АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО ЧЕРВОНОГО ПРАПОРА
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ПАЧУЛІА Ніазбей Лукич

УДК 517.5

ДОСЛІДЖЕННЯ З ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ СИЛЬНОГО СУМУВАННЯ РЯДІВ І ІНТЕГРАЛІВ КОШІ

(01.01.01 - математичний аналіз)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття вченого ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1992

Робота виконана в Київському державному університеті і Ордена Трудового Червоного Прапору Інституті математики АН України.

Офіційні опоненти:	доктор фізико-математичних наук професор О.Д.ГАБІСОНІЯ
	доктор фізико-математичних наук В.М.КОНОВАЛОВ
	доктор фізико-математичних наук професор В.П.Моторний

Провідна організація – Тбіліський державний університет ім. І.Джавахішвілі

Захист відбудеться "24" Ноября 1992 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016 50 01 при інституті математики АН України за адресою:

252601, Київ – 4, МСП, вул. Репіна, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "7" Октября 1992 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради Гусак Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В роботі розглядаються питання, зв"язані з одним із відгалужень математичного аналізу - з теорією сильного сумування рядів і інтегралів Фур"є. Ця тематика бере свій початок у відомих роботах Харді і Літльвуда. На сьогодні у даному напрямку є велика кількість робіт, в яких отримана ціла низка важливих результатів. Значна частина ранніх результатів викладена в фундаментальних монографіях Н.К.Барі і А.Зигмунда, а також в книзі Г.Алексича. Більш пізні результати частково відображені в книгах Л.Лейндлера, Б.С.Кашина і А.А.Саакяна, О.І.Степанця тощо, в докторських дисертаціях О.Д.Габісонії, Л.Д.Гоголадзе, Р.М.Тригуба, а також в оглядових статтях Л.В.Жіжіашвілі, Б.І.Голубова, Л.В.Жіжіашвілі і С.Б.Топурії тощо. В названих публікаціях міститься велика бібліографія, яка охоплює основні результати, отримані в даному напрямку.

В представленій роботі пропонується загальний підхід, який дозволяє досліджувати задачі, пов"язані з сильним сумуванням як рядів, так і інтегралів Фур"є, а також рядів Фур"є за ортонормованими системами функцій поліноміального виду. При цьому узагальнюється і саме класичне поняття сильного сумування шляхом введення так званих (φ, λ)-сильних середніх, які визначаються наступним чином:

$$H_{\lambda,\varphi}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi\left(\left|f(x)-S_k(f;x)\right|\right), \qquad (1)$$

де $\{\lambda_k\}_{k\in N_0}$, $N_0=\{0\}\cup N$, - довільна послідовність чисел, $\varphi(\cdot)$ - невід"ємна функція, означена на $[0, \infty]$, $S_k(f;x)$ - часткова сума порядку k ряду Фур"є функції $f\in L(T)$, $T=[-\pi,\pi]$. Відмітимо, що при певних фіксованих значеннях параметрів φ і λ співпадають з відомими раніше величинами.

Отримані в роботі результати охоплюють результати попередників в даному напрямку, доповнюючи і уточнюючи їх. Значна частина результатів раніше своїх аналогів не мала, що обумовлено, головним чином, загальністю (φ, λ)-сильних середніх, а також розглядуваними в роботі класами функцій.

Мета роботи. Дослідження екстремальних задач, зв"язаних з (φ, λ)-методом сильного сумування як рядів, так і інтегралів Фур"є. Отримання рівномірних оцінок (φ, λ)-сильних середніх рядів Фур"є за тригонометричною системою функцій, а також за системами функцій поліноміального виду для різних класів функцій. Отримання рівномірних оцінок інтегральних (φ, λ)-сильних середніх відхилень агрегатів наближення для, взагалі кажучи, неперіодичних на R^m функцій.

Методика дослідження. В дисертаційній роботі розроблено метод, який дозволяє досліджувати (φ, λ)-сильні середні методів сумування кратних рядів і інтегралів Фур"є для довільних значень параметрів φ і λ. Цей метод базується на дослідженні інтегральних представлень відхилень (φ, λ)-сильних середніх з врахуванням останніх досягнень в розв"язуванні екстремальних задач, зокрема, відомих ідей В.Тотика.

Наукова новизна. Запропонований метод дослідження дозволив отримати:

- рівномірні оцінки (φ, λ)-сильних середніх кратних рядів як за тригонометричними, так і за системами функцій поліноміального виду для різних класів функцій;
- рівномірні оцінки степеневих сильних середніх кратних рядів Фур"є для довільного методу сумування;
- рівномірні оцінки (φ, λ)-сильних середніх типу Марцинкевича рядів Фур"є за тригонометричною системою функцій;
- рівномірні оцінки інтегральних (φ, λ)-сильних середніх відхилень агрегатів наближення від неперервної на R^m функції;
- рівномірні оцінки інтегральних (φ, λ)-сильних середніх типу Марцинкевича відхилень агрегатів наближення від неперервної на R^m функції.

Вказані оцінки не можна поліпшити в тому розумінні, що кожного разу можна вказати на значення параметрів і множини функцій, для яких ці оцінки будуть точними за порядком.

Теоретична і практична значущість. Сукупність розроблених в роботі положень має теоретичне значення в теорії сильного сумування кратних рядів Фур"є, а також може бути використана при розв"я-

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В роботі розглядаються питання, зв"язані з одним із відгалужень математичного аналізу – з теорією сильного сумування рядів і інтегралів Фур"є. Ця тематика бере свій початок у відомих роботах Харді і Літльвуда. На сьогодні у даному напрямку є велика кількість робіт, в яких отримана ціла низка важливих результатів. Значна частина ранніх результатів викладена в фундаментальних монографіях Н.К.Барі і А.Зигмунда, а також в книзі Г.Алексича. Більш пізні результати частково відображені в книгах Л.Леяндлера, Б.С.Кашина і А.А.Саакяна, О.І.Степанця тощо, в докторських дисертаціях О.Д.Габісонії, Л.Д.Гоголадзе, Р.М.Тригуба, а також в оглядових статтях Л.В.Жіжіашвілі, Б.І.Голубова, Л.В.Жіжіашвілі і С.Б.Топурії тощо. В названих публікаціях міститься велика бібліографія, яка охоплює основні результати, отримані в даному напрямку.

В представленій роботі пропонується загальний підхід, який дозволяє досліджувати задачі, пов"язані з сильним сумуванням як рядів, так і інтегралів Фур"є, а також рядів Фур"є за ортонормованими системами функцій поліноміального виду. При цьому узагальнюється і саме класичне поняття сильного сумування шляхом введення так званих (φ, λ)-сильних середніх, які визначаються наступним чином:

$$H_{\lambda,\varphi}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi\left(\left|f(x) - S_k(f;x)\right|\right), \quad (1)$$

де $\{\lambda_k\}_{k\in N_0}$, $N_0=\{0\}\cup N$, – довільна послідовність чисел, $\varphi(\cdot)$ – невід"ємна функція, означена на $[0, \infty]$, $S_k(f;x)$ – часткова сума порядку k ряду Фур"є функції $f\in L(T)$, $T=[-\pi,\pi]$. Відмітимо, що при певних фіксованих значеннях параметрів φ і λ співпадають з відомими раніше величинами.

Отримані в роботі результати охоплюють результати попередників в даному напрямку, доповнюючи і уточнюючи їх. Значна частина результатів раніше своїх аналогів не мала, що обумовлено, головним чином, загальністю (φ, λ)-сильних середніх, а також розглядуваними в роботі класами функцій.

<u>Мета роботи</u>. Дослідження екстремальних задач, зв"язаних з (φ, λ)-методом сильного сумування як рядів, так і інтегралів Фур"є. Отримання рівномірних оцінок (φ, λ)-сильних середніх рядів Фур"є за тригонометричною системою функцій, а також за системами функцій поліноміального виду для різних класів функцій. Отримання рівномірних оцінок інтегральних (φ, λ)-сильних середніх відхилень агрегатів наближення для, взагалі кажучи, неперіодичних на R^m функцій.

<u>Методика дослідження</u>. В дисертаційній роботі розроблено метод, який дозволяє досліджувати (φ, λ)-сильні середні методів сумування кратних рядів і інтегралів Фур"є для довільних значень параметрів φ і λ. Цей метод базується на дослідженні інтегральних представлень відхилень (φ, λ)-сильних середніх з врахуванням останніх досягнень в розв"язуванні екстремальних задач, зокрема, відомих ідей В.Тотика.

<u>Наукова новизна</u>. Запропонований метод дослідження дозволив отримати:

- рівномірні оцінки (φ, λ)-сильних середніх кратних рядів як за тригонометричними, так і за системами функцій поліноміального виду для різних класів функцій;
- рівномірні оцінки степеневих сильних середніх кратних рядів Фур"є для довільного методу сумування;
- рівномірні оцінки (φ, λ)-сильних середніх типу Марцинкевича рядів Фур"є за тригонометричною системою функцій;
- рівномірні оцінки інтегральних (φ, λ)-сильних середніх відхилень агрегатів наближення від неперервної на R^m функції;
- рівномірні оцінки інтегральних (φ, λ)-сильних середніх типу Марцинкевича відхилень агрегатів наближення від неперервної на R^m функції.

Вказані оцінки не можна поліпшити в тому розумінні, що кожного разу можна вказати на значення параметрів і множини функцій, для яких ці оцінки будуть точними за порядком.

<u>Теоретична і практична значущість</u>. Сукупність розроблених в роботі положень має теоретичне значення в теорії сильного сумування кратних рядів Фур"є, а також може бути використана при розв"я-

зуванні низки задач з теорії наближення.

