КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

ТРЕТЬЯКОВА Лариса Владимировна

ОПТИМИЗАЦИЯ ОЦЕНКИ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

01.01.09 - математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1992

Работа выполнена в Западном филиале Всероссийского тепло-технического научно-исследовательского института им.Дзержинского.

Научный руководитель : доктор физико-математических наук, доцент ХУСАИНОВ Д.Я.

Официальные оппоненты : доктор физико-математических наук, профессор А.С.АНДРЕЕВ

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник А.Ю.ОБОЛЕНСКИЙ

Ведущая организация - Институт математики АН Украины

Защита диссертации состоится 26 " ноября 1992г. в 14 час. 00 мин. в ауд. 40 на заседании специализированного совета Д 068.18.16 в Киевском государственном университете им. Т.Г.Шевченко по адресу: 252127, Киев-127, проспект академика Глушкова, 5, госуниверситет, факультет кибернетики.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Киевского университета.

Автореферат разослан "19" октября 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент А.В.Кузьмин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Метод функций Ляпунова является одним из универсальных качественных методов исследования задач устойчивости. Проблемы устойчивости регулируемых систем и связанные с ними исследования качественных характеристик наблюдаемых процессов, таких, как оценка области асимптотической устойчивости, вычисление времени переходного процесса и др. являются наиболее актуальными задачами теории автоматического регулирования. Несмотря на трудности в использовании второго метода, порожденные недостаточно полной разработкой методов построения функций Ляпунова, он несомненно является одним из наиболее эффективных методов теории динамических систем. Стремление получить наилучшие качественные характеристики исследуемых режимов повлекло рассмотрение семейства простейших функций Ляпунова, в частности, квадратичных форм, и выбора среди них в том или ином смысле оптимальных функций. Это позволило внедрить в проблему выделения наилучших оценок качественных характеристик динамических процессов методы нелинейного программирования. На этом пути получено решение ряда интересных задач конструктивной теории регулируемых систем.

Целью диссертационной работы является развитие качественной теории устойчивости нелинейных дифференциальных систем; построение новых методов исследования задачи оценки области притяжения; изучение геометрических свойств поверхностей уровня функций Ляпунова; получение оптимальных оценок областей устойчивости с помощью теоремы А.М.Ляпунова; создание алгоритмов построения и оптимизации функций Ляпунова для нелинейных систем в некритическом случае и в простейших критических случаях одного нулевого корня и пары чисто мнимых корней.

Научная новизна. Получено развитие теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости с точки зрения задачи об оценке области притяжения. Предложен поиск оптимальных оценок путем сведения к специальной задаче нелинейного программирования. Показано, что при построении семейства оценок областей притяжения квадратичных систем возникающая минимаксная задача может быть сведена к задаче линейного программирования, зависящей от параметра.

Введено понятие "поверхность Ляпунова" и изучены геометрические свойства таких поверхностей, используемых в задаче о построении оптимальных оценок.

Предложены алгоритмы реализации метода наращивания оценок областей притяжения для голоморфных систем с сильным асиптотически устойчивым свойством, а также в двух критически случаях одного нулевого корня и пары чисто мнимых корней.

Путем построения канонических квадратичных форм приведены оценки решений линейных систем, оценки времени переходного процесса и даны достаточные условия абсолютной устойчивости для систем прямого регулирования.

Практическая ценность работы. Основные исследования проводились в рамках научно-исследовательской темы: "Разработать методы и алгоритмы моделирования и оптимизации процессов обработки гидроакустических сигналов, натурных испытаний и проектирования летательных аппаратов, ускоряющих полей заряженных частиц" № IР 01860061345 ГАСНИ 50.53 /Постановление Президиума АН УССР №474 от 27.12.85г., Постановление IКНТ СССР, АН СССР №573/137 от 10.11.85г./ Приложение №78/.

Полученные в диссертации результаты использовались в работах по исследованию задачи об оценке области притяжения асимптотически устойчивых режимов работы синхронных электро-энергетических систем в Теплотехническом институте в г. Минске.

