Академія Наук України
Ордена Трудового Червоного Прапора Інститут математики

На правах рукопису
УДК 517.9

Перадзе Джемал Гівійович

Стосовно крайових задач для деяких нелінійних математичних моделей механіки суцільного середовища

01.01.03 - математична фізика

А в т о р е ф е р а т
дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ
1992

Робота виконана в Тбіліському державному університеті ім. І.А.Джавахішвілі.

Офіційні опоненти:

академік Російської АН, доктор фізико-математичних наук, професор І.І.Борович

доктор фізико-математичних наук, професор Ю.А.Дубинський

академік АН України, доктор фізико-математичних наук, професор І.В.Скрипник

Провідна організація - Тбіліський математичний інститут ім. А.М.Размадзе

Захист дисертації відбудеться "17" XI 1992 року на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 Інституту математики АН України за адресою: 252 601, Київ 4, вул. Рєпіна, 3. Початок о 15 годині.

С дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "16" X 1992 року.

Учений секретар ради
доктор фізико-математичних наук, професор

А.Ю.Лучка

Актуальність теми. В роботі досліджується ряд відомих систем диференціальних рівнянь, які описують напружено-деформований стан пластинок та оболонок, а також деякі задачі газової динаміки.

В геометрично-нелінійній теорії пластинок та оболонок головне місце посідає класична модель, побудована на гіпотезах Кірхгофа-Лява, згідно з однією з яких будь-яке волокно, нормальне відносно серединної поверхні до деформації залишається нормальним і після неї. Відповідні до цієї теорії системи диференціальних рівнянь завжди привертали увагу математиків. Існує велика кількість публікацій, книг і статей, в яких висвітлюються питання розв'язуваності крайових задач та збіжності наближених методів для таких систем рівнянь. Передусім належить згадати основоположні работи І.І.Воровича. Грунтовні результати досліджень в цій галузі отримав Н.Ф.Морозов. Визначним є внесок в дослідження проблеми існування рішень крайових задач і обгрунтування наближених методів для рівнянь, виведених на основі гіпотез Кірхгофа-Лява, таких вчених як: С.Н.Волошановська, Ю.А.Дубинський, М.М.Карчевський, Л.П.Лебедев, А.Д.Ляшко, Л.В.Масловська, І.В.Скрипник, І.Д.Чуєшов, I.Hlavaček, J.Kačur, C.H.Knigtly, J.Naumann, P.Rabier та багатьох інших.

В моделі Кірхгофа-Лява ігноруються деформації, зумовлені поперечними силами, а також інерція обертання. Таке ігнорування неприпустиме при вирішенні цілого ряду задач. Відзначені недоліки невластиві теоріям пластинок і оболонок, запропонованим відомими механіками С.П.Тимошенком і Рейсснером. Ці теорії, які будуються на гіпотезі незалежного повороту нормалі, знаходять широкий вжиток. Що стосується виявлення властивостей систем диференціальних рівнянь, які відповідають моделям Тимошенка і Рейсснера, то в монографії І.І.Воровича "Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек", М., Наука, 1989, у розділі "Деякі нерозв'язані питання математичної теорії оболонок" формулюється така проблема: "Побудова математичної теорії крайових задач для варіантів оболонок по типу Тимошенка-Рейсснера, які нарівні з геометричною нелінійністю враховують напругу зсуву. Обгрунтування наближених методів". Якщо лінійні системи

Тимошенка і Рейсснера теоретично і чисельно в деякій мірі вивчені, то відносно якихось результатів для нелінійних задач ще кілька років тому мова не йшлась. І це, незважаючи на те, що зазначені моделі з'явились давно (наприклад, модель Рейсснера в 40-х роках). Таке становище пояснюється саме складною специфікою рівнянь, а не браком уваги до цієї проблеми.

Якщо ми будемо порівнювати зазначені системи Тимошенка і Рейсснера з класичною системою, побудованою на гіпотезах Кірхгофа-Лява, ми виявимо, що в останню входить $\Delta^2 w$ -бігармонічний член відносно однієї з шуканих функцій w, замість нього перші дві системи містять член Δw. Такі обставини дають можливість математику-досліднику кірхгоф-лявовської моделі порівняно легко отримати апріорну оцінку норми функції w у просторі Соболєва $W_2^2(\Omega)$, де Ω - область, яку займає оболонка у плані. Саме ця оцінка є основою багатьох результатів стосовно розв'язуваності відповідних крайових задач і наближених алгоритмів. І, навпаки, член Δw такої можливості не дає в випадку з моделями Тимошенка і Рейсснера (відносно просто отримується оцінка лише в $W_2^1(\Omega)$), і це при тому, що нелінійність в системі Тимошенка достоту така сама, як і в системі Кірхгофа-Лява, а в системі Рейсснера (точніше, в тому варіанті, який тут розглядається) вона ще складніша. Інакше кажучи, як уявляється, виведення достатніх апріорних оцінок для рівнянь Тимошенка і Рейсснера є проблематичним, і, в цьому розумінні, дослідження таких систем слід вважати істотно важчим, ніж дослідження систем теорії, яка будується на гіпотезах Кірхгофа-Лява. В підтвердження складності проблеми відзначимо, що у середині 80-х років в журналах "Дифференциальные уравнения" і "Прикладная математика и механика" з'явилися три статті, в яких досліджувались питання розв'язуваності крайових задач для систем Тимошенка На жаль, всі ці роботи, як ми відзначали, виявились неправильними. Автору дисертації вдалося вперше опрацювати і отримати теореми існування рішення, щоправда, головним чином для просторово-одновимірних нелінійних моделей Тимошенка в 1987 р. і Рейсснера в 1990 р. Деякого успіху в дослідженні таких моделей досяг пізніше його учень В.Ш.Одишарія. Наскільки нам відомо, інших робіт по крайовим задачам для нелінійних моделей Тимошенка і Рейсснера, де враховуються зсув і інерція обертання, до 1991 р. не було. В 1991 році румунський математик М.Туснак отримав результат, підтверджуючий існування локального розв'язку динамічної задачі для одновимірної системи Тимошенка. Певний прогрес, досягнутий у випадку з одновимірними задачами, подає надію, що методи, якими користувались в одновимірних ситуаціях, з часом можуть бути поширені на двовимірні задачі.

Пояснимо, про які одновимірні задачі йде мова. Вони з'являються в результаті відкидання в двовимірних системах диференціальних рівнянь Тимошенка і Рейсснера, в яких шукані функції залежать від аргументів x_1, x_2 (статика) або x_1, x_2, t (динаміка) змінної x_2 разом з супровідними шуканими функціями, а також за рахунок скорочення кількості рівнянь з п'яти до трьох. При цьому структура нелінійності зберігається і тому такі системи уявляють собою інтерес. В зв'язку ж з механічним розумінням одновимірних задач зазначимо, що одновимірними системами описуються аксіальносиметричні деформації. Подібними рівняннями користувались, наприклад, G.Herman, J.Hirsky, а також P.Naghdi, R.Cooper, які вивчали, хоча і в лінійному наближенні, аксіально-симетричні хвильові процеси в оболонках з врахуванням зсуву та інерції обертання.

Ще стосовно однієї некласичної моделі теорії оболонок, яка мала велике поширення. В наукових працях І.Н.Векуа розвинуто варіант лінійної теорії, побудованої на методі розвинення переміщень і напруг в ортогональні ряди Фур'є по многочленам Лежандра відносно нормальної координати. А.Ф.Гюнтнер на основі цієї теорії опрацював геометрично-нелінійну систему диференціальних рівнянь. Лінійна модель Векуа і пов'язані з нею крайові задачі достатньо добре вивчені. З'ясування ж властивостей нелінійних систем Векуа, які мають свою специфіку, тільки почалось. Гадаємо, що перші праці автора в зазначеному напрямку привернуть увагу до цієї проблеми.

Тепер щодо іншої області механіки суцільного середовища - газової динаміки. Однією з важливих моделей в ній є "модель поршня", яка описує велику кількість фізичних процесів. З'ясуванню властивостей розв'язків задачі про поршень допомагають автомодельні розв'язки. В дисертаційній праці пропонується ефективний алгоритм знаходження деяких автомодельних розв'язків.

Ціль роботи: опрацювання підходу для отримання результатів щодо розв'язуваності граничних і початково-крайових задач та доведення збіжності наближених методів для просторово-одновимірних нелінійних систем теорії пластинок і оболонок Тимошенка і Рейсснера, в яких враховуються зсув та інерція обертання; опрацювання підходу для дослідження граничних задач в нелінійній теорії пластинок Векуа; отримання деяких результатів для систем, побудованих на гіпотезах Кірхгофа-Лява; побудування та обгрунтування ефективного наближеного процесу для знаходження деяких автомодельних розв'язків задачі про рух газу під дією поршня; виконання порівняльних розрахунків на електронно-обчислювальній машині.

Наукова новизна полягає:

1. пропонується підхід для дослідження деяких класів нелінійних крайових задач теорії пластинок і оболонок Тимошенка і Рейсснера, які уявляють собою одну з нерозв'язаних математичних проблем в одновимірній постановці. За допомогою цього підходу а) отримані перші результати стосовно проблеми існування розв'язку та збіжності метода Бубнова-Гальоркіна для початково-крайових задач у випадку одновимірної нелінійної системи теорії пластинок і оболонок Тимошенка, яка враховує напругу зсуву, б) отримані перші результати по проблемі розв'язуваності і збіжності метода Бубнова-Гальоркіна для статичних і динамічних одновимірних задач системи диференціальних рівнянь Рейсснера, де приймаються до уваги поряд з геометричною нелінійністю напруги зсуву в тришаровій пластинці;
2. для просторово-двовимірної моделі Тимошенка вивчено питання щодо розв'язуваності крайової задачі при малих вихідних даних;
3. опрацьовано спосіб (на прикладі початково-крайової задачі для моделі Рейсснера) знаходження відтинка часу існування локального розв'язку;
4. отримані перші теореми про існування розв'язку і збіжності

різницевого методу для крайових задач нелінійної теорії пластинок Векуа;

5. поширені деякі результати щодо існування розв'язку і збіжності наближених алгоритмів для пластинок на задачі для оболонок в нелінійній моделі, побудованій на гіпотезах Кірхгофа-Лява;
6. запропоновано і теоретично обгрунтовано більш швидкий порівняно з уживаним чисельний процес знаходження автомодельних розв'язків деяких задач газової динаміки.

Основні результати дисертаційної роботи вперше опубліковані у наукових працях автора.

Апробація роботи. Про деякі результати з дисертаційної теми повідомлялось в зимовій школі по чисельним методам (Юрмала, 1982 р.), на конференції "Методи розв'язання інтегральних, диференціальних і операторних рівнянь" (Тарту, 1987 р.), на конференції "Сучасні проблеми прикладної математики і кібернетики" (Тбілісі, 1987 р.), на семінарі по диференціальним рівнянням в частинних похідних в Московському енергетичному інституті (Москва, 1989 р.), на науковій сесії "Статика і динаміка тонкостінних конструкцій" (Тбілісі, 1990 р.), на всесоюзній конференції "Математичне моделювання: нелінійні проблеми і обчислювальна математика" (Звенигород, 1990 р.), на розширеному засіданні семінару Інституту прикладної математики ім. І.Н.Векуа Тбіліського державного Університету (Тбілісі, 1991 р.).