Публікації. По темі дисертації опубліковано 47 робіт, з них II робіт склали основу дисертації. Список цих робіт наведено в кінці автореферату.

Структура і об"єм дисертації. Робота складається з трьох розділів, передмови і списку літератури, в який входить 63 найменування. Кожний розділ складається з чотирьох параграфів. Об"єм дисертації - 269 сторінок машинопису.

Апробація. Дисертація виконувалась в Абхазькому держуніверситеті і остаточно була закінчена у відділі теорії функцій Інституту математики АН України. Результати дисертації неодноразово доповідались автором на семінарі, керованому проф. О.І.Степанцем у Інституті математики АН України, на семінарі чл.-кор. АН СРСР П.Л.Ульянова і на семінарі професорів Б.С.Кашина і К.І.Осколкова в МДУ, на семінарі чл.-кор. АН Грузії Л.В.Жіжіашвілі в ТДУ, а також:

- на міжнародній конференції з теорії наближення функцій (Київ, 1983);
- на всесоюзній школі з теорії наближення функцій (Луцьк, 1989);
- на всесоюзній конференції з теорії функцій (Дніпропетровськ, 1985);
- на республіканській конференції з екстремальних задач теорії наближення і їх застосувань (Київ, 1990);
- на розширеному засіданні семінару Інституту прикладної математики ім. І.Н.Векуа (Тбілісі, 1990);
- на конференціях професорсько-викладацького складу АДУ.

ЗМІСТ РОБОТИ

Перше коло розглянутих в роботі питань має відношення до дослідження багатовимірного аналогу величини (I).

Якщо в (I) покласти

$$\lambda_k = \lambda_k^{(n)} = \begin{cases} (n+1)^{-1}, & k \le n, \\ 0, & k > n; \end{cases} \tag{2}$$

і $\varphi(u) = u^p,\ p > 0$, то

$$H_{\lambda,\varphi}(f;x) = \sigma_{n,p}(f;x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |\rho_k(f;x)|^p,$$

де $\rho_k(f;x) = f(x) - S_k(f;x)$.

Оцінки величин $\sigma_{n,p}(f;x)$, що становлять для нас інтерес, були отримані Г.Алексичем і Д.Краликом (1963) при $p=1$ і Л.Лейндлером (1965) для будь-якого $p>0$, в яких показано, що $\forall f \in C(T)$ справедлива нерівність

$$\|\sigma_{n,p}(f;x)\|_C \le \frac{A_p}{n+1}\sum_{k=0}^{n} E_k^p(f), \tag{3}$$

де A_p - величина, яка може залежати тільки від p, а $E_k(f)$ - найкраще рівномірне наближення функції $f(\cdot)$ тригонометричними поліномами $T_k(x)$ порядку $\le k$:

$$E_k(f) = \inf_{T_k} \|f(x) - T_k(x)\|_C. \tag{4}$$

Подальше просування в дослідженні величин $H_{\lambda,\varphi}(\cdot)$ пов"язане з іменами В.Тотика і Л.Гоголадзе, які досліджували їх при $\varphi(u) = u^p,\ p>0$, але вже для довільних послідовностей чисел, підпорядкованих певним умовам. Так, в 1979 р. В.Тотиком було отримане наступне твердження.

ТЕОРЕМА Т. Нехай $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in N_0}$ - будь-яка послідовність чисел, $\{n_\nu\}_{\nu\in N_0}$ $(n_0=0, n_1=1)$ - строго зростаюча послідовність чисел із N_0; $\lambda_k^{(n_\nu)}$, $k=n_\nu,\ldots,n_{\nu+1}$, - незростаюча перестановка модулів системи чисел λ_k, $k\in[n_\nu, n_{\nu+1}]$ і $p>0$,

$$\lambda_{n_\nu}^{(p)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=n_\nu+1}^{n_\nu+1} \lambda_k^{(n_\nu)} \ln^p \frac{n_{\nu+1}}{k-n_\nu}, & \nu\in N, \\ \lambda_0+\lambda_1, & \nu=0. \end{cases} \tag{5}$$

Тоді $\forall f \in C(T)$

$$H_{\lambda,u^p}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \, \rho_k(f;x)^p \le$$

$$\le A_p \sum_{\nu=0}^{\infty} \tau_{n_\nu}^{(p)} E_{n_\nu}^{(p)}(f). \qquad (6)$$

Для формулювання результату Л.Гоголадзе введемо наступні позначення.

Нехай $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ - 2π-періодична по кожній із змінних, сумовна на кубі періодів T^m функція ($f \in L(T^m)$). Її ряд Фур"є $S[f]$ можна записати у вигляді

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-q(k)} \pi^{-m} \int_{T^m} f(x+t) \prod_{j=1}^{m} \cos k_j t_j \, dt, \qquad (7)$$

де знак $\sum_{k=0}^{\infty}$ означає, що сумування проводиться по всіх координатах точки k, $q(k) = q(k_1, \ldots, k_m)$ - кількість нульових координат точки k.

Вираз (7) будемо називати повним рядом Фур"є функції $f(\cdot)$, або просто рядом Фур"є, на відміну від частинних рядів Фур"є функції $f(\cdot)$, по фіксованому набору змінних, які визначаються таким чином.

Нехай $\bar{m} = \{1, 2, \ldots, m\}$ і μ - будь-яка підмножина із $\bar{m}$, $|\mu|$ - потужність множини μ. Тоді $\forall f \in L(T^m)$ покладемо

$$S[f]_\mu = \sum_{k^\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{q_\mu(k)} \pi^{|\mu|}} \int_{T^{|\mu|}} f(x+$$

$$+t^\mu) \prod_{j\in\mu} \cos k_j t_j \, dt^\mu, \qquad (8)$$

де $q_\mu(k)$ - кількість нульових координат k_j, $j \in \mu$, точки k, $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $t^\mu = (t'_1, \ldots, t'_m)$, причому $t'_j = t_j$, коли $j \in \mu$, і $t'_j = 0$, коли $j \in C^\mu = \bar{m} \setminus \mu$, $dt^\mu = \prod_{j\in\mu} dt_j$.

Через $S_{n,\mu}(f;x)$ будемо позначати прямокутну частинну суму порядку n^{μ} ряду (8), тобто

$$S_{n,\mu}(f;x)=\sum_{k^{\mu}=0}^{n^{\mu}}\frac{2^{-q_{\mu}(k)}}{\pi^{|\mu|}}\int_{T^{|\mu|}} f(x+t^{\mu})\prod_{j\in\mu}\cos k_j t_j\, dt^{\mu}. \quad (9)$$

Очевидно, що $S_{n,\mu}(f;x)=S_{n,\overline{m}}(f;x)$ є прямокутною частинною сумою ряду (7).

Нехай $\{n_{\nu_j}\}_{\nu_j\in N_0}, j\in\overline{m}$, - строго зростаюча послідовність чисел із N_0 і $\mathcal{N}=\{n_\nu\}_{\nu\in N_0^m}=\{(n_{\nu_1},\dots,n_{\nu_m})\}_{\nu\in N_0^m}$.

Будемо говорити, що при деякому $r>1$ послідовність $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k\in N_0^m}$ належить класу $G_r(\mathcal{N})$, якщо $\lambda_k\geq 0, \forall k\in N_0^m$ і $\forall\mu\subset\overline{m}$

$$\left\{\sum_{k^{\mu}=(n_\nu)^{\mu}}^{(n_{\nu+\ell})^{\mu}}\lambda_k^r\right\}^{1/r}\leq$$

$$\leq A\prod_{j\in\mu}\left(n_{\nu_j+1}-n_{\nu_j}\right)^{-1/r_1}\sum_{k^{\mu}=(n_{\nu-\ell})^{\mu}}^{(n_\nu)^{\mu}}\lambda_k\ . \quad (10)$$

де $\ell=(1,\dots,1)$, $r_1=r/(r-1)$, A - абсолютна стала.

Через $G_r(\mathcal{N},E)$ будемо позначати множину послідовностей $\Lambda=\Lambda(t)=\{\lambda_k(t)\}_{k\in N_0^m}$, $t\in E\subset R^m$, для яких нерівність (10) виконується рівномірно на E. Відмітимо, що якщо $n_{\nu_j}=2^{\nu_j}$, $j=\overline{1,m}$, то множина $G_r(\mathcal{N},N_0^m)$ співпадає з множиною $\Lambda_{A,r,m}$, введеною Л.Гоголадзе раніше.

ТЕОРЕМА Г. Якщо матриця $\Lambda=(\lambda_k^{(n)})$ належить класові $\Lambda_{A,r,m}$, то $\forall f\in C(T^m)$ при будь-якому $p>0$ справедлива нерівність

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^{(n)}\left|f(x)-S_k(f;x)\right|^p\leq$$

$$\leq A_{m,r}^p\cdot(p+1)^{pm}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^{(n)}\left(\sum_{j=1}^{m}E_{\{j\},k}(f)\right)^p, \quad (11)$$

де $A_{m,r}$ - величина, яка залежить тільки від m і r, а $E_{\{j\},k}(f)$ - частинне найкраще наближення функції $f(\cdot)$ тригонометричними поліномами порядку $\le k_j$ по змінних x_j, $j \in \mu$, коефіцієнти яких є неперервними 2π-періодичними функціями від останніх змінних x_i, $i \in \overline{m} \setminus \{j\}$.

Якщо виконані умови (10) при $m = 1$, то безпосередньою перевіркою можна переконатися, що нерівність (11) випливає із (8), тобто в одновимірному випадку твердження В.Тотика виявляється сильнішим. Багатовимірного аналогу результату В.Тотика досі не існувало.

