\rangle_s,$$ де f_i' - похідна по i-й змінній, $i = 1, 2$; підстановка $X(t)$ в f виконується згідно з правилам операторного числення.

Глава III. Логарифм і експонента від матричнозначного процесу.

У цій главі встановлюється взаємно-однозначна відповідність між стохастично-неперервними мультиплікативними семімартингалами зі значеннями в матричній групі Лі G і стохастично-неперервними адитивними семімартингалами зі значеннями у її алгебрі Лі, будуються логарифм і експонента від процесу. Також вивчаються мультиплікативний інтеграл, що використовується при побудові експоненти, і пов'язані з ним стохастичні диференційні рівняння. Окрім цього, одержано деякі властивості експоненти Долеан для матричного семімартингалу, приведено узагальнення формули Йора.

Позначимо G - підгрупа Лі групи $GL(N)$, g - її алгебра Лі. Процеси, що зустрічаються у цій главі, відображають $[0,1] \times \Omega$ в M_N, G або g.

Після серії лем, що містять допоміжні результати, формулюється наступна теорема.

Теорема 3.1.

Нехай $h(z)$, $h(1) = 0$ - дійсна функція, аналітична в деякому околі $(1 - \alpha, 1 + \alpha)$, $\alpha \in (0; 1)$. Припустимо, що існує така константа $L > 0$ що $h^{(m)}(1) \le Lm!$, $m \ge 3$. Якщо усі мультиплікативні стрибки процесу $X(t) \in S$ такі, що $\| X(\tau)^{-1} X(\tau) - I \| < \alpha$ з ймовірністю 1, то

$$P - \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{k=0}^{n_\pi - 1} h(X(t_k^\pi)^{-1} X(t_{k+1}^\pi)) = P - \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{k=0}^{n_\pi - 1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^{(m)}(1)}{m!} \times$$

$$\times (X(t_k^\pi)^{-1} \Delta X(t_k^\pi))^m = h'(1) Y(t) + \frac{h''(1)}{2} \langle Y^c \rangle_t +$$

$$+ \sum_{\tau \le t} (h(X(\tau -)^{-1} X(\tau) - h'(1)(X(\tau -)^{-1} X(\tau) - I)), \quad (3.3)$$

де $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)^{-1} dX(s)$.

Побудовану таким чином функцію позначимо $h(X)(t)$.

Ця теорема має наслідки, що використовуються далі при побудові логарифму від процесу. Крім цього, використовуючи ті ж методи, що і в доведенні теореми, одержуємо формулу Іто, більш загальну, ніж у другій главі.

Теорема 3.2.

Має місце наступна формула Іто:

$$f(x(t)) - f(x(t_0)) = \int\limits_{t_0}^t f'(x(s)) dx(s) + \frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^t f''(x(s)) d\langle x^2 \rangle_s +$$

$$+ \sum_{\tau \in (t_0, t]} (f(x(\tau)) - f'(x(\tau -)) \Delta x_\tau - f(x(\tau -)),$$

де f - аналітична в деякому околі нуля функція, $x(t) \in S$ - такий, що його адитивні стрибки належать області збіжності ряду Тейлора функції f, $x(t_0) = 0$.

Далі нас буде цікавити випадок, коли у теоремі 3.1. $h(z) = \mathrm{Ln}\, z$.

Теорема 3.3:

Нехай $X(t)$, $t \in [0;1]$, $X(0) = I$ - стохастично неперервний F_t-семімартингал, що приймає значення у матричній групі Лі G. Припустимо, що його мультиплікативні стрибки такі, що $\| X(\tau -)^{-1} X(\tau) - I \| < 1$ з ймовірністю 1.

Тоді існує процес $x(t)$, $t \in [0;1]$, $x(0) = 0$, що визначається так:

$$x(t) = P - \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{k=0}^{n_\pi - 1} \ln(X(t_k^\pi)^{-1} X(t_{k+1}^\pi)) = Y(t) - \frac{1}{2} \langle Y^c \rangle_t +$$

$$+ \sum_{\tau \in [0;t]} \left(\ln \left(X(\tau-)^{-1} X(\tau)\right) - X(\tau-)^{-1} X(\tau) + I \right), \qquad (3.4.)$$

де $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)^{-1} dX(s)$,

$Y^c(t)$ - неперервна мартингальна складова.