Апробация результатов работы. Результаты диссертации докладывались на Всесоюзной научной конференции "Метод функций Ляпунова" /г. Харьков, 1986г./, на республиканской конференции "Применение вычислительной техники, математических методов моделирования в автоматизации экспериментальных данных исследований /г. Киев, 1987г., 1988г./, на Уральской региональной конференции по функционально- дифференциальным уравнениям /г. Уфа, 1989г./, на научном семинаре Латвийского университета /научный руководитель: проф. Рейзинь Л.Э./, на научном семинаре Белгосуниверситета Республики Беларусь /научные руководители: член.-корр. АН Республики Беларусь Изобов Н.А., член.-корр. АН Республики Беларусь Грудо Э.И./ на научном семинаре Киевского университета /научный руководитель: член.-корр. АН Украины, проф. Бублик Б.Н./.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 печатных работах.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка основной использованной литературы, содержащего 99 наименований. Имеется рисунок.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность развиваемой темы, изложена цель исследований, новизна и практическое значение. Дано краткое содержание диссертации.

В первой главе исследуется дифференциальная система

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n, \quad f(0) = 0. \qquad /1/$$

В § 1 приведены основные понятия теории устойчивости, дан анализ теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости с точки зрения задачи об оценке области притяжения. Указаны трудности вычислений и выделены две основные проблемы /А/ и /В/ в стремлении получить наилучшую оценку области притяжения с помощью теоремы Ляпунова.

В § 2 первой главы изучается геометрическая структура поверхностей уровня определенно положительных функций. Введено

Определение 1.8. Пусть $V: G \to \mathbb{R}^+$ - непрерывная определенно положительная функция. Будем говорить, что уравнение $V(x) = c$, $c > 0$, задает поверхность Ляпунова, если существует число $\varepsilon > 0$, такое, что для любой непрерывной линии $x: [0,T] \to \mathbb{R}^n$ ($x(0) = 0$, $\|x(T)\| = \varepsilon$) можно указать число $\tau \in]0, T[$, для которого выполняются следующие условия:

1/ $x(t) \in G \quad \forall t \in [0, T]$;

2/ $V(x(\tau)) = c$.

Доказана

Теорема 1.1. Если для функции $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ при некотором $c^* > 0$ поверхность $V(x) = c^*$ не является поверхностью Ляпунова, то существует число $c_0 > 0$, такое, что:

1/ $V(x) = c$ – поверхность Ляпунова для $0 < c < c_0$;

2/ при $c > c_0$ уравнение $V(x) = c$ не определяет поверхность Ляпунова.

Приведены два примера, показывающие, что если число c_0 удовлетворяет теореме 1.1., то поверхность $V(x) = c_0$ может как быть поверхностью Ляпунова так и не быть ею.

Получены оценки сверху и снизу для биффуркационного значения $c = c_0$ в виде неравенств

$$\sup_{\varepsilon > 0} \min_{\|x\| = \varepsilon} V(x) = \underline{c}_0 \leq c_0 \leq \overline{c}_0 = \sup_{\varepsilon > 0} \max_{\|x\| = \varepsilon} V(x). \qquad /2/$$

Дана следующая характеристика оценки $\underline{c}_0$.

Теорема 1.2. Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ – непрерывная определенно положительная функция и $\underline{c}_0 > 0$ – оценка снизу значения c_0 согласно /2/. Тогда для $0 < \alpha < \underline{c}_0$ множество $V_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq \alpha\}$ содержит компактное подмножество K_α такое, что:

1/ K_α – окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$;

2/ $K_\alpha \cap \overline{V_\alpha \setminus K_\alpha} = \varnothing$;

3/ граница $\mathrm{Fr}\, K_\alpha$ множества K_α является поверхностью Ляпунова.

Рассмотрен частный случай функций V , а именно, аддитивные функции, определяемые равенством

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad /3/$$

где $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ – непрерывна, определенно положительна и $\varphi_i(0) = 0$. Если через K_c обозначить связную компактную часть множества V_c , $0 < c < \underline{c}_0$, согласно теореме 1.2, то для любого номера $i = \overline{1,n}$ существует интервал $[a_i^c, b_i^c]$ действительной оси $\mathbb{R}$ такой, что:

1/ $a_i^c > 0$, $b_i^c > 0$;

2/ φ_i отображает $[a_i^c, 0]$ и $[0, b_i^c]$ на $[0, c]$;

3/ $\max\limits_{a_i^c \le x_i \le b_i^c} \varphi_i(x_i) = c$.