Повна доповідь дисертаційної роботи відбувалась в 1992 р. на семінарах кафедр теорії пружності Ростовського і Санкт-Петербурзького державних університетів, у Києві та Донецьку на семінарах по диференціальним рівнянням в частинних похідних Інституту математики і Інституту прикладної математики і механіки АН України, на семінарі по диференціальним рівнянням в Московському енергетичному інституті, на семінарі відділу обчислювальної математики ОЦ Російської АН, на семінарі кафедри матзабезпечення ЕОМ Тбіліського державного Університету, на семінарах кафедр обчислювальної математики Казанського і Московського державних університетів, на семінарі відділу математичної фізики Тбіліського математичного інституту АН Грузії.

Публікації. Основні результати викладені в 17 працях.

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з вступу, двох частин і списку літератури. Перша частина об'єднує чотири глави, друга частина складається з однієї глави.

Повний об'єм роботи - 290 сторінок. Вона включає 1 таблицю, 5 малюнків. Бібліографія має 145 назв.

Зміст роботи

Вступ містить виклад проблеми і короткий огляд основних результатів.

Перша частина має назву "Деякі крайові задачі теорії пластинок і оболонок". В ній вивчаються граничні і початково-крайові задачі нелінійних теорій пластинок Тимошенка, Рейсснера і Векуа, а також задачі теорії, побудованої на гіпотезах Кірхгофа-Лява. Кожна глава починається з параграфа, в якому подається коротке виведення диференціальних рівнянь, що відповідають різновиду математичної теорії пластинок і оболонок, яка вивчається в цій главі.

В першій главі разглядаються нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними, які відповідають теорії Тимошенка.

В §1 наводяться основні припущення і система рівнянь цієї теорії.

В §2 аналізуються попередні роботи інших авторів стосовно двовимірної моделі, присвячені питанням розв'язуваності граничних і початково-крайових задач. Вказано на помилки, допущені в розглянутих роботах, які, як виявилось, мають принциповий характер.

В §3 вивчається така статична задача для пластинки: в області Ω з границею $\partial\Omega$ знайти функції u_1, u_2, w від аргументів x_1, x_2, які задовольняють систему рівнянь

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial T}{\partial x_2}+p_1=0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}+p_2=0,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(N_1\frac{\partial w}{\partial x_1}+T\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(T\frac{\partial w}{\partial x_1}+N_2\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)+q=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\frac{\partial H}{\partial x_2}-Q_1=0,$$
$$\frac{\partial H}{\partial x_1}+\frac{\partial M_2}{\partial x_2}-Q_2=0$$

при крайових умовах

$$u_i|_{\partial\Omega}=0, \quad w|_{\partial\Omega}=0, \quad \psi_i|_{\partial\Omega}=0, \qquad i=1,2. \tag{2}$$

Тут

$$N_i=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2+\nu\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2\right]\right\}, \quad T=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right), \quad Q_i=\kappa_0^2\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}+\psi_i\right), \quad M_i=D\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}+\right.$$
$$\left.+\nu\frac{\partial\psi_j}{\partial x_j}\right), \quad i,j=1,2, \quad i\neq j, \quad H=D\,\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right),$$

$p_1=p_1(x_1,x_2)$, $p_2=p_2(x_1,x_2)$, $q=q(x_1,x_2)$ - задані функції, які відповідають зовнішньому навантаженню, h-товщина пластинки, E-модуль пружності, ν-коефіцієнт Пуассона, $0<\nu<\frac{1}{2}$, κ_0^2-коефіцієнт зсуву, $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

Досліджується питання розв'язуваності задач (1), (2). З цією метою пропонується спосіб виділення з вихідної задачі деякого операторного рівняння відносно функції w вигляду $w=\Phi(w)$ з наступним застосуванням ряду властивостей ущільнюючих операторів. Для того, щоб сформулювати результат, потрібні деякі позначення. Під $\left(C^{m,\alpha}(\bar\Omega)\right)^n$ будемо розуміти простір n-вимірних вектор-функцій з компонентами із простору $C^{m,\alpha}(\bar\Omega)$ і нормою $|v|_{1,m,\alpha}=|v_1|_{m,\alpha}+|v_2|_{m,\alpha}+\ldots+|v_n|_{m,\alpha}$ для $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)\in$ $\in\left(C^{m,\alpha}(\bar\Omega)\right)^n$, де $|\omega|_{m,\alpha}=\sum\limits_{|l|=0}^{m}\sup\limits_{x\in\bar\Omega}|D^l\omega(x)|+\sum\limits_{|l|=m}\langle D^l\omega(x)\rangle_{\bar\Omega}^{(\alpha)}$, $x=(x_1,x_2)$, $l=(l_1,l_2)$, $\langle\omega_1\rangle_{\bar\Omega}^{(\alpha)}=\sup\limits_{x,x'\in\bar\Omega}\frac{|\omega_1(x)-\omega_1(x')|}{|x-x'|^\alpha}$.

Запишемо співвідношення

$$\|L^{-1}\|_{1,0,\alpha} \le \gamma_1, \quad \|\Delta^{-1}\|_{0,\alpha} \le \gamma_2, \quad \|(aL-I)^{-1}\|_{1,0,\alpha} \le \gamma_3 \tag{3}$$

для норм операторів, обернених до L, Δ, $aL-I$ при однорідних граничних умовах Діріхле, де використано позначення

$$L = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \mu\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$ - оператор плоскої теорії

пружності, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, I - одиничний оператор, $L^{-1}, (aL-I)^{-1} \in \mathcal{L}((C^{0,\alpha}(\bar\Omega))^2, (C^{2,\alpha}(\bar\Omega))^2)$, $\Delta^{-1} \in \mathcal{L}(C^{0,\alpha}(\bar\Omega), C^{2,\alpha}(\bar\Omega))$, $\lambda = \frac{\nu}{1-\nu^2}$, $\mu = \frac{1}{2(1+\nu)}$, $a = \frac{h^2(1+\nu)}{6K_0^2}$.

Введемо величини:

$$m_1 = \frac{2\gamma_2 S}{(1-\nu)K_0^2}\left(\frac{\gamma_1 S}{1-\nu^2} + \frac{1}{2}\right), \quad m_2 = 1 - \gamma_2 S\left[\frac{2(1+\nu)\|p\|_{1,0,\alpha}}{K_0^2 E h}\left(\frac{\gamma_1}{1-\nu^2}+1\right) + \gamma_3 S\right],$$

$$m_3 = \frac{2\gamma_2(1+\nu)\|q\|_{0,\alpha}}{K_0^2 E h}, \quad m_4 = \frac{\gamma_1 S}{1-\nu^2} + 1, \quad m_5 = \frac{(1-\nu)K_0^2}{2\gamma_2 S} - \frac{\gamma_1\|p\|_{1,0,\alpha}}{Eh},$$

$$\tau_1 = \inf_{\tau \in R}\{\tau\}, \quad \tau_2 = \sup_{\tau \in R}\{\tau\}, \quad R = \{\tau \mid \tau > 0,\ m_1\tau^3 < m_2\tau - m_3\},$$

$$\tau_3 = \frac{-1+\sqrt{1+4m_4 m_5}}{2m_4}, \text{ де } S = \max\left(1, (\operatorname{diam}\Omega)^{1-\alpha}\right), \quad p = (p_1, p_2),$$

і позначимо через $B_n(0,\rho)$ кулю в $(C^{0,\alpha}(\bar\Omega))^n$ з центром в нулі і радіусом ρ.

Т е о р е м а. Припустимо, що

1) $p \in (C^{0,\alpha}(\bar\Omega))^2$, $q \in C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$,
2) Ω - опукла область і $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$,
3) виконуються нерівняння (3),
4) $m_2 > 3m_1^{\frac{1}{3}}\left(\frac{m_3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$,
5) $\tau_1 > \tau_3$.

Тоді задача (1), (2) має розв'язок в $(C^{2,\alpha}(\bar\Omega))^5$, до того же

$(u_1,u_2)\in B_2\left(0, \frac{\gamma_1 s z^2}{1-\nu^2}+\frac{\gamma_1 |p|_{1,0,\alpha}}{Eh}\right)$, $w\in B_1(0,z)$, $(\psi_1,\psi_2)\in$ $\in B_2(0,\gamma_3 s z)$, де $z=\min(z_2,z_3)$.

Відзначимо, що виконання умов 4), 5) забезпечується при достатньо малих p, q, s. Величини z_1 і z_2 можуть бути знайдені за допомогою формули Кардано.

В наведеній теоремі фактично припускається мализна функції q. В наступному §4 для просторово-одновимірного випадку це обмеження вдається зняти. Розглядається динамічна система рівнянь Тимошенка

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N}{\partial x}=0,\\
&\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial Q}{\partial x}-kN-\frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right)+q=0, \qquad (4)\\
&\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial M}{\partial x}+Q=0,
\end{aligned}
$$

в яких шуканими є функції $u=u(x,t)$, $w=w(x,t)$, $\psi=\psi(x,t)$, $0\le x\le l$, $0\le t\le T$, при початково-крайових умовах

$$
\begin{aligned}
&u(0,t)=u(l,t)=0,\quad w(0,t)=w(l,t)=0,\quad M(0,t)=M(l,t)=0,\\
&\frac{\partial^s w(x,0)}{\partial t^s}=w_0^{(s)},\quad \frac{\partial^s\psi(x,0)}{\partial t^s}=\psi_0^{(s)},\qquad s=0,1. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Тут

$$
N=\alpha_0\left[\frac{\partial u}{\partial x}-kw+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],\quad Q=\alpha_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right),\quad M=D\frac{\partial\psi}{\partial x},
$$

задані функції $k=k(x)$, $w_0^{(s)}=w_0^{(s)}(x)$, $\psi_0^{(s)}=\psi_0^{(s)}(x)$, $s=0,1$, $q=q(x,t)$ і додатні постійні ρ, h, D, E, ν, k_0^2, $\nu<\frac{1}{2}$, $\alpha_0=\frac{Eh}{1-\nu^2}$, $\alpha_1=k_0^2\frac{Eh}{2(1+\nu)}$.

