

Главная астрономическая обсерватория Академии наук Украины

На правах рукописи

УДК 521:528.11:519.24

Джунь Иосиф Владимирович

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА АСТРОНОМИЧЕСКОЙ И КОСМИЧЕСКОЙ
ИНФОРМАЦИИ ПРИ НЕГАУССОВЫХ ОШИБКАХ НАБЛЮДЕНИЙ

Специальность 01.03.01 - астрометрия и небесная механика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

К и е в - 1 9 9 2



00816950 (Т) астрономической обсерватории Академии наук Украины и в Голосеевском научно-исследовательском институте технологии машиностроения Министерства Украины по оборонной промышленности и машиностроению

Официальные оппоненты -

- доктор технических наук, профессор Г.А.Мешеряков,
- доктор физико-математических наук, профессор В.Г.Дегтярев,
- доктор физико-математических наук, С.Г.Валеев

Ведущее учреждение: Институт прикладной астрономии Российской Академии наук

Защита диссертации состоится 5 ноября 1992 г. в 10 часов на заседании специализированного совета Д 016.14.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Главной астрономической обсерватории Академии наук Украины по адресу: 252127, г. Киев, Голосеево, ГАО АН Украины.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГАО АН Украины.

Автореферат разослан " _____ " _____ 1992 г.

Ученый секретарь
специализированного совета,



каandidат физико-математических наук _____ Н.Г.Гусева

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Диссертация посвящена развитию важного и перспективного направления в области теории и практики математической обработки астрономической и космической измерительной информации, связанного с рассмотрением и учетом неклассического характера распределений ошибок высокоточных наблюдений.

Полученные результаты применяются к решению задач астрометрии и, в частности, при изучении вращения Земли.

Актуальность работы. Негауссов характер распределений ошибок огромных массивов современной астрономической измерительной информации обуславливает необходимость применения новых процедур ее математической обработки. В настоящее время такая обработка ведется в основном классическими методами, основанными на гипотезе нормальности, без учета уклонений эмпирических распределений погрешностей от закона Гаусса.

Одной из главных причин отмеченного несоответствия методов обработки реальной метрологической ситуации — отсутствие систематизированного и достаточно полного математического описания основных, проверенных на практике, процедур обработки наблюдений, имеющих негауссовы ошибки. Рекомендации по такой обработке, содержащиеся в математической литературе, имеют, понятно, слишком общий характер, а сведения по этому вопросу в астрометрической литературе — спорадичны, неполны, отрывочны и имеют обычно узкоспециальное применение. Поэтому, предпринятое в диссертации рассмотрение теоретических основ и методов неклассической теории ошибок, учитывающей положительный эксцесс действительных распределений погрешностей, есть давно назревшей проблемой не только в силу повсеместно негауссовых распределений ошибок астрономических наблюдений, но и потому, что несоблюдение на практике фундаментальной гипотезы классической теории ошибок означает необходимость известной эволюции и обобщения ее основных понятий.

Учет негауссового характера распределений ошибок при математической обработке наблюдений сводится, по существу, к учету апостериорных весов. Ряд практиков-астрономов считают их использование не обязательной процедурой. Нужно сказать, что в этом они совершенно правы. Но они не правы, если утверждают, что такие процедуры не следует применять даже при очень больших отклонениях ошибок от закона Гаусса, которые, при нынешних объемах измерительной информации, присущи, примерно, 13% рядам астрономических наблюдений. И вряд ли найдутся астрометристы, которые станут утверждать, что не нужно развивать методы обработки данных или изучать действительные распределения их ошибок. Последняя задача имеет фундаментальное значение и поставлена еще Бесселем, поскольку пересмотр исходной гипотезы о законе распределения ошибок всегда неизбежно влечет за собой и эволюцию методов обработки данных.

В диссертации изложены результаты, полученные автором в 1975-1992 гг. в соответствии с планами выполнения научно-исследовательских работ.

Цель работы: исследование теоретических и прикладных аспектов аппроксимации рядов ошибок астрономических и космических наблюдений негауссовыми вероятностными семействами и использование асимптотически эффективных точечных оценок параметров этих семейств для усовершенствования методов математической обработки данных. Конкретными задачами исследования было:

- анализ эмпирических законов распределения ошибок астрономических наблюдений по опубликованным источникам, начиная от исторических рядов ошибок, рассмотренных Бесселем, и заканчивая обширными современными рядами; (всего около 130 тысяч наблюдений);

- подбор подходящих вероятностных негауссовых форм распределений для аппроксимации ошибок наблюдений, обладающих независимыми параметрами (диагональной матрицей Фелера);

- построение границ неравенства Рао-Крамера для дисперсий оценок параметров аппроксимирующих негауссовых вероятностных семейств;

- испытание алгоритмов эффективного оценивания параметров негауссовых распределений ошибок на основе метода максимального правдоподобия (ММП) и его модификаций;

- обобщение основных понятий классической теории ошибок, таких, как вес измерения и его точность, до понятий весовой функции и энтропийного (информационного) стандарта измерения в случае негауссовых погрешностей;

- рассмотрение порядка использования эффективных точечных оценок параметров негауссовых распределений ошибок (весовых функций) для усовершенствования обработки высокоточных наблюдений (на примере обработки лазерных локаций ИСЗ по программе MERIT и обработки наблюдений времени и широты на астролябии Данжона);

Показано, что распределение Пирсона УП типа, как в теоретическом, так и в прикладном отношении, обладает многими замечательными свойствами: регулярностью, бесконечными ветвями, независимостью параметров, асимптотической эффективностью ММП-оценок; имеет простые аналитические выражения для весовой функции, границ неравенства Рао-Крамера и может составить фундамент неклассической теории ошибок.

Научная новизна определяется следующим. В диссертации впервые:

I. Выполнен анализ закона распределения практически всех опубликованных рядов ошибок астрономических наблюдений, убедительно подтверждавший их фундаментальную особенность - высокозначимый эксцесс (при обычно незначимой асимметрии), который для современных наблюдений изменяется в пределах $0.16 \leq \epsilon \leq 6.00$.

Последнее — одна из основных причин, обуславливающих невыполнение гипотезы нормальности ошибок не только для классических, но и для космических средств наблюдений астрометрического назначения.

2. Установлена теоретическая и практическая пригодность распределения Пирсона II типа для широкого использования не только в астрометрии, но и, вообще, в теории ошибок. Показано его существенное преимущество перед χ^2 -распределением в теоретическом отношении и перед распределением Гаусса, которое способно удовлетворительно аппроксимировать только распределение ошибок с нулевым эксцессом.

3. Показана важность преобразования используемых вероятностных форм аппроксимируемых распределений ошибок к виду, обеспечивающему диагональность информационной матрицы Фейера.

4. Получены значения границ неравенства Рао-Крамера для дисперсий оценок всех параметров распределения Пирсона II типа и рассмотрены вопросы существования таких границ для распределений Пирсона II типа и χ^2 .

5. Предложен простой метод получения ММЭ-оценок параметров негауссовых распределений не требующий дифференцирования функции максимального правдоподобия. Метод позволяет существенно проще осуществлять вычислительные алгоритмы.

6. Найдены аналитические выражения весовых функций распределений Пирсона II и II типов и χ^2 в двух модификациях.

7. Получили практическое применение в астрометрии информационные методы оценки точности астрометрических приборов и систем наблюдений, позволяющие сравнивать на основе энтропийных характеристик, ошибки с самыми большими отклонениями по эксцессу от закона нормального распределения.

8. Найдены аналитические выражения для вычисления энтропий-

ных стандартов распределения Пирсона УП и П типов и L_p , даны формулы для вычисления дисперсий этих оценок.

9. Рекомендована простая формула для оценки эффективности процедуры осреднения многократных наблюдений в зависимости от показателя степени ν распределения Пирсона УП типа.

10. Предложен простой оператор в виде весовой функции распределения для нормирования нестационарной по дисперсии случайной последовательности ошибок наблюдений.

На заметку выносятся:

1. Результаты анализа действительных распределений практически всех опубликованных, а также полученных авторами рядов ошибок астрономических и космических наблюдений, подтверждающих правильность вывода Джеффриса относительно негауссового характера больших массивов ошибок и правомочность использования для их описания распределения Пирсона УП типа. Последнее при описании действительных распределений ошибок высокоточных наблюдений имеет столь всеобщий характер, что можно говорить о появлении новой, специальной области теории ошибок - теории методов математической обработки наблюдений высокой и особо высокой точности. В основу этих методов может быть положена джеффрисовская концепция о пирсоновском УП типа характере распределений ошибок высокоточных наблюдений большого объема, которая, как показано в диссертации, имеет значение не только при обработке гринвичских определений широты, рассмотренных Джеффрисом, но, практически, для любых рядов астрометрических наблюдений.

Показано, что закон Гаусса правомочен при обработке наблюдений небольшого объема n (обычно $n < 500$) и, как правило, при обработке наблюдений средней и технической точности. Наблюдения же высокого качества, обычно отличающиеся большими объемами данных, никогда не следует распределять Гаусса и чаще всего

имеет существенный положительный эксцесс, не свойственный этому распределению. Значение действительного эксцесса распределения ошибок учитывается показателем степени m распределения Пирсона УП типа (или показателем $\chi^2 = 2m - 1$ t -распределения) для распределения Гаусса $m = \infty$, но то, что $m \neq \infty$ обычно становится явным и бесспорным, если число многократных наблюдений $n > 500$.

2. Теория вероятностных негауссовых семейств распределения, используемых в современной астрометрии, с двух точек зрения:

- с точки зрения максимальной простоты их применения, обеспечиваемой, как и в случае закона Гаусса, независимостью оцениваемых параметров распределения (диагональность информационной матрицы Фишера);

- и с точки зрения существования границ неравенства Рао-Крамера для дисперсий оценок параметров используемых вероятностных семейств.