Теорема 1.3. Для функции /3/ граница множества $V_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \le c\}$ не является связной в том и только в том случае, когда существует номер $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ и существует значение $x_i^* \notin [a_i^c, b_i^c]$ такие, что $\varphi_{i_0}(x_i^*) \le c$.

Для аддитивной функции /3/ вычисление c_0 сводится к задаче на экстремум скалярной функции.

Теорема 1.4. Пусть для функции /3/ вычислены величины

$$M_i = \sup_{x<0} \varphi_i(x), \quad N_i = \sup_{x>0} \varphi_i(x).$$

Тогда имеет место равенство

$$c_0 = \min_{1 \le i \le n} \{M_i, N_i\}.$$

В § 3 первой главы дано развитие теоремы А.М.Ляпунова об асимптотической устойчивости с целью получения оптимальных оценок области притяжения. Для непрерывно дифференцируемой определенно положительной функции $V: G \to \mathbb{R}^+$ строится аппроксимация области, где ее производная по времени $\dot{V}$, вычисленная в силу системы /1/, является определенно отрицательной функцией следующим образом. Пусть K_c означает связную компактную окрестность точки $x = 0$ согласно теореме 1.2. Определим непрерывно дифференцируемые функции $\varphi_j : G \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$, удовлетворяющие условиям:

1/ для любой окрестности W точки $x = 0$ существует элемент $y \in W \setminus \{0\}$ такой, что $\varphi_j(y) < 0$, $\forall j = \overline{1,m}$;

2/ множество $P_j = \{x \in G \mid \varphi_j(x) \le 0\}$, $j = \overline{1,m}$ является окрестностью начала координат $\mathbb{R}^n$;

3/ $\operatorname{int}\left(\bigcap\limits_{j=1}^{m} P_j\right) \subseteq \{x \in G \mid \dot{V}(x) < 0\} \cup \{0\}$.

Отмечены следующие свойства аппроксимации.

Лемма 1.5. Если для $j=\overline{1,m}$ точка x_0^j является решением задачи нелинейного программирования

$$\begin{cases} V(x) \to min, \\ \varphi_j(x) = 0, \; x \neq 0, \end{cases} \qquad /4/$$

то $K_{V(x_0^j)} \subseteq \Phi_j$.

Лемма 1.6. Пусть x_0^j - решение задачи /4/. Тогда имеют место следующие соотношения:

1/ если $\dot{\varphi}_j(x_0^j)=0$, то $\dot{V}(x_0^j)=0$;

2/ если $\frac{\partial V(x_0^j)}{\partial x} \neq 0$ и $\dot{V}(x_0^j)=0$, то $\dot{\varphi}_j(x_0^j)=0$;

3/ если $\dot{V}(x_0^j)<0$, то $\dot{\varphi}_j(x_0^j)<0$.

Из леммы 1.5 непосредственно следуют результаты об оценке области притяжения.

Теорема 1.4. Пусть для каждого $j=\overline{1,m}$ точка x_0^j является решением задачи нелинейного программирования /4/. Положим $r_0 = min\{V(x_0^1), V(x_0^2), \ldots, V(x_0^m), c_0\}$. Тогда для любого числа $r \in]0, r_0[$ подмножество K_r содержится в области асимптотической устойчивости нулевого решения системы /1/.

Следствие 1.4. Пусть x^0 - решение задачи нелинейного программирования $V(x) \to min$, $\dot{V}(x)=0$, $x \neq 0$. Положим $r_0 = min\{V(x_0), c_0\}$. Тогда для любого числа $r \in]0, r_0[$ подмножество K_r содержится в области асимптотической устойчивости нулевого решения /1/.

В диссертации показано, что следствие 1.4 определяет лучшую оценку области притяжения, которая может быть получена с помощью теоремы Ляпунова. Однако, используя предложенные аппроксимации области, где $\dot{V}(x)<0$, этот результат можно усилить. Следующая теорема является основным утверждением диссертации.