Від задачі (4), (5) неважко перейти до наступної

$$
u=\int_0^x\left[k(\xi)w(\xi,t)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w(\xi,t)}{\partial\xi}\right)^2\right]d\xi-\frac{x}{l}\int_0^l\left[k(x)w(x,t)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx,
$$

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left\{\kappa_0^2+\frac{\ell}{(1-\nu)\ell}\int_0^\ell\left[-\kappa(x)w(x,t)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-$$

$$-\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left\{\kappa_0^2\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{2\kappa}{(1-\nu)\ell}\int_0^\ell\left[-\kappa(x)w(x,t)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx\right\}+q=0, \tag{6}$$

$$\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-D\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{Eh\kappa_0^2}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)=0,$$

$$w(0,t)=w(\ell,t)=0,\quad \frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi(\ell,t)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial^s w(x,0)}{\partial t^s}=w_0^{(s)},\quad \frac{\partial^s\psi(x,0)}{\partial t^s}=\psi_0^{(s)},\qquad s=0,1. \tag{7}$$

Заміна задачі (4), (5) на задачу (6), (7) дає можливість отримати такі апріорні оцінки, які ведуть до результату стосовно розв'язуваності задачі. Цього результату ми досягаємо внаслідок певного розвитку одного способу С.І. Похожаєва.

Введемо деякі позначення. Под $\|\cdot\|$ будемо розуміти норму у просторі $L_2(0,\ell)$. Нехай $\mathbf{N}=\{0,1,\ldots\}$ і A -оператор $-\frac{d^2}{dx^2}$ з областями визначення $\mathcal{D}_s(A)=\left\{v(x)\mid v\in W_2^2(0,\ell),\frac{d^s v(0)}{dx^s}=\frac{d^s v(\ell)}{dx^s}=0\right\}, s=0,1.$ Буде потрібна множина

$$H_A=\{(\kappa(x),w_0^{(s)}(x),\psi_0^{(s)}(x),\ s=0,1,\ q(x,t))\mid \kappa(x)\in\mathcal{D}_0(A^m),$$
$$w_0^{(0)}\in\mathcal{D}_0(A^{m+\frac{1}{2}}),\ \psi_0^{(0)}\in\mathcal{D}_1(A^{m+\frac{1}{2}}),\ w_0^{(1)}\in\mathcal{D}_0(A^m),\ \psi_0^{(1)}\in\mathcal{D}_1(A^m),$$
$$q(\cdot,t)\in\mathcal{D}_0(A^m)\ \ \forall m\in\mathbf{N},\ \forall t\in[0,T],\ \|A^m q\|\in L_2(0,T),$$
$$\varliminf m\left(\|A^m w_0^{(1)}\|^2+\|A^{m+\frac{1}{2}}w_0^{(0)}\|^2+\|A^m\psi_0^{(1)}\|^2+\|A^{m+\frac{1}{2}}\psi_0^{(0)}\|^2+\|A^m\kappa\|^2+\right.$$
$$\left.+\int_0^T\|A^m q(x,t)\|^2dt\right)^{-\frac{1}{4m}}>0\ \text{ при }\ m=2^{m_0},\ m_0\to\infty\}.$$

Т е о р е м а. Припустимо, що $(\kappa, w_0^{(s)}, \psi_0^{(s)}, s=0,1,q)\in H_A$ і

$$\frac{\xi \ell \|k\|^2}{(1-\nu)\pi^2 k \delta} < 1. \qquad (8)$$

Тоді існує єдина сукупність функцій $u(x,t), w(x,t), \psi(x,t)$ яка задовольняє умови

$$u(\cdot,t), w(\cdot,t) \in \mathcal{D}_0(A^{m+\frac{1}{2}}), \psi(\cdot,t) \in \mathcal{D}_1(A^{m+\frac{1}{2}}), \frac{\partial u(\cdot,t)}{\partial t}, \frac{\partial w(\cdot,t)}{\partial t} \in$$
$$\in \mathcal{D}_0(A^m), \frac{\partial \psi(\cdot,t)}{\partial t} \in \mathcal{D}_1(A^m) \ \forall m \in N, \ \forall t \in [0,T], A^m u, A^m w,$$
$$A^m \psi \in C^1(0,T; L_2(0,\ell)) \quad \forall m \in N,$$

задовольняють рівняння (6) і умови (7). до того ж похідні $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ і $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ розглядаються в узагальненому розумінні.

Виконуються нерівняння

$$\|A^m \tfrac{\partial u}{\partial t}\|^2 + \|A^{m+\frac{1}{2}} u\|^2 \leq c R_{m+1}, \quad \|A^m \tfrac{\partial w}{\partial t}\|^2 + \|A^{m+\frac{1}{2}} w\|^2 + \|A^m \tfrac{\partial \psi}{\partial t}\|^2 +$$
$$+ \|A^{m+\frac{1}{2}} \psi\|^2 + \int_t^T \left(\|A^m k\|^2 + \|A^m q(x,t_1)\|^2\right) dt_1 \leq c R_m,$$

де

$$R_m = \|A^m w_0^{(1)}\|^2 + \|A^{m+\frac{1}{2}} w_0^{(0)}\|^2 + \|A^m \psi_0^{(1)}\|^2 + \|A^{m+\frac{1}{2}} \psi_0^{(0)}\|^2 + \int_0^T \left(\|A^m k\|^2 + \|A^m q(x,t)\|^2\right) dt,$$

а C - деяка додатна постійна.

Послідовність наближених розв'язків u_n, w_n, ψ_n, де u_n відшукується за формулою

$$u_n = \int_0^x \left[k(\xi) w_n(\xi,t) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_n(\xi,t)}{\partial \xi}\right)^2\right] d\xi - \frac{x}{\ell} \int_0^\ell \left[k(x) w_n(x,t) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_n(x,t)}{\partial x}\right)^2\right] dx,$$

а w_n, ψ_n здобуваються методом Бубнова-Гальоркіна. наближається до розв'язку задачі (6), (7) у просторі $C^1(0,T; L_2(0,\ell))$ разом з $A^{m+\frac{1}{2}} u_n, A^{m+\frac{1}{2}} w_n, A^{m+\frac{1}{2}} \psi_n \ \ \forall m \in N$.

Ще раз відзначимо, що остання теорема справедлива для просторово-одновимірних систем, в ній не потребується мализна q, як в попередній теоремі із §3 для двовимірних задач. Крім того, для пластинки ($k = 0$), як пересвідчуємося, умова (8) виконується. Ще одне зауваження. Виявилось, що в результаті застосування метода Бубнова-Гальоркіна безпосередньо до задачі (4), (5), ми отримуємо умову розв'язуваності вихідної задачі (4), (5). Проте, нам вдалося досягнути цього лише шляхом реалізації дискретного аналога (в гальоркінській системі) переходу до (6),(7).

В кінці глави в §5 подаються міркування з приводу можливого поширення підходу §4 на просторово-двовимірні задачі. Основні труднощі полягають в виведенні аналога першої формули із (6). Це пов'язано з добуттям розв'язку системи рівнянь $L\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}$ в явному вигляді при однорідній умові Діріхле на границі. Тут L -оператор плоскої теорії пружності, а функції f_i деяким чином виражаються через w, $i=1,2$.

<u>Друга глава</u> присвячується системі нелінійних диференціальних рівнянь для тришарової пластинки в теорії Рейсснера (версія Ramachandra-Valsarajan-a).

В §1 подано виведення відповідної системи диференціальних рівнянь. В наступних параграфах розглядаються дві задачі для одновимірної моделі-статики і динаміки.

В обох задачах вжито кілька однакових нерівнянь і позначень. З метою уникнення повторів вони подаються в невеличкому §2, а надалі у разі потреби вживаються посилання. Суть вжитих позначень стає зрозумілою після ознайомлення з постановкою відповідних задач.

Співвідношення, про які йде мова, мають вигляд

$$\frac{(1-\nu)(h_1+h_2)\ell^2}{32h_1}\left(s_1^2+\frac{1}{3}s_2^2\right)<1, \tag{9}$$

де

$$s_m=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{\alpha^2\ell^2+\pi^2}\left(1+\dfrac{\alpha\ell}{\pi}a_m\right) \text{ при } \lambda_m\le 1,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+a_m^2}\right) \text{ при } \lambda_m>1,\end{cases}$$

$$a_m=\frac{1}{\operatorname{th}\alpha\ell}+\frac{(-1)^{m-1}}{\operatorname{sh}\alpha\ell},\quad \lambda_m=\frac{\alpha\ell\left(1+\sqrt{1+a_m^2}\right)}{\pi a_m},\quad m=1,2,$$

і

$$\frac{(1-\nu)(h_1+h_2)\ell^2}{24h_1}s^2<1, \tag{10}$$

де $S = 1 + \frac{\alpha\ell(\operatorname{ch}\alpha\ell + 1)}{\pi \operatorname{sh}\alpha\ell}$.

Задача статики, яка вивчалась в §3, формулюється так: знайти функції $u=u(x)$, $w=w(x)$, $\psi=\psi(x)$, $0\le x\le \ell$, які задовольняють систему рівнянь

$$
\begin{gathered}
N'=0,\\
[(N+M)w'+Q]'-Qw'+q=0, \qquad (11)\\
M'-Q=0
\end{gathered}
$$

і задовольняють умови на границі

$$u(0)=u(\ell)=0,\quad w(0)=w(\ell)=0,\quad \psi(0)=\psi(\ell)=0. \qquad (12)$$

Тут маємо u, w - переміщення вздовж ліній x, z, ψ - функція, що описує зміну положення нормалі відносно серединної поверхні

$$N=\frac{Eh_1}{1-\nu^2}\left[u'+\frac{1}{2}(w')^2\right],\quad M=\frac{Eh_1(h_1+h_2)^2}{4(1-\nu^2)}\psi',\quad Q=\frac{E(h_1+h_2)}{4(1+\nu)}(w'+\psi),$$

$q=q(x)$ - задана функція, яка визначається навантаженням, що прикладається до зовнішніх шарів, h_1, h_2 - товщина зовнішнього і внутрішнього шарів, E - модуль пружності, ν - коефіцієнт Пуассона, $0<\nu<\frac{1}{2}$.

Задача (11), (12) дає можливість виразити u і ψ через w за допомогою співвідношень

$$u=-\frac{1}{2}\int_0^x (w'(\xi))^2 d\xi+\frac{x}{2\ell}\int_0^\ell (w'(x))^2 dx, \qquad (13)$$

$$\psi=\frac{\alpha^2}{\operatorname{sh}\alpha\ell}\left[\operatorname{sh}\alpha(\ell-x)\int_0^x w(\xi)\operatorname{ch}\alpha\xi\, d\xi-\operatorname{sh}\alpha x\int_x^\ell w(\xi)\operatorname{ch}\alpha(\ell-\xi)d\xi\right], \qquad (14)$$

а відносно w виділити самостійну задачу

$$\left[\gamma_0+\gamma_1\int_0^\ell (w'(x))^2dx+\gamma(x,w)\right]w''+\alpha^2\gamma(x,w)+q=0, \qquad (15)$$

$$w(0)=w(\ell)=0, \qquad (16)$$

причому

$$\gamma(x,w)=\gamma_0 w-\gamma_2\left[\operatorname{ch}\alpha(l-x)\int_0^x w(\xi)\operatorname{ch}\alpha\xi\,d\xi+\operatorname{ch}\alpha x\int_x^l w(\xi)\operatorname{ch}\alpha(l-\xi)\,d\xi\right],$$

$$\gamma_0=\frac{E(h_1+h_2)}{4(1+\nu)},\quad \gamma_1=\frac{Eh_1}{2(1-\nu^2)l},\quad \gamma_2=\frac{\alpha E(h_1+h_2)}{4(1+\nu)\operatorname{sh}\alpha l},\quad \alpha^2=\frac{1-\nu}{h_1(h_1+h_2)},\quad \alpha>0.$$

В плані розв'язання вихідної задачі (11), (12) зрозуміло значення задачі (15), (16). Для неї доведена

Т е о р е м а . Припустимо, що $q\in L_2(0,l)$ і виконується (9). Тоді задача (15), (16) має принаймі один узагальнений розв'язок w в $\mathring{W}_2^1(0,l)\cap W_2^2(0,l)$.