3. Комплекс математического обеспечения процедур обработки данных при негауссовых ошибках астрономических и космических наблюдений, включающий:

- обобщенные формулы центральных моментов для негауссовых вероятностных форм, аппроксимирующих ошибки наблюдений;

- процедуры получения ММП-оценок параметров распределения Пирсона УП и П типов и модифицированных ММП-оценок параметров L_p -распределения;

- построение (и анализ существования) границ информационного неравенства для дисперсий оценок параметров используемых негауссовых вероятностных семейств;

- способ получения весовых функций негауссовых распределений ошибок в параметрическом виде и в виде функции, содержащей второй центральный момент;

- способы информационной теории оценок точности при негауссо-

вых ошибках наблюдений, основанные на использовании вероятностной энтропии распределения ошибок;

- метод использования весового вектора для учета негауссово-го характера остаточных погрешностей (на примере обработки лазерных наблюдений ИСЗ по короткой программе MERIT и наблюдений времени и широты на призменной астролябии Данкона);

4. Результаты сравнительного анализа информационных (энтропийных) и классических оценок точности рядов астрономических наблюдений.

5. Некоторые выводы, вытекающие из отказа от гипотезы всеобщности закона Гаусса и оценка их значимости для теории ошибок и математической статистики в плане перспектив их развития.

Научная и практическая значимость работы.

1. Полученные результаты анализа больших массивов ошибок астрономических и космических наблюдений закладывают основы нового направления в современной теории ошибок — теории ошибок наблюдений высокой и особо высокой точности, которая в принципе есть неклассическая, поскольку основана не на гипотезе нормальности, а на более адекватной действительности гипотезе о пирсоновском УП типа распределении ошибок этих наблюдений. В частном случае, характеризуемемся показателем степени $m = \infty$ для распределения Пирсона УП типа, мы приходим к классическим методам обработки данных.

2. Рассмотрены основные теоретические и прикладные вопросы создания системы математического обеспечения методов обработки данных при негауссовых ошибках астрономических наблюдений

3. Показано возрастающее значение предложенных методов математической обработки при объемах многократных наблюдений $n > 500$, характерных для современных отечественных и международных проектов, а также при измерениях наивысшей точности в

гравиметрии, геодезии, геофизике, метрологии.

Ряд результатов нашел практическое применение в работах других авторов [39,40].

Апробация результатов исследования.

Основные результаты работы докладывались на 23-я Астрометрической конференции СССР (Пулково, 15-23.03.1985); II-я Орловской конференции "Изучение Земли как планеты методами геофизики, геодезии и астрономии (Полтава, 29.09-3.10.1986 г.); на ежегодных заседаниях Научного Совета Института геофизики АН Украины по проблеме "Современная геодинамика и прогноз землетрясения" в 1985-1990 гг., Киев, VII-VII сессии включительно; На совещаниях Комиссии по изучению несприятливых изменения силы тяжести ИГР при Президиуме АН СССР (Москва, ИФЗ АН СССР, 1982-1989 гг.); на научных семинарах в ГАО АН Украины, Киев, 12.01.1991, 12.05.1992 г.

Публикации.

Основные результаты выполненных исследований опубликованы в 11 работе, монографии, 2 работы находятся в печати [1-34].

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка цитируемой литературы из 216 наименований и приложения. Общая объем диссертации - 237 машинописных страниц включая 7 рисунков (7 страниц), 15 таблиц (14 страниц), 3 вехных таблиц Приложения (57 страниц).

II. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ.

Во введении сформулирована цель работы, определены ее задачи, повизна, научная и практическая значимость, перечислены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе дан очерк эволюции представлений о распределении ошибок астрономических наблюдений. Приведены результаты анализа основных особенностей эмпирических распределений ошибок наблюдений по опубликованным источникам, начиная от первых полугистограмм Бесселя и заканчивая обширными современными рядами. В целом, объем анализируемой астрономической и космической измерительной информации составил 107048 наблюдений, а включая гравиметрические и геодезические ряды ошибок — 130200 наблюдений.

Установлено, что наиболее существенной особенностью эмпирических распределений ошибок астрономических наблюдений есть — высокозначимый, как правило, положительный эксцесс, изменяющийся для различных рядов в пределах: $-0.09 \leq \xi \leq 6.00$ (для современных наблюдений: $0.16 \leq \xi \leq 6.00$) и слабая, чаще незначимая, асимметрия (табл. I).

На поле "асимметрия-эксцесс", рис. I [36], известным для вероятностных семейств Пирсона, анализируемые эмпирические распределения не группируются вокруг точки N , соответствующей закону Гаусса, они почти все группируются вдоль линии II, соответствующей распределению Пирсона II типа и имеющему плотность вероятности [46]:

$$y = \frac{c_{vII}}{\sigma_{vII}} \left[1 + \frac{0.5}{M} \left(\frac{x - a_{vII}}{\sigma_{vII}} \right)^2 \right]^{-m} \quad (I)$$

где $m > 0.5$; $c_{vII} = \Gamma(m+1) \left[\sqrt{2\pi(m-0.5)} \Gamma(m+0.5) \right]^{-1}$; $M = \frac{(m-0.5)^3}{m^2}$.

Области распределения Пирсона II типа принадлежит около 96% анализируемых распределений, т.е. вероятность попадания эмпирического распределения в область, непосредственно примыкающей к линии II на рис. I, в 24 раза выше, чем вероятность попадания его в окрестности точки N , соответствующей закону нормального распределения.

Асимметрия и эксцесс распределений ошибок некоторых рядов астрономических и космических наблюдений и разностей широт по опубликованным источникам

№	Объем	Асимметрия	Эксцесс
ря- да :	ряда	$ A \pm \sigma_A$	$\varepsilon \pm \sigma_\varepsilon$
1 :	2	3	4
Наименование ряда, работа	n		

Данные Бесселя, ошибки [35]:

1.	склонения звезд	300	-	$+0.08 \pm 0.28$
2.	прямых восхождения	300	-	$+1.27 \pm 0.28$
3.	абсолютных прямых восхождений	470	-	-0.09 ± 0.23
4.	прямых восхождений Полярной	100	-	$+0.07 \pm 0.49$
5.	Наблюдения прохождения Меркурия по диску Солнца [47]	684	0.24 ± 0.09	$+0.45 \pm 0.19$

Современные наблюдения, ошибки

склонений звезд [38]:

6	зенитная зона $20^0 - 30^0$	1288	0.09 ± 0.07	$+0.58 \pm 0.14$
7	" " $10^0 - 20^0$	1334	0.15 ± 0.07	$+1.45 \pm 0.13$
8	" " $50^0 - 60^0$	1350	0.01 ± 0.07	$+0.42 \pm 0.13$
9	" " $60^0 - 70^0$	1411	0.05 ± 0.07	$+0.20 \pm 0.13$
10	" " $70^0 - 80^0$	1635	0.01 ± 0.06	$+0.16 \pm 0.12$
11	" " $0^0 - 10^0$	1733	0.12 ± 0.06	$+0.59 \pm 0.12$

12.	Разности широт зенит-телескопов Бамберга и Куксона, Мидзусава, 1957-1961 гг. [37]	2127	0.08 ± 0.05	$+0.44 \pm 0.11$
-----	---	------	-----------------	------------------

13.	Ошибки уникальных широтных определений Н.А.Попова, Потава, 1939-1965гг. [41] по наблюдениям яркой звезды ζ U Ma	2880	0.08 ± 0.05	$+0.26 \pm 0.09$
14.	то же, по яркой звезде α Per	2918	0.05 ± 0.05	$+0.16 \pm 0.09$

Продолжение таблицы I

I :	2	3	4	5
15. Разности широт зенит-телескопов Бамберга и Куксона, Мидзусава, 1940-1949 гг. [37]	4008	0.11±0.04	+0.92±0.08	
16. Разности 0-С лазерных наблюдений ИСЗ, короткая программа MERIT, 1983 г. [5]	4475	0.07±0.04	+1.86±0.07	
17. Ошибки определения широты Гринвича в 1927-1931 гг. [45]	4540	-	+1.14±0.07	
18. То же, в 1932-1936 гг. [45]	4810	-	+6.00±0.06	
19. Разности ближайших определений широты, зенит-телескоп Бамберга, Мидзусава, 1957-1961 гг. [37]	6460	0.03±0.03	+0.35±0.06	
20. Разности широт зенит-телескопов Цейсса и Бамберга, Полтава, 1949.9-1954.9 гг. [37]	7057	0.06±0.03	+1.02±0.06	
21. Разности ближайших определений широты, Мидзусава, 1957-1961 гг., фотографическая зенитная труба [37]	7159	0.03±0.03	+1.59±0.06	
22. То же для зенит-телескопа Куксона [37]	8130	0.01±0.03	+0.52±0.05	
23. Остаточные погрешности определения времени и широты на астролябии Данжона, Полтава, 1961-1964 гг. [6]	8823	0.12±0.03	+1.40±0.05	
24. Ошибки Голосеевского каталога звезд широтных программ, Киев, [43]	11691	-	+0.72±0.05	
25. Ошибки оптических наблюдений малых планет 6-9 и 15 [44]	21365	-	+0.76±0.03	

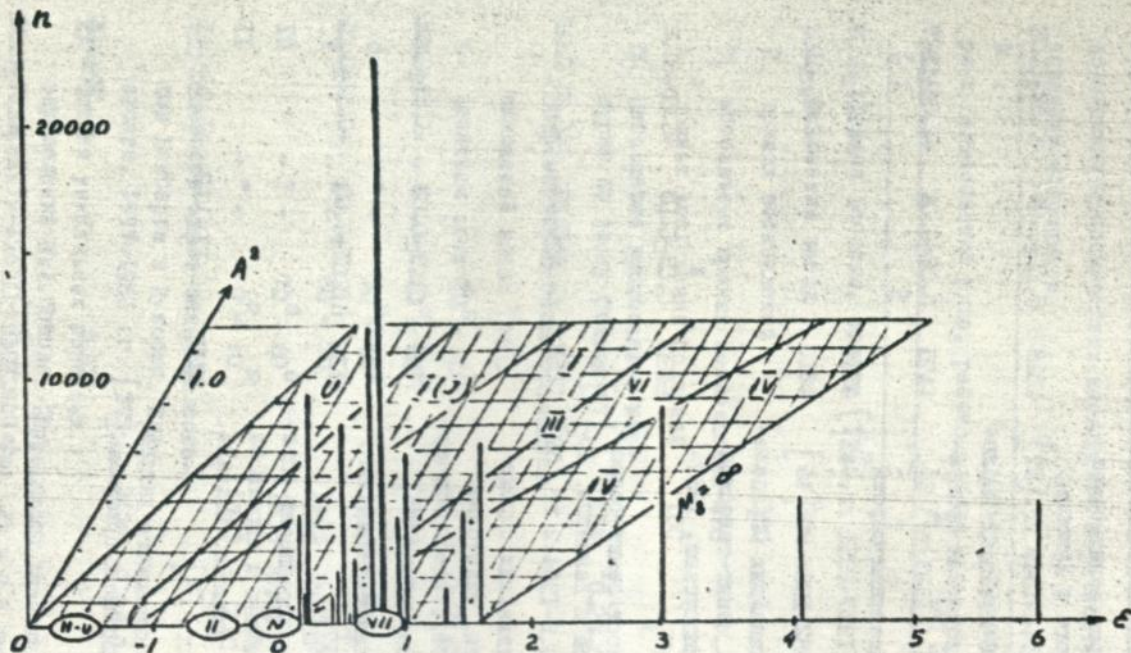


Рис. I. Расположение эмпирических распределений ошибок, разностей широт и уклонений $O-S$ астрономических и космических наблюдений по областям вероятностных семейств Пирсона (по данным табл. I).