Теорема 1.5. Пусть $c_0 = +\infty$ и x_0^j - решение задачи нелинейного программирования

$$V(x) \to min,\ \varphi_j(x) = 0,\ x \neq 0. \qquad /5/$$

Предположим, что $\dot V(x_0^j) < 0$ для всех $j = \overline{1,m}$ и пусть x_{00}^j - решение задачи

$$V(x) \to min,\ \varphi_j(x) = 0,\ \dot\varphi_j(x) = 0,\ x \neq 0. \qquad /6/$$

Положим $r_1 = \min_{1 \le j \le m} V(x_{00}^j)$. Тогда для любого числа $r \in]0, r_1[$ множество $K_r \cap (\bigcap_{j=1}^{m} \mathcal{P}_j)$ содержится в области асимптотической устойчивости нулевого решения системы /1/.

Соответствующий теореме 1.5 метод оценки области притяжения назван "методом наращивания". Он основан на поэтапном решении двух задач математического программирования /5/ и /6/. На первом этапе, решая задачу /5/, получаем некоторую гарантированную оценку, которая включает в себя результат, определяемый теоремой Ляпунова. На втором этапе в результате решения задачи /6/ мы "наращиваем" оценку, полученную на предыду щем шаге. Приведены иллюстрирующие примеры.

В четвертом параграфе главы 1 дана процедура оценки области притяжения с использованием в качестве функций Ляпунова квадратичных форм и аппроксимации области, где $\dot V(x) < 0$, с помощью многогранников.

Вторая глава диссертации посвящена построению канонических квадратичных форм по линейному приближению системы с матрицей A, имеющей все собственные значения с отрицательной действительной частью и их применению к задачам об оценке решений линейных систем, времени переходного процесса и задаче абсолютной устойчивости систем прямого управления.

В § 1 предлагается следующая каноническая квадратичная форма. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ и $\mu_1, \dots, \mu_{2r}$ все различные, соответственно, вещественные и комплексные собственные значения постоянной квадратной матрицы A размерности $n \times n$.

Пусть величины u_j, $j = \overline{1,s}$, озвачают число клеток Жо рдана матрицы A, отвечающих собственным значениям λ_j, а V_ℓ, $\ell=\overline{1,2r}$, - собственным числам μ_ℓ. Известно, что существуют линейно независимые собственные векторы $h_{j1}, h_{j2}, \ldots h_{ju_j}$, $j=\overline{1,s}$, и $\hat{g}_{\ell 1}, \hat{g}_{\ell 2}, \ldots, \hat{g}_{\ell v_\ell}$, $\ell=\overline{1,2r}$, транспонированной матрицы A' такие, что $A'h_{jk}=\lambda_j h_{jk}, j=\overline{1,s}$, $k=\overline{1,u_j}$, и $A'\hat{g}_{\ell\nu}=\mu_\ell \hat{g}_{\ell\nu}$, $\ell=\overline{1,2r}$, $\nu=\overline{1,V_\ell}$. Положим $\hat{g}_{\ell\nu}=g_{\ell\nu}+i f_{\ell\nu}$, где $g_{\ell\nu}$ и $f_{\ell\nu}$ - вещественные векторы, а i - мнимая единица. Тогда из предидущего следует система:

$$A' g_{\ell\nu} = \alpha_\ell g_{\ell\nu} - \beta_\ell f_{\ell\nu},$$

$$A' f_{\ell\nu} = \beta_\ell g_{\ell\nu} + \alpha_\ell g_{\ell\nu}, \quad \ell=\overline{1,r}, \quad \nu=\overline{1,V_\ell},$$

$$\alpha_\ell = \operatorname{Re}\mu_\ell, \quad \beta_\ell = \operatorname{Im}\beta_\ell.$$

Вводятся в рассмотрение также серии векторов $h_{jk\mu}$ и $g_{\ell\nu\eta}$, удовлетворяющие соотношениям

$$A' h_{jk\mu} = \lambda_j [h_{jk\mu} + h_{jk\mu-1}],$$

$$h_{jk1} = h_{jk}, \quad j=\overline{1,s}, \quad k=\overline{1,u_j} \quad \mu=\overline{2,\tau(jk)}$$

и

$$A' g_{\ell\nu\eta} = \alpha_\ell (g_{\ell\nu\eta} + g_{\ell\nu\eta-1}) - \beta_\ell f_{\ell\nu\eta};$$

$$A' f_{\ell\nu\eta} = \beta_\ell g_{\ell\nu\eta} + \alpha_\ell (f_{\ell\nu\eta} + f_{\ell\nu\eta-1});$$

$$g_{\ell\nu 1} = g_{\ell\nu}, \quad f_{\ell\nu 1} = f_{\ell\nu}, \quad \ell=\overline{1,r}, \quad \nu=\overline{1,V_\ell}, \quad \eta=\overline{2,\omega(\ell\eta)},$$

где $\tau(jk)$ означает размер k-ой клетки Жордана числа λ_j, а $\omega_{\ell\nu}$ - ν-ой клетки Жордана числа μ_ℓ.