В дисертаційній роботі такий аналог знайдено. Матеріали з цього питання викладено в § 1.1. Основний результат при цьому міститься в наступному твердженні.

ТЕОРЕМА 1.1.1. Нехай $\Lambda_j = \{\lambda_{k_j}\}_{k_j \in N_0}$, $j \in \overline{m}$, - довільні послідовності чисел, числа $n_{\nu_j} \in N_0$ ($\nu_j \in N_0$) строго зростають, причому $n_0 = 0$ і $n_1 = 1$. Тоді $\forall f \in C(T^m)$, $\forall p > 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} \lambda_{k_j} |\rho_k(f;x)|^p \le$$

$$\le A_p \sum_{\nu=\ell}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} \mathcal{Q}_{n_{\nu_j}}^{(p)} \cdot \Big(\sum_{j=1}^{m} E_{\{j\},k_{\nu-\ell}}(f) \Big)^p, \qquad (12)$$

де A_p - величина, яка залежить від p, і $k = (k_1, \dots, k_m)$, $n_\nu = (n_{\nu_1}, \dots, n_{\nu_m})$, а величина $\mathcal{Q}_{n_{\nu_j}}^{(p)}$ визначається формулою (5).

Очевидно, що при $m = 1$ нерівності (6) і (12) співпадають. Відмітимо також, що якщо в теоремі Г вважати $\lambda_k^{(n)} = \lambda_{k_1,\dots,k_m}^{(n_1,\dots,n_m)} = \lambda_{k_1}^{n_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{k_m}^{n_m}$ і для кожного $\{\lambda_{k_j}^{n_j}\}_{k_j \in N_0}$, $j \in m$ вважати виконаною умову (10) при $m = 1$, то із (12) можна отримати нерівність (11). Таким чином, твердження теорем 1.1.1 і Г можуть перетинатись. І в той же час очевидно, що жодна з них не перекриває іншу: в теоремі Г послідовності $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k \in N_0}$ підпорядковані умовам (10), а в теоремі 1.1.1 вони мають спеціальний вигляд: задані добутками довільних послідовностей.

Наступне твердження параграфу I.I – теорема I.I.2, в якій отримане узагальнення теореми I.I.I для послідовностей $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k\in N_0^m}$, не обов"язково таких, що мають зображення у вигляді добутку одновимірних послідовностей, проте підпорядкованих певним обмеженням.

Доведення теорем I.I.I і I.I.2 проводяться за допомогою стандартних міркувань. При цьому новим елементом є залучення до багатовимірного випадку низки ідей, застосованих раніше В.Тотиком у одновимірному випадку. А саме, в наших міркуваннях важливу роль відіграє лема I.I.I, яка є кратним аналогом одного із тверджень В.Тотика (1979).

ЛЕМА I.I.I. Нехай $\{n_{\nu_j}\}_{\nu_j\in N_0}$, $j=\overline{1,m}$, – строго зростаюча послідовність натуральних чисел, $B_{\{j\},n_{\nu_j}}=\{k_{i_1},\dots,k_{r_j}\}$ – довільна множина натуральних чисел сегменту $[n_{\nu_j},n_{\nu_j+1}]$, B_{μ,n_ν} – прямий добуток множин $B_{\{j\},n_{\nu_j}}$, $j\in\mu\subset\overline{m}$. Тоді $\forall f\in C(T^m)$ і $\forall p>0$ справедлива нерівність

$$\left\{\prod_{j\in\mu} r_j^{-1}\sum_{k^\mu\in B_{\mu,n_\nu}}|\rho_k(f;x)|^p\right\}^{1/p}\le$$

$$\le A_p\,E_{n_\nu^\mu+k^{c^\mu}}(f)\prod_{j\in\mu}\ln\frac{n_{\nu_j+1}}{r_j}\prod_{j\in c^\mu}\ln(k_j+2), \qquad (13)$$

де A_p залежить тільки від p і m, а $c^\mu=\overline{m}\setminus\mu$.

Лема I.I.I відіграє велику роль і при отриманні результатів параграфу I.2. З її допомогою вдається продовжити на кратний випадок наступне твердження В.Тотика (1985) про те, що при певних умовах, накладених на функцію $\varphi(\cdot)$, $\forall f\in C(T)$ виконується нерівність

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\varphi\left(|\rho_k(f;x)|\right)\le A\,\varphi(E_n(f)). \qquad (14)$$

Отримане при цьому твердження (лема I.2.3) дозволяє продовжити теорему Г на величину $H_{\lambda,\varphi}(\cdot)$ за умови, що $\varphi(\cdot)$ належить множині Φ_γ, елементи φ якої задовольняють наступні умови : а) $\varphi(u)$ не спадає на $[0,\infty)$, б) $\varphi(u)>0$ при $u>0$ і $\lim\limits_{u\to 0}\varphi(u)=\varphi(0)=0$, в) знайдеться додатне число $a=a_\varphi$, для якого

$$\varphi(2u)\le a\varphi(u),\ \forall u\in[0,1], \tag{15}$$

г) при даному $\gamma>0$

$$\ln\varphi(u)=O(u^\gamma),\ u\to\infty. \tag{16}$$

До множини Φ_γ , крім степеневих функцій u^p, $p>0$, належать, наприклад, функції $\exp u^\gamma-1$, $\gamma>0$; $(\exp u^\gamma-1)u^p\ln^\alpha(1+u)$, $\alpha>0$, тощо.

ТЕОРЕМА І.2.І. Нехай $m\in N$, послідовність $\mathcal{N}=\{n_\nu\}_{\nu\in N_0^m}=\{(n_{\nu_1},\dots,n_{\nu_m})\}_{\nu\in N_0^m}$ така, що числа $n_{\nu_j}\in N_0$ і $\forall\nu_j\in N_0$, $j\in\overline{m}$, задовольняють умову

$$\left(1+\frac{1}{c_j}\right)n_{\nu_j}\le n_{\nu_j+1}\le Cn_{\nu_j}, \tag{17}$$

$\Lambda=\{\lambda_k\}_{k\in N_0^m}\in G_r(\mathcal{N})$. Тоді, якщо $\varphi\in\Phi_\gamma$ для деякого $\gamma\in(0,1/m]$, то для функції $f\in C(T^m)$ виконується нерівність

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\varphi(|\rho_k(f;x)|)\le A\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\varphi\Big(\sum_{j=1}^{m}E_{\{j\},k}(f)\Big), \tag{18}$$

де A - величина, що залежить від φ, r і m, а $C_j>1$ - абсолютні сталі.

Відмітимо, що якщо $\varphi(u)=u^p$, $p>0$, і $G_r(\mathcal{N})=\Lambda_{A,r,m}$, то твердження теореми І.2.І і теореми Г співпадають.

Умови теореми І.2.І остаточні в тому розумінні, що якщо функція $\varphi(\cdot)$ задовольняє умову

$$\overline{\lim\limits_{u\to\infty}}\ u^{-1/m}\ln\varphi(u)=\infty, \tag{19}$$

то можна вказати матрицю $\Lambda\in G_r(\mathcal{N})$, для якої (18) не виконується (див. теорему I.2.3) $\forall f \in C(T^m)$.

Якщо матриця $\Lambda = (\lambda_k^n)$ задовольняє умови теореми I.2.I і така, що при $n \to \infty$ права частина (I8) прямує до нуля, то із (I8) отримуємо (теорема I.2.2)

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \varphi(|\rho_k(f;x)|) = 0 \quad \forall x \in R^m. \qquad (20)$$

Зокрема, співвідношення (I9) виконується рівномірно для послідовностей $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k \in N_0^m}$, які визначають методи середніх арифметичних, середніх Абеля, логарифмічних середніх тощо.

В третьому параграфі основні результати §§ I і 2 продовжуються на методи сумування кратних рядів Фур"є за системами функцій поліноміального виду $(\{\varphi_k\}_{k \in N})$, ортонормованих з деякою додатною вагою на множині $\tilde{T}$. На сегментах $\tilde{T} = [a, b]$ такими системами будуть: тригонометрична система, ортонормована система алгебраїчних поліномів, в тому числі, поліноми Якобі і, зокрема, поліноми Лежандра, Чебишева тощо.

Отримані повні аналоги теорем I.I.I, I.I.2 і I.2.I (див. теорема I.3.I - I.3.3) на сегментах $\tilde{T}' \subset T$, де функції φ_k і відповідні вагові функції рівномірно обмежені.

Відмітимо, що доведення теорем I.3.I - I.3.3 проводяться з використанням аналогу леми I.I.I (лема I.3.I), продовженої нами на ряди Фур"є за ортонормованою системою функцій поліноміального виду.

В четвертому параграфі розглядаються задачі §§ I і 2 для так званих (φ, λ)-сильних середніх типу Марцинкевича методів сумування рядів Фур"є за тригонометричною системою функцій, які визначаються для кожної функції $f \in L(T^m)$, функції $\varphi(\cdot)$, послідовності $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$ і вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_i \in N$, за формулою

$$M_{n,\alpha}(f;x,\Lambda,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \varphi(|\rho_{k\alpha}(f;x)|). \qquad (21)$$

Ці середні так названі на честь Марцинкевича, який дослідив величини

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_{k,k}(f;x),$$

які, як це виявилось пізніше, мають низку переваг порівняно з класичними середніми арифметичними сумування рядів Фур"є.

Вираз (2I) може бути отриманий як частинний випадок лівої частини співвідношення (I8) при відповідному виборі чисел λ_k. Проте в такому випадку послідовність $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k\in N}$ є слідом послідовності $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k\in N_0^m}$ і може не задовольняти умови теореми I.2.I (і теореми Г). Тому (φ, λ) -сильні середні типу Марцинкевича доцільно розглядати окремо.