Наближений розв'язок може бути знайдено методом Бубнова-Гальоркіна. Сукупність наближених розв'язків w_n має слабку компактність в $\mathring{W}_2^1(0,l)\cap W_2^2(0,l)$. Кожна слабка границя w_n є узагальнений розв'язок задачі (15), (16).

Зауваження 1. В теоремі допускається заміна нерівняння (9) на простішу умову (10). Але при цьому сукупність припустимих параметрів вихідної задачі звужується.

Зауваження 2. Можна пристосувати метод Бубнова-Гальоркіна безпосередньо до задачі (11), (12). Результатом такого підходу і деяких міркувань є теорема про існування розв'язку $u\in\mathring{W}_2^1(0,l)$, $w,\psi\in\mathring{W}_2^1(0,l)\cap W_2^2(0,l)$. Детально цей прийом описується в §5, в якому вивчається динамічна задача для системи Рейсснера.

В §4 для одновимірної моделі Рейсснера ставиться динамічна задача: із системи рівнянь

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N}{\partial x}=0,\\ &\rho h_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[(N+M)\frac{\partial w}{\partial x}+Q\right]+Q\frac{\partial w}{\partial x}=q, \qquad (17)\\ &\frac{\partial M}{\partial x}-Q=0\end{aligned}$$

знайти функції $u=u(x,t)$, $w=w(x,t)$, $\psi=\psi(x,t)$, де x - просторова змінна, $0\le x\le l$, t - час, $0\le t\le T$,

$$N=\frac{Eh_1}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac12\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],\quad M=\frac{Eh_1(h_1+h_2)^2}{4(1-\nu^2)}\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad Q=\frac{E(h_1+h_2)}{4(1+\nu)}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right).$$

Задано функцію $q = q(x,t)$ і додатні параметри ρ, h_1, h_2, E, ν, $\nu < \frac{1}{2}$.

Розв'язок відшукується при таких умовах

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad w(0,t) = w(\ell,t) = 0, \quad \psi(0,t) = \psi(\ell,t) = 0,$$
$$\frac{\partial^m w(x,0)}{\partial t^m} = \varphi_m(x), \qquad m = 0,1, \tag{18}$$

де φ_m - задані функції.

Із (17), (18) виходять формули, які виражають u і ψ через w

$$u = -\frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{\partial w(\xi,t)}{\partial \xi}\right)^2 d\xi + \frac{x}{2\ell}\int_0^\ell \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx,$$
$$\psi = \frac{\alpha^2}{\operatorname{sh}\alpha\ell}\left[\operatorname{sh}\alpha(\ell-x)\int_0^x w(\xi,t)\operatorname{ch}\alpha\xi\, d\xi - \operatorname{sh}\alpha x\int_x^\ell w(\xi,t)\operatorname{ch}\alpha(\ell-\xi)\, d\xi\right], \tag{19}$$

в свою чергу функція w уявляється як розв'язок інтегро-диференціального рівняння

$$\rho h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left[\gamma_0 + \gamma_1 \int_0^\ell \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx + \gamma(x,t,w)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \alpha^2 \gamma(x,t,w) = q, \tag{20}$$

де

$$\gamma(x,t,w) = \gamma_0 w - \gamma_2\left[\operatorname{ch}\alpha(\ell-x)\int_0^x w(\xi,t)\operatorname{ch}\alpha\xi\, d\xi + \operatorname{ch}\alpha x\int_x^\ell w(\xi,t)\operatorname{ch}\alpha(\ell-\xi)\, d\xi\right],$$

причому

$$w(0,t) = w(\ell,t) = 0,$$
$$\frac{\partial^m w(x,0)}{\partial t^m} = \varphi_m(x), \qquad m = 0,1. \tag{21}$$

Значення констант $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \alpha^2$ було подано вище.

Т е о р е м а . Припустимо, що

$$q \in C^1(0,T; L_2(0,\ell)), \quad \varphi_0 \in \mathring{W}_2^1(0,\ell) \cap W_2^2(0,\ell), \quad \varphi_1 \in \mathring{W}_2^1(0,\ell)$$

і виконується (9). Тоді існує постійна $T_0 \in (0,T]$ (яка може бути обчислена) і єдиний розв'язок w на $[0,\ell] \times [0,T_0]$ задачі (20), (21) такий що

$$w \in L_2(0,T_0; \mathring{W}_2^1(0,\ell) \cap W_2^2(0,\ell)), \quad \frac{\partial w}{\partial t} \in L_2(0,T_0; \mathring{W}_2^1(0,\ell)).$$

Наближений розв'язок може бути знайдено методом Бубнова-Гальоркіна. Сукупність наближених розв'язків w_n є слабко компактною в $L_2(0,T_0;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)\cap W_2^2(0,\ell))$. Кожна слабка границя w_n є узагальненим розв'язком задачі (20), (21).

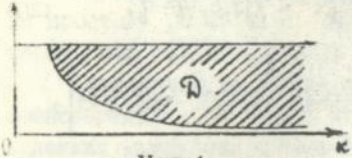
Доведення теореми побудовано на методі компактності (І.І.Ворович, М.І.Вішик, О.А.Ладиженська, Ж.-Л.Ліонс). Як і у випадку з моделлю Тимошенка, вихідна система рівнянь спочатку зведена до певної інтегро-диференціальної системи.

Відносно обчислення T_0. Насправді пропонується спосіб отримання для T_0 оцінки знизу і тому ця оцінка може правити за T_0. Вона уявляє собою

$$\sup_{(\kappa,p)}\Phi(\kappa,p) \tag{22}$$

в області $\mathfrak{D}=\left\{(\kappa,p)\,|\,\kappa>0,\ \frac{f}{\kappa}+\frac{g}{\kappa^2}<p<1\right\}$ (див. мал.1), де

$$\Phi(\kappa,p)=\frac{1}{\kappa}\ln\left\{1+\kappa^2\left[\left(\frac{a}{p^2}+\frac{b\kappa}{p}\right)\left(c+\frac{d}{1-p}+\frac{e\kappa}{\kappa^2p-f\kappa-g}\right)\right]^{-1}\right\},$$



Мал.1

а величини $a, b, c, d, e, f, g>0$ і виражаються через параметри системи (17) і функцію q. В основу способу оцінки T_0 покладена лема Беллмана-Біхарі. Відзначимо, що точка, на якій досягається (22), не лежить на границі $\mathfrak{D}$. Це, зрозуміло, деяким чином полегшує знаходження T_0.

Умову (9) можна замінити простим нерівнянням (10), щоправда, при цьому має місце певна втрата сукупності параметрів, для яких задача є розв'язуваною.

Як у випадку статики, так і динаміки, необов'язково зводити вихідну задачу до інтегро-диференціальної задачі відносно w і формул, котрі виражають решту шуканих функцій через w. На підтвердження сказаного в §5 знову розглядається задача (17), (18). Тепер безпосередньо для нее доводиться результат відносно існування розв'язку. Але для цього усе же таки довелося використать дискретний, гальоркінський, аналог рівняння (20).

Хід міркувань такий. Наближений розв'язок (17), (18)

$$u_n=\sum_{i=1}^{2n}u_{ni}(t)\nu_i,\quad w_n=\sum_{i=1}^{n}w_{ni}(t)\nu_i,\quad \psi_n=\sum_{i=1}^{n}\psi_{ni}(t)\nu_i,\quad \nu_i=\sin\frac{i\pi x}{l},$$

відшукується із системи

$$\left(N_n,\frac{d\nu_j}{dx}\right)=0,\qquad j=1,2,\ldots,2n, \tag{23.1}$$

$$\left(\rho h_1\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}+Q_n\frac{\partial w_n}{\partial x}-q,\nu_j\right)+\left((N_n+M_n)\frac{\partial w_n}{\partial x}+Q_n,\frac{d\nu_j}{dx}\right)=0,\quad j=1,2,\ldots,n, \tag{23.2}$$

$$\left(M_n,\frac{d\nu_j}{dx}\right)+(Q_n,\nu_j)=0,\quad j=1,2,\ldots,n, \tag{23.3}$$

при початкових умовах

$$\frac{\partial^m w_n(x,0)}{\partial t^m}=\varphi_{mn}(x),\qquad m=0,1,$$

де $\varphi_{mn}(x)=\sum_{i=1}^{n}(\varphi_m,\nu_i)\nu_i$, а N_n, M_n, Q_n n- наближення N, M, Q.

Виходячи з (23), можна отримати систему звичайних диференціальних рівнянь тільки відносно $w_{ni}(t)$. Досягається це в два етапи. Спочатку з (23.1) кожна з функцій $u_{nj}(t)$, $j=1,2,\ldots,2n$, виражається через $w_{ni}(t)$, $i=1,2,\ldots,n$, і таким чином із (23.2) усуваються $u_{nj}(t)$. Потім подібне реалізується відносно $\psi_{nj}(t)$, $j=1,2,\ldots,n$. Використовується підсистема (23.3).

Звернімо увагу на те, що в розвиненні u_n в ряд по ν_i потрібно було взято не n, а $2n$ членів. Крім того, для усунення із (23.2) функцій $\psi_{nj}(t)$ доцільно скористатися не формулою

$$\psi_n=-\frac{2d^2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{i\pi l}{d^2l^2+i^2\pi^2}\nu_i\sum_{j=1}^{n}\left[1-(-1)^{i+j}\right]\frac{j}{i^2-j^2}w_{nj}(t), \tag{24}$$

яки виникає безпосередньо з (23.3), а співвідношенням

$$\psi_n=\frac{2d^2}{l}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{j\pi l}{d^2l^2+j^2\pi^2}w_{nj}(t)\left(-\cos\frac{j\pi x}{l}+\frac{\operatorname{sh}d(l-x)+(-1)^j\operatorname{sh}dx}{\operatorname{sh}dl}\right),\nu_i\right)\nu_i,$$

яке є результатом (24).

Із отриманої підсистеми відносно тільки $w_{nj}(t)$, $j=1,2,\ldots,n$, виводиться оцінка $\|w_n\|_2$, за допомогою якої отримуються оцінки для $\|u_n\|_1$, $\|\psi_n\|_2$, де $\|v\|_k^2=\int_0^l\left(\frac{\partial^k v}{\partial x^k}\right)^2dx$.