Квадратичная форма

$$f(x)=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{u_j}\sum_{\mu=1}^{\tau_{jk}}(h'_{jk\mu}x)^2+\sum_{\ell=1}^{r}\sum_{\nu=1}^{V_\ell}\sum_{\eta=1}^{\omega_{\ell\nu}}\left[(g'_{\ell\nu\eta}x)^2+(f'_{\ell\nu\eta}x)^2\right]$$

называется канонической квадратичной формой.

В § 2 главы П получена оценка решений линейной системы

$$\dot{x} = Ax \ , \ x \in \mathbb{R}^n \ , \qquad /7/$$

путем следующих рассуждений. Пусть $V(x) = x'Bx$, $B' = B$, определенно положительная квадратичная форма, такая, что

$$\dot{V}(x) \le -2\sigma_V V(x) \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n . \qquad /8/$$

Тогда известно, что для всякого решения $x(x_0, t)$ система /7/ обладает свойством:

$$\|x(x_0,t)\|^2 \le \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \|x_0\|^2 e^{-2\sigma_V t} \quad \forall t \ge 0 , \qquad /9/$$

где λ_{max}, λ_{min} - соответственно, наибольшее и наименьшее собственное значение матрицы B .

Теорема 2.1. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - собственные числа матрицы A . Положим $\sigma_0 = -\max\limits_{1 \le j \le n} \operatorname{Re} \alpha_j = -\operatorname{Re} \alpha_{j_0}$.

Тогда для любого $\sigma \in]0, \sigma_0[$ существует функция V , для которой число $\sigma_V = \sigma$ удовлетворяет /8/. Более того, если собственному числу α_{j_0} соответствуют лишь простые клетки Жордана, то существует функция V , такая, что выполняется /8/ для $\sigma_V = \sigma_0$. Обозначим через $T = T(\varepsilon) > 0$ - время, через которое решение системы /7/ будет удовлетворять условию $\|x(x_0,t)\| \le \varepsilon \|x_0\|$ $\forall t \ge T$, $0 < \varepsilon < 1$. В этом случае справедлива оценка времени переходного процесса

$$T(\varepsilon, V) = \frac{1}{2\sigma_V} \ln \left(\frac{\lambda_{max}}{\varepsilon \cdot \lambda_{min}} \right) . \qquad /10/$$

Используя каноническую функцию в завершении этого параграфа строится семейство квадратичных форм, для которого решается задача оптимизации полученных оценок /9/,/10/.

В третьем параграфе главы П исследуется задача абсолютной устойчивости системы прямого управления

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma),\ \sigma = c'x\ ,\ x \in \mathbb{R}^n, \qquad /11/$$

где A - постоянная $n \times n$ -матрица, b, c - постоянные n-векторы; $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет условию $\sigma\varphi(\sigma) > 0 \quad \forall \sigma \neq 0$. Предлагаемый метод иллюстрируется в частном случае, когда матрица A имеет лишь вещественные отрицательные собственные значения с соответствующими кратностями. В данном случае используется каноническая функция и функция Лурье-Постникова

$$v(x) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{u_j} \sum_{\mu=1}^{\tau(jk)} (h'_{jk\mu} x)^2 + \beta \int_0^{\sigma} \varphi(\sigma)\, d\sigma,\ \beta \geq 0 .$$

Получен упрощенный критерий абсолютной устойчивости системы /11/ /в смысле А.М.Летова/, выраженный через параметры.

<u>В третьей главе</u> диссертации исследуется квадратичная система вида

$$\dot{x} = Ax + B(x)x\ ,\ x \in \mathbb{R}^n, \qquad /12/$$

где A - постоянная квадратная гурвицева матрица; $B(x) = \sum_{s=1}^{n} B_s x_s$, B_s - $n \times n$ -матрица с постоянными коэффициентами.