У випадку, коли $\varphi(u)=u^p,\ p>0$, величини $M_{n,\alpha}(f;x,\Lambda) = M_{n,\alpha}^{(p)}(f;x,\Lambda)$ вивчені Л.Гоголадзе, який встановив таке твердження.

ТЕОРЕМА Г.2. Нехай $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k\in N_0}\in\Lambda_{A,r,1}$. Тоді $\forall f\in C(T^m), \forall p>0$ справедлива нерівність

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^{(n)}|\rho_{k\alpha}(f;x)|^p\le C_p\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^{(n)}E_{k\alpha}^p(f). \tag{22}$$

де величина C_p залежить тільки від p.

Основним твердженя параграфу I.4 є наступна теорема.

ТЕОРЕМА I.4.I. Нехай $\{n_\nu\}_{\nu\in N_0}$ $(n_0=0,\ n_1=1)$ - довільна строго зростаюча послідовність чисел із N_0. Тоді, якою б не була послідовність $\{\lambda_k\}_{k\in N}, \forall f\in C(T^m), \forall p>0, \forall \nu\in N$ і $\forall \alpha\in N^m$ справедлива нерівність

$$\sum_{k=n_{\nu+1}}^{\infty}\lambda_k|\rho_{k\alpha}(f;x)|^p\le$$
$$\le A_{p,\alpha}\sum_{k=\nu-1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{m}E_{\{j\},n_k\alpha}(f)\Big)^p\tau_{n_k}^{(p)}, \tag{23}$$

де величини $A_{p,\alpha}$, $E_{\{j\},n_k\alpha}(f)$ і $\tau_{n_k}^{(p)}$ мають той же зміст, що і в теоремі I.I.I.

Відмітимо, що при $\{\lambda_k\}_{k\in N_0}\in\Lambda_{A,r,1}$ і $n_\nu=2^\nu,\ \nu\ge1$, із (23) випливає співвідношення (22).

Доведення теореми I.4.I базується на лемі I.4.I, яка являє собою один із можливих аналогів результату В.Тотика, адаптованого до середніх типу Марцинкевича.

ЛЕМА I.4.I. Нехай $m \in N$, $f \in C(T^m)$, послідовність $\{n_\nu\}_{\nu \in N_0}$ натуральних чисел строго зростає. Тоді $\forall p>0$, $\forall \alpha \in N^m$ виконується нерівність

$$\left\{ \frac{1}{r} \sum_{k \in B_{n_\nu}} |\rho_{k\alpha}(f;x)|^p \right\}^{1/p} \le A_{p,\alpha} E_{n_\nu \alpha}(f) \ln^m \frac{n_{\nu+1} e}{r}, \quad (24)$$

де B_{n_ν} - довільна підмножина натуральних чисел сегменту $[n_\nu, n_{\nu+1}]$, а $r = |B_{n_\nu}|$ - її потужність, число $A_{p,\alpha}$ залежить тільки від p і α.

Ця лема дозволяє отримати аналог співвідношення (23) також і для (φ, λ)-сильних середніх, коли $\varphi \in \Phi_\gamma$, $\gamma \in (0, 1/m]$, і $\{\lambda_k\}_{k \in N_0} \in G_r(\mathcal{N})$, $r>1$. В цьому випадку має місце оцінка

$$\sum_{k=n_\nu+1}^{\infty} \lambda_k \varphi(|\rho_{k\alpha}(f;x)|) \le A \sum_{k=n_\nu}^{\infty} \lambda_k \varphi(E_{k\alpha}(f)). \quad (25)$$

Нерівність (25) остаточна в тому розумінні, що для будь-якої невід"ємної послідовності $\{\lambda_k\}_{k \in N_0}$ знайдеться функція $f \in C(T^m)$ і точка x^0, для яких

$$\sum_{k=n_\nu}^{\infty} \lambda_k \varphi(|\rho_{k\alpha}(f;x)|) \ge \sum_{k=n_\nu}^{\infty} \lambda_k \varphi(E_{k\alpha}(f)). \quad (26)$$

В другому розділі продовжуються дослідження величин виду (I), які в першому розділі розглядались на всьому просторі $C(T^m)$. І тут нас цікавить, головним чином, швидкість збіжності рядів виду (I) в одновимірному і багатовимірному випадках на фіксованих класах функцій - підмножинах із $C(T^m)$. До цього кола задач увагу автора привернув О.І.Степанець, в співавторстві з яким було отримано низку перших результатів.

Приводом до розгляду рядів виду (I) на класах функцій послужив результат Л.Гоголадзе (I98I), отверджуючий, що для будь-якої незростаючої послідовності додатних чисел $\{\lambda_k\}_{k \in N_0}$ і $\forall p>0$,

$\forall f \in C(T)$, $\forall n \in N$

$$\left\| \sum_{k=2(n-1)}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(f;x)|^p \right\|_C \leq A_p \sum_{k=n-1}^{\infty} \lambda_k E_k^p(f). \qquad (27)$$

Оскільки права частина цієї нерівності містить в собі доданки з номерами, яких не має в лівій частині, то слід чекати, що на деяких класах функцій із $C(T)$ вона (нерівність) може бути значно уточнена. Такими класами виявились класи $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$, введені О.І.Степанцем в тому випадку, коли послідовність $\{\psi(k)\}_{k\in N}$ опадає до нуля зі швидкістю більшою, ніж степенева.

Класи $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$ визначаються наступним чином. Нехай $f \in \in L(T)$ і

$$S[f] = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) \qquad (28)$$

– її ряд Фур"є. Далі, нехай $\psi(k)$ – довільна функція натурального аргументу і β – фіксоване число, $\beta \in R$. Припустимо, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left[a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right]$$

є рядом Фур"є деякої функції із $L(T)$. Цю функцію позначають через f_β^ψ і називають (ψ, β)-похідною функції $f(\cdot)$, а множину функцій $f(\cdot)$, які задовольняють ці умови, позначають через L_β^ψ. Якщо $f \in L_\beta^\psi$ і при цьому $f_\beta^\psi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ – деяка підмножина із $L(T)$, то кажуть, що $f(\cdot)$ належить класові $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$. Підмножина неперервних функцій із $L_\beta^\psi \mathfrak{N}$ позначається через $C_\beta^\psi \mathfrak{N}$.

В даній роботі за $\mathfrak{N}$ беремо або множину $C(T)$, або клас M 2π-періодичних істотно обмежених функцій $\varphi(\cdot)$, $\operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)| \leq 1$ і покладаємо $C_\beta^\psi C(T) = C_\beta^\psi C$ і $C_\beta^\psi M = C_{\beta,\infty}^\psi$

Також вважаемо, що $\psi(k)$ - випукла вниз, зникаюча на нескінченності послідовність, причому, без обмеження загальності, вважаемо, що числа $\psi(k)$ є значеннями деякої функції $\psi(v)$ неперервного аргументу $v \geq 1$, яка належить множині $\mathfrak{M}$ (випуклих вниз при $v \geq 1$ функцій, для яких $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$).

Кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ поставимо у відповідність пару функцій $\eta(t) = \eta(\psi, t)$ і $\mu(t) = \mu(\psi, t)$ за допомогою формул

$$\eta(t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \; \mu(t) = \frac{t}{\eta(t) - t} \qquad (29)$$

і покладемо

$$\mathfrak{M}_c = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < K_1 \leq \mu(t) \leq K_2 < \infty\}. \qquad (30)$$

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(t) \leq K_3 < \infty\}, \qquad (31)$$

де K_1, K_2, K_3 - абсолютні константи, ψ^{-1} - обернена до ψ.

Позначимо також через $\mathfrak{M}_\infty$ підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина $\mu(t)$ монотонно зростає і необмежена зверху, тобто

$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}, \mu(t) \uparrow \infty\}. \qquad (32)$$

Якщо через F позначити підмножину функцій $\psi(\cdot)$ із $\mathfrak{M}$, для яких

$$\int_1^\infty \psi(t+1)\frac{dt}{t} < \infty \qquad (33)$$

і, крім того, майже всюди $|\mu'(t)| \leq K$, то неважко переконатися в тому, що $\mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{M}_\infty \subset F$.

Природніми представниками множини $\mathfrak{M}_c$ є функції $\psi_r(t) = t^{-r}$ при будь-яких $r > 0$, множини $\mathfrak{M}_0$ - функції, що спадають не швидше, ніж $K \ln^{-1}(t+\ell)$. Такими представниками для множин $\mathfrak{M}_\infty$ є функції $\psi_r(t) = exp(\delta t^r)$, $\delta > 1$, $r > 0$. Якщо $\psi(t) = t^r$, $r > 0$, то класи $C^\psi_\beta \mathfrak{N}$ співпадають з відомими класами Вейля - Надя; якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то C^ψ_β - множини нескінченно диференційовних функцій.

В прийнятих позначеннях справедлива така теорема.

ТЕОРЕМА С.П.І. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$ і $\{\lambda_k\}_{k\in N_0}$ - довільна послідовність чисел. Тоді якщо $\forall\, t \geq 1 \cdot \eta(t)-t \leq K$, то $\forall p>0, \forall \beta\in R$ і $\forall n \in N$

$$H_n^{(p)}(C^\psi_{\beta,\infty};\lambda) = \sup_{f\in C^\psi_{\beta,\infty}} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(f;x)|^p \leq$$

$$\leq A_p \sum_{k=n}^{\infty} |\lambda_k|\, \psi^p(k). \tag{34}$$

Якщо ж $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty} = \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$ і послідовність $\{\lambda_k\}_{k\in N}$, $\lambda_k \geq 0$, така, що числа $\lambda_k \psi(k)$ не зростають при всіх $k \geq n$, то $\forall \beta \in R$ і $\forall n \in N$

$$H_n^{(p)}(C^\psi_{\beta,\infty},\lambda) \leq A_p\Big\{\lambda_n \psi^p(n)(\eta(n)-n) + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k \psi^p(k)\Big\}, \tag{35}$$

де величина $\eta(n)$ визначається формулою (29), а A_p - сталі, які залежать тільки від p.