Пенту тяжести ованок ϵ , (исключая ряд 25 табл. I, для которого значение ϵ оценено приближенно по значению $\rho = 1,5$ аппроксимирующей L_ρ -кривой), соответствует точка $\epsilon = 1,3$ или $m = 4,8$ для распределения Пирсона III типа. Без учета рядов I7 и I8, рассмотренных Джеффрисом в [45] и отличающихся крайними значениями ϵ , имеем соответственно $\epsilon = 0,86$ и $m = 6,0$.

В астрометрии распространен несколько упрощенный взгляд на причины, обуславливающие положительный эксцесс у эмпирических распределений ошибок, что в определенной мере обусловлено широкой известностью теоремы Эддингтона-Огородникова, согласно которой, суммарная плотность вероятности ошибки x для наблюдений, выполненных в интервале времени $\tau = t_2 - t_1$:

$$y_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} \int_{t_1}^{t_2} \sigma_t^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a_t}{\sigma_t}\right)^2\right] dt, \quad (2)$$

имеет, при $a_t = const$, $\sigma_t \neq const$, положительный эксцесс, каков бы ни был характер изменения σ_t . Из модели (2) следует, что при $a_t = const$, $\sigma_t = const$ (однородная метрологическая ситуация), плотность y_x будет Гауссовой. Однако Джеффрис в [45, 46] сделал совершенно определенный вывод о том, что действительно независимые случайные ошибки при однородных условиях наблюдений имеют $3 < m < 5$, т.е. в среднем $m = 4$, а не $m = \infty$. Для гринвичских широтных определений на зенит-телескопе Куксона, которым, как и многим другим астрономическим наблюдениям, свойственны флуктуации дисперсии, случайные независимые ошибки должны иметь, как полагает Джеффрис, значение m около 2,75. Ряд теоретиков-статистиков также полагают, что в реальных условиях, при измерениях высокого качества, случайные независимые ошибки будут иметь значение $m < 3$ или даже близкое к 2 (Хьюбер, [42]). Хотя большинство анализируемых нами рядов ошибок явно негауссовы,

все же среднестатистическое значение $m = 4,8$, найденное для ошибок астрономических наблюдений, свидетельствует о том, что в целом они более "нормальны", чем это можно было бы ожидать для реальных условий астрономических наблюдений при независимых, случайных ошибках.

Подводя итоги выполненного исследования можно сделать следующий основной вывод - не закон Гаусса, а распределение Пирсона U^m типа лучше аппроксимирует действительные распределения ошибок астрономических и космических наблюдений, так как оно учитывает наиболее существенную их особенность - положительный эксцесс, который не может быть реализован в предположении закона Гаусса, имеющего нулевой эксцесс. Нельзя также говорить о каком-либо "всеобщем" законе распределения ошибок астрономических наблюдений вида (I) с $m = 4,8$. Каждому астрономическому инструменту или методу наблюдений присущ свой индивидуальный эксцесс, который определяется локальными условиями наблюдений, реакцией на них инструмента, квалификацией наблюдателя и условиями прохождения сигнала в атмосфере или космической среде.

Из проведенного исследования вытекает еще один важный вывод, касающийся учета эксцесса при оценках центра распределения. Такой оценкой может быть среднее весовое. Вес измерения можно оценить в первом приближении на основании соотношения [24]:

$$w_i = y' / (y \sigma_i^2), \quad (3)$$

где y - плотность вероятности ошибок; $\sigma_i^2 = x_i - \bar{x}$; \bar{x} - среднее. Значение y/y' в (3) можно получить воспользовавшись дифференциальным представлением вероятностных семейств Пирсона, которое для симметричных распределений имеет вид [36]:

$$y'/y = -\sigma(c_0 + c_2 \sigma^2), \quad (4)$$

где $c_0 = 2M_2(\epsilon + 3)(5\epsilon + 6)$; $c_2 = \epsilon(5\epsilon + 6)$; $M_2 = \sigma^2$ - вто-

рой центральный момент. Подставляя затем (4) в (3) получаем веса наблюдения, как функций от ε и v_i^2 :

$$w_i = (5\varepsilon + 6) [2M_2(\varepsilon + 3) + \varepsilon v_i^2]^{-1}. \quad (5)$$

График весовой поверхности (5) для нормированных значений $\xi_i = (x_i - \bar{x})/\sigma$, представлен на рис. 2, из которого видно, что используемые в настоящее время математические методы обработки астрономической и космической измерительной информации реализуют обычно единственный, несколько упрощенный и далекий от истины вариант: $\varepsilon = 0$. Это не смотря на то, что даже незначительное отклонение ε от нуля в ту или иную сторону, как следует из рис. 2, существенно изменяет веса w_i . Однако классические методы обработки данных, реализующие простейший вариант $\varepsilon = 0$, несколько не утратили своего значения. Они всегда необходимы как предварительный вариант анализа данных в тех случаях, если наблюдений достаточно для того, чтобы уверенно подтвердить неравенство $\varepsilon > 0$. Астрономы обычно игнорируют это последнее обстоятельство надеясь, что и при $\varepsilon > 0$ классические процедуры обработки останутся примерно оптимальными. К сожалению, по единодушному мнению современных теоретиков-статистиков, такие надежды не имеют под собой никакой почвы. Даже безобидные отклонения от идеальной модели часто имеют следствием эффекты гораздо более сильные, чем это можно было предвидеть [42].

Вторая глава диссертации содержит рабочие формулы используемых процедур оценивания параметров негауссовых распределения ошибок методом моментов (ММ-оценки) и методом максимального правдоподобия (ММП-оценки). Изложены способы получения дисперсий оценок используемых параметров в зависимости от метода оценивания. Например, формулы для вычисления дисперсий ММ-оценок параметров распределения (в отличие от рас

АНБ Чл. В. Стафанова
АН УРСР

в астрометрии формул, основанных на гипотезе нормальности) учитывают эксцесс действительных распределений ошибок.

Показана важность использования таких вероятностных форм распределений ошибок, которые имеют некоррелированные параметры или диагональную информационную матрицу Фишера. Например, для матрицы размерности 3×3 имеем

$$\delta_{ij} I_{\theta_i, \theta_j} = \begin{vmatrix} E\left(\frac{\partial^2 \ln y}{\partial \theta_1^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & E\left(\frac{\partial^2 \ln y}{\partial \theta_2^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & E\left(\frac{\partial^2 \ln y}{\partial \theta_3^2}\right) \end{vmatrix}, \quad (6)$$

где E — оператор математического ожидания; θ_i — оценка i -го параметра; δ_{ij} — символ Кронекера. Выполнение условия (6) обеспечивает почти такую же простоту практического использования параметров негауссовых распределений и оценок их надежности, как это имеет место при Гауссовом распределении погрешностей.

Используя известное соотношение

$$\int \left(\frac{\partial \ln y}{\partial \theta_i}\right)^2 y dx = - \int \left(\frac{\partial^2 \ln y}{\partial \theta_i^2}\right) y dx, \quad (7)$$

мы получили границы неравенства Рао-Крамера для дисперсий оценок параметров распределения Пирсона УП типа, а также рассмотрели вопрос о существовании этих границ для распределения Пирсона П типа и L_p . Без существования этих границ невозможен объективный анализ получаемых оценок. Поэтому, в данной главе подробно рассмотрены основные требования, которым должны удовлетворять негауссовы вероятностные семейства для того, чтобы неравенство Рао-Крамера работало. Изложены соображения об учете эксцесса распределения при выборе интервала гистограмм ошибок. Предложено число интервалов гистограммы определять по формуле:

$$z = \sqrt{\frac{n}{2\pi e}} \exp \frac{1}{p}, \quad (8)$$

где n — число наблюдений; p — параметр L_p -распределения, который при эксцессе: $-0.5 \leq \varepsilon \leq 6.0$ с погрешностью не более 0.5%, можно получить по формуле [1]:

$$p = 1,455 \left[\ln \left(\varepsilon + \frac{25}{9} \right) - 0,2939 \right]^{-1} \quad (9)$$

Показано, что формула (8), для среднестатистического значения параметра $p = 1,3$, свойственного ошибкам астрономических наблюдений, приводит к простому правилу $z \approx \sqrt{n}/2$.

Третья глава посвящена вопросам применения математического аппарата главы II непосредственно к каждому типу используемых в диссертации вероятностных семейств негауссовых распределения. Это семейства кривых: Пирсона УП и П типов и L_p .