В § 1 этой главы строится алгоритм первого этапа метода наращивания, где в качестве функции Ляпунова выбирается каноническая функция, зависящая от вектора параметров $\sigma \in \mathbb{R}^n$:

$$V(x,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{u_j} \sum_{\mu=1}^{\tau(jk)} \sigma^2_{jk\mu} (h'_{jk\mu} x)^2 + \sum_{\ell=1}^{2} \sum_{\nu=1}^{v_\ell} \sum_{\eta=1}^{\omega(\ell\nu)} \sigma^2_{\ell\nu\eta} [(g'_{\ell\nu\eta} x)^2 + (f'_{\ell\nu\eta} x)^2].$$

Алгоритм включает в себя процедуру оценки области, где $\dot{V}(x) < 0$, с помощью многогранника вида $b'_j(\sigma) x \leq 1,\ j = \overline{1,m}$. В результате дается семейство оценок области притяжения, выраженное неравенством

$$V(x,\sigma) \le r(\sigma), \qquad /13/$$

где $(r(\sigma))^{-1} = \max\limits_{1\le j\le m} (b_j'(\sigma) H^{-1}(\sigma) b_j(\sigma))$, а $H(\sigma)$ - матрица исходной функции Ляпунова. В заключении этого параграфа ставится задача оптимизации оценки /13/ по критерию максимума n -мерного эллипсоида.

В § 2 продолжается построение алгоритма наращивания оценок областей притяжения, полученных на первом этапе в § 1. При этом предлагается три способа преодоления трудностей, возникающих в решении задачи нелинейного программирования /6/. Окончательная оценка области притяжения имеет вид:

$$\begin{cases} V(x,\sigma) \le R, \ (R > r(\sigma)), \\ b_j'(\sigma) x \le 1, \ j \in J. \end{cases} \qquad /14/$$

В § 3 для квадратичной системы /12/ предлагается иной метод оценки области асимптотической устойчивости. Здесь также используется семейство квадратичных форм $V(x) = x'\mathcal{D}(\alpha)x$, $A'\mathcal{D} + \mathcal{D}A = -\Lambda$, $\Lambda = diag(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_n^2)$.

Предлагается процедура поиска оптимальной оценки, основанная на решении специальной задачи на минимакс:

$$\begin{cases} \max\limits_{1\le k\le n} \beta_k(\alpha)\sigma_k^{-2} \xrightarrow[\sigma_k]{} \min, \ k = \overline{1,n}, \\ \sum\limits_j t_{ij}(\alpha)\sigma_j \le \alpha_i^2, \ i = \overline{1,n}, \\ \sigma_j > 0, \ j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad /15/$$

Дано следующее условие разрешимости задачи /15/.

Лемма 3.1. Решение задачи /15/ существует тогда и только тогда, когда можно указать число $\varepsilon_0 > 0$, для которого существует план σ_0, являющийся решением задачи

$$
\begin{cases}
\max \beta_k(\alpha)\sigma_k^{-2} \xrightarrow[\sigma_k]{} \min, \ k=\overline{1,n}, \\
\sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij}(\alpha)\sigma_j \le \alpha_i^2, \ i=\overline{1,n}, \\
\sigma_j \ge \varepsilon, \ j=\overline{1,n},
\end{cases} \qquad /16/
$$

для всех $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. Оптимальные планы задач /15/ и /16/ совпадают.

В диссертации показано, что задача /16/ равносильна следующей задаче линейного программирования

$$
\begin{cases}
\sigma_{n+1} \longrightarrow \min, \\
-\dfrac{\sigma_k}{\sqrt{\beta_k(\alpha)}} \le \sigma_{n+1}, \\
\sum\limits_{j} t_{ij}(\alpha)\sigma_j \le \alpha_i^2, \ i=\overline{1,n}, \\
\sigma_j \ge \varepsilon, \ j=\overline{1,n}.
\end{cases} \qquad /17/
$$

Таким образом, задача об оценке области притяжения системы /12/ может быть сведена к решению специальной задачи линейного программирования /17/, зависящей от векторного параметра $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. В конечном счете оценка области притяжения задается условием

$$
x' \mathcal{D}(\alpha) x \le r(\sigma_0, \alpha), \quad r(\sigma_0, \alpha) = \min_{1\le k\le n} \frac{(\sigma_k^0)^2}{\beta_k(\alpha)},
$$

где σ_k^0 - решение задачи /17/.