Т е о р е м а . Припустимо, що

$$q\in C^1(0,T;L_2(0,\ell)),\quad \varphi_0\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)\cap W_2^2(0,\ell),\quad \varphi_1\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)$$

і виконується (9). Тоді існує постійна $T_0\in(0,T]$ (яка може бути обчислена) і розв'язок u, w, ψ на $[0,\ell]\times[0,T_0]$ задачі (17), (18) такий що

$$u\in L_2(0,T_0;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)),\quad w,\psi\in L_2(0,T_0;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)\cap W_2^2(0,\ell)),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}\in L_2(0,T_0;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)).$$

Наближений розв'язок може бути знайдено методом Бубнова-Гальоркіна. Сукупність наближених розв'язків u_n, w_n, ψ_n є слабко компактною в $L_2(0,T_0;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell))\times(L_2(0,T_0;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)\cap W_2^2(0,\ell))^2$. Кожна слабка границя u_n, w_n, ψ_n є узагальненим розв'язком задачі (17), (18) на $[0,\ell]\times[0,T_0]$.

Відзначимо, що рівняння (15) і (20) або близькі до них, наскільки нам відомо, раніше не вивчались.

Третя глава присвячена опрацюванню способів дослідження нелінійних рівнянь теорії пластинок Векуа. Отримані перші результати для цих рівнянь, які, відзначимо, за своєю структурою суттєво відрізняються від рівнянь теорії Тимошенка и Рейсснера.

В §1 наведено постулати теорії, потім в §2 виписується система, яка відповідає задачі статики. Вона має вигляд

$$\begin{gathered}\overset{0}{p}_{11x_1}+\overset{0}{p}_{12x_2}=0,\quad \overset{0}{p}_{21x_1}+\overset{0}{p}_{22x_2}=0,\quad \overset{0}{p}_{31x_1}+\overset{0}{p}_{32x_2}=-f_3,\\ \frac{1}{3}(\overset{1}{p}_{11x_1}+\overset{1}{p}_{12x_2})+\frac{1}{H}(u_{3x_1}\overset{0}{p}_{11}+u_{3x_2}\overset{0}{p}_{12}-\overset{0}{p}_{13})=-f_4,\\ \frac{1}{3}(\overset{1}{p}_{21x_1}+\overset{1}{p}_{22x_2})+\frac{1}{H}(u_{3x_1}\overset{0}{p}_{21}+u_{3x_2}\overset{0}{p}_{22}-\overset{0}{p}_{23})=-f_5.\end{gathered}\tag{25}$$

Тут H – половина товщини пластинки, $\overset{\ell}{p}_{ij3}=\partial\overset{\ell}{p}_{ij}/\partial x_3$, $\overset{\ell}{p}_{ij}=\overset{\ell}{p}_{ij}(x_1,x_2)$ – моменти компонент тензора напруги, $\ell=0,1$, $i,j=1,2,3-\ell$, $i+j\neq 6$, $f_k=f_k(x_1,x_2)$ – задані функції, які виражаються через компоненти векторів зовнішніх поверхневих напруг і об'ємної сили,

$$\overset{0}{p}_{11}=(\lambda+2\mu)u_{1x_1}+\lambda u_{2x_2}-\frac{1}{H}[(\lambda+2\mu)u_4u_{3x_1}+\lambda u_5u_{3x_2}],$$

$$\overset{\circ}{P}_{12}=\overset{\circ}{P}_{21}=\mu\left[u_{1x_2}+u_{2x_1}-\frac{1}{H}(u_4u_{3x_2}+u_5u_{3x_1})\right],$$

$$\overset{\circ}{P}_{22}=\lambda u_{1x_1}+(\lambda+2\mu)u_{2x_2}-\frac{1}{H}\left[\lambda u_4u_{3x_1}+(\lambda+2\mu)u_5u_{3x_2}\right],$$

$$\overset{\circ}{P}_{13}=\overset{\circ}{P}_{31}=\mu\left(u_{3x_1}+\frac{1}{H}u_4\right),\quad \overset{\circ}{P}_{23}=\overset{\circ}{P}_{32}=\mu\left(u_{3x_2}+\frac{1}{H}u_5\right),$$

$$\overset{1}{P}_{11}=(\lambda+2\mu)u_{4x_1}+\lambda u_{5x_2},\quad \overset{1}{P}_{12}=\overset{1}{P}_{21}=\mu(u_{4x_2}+u_{5x_1}),$$

$$\overset{1}{P}_{22}=\lambda u_{4x_1}+(\lambda+2\mu)u_{5x_2},$$

причому λ,μ -постійні Ламе, $u_{k\xi}=\partial u_k/\partial\xi$, $u_k=u_k(x_1,x_2)$-моменти компонент вектора зсуву, $k=1,2,\dots,5$, $\xi=x_1,x_2$. Припустимо, що і надалі у викладенні змісту глави 3 параметр k приймає значення $1,2,\dots,5$.

Розглядається така задача: в області Ω з границею $\partial\Omega$, що відповідає вимогам, при яких можна застосовувати теореми вкладення Соболева, знайти функції $u_k(x_1,x_2)$, які задовольняють систему (25) і умови

$$u_k\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{26}$$

В припущенні, що для області Ω існує функція і тензор Гріна для оператора Лапласа і оператора плоскої теорії пружності при однорідних умовах Діріхле і що $f_i(x_1,x_2)\in L_2(\Omega)$, $i=3,4,5$, доведено існування розв'язку задачі (25), (26) у просторі $(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\cap W_2^2(\Omega))^5$.

В §3 на основі теорії компактної апроксимації операторів Г.М.Вайнікко пропонується спосіб дослідження різницевої схеми для рівнянь Векуа. Розглядається випадок, коли $\Omega=\{x\,|\,x=(x_1,x_2),\ 0\le x_1,x_2\le 1\}$. Будується сітка з кроками h_1,h_2 вздовж осей x_1,x_2. Припустимо, що

$$\bar\Omega_h=\{x\,|\,x=(i_1h_1,i_2h_2),\ i_s=0,1,\dots,N_s,\ N_sh_s=1\},$$

$$\Omega_h=\{x\,|\,x=(i_1h_1,i_2h_2),\ i_s=1,2,\dots,N_s-1,\ N_sh_s=1\},$$

$$\gamma_i=\{x\,|\,x=(x_1,x_2)\in\bar\Omega_h,\ x_i=0 \text{ або } x_i=1,\ 0\le x_j\le 1,\ i\ne j\},$$

$\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$, $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)$ - вектор, координати якого можуть приймати значення ±1. Введемо позначення для сіточних функцій v_k, w_k і сіточних вектор-функцій $y_k=(y_{kk})$, $z_k=(z_{kk})$

$$(v_\ell, w_\ell)_\sigma = ((v_\ell, w_\ell)_{\sigma_1}, 1)_{\sigma_2}, \quad (v_\ell, w_\ell)_{\sigma_i} = \begin{cases} h_i \sum_{j_i=1}^{N_i} v_{\ell j_1 j_2} w_{\ell j_1 j_2} & \text{при } \sigma_i = +1, \\ h_i \sum_{j_i=0}^{N_i-1} v_{\ell j_1 j_2} w_{\ell j_1 j_2} & \text{при } \sigma_i = -1, \end{cases}$$

$$\partial_{\sigma_i} v_\ell = \begin{cases} v_{\ell x_i} & \text{при } \sigma_i = +1, \\ v_{\ell \bar{x}_i} & \text{при } \sigma_i = -1, \end{cases} \qquad (y_\ell, z_\ell) = \sum_k (y_{k\ell}, z_{k\ell}),$$

$$(y_{k\ell}, z_{k\ell}) = \frac{1}{4} \sum_\sigma (y_{k\ell}, z_{k\ell})_\sigma, \quad (y_\ell, z_\ell)_0 = \sum_k \sum_{j_1=1}^{N_1-1} \sum_{j_2=1}^{N_2-1} y_{k\ell j_1 j_2} z_{k\ell j_1 j_2}.$$

Припустимо, що L_ℓ - лінійний простір, визначених на Ω_ℓ сіточних вектор-функцій $y_\ell = (y_{k\ell})$, які перетворюються на нуль на γ. Різницева схема будується методом апроксимації інтегральної тотожності суматорною. Вектор-функцію $u_\ell = (u_{k\ell}) \in L_\ell$ назвемо розв'язком різницевої схеми для задачі (25), (26), якщо виконується

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \sum_\sigma \Big(\lambda\Big[\partial_{\sigma_1} u_{1\ell} + \partial_{\sigma_2} u_{2\ell} - \frac{1}{H} u_{4\ell}\partial_{\sigma_1} u_{3\ell} - \frac{1}{H} u_{5\ell}\partial_{\sigma_2} u_{3\ell}\Big]\Big[\partial_{\sigma_1}\eta_{1\ell} + \partial_{\sigma_2}\eta_{2\ell} - \\
&- \frac{1}{H}\eta_{4\ell}\partial_{\sigma_1} u_{3\ell} - \frac{1}{H}\eta_{5\ell}\partial_{\sigma_2} u_{3\ell}\Big] + \overset{\circ}{p}_{12\ell}\Big[\partial_{\sigma_2}\eta_{1\ell} + \partial_{\sigma_1}\eta_{2\ell} - \frac{1}{H}\eta_{4\ell}\partial_{\sigma_2} u_{3\ell} - \\
&- \frac{1}{H}\eta_{5\ell}\partial_{\sigma_1} u_{3\ell}\Big] + \overset{\circ}{p}_{13\ell}\Big[\partial_{\sigma_1}\eta_{3\ell} + \frac{1}{H}\eta_{4\ell}\Big] + \overset{\circ}{p}_{23\ell}\Big[\partial_{\sigma_2}\eta_{3\ell} + \frac{1}{H}\eta_{5\ell}\Big] + 2\mu\Big[\partial_{\sigma_1} u_{1\ell} - \\
&- \frac{1}{H} u_{4\ell}\partial_{\sigma_1} u_{3\ell}\Big]\Big[\partial_{\sigma_1}\eta_{1\ell} - \frac{1}{H}\eta_{4\ell}\partial_{\sigma_1} u_{3\ell}\Big] + 2\mu\Big[\partial_{\sigma_2} u_{2\ell} - \frac{1}{H} u_{5\ell}\partial_{\sigma_2} u_{3\ell}\Big]\Big[\partial_{\sigma_2}\eta_{2\ell} - \\
&- \frac{1}{H}\eta_{5\ell}\partial_{\sigma_2} u_{3\ell}\Big] + \frac{\lambda+\mu}{3}\Big[\partial_{\sigma_1} u_{4\ell} + \partial_{\sigma_2} u_{5\ell}\Big]\Big[\partial_{\sigma_1}\eta_{4\ell} + \partial_{\sigma_2}\eta_{5\ell}\Big] + \frac{\mu}{3}\Big[\partial_{\sigma_1} u_{4\ell}\partial_{\sigma_1}\eta_{4\ell} + \\
&+ \partial_{\sigma_2} u_{4\ell}\partial_{\sigma_2}\eta_{4\ell} + \partial_{\sigma_1} u_{5\ell}\partial_{\sigma_1}\eta_{5\ell} + \partial_{\sigma_2} u_{5\ell}\partial_{\sigma_2}\eta_{5\ell}\Big], 1\Big) = (f_\ell, \eta_\ell)_0,
\end{aligned} \tag{27}$$

$$f_\ell = (f_{k\ell}) \quad \forall \eta_\ell = (\eta_{k\ell}) \in L_\ell, \quad f_1 = f_2 = 0,$$