Для распределения Пирсона УП типа каноническое решение дифференциального уравнения (4), при корнях знаменателя $\beta = i\sqrt{c_0/c_2}$, имеет вид

$$y = \frac{\Gamma(m)}{\sqrt{\pi} \Gamma(m+0,5)} \left[1 + \left(\frac{x - a_{vm}}{\beta} \right)^2 \right]^{-m} \quad (10)$$

Форма (10) имеет недиагональную матрицу Фिशера, например, для элемента

$$I_{\beta, m}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \ln y}{\partial \beta^2 \partial m} y dx = \frac{0,5}{\beta^2 m} \neq 0, \quad (11)$$

т.е. $I_{\beta, m}^2 = 0$ лишь при $m = \infty$ (закон Гаусса). Если положить, что $\beta = f \sigma_{VII}$, где f — некоторая неизвестная функция от m , то легко видеть, что условие (6) выполняется, если в выражении, впервые рассмотренном Диеффрисом [46]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \ln y}{\partial \sigma_{VII}^2 \partial m} y dx = \sigma_{VII}^2 \left(\frac{1}{2m} - \frac{f'}{f} \cdot \frac{m-0,5}{m+1} \right), \quad (12)$$

значение $f'/f = (m+1)/[(m-0.5)2m]$, т.е. когда $f = 0.5(m-0.5)^3 m^{-2}$. Тогда математическая форма распределения Пирсона УП типа, имеющая диагональную информационную матрицу, и впервые предложенная Джеффрисом, запишется в виде

$$y = \frac{c_{v_{II}}}{\sigma_{v_{II}}} \left[1 + \frac{0.5}{M} \left(\frac{x - a_{v_{II}}}{\sigma_{v_{II}}} \right)^2 \right]^{-m} \quad (14)$$

где $c_{v_{II}} = \Gamma(m+1) [\sqrt{2\pi(m-0.5)} \Gamma(m+0.5)]^{-1}$; $M = (m-0.5)^3 m^{-2}$.

Так как форма (14) регулярна, имеет независимые параметры, бесконечно простирающиеся ветви и другие замечательные свойства [3,24], то ММП-оценки параметров этого распределения асимптотически эффективны и имеют дисперсии, равные граничным значениям в неравенстве Рао-Крамера [3]:

$$\sigma_a^2 \geq \frac{\sigma_{v_{II}}^2}{n} \cdot \frac{(m-0.5)^2 (m+1)}{m^3} = K_a \frac{\sigma_{v_{II}}^2}{n}; \quad (15)$$

$$\sigma_c^2 \geq \frac{\sigma_{v_{II}}^2}{2n} \cdot \frac{m+1}{m-0.5} = K_c \frac{\sigma_{v_{II}}^2}{n}; \quad (16)$$

$$\sigma_m^2 \geq \left\{ n \left[\psi'(m-0.5) - \psi'(m) - \frac{m+1}{2m^2(m-0.5)} \right] \right\}^{-1} = \frac{\delta_{1m}}{n} \quad (17)$$

При $m \rightarrow \infty$ $K_a = K_c = 1$ и (15), (16) превращаются в известные классические соотношения. Из-за наличия в (17) тригамма-функция граничу для σ_m^2 получить несколько более сложно, поэтому автором составлена таблица, с помощью которой можно по значениям m быстро найти δ_{1m} , следовательно, использовать распределение Пирсона УП типа с той же степенью простоты, что и распределение Гаусса.

При получении ММ-оценок параметров распределения Пирсона УП типа нами предложена следующая исходная формула центральных, четных моментов порядка $\nu = 2, 4, 6, \dots$ [3]:

$$M_v = \sigma_{\text{III}}^v 2^{\frac{v}{2}} (m-0,5)^{\frac{3v}{2}} m^{-v} \prod_{i=1}^{v/2} \frac{i-0,5}{m-i-0,5} \quad (18)$$

Учитывая (18), получаем эксцесс распределения Пирсона УЧ типа

$$\varepsilon = M_4 / M_2^2 - 3 = 3(m-2,5)^{-1} \quad (19)$$

и МП-оценки его параметров:

$$\bar{a}_{\text{III}} = n^{-1} \sum_{i=1}^z x_i; \quad \bar{\sigma}_{\text{III}}^2 = M_2 \frac{m^2(m-1,5)}{(m-0,5)^3}; \quad \bar{m} = \frac{3}{\varepsilon} + 2,5. \quad (20)$$

Отмечены также неудовлетворительные статистические свойства оценки \bar{m} , поэтому, в качестве первого приближения при решении МП-уравнения рекомендовано применять, вместо оценки \bar{m} в (20), приближение $\bar{m} = 4$. Сами же МП-оценки параметров распределения Пирсона УЧ типа получают из решения следующей системы уравнения:

$$-\frac{\partial \ln L}{\partial a_{\text{III}}} = \frac{m}{M \sigma_{\text{III}}^2} \sum_{i=1}^z n_i R_i^{-1} (x_i - a_{\text{III}}) = 0; \quad (21)$$

$$-\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{\text{III}}} = \frac{n}{\sigma_{\text{III}}} - \frac{m}{M \sigma_{\text{III}}^3} \sum_{i=1}^z n_i R_i^{-1} (x_i - a_{\text{III}})^2 = 0; \quad (22)$$

$$-\frac{\partial \ln L}{\partial m} = n \psi_0 - \sum_{i=1}^z n_i \ln R_i + \sum_{i=1}^z M_i R_i^{-1} \left(\frac{x_i - a_{\text{III}}}{\sigma_{\text{III}}} \right)^2 = 0, \quad (23)$$

где L - функция максимального правдоподобия; $R_i = 1 + \frac{0,5(x_i - a_{\text{III}})^2}{m \sigma_{\text{III}}^2}$;

$\psi_0 = \psi(m+1) - \psi(m+0,5) - [2(m-0,5)]^{-1}$; $M_i = \frac{m^2(m+1)}{2(m-0,5)^v}$;

n_i - число наблюдений в i -том разряде гистограммы; z - общее число разрядов;

После решения системы уравнения (21-23) можно получить, чис-

ленным методом, дисперсии ММП-оценок параметров распределения

(14) на основании соотношения:

$$-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_{\text{вн}}^2} = \sigma_{a_{\text{вн}}}^{-2}; \quad -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_{\text{вн}}^2} = \sigma_{\sigma_{\text{вн}}}^{-2}; \quad -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m^2} = \sigma_m^{-2}. \quad (24)$$

ММП-оценки параметров $a_{\text{вн}}$, $\sigma_{\text{вн}}$, m можно получить шаговым методом непосредственно по функции

$$\ln L = n \ln(a \cdot \sigma_{\text{вн}} \cdot \sigma_{\text{вн}}^{-1}) - m \sum_{i=1}^n n_i \ln R_i, \quad (25)$$

используя в первом приближении оценки для $a_{\text{вн}}$ и $\sigma_{\text{вн}}$ в (20) и следующие интервалы изменения параметров

$$\Delta_a = 0,36/\sqrt{n}; \quad \Delta_{\sigma} = 0,3\sigma/\sqrt{2n}; \quad \Delta_m = 6/\sqrt{n}.$$

Эти интервалы с каждой очередной итерацией уменьшаются на треть, пока не будет получена необходимая точность решения. Дисперсии ММП-оценок в этом случае удобно получить на основании соотношения (15-17).

При математической обработке астрономических наблюдений важное значение имеет весовая функция распределения Пирсона УП типа. Ее можно получить, используя форму (14), на основании соотношения (3):

$$w_i = \left[\left(\frac{m-0,5}{m} \right)^2 \sigma_{\text{вн}}^2 + \frac{\sigma_i^2}{2m} \right]^{-1} \quad (26)$$

Заменяя в (26) $\sigma_{\text{вн}}^2$ на M_2 , вычисляемое по формуле (18), получаем весовую функцию в несколько ином виде:

$$w_i = \left[\frac{m-1,5}{m} M_2 + \frac{\sigma_i^2}{2m} \right]^{-1},$$

где, как и в (26) $\sigma_i = x_i - a_{\text{вн}}$.

В этой же главе всестороннему анализу подвергнуто и распределение Пирсона II типа, которое имеет экспоненциальные пределы

$-1,2 < \xi \leq 0$. Отрицательные эксцессы не характерны для ошибок современных астрономических наблюдений, поэтому, этот тип распределения мы не использовали. Однако, распределения ошибок с небольшими отрицательными эксцессами в астрометрии все же встречаются (табл. I). Распределение Пирсона II типа иногда использовал Диффрис для аппроксимации распределений зависимых ошибок [45]. Поэтому, подробный анализ этого распределения и рассмотрение способов получения ИМ- и ИМП-оценок его параметров мы сочли полезным.

В главе подробно рассмотрены и свойства L_p -распределения, имеющего плотность вероятности

$$y = c_L \sigma_L^{-p} \exp\left(-\frac{1}{p} \left| \frac{x - a_L}{\sigma_L} \right|^p\right),$$

где a_L, σ_L, p - параметры распределения; $c_L = \frac{p^{1-\frac{1}{p}}}{2\Gamma(1/p)}$. L_p -распределение, в зависимости от значения параметра p , располагает эксцессами в пределах от $-1,2$ до ∞ , поэтому, можно с достаточными основаниями считать, что эмпирические распределения ошибок астрономических наблюдений принадлежат к области L_p -семейств. Однако, нерегулярность этого распределения, недиагональность его информационной матрицы и другие его недостатки делают его не вполне конкурентноспособным по отношению к распределению Пирсона III типа. Но все же, в некоторых случаях использовать L_p -распределение бывает очень удобно. В качестве ИМ-оценок параметров L_p -распределения использовались:

$$\bar{a}_L = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \quad \bar{\sigma}_L = M_2^{0,5} p^{-\frac{1}{p}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) / \Gamma\left(\frac{3}{p}\right) \right]^{0,5} = M_2^{0,5} K_L,$$

а оценка \bar{p} находилась по формуле (9) или же, как и коэффициент K_L , по специальным, составленным автором, таблицам. Получены также формулы для вычисления дисперсий ИМ-оценок параметров распределения.

Ввиду неудовлетворительных статистических свойств ИМП-оценок центра L_p -распределения, нами предложены и использовались в де-

свертаны модифицированные ММП-оценки его параметров, получаемые из совместного решения следующей системы уравнений [5]:

$$\sigma_L^{-1} \sum_{i=1}^z n_i |X_i|_{(+)}^{p-1} - \sigma_L^{-1} \sum_{i=1}^z n_i |X_i|_{(-)}^{p-1} = 0;$$

$$\frac{n}{\sigma_L} - \frac{1}{\sigma_L} \sum_{i=1}^z n_i |X_i|^p = 0; \quad (27)$$

$$n(\bar{\rho}^2 + \Delta_{\Delta p}) - \bar{\rho}^2 \sum_{i=1}^z n_i |X_i|^p + \bar{\rho}^{-1} \sum_{i=1}^z |X_i|^p \ln |X_i| = 0,$$

где $X_i = (x_i - a_L) / \sigma_L$; $\Delta_{\Delta p} = -\bar{\rho}^{-2} [\rho + \ln \rho + \psi(1/\bar{\rho})]$; индексы (+) и (-) при $|X_i|$ обозначают соответственно суммы с положительными и отрицательными $x_i - a_L$. Дисперсии оценок, найденных из решения системы (27), получались на основании соотношений, аналогичных формулам (24).