Можна показати, що та обставина, коли права частина нерівності (27) містить в собі доданки, яких немає в його лівій частині, не є істотним для функції $f \in C^\psi_{\beta,\infty}$ при $\psi \in \mathfrak{M}_C$, проте вона відіграє важливу роль при $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, і тоді при однакових умовах оцінки (35) - (34) будуть точніші, ніж оцінка (27). Звичайно, є і такі випадки, коли інформація, яка випливає із нерівності (27), не може бути отримана ні з (35), ні з (34).

Доведення теореми С.П.І базується на наступному твердженні, яке, очевидно, має і самостійну вартість.

ТВЕРДЖЕННЯ С.П.І. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$. Тоді $\forall n \in N$, $\forall p>0$ і $\forall \beta \in R$

$$A_n^{(p)}(C^\psi_{\beta,\infty}) = \sup_{f\in C^\psi_{\beta,\infty}} \Big\{\frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]} |\rho_k(f;x)|^p\Big\}^{1/p} \leq$$

$$\leq C_p\, \psi(n), \tag{36}$$

де $[\alpha]$ - ціла частина числа α, $\gamma_n = [\eta(n)] - n + 1$, $\eta(n) =$

$= \eta(\psi, n)$. C_p - стала, яка залежить тільки від p.

Аналогічне твердження має місце і для $\psi \in \mathfrak{M}_0$.

ТВЕРДЖЕННЯ С.П.2. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_0$. Тоді $\forall n \in N$ і $\forall p > 0$

$$\sup_{f \in C^{\psi}_{0,\infty}} \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} |\rho_k(f;x)|^p \right\}^{1/p} \leq C_p \psi(n), \quad (37)$$

де C_p - стала, яка залежить тільки від p.

Виходячи з цього твердження, отримуємо аналог теореми С.П.І.

ТЕОРЕМА С.П.2. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_0$ і послідовність $\{\lambda_k\}$ така, що $\lambda_k > 0$ і числа $\lambda_k \psi^p(k)$ не зростають. Тоді $\forall n \in N$

$$H_n^{(p)}(C^{\psi}_{0,\infty}; \lambda) \leq C_p \left\{ n\lambda_n \psi^p(n) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \psi^p(k) \right\}. \quad (38)$$

Застосувавши теорему С.П.І, наприклад, у випадку, коли числа λ_k визначаються рівностями (2), будемо мати

$$\sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |\rho_k(f;x)|^p \right\}^{1/p} \leq \frac{C_p}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \psi^p(k), \quad (39)$$

тобто отримуємо оцінку швидкості збіжності арифметичних відхилень сум Фур"е на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$.

Отриманий такий аналог теореми С.П.І на класах $C^{\psi}_{\beta} C$.

ТЕОРЕМА С.П.І′. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$ і послідовність $\{\lambda_k\}_{k \in N}$, $\lambda_k \geq 0$, така, що числа $\lambda_k \psi(k)$ не зростають при всіх $k \geq n$, то $\forall f \in C^{\psi}_{\beta} C$, для будь-якого $p > 0$ і $\beta \in R$

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(f;x)|^p \right\|_C \leq$$

$$\leq C_p \left\{ \lambda_n (\eta(n) - n) \psi^p(n) E_n^p(f^{\psi}_{\beta}) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \psi^p(k) E_k^p(f^{\psi}_{\beta}) \right\}. \quad (40)$$

Перераховані твердження опубліковані в спільних роботах - автора і О.І.Степанця. Ці спільні результати в дисертацію не ввійшли. Основним же результатом параграфу І розділу 2 роботи є наступні узагальнення теорем С.П.І і С.П.І$'$.

ТЕОРЕМА 2.І.І. Нехай $\varphi \in \Phi_\gamma$ при $\gamma = 1$ і послідовність $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in N_0}$ така, що числа $\lambda_k \psi(k)$ не зростають. Тоді, якщо $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty} = \mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{M}_\infty$, то $\forall f \in C^\psi_\beta C$ і для будь-якого числа β справедлива нерівність

$$H_n^\varphi(f; x, \Lambda) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(|\rho_k(f; x)|) \le$$

$$\le C_\varphi \Big\{ \lambda_n (\eta(n) - n) \varphi(\psi(n) E_n(f^\psi_\beta)) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi\, \psi(k) E_k(f^\psi_\beta) \Big\} \quad (41)$$

І якщо $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то $\forall f \in C^\psi_0 C$

$$H_n^\varphi(f; x, \Lambda) \le C_\varphi \Big\{ n \lambda_n \varphi(\psi(n) E_n(f^\psi_0)) +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(\psi(k) E_k(f^\psi_0)) \Big\}. \quad (42)$$

У випадку, коли $\varphi(u) = u^p$, $p > 0$, з цієї теореми, очевидно, випливає твердження теореми С.П.І.

ТЕОРЕМА 2.І.2. Нехай $\varphi(u) = u^p$, $p > 0$, і послідовність $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \in N}$ така, що числа $\lambda_k \psi(k)$ не зростають. Тоді

$$\sup_{f \in C^\psi_\beta C_F} \| H_n^\varphi(f; x, \Lambda) \|_C \le$$

$$\le A \Big\{ \lambda_n (\eta(n) - n) \varphi(\psi(n) F_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(\psi(k) F_k) \Big\}; \quad (43)$$

$$\sup_{f \in C^\psi_0 C_F} \| H_n^\varphi(f; x, \Lambda) \|_C \le$$

$$\le A \Big\{ n \lambda_n \varphi(\psi(n) F_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(\psi(k) F_k) \Big\}. \quad (44)$$

де величина A не залежить від n, послідовність $F=\{F_n\}_{n\in N}$, спадаючи, прямує до нуля, а

$$C^{\psi}_{\beta}C_F = \{ f\in C^{\psi}_{\beta}C : E_n(f^{\psi}_{\beta}) \le A F_n \}.$$

Звернемо увагу на ту обставину, що із нерівностей (43) і (44) випливає, що

$$\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta}C_F} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi(|\rho_k(f;x)|)\right\|_C \le A\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi(\psi(k)F_k). \qquad (45)$$

Визначивши за формулою (2) числа λ_k, із нерівності (45) отримаємо

$$\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta}C_F} \left\| \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varphi(|\rho_k(f;x)|)\right\|_C \le \frac{A}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varphi(\psi(k)F_k). \qquad (46)$$

Доведення теорем 2.1.1 і 2.1.2 проводиться з застосуванням згадуваних раніше ідей В.Тотика, пов"язаних з φ-середніми і істотним чином спирається на оцінки φ-сильних середніх Валле Пуссена, справедливість яких випливає із наступного твердження - аналогу твердження С.П.І.

ЛЕМА 2.1.1. Нехай $\psi\in\mathfrak{M}_{C,\infty}$, $\eta(n)=\eta(\psi,n)$, $n\in N$, $k_j\in N\cap[n,\eta(n)]$, $j=\overline{1,r}$. Тоді якщо $f\in C^{\psi}_{\beta}C$, $\beta\in R$, то $\forall p>0$ справедлива нерівність

$$\mathcal{U}_{n,p}(f;x) = \left\{ \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} |\rho_{k_j}(f;x)|^p \right\}^{1/p} \le$$

$$\le A_p\,\psi(n)\,E_n(f^{\psi}_{\beta})\left(\ln^{+}\frac{\eta(n)-n}{r}+1\right). \qquad (47)$$

І якщо $\psi\in\mathfrak{M}_0$, то $\forall f\in C^{\psi}_{0}C$, $\forall n\in N$, $k_j\in N\cap$ $\cap[n,2n]$ випливає $\forall p>0$

$$\mathcal{U}_{n,p}(f;x) \le A_p\,\psi(n)\,E_n(f^{\psi}_{0}), \qquad (48)$$

де величини A_p залежать тільки від p, а $\ln^{+}t=\{0,\ln t\}$.

В другому параграфі розділу 2 вивчаються відхилення прямокутних частинних сум Фур"є на множинах (ψ,β)-диференційовних функцій багатьох змінних. Основні результати цього параграфу отримані спільно з О.І.Степанцем (1991) і є продовженням на багатовимірний випадок відповідного одновимірного твердження О.І.Степанця (1986). Ці результати в дисертації носять допоміжний характер і використовуються в наступних параграфах при вивченні величин, які характеризують сильне сумування кратних рядів Фур"є на класах $C^{\psi}_{\beta}C$ 2π-періодичних функцій багатьох змінних.

В наступному нам знадобиться низка позначень і означень.

Нехай $f(x)=f(x_1,\ldots,x_m)$ - 2π-періодична по кожній із змінних сумовна на кубі періодів T^m функція ($f\in L(T^m)$) і $S[f]$ - її ряд Фур"є (див. співвідношення (7)-(8)). Нехай, далі, $\psi_i(k_i)$, $i=\overline{1,m}$, - довільні функції натурального аргументу і β - фіксований вектор із R^m, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_m)$.