де

$$\overset{\circ}{p}_{12\ell} = \mu\Big[\partial_{\sigma_2} u_{1\ell} + \partial_{\sigma_1} u_{2\ell} - \frac{1}{H}\big(u_{4\ell}\partial_{\sigma_2} u_{3\ell} + u_{5\ell}\partial_{\sigma_1} u_{3\ell}\big)\Big],$$

$$\overset{\circ}{p}_{13\ell} = \mu\Big(\partial_{\sigma_1} u_{3\ell} + \frac{1}{H} u_{4\ell}\Big), \quad \overset{\circ}{p}_{23\ell} = \mu\Big(\partial_{\sigma_2} u_{3\ell} + \frac{1}{H} u_{5\ell}\Big).$$

З суматорної тотожності (27) отримуємо систему різницевих рівнянь

$$\Lambda_h u_h = f_h. \tag{28}$$

Припустимо, що $V = V(\Omega)$ означає певний простір вектор-функції $z = (z_k(x_1, x_2))$. Розглядаючи пари кроків $h = (h_1, h_2)$ сітки Ω_h, введемо відображення $p_h : V \to V_h$, де $V_h = V(\Omega_h)$ - простір сіточних вектор-функцій $z_h = (z_{kh})$. Значення k-ої компоненти $p_h z$ визначається так

$$p_h z_k = \begin{cases} \dfrac{1}{h_1 h_2} \displaystyle\int_{-h_1/2}^{h_1/2} \int_{-h_2/2}^{h_2/2} z_k(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\, dy_1\, dy_2 & \text{при } (x_1, x_2) \in \Omega_h, \\ 0 & \text{при } (x_1, x_2) \in \Omega_h. \end{cases}$$

Систему $\{p_h\}$ позначимо через $\mathcal{P}_V$. По визначенню, множина $\{z_h\}$, $z_h \in V_h$, $\mathcal{P}_V$ - збігається до $z \in V$ (іншими словами, z є $\mathcal{P}_V$ - границя $\{z_h\}$), якщо $\|z_h - p_h z\|_{V_h} \to 0$ при $|h| \to 0$. Множину $\{z_h\}$, $z_h \in V_h$, назвемо $\mathcal{P}_V$ - компактним, якщо з будь-якої її безкінечної підмножини можна виділити $\mathcal{P}_V$- збіжну послідовність.

Позначимо $F = L_2(\Omega)$, $F_h = L_2(\Omega_h)$, $U = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$, $U_h = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_h) \cap W_2^2(\Omega_h)$.

Т е о р е м а . Нехай $\|f_h - p_h f\|_{F_h} \to 0$ при $|h| \to 0$, $f_h = (f_{kh}) \in F_h$, $f = (f_k) \in F$ і $f_1 = f_2 = 0$ (пластинка зазнає поперечного згину). Тоді існує таке h_0, що при $|h| \le h_0$ різницева схема (28) має щонайменше один розв'язок $u_h^* = (u_{kh}^*)$ на Ω_h. Множина $\{u_h^*\}$ при $|h| \to 0$ уявляє собою $\mathcal{P}_U$ -компактну множину і її $\mathcal{P}_U$ - границя є розв'язком задачі (25), (26) в U. Зокрема, якщо задача (25), (26) має тільки один розв'язок $u^* = (u_k^*)$, то $\|u_h^* - p_h u^*\|_{U_h} \to 0$ при $|h| \to 0$.

В §4 знову разглядається задача (25), (26). Відповідну систему рівнянь запишемо в операторному вигляді $\Lambda u = f$. Доводиться, що при певних умовах різницева схема (28) збігається зі швидкістю $O(|h|^2)$. До такого результату приходимо внаслідок того, що, як показано, 1) оператор Λ диференцюємо по Фреше в $\forall v=(v_k)\in U$, до того ж $\Lambda'(v): U \to F$, 2) оператор $\Lambda'_k(v_k)$ диференцюємо по Фреше в будь-якій точці U_k, причому $\Lambda'_k(v_k): U_k \to F_k$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta_\varepsilon > 0$, що $\|\Lambda'_k(v_k)-\Lambda'_k(w_k)\|_{F_k}<\varepsilon$ $\forall v_k, w_k\in U_k$ $\forall k>0$, якщо $|v_k-w_k|_{U_k}\le\delta_\varepsilon$, 3) $\|\Lambda_k p_k u^*-f_k\|_{F_k}\to 0$ при $|k|\to 0$, 4) $\Lambda'(u^*)$ - еліптичний оператор, нуль-простір його містить тільки нульовий елемент і стійко $\Lambda'_k(p_k u^*)\to\Lambda'(u^*)$ при $|k|\to 0$.

<u>В четвертій главі</u> поставлено за мету довести розв'язуваність і обгрунтувати уживаність наближених методів для деяких задач теорії оболонок, побудованої на гіпотезах Кірхгофа-Лява.

Як і попередні глави, ця глава починається з короткого опису деяких варіантів моделі і виведення відповідних систем рівнянь. Цьому присвячено §1.

В §2 розглядається питання існування розв'язку крайової задачі для оболонки і збіжності різницевого методу. Застосування методу дослідження, розвинутого в працях А.Д.Ляшка, С.Н.Волошановської і М.М.Карчевського, дало можливість отримать деякі додаткові результати в цьому напрямку.

Сформулюємо задачу. Вона полягає в знаходженні в області Ω з границею $\partial\Omega$ таких функцій $u_1=u_1(x_1,x_2)$, $u_2=u_2(x_1,x_2)$, $w=w(x_1,x_2)$, які задовольняють систему рівнянь

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial T}{\partial x_2}+p_1=0,\\
&\frac{\partial T}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}+p_2=0,\\
&\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x_1\partial x_2}+k_1N_1+k_2N_2+\\
&+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(N_1\frac{\partial w}{\partial x_1}+T\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(T\frac{\partial w}{\partial x_1}+N_2\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)+q=0,
\end{aligned}
\qquad (29)
$$

де

$$N_i=\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-k_iw+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2+\nu\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_j}-k_jw+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2\right]\right\},$$

$$T=\frac{Ed}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right),\quad M_i=-\mathcal{D}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}\right),$$

$i,j=1,2,\ i\neq j,\ H=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2},\ D=\frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}$.
$p_i=p_i(x_1,x_2)$, $q=q(x_1,x_2)$- компоненти зовнішнього навантаження, яке діє на оболонку, $k_i=k_i(x_1,x_2)$- кривини оболонки, ν - коефіцієнт Пуассона, $0<\nu<\frac{1}{2}$, E - модуль пружності, d -товщина, Ω - область, яку займає оболонка у плані, $i=1,2$.

Розглянемо випадок, коли оболонка твердо закріплена по контуру

$$u_i|_{\partial\Omega}=0,\quad w|_{\partial\Omega}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0,\qquad i=1,2, \tag{30}$$

де n - зовнішня нормаль до $\partial\Omega$.

Узагальненим розв'язком задачі (29), (30) назвемо сукупність функцій u_1,u_2,w, $u_1,u_2\in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $w\in\mathring{W}_2^2(\Omega)$, які задовольняють тотожність

$$\int_\Omega\Big[N_1\Big(\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}-k_1\zeta+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial\zeta}{\partial x_1}\Big)+N_2\Big(\frac{\partial\eta_2}{\partial x_2}-k_2\zeta+\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial\zeta}{\partial x_2}\Big)+T\Big(\frac{\partial\eta_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\eta_2}{\partial x_1}+$$
$$+\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial\zeta}{\partial x_1}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial\zeta}{\partial x_2}\Big)-M_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2}-M_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2}-2H\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2}\Big]dx_1dx_2= \tag{31}$$
$$=\int_\Omega(p_1\eta_1+p_2\eta_2+q\zeta)dx_1dx_2\qquad \forall\eta_1,\eta_2\in\mathring{W}_2^1(\Omega),\ \zeta\in\mathring{W}_2^2(\Omega).$$

Норми в соболєвських просторах $\mathring{W}_2^m(\Omega)$ і $\mathring{W}_4^1(\Omega)$ визначаються у такий спосіб $\|v\|_m=\Big(\int_\Omega\sum_{|l|=m}(D^l v)^2dx_1dx_2\Big)^{\frac{1}{2}}$, $m=1,2$, $\|v\|_{1,4}=\Big(\int_\Omega\sum_{|l|=1}(D^l v)^4dx_1dx_2\Big)^{\frac{1}{4}}$. Під $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_{-m}$ маються на увазі норми у просторі $L_2(\Omega)$, $C(\Omega)$ і $W_2^{-m}(\Omega)$, $m>0$. Для вектор-функції $v=(v_1,v_2)$ і цілого m введемо позначення $\|v\|_m^2=\|v_1\|_m^2+\|v_2\|_m^2$.

Т е о р е м а . Нехай границя області Ω така, що справедливі теореми вкладення Соболєва і $p=(p_1,p_2)\in(W_2^{-1}(\Omega))^2$, $q\in W_2^{-2}(\Omega)$, $k_1,k_2\in C(\Omega)$.

Якщо при $t=1$

$$\|p\|_{-1}\leq\frac{Ed}{2c_1^2[2(3-\nu)(1-\nu)]^{\frac{1}{2}}}\Big[\frac{d^2}{6(1+\nu)}-\frac{c_2^2æ^2}{(1-(-1)^t\nu)}-\delta\Big],\quad \delta>0, \tag{32}$$

де $æ=max(\|k_1\|_C,\|k_2\|_C)$, c_1 і c_2 - постійні із нерівнянь

$\|v\|_{1,4} < c_1\|v\|_2,\ |v| \le c_2|v|_2\ \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, то задача (29), (30) має принаймі один узагальнений розв'язок.

Якщо виконується (32) при $t=2$ і нерівняння

$$\frac{1}{8}\left(c_2 \varkappa \nu_0 \|p\|_{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|q\|_{-2}\right)^2 + \nu_0\|p\|_{-1}^2 < \frac{E^2 d^6}{72 c_1^4(1-\nu^2)(1-\nu)(3-\nu)}, \quad (33)$$

де $\nu_0 = \frac{4(1+\nu)}{1-\nu}$, то існує єдиний узагальнений розв'язок.