В четвертой главе рассмотрены методы оценки точности астрономических наблюдений, распределение ошибок которых имеет существенные, не равные нулю эксцессы. Эти методы основаны на использовании вероятностной энтропии распределения

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} y \ln y dx, \quad (28)$$

где y - принятый закон плотности распределения ошибок наблюдений. Для закона Гаусса $(0, \sigma_2)$ имеем

$$H = \ln(\sigma_2 \sqrt{2\pi e}). \quad (29)$$

Из (29) следует, что стандарт распределения, определяемый через энтропию H , есть:

$$\sigma_2 = e^H / \sqrt{2\pi e}. \quad (30)$$

Показатель степени H в (30) придает этой формуле особый характер, так как энтропия H есть достаточно совершенной и практически легко находимой мерой, при помощи которой можно сравнивать

распределения с различным эксцессом. Формулу (30) можно рассматривать как обобщение классической меры точности. При гауссовом распределении ошибок σ_3 идентично средней квадратической ошибке, при негауссовом — σ_3 — это стандарт такого нормального распределения, энтропия которого соответствует значению (28).

Энтропийный коэффициент, в отличие от рекомендации, определенной в [40], представлен в виде

$$k = \sigma_3 / \sqrt{\mu_2}. \quad (31)$$

Для закона Гаусса $k = 1$, так как $\sigma_3 = \sqrt{\mu_2}$; для ошибок наблюдений, следующих распределению Пирсона УП типа:

$$\sigma_3 = \sqrt{\mu_2} \frac{\Gamma(m-0,5)}{\Gamma(m)} \sqrt{m-1,5} e^{m[\psi(m)-\psi(m-0,5)]-0,5} = \sqrt{\mu_2} \cdot K_{m3}, \quad (32)$$

где K_{m3} — энтропийный коэффициент распределения, который находится по параметру m в составленной автором таблице. Стандарт σ_3 , значения (32), при наличии МП-оценки для m , есть

$$\sigma_3 = \sigma_3 \cdot \delta_{13} / \sqrt{n}, \quad (33)$$

где $\delta_{13} = m [\psi'(m-0,5) - \psi'(m)]^{0,5}$ находят по параметру m по тем же таблицам.

Аналогично для распределения Пирсона II типа имеем

$$\sigma_3 = \sqrt{\mu_2} \frac{\Gamma(m_n+1)}{\Gamma(m_n+1,5)} \sqrt{m_n+1,5} e^{m_n[\psi(m_n+1,5)-\psi(m_n+1)]-1/2} = \sqrt{\mu_2} \cdot K. \quad (34)$$

Стандарт σ_3 , значения (34) рекомендовано вычислять по формуле:

$$\sigma_3 = \sigma_3 (\sigma_a^{-2} \sigma_{\sigma_a}^2 + \sigma_{23}^2 \cdot \sigma_{m_n}^2)^{0,5}, \quad (35)$$

где $\sigma_{\sigma_a}^2$ и $\sigma_{m_n}^2$ получают на основании соотношений, аналогичных (24), в $\sigma_{23} = m [\psi'(m) - \psi'(m_n+0,5) - 0,5 m^{-1}(m+1,5)/(m+0,5)^2]$.

Для L_p -распределения:

$$\sigma_3 = \rho^{-1} \sqrt{2\pi}^{-1} \left[\Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right) \right]^{1,5} \cdot \left[\Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right) \right]^{-0,5} \cdot \exp\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{M_2} = K_L \cdot \sqrt{M_2}. \quad (36)$$

Если оценки параметров L_p -распределения получены из решения системы уравнения (27), то стандарт значимых σ_3 в (36) :

$$\sigma_{\sigma_3} = \sigma_3 (\sigma_{\beta_2}^{-2} \cdot \sigma_{\beta_2}^2 + \sigma_{\beta_p}^2)^{0,5}; \quad \sigma_{\beta_3} = -\rho^2 [\ln \rho + \rho + \psi(\frac{1}{\rho})]. \quad (37)$$

Если оценки параметров β_2 и ρ получены методом моментов, то дисперсии $\sigma_{\beta_2}^2$ и $\sigma_{\beta_p}^2$ в (37) находят из соотношений:

$$\sigma_{\beta_2}^2 = \beta_2^{-2} (M_2^{-1} \sigma_{\beta_2}^2 + \Delta_{\beta_1 \rho}^2 \cdot \sigma_{\beta_p}^2); \quad \sigma_{\beta_p}^2 = \beta_2^{-2} \beta_2^{-2} \Delta_{\beta_1 \rho}^2, \quad (38)$$

где $\sigma_{\beta_2}^2 = (\beta_2 - 1) n^{-1} M_2 / 4$; $\Delta_{\beta_1 \rho}^2 = \rho^2 [\frac{3}{2} \psi(\frac{3}{\rho}) - \frac{1}{2} \psi(\frac{1}{\rho}) + \ln \rho - 1]$;

$\sigma_{\beta_p}^2 = \frac{\pi^2 (n-1)^2 \beta_{1\rho}}{(n-2)(n-3)(n+3)(n+5)n}$; $\Delta_{\beta_1 \rho}^2 = \rho^2 [5\psi(\frac{5}{\rho}) + \psi(\frac{1}{\rho}) - 6\psi(\frac{3}{\rho})]$;

$$\beta_2 = M_4 / M_2^2; \quad \beta_{1\rho} = \frac{\Gamma(\frac{9}{\rho}) [\Gamma(\frac{1}{\rho})]^3}{[\Gamma(\frac{3}{\rho})]^4} - 4\beta_2 \frac{\Gamma(\frac{7}{\rho}) [\Gamma(\frac{1}{\rho})]^2}{[\Gamma(\frac{3}{\rho})]^3} + \beta_2 (4\beta_2 - 1).$$

Значение $\beta_{1\rho}$ находят по параметру ρ в таблицах, приведенных в приложениях к диссертации.

Глава IV заканчивается рассмотрением некоторых парадоксов классической теории ошибок с точки зрения информационных подходов к оценкам точности астрономических инструментов.

Пятая глава посвящена приложениям развиваемых методов к решению задач математической обработки некоторых рядов современных астрономических и космических наблюдений. Последние представлены лазерными наблюдениями ИСЗ, выполненными с целью определения параметров вращения Земли по короткой программе MERIT. Ценность этих наблюдений, в аспекте рассмотренных нами методов анализа данных, не только в основательной и тщательной подготовке систем наблюдений к работе, а, прежде всего, в очень большом числе многократных измерений по каждой дуге, достаточных для того, чтобы подтвердить негауссовый характер остаточных погрешностей.

Эти погрешности были предоставлены автору в ГАО Украины. Были построены гистограммы разностей 0-С для шести дуг наблюдений и отдельно - для всего массива 0-С. В табл. 2 приведены значения моментных отношений $\beta_1 = A^2$ и $\beta_2 = \varepsilon + 3$ для каждой гистограммы и оценки параметров аппроксимирующих распределения: Гаусса (a, b) , Пирсона УП типа $(a_{\text{ин}}, b_{\text{ин}}, m)$, L_p -распределения (a_2, b_2, p) , а также значения критерия χ^2 , число его степеней свободы Z_v и вероятности P_{χ^2} того, что полученная гистограмма есть выборкой из генеральной совокупности с данным законом распределения.

Как видим из табл. 2, асимметрия анализируемых эмпирических распределений весьма слаба, но их эксцесс, за исключением распределения 5, в остальных случаях существенно больше нуля. Полученные ММП-оценки параметров распределения Пирсона УП типа и модифицированные ММП-оценки параметров L_p -распределения позволяют найти вероятности $P_{\chi^2}^r$ и $P_{\chi^2}^{wi}$, которые показывают, что в целом распределение Пирсона УП типа предпочтительней L_p -распределения. Однако, не это обстоятельство есть главным доводом в пользу кривой Пирсона УП типа, а то, что при $p \leq 1$ на основе L_p -распределения практически нельзя построить удовлетворительную оценку центра распределения из-за совершенно нерезких весов наблюдений в окрестности точки a_2 . Отмеченным недостатком не страдает распределение Пирсона УП типа.

Для того, чтобы учесть весьма существенные отклонения распределения остатков 0-С от закона Гаусса при математической обработке лазерных наблюдений ИСЗ, предложено осуществлять ее в два этапа. Сначала выполняем обработку наблюдений классическим методом и получаем для каждого уравнения погрешностей остаточную ошибку \mathcal{L}_i , т.е.:

$$\mathcal{L}_i = \alpha_i \beta_i + \mathcal{L}_i, \quad (39)$$

где L_i - наблюдаемые дальности до ИСЗ; α_{ij} - известные постоянные коэффициенты; β_j - искомые поправки. Затем исследуется закон распределения остатков \mathcal{V}_i . Для тех дуг наблюдений, по которым распределения остатков имеет положительный эксцесс, начинается второй этап обработки, который сводится к следующему:

- получение ИМП-оценок параметров распределения Парсона УП типа для этих остатков;

- вычисление весов остатков \mathcal{V}_i по формуле (26);

- решения системы (39), нормированной весами (26):

$$L_i w_i^{0.5} = \alpha_{ij} \beta_j' w_i^{0.5} + \mathcal{V}_i w_i^{0.5}, \quad (40)$$

при условии $\sum_{i=1}^n \rho w_i^2 = \min$, которое можно представить в виде:

$$\beta_j' = D_j / D; \quad \sigma_{\beta_j}^2 = \sigma^2 A_{jj} / D, \quad (41)$$

где $\sigma_{\beta_j}^2$ - оценки дисперсий искомых поправок; κ - их число; D , D_j - соответственно определители системы нормальных уравнений и j -той поправки; $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 w_i / (n - \kappa)$; A_{jj} - миноры соответствующих диагональных элементов системы нормальных уравнений. Не задаваясь целью новой переобработки наблюдений по короткой программе MERIT, с учетом полученных данных о законе распределения разностей \mathcal{V}_i , оценим лишь в качественном отношении, как учет параметра m повлияет на дисперсии оценки центра распределения. Так как среднее \bar{x} из n значений \mathcal{V}_i имеет дисперсию m_2/n при любом законе распределения, то учитывая (18), имеем:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma_w^2 \cdot n^{-1} (m + 0,5)^2 m^{-2} (m - 1,5)^{-1}. \quad (42)$$

Принимая во внимание информационное неравенство (15) находим эффективность оценки \bar{x} :

$$e_{\bar{x}} = \sigma_{\sigma_w}^2 / \sigma_{\bar{x}}^2 = 1 - 1,5 / [m(m - 0,5)] \quad (43)$$

уменьшение дисперсии $\sigma_{\bar{x}}^2$ до уровня $\sigma_{\sigma_w}^2$ может быть достигнуто

за счет некоторого дополнительного числа наблюдений Δn :

$$\sigma_{a_m}^2 = m_2 / (n + \Delta n). \quad (44)$$

Подставляя (44) в (43) имеем:

$$\Delta n = n / \epsilon_{\Sigma}^2 - n \quad (45)$$

Например, для распределения I в табл. 2 ($m = 2,725$) имеем $\epsilon_{\Sigma}^2 = 0,75$ и тогда $\Delta n = 216$, т.е. учет m при обработке измерений вызывает такие изменения в точности оценок, которые вызвали бы 216 дополнительных локций ИСЗ (это 33% от всех наблюдений по данной дуге).