При цьому:

1) $x(t)$ - F_t - семімартингал зі значеннями в алгебрі Лі g групи G;

2) якщо $X(t)$ - мультиплікативний, то $x(t)$ - адитивний;

3) якщо $X(t)$ неперервний з ймовірністю 1, то

$x(t)=Y(t) - \frac{1}{2} \langle Y^c \rangle_t$ - також непервний функціонал з ймовірністю 1;

4) якщо $X(t)$- однорідний за часом, то $x(t)$ - також;

5) якщо $X(t)$- має обмежену варіацію, то $x(t)$ - також;

6) для будь-якого марківського моменту $\tau \in [0;1]$:

$$\Delta x_\tau = \ln \left(X(\tau-)^{-1} X(\tau)\right).$$

Процес $x(t)$ називається логарифмом процесу $X(t)$ і позначається $LN(X)(t)$.

Якщо не прагнути того, щоб процес $x(t)$ приймав значення в алгебрі g групи Лі G, то досить взяти

$$x(t) = \int\limits_0^t X(s)^{-1} dX(s),$$

як це зроблено в роботі А.В.Скорохода.

Припустимо, що процес $X(t)$ з умов теореми належить $S^{\sim}$ й має обмежену варіацію. Тоді, як в указаній вище роботі, $x(t) = \int\limits_0^t X(s)^{-1} dX(s)$. Оскільки $X(0)=I$, одержимо, що $X(t)$ є стохастичною експонентою від свого логарифму. У загальному випадку $X(t)$ також є стохастичною експонентою, але не від $X(t)$, а від деякого іншого процесу.

Теорема 3.4.

Нехай $X(t)$ - такий, як у теоремі 3.3, $x(t) = LN(X)(t)$. Тоді $X(t)$ є розв'язком рівняння

$$dX(t) = X(t)\, dz(t); \qquad (3.7)$$

$$X(0) = I,$$

де $z(t) = z^*(t) = x(t) + \frac{1}{2}\langle x^c\rangle_t + \sum_{\tau\le t} (\exp \Delta x_\tau - \Delta x_\tau - I)$.

Далі нам будуть необхідні наступні результати для стохастичних диференційних рівнянь.

Теорема 3.5.

Нехай $z(t) \in S$, $t \in [0, 1]$, і виконуються умови :

а) $\forall\, i, j = \overline{1, N}\ \exists\, Mz_{ij}(t);\ Mz^2_{ij}(t)$;

б) існує така монотонно-зростаюча функція $\lambda(t) \ge 0$, що $\forall\, s < t$: $\langle m_{ij}\rangle_s - \langle m_{ij}\rangle_t \le \lambda(t) - \lambda(s)$;

$$|a_{ij}|_t - |a_{ij}|_s \le \lambda(t) - \lambda(s);$$

де $z(t) = (z_{ij}(t))_{i,j=1}^N$;

$m_{ij}(s)$ - мартингальна частина $z_{ij}(s)$;

$a_{ij}(s)$ - частина з обмеженою варіацією;

$|a_{ij}|_t$ - варіація $a_{ij}(s)$ до момента t.

Тоді рівняння (3.7) має єдиний розв'язок

$$X(t) = I + z(t) + \int_0^t\int_0^{t_1} dz(t_2)\, dz(t_1) + \dots + \tag{3.8.}$$

$$+ \int_{0<t_l<\dots<t_1<t} \dots \int dz(t_{l+1}) \dots dz(t_1) + \dots,$$

де ряд у правій частині рівності збігається в середньому кватратичному.

Теорема 3.6.