Наступний результат стосується збіжності різницевої схеми для задачі (29), (30) у випадку, коли Ω - прямокутник. За допомогою суматорної тотожності, яка являє собою дискретний аналог (31), будується система різницевих рівнянь. Доводиться теорема, аналог попередньої, з різницевими подібностями (32), (33) про існування розв'язку різницевої схеми і його єдиність. Визначається швидкість збіжності схеми. Вона дорівнює $O(|h|^2)$.

В §3 розглядається крайова задача для оболонки. Узагальнюється результат Л.В.Масловської, отриманий для пластинок. Для знаходження розв'язку задачі (29), (30), який визначається інтегральним рівнянням (31), використано варіаційно-різницевий метод. Його опис тут не подається. В припущенні, що $p_1 = p_2 = 0$, доводиться

Т е о р е м а . Нехай $k_1, k_2 \in L_p(\Omega)$, $p>2$, $q \in W_2^{-2}(\Omega)$ границя області Ω така, що можна застосувати теореми вкладення Соболєва. Тоді задача (28), (30) має щонайменше один узагальнений розв'язок. Відповідна варіаційно-різницева задача для фіксованих кроків h_1, h_2 має принаймі один розв'язок $S_h = (u_{1h}, u_{2h}, w_h)$. При $h_1, h_2 \to 0$ множина $\{S_h\}$ є слабко компактною в $(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^2 \times \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, тобто з усякої її послідовності можна виділити слабко збіжну підпослідовність. Будь-яка границя такої підпослідовності є узагальненим розв'язком задачі (29), (30).

В §4 вивчається динамічна задача для одного відомого уточненого варіанта теорії оболонок (А.С.Вольмір, W.Flugge). Система диференціальних рівнянь має вигляд

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial(N_1 - k_1 M_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(T_{21} - k_1 H_{21})}{\partial x_2} + p_1,$$

$$\rho h\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=\frac{\partial(T_{12}-k_2H_{12})}{\partial x_1}+\frac{\partial(N_2-k_2M_2)}{\partial x_2}+p_2, \tag{34}$$

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}(H_{12}+H_{21})+k_1N_1+k_2N_2+q.$$

Шуканими є функції u_1, u_2, w - переміщення у напрямках x_1, x_2, z. Кожна з цих функцій залежить від координат x_1, x_2 і аргумента часу t, причому пара (x_1,x_2) належить області Ω з границею $\partial\Omega$, а $t\in[0,T]$. Задані h - товщина оболонки, ρ -густина матеріалу, k_1, k_2 - кривина оболонки, функції p_1, p_2, q -інтенсивність зовнішніх навантажень. Зусилля і моменти виражаються через u_1, u_2, w у такий спосіб

$$N_i=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial u_j}{\partial x_j}-(k_i+\nu k_j)w-\frac{h^2}{12}(k_i-k_j)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}-\frac{k_i^2h^2}{12}(k_i-k_j)w\right],$$

$$T_{ij}=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{h^2}{12}(k_i-k_j)^2\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{h^2}{12}(k_i-k_j)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right],$$

$$M_i=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}+k_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+k_i(k_i-k_j)w\right],$$

$$H_{ij}=-D\frac{1-\nu}{2}\left[2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+k_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-(k_i-2k_j)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right],$$

де $i,j=1,2$, $i\neq j$, відомі E - модуль пружності, ν коефіцієнт Пуассона, $0<\nu<\frac{1}{2}$, $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

Як крайові і початкові розглядаються такі умови

$$u_i\big|_{\partial\Omega}=0,\quad w\big|_{\partial\Omega}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0,\qquad i=1,2,$$

$$\frac{\partial^k u_l}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=f_{lk}(x_1,x_2),\ \frac{\partial^k w}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=\varphi_k(x_1,x_2),\ l=1,2,\ k=0,1, \tag{35}$$

де n - зовнішня нормаль до $\partial\Omega$, f_{lk}, φ_k - задані функції.

Т е о р е м а . Нехай радіус R сферичної або циліндричної оболонки задовольняє нерівняння $R^2/2>C$, де C - постійна із співвідношення $\|\psi\|_{L_2(\Omega)}\leq C\|\psi\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)}$ $\forall\psi\in\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, і границя області Ω така, що справедливими є теореми вкладення Соболева. Припустимо також, що $k_1,k_2\in C(\Omega)$, $p_1,p_2\in L_2(0,T;L_2(\Omega))$, $f_{10},f_{20}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\varphi_0\in\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, $f_{11},f_{21}\in L_2(\Omega)$, $\varphi_1\in W_2^1(\Omega)$.

Тоді існує сукупність функцій u_1, u_2, w, які є розв'язком задачі (34), (35), причому $u_1, u_2 \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $w \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega))$, $\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t} \in L_2(0,T; L_2(\Omega))$, $\frac{\partial w}{\partial t} \in L_2(0,T; W_2^1(\Omega))$.

Доведення теореми побудовано на методі Бубнова-Гальоркіна, який, як показано, збігається.

<u>Друга частина</u> "Деякі крайові задачі газової динаміки" присвячена методу знаходження автомодельних розв'язків деяких нелінійних задач газової динаміки.

Викладенню змісту цієї частини передує короткий опис в §1 математичної моделі тих задач, на які націлено алгоритм. Це задачі про несталий одновимірний рух газу, який виникає під дією поршня при наявності об'ємних джерел (стоків) маси, імпульсу і енергії в газі.

В §2 ставиться початково-крайова задача для автомодельного розв'язку. Вона зараховується до такого класу задач: знайти таке значення параметра λ і таку вектор-функцію $x(\tau) = (x_i(\tau))_{i=1}^n$, $0 \le \tau \le 1$, які задовольняють систему рівнянь

$$x' = f(\tau, x, \lambda) \tag{36}$$

і умови

$$x(0) = \psi(\lambda), \quad x_1(1) = 0, \tag{37}$$

де вектор-функція $f(\tau,x,\lambda) = (f_i(\tau,x,\lambda))_{i=1}^n$ визначена на $[0 \le \tau \le 1] \times \Pi \times [\omega_0 \le \lambda \le \omega_1]$, $\Pi = \prod_{i=1}^n [a_i \le x_i \le b_i]$, а $\psi(\lambda) = (\psi_i(\lambda))_{i=1}^n$ на $[\omega_0 \le \lambda \le \omega_1]^n$.

Задачу (36), (37) запропоновано розв'язувати за допомогою такого ітераційного процесу: виходячи з $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}$, послідовності наближень $\{\lambda^{(k)}\}$, $\{x^{(k)}(\tau)\}$, де $x^{(k)}(\tau) = (x_i^{(k)}(\tau))_{i=1}^n$, будуються по формулам

$$(x^{(k)})' = f(\tau, x^{(k)}, \lambda^{(k)}), \quad x^{(k)}(0) = \psi(\lambda^{(k)}), \qquad k = 1,2,\dots, \tag{38}$$

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \varphi_1^{-1}(\lambda^{(k-1)}, \lambda^{(k)})\,\varphi_1(\lambda^{(k)}), \qquad k = 1,2,\dots . \tag{39}$$

Тут $\varphi_1(\lambda)$ - значення при $\tau = 1$ першої компоненти вектор-функції $\varphi(\tau,\lambda) = (\varphi_i(\tau,\lambda))_{i=1}^n$, яка є розв'язком задачі $x' = f(\tau,x,\lambda)$, $x(0) = \psi(\lambda)$, а $\varphi_1(\lambda^{(k-1)}, \lambda^{(k)}) = (\varphi_1(\lambda^{(k)}) - \varphi_1(\lambda^{(k-1)})) / (\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)})$.

Таким чином, $x^{(k)}(\tau)$ визначаємо, розв'язук и задачу Коші (38), а $\lambda^{(k+1)}$ знаходимо методом хорд (39). Відзначимо, що раніше для розв'язування задачі (36), (37) деякі автори (Х.М.Раслан, A.Pasquali) використовували алгоритм, який відрізняється від (38), (39) тим, що $\lambda^{(k+1)}$ знаходиться методом Ньютона

$$\lambda^{(k+1)}=\lambda^{(k)}-\varphi_1(\lambda^{(k)})/\varphi_1'(\lambda^{(k)}), \qquad k=0,1,\ldots . \quad (40)$$

Ця, на перший погляд, невелика різниця в методах тут надто відчутна. Справа в тім, що на кожному кроці алгоритму, де використовується процес Ньютона, виникає потреба в розв'язуванні двох різних задач Коші (окремо для отримання $\varphi_1(\lambda^{(k)})$ і $\varphi_1'(\lambda^{(k)})$), а не однієї, як у випадку з методом хорд.

В §3 доводиться розв'язуваність задачі (36), (37) і збіжність методу (38), (39). Сформулюємо результат.

Позначимо

$$f_1(\tau,x,y,\lambda_1,\lambda_2)=(f_1(\tau,y,\lambda_2)-f_1(\tau,x,\lambda_1))/(\lambda_2-\lambda_1),$$

$$f_1(\tau,x,y,z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(f_1(\tau,y,z,\lambda_2,\lambda_3)-f_1(\tau,x,y,\lambda_1,\lambda_2))/(\lambda_3-\lambda_1),$$

$$\tau\in[0,1], \quad x,y,z\in\Pi, \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in[\omega_0,\omega_1].$$

Припустимо, що

вектор-функція $f(\tau,x,\lambda)$ неперервна по τ; (41)

існують такі додатні сталі L_i, K, N, $i=1,2$, що

$$\|f(\tau,x,\lambda_1)-f(\tau,y,\lambda_2)\|\leq L_1\|x-y\|+L_2|\lambda_1-\lambda_2|, \quad (42)$$

$\tau\in[0,1]$, $x,y\in\Pi$, $\lambda_1,\lambda_2\in[\omega_0,\omega_1]$;

$$|f_1(\tau,x,y,z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)|\leq K, \quad (43)$$

$\tau\in[0,1]$, $x,y,z\in\Pi$, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in[\omega_0,\omega_1]$;

$$\|\psi(\lambda_1)-\psi(\lambda_2)\|\leq N|\lambda_1-\lambda_2|, \quad (44)$$

$\lambda_1,\lambda_2\in[\omega_0,\omega_1]$;

для довільних $\tau\in[0,1]$ і $\lambda\in[\omega_0,\omega_1]$ має місце $\varphi_i(\tau,\lambda)\in[a_i,b_i]$, $i=1,2,\ldots,n$, і існують такі $\lambda^{(0)},\lambda^{(1)}\in[\omega_0,\omega_1]$, що $\varphi_1(\lambda^{(0)})\neq\varphi_1(\lambda^{(1)})$. (45)

Т е о р е м а . Припустимо, що виконуються умови (41)-(45). Позначимо $\eta=max(|\lambda^{(0)}-\lambda^{(1)}|,|\lambda^{(0)}-\lambda^{(2)}|)$, $D=1/|\varphi_1(\lambda^{(0)},\lambda^{(1)})|$.