Припустимо, що для даної функції $f\in L(T^m)$ і набору $\mu\subset \overline{m}$ ряд

$$\sum_{k^{\mu}=\ell^{\mu}}^{\infty}\frac{1}{\pi^{|\mu|}}\int\limits_{T^{|\mu|}} f(x+t^{\mu})\prod_{i\in\mu}\frac{1}{\psi_i(k_i)}\cos(k_it_i-\theta_i)\,dt^{\mu}, \qquad (49)$$

$$\theta_i=\beta_i\pi/2,$$

де $\ell=(1,\ldots,1)$ і $|\mu|$ - потужність множини μ, є рядом Фур"є деякої функції $\varphi\in L(T^m)$ по змінних x_i, $i\in\mu$. Цю функцію будемо позначати через $f^{\psi}_{\beta,\mu}(\cdot)$ і називати $(\psi,\beta)_{\mu}$-похідною функції $f(\cdot)$. Множину функцій $f\in L(T^m)$ таких, що $\forall\mu\subset\overline{m}$ існує похідна $f^{\psi}_{\beta,\mu}(\cdot)$, будемо позначати $L^{\psi}_{\beta,\overline{m}}$ або ж L^{ψ}_{β}. Якщо $f\in L^{\psi}_{\beta}$ і до того ж $\forall\mu\in\overline{m}$ $f^{\psi}_{\beta,\mu}\in\mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ - деяка підмножина із $L(T^m)$, то множину таких функцій $f(\cdot)$ будемо позначати через $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Підмножину неперервних функцій із L^{ψ}_{β} і $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ будемо позначати C^{ψ}_{β} і $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, відповідно.

Нехай, далі, $\mathcal{T}_{\mu,n}$ - множина функцій $t_{\mu,n}\in L(T^m)$, які являються тригонометричними поліномами порядку n_i по змінній x_i, $i\in\mu$, тобто мають вигляд

$$t_{\mu n}(x)=\sum_{k^\mu=0}^{n^\mu}\sum_{\gamma^\mu\in R^{|\mu|}} a_{k\mu}(x^{c\mu},\gamma^\mu)\prod_{j\in\mu}\cos\left(k_i x_i-\gamma_i\frac{\pi}{2}\right),$$

де $\gamma^\mu=(\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_{|\mu|}})$, причому $\gamma_{i_j}\in M$ приймають значення або нуль, або одиниця, $a_{k\mu}(x^{c\mu},\gamma^\mu)$ - функція змінних x_i, $i\in C^\mu=\overline{m}\setminus\mu$, сумовна на кубі періодів $T^{|c\mu|}$,

$$E_{\mu,n}(\varphi)=\inf_{t_{\mu,n}\in\mathcal{T}_{\mu,n}}\|\varphi(x)-t_{\mu,n}(x)\|_C$$

- найкраще наближення функції $\varphi\in M$ за допомогою функцій $t_{\mu,n}\in\mathcal{T}_{\mu,n}$, де M - множина істотно обмежених функцій із $L(T^m)$.

В третьому параграфі результати параграфу 2.1 продовжуються на багатовимірний випадок. Основними результатами тут є наступні аналоги теореми С.П.I.

ТЕОРЕМА 2.3.I. Нехай $m\in N$, $\psi_i\in\mathfrak{M}_{c,\infty}$, $\forall j\in\overline{m}$, $p>0$ і $\{\lambda_k\}_{k\in N_0^m}$ - невід"ємна послідовність чисел така, що числа $\lambda_k\prod_{j\in\overline{m}}\psi_j^p(k_j)$ не зростають при збільшенні координати k_j, $j\in\overline{m}$, точки k. Тоді $\forall f\in C^\psi_\beta C$, $\forall\beta\in R^m$ і $\forall n\in N$ справедлива нерівність

$$\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\,\rho_k(f;x)^p\le A_p\,\lambda_n\tilde{\mathcal{E}}_n^{(p)}(f^\psi_\beta)+\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\tilde{\mathcal{E}}_k^{(p)}(f^\psi_\beta), \quad (50)$$

де A_p - число, яке не залежить від $f\in C^\psi_\beta C$, $x\in R^m$ і $n\in N$,

$$\mathcal{E}_{k,\tau}=\prod_{j\in\tau}\psi_j(k_j)\sum_{\tau_1\subset\overline{m}}E_{\tau_1,k}(f^\psi_{\beta,\tau_1}),\ \mathcal{E}_{k,\overline{m}}(f^\psi_\beta)=\mathcal{E}_k(f^\psi_\beta), \quad (51)$$

$$d^{(p)}_{k,c\tau}=\prod_{j\in c\tau}(\eta_j(k_j)-k_j)\psi_j^p(k_j),\quad c\tau=\overline{m}\setminus\tau, \quad (52)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_k^{(p)}(f^\psi_\beta)=d^{(p)}_{k,c\tau}\ \mathcal{E}^p_{k,\tau}(f^\psi_\beta) \quad (53)$$

і $\sum_{\varphi\subset\overline{m}}$ означає, що сумування проводиться по всіх підмножинах φ із множини $\overline{m}$.

ТЕОРЕМА 2.3.2. Нехай $m\in N,\ \psi_j\in\mathfrak{M}_0,\ \forall j\in\overline{m},\ p>0$ і $\{\lambda_k\}_{k\in N_0^m}$ - невід"ємна послідовність чисел така, що числа $\lambda_k\prod_{j\in\overline{m}}\psi_j^p(k_j)$ при збільшенні координати k_j точки k не зростають. Тоді $\forall f\in C_0^\psi C,\ \forall n\in N$ виконується нерівність

$$\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k|\rho_k(f;x)|^p\le A_p\Big\{\lambda_n\tilde{\mathcal{E}}_n^{(p)}(f_0^\psi)+\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\tilde{\mathcal{E}}_k^{(p)}(f_0^\psi)\Big\},\quad (54)$$

де A_p - число, яке не залежить від $f\in C_0^\psi C,\ n\in N,$

$$\tilde{\mathcal{E}}_k^{(p)}(f_0^\psi)=\prod_{j\in C\varphi}n_j\psi_j^{(p)}(n_j)\mathcal{E}^p_{k,\varphi}(f_0^\psi),\quad (55)$$

а $\mathcal{E}_{k,\varphi}(f_\beta^\psi)$ визначаються за формулою (51).

Для доведення цих теорем використовуються багатовимірні аналоги співвідношень (37) - (36), які містяться в наступних лемах.

ЛЕМА 2.2.3. Нехай $m\in N,\ \psi_j\in\mathfrak{M}_{c,\infty}\ \forall j\in\overline{m}$. Тоді $\forall f\in C_\beta^\psi C,\ \forall\beta\in R^m,\ \forall n\in N^m,\ \forall p>0$ виконується нерівність

$$\Big\{\prod_{j\in\overline{m}}(\eta_j(n_j)-n_j+1)^{-1}\sum_{k=n}^{\eta(n)}|\rho_k(f;x)|^p\Big\}^{1/p}\le A\mathcal{E}_n(f_\beta^\psi),\quad (56)$$

де $\eta(n)=(\eta_1(n_1),\dots,\eta_m(n_m))$, величини $\mathcal{E}_n(f_\beta^\psi)$ визначаються за формулою (51), A - число, яке не залежить від $f\in C_\beta^\psi C$, n і $x\in R^m$.

ЛЕМА 2.2.4. Нехай $m\in N,\ \psi_j\in\mathfrak{M}_0\ \forall j\in\overline{m}$. Тоді $\forall f\in C_0^\psi C,\ \forall n\in N^m,\ \forall p>0$ і $\forall x\in R^m$ виконується нерівність

$$\Big\{\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j+1}\sum_{k=n}^{2n}|\rho_k(f;x)|^p\Big\}^{1/p}\le A\,\mathcal{E}_n(f_0^\psi).\quad (57)$$

В більш загальному вигляді основні результати цього параграфу опубліковані автором в роботі [10], де доводиться вірність наступних тверджень.

ТЕОРЕМА П.1. Нехай $m \in N$, $\varphi \in \Phi_\gamma$, $\gamma \in (0, 1/m]$, функції $\psi_j \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, $j \in \overline{m}$, і послідовність $\{\lambda_k\}_{k \in N_0^m}$ така, що числа $\lambda_k \prod_{j \in \overline{m}} \psi_j(k_j)$ не зростають по кожній координаті точки k. Тоді, якщо $\beta \in R^m$, $f \in C_\beta^\psi C$, то $\forall n \in N^m$ виконується нерівність

$$\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(|\rho_k(f;x)|) \le A\Big\{\bar{\lambda}_n \varphi(\mathcal{E}_n(f_\beta^\psi)) + \sum_{k=n}^{\infty} \bar{\lambda}_k \varphi(\mathcal{E}_k(f_\beta^\psi))\Big\}, \quad (58)$$

де $\mathcal{E}_k(f_\beta^\psi)$ визначаються за формулою (51), величина A не залежить від n і $\bar{\lambda}_k = \prod_{j \in \tau} (\eta_j(n_j) - n_j)$, $\tau = \{j \in \overline{m}, k_j = n_j\}$.