Нехай маємо стохастичні диференційні рівняння

$dX_n(t) = X_n(t)\, dz_n(t)$;

$X_n(0) = I,\ n \ge 1$;

$dX(t) = X(t)\, dz(t)$;

$X(0) = I$,

Припустимо, що виконуються наступні умови:

а) $z(t) \in S$, має незалежні (адитивні) прирости і обмежені стрибки, $z_n(t) \in S$, $n \ge 1$, з незалежними приростами, мають всі моменти, рівномірно обмежені по n і по t;

б) $z_n(t) \to z(t)$, $n\to\infty$;

в) $\forall\, n \ge 1\ \forall\, s < t\ \langle m_{n,ij}\rangle_t - \langle m_{n,ij}\rangle_s \le \mu(t) - \mu(s)$,

$|a_{n,ij}|_t - |a_{n,ij}|_s \le \mu(t) - \mu(s)$;
для деякої додатної зростаючої функції $\mu(t)$. Тоді $X_n(t) \to X(t)$, $n\to\infty$, у середньому квадратичному.

У матричній групі Лі G виберемо окіл одиниці I так:
$U = \{ z \in G \,|\, \|z-I\| \le 1-\varepsilon \}$ для деякого $\varepsilon>0$;
у її алгебрі Лі визначимо окіл нуля V=ln U. Введемо такі позначення:

$S^m_u(G)$ – клас стохастично неперервних мультиплікативних семімартингалів зі значеннями в G, мультиплікативні стрибки яких належать U;

$S^a_v(g)$- клас стохастично неперервних адитивних семімартингалів зі значеєнями в $\mathfrak{g}$, адитивні стрибки яких належать V.
Інколи також будемо використовувати позначення $S^a_v(M_N)$.

За допомогою теореми 3.3 кожному процесу $X(t)\in S^m_u(G)$ ставимо у відповідність його логарифм - процес $x(t)=LN(X)(t) \in S^a_v(g)$, що зберігає основні властивості вихідного процесу. Наступна теорема є в деякому сенсі оберненою до теореми 3.3, так як у ній по процесу $x(t) \in S^a_v(g)$ будується його експонента - процес $X(t)=EXP(x)(t)\in S^m_u(G)$, що також зберігає властивості. Зауважимо, що в теоремі 3.3 ми не вимагали незалежності приростів, але теорему 3.7 вдалось довести лише з таким припущенням.

<u>Теорема 3.7</u>.

Нехай $x(t) \in S^a_v(g)$. Тоді існує процес $X(t)$ зі значеннями в G, що визначається рівністю

$$X(t) = \lim_{|\pi|\to 0} \prod_{k=0}^{n_\pi-1} \exp(\Delta x(t^\pi_k)), \qquad (3.9)$$

збіжність у середньому квадратичному.
При цьому :
1) $X(t)$ - розв'язок рівняння (3.7), і є семімартингалом відносно того ж потоку, що й $x(t)$;
2) $X(t)$ - мультиплікативний процес;
3) якщо $x(t)$ - неперервний з ймовірністю 1, то $X(t)$ - також неперервний з ймовірністю 1;
4) якщо $x(t)$ має обмежену варіацію, то $X(t)$ - також;
5) якщо $x(t)$ однорідний за часом, то $X(t)$ - також;

б) для будь-якого марківського моменту $\tau \in [0, 1]$:

$$X(\tau-)\, X(\tau) = \exp \Delta x_\tau .$$

<u>Теорема 3.8</u>.

Нехай виконуються умови теорем 3.3 і 3.7. Тоді відображення

$$S_V^a(g) \overset{\exp}{\underset{LN}{\rightleftarrows}} S_u^m(G)$$

бієктивні і взаємно-однозначні.

Теореми 3.3, 3.7 і 3.8 встановлюють взаємно-однозначну відповідність між класами процесів $S_V^a(g)$ і $S_u^m(G)$. При цьому як природно чекати, броунівському рухові в алгебрі g відповідає броунівський рух в G.

Одержані результати дають змогу не тільки встановлювати відповідність між такими класами процесів, а й одержати цікаві властивості матричної стохастичної експоненти.