Развиваемые методы проиллюстрированы также на примере обработки наблюдений времени и широты на астралябии Дункона в Полтаве [6]. Метод обработки этих наблюдений состоит в одновременном распределении поправок $\Delta \varphi$, Δt , ΔZ соответственно к принятым значениям широты, времени и зенитного расстояния альмукантадата на основании системы уравнений

$$\mathcal{U}_{ij} = \Delta \varphi K_{1j} + \Delta t K_{2j} + \Delta Z K_{3j} - \delta_{ij}, \quad (46)$$

которая составляется отдельно для каждой i -той ночи по числу наблюдаемых в эту ночь звезд; \mathcal{U}_{ij} - минимизируемые остаточные погрешности; K_{1j} , K_{2j} , K_{3j} - известные коэффициенты; δ_{ij} - свободный член. Значения моментных отношений β_1 и β_2 для 8823 остатков \mathcal{U}_{ij} , полученных по наблюдениям на этом инструменте в Полтаве в 1961-1964 гг., приведены в колонке 2 табл. 3. Эти значения также свидетельствуют о близости данного эмпирического распределения к кривой Пирсона УП типа (рис. I). В колонке 2 табл. 3 даны параметры кривых Гаусса и Пирсона УП типа для исследуемого распределения, значения критерия χ^2 , числа его степеней свободы и вероятности P_{χ^2} и P_{χ^2}''' , которые убедительно подтверждают, что распределение Пирсона УП типа качественно лучше отражает действительные особенности распределения остатков \mathcal{U}_{ij} .

Основные характеристики распределения остаточных погрешностей определения времени и широты на астролябии Дашкова (Полтава, 1961-1964 гг.).

Обозначение характеристик распределения	Числовые значения характеристик	
	До исключения : среднегрупповых : поправок	После исключения : среднегрупповых : поправок
n	8823	8076
$\beta_1 \pm \sigma_{\beta_1}$	0.015 ± 0.005	0.0005 ± 0.005
$\beta_2 \pm \sigma_{\beta_2}$	4.397 ± 0.052	5.010 ± 0.054
$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$	-0.0004 ± 0.0046	-0.0015 ± 0.0041
$\sigma \pm \sigma_{\sigma}$	0.4314 ± 0.0032	0.3665 ± 0.0029
χ^2	3115.1	523.0
z	43	29
$P_{\chi^2}^I \%$	0.0000	0.0000
$\hat{a}_{VII} \pm \sigma_{\hat{a}}$	-0.0079 ± 0.0043	-0.0016 ± 0.0033
$\beta_{VII} \pm \sigma_{\beta}$	0.4165 ± 0.0038	0.3487 ± 0.0034
$m \pm \sigma_m$	3.92 ± 0.24	3.21 ± 0.16
χ^2	54.05	51.0
z	42	28
$P_{\chi^2}^{VII} \%$	10.06	0.005

Если учесть соображения, изложенные на с.15 относительно значений χ^2 для независимых случайных ошибок в реальных условиях астрономических наблюдений, то действительное значение m должно быть ближе к 3, чем к 4. Поэтому, большая, чем ожидалось, близость найденного значения m к 4, есть повод для более внимательного анализа остатков δ_{ij} .

Применение статистик типа $\mu \omega^2$ убедительно подтвердило негауссов характер остатков δ_{ij} , полученных в течение ночи. Со-

главными причинами несоответствия распределения остатков \mathcal{U}'_j гипотезе нормальности есть наличие в суточных выборках отдельных выбросов и присутствие в разностях \mathcal{U}'_j систематических ошибок, обусловленных своим происхождением каталожными ошибками положений звезд. Поэтому, окончательная обработка наблюдений на астролябии Данжона ведется после исключения внутригрупповых поправок, обусловленных ошибками положений звезд. Однако, исключение этих в общем-то небольших поправок существенно меняет m . Чтобы показать это, в третьей колонке табл.3 приведены параметры распределения значений \mathcal{U}'_j , в которых отсутствуют упомянутые среднегрупповые поправки. Сравнивая характеристики β_1 и β_2 , приведенные в колонках 2 и 3 табл.3, можно убедиться в более существенном уклонении распределения остатков \mathcal{U}'_j от закона Гаусса. Благоприятные изменения произошли с мерой асимметрии β_1 , которая существенно уменьшилась. Значение m уменьшилось до 3,21. Однако вероятности $P_{x_2}^{wv}$, найденные для значений \mathcal{U}'_j , существенно уменьшились. Одна из главных причин последнего результата - несовершенство принятого метода обработки, в котором исключаются наибольшие внутригрупповые поправки порядка 0,1"-0,2", но не исключаются аномальные систематические ошибки, обусловленные неточностью положений отдельных звезд. В диссертации предложен метод усовершенствования обработки наблюдений на астролябии Данжона, основанный на исключении асимметричности распределения остатков \mathcal{U}'_j по отдельным звездам относительно центра группы. Полученные таким способом остатки, назовем их \mathcal{U}''_j , будут иметь $m < 3,21$ и, вероятнее всего, m будет в границах $2 < m < 3$. Но даже для $m = 3,21$ эффективность $e_{\bar{x}}$, (43), весьма мала и составляет 0,8276 и в соответствии с (45), учитывая, что $n = 8076$, имеем $\Delta n = 1682$, т.е. учет показателя m при обработке данных на астролябии Данжона обуславливает также изменения в точности получаемых оценок, кото-

ры, при используемом ныне методе обработки, могли бы быть достигнуты за счет дополнительных наблюдений 1632 звезд.

Учет показателя степени m на финальной стадии обработки данных (после того, как получены J_{ij}^m), сводится к решению вида (41) системы уравнений (46), нормированной весами (26).

При математической обработке наблюдений, имеющих негауссовы ошибки, часто используется эксцесс их распределения. С ним связано вычисление ряда важных функций, например, - (4), (5), (38), по эксцессу часто определяется параметр ρ L_p -распределения. В главе показано, что оценки дисперсии эксцесса, которые астрономы обычно получают по формулам, справедливым для закона Гаусса, могут приводить к очень большим ошибкам. Например, результаты, приведенные в колонке 4 табл. 4, в которой через σ_{ϵ}^r и σ_{ϵ}^L обозначены стандартные ошибки эксцесса соответственно в предположении распределений Гаусса и L_p , различаются для ряда I в II, для ряда 2 - в 2I раз. Для рядов, ошибки которых не столь существенно уклоняются от нормального закона, как ряды I и 2, такие расхождения, хотя и не столь значительны, но все же реальны. Например, для почти гауссового ряда J F -отношение $(\sigma_{\epsilon}^L)^2 / (\sigma_{\epsilon}^r)^2 = 1,49$ и при числе степеней свободы $\nu = 2917$ такое расхождение уже значимо. Поскольку, средняя квадратичная ошибка одного наблюдения σ , как оценка точности инструмента, состоятельна только в случае гауссового распределения погрешностей, то в табл. 4 дано сравнение значений σ (колонка 5) со значениями энтропийных стандартов $\sigma_{\epsilon k}$, вычисленных по формуле (36), в которой значение K_2 для рядов I-16 найдено по методу моментов, а для рядов 17-20 - на основании использования модифицированных МП-оценок. Стандартная ошибка оценок $\sigma_{\epsilon k}$ найдена по (37), с использованием (38); для рядов I-16, а для рядов 17-20 - на основании формул, идентичных (24). В колонке (5) табл. 7. даны оценки $\sigma_{\epsilon min}$, полученные для тех распределений, для которых были известны МП-оценки параметра m распреде-

Сравнение стандартов: оценок экссесса σ_{ϵ}^r и σ_{ϵ}^L , классической σ и энтропийных $\sigma_{\beta L}$, $\sigma_{\beta VII}$ оценок точности для некоторых рядов астрономических и космических наблюдений.