Четвертая глава диссертации посвящена исследованию задачи об оценке области асимптотической устойчивости нелинейных систем с голоморфными правыми частями. Вначале / § 1 / предлагается метод аппроксимации области знакоопределенности голоморфной функции многогранником. Он используется в § 2 - § 4 соответственно для решения задач об оценке области притяжения нелинейных систем в некритическом случае и в двух критических случаях одного нулевого корня и двух чисто мнимых корней. Даны иллюстрирующие примеры.

В заключении подчеркнута роль основного результата диссертации. Очерчен круг нерешенных задач, которые могут быть исследованы предлагаемыми в работе методами. Перспективными по мнению автора являются перенесения предложенных подходов на дискретные системы и системы неавтономных дифференциальных уравнений.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

- Исследована геометрическая структура поверхностей уровня определенно положительных функций. Введено понятие поверхности Ляпунова и даны оценки сверху и снизу биффуркационного значения параметра, определяющего "наибольшую" поверхность Ляпунова. Указан алгоритм вычисления наибольшей поверхности Ляпунова для аддитивных определенно положительных функций.
- Предложен метод наращивания областей притяжения, основанный на развитии теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости путем построения аппроксимации области определенной отрицательности производной по времени функции Ляпунова и решении специальной задачи оптимизации теории нелинейного программирования.
- Введено понятие канонической квадратичной формы, с помощью которой дан анализ оценки решений линейных систем и времени переходного процесса. Получен упрощенный критерий абсолютной устойчивости системы "прямого" регулирования в смысле А.М.Летова.
- Предложен эффективный алгоритм поиска оптимальных оценок области асимптотической устойчивости квадратичных систем методом наращивания.
- Указан подход к построению оптимальных оценок области притяжения систем с квадратичными нелинейностями на основе сведения исходной задачи к задаче линейного программирования, зависящей от параметров.
- Предложены методы поиска оптимальных оценок области притяжения голоморфных систем в некритическом случае и в двух критических случаях: одного нулевого корня и пары чисто мнимых корней.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. Калитин Б.С., Третьякова Л.В. Оценка области притяжения в простейших критических случаях// Тезисы докладов Всесоюзной конференции "Метод функций Ляпунова". Харьков, 1986. С.25.

2. Калитин Б.С., Третьякова Л.В. Оценка области притяжения экологической системы Лотки-Вольтерра// Тезисы НТК "Применение вычислительной техники, математических методов и моделирования в автоматизации экспериментальных исследований".Киев,1987.С.45-47.

3. Третьякова Л.В. Оценка области асимптотической устойчивости квадратичных систем// Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук, 1988, № 2. С.117-118.

4. Калитин Б.С., Третьякова Л.В. Оценка области асимптотической устойчивости голоморфных систем// Тезисы НТК "Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях". Киев, 1988. С.152-153.

5. Третьякова Л.В. Оценка области притяжения в критическом случае пары чисто мнимых корней// Лат. матем. ежегодник, 1988, вып. 32. С.230.

6. Калитин Б.С., Третьякова Л.В. Некоторые свойства поверхностей уровня функций Ляпунова// Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук, 1990, № 1. С.114-123.

7. Третьякова Л.В., Хусаинов Д.Я. Анализ построения наилучших оценок решений линейных систем с помощью квадратичных форм. Деп. в Укр. НИИНТИ. 28.03.90. № 545-Ук 90. 16с.

8. Третьякова Л.В. Построение оценок области асимптотической устойчивости квадратичных систем// Вестник Киевского ун-та. Моделирование и оптимизация сложных систем, 1990, № 9. С.75-77.

9. Калитин Б.С., Третьякова Л.В. Методическое пособие по курсу "Теория устойчивости". Минск: Белгосуниверситет,1991. 26с.

Подп.к печ.5.10.92.Формат 60/84/16.Бумага типографская.
Офс.печать.Усл.печ.л.0,93.Уч.-изд.л.0,8.Тираж 100 экз.
Заказ 273.Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики АН Украины
252601 Киев-4,ГСП,ул.Репина,3.