Нехай $Z(t) \in S_V^a(M_N)$, де $V = \left\{ A \in M_N : \| A \| < 1 \right\}$. Аналогічно з одновимірним випадком назвемо розв'язок рівняння (3.7) стохастичною експонентою від процесу $z(t)$ і позначимо його $\mathcal{E}(z)(t)$.

Нехай $X(t) = \mathcal{E}(z)(t)$. Тоді* $X(t) = \exp(x)(t)$, де $x(t) \in S_V^a(M_N)$,

$$x(t) = x^z(t) = z(t) - \frac{1}{2}\langle z^c \rangle_t + \sum_{\tau \in [0,t]} (\ln(I + \Delta z_\tau) - \Delta z_\tau).$$

і навпаки: якщо $X(t) = \exp(x)(t)$, то $X(t) = \mathcal{E}(z)(t)$, де $z(t) \in S_V^a(M_N)$,

$$z(t) = z^x(t) = x(t) + \frac{1}{2}\langle x^c \rangle_t + \sum_{\tau \in [0,t]} (\exp \Delta x_\tau - \Delta x_\tau - I).$$

Зауважимо, що у детермінованому випадку, а також у випадку процесів, неперервних з імовірністю 1 і обмеженої варіації, експонента і статистична експонента співпадають.

Отже, нехай $z(t), x(t) \in S_V^a(M_N)$ і $\mathcal{E}(z)(t) * \mathrm{EXP}(x)(t)$.

<u>Теорема 3.9</u>.

Нехай $X(t) = \mathcal{E}(z)(t)$. Тоді $X^{-1}(t)$ - розв'язок рівняння

$$d\tilde{X}(t) = d\,\tilde{z}(t)\, \tilde{X}(t),$$
$$\tilde{X}(0) = I,$$

де $\tilde{z}(t) = \tilde{z}^{\,-x}(t) = -z(t) + \langle z^c \rangle_t + \sum\limits_{\tau \in (0;t)} ((\Delta z_\tau + I)^{-1} - I)$

Ще однією властивістю стохастичної експоненти є формула, яку можна назвати аналогом формули Йора:

$$E(z_1 + z_2 + [z_1, z_2])(t) = EXP\,(x^{z_1} + x^{z_2} +$$

$$+ \sum_{\tau \le t} \left\{ \ln (\exp \Delta (x^{z_1})_\tau \exp (\Delta x^{z_2})_\tau) - \Delta (x^{z_1})_\tau - \Delta (x^{z_2})_\tau \right\})$$

Зокрема, якщо значення процесів $z_1(t)$, $z_2(t)$ (або $x^{z_1}(t)$, $x^{z_2}(t)$, що одне й те ж) комутують, то одержимо "звичайну" формулу Йора:

$$E(z_1 + z_2 + [z_1, z_2])(t) = E(z_1)(t)\, E(z_2)(t).$$

Глава IV. Мультиплікативні процеси зі значеннями у довільних скінченновимірних групах Лі

До цього часу ми розглядали лише процеси зі значеннями у матричних групах Лі. Але, використовуючи теорему Адо про локальну структуру довільної групи Лі, отримані результати можна перенести на довільну групу Лі.

Теорема Адо стверджує, що кожна скінченновимірна алгебра Лі має точне скінченновимірне представлення, тобто ізоморфна деякій матричній. Оскільки групи Лі, алгебри яких ізоморфні, є локально ізоморфними, то довільна група Лі є локально ізоморфною (як група і як топологічний простір) деякій матричній групі Лі. В цій главі буде показано, що мультиплікативні процеси з обмеженими стрибками на таких групах знаходяться у взаємно-однозначній відповідності.

Нехай групи Лі G і H локально ізоморфні. Виберемо околи U і W одиниці e_G в групі G і одиниці e_H в групі H відповідно такі, що їх замикання ізоморфні, тобто

$$\varphi(\bar{U}) = \bar{W},$$

$$\varphi^{-1}(\bar{W}) = \bar{U},$$

де φ - ізоморфізм.