Таблица 4

№	Наименование ряда	n, ε	r		L _p		Пирсона УП типа	
			±σ _ε ^r	σ	p	σ _{βL}	m	σ _{βVII}
			±σ _ε ^L	±σ _ε	±σ _p	±σ _{βL}	±σ _m	±σ _{βVII}
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	Ошибки определения широты Гринвича в 1927-1931 гг. [45]	4540 +4.14	+0.07 ±0.61	2.275 ±0.024	0.89 ±0.06	2.040 ±0.130	2.71 ±0.29	2.133 ±0.030
2.	То же, в 1932-1936 гг. [45]	5014 +6.00	+0.07 ±1.47	2.610 ±0.027	0.78 ±0.07	2.230 ±0.190	2.26 ±0.18	2.316 ±0.033
3.	Ошибки уникальных широтных определений Н.А.Попова по звезде α Per [41]	2918 +0.16	+0.09 ±0.11	0.183 ±0.002	1.86 ±0.09	0.183 ±0.005	- -	- -
4.	То же, по звезде γ UMa [41]	2880 +0.26	+0.09 ±0.12	0.183 ±0.002	1.78 ±0.08	0.183 ±0.005	- -	- -
5.	Разности ближайших определений широты, зенит-телескоп Бамберга, Миддусав [37].	6460 +0.35	+0.06 ±0.06	0.347 ±0.003	1.72 ±0.06	0.346 ±0.007	10.78 ±2.78	0.347 ±0.003
6.	То же, зенит-телескоп Куксона, Миддусав, [37]	8130 +0.52	+0.05 ±0.09	0.454 ±0.004	1.62 ±0.05	0.452 ±0.009	7.11 ±0.86	0.452 ±0.004
7.	То же, фотографическая зенитная труба, Миддусав, [37]	7159 +1.59	+0.06 ±0.20	0.338 ±0.003	1.23 ±0.05	0.327 ±0.009	3.82 ±0.25	0.330
8.	Остаточные погрешности определений времени и широты на астролябии Ланжона, Полтава, 1961-1964 гг. [6]	8823 +1.40	+0.05 ±0.17	0.431 ±0.003	1.28 ±0.04	0.353 ±0.007	3.92 ±0.24	0.422 ±0.004

9 :	2	3	4	5	6	7	8	9
9. Разности широт зенит-телескопов Цейсса и Гамберга, Полтава, 1949.9-54.9 гг. [37].	7067 +1.02	±0.06 ±0.14	0.241 ±0.002	1.40 ±0.04	0.237 ±0.006	5.06 ±0.45	0.238 ±0.002	
10. То же, зенит-телескопы Гамберга и Куксона, Маджусава, 1940-49 гг. [37]	4008 +0.91	±0.08 ±0.17	0.328 ±0.004	1.44 ±0.06	0.324 ±0.010	4.95 ±0.57	0.324 ±0.004	
11. То же, 1957-61 гг.	2127 +0.44	±0.11 ±0.16	0.263 ±0.004	1.66 ±0.09	0.262 ±0.010	7.09 ±1.60	0.262 ±0.004	
12. Ошибки наблюдений Голоусеевского каталога звезд широтных программ [43]	11691 +0.72	±0.05 ±0.09	0.454 ±0.003	1.52 ±0.04	0.450 ±0.008	-	-	
13. Ошибки наблюдений склонений абсолютным методом, Киев, ГАО, зона 0°-10°	1733 +0.59	±0.12 ±0.20	0.270 ±0.005	1.58 ±0.10	0.268 ±0.017	-	-	
14. То же, зона 10°-20° [38]	1334 +1.45	±0.13 ±0.42	0.282 ±0.005	1.27 ±0.11	0.279 ±0.011	-	-	
15. То же, зона 20°-30° [38]	1298 +0.58	±0.14 ±0.24	0.291 ±0.006	1.57 ±0.12	0.291 ±0.010	-	-	
16. То же, зона 30°-40° [38]	1057 +0.68	±0.15 ±0.27	0.324 ±0.007	1.54 ±0.13	0.324 ±0.018	-	-	
17. Разности 0-0 дальностей до ИСЗ, программа MERIT 44466.5-71.5 [5]	658 +1.44	±0.19 ±0.56	0.358 ±0.010	0.97 ±0.07	0.345 ±0.017	2.72 ±0.48	0.336 ±0.013	
18. То же, дуга 44471.5-76.5 [5]	575 +1.36	±0.20 ±0.45	0.230 ±0.007	1.64 ±0.09	0.230 ±0.009	5.74 ±1.95	0.228 ±0.008	
19. То же, дуга 44481.5-96.5 [5]	880 +3.74	±0.16 ±0.67	0.266 ±0.006	1.20 ±0.06	0.259 ±0.009	3.28 ±0.51	0.257 ±0.006	
20. То же, по всем дугам [5]	4475 +1.86	±0.07 ±0.21	0.297 ±0.003	1.45 ±0.03	0.295 ±0.004	4.19 ±0.38	0.292 ±0.004	

ления Пирсона УП типа.

Сравнивая классическую σ и энтропийную σ_3 оценки точности одного и того же ряда астрономических наблюдений можно сделать вывод о их существенном расхождении при больших отклонениях распределений ошибок от закона Гаусса (ряды I, 2, 7, 8, 17). При эксцессах распределений ошибок $\epsilon \leq 0.68$ и числе наблюдений $n \leq 1057$ классическая и энтропийная оценки точности совпадают в пределах ошибок округления. Кроме того, табл. 4 наглядно иллюстрирует нецелесообразность вычисления значений σ_3 на основе ММ-оценок параметров L_p -распределения.

Таким образом, при эксцессах $\epsilon > 0.68$ и объемах наблюдений $n > 1057$ наверняка нужно переходить к использованию энтропийных стандартов при сравнениях точности различных инструментальных методов в астрометрии.

В заключении приведены основные результаты, выводы и предложения, а в Приложении — таблицы, которые существенным образом упрощают ряд процедур практического использования распределения Пирсона УП типа при математической обработке астрономических наблюдений.

II. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ.

В диссертации проведено систематическое исследование теоретических и практических вопросов математической обработки астрономической информации при негауссовых ошибках наблюдений:

I. Показано, что распределение ошибок астрономических и космических (вообще высокоточных) наблюдений не есть Гауссовым и отличается от него существенными положительными эксцессами, изменяющимися для современных наблюдений в пределах до $+6$. Наиболее вероятное значение $\epsilon = +1,32$. Это не значит, что есть некоторый всеобщий закон ошибок с указанным ϵ . Наоборот, каждому астрономическому

кому инструменту, методу и даже месту наблюдений присущ свой эксцесс ошибок.

2. По осторожной оценке Джеффриса случайные независимые ошибки при однородных условиях наблюдений должны следовать распределению Пирсона УП типа с показателем степени $3 < m < 5$. В реальных условиях астрономических наблюдений, которые не есть постоянными, а значительно изменяется в зависимости от погоды, состояния инструмента и других причин, случайные независимые ошибки должны иметь m близким к 3 и даже того меньше [42]. Для ошибок астрономических и космических наблюдений в среднем $m = 4.8$ ($\epsilon = +1.32$). Это причина для серьезного беспокойства, поскольку, при всей тщательности подготовки, проверок и проведения наблюдений, астрометристам все еще не удается получить в остатках ошибки, соответствующие модели случайных независимых погрешностей.

3. Показано, что переход от гауссовой к негауссовой модели распределения ошибок есть не просто задача замены одной аппроксимирующей кривой на другую. Это одна из наиболее глубоких и фундаментальных задач теории оценок, задача, требующая создания такой вероятностной формы распределения ошибок, которая имеет диагональную информационную матрицу. Последнее требование существенно упрощает практическое использование негауссовых кривых и в целом обеспечивает их конкурентоспособность по отношению к распределению Гаусса.

4. Найдены границы неравенства Рао-Крамера для дисперсий оценок основных типов негауссовых вероятностных семейств, используемых в астрометрии. Подчеркнуты условия, при которых это неравенство выполняется.

5. Установлено, что из всех типов применяющихся в астрометрии аппроксимирующих семейств распределений ошибок, пока только

распределения Гаусса и Пирсона III типа (последнее в форме, предложенной Джеффрисом) имеют диагональную информационную матрицу и удовлетворяют всем фундаментальным требованиям теории оценок.

6. Систематизированы методы математического обеспечения эффективных процедур оценивания параметров распределения Пирсона III типа и L_p -распределения.

7. Показано, что негауссов характер действительных распределений ошибок означает необходимость пересмотра и обобщения фундаментальных понятий классической теории ошибок, например, таких, как вес одного наблюдения или его точность. В диссертации используется вместо понятия веса его обобщение — весовая функция распределения, вместо классической оценки точности наблюдения b' предложено использовать интропийный стандарт b_2 . При нормальном распределении ошибок весовая функция и спанка b_2 идентичны классическим понятиям веса и стандартного отклонения одного измерения.

8. Показано, что в астрометрии практически невозможно обеспечить реализацию гауссовой модели ошибок посредством проведения каких-либо метрологических мероприятий и редукиций. Если эти мероприятия эффективны, то их обычным результатом должны быть: нулевая асимметрия эмпирического распределения ошибок и их очень высокий эксцесс, соответствующий значениям параметра $2 < m < 3$ для распределения Пирсона III типа. Таким образом, естественным результатом планомерной работы по усовершенствованию методов наблюдений и редукиций будет переход к анализу данных, ошибки которых не только существенно, а весьма сильно уклоняются от закона нормального распределения.

9. Указан способ использования эффективных оценок негауссовых распределений ошибок при математической обработке астраинформации большого объема. Способ сводится к введению в классическую

схему обработки n -мерного весового вектора, компоненты которого определяются весовой функцией распределения ошибок. Порядок использования этого вектора показан на примере обработки лазерных наблюдений ИСЗ и наблюдений на астроблэбии Данжона. Предложенный метод не заменяет общепринятый метод обработки, а есть дополнением к нему, если имеет место существенное отклонение действительного распределения ошибок от закона Гаусса.

10. Показано, что при объемах наблюдений $n < 400+500$ классические методы математической обработки данных обычно есть наилучшими и только лишь при $n > 500$ начинают приобретать значение неклассические методы, основанные на учете негауссового характера распределений погрешностей. При более внимательном рассмотрении обычно оказывается, что тому или иному ряду астрономических наблюдений соответствует свое, определенное n , по достижении которого гипотеза нормальности отвергается с заданным уровнем значимости. Таким образом, нормальность ошибок, как математическая гипотеза, полезна в астрометрии лишь при определенных объемах данных и совершенна лишь применительно к техническим измерениям малой и средней точности, которые не отличаются большими объемами. Многократные наблюдения высокого качества, имеющие очень большие объемы, к сожалению, этой гипотезе не следуют.

Получен ряд выводов, имеющих самостоятельный интерес:

1. Изучено распределение остаточных уклонений одного из основных современных методов изучения вращения Земли - лазерных наблюдений ИСЗ. Установлено, что значение параметра m распределения Пирсона УП типа для этих уклонений изменяется в пределах $2,7 \leq m \leq 8,1$ и в среднем $m = 4,2$.

2. Учет значения m при обработке упомянутых наблюдений в среднем приводит к таким изменениям в точности оценок, которые при используемых методах обработки, могли бы быть достигнуты уве-

личием числа наблюдений примерно на 10% (в отдельных случаях - на 33%).