ТЕОРЕМА П.2. Нехай $m \in N$, $\varphi \in \Phi_\gamma$, $\gamma \in (0, 1/m]$, функції $\psi_j \in \mathfrak{M}_0$, $j \in \overline{m}$, і послідовність $\{\lambda_k\}_{k \in N_0^m}$ така, що числа $\lambda_k \prod_{j \in \overline{m}} \psi_j(k_j)$ не зростають по кожній координаті точки k. Тоді, якщо $f \in C_0^\psi C$, то $\forall n \in N^m$ виконується нерівність

$$\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(|\rho_k(f;x)|) \le A\Big\{\bar{\lambda}_n \varphi(\mathcal{E}_n(f_0^\psi)) + \sum_{k=n}^{\infty} \bar{\lambda}_k \varphi(\mathcal{E}_k(f_0^\psi))\Big\}, \quad (59)$$

де $\mathcal{E}_k(f_\beta^\psi)$ визначаються за формулою (51), число A не залежить від n і $x \in R^m$, а

$$\bar{\lambda}_k = \lambda_k \prod_{j \in \tau} n_j, \quad \tau = \{j \in \overline{m} : k_j = n_j\}.$$

В четвертому параграфі розділу 2 досліджуються (φ, λ)-сильні середні типу Марцинкевича (дав. співвідношення (23)) методом сумування рядів Фур"є на класах $C_\beta^\psi C$ і доводяться наступні твердження.

ТЕОРЕМА 2.4.1. Нехай $m \in N$, $\varphi \in \Phi_\gamma$, $\gamma \in (0, 1/m]$, $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, $\{\lambda_k\}_{k \in N}$ - невід"ємна послідовність чисел така, що числа $\lambda_k \psi(k)$ не зростають. Тоді, якщо $f \in C_\beta^\psi C$ і $\beta \in R^m$, то виконується нерівність

$$\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(|\rho_k(f;x)|) \le$$

$$A\left\{\lambda_n(\tau(n)-n)\varphi(\mathcal{E}_{n\ell}(f^{\psi}_{\beta}))+\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\varphi(\mathcal{E}_{k\ell}(f^{\psi}_{\beta}))\right\}, \tag{60}$$

де $\mathcal{E}_k(f^{\psi}_{\beta})$ визначається за формулою (51) і число A не залежить від n і $x \in R^m$.

ТЕОРЕМА 2.4.2. Нехай $m \in N$, $\varphi \in \Phi_{\gamma}$, $\gamma \in (0, 1/m]$, $\psi \in \mathfrak{M}_0$ і $\{\lambda_k\}_{k \in N}$ – невід"ємна послідовність чисел така, що числа $\lambda_k\psi(k)$ не зростають. Тоді, якщо $f \in C^{\psi}_0 C$, то виконується нерівність

$$\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(|\rho_{k\ell}(f;x)|) \le$$

$$A\left\{n\lambda_n\varphi(\mathcal{E}_{n\ell}(f^{\psi}_0)) + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k\varphi(\mathcal{E}_k(f^{\psi}_0))\right\}, \tag{61}$$

де $\mathcal{E}_k(f^{\psi}_0)$ визначаються за формулою (51) і число A не залежить від $x \in R^m$ і n, а $\ell=(1,\dots,1)$.

Відмітимо, що у одновимірному випадку (при $m=1$) (φ,λ)-сильні середні типу Марцинкевича сумування рядів Фур"є співпадають з величинами $H^{\varphi}_n(f;x)$, розглянутими в § 2.1, і тоді твердження теорем 2.1.1 і 2.4.1, 2.4.2 також співпадуть. Результати параграфу 2.4 опубліковані в роботі [10].

В третьому розділі розглядаються питання сильного сумування інтегралів Фур"є для функцій, означених на R (і на R^m).

За наближуючі агрегати для функцій із $C(R)$ беруться оператори

$$U_{\sigma}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_R f(x+t)t^{-2}(\cos\sigma t-\cos(\sigma+1)t)\,dt, \tag{62}$$

які в загальному випадку, як наприклад, для функції $f(\cdot)$ такої, що $f(x)/(1+|x|)$ сумовна на R з квадратом ($f \in \mathcal{P}^2_{\sigma}$), є цілими функціями експоненціального типу $\le \sigma+1$. Відмітимо, що якщо $f \in C(T)$ і $\sigma \in N$, то $U_{\sigma}(f;x)=S_{\sigma}(f;x)$, а при $[\sigma] < \sigma < [\sigma]+1$ відрізняється від $S_{[\sigma]}(f;x)$ на величину $(\sigma+1-[\sigma])A_{[\sigma]}(f;x)$, де $A_{[\sigma]}(f;x)$ означається формулою (28).

Як величини, які характеризують (φ,λ)-сильне сумування, розглядаються величини:

$$d^{\mu}_{\varphi,\lambda}(f;x)=\int_{\mu}^{\infty}\lambda(\sigma)\varphi(|\tilde\rho_\sigma(f;x)|)d\sigma,\quad \mu>0, \tag{63}$$

в яких $\tilde\rho_\sigma(f;x)=f(x)-U_\sigma(f;x)$ і $\lambda(\sigma)$ - деяка функція, означена при $\sigma\geq 1$.

Зрозуміло, що в періодичному випадку, взявши за функцію $\lambda(\sigma)$ постійну на інтервалах $[k,k+1)$, можна із результатів § 3.1 отримати результати для величин $H_n^{\varphi}(f;x)$. Це зауваження повністю стосується також і багатовимірного випадку.

Відмітимо, що величини $U_\sigma(f;x)$ відомі. Вони вивчались, наприклад, в монографіях Н.Ахієзера і А.Ф.Тімана. Ці величини мають низку властивостей, аналогічних властивостям частинних сум рядів Фур"є. Зокрема, для них виконується аналог нерівності Лебега:

$$\left\|f(x)-U_\sigma(f;x)\right\|_C\leq A e_\sigma(f)\ln(\sigma+2), \tag{64}$$

де $e_\sigma(f)$ - найкраще наближення функції $f(x)$ цілими функціями експоненціального типу $\leq\sigma$ із множини $\mathcal{P}^2_\sigma$.

В першому параграфі розділу 3 вивчаються величини $d^{\mu}_{\varphi,\lambda}(f;x)$ в одновимірному випадку - для $f\in C_0(R)$ і невід"ємних функцій $\lambda(\sigma)$, які задовольняють таку умову: $\forall\mu>0$ і $r>1$ виконується нерівність:

$$\left\{\int_{\mu}^{2\mu}\lambda^r(\sigma)d\sigma\right\}^{1/r}\leq A\mu^{1/r-1}\int_{\mu/2}^{\mu}\lambda(\sigma)d\sigma, \tag{65}$$

де величина A не залежить від μ. $C_0(R)$ - множина рівномірно неперервних функцій на R. Множину функцій, які задовольняють умову (65), позначимо Λ_r.

Основний результат параграфу міститься в такому твердженні.

ТЕОРЕМА 3.1.1. Нехай $f\in C_0(R)$, $\lambda\in\Lambda_r$ і $\varphi\in\Phi_1$. Тоді $\forall\mu>0$ виконується нерівність

$$\left\|\int_{2\mu}^{\infty}\lambda(\sigma)\varphi(|\tilde\rho_\sigma(f;x)|)d\sigma\right\|_{C_0}\leq A\int_{\mu}^{\infty}\lambda(\sigma)\varphi(e_\sigma(f))d\sigma. \tag{66}$$

Цю теорему можна розглядати як інтегральний аналог теореми Г. Як випливає із зроблених вище зауважень, при $\varphi(u)=u^p$, $p>0$, в періодичному випадку твердження теореми 3.1.1 співпадає з теоремою Г.

Доведення теореми 3.I.I спирається на наступне твердження, яке є інтегральним аналогом нерівностей виду (I4).

ЛЕМА 3.I.I. Нехай $f \in C_0(R)$ і $\varphi \in \Phi_1$. Тоді $\forall \mu > 0$ виконується нерівність

$$\frac{1}{\mu}\int_{\mu}^{2\mu} \varphi(|\tilde{\rho}_{\sigma}(f;x)|)\,d\sigma \le A\varphi(e_{\mu}(f)), \qquad (67)$$

де число A не залежить від μ і $x \in R$.

Результати параграфу 3.I опубліковані в роботі [8].

В параграфі 3.2 отримані інтегральні аналоги результатів параграфу 2.I для функцій із класу $\hat{C}^{\psi}_{\beta}C$. Класи функцій $\hat{C}^{\psi}_{\beta}C$ введені О.I.Степанцем (I988) як множини функцій f, зображуваних у вигляді

$$f(x) = A_0 + \int_R \chi(x+t)\hat{\psi}(t)\,dt, \qquad (68)$$

де A_0 - деяке стале число, $\chi \in C(R)$,

$$\hat{\psi}(t) = \frac{1}{\pi}\int_R \psi(v)\cos\left(vt + \beta\frac{\pi}{2}\right)dt, \qquad (69)$$

$\beta \in R$, функція $\psi \in C([0,\infty))$ і $\hat{\psi}$ - сумовна на R. Інтеграл (68) розуміється як межа інтегралів по симетричних проміжках, які розширюються. Функцію χ, як і в періодичному випадку, називають (ψ, β)-похідною функції f і позначають f^{ψ}_{β}.

Далі, як агрегат наближення вводять оператори

$$F_{\sigma}(f;x) = A_0 + \int_R f^{\psi}_{\beta}(x+t)\hat{\tau}_{\sigma}(t)\,dt,$$

де $\hat{\tau}_{\sigma}(\cdot)$ визначається за формулою (69) по функції

$$\tau_{\sigma}(t) = \begin{cases} \psi(t), & 0 \le t \le \sigma - 1; \\ \psi(t) - (t-\sigma+1)\psi(\sigma), & \sigma - 1 \le t \le \sigma; \\ 0 & \sigma \le t. \end{cases}$$

Оператор

$$\hat{d}^{\tau}_{\varphi,\lambda}(f;x)=\int_{\tau}^{\infty}\lambda(\sigma)\varphi(|\tilde{\rho}_{\sigma}(f;x)|)\,d\sigma,$$

де $\lambda(\cdot)$ і $\varphi(\cdot)$ - невід"ємні функції, означені на $[0,\infty)$, $\tilde{\rho}_{\sigma}(f;x)=f(x)-F_{\sigma}(f;x)$, є інтегральним аналогом величини $d_{\varphi,\lambda}(\cdot)$, розглянутої в § 2.1.