<u>Означення 4.1</u>.

Будемо казати, що процес, який приймає значення в групі Лі

G, має обмежені стрибки, якщо його мультиплікативні стрибки належать околу U з імовірністю 1.

Означення 4.2.

Нехай $X(t)$ - процес зі значеннями в групі Лі G. Будемо казати, що він є F_t-семімартингалом, якщо для будь-якої дійсної функції $f \in C^\infty(G)$ виконано: $f(X(t))$ - F_t-семімартингал.

Теорема 4.1.

Для довільної скінченновимірної групи Лі G існує така матрична група Лі H, що виконано:

1) H і G - локально ізоморфні;

2) кожному стохастично неперервному мультиплікативному процесу $X(t)$, $t \in [0, 1]$, $X(0) = e_G$, з обмеженими стрибками зі значеннями в G однозначно відповідає такий же процес $Y(t)$ зі значеннями в H, $Y(0) = e_H$.

При цьому :

а) якщо $X(t)$ - F_t - семімартингал, то і $Y(t)$ - також F_t - семімартингал;

б) якщо $X(t)$ - однорідний за часом, то $Y(t)$ - також ;

в) якщо $X(t)$ неперервний з імовірністю 1, то Y - також ;

г) якщо u_1, u_2 - такі марківські моменти, що $u_2 \le \inf\left\{ t \ge u_1 : X(u_1)^{-1} X(t) \notin U \right\}$, то

$$Y(u_1)^{-1} Y(u_2-) = \varphi(X(u_1)^{-1} X(u_2-)) \in \varphi(U) = W;$$

д) якщо v_i, $i \ge 1$, -моменти стрибків процесу $X(t)$, то вони будуть і моментами стрибків процесу $Y(t)$, і

$$Y(v_i-)^{-1} Y(v_i) = \varphi(X(v_i-)^{-1} X(v_i)).$$

Основні положення дисертації опубліковані у наступних роботах:

1. Ковальчук Л.В. Мультипликативные процессы в группе SU(2) // Бесконечномерный стохастический анализ.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990.- С. 62-67.

2. Ковальчук Л.В. Свойства матричнозначных семимартингалов // Стохастические уравнения и граничные теоремы. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991.- С. 91-102.

3. Kovalchuk L.V. The properties of the stochastic exponent of matrix-valued semi-martingale// Міжнародна конференція, присвячена пам'яті академіка М.П.Кравчука, Київ-Луцьк, 22-28 верес., 1992р.: Тез. доп. - Київ-Луцьк, 1992,- С. 88.

4. Ковальчук Л.В. Построение логарифма от процесса на матричной группе Ли //Укр. мат. журн. - 1992. - 44, N 11. - С. 1084-1092.

5. Kovalchuk L.V. Lie groups and Lie algebras-valued semi-martingales // III Междунар. науч. шк. "Эволюционные стохастические системы: теория и применения в физике и биологии," Кацивели, Республика Крым, Украина, 3-14 мая 1992 г.: Сб. докл. - Кацивели, 1992.- С.37-40.

6. Kovalchuk L.V. The structure of Lie groups-valued semi-martingales // Second Ukrainian-Hungarian conference on new trends in probability theory and mathematical ststistics, Mukachevo, Ukraine, september, 27-oktober, 3, 1992: Coll. volume of reports.- Mukachevo, 1992. - P. 15-23.

Підп. до друку 14.10.92. Формат 60х84/16. [illegible]
[illegible] 1,16. [illegible] 1,16. [illegible]
Тираж 100 [illegible] Зам. 383. Безплатно.

Надруковано в [illegible] Інституту математики АН України
[illegible]

Подп. в печ. 14.10.92. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс. печать.
Усл. печ. л.1,16 Усл. кр.-отт. 1,16 Уч.-изд. л. 0,85.
Тираж 100 экз. Зак. 282 Бесплатно.

Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН Украины
252601, Киев 4, МСП, ул.Репіна, 3