Нехай знайдеться така стала q, $0<q<1$, що $D\eta\leq(\sqrt{1+4q}-1)/2$,

$\omega_0+(F-1)/D\leq\lambda^{(0)}\leq\omega_1-(F-1)/D$, де $D=\mu KF$, $F=\sum_{i=0}^{\infty}q^{w_i}$, w_i - число Фібоначчі, $w_0=0$, $w_1=1$, $w_{i+2}=w_i+w_{i+1}$, $i=0,1,\ldots$.

Тоді існує розв'язок задачі (36), (37) $\lambda^*\in[\omega_0,\omega_1]$, $x^*(\tau)\in\Pi$, до якого збігаються наближення процесу (38), (39) при $k\to\infty$, причому

$$|\lambda^{(k)}-\lambda^*|=O(q^{w_{k+1}}),\quad \|x^{(k)}(\tau)-x^*(\tau)\|=O(q^{w_{k+1}}).$$

В зв'язку з тим, що вибір таких початкових наближень $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$ для (39), які забезпечують збіжність, є утрудненим, застосовується ітераційна процедура, яка дає можливість подолати ці труднощі. Вона має вигляд

$$\lambda^{(k+1)}=\lambda^{(k)}-\varphi_1^{-1}(\lambda^{(k-1)},\lambda^{(k)})[\varphi_1(\lambda^{(k)})-\varepsilon_k\varphi_1(\lambda^{(1)})],\qquad k=1,2,\ldots,\quad (46)$$

де

$$\varepsilon_k=max\Big[0,1-\frac{\sqrt{1+4q}-1}{2FK\,max(|\varphi_1(\lambda^{(0)})|,|\varphi_1(\lambda^{(1)})|)}\Big(\varphi_1^2(\lambda^{(k-1)},\lambda^{(k)})+$$
$$+\xi(2-\xi)\sum_{0<i<k}\varphi_1^2(\lambda^{(i-1)},\lambda^{(i)})\Big)\Big],$$

а сталі ξ і R визначаються з нерівнянь

$$0<\xi<\frac{3-\sqrt{5}}{2},\quad \frac{R}{2\xi}(\sqrt{1+4q}-1)<F,\quad \frac{(\sqrt{1+4q}-1)(2-\xi)}{2\xi(1-\xi)}<F,$$
$$|\varphi_1(\lambda^{(0)})-\varepsilon_1\varphi_1(\lambda^{(1)})|<(1-\varepsilon_1)R|\varphi_1(\lambda^{(1)})|.$$

При грубих початкових наближеннях процедура (46) за скінченну кількість кроків приводить до таких наближень, які можуть правити за початкові в процесі (39). Причому, істотне значення має те, що після їх досягнення ітераційна процедура (46) автоматично переходить в процес (39). Доводиться збіжність процедури (46) для рівняння $P(u)=0$, $P:E_n\to E_n$, E_n - евклідів простір n-вимірних векторів. Для методу Ньютона ітераційний процес знаходження початкових наближень досліджувався О.Ю.Кульчицьким і Л.І.Шимілевичем.

В §4 розглядається випадок, коли задача Коші (38) розв'язується наближено. На відрізку $[0,1]$ вводяться вузли $\tau_j=jh$, $h=\frac{1}{2^m}$, $j=0,1,\ldots,2^m$. Вводяться також позначення $\bar{x}^{(k),m}(\tau_j)=(\bar{x}_i^{(k),m}(\tau_j))_{i=1}^{n}$ - точне значення розв'язку задачі (38) при $\tau=\tau_j$, якщо $\lambda^{(k)}$ замінити на $\lambda^{(k),m}$, $\bar{\varphi}_1^m(\lambda^{(k-1)},\lambda^{(k)})=(\bar{x}_1^{(k),m}(1)-\bar{x}_1^{(k-1),m}(1))/(\lambda^{(k),m}-\lambda^{(k-1),m})$, $\tilde{x}^{(k),m}(\tau_j)$-

$=(\tilde{x}_i^{(k),m}(\tau_j))_{i=1}^n$ – наближене значення розв'язку задачі (38) при $\tau=\tau_j$, якщо $\lambda^{(k)}$ замінити на $\lambda^{(k),m}$, $\tilde{\varphi}_1^m(\lambda^{(k-1)},\lambda^{(k)})=(\tilde{x}_1^{(k),m}(1)-\tilde{x}_1^{(k-1),m}(1))/(\lambda^{(k),m}-\lambda^{(k-1),m})$.

$\lambda^{(k+1),m}$ визначається так

$$\lambda^{(k+1),m}=\lambda^{(k),m}-[\tilde{\varphi}_1^m(\lambda^{(k-1)},\lambda^{(k)})]^{-1}\tilde{x}_1^{(k),m}(1), \qquad k=1,2,\ldots,$$
$$\lambda^{(0),m}=\lambda^{(0)}, \quad \lambda^{(1),m}=\lambda^{(1)}.$$

Припустимо, що існують такі додатні сталі M_i, $i=1,2,3,4$, що

$$|f_1(\tau,x,y,\lambda_1,\lambda_2)-f_1(\tau,z,\theta,\lambda_3,\lambda_4)|\le M_1\|x-z\|+M_2\|y-\theta\|+ \tag{47}$$
$$+M_3|\lambda_1-\lambda_3|+M_4|\lambda_2-\lambda_4|,$$

$$\tau\in[0,1], \quad x,y,z,\theta\in\Pi, \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in[\omega_0,\omega_1].$$

Т е о р е м а . Нехай виконуються умови попередньої теореми і (47). Крім того, припустимо, що для $j=0,1,\ldots,2^m$, $k=0,1,\ldots$

$$\|\tilde{x}^{(k),m}(\tau_j)-\bar{x}^{(k),m}(\tau_j)\|\le E_m, \quad |\tilde{\varphi}_1^m(\lambda^{(k-1)},\lambda^{(k)})-\bar{\varphi}_1^m(\lambda^{(k-1)},\lambda^{(k)})|\le\bar{E}_m,$$

де E_m і $\bar{E}_m$ наближаються до 0 при $m\to\infty$.

Тоді для довільної послідовності додатних чисел $\{Q_k\}$, $Q_k\to\infty$ при $k\to\infty$ існує така послідовність номерів $\{m_k\}$, $m_k\to\infty$, що при $m>m_k$

$$|\lambda^{(k),m}-\lambda^{(k)}|<Q_k, \quad \|\tilde{x}^{(k),m}(\tau_j)-x^{(k)}(\tau_j)\|<E_m+LQ_k,$$

де $k=0,1,\ldots$, $\quad j=0,1,\ldots,2^m$, $\quad L=const>0$.

Як показали розрахунки на ЕОМ, результати яких приведені в §5, запронований процес (38), (39) дає результат в середньому в 1,7 рази бистріше, ніж алгоритм (38), (40). Цей факт пояснюється тим, що, як вже відзначалось вище, на кажному кроці ітераційної процедури (38), (40) потрібно розв'язувати дві задачі Коші, а не одну, як у випадку, коли використовуються формули (38), (39). Був також реалізований метод (38), (46). Він давав можливість виходити з таких початкових наближень, які для інших методів не придатні.

Публикации по теме диссертации

1. Перадзе Д.Г. О существовании решения для одной задачи нелинейной теории пластинок // Тр. Тбилис. гос. ун-та, 1983, 236, с.35-46.

2. Перадзе Д.Г. Одно применение теории аппроксимации нелинейных операторов // Тр. Тбилис. гос. ун-та, 1984, 251, с. 212-221.

3. Леванов Е.И., Меладзе Г.В., Перадзе Д.Г., Схиртладзе Н.М., Чантурия А.А. Об одном численном методе нахождения авт - модельных решений некоторых задач газовой динамики // Тр. Инст. прикл. матем. Тбилис. гос. ун-та, 1985, 15, с.250-271.

4. Перадзе Д.Г. Разностная схема для нелинейной задачи об изгибе пластинки // Ж. вычисл. м.тем. и матем. физ., 1986, 26, №2, с. 254-2С2.

5. Перадзе Д.Г. Интегро дифференциальное представление системы одномерных уравнений Тимошенко // Тез. докл. конф. "Методы реш. интегр., дифференц. и оператор. уравн.", Тарту, 1987, с. 31-32.

6. Перадзе Д.Г. Динамическая задача для сферических и цилиндрических оболочек // Дифференц. уравнения, 1987, 23, №6, с.1029-1037.

7. Перадзе Д.Г. По поводу статьи Кириченко В.Ф., Крысько Г.А., Суровой Н.С. "Метод Бубнова-Галеркина в нелинейной теории гибких пологих многослойных ортотропных оболочек" // Прикл. мат. и мех., 1988, 52, вып. 1, с.174-175.

8. Пера зе Д.Г. О решении одной нелинейной краевой задачи теории оболочек вариационно-разностным методом // Тр. Тбилис. гос. ун-та, 1988, 279, с.58-(.).

9. Пера зе Д.Г. Уплотняющий оператор одной системы уравнений и ее разрешимость // Тр. Тбилис. гос. ун-та, 1990, 300, с.88-100.

10. Одишария В.Ш., Перадзе Д.Г. Разрешимость одной задачи о сильном изгибе оболочки и ее сеточная аппроксимация // Сб. докл. науч. сессии "Стат ка и динамика тонкостенных конструкций", Тбилиси, 1990, с.58-59.

11. Перадзе Д.Г. Метод Бубнова-Галеркина для одномерной системы Рейсснера // Изв. высш. учеб. завед. Матем., 1991, №12, с.47-53.

12. Перадзе Д.Г. О решении динамической системы одномерных уравнений Тимошенко // Тр. конф."Современ. пробл. прикл. матем. и киберн.", 21-23 декабря 1987 г., Тбилиси, изд. Тбилис. гос. ун-та, 1991, с.49-52.

13. Перадзе Д.Г. Об обобщенном решении одной задачи для трехслойной пластини // Докл. расшир. засед. семин. Инст. прикл. матем. Тбилис. гос. ун-та, 1991, 6, №3, с.93-96.

14. Перадзе Д.Г., Одишария В.Ш. Разностная схема для задачи о сильном изгибе оболочек // Докл. семин. Инст. прикл. матем. Тбилис. гос. ун-та, (принята к печати), 22, 16 стр.

15. Перадзе Д.Г. К вопросу нахождения отрезка времени существования локального решения одной задачи теории пластинок // Тр. Тбилис. гос. ун-та, (принята к печати), 11 стр.

16. Peradze J.G. The dynamic problem for Reissner's one dimensional system // Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 1991, v.12, N 5 and 6, p.551-562.

17. Перадзе Д.Г. По поводу некоторых работ об уравнениях Тимошенко // Дифференц. уравнения, 1992, 28, №4, с.727-728.

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

УДК 517.9

Перадзе Джемал Гивиевич

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

1992 г.

(на украинском языке)

Печатный л.
учетно-издат. л. 0,87

Бесплатно

заказ 1091 Тираж 100

Типография независимых профсоюзов Грузии, г.Тбилиси,
ул.Грибоедова 19