3. При обработке наблюдений на астролябии Данжона в Полтаве учет значения m для распределения остаточных погрешностей приводит к таким изменениям в точности оценок, которые, при нынешнем варианте обработки, могли бы быть достигнуты увеличением объемов наблюдений на 20,8%. Высокое значение показателя $m = 3,21$ для суммарного распределения остатков S'_i , найденных по наблюдениям на астролябии Данжона в Полтаве, есть объективным свидетельством высокого качества этих наблюдений, остаточные погрешности которых почти соответствуют модели случайных независимых ошибок.

4. Впервые учтено влияние типа закона распределения ошибок на оценки точности астрономических инструментов. В результате сравнения классического и энтропийного стандартов, вычисленные для основных опубликованных рядов ошибок астрономических и космических наблюдений, установлено, что в 13% случаев эти стандарты существенно различаются. В ряде случаев эти различия не превышают 0,5-2,0 значений стандартных отклонений для этих оценок и в 48% случаев классический и энтропийный стандарты идентичны. Рекомендовано использовать, при сравнения точности различных астрономических инструментов, энтропийные стандарты не только в силу изложенных выше причин, но и потому, что надежность энтропийного стандарта не занижена, поскольку при вычислении его дисперсии учитывается мера экспанса действительного распределения ошибок.

Работы автора, в которых изложены основные результаты исследований по теме диссертации:

Опубликованные:

1. Дзунь И.В. Об одном обобщении математической формы распределений Лапласа и Гаусса и его применении при математической обра-

ботке астрономических наблюдений// Кинематика и физика небес. тел. 1985, т.1, № 4, с. 62-66.

2. Джунь И.В. Об учете эксцессов распределения ошибок при сравнении точности различных рядов астрометрических наблюдений//

Кинематика и физика небес. тел. 1986, т. 2, № 1, с. 88-94.

3. Джунь И.В. О границах неравенства Рао-Крамера для дисперсий оценок параметров распределения Пирсона УП типа// Кинематика и физика небес. тел. 1988, т.4, № 1, с. 85-87.

4. Джунь И.В. Об одном обобщении нормального закона и его применения к анализу неравноточных астрономических наблюдений// Кинематика и физика небес. тел. 1985, т.1, № 5, с. 92-94.

5. Джунь И.В. Распределение Пирсона УП типа ошибок лазерных наблюдений ИСЗ// Кинематика и физика небес.тел. 1991, т.7, №3, с.82-91.

6. Джунь И.В., Славинская А.А. Закон распределения остаточных погрешностей определения времени и широты на астроблоки Данжона. Вращение и приливные деформации Земли. 1984, вып.16, с. 69-74.

7. Джунь И.В. О возможности количественной оценки степени постоянства условий наблюдений на зенит-телескопах// Астрометрия и астрофизика. 1984, вып. 53, с. 93-97.

8. Джунь И.В., Максимова И.И. О вариациях дисперсии случайных ошибок широтных наблюдений// Вращение и приливные деформации Земли. 1975, № 7, с. 78-81.

9. Джунь И.В. Новый класс распределений для аппроксимации эмпирических рядов ошибок астрономических наблюдений. - Доклады по материалам 23-й астрометрической конференции СССР, Л., 1987, с. 373-378.

10. Джунь И.В. Экспесс-теория математической обработки астрономических наблюдений: некоторые теоретические выводы и практические результаты. - В кн. "Изучение Земли как планеты методами геофизики, геодезии и астрономии". К.: Наукова думка, 1988, с.221-222.

11. Дзунь И.В., Славянская А.А. Обработка наблюдений на астролябии Данисона с учетом экспресса закона ошибок остаточных погрешностей. - В кн. "Изучение Земли как планеты методами геофизики, геодезии и астрономии". К.: Наукова думка, 1986, с. 222-226.
12. Дзунь И.В. Флуктуации веса индивидуальных измерений силы тяжести и способ их учета при обработке баллистических наблюдений// Повторные гравиметрические наблюдения. Вопросы теории и результаты. М.: ВНИИ геофизики, 1983, с. 43-52.
13. Дзунь И.В. Простой метод учета неоднородности индивидуальных измерений на баллистическом гравиметре. Там же, с. 53-58.
14. Дзунь И.В. Использование коэффициента экспресса для контроля за постоянством метрологической ситуации при работе с баллистическим гравиметром. Там же, с. 59-65.
15. Дзунь И.В., Золота С.П. Анализ функций распределения результатов измерений гравиметром ГВН-1 и Prospector по совокупности малых выборок. Там же, с. 96-103.
16. Дзунь И.В., Арикутов Г.П., Стусь В.Ф., Шайкина С.Н. Особенности закона распределения результатов баллистических измерений ускорения силы тяжести// Повторные гравиметрические наблюдения. М.: ВНИИ геофизики, 1984, с. 87-100.
17. Дзунь И.В. Новый способ оценки результатов измерений на абсолютном лазерном баллистическом гравиметре. Там же, с. 101-109.
18. Дзунь И.В., Кирста С.Б. Исследование функций распределения месячных серий наблюдений гравиметром G5-82 на Анжасадском геодезическом полигоне// Изв. АН Туркмении, сер. физ.-техн., химические и геологические науки, 1989, № 5, с. 68-81.
19. Дзунь И.В. Некоторые аспекты практического использования L_p - и экспресс-оценок при обработке геодезических измерений// Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1986, № 4, с. 43-48.
20. Дзунь И.В. Граница неравенства Рао-Крамера для дисперсий

- оценок параметров L_p -распределения// Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1986, № 5, с. 58 - 61.
21. Джунь И.В. Метод сравнения точности геодезических приборов, учитывающий эксцесс закона распределения вероятностей ошибок// Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1989, № 3, с. 55-61.
22. Джунь И.В. О важности проверки гипотезы нормальности при использовании распределения Стюдента в геодезии// Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1988, № 6, с. 65 - 70.
23. Джунь И.В. Об аппроксимации плотности вероятности некоторых рядов ошибок геодезических измерений распределением Пирсона УП типа// Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1989, № 6, с. 43-48.
24. Джунь И.В. Теория веса геодезического измерения, построенная на принципе правдоподобия// Геодезия, картография и аэрофотосъемка. Львов, 1988, № 47, с. 9 - 13.
25. Джунь И.В. О нормальном законе и одном его обобщении// Геодезия и картография. 1987, № 10, с. 24 - 28.
26. Джунь И.В. О выборе интервала гистограммы. Рук. деп. ОНТИ ЦНИИГАиК 12.01.87. № 233 - гд.
27. Джунь И.В., Васильева. О методике подбора функции плотности для эмпирических распределений ошибок геодезических измерений, имеющих положительный эксцесс. Рук. деп. ОНТИ ЦНИИГАиК 12.09.86. № 229-гд.
28. Джунь И.В. Как оценить точность геодезических инструментов и методов наблюдений при негауссовом распределении погрешностей. рук. деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 08.02.85, № 170-гд.
29. Джунь И.В. Формулы для вычисления дисперсии эксцесса при симметричных негауссовых распределениях ошибок геодезических измерений. Рук. деп. ОНТИ ЦНИИГАиК 08.02.85, № 163-гд.
30. Джунь И.В., Сомов В.И. О совершенствовании методики анализа и оценки точности нивелирования I класса при геодинамических ис-

- следованиях// Современные геодинические процессы и их изучение в связи с проблемой прогноза землетрясений. К., 1986, с. 74-80.
31. Джунь И.В., Сомов В.И. О функциях распределения прецессий правого и левого нивелирования прямого и обратного ходов при геодинических измерениях I класса// Современные геодинические процессы и их изучение в связи с проблемой прогноза землетрясений. К., 1987, с. 78 - 84.
32. Сомов В.И., Джунь И.В., Рахимова И.Ш., Скрыль В.А., Евсеева Е.М. Статистические методы в современной геодинике Кавказо-Донарского региона. К.: Научная думка, 1992, 204 с.

Находятся в печати:

33. Джунь И.В. Об использовании распределения Пирсона УП типа для аппроксимации распределения ошибок наблюдений в астрометрии// Измерительная техника. 1992, с.
34. Джунь И.В., Новицкий П.В. Комментарий к использованию распределения Пирсона УП типа в астрометрии// Кинематика и физика небес. тел. 1992, с.

Цитируемая литература:

35. Бессель Ф.В. Избранные геодезические произведения. Высшая геодезия и способ наименьших квадратов. Под ред. Г.В. Гагреткуни. М.: Геодезиздат, 1961 - 252 с.
36. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. Изд. третье. М.: Наука, 1983 - 474 с.
37. Джунь И.В. Анализ параллельных ленточных наблюдений, выполненных по общей программе. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. К.: Ин-т математики АН УССР, 1974. - 19 с.
38. Король А.К. Склонения ярких и слабых фундаментальных звезд в одной системе. К.: Научная думка, 1969 - 236 с.
39. Золотая С.П. Непривычные вариации силы тяжести и их геологичес-

ная информативность на циклически эксплуатируемых залежах газа.

Автореф. дис. . . . канд. геол.-минералогич. наук. М.: ИФЗ АН СССР, 1987 - 18 с.

40. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1991 - 304 с.

41. Попов Н.А. Малые периодические члены в колебаниях широты Полтавы по наблюдениям ярких зенитных звезд в 1939-1965 гг. К.: Наукова думка, 1968 - 151 с.

42. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. пер. с англ./ Хампаль Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В./ М.: Мир. 1989 - 512 с.

43. Харян А.С., Япкив Я.С. Изучение ошибок наблюдений голосевского каталога звезд широтных программ// Астрометрия и астрофизика. 1970, вып. 10, с. 34 - 43.

43. Враньян R.L. Techniques for dealing with discordant observations// Relativity in Celestial Mechanics and Astrometry. Reidel, 1986, p.229-230.

45. Jeffreys H. The Law of Error in the Greenwich Variation of Latitude Observations// Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 1939, v. 99, N.9, p. 703-709.

46. Jeffreys H. Theory of probability. Oxford: Clarendon press, 1961, 468 p.

47. Newcomb S. A generalised theory of the combination of observations so as to obtain the best result// Amer. J. Math., 1886, v. 1/4, p. 343-366.

А. Димитров

Ровно, НИИТМ, 1,9 п.л. Заказ 278, 10.08.92. Тир. 100.

469310

AB 26.004