Основний результат параграфу 3.2 міститься в такому твердженні.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Нехай $\varphi\in\Phi_1$, $\psi\in\mathfrak{M}_{c,\infty}$. Функція $\lambda(\cdot)$ означена на $[d,\infty)$, $\tau\geq 1$ і така, що $\psi(\sigma)\lambda(\sigma)$ не зростає. Тоді, якщо $\eta(t)-t\geq\gamma_0>0$ $\forall t\geq\tau$, то $\forall f\in$ $\in\hat{C}^{\psi}_{\beta}C$ виконується нерівність

$$\hat{d}^{\tau}_{\varphi,\lambda}(f;x)\leq$$

$$\leq A\Big\{\lambda(\tau)(\eta(\tau)-\tau)\varphi(e_{\tau}(f^{\psi}_{\beta}))+\int_{\tau}^{\infty}\lambda(\sigma)\varphi(e_{\sigma}(f^{\psi}_{\beta}))\,d\sigma\Big\}. \quad (70)$$

І якщо $\psi\in\mathfrak{M}_0$, то $\forall f\in C^{\psi}_{0}C$ і $\forall\tau\geq 1$ виконується нерівність

$$\hat{d}^{\tau}_{\varphi,\lambda}(f;x)\leq A\Big\{\tau\lambda(\tau)\varphi(e_{\tau}(f^{\psi}_{0}))+\int_{\tau}^{\infty}\lambda(\sigma)\varphi(e_{\sigma}(f^{\psi}_{0}))\,d\sigma\Big\}, \quad (71)$$

де величина A не залежить від τ і $x\in R$.

Цей результат при $\varphi(u)=u^{p}$, $p>0$, опубліковано в спільній з О.І.Степанцем роботі (1991), а для довільної функції $\varphi\in$ $\in\Phi_1$ - автором в [?].

В параграфі 3.3 продовжені на багатовимірний випадок твердження параграфу 3.1. В параграфі 3.4 введене поняття інтегральних сильних середніх типу Марцинкевича в такий спосіб:

$$\int_{\tau}^{\infty}\lambda(\sigma)\varphi(|f(x)-U_{\sigma l}(f;x)|)\,d\sigma,$$

де $l=(1,\ldots,1)$, функції $\lambda(\cdot)$ і $\varphi(\cdot)$ невід"ємні і означені на $[0,\infty)$.

Основний результат параграфу формулюється таким чином.

ТЕОРЕМА 3.4.I. Нехай $f \in C_0(R^m)$ при $\gamma \in (0, 1/m]$, $\varphi \in \Phi_\gamma$ і $\lambda \in \Lambda_r, r > 1$. Тоді $\forall d \geq 0$ має місце нерівність

$$\int_{2d}^{\infty} \lambda(\sigma)\, \varphi(|f(x) - U_{\sigma l}(f; x)|)\, d\sigma \leq A \int_{d}^{\infty} \lambda(\sigma) \varphi(e_{\sigma l}(f))\, d\sigma,$$

де число A не залежить від $x \in R^m$ і d, а $l = (1, \ldots, 1)$.

Вважаю своїм приємним обов"язком висловити глибоку подяку моєму науковому керівнику по кандидатській дисертації члену-кореспонденту АН Грузії Л.В.Жижіашвілі за постановку низки задач з сильного сумування рядів Фур"е, за допомогу і поради, якими я користувався при виконанні роботи.

Я щиро і глибоко вдячний професору О.І.Степанцю за те, що він привернув мою увагу до тематики з (ψ, β)-диференційованих функцій, за постійну увагу і допомогу, виявлену мені при виконанні даної роботи.

Основні положення роботи опубліковані в таких роботах:

1. Пачулиа Н.Л. О сильной суммируемости рядов Фурье по системам функций полиномиального вида // Тр. мат. ин-та АН СССР. - 1987. - 180. - С. 172-174.

2. Пачулиа Н.Л. Об оценках сильных средних методов суммирования рядов Фурье // Тр. АГУ . - 1991. - С. 251-257.

3. Пачулиа Н.Л. О сильной суммируемости рядов Фурье // Вопросы суммирования простых и кратных рядов Фурье. - Киев, 1987. - С. 9 - 50. - (Препр./АН УССР. Ин-т математики;87.40).

4. Пачулиа Н.Л. Оценка сильных средних уклонений рядов Фурье // Сообщ. АН ГССР . - 1989. - 134, № 2. - С. 249-252.

5. Пачулиа Н.Л. О сильной суммируемости рядов Фурье (ψ,β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. - 1989. - 41 , № 6. - С. 808-814.

6. Пачулиа Н.Л. Об оценках сильных средних типа Марцинкевича // кратных рядов Фурье // Тр. АГУ. - Сухуми, 1989. - С. 147-155.

7. Пачулиа Н.Л. О сильной суммируемости рядов Фурье на классах периодических функций // Укр. мат.журн. - 1989. - 41, № 3. - С. 354-380.

8. Пачулиа Н.Л. Равномерные оценки интегральных сильных средних уклонений непрерывных функций целыми функциями // Укр. мат. журн. - 1991. - 43, № 2. - С. 235-241.

9. Пачулиа Н.Л. Равномерные оценки (λ,φ)- сильных интегральных средних уклонений операторов Фурье // Укр. мат.журн. - 1990. - 42, № 10. - С. 1434-1441.

10. Пачулиа Н.Л. Сильное суммирование рядов Фурье (ψ,β)-дифференцируемых функций m переменных // Кратные суммы Фурье на множествах (ψ,β)-дифференцируемых функций. - Киев,1990. - С.17-67. - (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 90.55).

11. Пачулиа Н.Л. Некоторые вопросы сильной суммируемости рядов Фурье. - М., 1984. - Совет по авт.научн.иссл. при Президиуме АН СССР, АГУ. - 22 с.

Основний результат параграфу формулюється таким чином.

ТЕОРЕМА 3.4.1. Нехай $f \in C_0(R^m)$ при $\gamma \in (0, 1/m]$, $\varphi \in \Phi_\gamma$ і $\lambda \in \Lambda_r, r > 1$. Тоді $\forall d \geq 0$ має місце нерівність

$$\int_{2d}^{\infty} \lambda(\sigma)\, \varphi(|f(x) - U_{\sigma l}(f; x)|)\, d\sigma \leq A \int_{d}^{\infty} \lambda(\sigma)\, \varphi(e_{\sigma l}(f))\, d\sigma,$$

де число A не залежить від $x \in R^m$ і d, а $l = (1, \ldots, 1)$.

Вважаю своїм приємним обов"язком висловити глибоку подяку моєму науковому керівнику по кандидатській дисертації члену-кореспонденту АН Грузії Л.В.Жижіашвілі за постановку низки задач з сильного сумування рядів Фур"е, за допомогу і поради, якими я користувався при виконанні роботи.

Я щиро і глибоко вдячний професору О.І.Степанцю за те, що він привернув мою увагу до тематики з (ψ, β)-диференційованих функцій, за постійну увагу і допомогу, виявлену мені при виконанні даної роботи.

Основні положення роботи опубліковані в таких роботах:

1. Пачулиа Н.Л. О сильной суммируемости рядов Фурье по системам функций полиномиального вида // Тр. мат. ин-та АН СССР. - 1987. - 180. - С. 172-174.

2. Пачулиа Н.Л. Об оценках сильных средних методов суммирования рядов Фурье // Тр. АГУ. - 1991. - С. 251-257.

3. Пачулиа Н.Л. О сильной суммируемости рядов Фурье // Вопросы суммирования простых и кратных рядов Фурье. - Киев, 1987. - С. 9 - 50. - (Препр./АН УССР. Ин-т математики;87.40).

4. Пачулиа Н.Л. Оценка сильных средних уклонений рядов Фурье // Сообщ. АН ГССР. - 1989. - 134, № 2. - С. 249-252.

5. Пачулиа Н.Л. О сильной суммируемости рядов Фурье (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. - 1989. - 41, № 6. - С. 808-814.

6. Пачулиа Н.Л. Об оценках сильных средних типа Марцинкевича // кратных рядов Фурье // Тр. АГУ. - Сухуми, 1989. - С. 147-155.

7. Пачулиа Н.Л. О сильной суммируемости рядов Фурье на классах периодических функций // Укр. мат.журн. - 1989. - 41, № 3. - С. 354-380.

8. Пачулиа Н.Л. Равномерные оценки интегральных сильных средних уклонений непрерывных функций целыми функциями // Укр. мат. журн. - 1991. - 43, № 2. - С. 235-241.

9. Пачулиа Н.Л. Равномерные оценки (λ, φ)- сильных интегральных средних уклонений операторов Фурье // Укр. мат.журн. - 1990. - 42, № 10. - С. 1434-1441.

10. Пачулиа Н.Л. Сильное суммирование рядов Фурье (ψ, β)-дифференцируемых функций m переменных // Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций. - Киев, 1990. - С. 17-67. - (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 90.55).

11. Пачулиа Н.Л. Некоторые вопросы сильной суммируемости рядов Фурье. - М., 1984. - Совет по авт.научн.иссл. при Президиуме АН СССР, АГУ. - 22 с.

Подп.в печ.I5.09.92.Формат 60x84/I6.Бумага типографская №I.
Офс.печать.Усл.печл. I,63.Уч.-изд.л. I,4.Тираж I00 экз.
Заказ 252.Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики
АН Украины
252601 Киев-4,ул.Репина,3